



**République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique  
Université Saad Dahlab Blida 1**



**Institut d'Aéronautique et Des Etudes Spatiales**

# **Projet de Fin d'Étude**

**En vue de l'obtention de Diplôme : Master en Aéronautique**

**Filière : Construction et Maintenance en Aéronautique  
Spécialité : Structure Aéronautique**

## **Thème**

**Simulation du comportement mécanique des composites stratifiés en présence des singularités géométriques**

**Présentés par :**

**BOUSSALEM Salah Eddine  
KHERMANE Ahmed**

**Encadré par :**

**BENNOUD Salim**

**Année Universitaire : 2017/ 2018**



# *Remerciements*

*Nous remercions ALLAH tout-puissant, que nous a donné l'ambition et nous a dirigé sur nos chemins.*

*Nous remercions particulièrement Monsieur BENNOUD Salim notre promoteur, qui s'est toujours montré à l'écoute et être disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour le soutien, l'aide, et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer.*

*Nous remercions Monsieur LAAZAB Sebaa pour l'aide, l'encouragement et ses précieux conseils tout au long de notre travail.*

*Nos remerciements s'adressent également, aux membres du jury qui ont bien voulu accepté de relire ce travail.*

*Nous exprimons nos profondes gratitude et remerciements à tous les enseignants de l'institut de l'Aéronautique de l'Université de Blida 1.*

*Nous n'oublions pas nos parents pour leur soutien, leurs encouragements et leur patience toute au long de notre parcours scolaire et universitaire sans eux nous ne serions pas là aujourd'hui.*

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.*

# *Dédicace*

*A tous ceux qui ont de loin ou de près contribués à ce travail*

*A tous ceux qui m'ont encouragé soutenus et aidés*

*A mes parents*

*A mon frère*

*A mes sœurs*

*A mes proches*

*A mes amis*

*A mon binôme Ahmed*

*A mes professeurs*

*A mes collègues*

*A ceux qui malgré la distance ont toujours été la présent par leurs apport  
morale*

*Merci à tous et à toutes*

*Salah*

# *Dédicace*

*Ce résultat, fruit de plusieurs années d'études, d'efforts pour lesquelles le mérite revient d'abord à ceux qui m'ont donné la vie, et m'accompagné dans mon cursus. Cet espace est très limité pour exprimer ma gratitude, et mes pensées très fortes pour eux, pour avoir été toujours présents à mes côtés, et partageants les peines et les moments de joie.*

*Je dédie ce modes de travail à :*

- ❖ Mes chers parents que Dieu les protégé.*
- ❖ Mes frères et ma famille.*
- ❖ Tous mes amis et mes camarades.*
- ❖ Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

*Ahmed*

# Résumé

Dans ce travail nous présentons l'effet de la présence d'un trou circulaire sur le comportement mécanique des plaques en matériaux composites. Il s'agit de déterminer la distribution des contraintes autour et loin du trou sous les sollicitations de traction, compressions et cisaillement. L'étude est localisée sur la détermination du facteur de concentration des contraintes qui est considéré comme un inducteur de l'augmentation locale de la contrainte due à la présence du trou. Une étude paramétrique a été menée pour mettre en évidence l'effet de quelques paramètres tels que la taille du trou, l'orientation des fibres et le type de chargement sur le facteur de concentration des contraintes. Les résultats affirment que ces paramètres influents sur la valeur de facteur de concentration de contraintes et les endroits des points critiques peuvent se décaler avec le changement de l'orientation des fibres par rapport à l'axe de chargement.

**Mots-clés** : Matériau composite, Comportement des plaques trouées, Distribution des contraintes, Facteur de concentration des contraintes (FCC)

# Abstract

In this work we present the effect of the presence of circular hole on the mechanical behavior of isotropic and composite plates. This is to determine the stress distribution around and away from the hole under tensile stress, compression and shear. The study focused on determining the stress concentration factor, which is considered as an inducer of the local increase of the stress due to the presence of the hole. A parametric study was also undertaken to highlight the effect of some parameter such as the hole size, fiber orientation, and loading type on the stress concentration factor. It has been shown that these parameters influence on the value of the stress concentration factor and the location of the maximum points can decay with the change of fiber orientation with respect to the loading axis.

**Keys-words:** Composite material, Behavior of the plates with holes, Stress distribution, Stress concentration factor (SCF).

# ملخص

في هذا العمل نعرض تأثير تواجد ثقب دائري على السلوك الميكانيكي للصفائح من المواد المركبة. مما يستوجب إيجاد توزيع الإجهادات حول الثقب وعلى بعد منه، تحت تأثير مختلف الإجهادات والقوى مثل الشد والضغط. ركزنا في هذه الدراسة على إيجاد معامل تركيز الإجهادات الذي يعتبر المعامل المحدد والأساسي لارتفاع الإجهادات الموضعية. وقد أجريت الدراسة لإظهار تأثير بعض العوامل مثل حجم الثقب، اتجاه الألياف ونوع الإجهاد المطبق على هذا العامل. وقد لاحظنا أن هذه العوامل تؤثر على قيمة معامل تركيز الإجهادات ومواقع النقاط القصوى يمكن أن تتحول بتغير اتجاه الألياف فيما يتعلق بمحور التحميل.

**الكلمات المفتاحية:** المواد المركبة، سلوك الصفائح، توزيع الإجهادات، معامل تكديس الإجهادات.

# Sommaire

Remerciements	
Dédicaces	
Résumé	
Sommaire	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Introduction Générale.....	14

## CHAPITRE I : Généralités Sur Les Matériaux Composites

I.1.Introduction.....	18
I.2.Définition.....	18
I.3.Constituants des matériaux composites.....	20
I.3.1.La matrice.....	20
I.3.1.1.Les résines thermodurcissables.....	21
I.3.1.2.Les résines thermoplastiques.....	21
I.3.1.3.Les matrices naturelles.....	22
I.3.1.4.Résines époxydes.....	23
I.3.1.5.Phénoplastes ou phénols-formols.....	23
I.3.1.6.Les résines thermostables.....	23
I.3.2.Renfort.....	23
I.3.2.1.Fibres de verre.....	24
I.3.2.2.Fibres de carbone.....	25
I.3.3.L'interface.....	26
I.4.Les Procédées de fabrication.....	26
I.4.1.Les technologies dites en moule ouvert.....	26
I.4.1.1.Moulage au contact.....	26
I.4.1.2.Moulage par projection simultané.....	27
I.4.2.Les technologies dites en moule fermé.....	28
I.4.2.1.Moulage sous vide.....	28
I.4.2.2.Moulage par injection basse pression de résine (RTM).....	29
I.4.2.3.Moulage à froid.....	30
I.4.2.4. Moulage par injection de compound BMC.....	31
I.4.2.5.Moulage par compression de mat pré imprégné SMC.....	31
I.4.2.6.Moulage par enroulement filamentaire.....	32
I.5.Architecture du composite.....	33
I.5.1.Les monocouches.....	33
I.5.2.Les stratifiées.....	33

I.5.3.Les sandwichs.....	35
I.6.Conclusion.....	36

## **CHAPITRE II : Comportement Mécanique Des Plaques Stratifiées**

II.1.Introduction.....	38
II.2.L'étude du comportement des stratifiées.....	39
II.2.1.Caractéristiques du mélange renfort-matrice.....	39
II.2.1.1.Modules de Young longitudinale $E_1$ .....	41
II.2.1.2.Modules de Young transversal $E_2$ .....	43
II.2.1.3.Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ .....	44
II.2.1.4.Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ .....	45
II.2.2.Loi de Hooke généralisée.....	46
II.2.3.Différents Types des matériaux.....	47
II.2.3.1.Matériaux monocliniques.....	47
II.2.3.2.Matériaux orthotropes.....	47
II.2.3.3.Matériaux isotropes.....	49
II.2.3.4.Matériaux isotropes transverses.....	50
II.2.3.5.Matériaux quasi isotropes transverses.....	50
II.2.3.6.Matériaux quasi isotropes.....	50
II.2.4.Relation contrainte-déformation plane.....	51
II.2.5.Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres.....	51
II.3.Lois de comportement des stratifiées.....	54
II.3.1.Champ des déformations.....	55
II.3.1.1.Expression du champ des déformations.....	56
II.3.2.Expression du champ des contraintes.....	58
II.3.3.Efforts généralisés.....	59
II.3.3.1.Efforts de membrane.....	59
II.3.3.2.Efforts de flexion et torsion.....	60
II.3.4.Equation du comportement mécanique d'un stratifié.....	61
II.3.4.1.Équation constitutive.....	61
II.3.4.2.Equation constitutive des stratifiée particuliers.....	62
II.3.4.2.1.Matrice de rigidité de stratifié symétrique.....	62
II.3.4.2.2.Matrice de rigidité de stratifié équilibré.....	63
II.3.4.2.3.Matrice de rigidité de stratifié quasi-isotrope.....	63

## **CHAPITRE III : Etude Théorique Des Plaques Composites Munies D'une Singularité Géométrique**

III.1.Introduction.....	65
-------------------------	----

III.2.Comportement d'une plaque isotrope trouée.....	66
III.2.1.Champ de contraintes loin du trou.....	67
III.2.2.Forme générale des contraintes.....	67
III.2.3.Concentration de contrainte au bord du trou.....	69
III.2.4.Facteur de concentration de contrainte.....	70
III.3.Comportement d'une plaque composite trouée.....	70
III.3.1.Concentrations de contraintes autour des trous.....	70
III.3.1.1.Théorie de Green-Zarna.....	70
➤ Plaques orthotropes.....	72
➤ Plaques anisotropes.....	75
III.3.1.2.Théorie de Lekhnitskii.....	76

## **CHAPITRE IV : Analyse Numérique Du Comportement Des Plaques Composites Munies D'une Singularité Géométrique**

IV.1.Etude du comportement des plaques en matériaux composites munies de trou circulaire... 80	80
IV.1.1.Modélisation par la méthode des éléments finis.....	80
IV.1.1.1.Techniques de génération du maillage.....	81
IV.1.2.Variation du facteur de concentration des contraintes dans la direction du chargement....	85
IV.1.3.Distribution du facteur de concentration des contraintes au bord de trou.....	87
IV.1.4.Effet de chargement de cisaillement sur le facteur de concentration des contraintes.....	90
Conclusion Générale.....	94
Références Bibliographique.....	97

# Liste des Figures

<b>Figure I.1</b> : Pièces composites sur l'avion Airbus –A380.....	19
<b>Figure I.2</b> : Matériaux composites.....	20
<b>Figure I.3</b> : Différentes familles de matrices.....	21
<b>Figure I.4</b> : Principaux matériaux de renfort.....	23
<b>Figure I.5</b> : Principe de moulage au contact.....	26
<b>Figure I.6</b> : Principe de moulage par projection simultanée.....	28
<b>Figure I.7</b> : Moulage sous vide.....	29
<b>Figure I.8</b> : Principe de moulage par injection de résine.....	30
<b>Figure I.9</b> : Principe de moulage à la presse à froid.....	30
<b>Figure I.10</b> : Principe de moulage par compression.....	32
<b>Figure I.11</b> : Enroulement filamentaire.....	32
<b>Figure I.12</b> : Composite stratifié.....	34
<b>Figure I.13</b> : Exemple du plan du drapage d'un composite stratifié.....	34
<b>Figure I.14</b> : Composite sandwich.....	35
<b>Figure II.1</b> : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel.....	40
<b>Figure II.2</b> : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.....	42
<b>Figure II.3</b> : Schéma simplifié d'une traction transversale.....	43
<b>Figure II.4</b> : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal.....	45
<b>Figure II.5</b> : Représentation des trois plans de symétrie d'un matériau orthotrope.....	47
<b>Figure II.6</b> : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée.....	52
<b>Figure II.7</b> : Présentation des n couches du stratifié.....	55
<b>Figure II.8</b> : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés... 56	
<b>Figure III.1</b> : Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité $\sigma_\infty$ .....	67
<b>Figure III.2</b> : Plaque composite stratifié avec un trou circulaire.....	71
<b>Figure III.3</b> : Plaque orthotrope unidirectionnelle avec un trou circulaire.....	72
<b>Figure III.4</b> : Plaque orthotrope avec un trou circulaire chargée transversalement.....	74

<b>Figure III.5</b> : Plaque orthotrope chargée par une contrainte de cisaillement uniforme.....	74
<b>Figure III.6</b> : Plaque orthotrope unidirectionnelle avec un trou circulaire.....	75
<b>Figure IV.1</b> : Plaque avec un trou circulaire centré soumise à la sollicitation de traction.....	80
<b>Figure IV.2</b> : La plaque étudiée.....	81
<b>Figure IV.3</b> : Détails de raffinement.....	82
<b>Figure IV.4</b> : Géométrie de l'élément .....	82
<b>Figure IV.5</b> : Critères de qualité des éléments.....	83
<b>Figure IV.6</b> : Qualité des maillages recommandés.....	83
<b>Figure IV.7</b> : Modèle géométrique de l'élément finis de la plaque trouée.....	84
<b>Figure IV.8</b> : Test de traction.....	84
<b>Figure IV.9</b> : Variation du FCC pour le matériau verre/époxyde en sollicitation de traction....	85
<b>Figure IV.10</b> : Variation du FCC pour le matériau Graphite/époxy en sollicitation de traction...	86
<b>Figure IV.11</b> : Variation du FCC pour le matériau Bore/époxy en sollicitation de traction.....	86
<b>Figure IV.12</b> : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau verre/époxyde en sollicitation de traction.....	87
<b>Figure IV.13</b> : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Graphite/époxyde en sollicitation de traction.....	88
<b>Figure IV.14</b> : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Bore/époxyde en sollicitation de traction.....	88
<b>Figure IV.15</b> : Distribution du FCC pour une orientation des fibres égale à 0° pour le matériau verre/époxyde en sollicitation de traction.....	89
<b>Figure IV.16</b> : Distribution du FCC pour une orientation des fibres égale à 60° pour le matériau Graphite/époxy en sollicitation de traction.....	89
<b>Figure IV.17</b> : Distribution du FCC pour une orientation des fibres égales à 90° pour le matériau Bore/époxy en sollicitation de traction.....	90
<b>Figure IV.18</b> : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau verre/époxyde en sollicitation de cisaillement.....	91
<b>Figure IV.19</b> : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Graphite/époxy en sollicitation de cisaillement.....	91
<b>Figure IV.20</b> : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Bore/époxy en sollicitation de cisaillement.....	92

# Liste des Tableaux

<b>Tableau I.1:</b> Caractéristiques des résines thermodurcissables et des résines thermoplastique....	22
<b>Tableau I.2:</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de verre.....	24
<b>Tableau I.3:</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone .....	25
<b>Tableau IV.1:</b> Caractéristiques mécaniques et géométriques des plaques.....	85

# **Introduction Générale**

# Introduction Générale

L'usage des composites à matrice organique ne cesse de croître dans des domaines variés. En particulier, les stratifiés à fibres longues de verre et à matrice époxyde sont de plus en plus utilisés pour la réalisation de pièces de structure. Les bonnes propriétés mécaniques spécifiques de ces matériaux permettent en effet un allègement des structures, particulièrement recherché dans les constructions civiles. Les composites stratifiés verre/époxyde présentent d'excellentes propriétés mécaniques mais la présence d'un trou et sous l'action des différentes sollicitations mécaniques, la tenue des structures composites peut être considérablement réduite, la concentration des contraintes est en général le premier phénomène observé au bord du trou.

A cause de cette concentration de contraintes, des fissures peuvent apparaître très tôt dans la durée de vie de la structure et elles peuvent constituer des zones d'amorçage pour d'autres mécanismes d'endommagement plus dangereux (décohésion fibre/matrice et le délaminage). La connaissance de la concentration de contraintes est donc un préalable indispensable aux études ayant pour but d'assurer l'intégrité de la structure.

Pour différentes raisons pratiques, l'assemblage boulonné de structures composites/métalliques est un passage obligatoire dans la conception des structures. Il est alors nécessaire d'effectuer des opérations de perçage dans les composites stratifiés. C'est pourquoi il s'impose alors une bonne connaissance du comportement mécanique sous diverses sollicitations des matériaux composites stratifiés, et ceci passe par une formulation théorique des lois de comportement. Plusieurs recherches dans ce domaine, concerne l'analyse de comportement des structures composites stratifiées sous l'effet de concentration des contraintes.

Dans ce travail, notre contribution est une étude numérique pour déterminer l'effet des singularités géométriques sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées.

Notre travail est divisé en quatre chapitres :

**Le premier chapitre** a pour but de présenter une bibliographie qui comporte des généralités sur les matériaux composites ainsi que des spécificités sur les plaques stratifiées.

Ensuite. Nous sommes intéressés essentiellement dans **Le deuxième chapitre** à présenter les différentes approches proposées pour analyser des Comportement Mécanique Des Plaques Stratifiées

**Le troisième chapitre** est consacré à une étude théorique générale sur le comportement mécanique des plaques composites munies d'une singularité géométrique

**Le quatrième chapitre** : comportera une analyse numérique du comportement des plaques composites munies d'un trou au centre

Enfin une conclusion sur les principaux aspects abordés dans cette étude est présentée.

# Chapitre I

---

# CHAPITRE I :

## Généralités Sur Les Matériaux Composites

---

### I.1.Introduction :

Les matériaux composites disposent d'éventualités importantes par rapport aux matériaux traditionnels. Ils possèdent de nombreux avantages fonctionnels: légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite et liberté de forme. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Il offre une meilleure isolation thermique ou phonique, et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique [01].

Un des objectifs de ce premier chapitre est d'apporter une connaissance sur des matériaux composites par une description de leurs constitutions, de leurs propriétés et de leurs structures.

La première partie de ce chapitre est consacré à la présentation des différents constituants des matériaux composites. Dans la deuxième partie, on va présenter le procédé de fabrication de ce type de matériaux et leurs structures.

### I.2.Définition:

Un matériau composite peut être défini comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante matériaux composites des arrangements de renforts (appelés aussi charges) qui sont noyés dans une matrice.

La matrice assure la cohésion et l'orientation de la charge. Elle permet également de transmettre à la charge les sollicitations auxquelles est soumis le composite. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et souvent anisotropes. La nature de la matrice et de la charge, la forme et la proportion de charge, la qualité de l'interface et le procédé de production utilisé sont autant de paramètres qui peuvent influencer les propriétés du matériau composite.

La matrice et le renfort peuvent être métalliques, céramiques ou plastiques, ce qui permet d'envisager une multitude de combinaisons. Nous ne présenterons pas ici une revue exhaustive sur les matériaux composites mais nous nous concentrerons sur ceux dont la matrice est constituée d'un polymère.



Figure I.1 : Pièces composites sur l'avion Airbus-A380 (Source site AIRBUS).

### I.3. Constituants des matériaux composites :

Les matériaux composites sont constitués principalement :

- D'une matrice à laquelle sont ajoutés, dans certains composites des charges.
- D'un renfort.
- D'une interface.

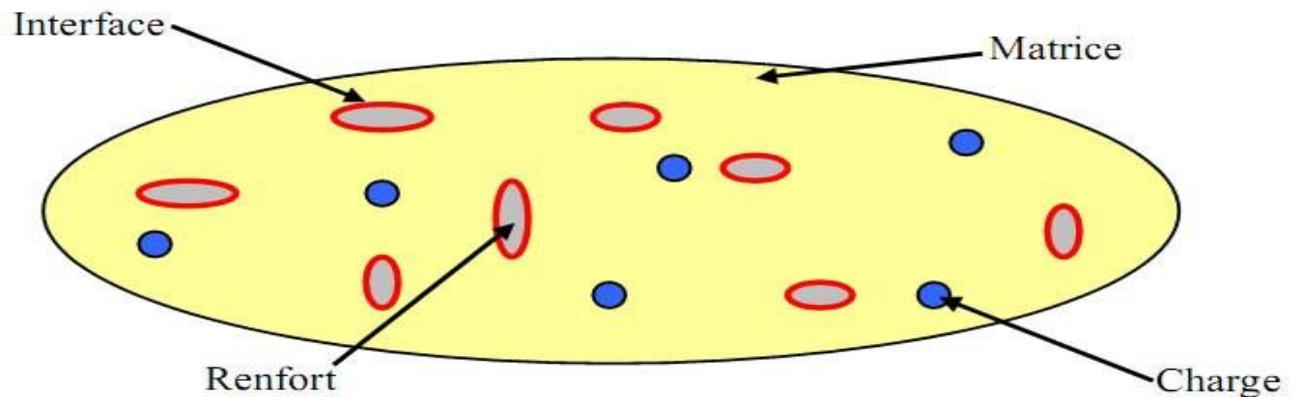
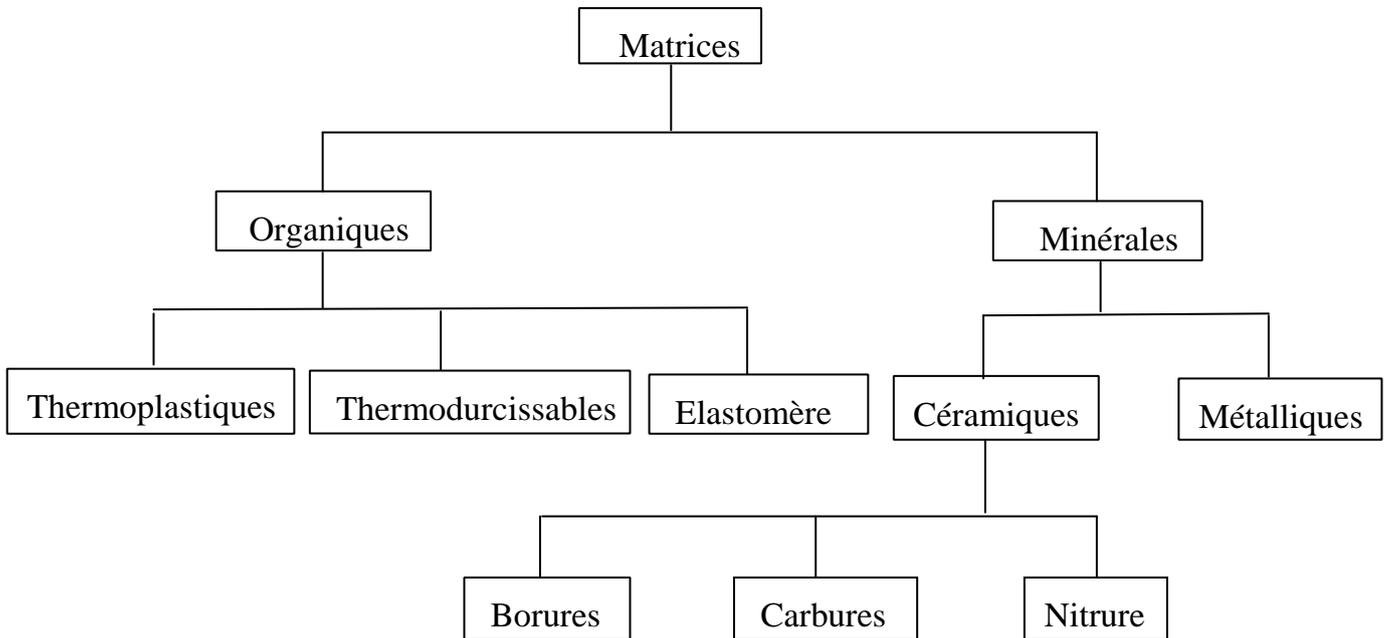


Figure I.2 : Matériaux composites [02]

#### I.3.1. La matrice :

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres. Généralement, c'est un polymère ou une résine organique.

On peut retrouver dans l'organigramme ci-dessous, les différentes familles de matrices:



**Figure I.3:** Différentes familles de matrices [03]

Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines thermodurcissables et les résines thermoplastiques.

#### **I.3.1.1. Les résines thermodurcissables:**

Les résines thermodurcissables sont des polymères, qui, après un traitement thermique ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur), se transforment en des produits essentiellement infusibles et insolubles. Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois [03].

#### **I.3.1.2. Les résines thermoplastiques:**

Les résines thermoplastiques sont des solides généralement solubles, formés de chaînes distinctes bien compactées, liées entre elles par des seules liaisons secondaires (force de van der Waals, liaisons d'hydrogène) et mis en forme par chauffage et refroidissement [04].

Une comparaison entre quelques caractéristiques des résines thermodurcissables et celles des résines thermoplastiques est présentée dans le tableau 1 :

Matrices	Thermoplastiques	Thermodurcissables
Etat de base	Solide prêt à l'emploi	Liquide visqueux à polymériser
Stockage matière de base	illimité	Réduit
Mouillabilité des renforts	difficile	Aisée
Moulage	Chauffage+refroidissement	Chauffage continu
Cycle	long	Court
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	réduite	Meilleure
Chute et déchets	recyclables	Perdus

**Tableau I.1:** Caractéristiques des résines thermodurcissables et des résines thermoplastiques [03]

### I.3.1.3. Les matrices naturelles:

Ce sont des matériaux synthétisés par les êtres vivants, animaux et microorganismes. La famille la plus importante est celle des polysaccharides comme l'amidon, la cellulose la lignine [05].

### I.3.1.4. Résines époxydes:

Le terme époxyde désigne une grande variété de pré-polymères comportant un ou plusieurs motifs époxydiques dont les principales applications concernent les matériaux composites (matrice époxyde avec des renforts en fibre de verre ou de carbone) [07].

### I.3.1.5. Phénoplastes ou phénols-formols:

Les phénoplastes sont des matières thermodurcissables obtenues par polycondensation d'un phénol et d'un aldéhyde avec élimination d'eau et formation d'un réseau tridimensionnel [10].

### I.3.1.6. Les résines thermostables:

Elles se distinguent essentiellement des autres résines par leurs performances thermiques. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace [06].

### I.3.2. Renfort:

Les renforts peuvent être d'origine minérale (verre, bore, céramique...) ou organique (carbone ou aramide). Les fibres les plus employées sont les fibres de verre, les fibres de carbone sont privilégiées.

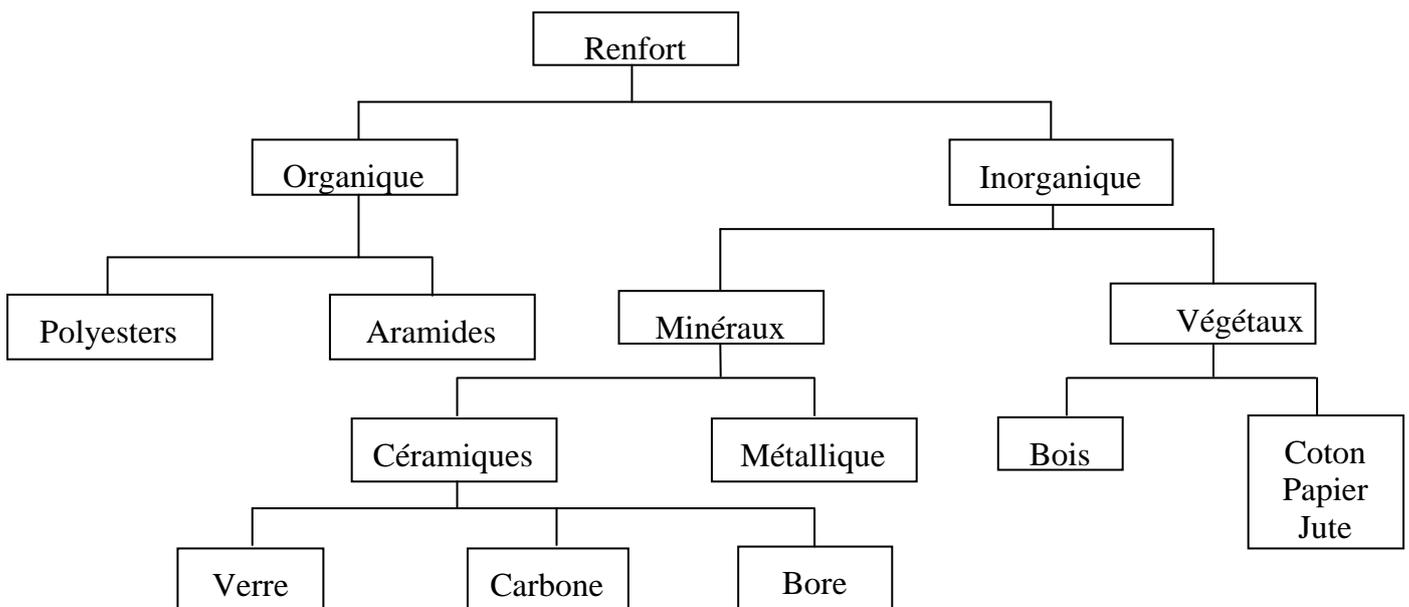


Figure I.4 : Principaux matériaux de renfort [12].

### I.3.2.1.Fibres de verre:

Elles sont en général fabriquées à partir de la fusion et de l'extrusion de silice associée à divers oxyde (alumine, alcalins, alcalinoterreux). On distingue différents types de fibre :

Verre E: le plus courant, il possède de bonnes propriétés diélectriques.

Verre D: il est destiné aux applications de construction ou électronique, en raison de ses propriétés diélectriques supérieures aux autres fibres de verre.

Verre C: il est très résistant chimiquement et est principalement utilisé pour les applications anticorrosion.

Verre R ou S: il est destiné pour les applications haute performance du fait de sa résistance en traction et son module d'élasticité supérieurs aux autres fibres de verre.

Les fibres de verre sont fragiles et sensibles à l'abrasion. Pour cette raison, elles sont revêtues d'une résine ou ensimage qui a pour fonction de protéger les fibres mais qui favorise également l'adhésion de la matrice.

Les caractéristiques mécaniques des fibres de verre décrites ci-dessus sont résumées dans le Tableau 2 :

Caractéristiques	Type E	Type D	Type C	Type R	Type S
Résistance en traction (MPa)	3500	2450	2800	4650	4650
Module en traction (GPa)	73,5	52,5	70	86,5	86,5
Allongement à la rupture (%)	4,5	4,5	4,0	5,3	5,3

**Tableau I.2 :** Caractéristiques mécaniques des fibres de verre [13]

### I.3.2.2. Fibres de carbone:

Les fibres de carbone sont pour la plupart obtenues à partir d'une fibre précurseur de type polyacrylonitrile (PAN). Ces fibres subissent une étape d'oxydation pour faire réticuler le PAN et le rendre ainsi moins « fusible » en vue des traitements thermiques ultérieurs.

Elles sont ensuite soumises à une seconde étape, qui peut être une carbonisation à 1500°C ou à une graphitisation à 3000°C. Pendant cette étape, les fibres sont maintenues sous tension afin de conserver l'orientation de la structure moléculaire.

Dans le premier cas, on obtient des fibres haute résistances ou HR, et dans le deuxième cas, on obtient des fibres haut module ou HM (Tableau 3). Il existe également des fibres de module intermédiaire, appelée inter médiate modulés ou IM. Elles peuvent ensuite passer dans un électrolyte ou subir une oxydation pour créer des groupements polaires, destinés à favoriser l'enzymage. Il existe différents traitements de surface pour les fibres de carbone.

Caractéristique	Fibres HR	Fibres HM	Fibres IM
Résistance en traction (MPa)	3400-4500	2000-2500	4800
Module en traction (GPa)	230-250	390-450	296
Allongement à la rupture (%)	1.4-1.8	0.5-0.6	2
Résistance en compression(MPa)	2200-2800	1300-1700	–

**Tableau I.3 :** Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone [09]

Les fibres de carbone continues sont disponibles sous diverses formes de mèches de 3000 à 24000 filaments, de fibres coupées, de rubans ou bien encore de tissus, qu'ils soient uni ou multidirectionnels. Elles présentent des caractéristiques spécifiques élevées comme leur haut module en traction. Elles ont également un coefficient de dilatation très

faible, une conductivité thermique élevée. En revanche, certains inconvénients demeurent comme leur résistance limitée aux chocs, une faible résistance à l'abrasion.

### I.3.3.L'interface:

L'utilisation d'une couche interface permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Qui se forme spontanément lorsque deux phases sont mises en présence l'un de l'autre au moment de l'élaboration du matériau et qui se maintient entre ces deux phases pendant toute la vie du matériau, l'interface n'est pas simplement une simple discontinuité entre les deux phases du matériau hétérogène ou leur juxtaposition [12].

### I.4.Les Procédées de fabrication: [11]

Les techniques de fabrication jouent un rôle considérable dans les composites car chacune des opérations influe de manière irréversible sur le produit finale.

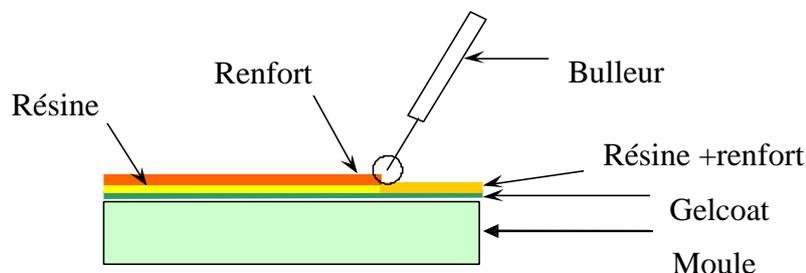
De nombreuses méthodes de fabrication ont été développées pour répondre aux besoins, et leurs choix dépendent surtout des caractéristiques mécaniques dérivées et de la géométrie du produit. On peut citer :

#### I.4.1.Les technologies dites en moule ouvert:

##### I.41.1.Moulage au contact:

Le principe est de procéder manuellement à la réalisation des pièces à partir des résines thermodurcissables, à température ambiante et sans pression.

Les renforts sont déposés sur le moule et imprégnés de résine liquide, accélérée et catalysée. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée et détournée.



**Figure I.5** : principe de moulage au contact.

On utilise cette technologie de moulage dans le cas de fabrication des petites séries des pièces: de 1 à 1000 pièces/an, Pièces de très grandes dimensions et pour des Revêtements sur supports divers.

Ce type de type de moulage représente des avantages tel que :

- Très larges possibilités de forme.
- Pas de limite dimensionnelle.
- Une surface lisse gelcoatée (aspect, tenue à la corrosion).
- Propriétés mécaniques moyennes à bonnes.
- Investissements spécifiques très faibles.
- Moule simples, peu onéreux, rapide à réaliser en interne.

Mais aussi il se limite à :

- Une seule face lisse.
- Nécessité de finition (détourage, perçage, etc.).
- Qualité tributaire de la main d'œuvre.
- Faible cadence de production par moule.
- Espace de travail important.
- Conditions de travail médiocres.

#### **I.4.1.2.Moulage par projection simultané :**

Les matières premières sont mises en œuvre à l'aide d'une machine dite "de projection" comprenant :

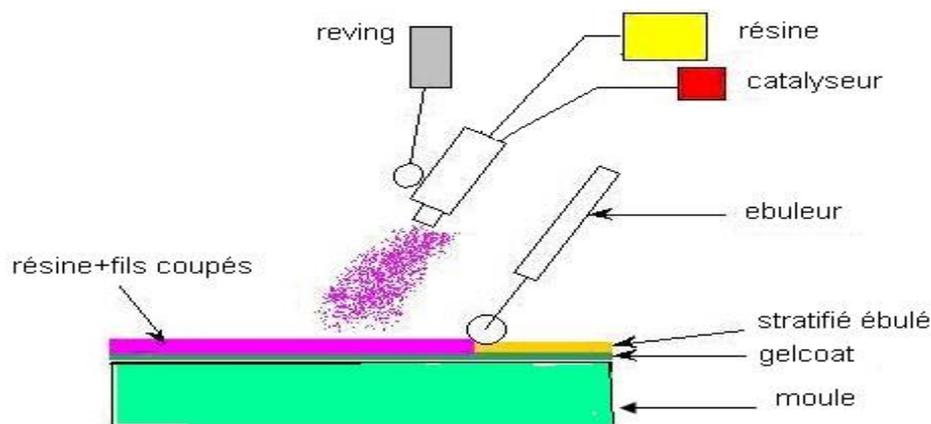
- Un dispositif de coupe - projection du renfort (roving).
- Un ou deux pistolets projetant simultanément la résine.

Les fils coupés et la résine sont projetés sur la surface du moule puis compactés et éboulés à l'aide de rouleaux et d'ébulleurs. La résine pré accélérée est catalysée en continu lors de sa projection.

Parmi les avantages associés à ce type de moulage on retrouve :

- Très larges possibilités de forme et dimensions
- Travail simplifié, suppression de la mise en forme obtenue directement par la projection
- Investissements très modérés
- Moule simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne.

En plus des limites rencontrées par le moulage au contact, celui-ci se limite à des Propriétés mécaniques moyennes.



**Figure I.6** : principe de moulage par projection simultanée.

## I.4.2. Les technologies dites en moule fermé :

### I.4.2.1. Moulage sous vide :

Le moulage sous vide s'effectue en utilisant un moule ouvert sur lequel on dispose les couches de renfort imprégné.

Une fois que le renfort (mat, tissu, préforme) est placé à l'intérieur du moule et la résine catalysée est versée sur ce dernier, une feuille de plastique souple vient couvrir le tout hermétiquement (pose d'un joint d'étanchéité sur le périmètre de la pièce). On fait le vide sous la feuille de plastique des bulles d'air, fluage de l'excédent de résine qui est

absorbé par un tissu de pompage. L'ensemble est ensuite soumis à polymérisation en étuve ou en autoclave.

La résine peut également être injectée par l'aspiration consécutive au vide.

On utilise ce type de moulage dans le cas d'une production en petites séries de pièces nécessitant deux faces lisses.

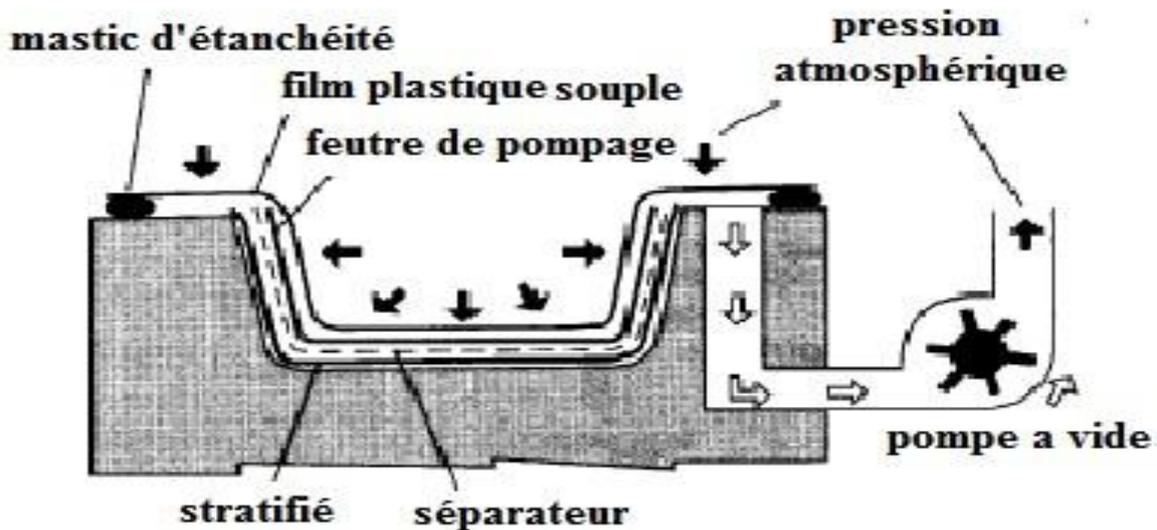


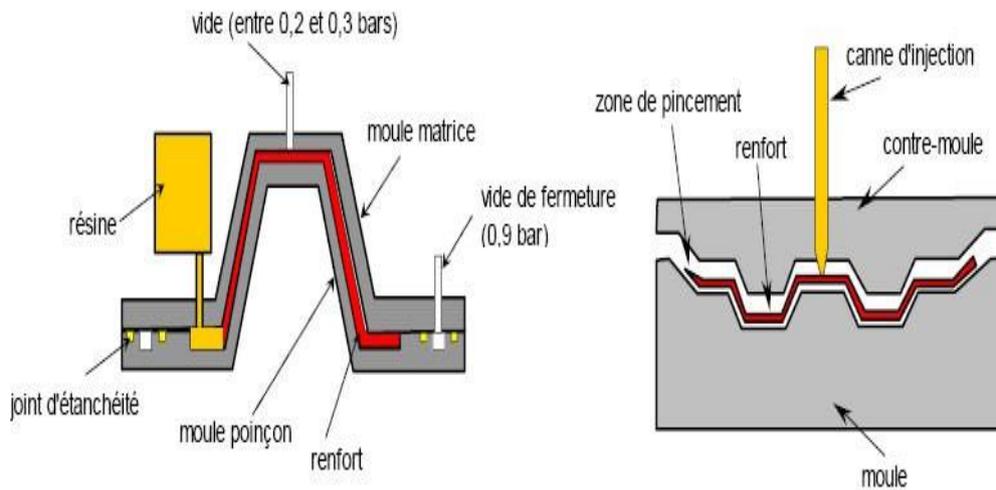
Figure I.7 : Moulage sous vide.

#### I.4.2.2. Moulage par injection basse pression de résine (RTM) :

Le moulage par injection de résine liquide RTM (Résine Transfert Molding) s'effectue entre moule et contre-moule rigides.

Le renfort (mats, préforme, éventuellement tissus) est mis en place dans le moule, une fois celui-ci solidement fermé, la résine, accélérée et catalysée, est injectée sous faible pression (1.5 à 4 bars) à travers le renfort jusqu'au remplissage complet de l'empreinte.

La pression de moulage est faible. Le procédé convient pour des cadences jusqu'à 30 pièces par jour.



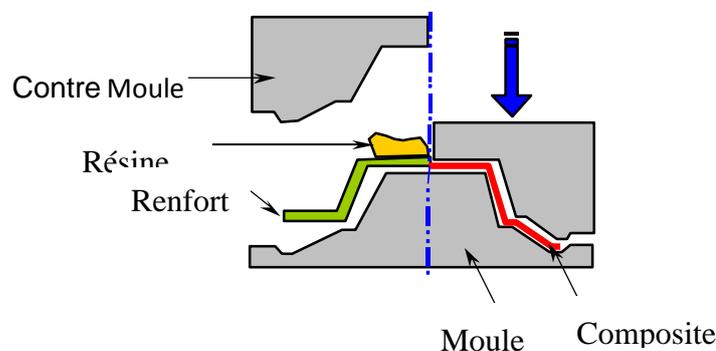
**Figure I.8** : principe de moulage par injection de résine.

#### I.4.2.3. Moulage à froid :

C'est un moulage à l'aide d'une presse à compression entre moule et contre moule rigides, initialement sans apport thermique extérieur.

Le renfort (mat) est posé sur la partie inférieure du moule, la résine dotée d'un système catalytique très réactif, est tout de suite versée en vrac.

La fermeture du moule sous pression (2 à 4 bars) entraîne la répartition de la résine dans l'empreinte et l'imprégnation du renfort. Le durcissement de la résine est accéléré progressivement par l'élévation de température du moule, car la réaction exothermique. Ce qui permet un démoulage rapide.



**Figure I.9** : principe de moulage à la presse à froid.

**I.4.2.4. Moulage par injection de compound BMC :**

Le compound (Bulk Molding Compound), préparé dans un malaxeur, est une masse à mouler constituée de résine, de charges et d'adjuvants divers, renforcée par des fils de verre coupés.

Le moulage se fait à chaud (130 - 150 °C) par injection (principalement) entre moule et contre moule en acier usiné.

La pression (50 à 100 bars) de fermeture du moule entraîne le fluage de la matière préalablement dosée et le remplissage de l'empreinte.

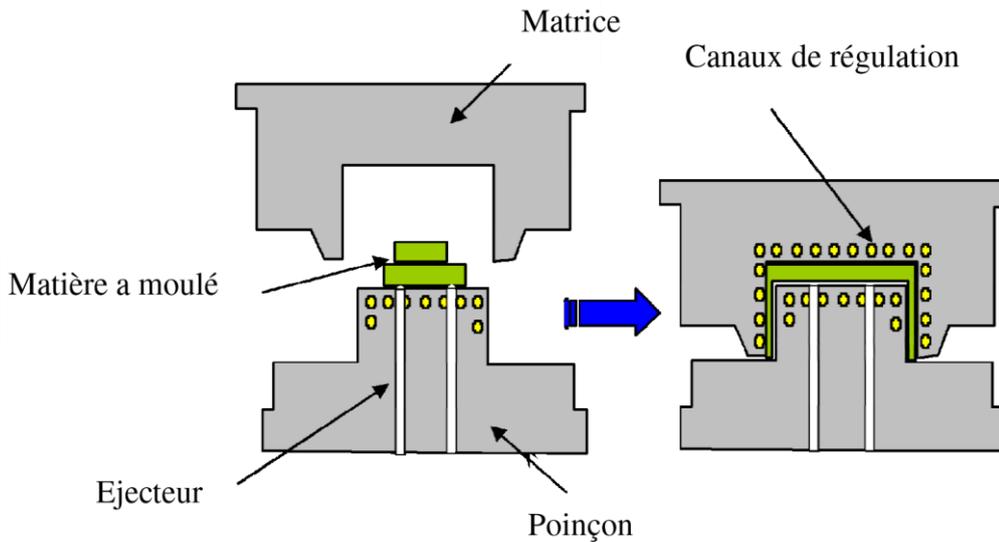
Le temps de durcissement très court permet un démoulage rapide.

On utilise ce type de moulage pour une production en grandes séries, et pour des pièces de taille petite et moyenne, plus ou moins épaisses.

**I.4.2.5. Moulage par compression de mat pré imprégné SMC :**

Le mat pré imprégné (Sheet Molding Compound) est une nappe de fils coupés ou continus, imprégnée par un mélange de résine polyester, de charges et d'adjuvants spécifiques divers.

Découpé en flans de masse et dimensions déterminées, le mat pré imprégné est moulé à chaud (140 à 160 °C) par compression entre un moule et un contre moule en acier usiné.

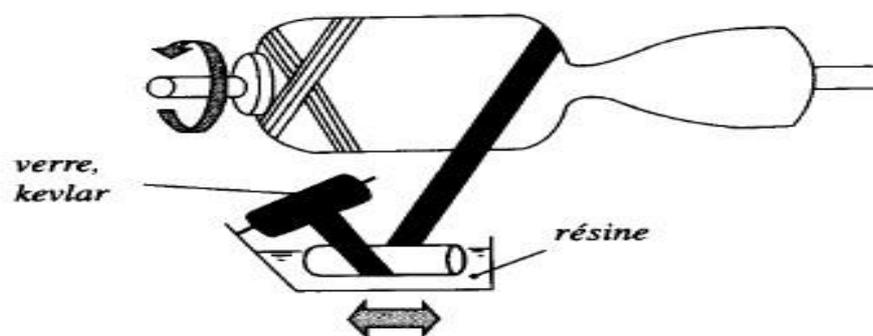


**Figure I.10 :** principe de moulage par compression.

#### I.4.2.6. Moulage par enroulement filamentaire :

Suivant le schéma ci-après, il peut être intégré dans une chaîne de fabrication en continu, et ainsi autoriser l'obtention de tubes de grande longueur. Application aux enveloppes de fusées, de torpilles, de conteneurs etc.

Pour des pièces de révolution à méridienne quelconque, l'enroulement est réalisé sur un mandrin de forme démontable, puis polymérisé en étuve ou en autoclave. Ce procédé est utilisé pour la fabrication de pièces devant résister aux pressions internes, (réservoirs, corps de propulseur etc.)



**Figure I.11 :** Enroulement filamentaire.

## **I.5.Architecture du composite: [08]**

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

- Les monocouches
- Les stratifiées
- Les sandwiches

### **I.5.1.Les monocouches :**

Le composite monocouche (couche élémentaire ou strate) correspond à l'unité élémentaire d'épaisseur, elle est constituée d'un ou plusieurs plis identiques (tissé, UD, mats,...) assemblés sans aucune orientation. Un pli est un semi produit de composites (fibres + matrice) présenté sous forme quasi-bidimensionnelle, feuille d'épaisseur faible ( $\approx 0.125$  mm). On distingue, le pli UD (Le renfort est à structure UD), le pli tissé (Le renfort est à structure orienté) et le pli mat (Le renfort est à structure aléatoire).

La superposition de la monocouche dans l'ordre du plan de drapage va constituer le stratifié (Figure I. 12).

### **I.5.2.Les stratifiées:**

Le composite stratifié ou multicouches est un ensemble de couches empilées et orientées suivant un ordre de drapage défini et rendues solidaires par l'opération de polymérisation (Figure I.12). Le drapage c'est l'orientation des plis par rapport à un référentiel donné. Il définit les propriétés mécaniques, électromagnétiques et thermiques globales du matériau composite.

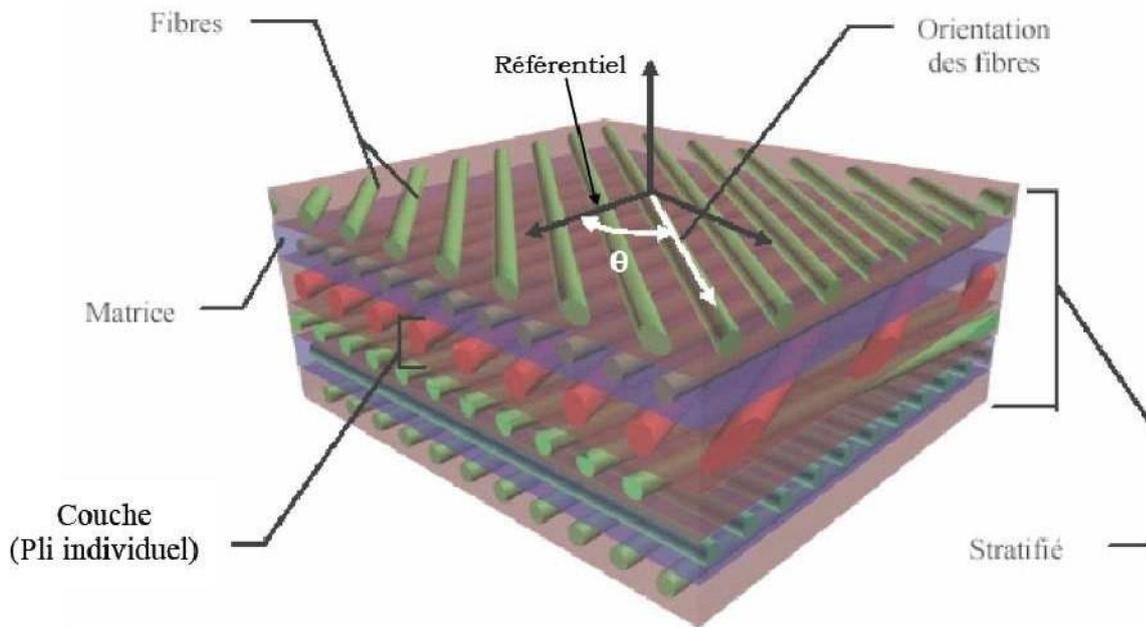


Figure I.12: Composite stratifié.

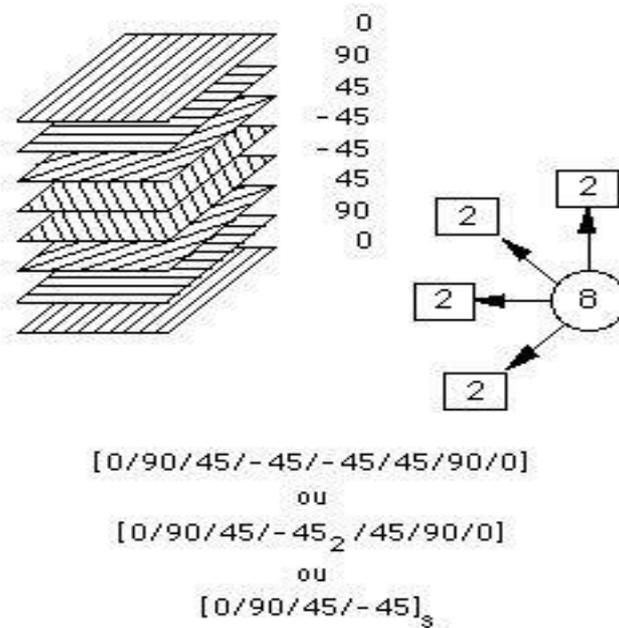


Figure I.13: Exemple du plan du drapage d'un composite stratifié.

Les stratifiés peuvent être de trois types :

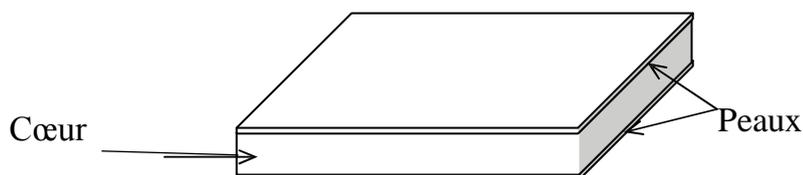
- 1) Equilibrés: le stratifié contient autant de couches orientées suivant la direction  $+ \theta$  que de couches suivant la direction  $- \theta$ .
- 2) symétriques: les couches du stratifié sont disposées symétriquement par rapport à un plan moyen (miroir).
- 3) orthogonaux: le stratifié comporte autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .

Lorsque la symétrie miroir est réalisée, elle entraîne la symétrie des contraintes et empêche ainsi l'apparition des déformations d'ensembles de la pièce (voilement, gauchissement).

L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

### I.5.3. Les sandwiches :

Les sandwiches sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur renfermant un cœur (âme) de forte épaisseur et de faible résistance (Figure I.14). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une bonne résistance à la flexion et est un excellent isolant thermique.



**Figure I.14 :** Composite sandwich.

**I.6. Conclusion :**

Le choix d'une association entre un renfort et une matrice est très délicat. En effet, un composite ne peut remplir pleinement sa fonction mécanique que si les charges appliquées au matériau peuvent être transmises de la matrice à la fibre. En raison de cette interaction, un matériau composite présente une certaine tolérance à l'endommagement.

Plusieurs mécanismes interviennent et contribuent au travail de rupture : fissuration matricielle, décohésion inter faciale. Ces mécanismes qui mettent en jeu les propriétés physiques et mécaniques de chaque constituant soulignent dès à présent le rôle déterminant joué par la liaison fibre/matrice.

# Chapitre II

---

## CHAPITRE II :

# Comportement Mécanique Des Plaques Stratifiées

---

### II.1.Introduction :

L'utilisation des plaques stratifiées composites a connu un grand développement durant ces dernières années, surtout dans les domaines civils là où l'on recherche à améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.). Une plaque composite utilisée comme élément structural est souvent soumise à différents types de sollicitation telle que traction ou compression. Nous allons présenter ici une bibliographie générale non détaillée concernant l'étude du comportement des plaques isotropes et composites.

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles, dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions (longueur, largeur). Les propriétés d'une plaque dépendent, en grande partie, de son épaisseur en fonction de ses autres dimensions. Nous distinguerons deux sortes de plaques :

- Les plaques minces,
- Les plaques épaisses.

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant la théorie des plaques minces, ou la théorie classique des stratifiés pour exprimer les résultantes  $N_{ij}$  et les moments  $M_{ij}$  en fonction des déplacements de la plaque, lorsque cette dernière est constituée d'un matériau composite stratifié.

Premièrement, nous allons présenter dans le repère global **la loi de comportement d'un pli composite** afin de relier le champ des contraintes au champ des déformations. Ensuite, **les résultantes et les moments** seront exprimés en tenant compte du comportement mécanique des différents plis composites.

## II.2.L'étude du comportement des stratifiées :

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu homogène équivalent anisotrope. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases:

- L'étude du comportement mécanique de chaque pli,
- L'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par le comportement du stratifiées [15].

Historiquement, L'étude du comportement des plaques stratifiées composites est basée sur la théorie des stratifiées. Cette théorie utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques qui sont, dans un schéma de premiers degrés, associées aux noms de Reissner/Mindlin et de Kirchhoff-Love. La théorie de Kirchhoff-Love est historiquement l'une des premières approches bidimensionnelles de la flexion des plaques élastiques. Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse.

### II.2.1.Caractéristiques du mélange renfort-matrice:

Les principaux types de matériaux composites utilisés pour la fabrication de systèmes structuraux sont ceux formés par une phase discontinue, appelée renfort, insérée dans une phase solide, appelée matrice. La distribution et l'interaction, physique et chimique, entre les deux phases donne les propriétés mécaniques finales du matériau composite.

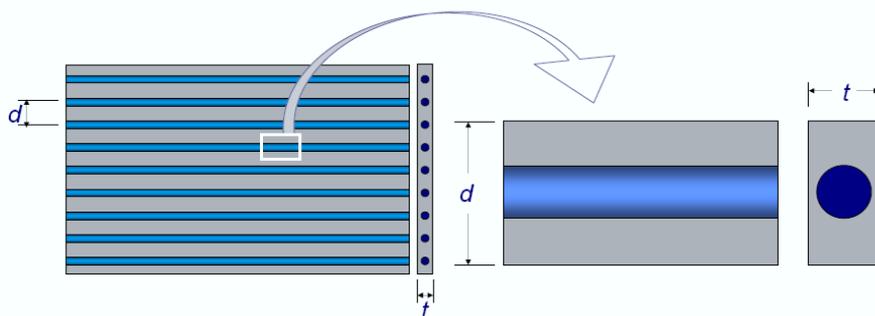
En général, les composites structuraux sont présentés sous la forme d'un empilage de plusieurs plis, chacun présentant des fibres orientées selon une direction préférentielle. L'ensemble matrice-fibres forme le pli, l'ensemble de plis orientées forme le stratifié [18].

Les propriétés mécaniques moyennes de chaque pli sont obtenues par la règle de mélange. Selon celle-ci, certaines propriétés du pli, telles que ses modules d'élasticité et sa densité, sont obtenus grâce à l'utilisation de la fraction volumique de fibres et de la matrice [14] [19].

Pour cela, La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de celles de ses composants. Dans la plupart des cas, ces calculs se réduisent uniquement au calcul du **module d'Young**. Il existe divers modèles d'homogénéisations pour l'obtenir.

D'après Paolo [17], Soit un matériau composite de repère d'orthotrope (1, 2, 3), l'axe 1 ou l'axe **longitudinal** étant disposé conventionnellement selon la direction des fibres, Les directions normales aux fibres dans le plan de la couche sont appelées directions **transversales**, Le composite est considéré comme étant **isotrope transverse** c'est-à-dire qu'il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse est repéré par les deux directions équivalentes 2 et 3.

Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des **fibres unidirectionnelles** uniformément distribuées dans le corps de la couche (Voir figure II.1). Soit une cellule élémentaire de **fraction volumique**  $V = 1$  constituée de fibres et de matrice avec :



**Figure II.1** : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [1]

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} : \text{Fraction volumique de matrice}$$

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} : \text{Fraction volumique de fibre}$$

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (2.1)$$

Nous nous proposons, par le biais du volume élémentaire représentatif introduit auparavant, de trouver les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'une couche à renfort unidirectionnel uniformément reparti.

Les hypothèses de calcul sont :

- matrice **isotrope**, de module d'Young  $E_m$  et coefficient de Poisson  $\nu_m$  ;
- fibres **isotropes**, de module d'Young  $E_f$  et coefficient de Poisson  $\nu_f$  ;
- la fraction volumique des fibres est connue  $V_f$  ;
- le comportement est **élastique linéaire** ;
- il y a une **adhésion parfaite** entre les fibres et la matrice.

L'objectif est de déterminer les constantes techniques homogénéisées de la couche ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$ ); à cause de la disposition régulière des fibres, cette dernière a un **comportement macroscopique orthotrope**.

### II .2.1.1 Modules de Young longitudinale $E_1$ :

Le volume élémentaire représentatif est soumis à un état de sollicitation dans lequel seulement  $\sigma_1$  n'est pas nulle, voir la (figure II.2).

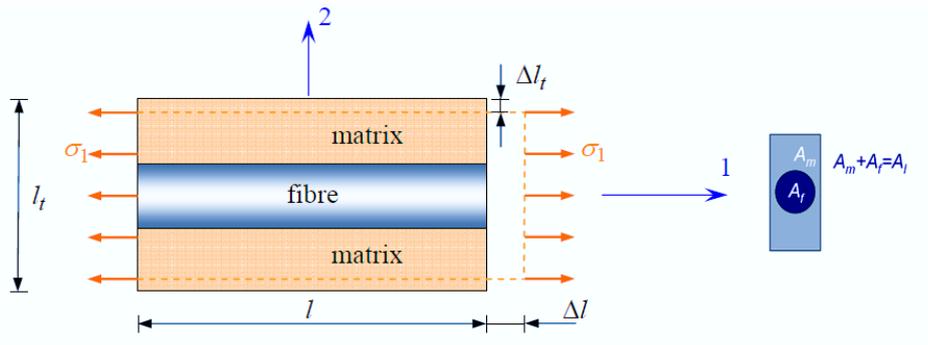


Figure II.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale. [39]

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l \quad (2.2)$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même partout (en particulier, les sections droites restent planes) :

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.3)$$

Où l'indice (m) indique une quantité relative à la matrice, (f) à la fibre et (l) à la couche.

$$\sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m$$

L'équilibre impose la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_1^l A &= \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ &= E_1^f \varepsilon_1^l A_f + E_1^m \varepsilon_1^l A_m = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La loi de comportement de l'unidirectionnelle s'écrit :

$$\sigma_1^l A = E_1 \varepsilon_1^l A$$

Donc :

$$E_1 \varepsilon_1^l A = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \Rightarrow E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A}$$

Avec :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{A_f}{A} \quad \text{et} \quad V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A}$$

Donc l'expression du module de Young longitudinal est :

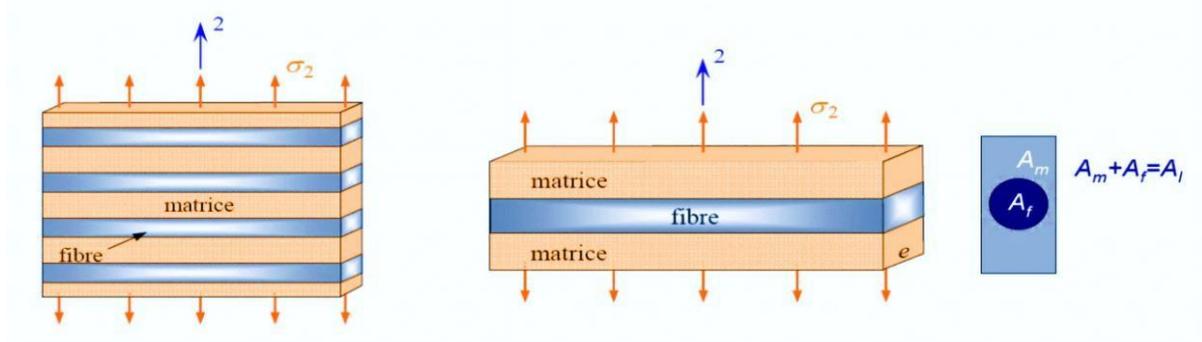
$$E_1^l = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (2.5)$$

Relation très bien vérifiée dans la direction des fibres. Cette dernière est la célèbre **loi des mélanges**, qui donne la valeur homogénéisée du module d'Young en direction longitudinale (celle des fibres).  $E_1$  dépend linéairement de  $V_f$ , à savoir de la quantité de fibres présentes.

Le modèle utilisé pour trouver  $E_1$  est un modèle de type **parallèle**: matrice et fibres travaillent en parallèle, pour le champ de contraintes appliqué.

### II.2.1.2. Modules de Young transversal $E_2$ :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seulement  $\sigma_2$  n'est pas nulle, voir (la figure II.3).



**Figure II.3** : Schéma simplifié d'une traction transversale. [39]

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite.

$$\sigma_2^l = \sigma_2^m = \sigma_2^f \quad (2.6)$$

La compatibilité de la déformation implique :

$$V\varepsilon_2^l = \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f)\varepsilon_2^m$$

$$\Rightarrow V \frac{\sigma_2^l}{E_2} = V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1 - V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m}$$

Donc :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1 - V_f)}{E_2^m}$$

L'expression du module de Young transversal est :

$$E_2 = \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^m + (1 - V_f) E_2^f} \quad (2.7)$$

La dépendance du module  $E_2$  de  $V_f$  n'est plus linéaire; en outre, les fibres ne sont pas un **renfort efficace** pour la rigidité transversale. Le modèle utilisé est un modèle de type **série**.

### II2.1.3. Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ :

Comme pour  $E_1$ , on applique un état de contrainte où seulement  $\sigma_1$  n'est pas nulle.

Par définition :

$$\nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l} \quad (2.8)$$

D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que :

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.9)$$

Comme  $E_2$  pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation :

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f)\varepsilon_2^m \\
 \Rightarrow \varepsilon_2^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \\
 \Rightarrow \nu_{12} \varepsilon_1^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f)\nu_m \varepsilon_1^m
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + (1 - V_f)\nu_m \tag{2.10}$$

### II.2.1.4. Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule  $\tau$  n'est pas nulle, voir la figure II.4, où on a mis en évidence même la déformation correspondante

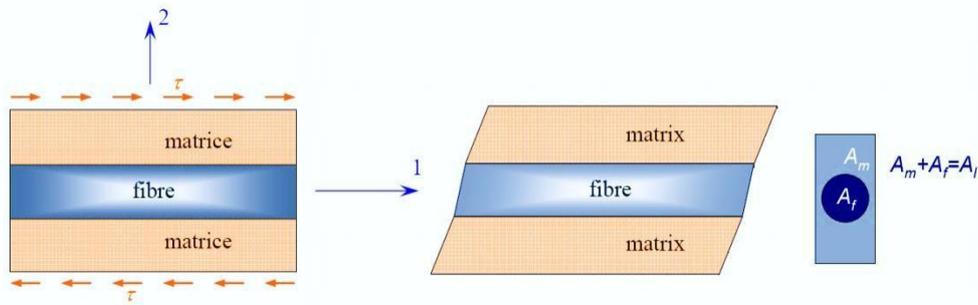


Figure II.4 : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal. [39]

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^l = \tau^m = \tau^f \tag{2.11}$$

Tandis que par le lien élastique on a :

$$\tau^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \tau^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \tau^l = G_{12} \varepsilon_6^l \tag{2.12}$$

La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_6^l &= \varepsilon_6^f V_f + (1 - V_f)\varepsilon_6^m \quad \Rightarrow \frac{\tau^l}{G_{12}} = \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1 - V_f) \\
 \Rightarrow G_{12} &= \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f} \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

### II.2.2.Loi de Hooke généralisée :

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme suivante [21] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

Ou sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Dans cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, la matrice de rigidité  $\mathbf{C}$  est symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants. La matrice de flexibilité ou de souplesse  $S_{ij}$ , peut être écrite sous la forme inverse, suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Avec :

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} \quad (2.18)$$

Un matériau dépendant de 21 constantes indépendantes est dit un matériau anisotropie. C'est un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie.

### II.2.3. Différents Types des matériaux :

#### II.2.3.1. Matériaux monocliniques :

Si le matériau a un plan de symétrie, monoclinique, quelques constantes sont nulles et le comportement peut être décrit avec 13 constantes indépendantes [17] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

#### II.2.3.2. Matériaux orthotropes :

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque alors que la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels [22].

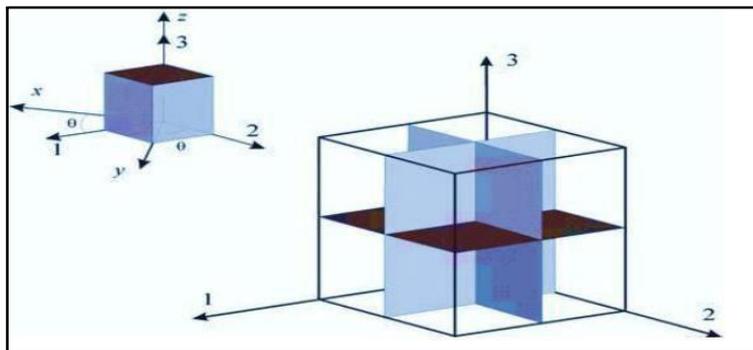


Figure II.5 : Représentation des trois plans de symétrie d'un matériau orthotrope. [22]

Les coefficients indépendants se réduit à 9. La loi de comportement s'écrit alors:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Ou encore :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

En introduisant les caractéristiques élastiques :

$E_1, E_2, E_3$ : Modules d'élasticité.

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  : Modules de cisaillement.

$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  : coefficients de contraction.

La relation (2.21) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{21}} & \frac{-\nu_{31}}{E_{31}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{12}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{32}}{E_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_{13}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{23}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La symétrie de la matrice de souplesse [S] impose les relations suivantes :

- $\frac{V_{21}}{E_2} = \frac{V_{12}}{E_1}$  ,
- $\frac{V_{31}}{E_3} = \frac{V_{13}}{E_1}$  ,
- $\frac{V_{33}}{E_2} = \frac{V_{32}}{E_3}$  ,

**II.2.3.3. Matériaux isotropes :**

Dans ce cas toutes les directions et en tout point du matériau ont les mêmes propriétés mécaniques. Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 2 coefficients et la loi de comportement s'écrit [14] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

En termes de constantes techniques l'inverse de la relation (2.23) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ;$$

**II.2.3.4. Matériaux isotropes transverses :**

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie. Les propriétés suivant l'axe 2 et 3 sont identiques, donc [23] :

- $C_{22} = C_{33}$
- $C_{12} = C_{13}$
- $C_{55} = C_{66}$
- $C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2}$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5.

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{33}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

**II.2.3.5. Matériaux quasi isotropes transverses :**

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 6 coefficients, et la loi de comportement s'écrit [23] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sym & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

**II.2.3.6 Matériaux quasi isotropes :**

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 3 coefficients, la loi de comportement s'écrit [14] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ sym & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

**II.2.4.Relation contrainte-déformation plane :**

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de **contrainte plane**, La relation contrainte déformation peut être donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Les coefficients  $Q_{ij}$  sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.29)$$

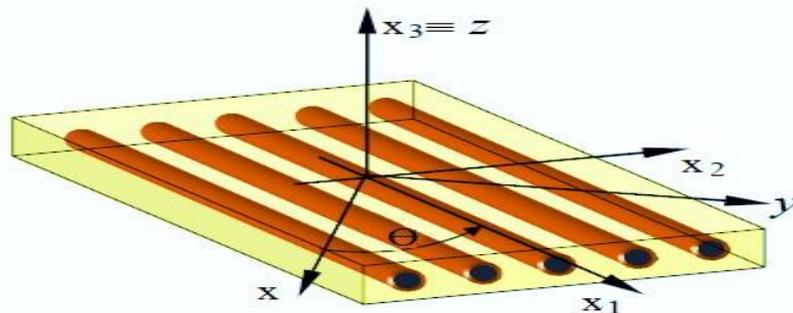
Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ( $E_1, E_2, \nu_{12}$  et  $G_{12}$ ), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement pur.

**II.2.5.Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :**

Selon Berthelot [14], les stratifié sont élaborés par l'empilement de couche successive dont la direction des fibres et variable d'une couche a l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre **un système d'axe de référence** pour l'ensemble du stratifiée, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local  $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$ .

En règle générale, l'axe  $(x_1)$  est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe  $(x_2)$  est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe  $(x_3)$  est perpendiculaire au plan du pli (voir figure II.7). Il est question de caractériser les propriétés élastique de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence  $(x, y, z)$  du stratifié, la direction des fibres fait un angle  $(\theta)$  avec la direction  $x$ .



**Figure II.6 :** Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée. [06]

Les matrices d'élasticité  $\bar{C}$  et de souplesse  $\bar{S}$  dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse  $C$  et  $S$  les relations de **changement de base** Suivantes:

$$[\bar{C}] = [T]^{-1} [C] [T] \quad (2.30)$$

$$\text{Et} \quad [\bar{S}] = [T]^{-1} [S] [T] \quad (2.31)$$

Avec  $T$  est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Avec  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$

$$\text{Et } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

De même pour les déformations, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère (x, y, z) sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Il faut toutefois noter que  $\bar{Q}_{16}$  et  $\bar{Q}_{26}$  ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales.

### II.3. Lois de comportement des stratifiées :

Nous allons donner le schéma de comportement mécanique des plaques stratifiées, pour simplifier au mieux l'analyse de ses structures. Cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, y). La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques. L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z), sous la forme de polynômes en z, généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) [14].

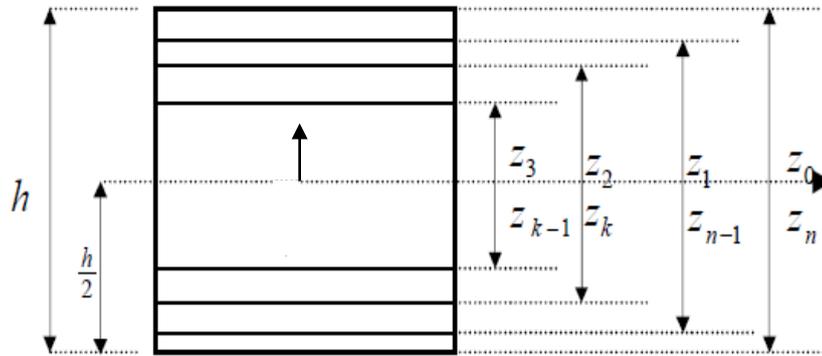


Figure II.7 : présentation des n couches du stratifié

II.4.1.Champ des déformations :

Une première hypothèse consiste à considérer un stratifié comme un matériau composé d'une superposition de couches parfaitement liées (**Figure II.7**) et en négliger l'effet de cisaillement transverse, et les déformations en cisaillement transverse  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  qui sont donc nulles. Les déformations et les déplacements et les rotations sont petits. Le matériau présent donc un comportement élastique et les rotations dans le plan moyen sont définis par (**Figure II.8**) :

$$\begin{cases} \theta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (2.37)$$

Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.38)$$

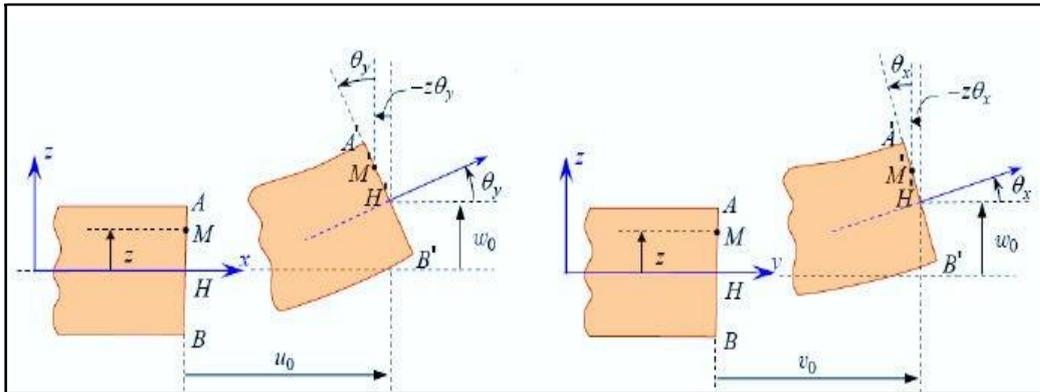
Avec :

$$\begin{cases} u = u_0 - z\theta_y \\ v = v_0 - z\theta_x \end{cases}$$

$u_0$  et  $v_0$ : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne.

$w_0$  : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

La déformée de la normale au plan moyen (O, x, y) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen. L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur **la Figure II.8** [20].



**Figure II.8:**Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés [14].

#### II.4.1.1.Expression du champ des déformations :

Le champ des déformations s'écrit, en tenant compte des expressions (2.38) [20] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Ce champ des déformations en un point M de coordonnées (x, y, z) est la superposition des déformations en membrane et les des déformations en flexion et torsion (courbure).

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \tag{2.40}$$

Avec  $\varepsilon_m(M)$  les déformations en membrane s'expriment exclusivement en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) dans le plan ( $0, x, y$ ) des points de ce plan est défini par :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

Et  $\varepsilon_f(M)$  les déformations en flexion et torsion peuvent en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote  $z$  du point  $M$  est défini par,

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

Les déformations en flexion et torsion peuvent être exprimées en fonction d'une nouvelle fonction  $K(x, y)$  tel que :

$$\varepsilon_f(M) = z K(x, y), \quad (2.43)$$

Avec :

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$K_x, K_y, K_{xy}$ : sont les courbures de la plaque en flexion.

Les déformations en un point  $M$  s'écrivent alors :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + zK(x, y). \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

#### II.4.2.Expression du champ des contraintes :

Les relations suivantes donnent les contraintes dans une couche k dans un repère quelconque (x, y, z) [20] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \bar{Q}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

Avec :

$$\bar{Q}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \quad (2.48)$$

Où  $\bar{Q}_k$  est la matrice de rigidité réduite de la couche k. En tenant compte de (2.46) et (2.47), les contraintes dans une couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

Ou

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k K(x, y), \quad (2.50)$$

Le vecteur  $\sigma_k(M)$  représente le vecteur des contraintes dans la couche  $k$  ( $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ ). La matrice de rigidité réduite  $\bar{Q}_k$  varie d'une couche à l'autre, il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

### II.4.3. Efforts généralisés :

#### II.4.3.1. Efforts de membrane :

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, l'expression des résultantes en membrane s'écrit [21] :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_k(x, y, z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k K(x, y)] dz, \quad (2.51)$$

En considérant les caractéristiques mécaniques et les déformations sont constantes suivant l'épaisseur d'une même couche, on peut écrire :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \bar{Q}_k K(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (2.52)$$

En intégrant dans l'épaisseur, on trouve :

$$N(x, y) = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] K(x, y), \quad (2.53)$$

L'expression précédente de l'effort de membrane peut finalement s'écrire sous la forme :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B K(x, y), \quad (2.54)$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (2.55)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (2.56)$$

A : matrice de membrane.

B : matrice de couplage

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane  $(N_x, N_y, N_{xy})$  ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane  $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0)$  (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion  $(K_x, K_y, K_{xy})$ .

#### II.4.3.2. Efforts de flexion et torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par [21] :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \sigma_k(x, y, z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k K(x, y)] dz, \quad (2.58)$$

Ce qui conduit à :

$$M_f(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] K(x, y), \quad (2.59)$$

Le vecteur des moments de flexion et de torsion s'écrit donc sous la forme :

$$M_f(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} K(x, y), \quad (2.60)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (2.61)$$

Avec :

D : matrice de courbure.

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

Les moments de flexion et de torsion sont fonctions des courbures en flexion et en torsion, et aussi sont fonctions des déformations en membrane.

#### II.4.4.Équation du comportement mécanique d'un stratifié :

##### II.4.4.1.Équation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (2.57) et (2.62) suivant une seule écriture matricielle sous la forme suivante [23] :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous la forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ K \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Les termes des matrices introduites A, B et D sont donnés par les expressions (2,65), (2.56) et (2.61). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur  $e_k$  et la cote  $z^k$  du centre de la couche k, sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_p e_k, \quad (2.65)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k, \quad (2.66)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad (2.67)$$

#### II.4.4.2.Équation constitutive des stratifiée particuliers :

La matrice intervenant dans l'expression (2.73) est la matrice de rigidité du stratifié, décrivant son comportement élastique macroscopique en un point. La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D la matrice de rigidité en flexion et B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion. Il résulte de la structure en couches de matériaux des caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul ( $B=0$ ), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs côtes et de leurs orientations. Le couplage traction-cisaillement provient des termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$ . Le couplage membrane-flexion résulte des termes  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  et  $B_{22}$ , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$  [14].

##### II.4.4.2.1.Matrice de rigidité de stratifié symétrique :

Un stratifié est symétrique si le plan moyen est un plan de symétrie. Deux couches symétriques ont [14] :

- ✓ La même matrice de rigidité réduite  $[\bar{Q}_{ij}]_k$ .
- ✓ La même épaisseur  $h_k$ .

Il en résulte que les coefficients  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls. L'équation constitutive est de la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

#### II.4.4.2.2. Matrice de rigidité de stratifié équilibré :

Les structures stratifiées équilibrées comportent le même nombre de plis dans chacune des directions  $\theta$  et  $-\theta$ . Il y a alors découplage entre les déformations de tension et les déformations de cisaillement plan [20]. Dans ce cas l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

#### II.4.4.2.3. Matrice de rigidité de stratifié quasi-isotrope :

La matrice de rigidité réduite d'une couche quasi-isotrope est donnée par la relation (2.27). L'équation constitutive d'un stratifié à couches quasi-isotropes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

# Chapitre III

---

## CHAPITRE III:

# Etude Théorique Des Plaques Composites Munies D'une Singularité Géométrique

---

### III.1. Introduction :

Dans les différents domaines de technologie de pointe, les matériaux composites ont de nombreuses applications en raison d'un rapport résistance/poids très élevé. Les plaques stratifiées à base des fibres longues de verre et à matrice époxyde ont été largement utilisés au cours des 30 dernières années. Même s'ils présentent des propriétés mécaniques intéressantes, ils sont aussi caractérisés par des inconvénients indéniables tels que la forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) qui constituent des maillons faibles au sein de la structure.

Dans une plaque composite, et pour différentes raisons pratiques, la présence d'un trou conduit à un affaiblissement de la structure en raison de sur-contrainte locale appelée concentrations de contrainte.

Jian (1998) [24] a défini ce phénomène comme une augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'une entaille après l'usinage par exemple. La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage des fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile.

Pour cela, Il est bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contrainte associé à chaque géométrie afin de bien dimensionner les structures.

Donc, à travers ce chapitre, nous allons tout d'abord décrire le comportement d'une plaque isotrope contenant un trou circulaire soumise à un effort de traction. Nous profiterons de cette description pour établir les hypothèses prises par Airy pour analyser le phénomène de concentration des contraintes.

Suite à cette discussion, Une seconde revue est ensuite proposée sur les différentes théories approchées utilisées pour représenter le phénomène de concentration de contraintes dans les plaques stratifiées trouées. Après avoir rappelé brièvement leurs formulations, nous discuterons de l'applicabilité de ces méthodes pour notre problématique.

### III.2. Comportement d'une plaque isotrope trouée:

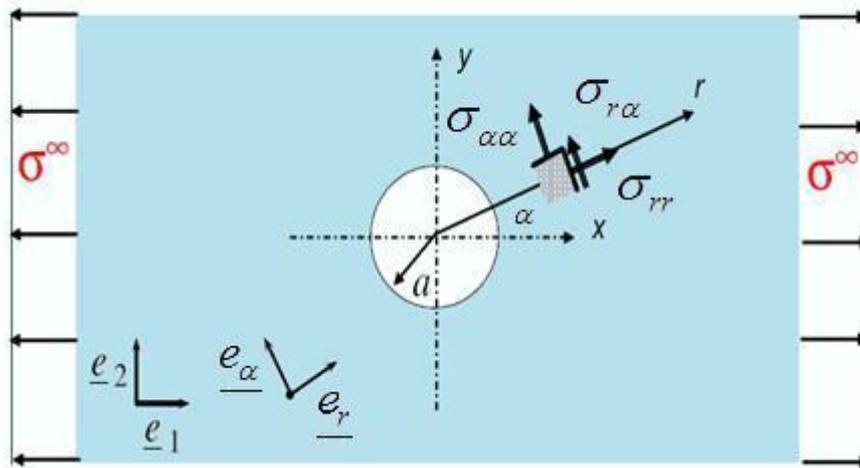
Dans cette première partie, nous allons conduire une analyse sur le phénomène de concentration des contraintes dans une plaque isotrope trouée en se basant sur la théorie d'Elasticité [25] [26]. Pour cela, nous allons utiliser, pour notre cas, une fonction de contrainte appelée « fonction d'Airy », qui nous permettra ensuite de calculer le facteur de concentration de contrainte pour une plaque isotrope trouée. Pour ce faire, on se propose d'étudier une plaque d'épaisseur  $h$ , tendue entre deux extrémités et possédant un trou médian de rayon  $a$ . Les forces de volume sont négligeables. On fait l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

Les deux côtés de la plaque sont supposés suffisamment grands par rapport à  $a$  pour que l'état de contrainte loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\infty} = \sigma^{\infty} \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 \quad (3.1)$$

Où  $\sigma^{\infty} > 0$  est la contrainte imposée, donnée du problème. Dans tout le problème, le bord du trou ainsi que les surfaces  $z = \pm h/2$  sont libres d'effort.

Un système de coordonnées polaires  $(O, r, \alpha)$  est adopté,  $O$  étant le centre du trou, l'angle  $\alpha$  étant mesuré par rapport à  $\underline{\underline{e}}_1$ .



**Figure III.1 :** Plaque percée d'un trou circulaire de rayon  $a$  et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité  $\sigma^\infty$

### III.2.1. Champ de contraintes loin du trou :

On substitue :  $\underline{e}_1 = \cos \alpha \underline{e}_r + \sin \alpha \underline{e}_\alpha$

Dans l'état de contrainte (3.1) pour trouver :

$$\underline{\sigma}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} ((1 + \cos 2\alpha) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + (1 - \cos 2\alpha) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha - \sin 2\alpha (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_r)) \quad (3.2)$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \sigma_{\alpha\alpha}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\alpha) \\ \sigma_{r\alpha}^\infty = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (3.3)$$

### III.2.2. Forme générale des contraintes :

Lorsque les forces de volume sont nulles, la détermination des fonctions  $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{r\alpha}$  se ramène à la recherche d'une fonction unique  $\varphi(r, \alpha)$  appelée fonction d'Airy :

$$\text{Où } \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

La solution générale :

$$\varphi(r, \alpha) = A \log r + B r^2 \log r + C r^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2) \cos(2\alpha) \quad (3.5)$$

Où  $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$  sont des constantes à déterminer. D'après les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \\ \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\alpha} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

On trouve l'expression générale du champ de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C - \left( 2A_2 + \frac{6C_2}{r^4} + \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{\alpha\alpha} = -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 3B + 2C + \left( 2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{r\alpha} = \left( A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2} \right) 2 \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.7)$$

Loin du trou, lorsque  $r$  est suffisamment grand, le champ précédent prend la forme asymptotique :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{\infty} = 2B \log r + B + 2C - 2A_2 \cos(2\alpha) \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{\infty} = 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{r\alpha}^{\infty} = (A_2 + 3B_2 r^2) 2 \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.8)$$

L'identification entre ce champ et celui de traction simple (3.2) permet de déterminer les constantes :

Donc,  $B=0, \quad B_2=0, \quad C=\frac{\sigma}{4}, \quad A_2=-\frac{\sigma}{4}$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^{\infty}}{2} + \left( \frac{\sigma^{\infty}}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{\alpha\alpha} = -\frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^{\infty}}{2} + \left( -\frac{\sigma^{\infty}}{2} - \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{r\alpha} = \left( -\frac{\sigma^{\infty}}{4} - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2} \right) 2 \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.9)$$

Après prise en compte des conditions à la frontière :

$$\sigma_{rr}(r=a) = \frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + \left( \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} \right) \cos(2\alpha) = 0$$

$$\sigma_{r\alpha}(r=a) = \left( -\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{a^4} - \frac{D_2}{a^2} \right) 2\sin(2\alpha) = 0$$

On obtient :

$$\frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{4} + \frac{3C_2}{a^4} + \frac{D_2}{a^2} = 0$$

Dont la résolution fournit :

$$D_2 = \frac{\sigma^\infty}{2} a^2, \quad A = -a^2 \frac{\sigma^\infty}{2}, \quad C_2 = -a^4 \frac{\sigma^\infty}{4}$$

Finalement, le champ de contraintes et la fonction de contraintes identifiés sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\alpha) \\ \sigma_{r\alpha} &= -\frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\varphi(r, \alpha) = -\frac{\sigma^\infty}{2} a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4} r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left( -r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos(2\alpha) \quad (3.11)$$

### III.2.3. Concentration de contrainte au bord du trou :

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités.

La décroissance rapide en  $1/r^2$  du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène.

On remarque que, le champ de contraintes  $\sigma_{\alpha\alpha}$  est plus fort au bord du trou que partout ailleurs dans la plaque.

### III.2.4.Facteur de concentration de contrainte :

Le facteur de concentration de contrainte est défini par :

$$k_t = \frac{\sigma_{\alpha\alpha}^{\max}}{\sigma^{\infty}} \quad (3.12)$$

La contrainte ortho-radiale vaut :

$$\sigma_{\alpha\alpha}(r=a) = \sigma^{\infty} (1 - 2 \cos(2\alpha)) \quad (3.13)$$

### III.3.Comportement d'une plaque composite trouée :

Un trou circulaire dans une plaque composite peut être nécessaire pour des raisons pratique diverses. Si un petit trou circulaire est réalisé au centre de la plaque, la répartition des contraintes au voisinage du trou est modifiée.

Dans la littérature, La distribution des contraintes autour d'un trou circulaire dans une plaque composite a été étudiée par plusieurs chercheurs, qui montre qu'il n'y a pas de solution analytique exacte pour ce cas, et toutes les solutions ce sont des solutions **approchées** ou **empiriques** [27].Donc, nous allons dans cette section effectuer une revue sur les différentes approches proposées dans la littérature pour analyser le phénomène de concentration de contrainte, On s'intéressera en particulier par les deux approches proposées par Green-Zarna (1954)[28]et Lekhnitskii (1968)[29].

#### III.3.1.Concentrations de contraintes autour des trous :

##### III.3.1.1.Théorie de Green-Zarna :

La première théorie approchée choisie pour analyser la répartition des contraintes dans une plaque composite trouée est celle proposée par **Green-Zarna**, où ils ont proposé pour étudier ce problème l'utilisation de l'équation suivante :

$$S_{22} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (S_{66} + 2S_{12}) \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + S_{11} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (3.14)$$

Où F est la fonction de contrainte d'Airy,  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{12}$  et  $S_{66}$  sont les coefficients de souplesse définis comme suit :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (3.15)$$

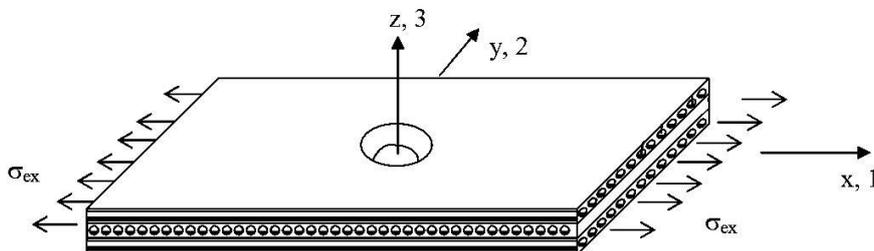
L'équation (3.14) est transformée en :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot F = 0 \quad (3.16)$$

$$\text{Où :} \quad \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}, \quad \beta_1 + \beta_2 = \frac{S_{66} + 2S_{12}}{S_{22}} \quad (3.17)$$

$\beta_1, \beta_2$  sont des constants réels et positifs.

Pour une plaque contient un trou circulaire de diamètre (a), le centre des coordonnées a été choisi pour être le même que le centre du trou. Une contrainte  $\sigma_x$  de traction uniforme a été appliquée suivant la direction parallèle à la direction des fibres. Comme indiqué sur la (figure III.2), l'équation de F peut être écrite sous la forme suivante :



**Figure III.2 :** Plaque composite stratifié avec un trou circulaire.

$$F = F_0 + A_0 \cdot \log r_1 + B_0 \cdot \log r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{2n} \cdot \cos 2n\alpha_1}{(1 + \gamma_1)^{2n} \cdot r_1^{2n}} + \frac{B_{2n} \cdot \cos 2n\alpha_2}{(1 + \gamma_2)^{2n} \cdot r_2^{2n}} \right) \quad (3.18)$$

Où  $F_0$  est la fonction de contrainte pour une plaque sans trou définie comme :

$$F_0 = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot y^2 = \frac{1}{4} \sigma_1 \cdot r^2 \cdot (1 - \cos 2\alpha) \quad (3.19)$$

Où  $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ , Sont des constantes liées aux conditions aux limites.  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont définis comme :

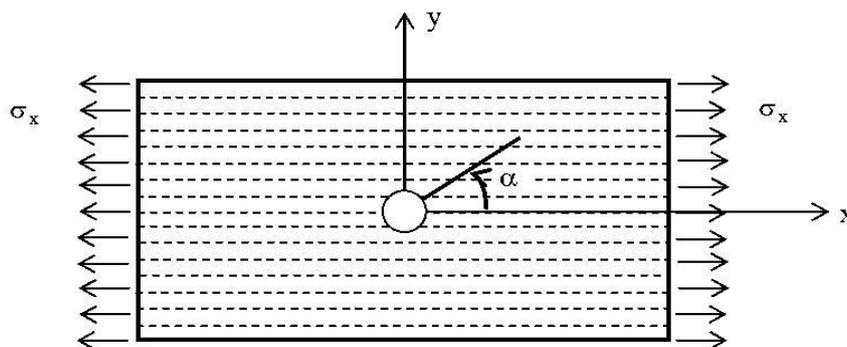
$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{\beta_1} - 1}{\sqrt{\beta_1} + 1} \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\beta_2} - 1}{\sqrt{\beta_2} + 1} \quad (3.20)$$

Leurs valeurs varient entre -1 et 1.

On rappelle ici que ces équations sont valides si la taille du trou est petite en comparant avec les dimensions extérieures de la plaque. Si **le rapport** entre la largeur de la plaque et le diamètre du trou est **plus grand ou égal à quatre**, alors on peut considérer que la taille du trou comme petite [30] [31].

➤ **Plaques orthotropes :**

Pour une plaque orthotrope chargée uni-axialement dans une direction coïncide avec la direction des fibres (Figure III.3), la contrainte tangentielle au voisinage du trou ( $r = a$ ) est donnée par l'équation suivante :



**Figure III.3 :** Plaque orthotrope unidirectionnelle avec un trou circulaire.

$$\sigma_{\alpha 1} = \frac{(1 + \gamma_1) \cdot (1 + \gamma_2) + (1 + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 \cdot \gamma_2 - 2 \cdot \cos 2\alpha)}{(1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos 2\alpha)(1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos 2\alpha)} \sigma_x \quad (3.21)$$

Où :

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}}\right]}\right] - 1}{\sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}}\right]}\right] + 1}} \quad (3.22)$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right) - \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}}\right]}\right] - 1}{\sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right) - \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}}\right]}\right] + 1}}$$

Les équations de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont déterminées en utilisant les équations (3.15), (3.17) et (3.20). Dans ces équations,  $E_1$  est le module d'élasticité dans le sens de la fibre,  $E_2$  est le module d'élasticité dans la direction transversale,  $G_{12}$  est le module de cisaillement et  $\nu_{21}$  est le coefficient de Poisson qui est le rapport entre la déformation dans le sens longitudinal et la déformation transversale. Ces déformations sont provoquées par une contrainte appliquée dans la direction transversale.

Les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , et  $\sigma_{xy}$  associées aux axes principaux de la plaque sont donnée par:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\alpha^i \sin^2 \alpha \\ \sigma_y &= \sigma_\alpha^i \cos^2 \alpha \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_\alpha^i \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dans le cas d'une plaque chargée transversalement par rapport à la direction des fibres (Figure III.4), la contrainte tangentielle au voisinage du trou peut être obtenue à partir des équations (3.21) et (3.22) en changeant  $E_1$  par  $E_2$  et  $\nu_{21}$  par  $\nu_{12}$ . Cette opération est équivalente à changer les positions de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et leurs signes dans l'équation (3.21). Dans ce cas, la contrainte tangentielle au voisinage du trou est donnée par l'équation suivante :

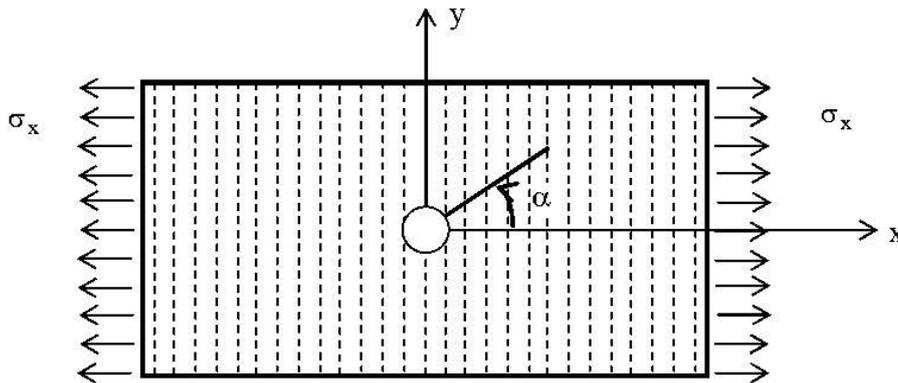


Figure III.4 : Plaque orthotrope avec un trou circulaire chargée transversalement.

$$\sigma_\alpha = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_1\gamma_2-2\cos 2\alpha)}{(1+\gamma_1^2+2\gamma_1\cos 2\alpha)(1+\gamma_2^2-2\gamma_2\cos 2\alpha)} \sigma_x \quad (3.24)$$

Où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  seront obtenus à partir de l'équation (3.22). Enfin, pour une plaque orthotrope soumise à l'effet de cisaillement uniforme (figure III.5), la contrainte tangentielle au voisinage du trou est donnée par l'équation suivante :

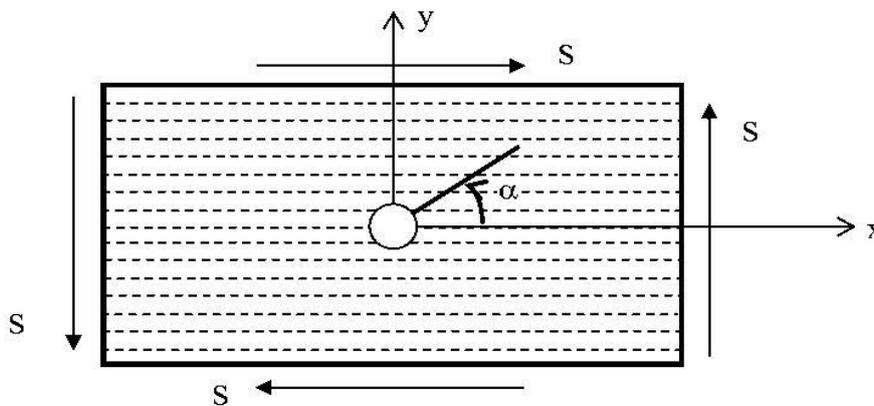


Figure III.5 : Plaque orthotrope chargée par une contrainte de cisaillement uniforme.

$$\sigma_{\alpha} = \frac{4(\gamma_1\gamma_2 - 1)\sin 2\alpha}{(1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos 2\alpha)(1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos 2\alpha)} S \quad (3.25)$$

Pour les plaques isotropes, on peut utiliser les équations citées précédemment pour calculer la contrainte tangentielle au bord des trous circulaires en prenant  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ .

➤ **Plaques anisotropes :**

La concentration de contraintes dans des plaques anisotropes (figure III.6) peut être trouvée en utilisant le principe de superposition. Donc, on peut obtenir l'équation de la contrainte tangentielle en superposant les équations (3.21) (3.24) et (3.25). L'équation finale est écrite sous la forme suivante :

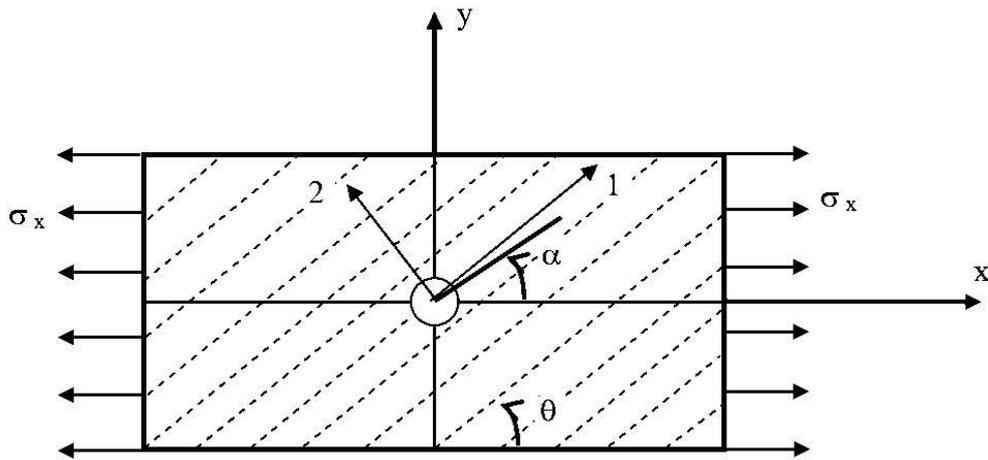


Figure III.6 : Plaque orthotrope unidirectionnelle avec un trou circulaire.

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{(1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos 2(\alpha - \theta))(1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos 2(\alpha - \theta))} \sigma_x$$

$$N_1 = (1 + \gamma_1) \cdot (1 + \gamma_2) + (1 + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 - 2 \cos 2(\alpha - \theta)) \quad (3.26)$$

$$N_2 = -4[\gamma_1 + \gamma_2 - (1 + \gamma_1\gamma_2) \cos 2(\alpha - \theta) \sin^2 \alpha]$$

$$N_3 = -4(\gamma_1\gamma_2 - 1) \sin 2(\alpha - \theta) \sin \theta \cos \theta$$

Où les valeurs de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont calculées en utilisant l'équation (3.22), la contrainte  $\sigma_x$  peut être un effort de traction ou de compression.

### III.3.1.2. Théorie de Lekhnitskii :

La deuxième théorie approchée choisie pour analyser la distribution des contraintes dans une plaque orthotrope trouée est celle proposée par Lekhnitskii (1968) [29], où il propose pour étudier ce problème l'utilisation de l'équation suivante :

$$\sigma_{\alpha} = \frac{E_{\alpha}}{E_x} \left\{ \begin{array}{l} [-\cos^2 \phi + (m+n)\sin^2 \phi] m \cos^2 \alpha + [(1+n)\cos^2 \phi - m \sin^2 \phi] \sin^2 \alpha \\ -n(1+m+n)\sin \phi \cos \phi \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \sigma^{\infty} \quad (3.27)$$

Où :

$$\frac{E_{\alpha}}{E_x} = 1 / \left[ \sin^4 \alpha + \frac{E_x}{E_y} \cos^4 \alpha + \frac{1}{4} \left( \frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_{xy} \right) \sin^2 2\alpha \right] \quad (3.28)$$

$$m = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}, \quad n = \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} - \nu_{xy} \right) + \frac{E_x}{G_{xy}}} \quad (3.29)$$

$\phi$  : C'est l'angle d'application de l'effort de traction, mesuré par rapport l'axe x.

En ce qui concerne l'expression de n, il existe d'autres formes, comme celle proposée par Lotfi Toubal en 2005 [32]:

$$n = \sqrt{2 \left( \frac{E_x}{E_y} - 2\nu_{xy} \right) + \frac{E_x}{G_{xy}}} \quad (3.30)$$

Selon Calcote [33] et Jones [34], les modules d'élasticités  $\{ E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx} \}$  dans le repère de référence (x y) sont liées aux modules d'élasticités matérielles  $\{ E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12} \}$  par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_1 \left[ \cos^4 \theta + \frac{E_1}{E_2} \sin^4 \theta + \frac{1}{4} \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) \sin^2 2\theta \right] \\
 E_y &= E_1 \left[ \sin^4 \theta + \frac{E_1}{E_2} \cos^4 \theta + \frac{1}{4} \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) \sin^2 2\theta \right] \\
 G_{xy} &= E_1 \left[ 1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \left( 1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}} \right) \cos^2 2\theta \right] \\
 \nu_{xy} &= \frac{E_x}{E_1} \left[ \nu_{12} - \frac{1}{4} \left( 1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}} \right) \sin^2 2\theta \right] \\
 \nu_{yx} &= \frac{E_y}{E_1} \left[ \nu_{12} - \frac{1}{4} \left( 1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}} \right) \sin^2 2\theta \right]
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

# Chapitre IV

---

# **CHAPITRE IV:**

## **Analyse Numérique Du Comportement Des Plaques Composites Munies D'une Singularité Géométrique**

---

Dans cette analyse numérique nous allons montrer l'effet de la présence d'un trou de forme circulaire sur le comportement mécanique des plaques à partir de la distribution des contraintes autour et loin du trou. En a appliqué à la frontière de la plaque différents types d'efforts de sollicitation (traction-compression-cisaillement) pour les matériaux composites.

Dans ce chapitre une étude localisée sur l'analyse de la variation du facteur de concentration des contraintes au bord et loin d'un trou de forme circulaire dans les plaques composites est ensuite présentée. C'est une étude qui montre l'influence des propriétés mécaniques des matériaux composites à partir de l'orientation des fibres sur le facteur de concentration des contraintes.

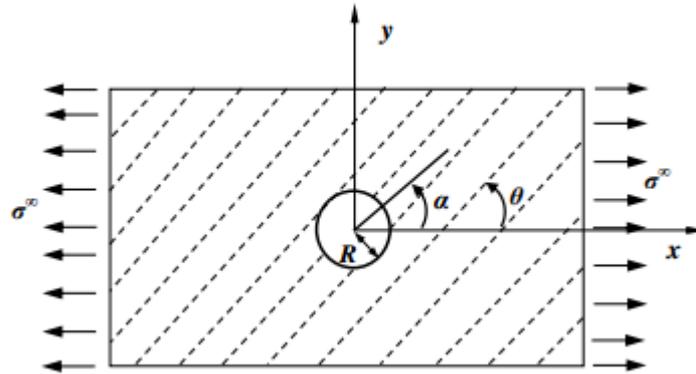
Le facteur de concentration des contraintes sera déterminé pour les divers matériaux composites utilisés dans cette étude. Les plaques stratifiées sont composées de plis unidirectionnels à fibres longues et à matrice thermodurcissable époxyde.

Dans cette étude nous avons utilisé des paramètres les plus fréquents dans l'étude du comportement des plaques trouées en matériaux composites. Celle-ci est basée sur le calcul numérique de concentration des contraintes au bord et loin du trou circulaire

(Figure IV.1) sous sollicitation de traction, compression et cisaillement.

Cette étude a été menée pour mettre en évidence l'effet des paramètres suivants :

- ✓ L'orientation des fibres  $\theta$ .
- ✓ Les différents efforts de sollicitations (traction, compression, cisaillement).
- ✓ Le type de matériaux.



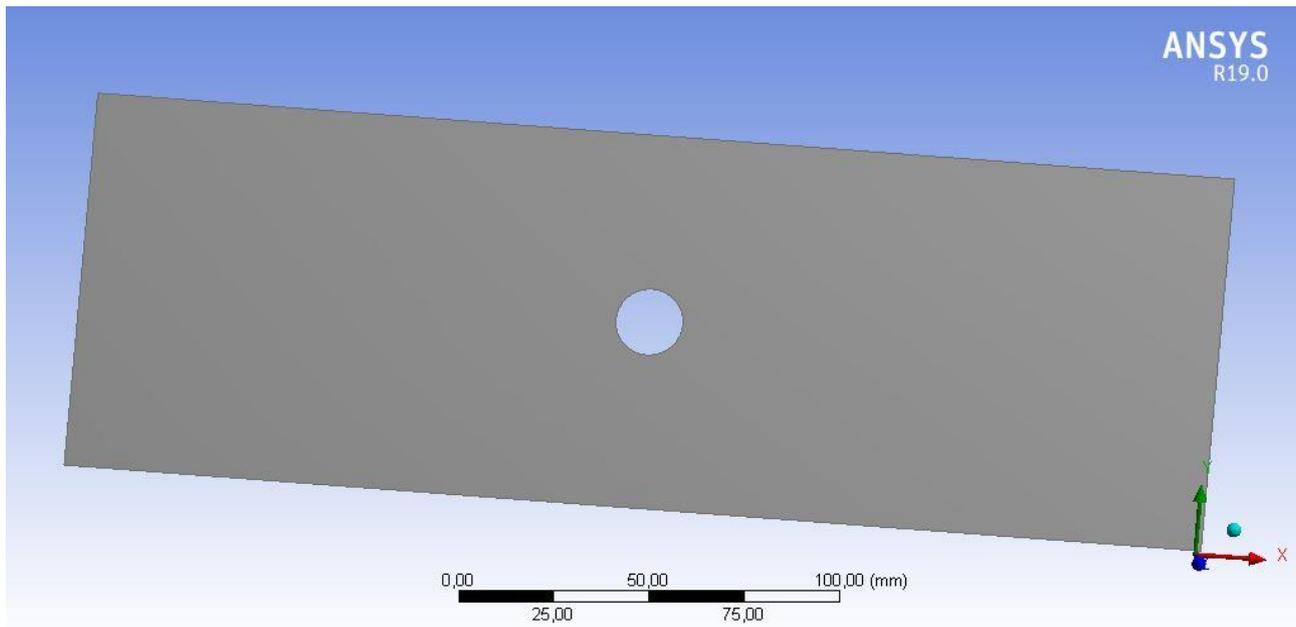
**Figure IV.1 :** Plaque avec un trou circulaire centré soumise à la sollicitation de traction.

#### **IV.1. Etude du comportement des plaques en matériaux composites munies de trou circulaire :**

L'étude du comportement des plaques en matériaux composites munies d'un trou circulaire centré est localisée sur la détermination du facteur de concentration des contraintes qui est considérée comme un inducteur de l'augmentation locale de la contrainte due à la présence de trou.

##### **IV.1.1. Modélisation par la méthode des éléments finis :**

Les fonctionnalités du logiciel ANSYS [36] relatives au calcul des structures en matériaux composites ont été utilisées pour déterminer la distribution des contraintes dans la plaque munies d'un trou circulaire.



**Figure IV.2 :** La Plaque étudiée.

#### **IV.1.1.1. Techniques de génération du maillage :**

Pratiquement valable cependant il existe différentes approches qui permettent d'obtenir un maillage acceptable.

Nous pouvant résumer ces règles ainsi :

- Maintenir une bonne Qualité des éléments.
- Assurer un bon Lissage dans les zones de transition entre les parties à maillage fin et les parties à maillage grossier.
- Minimiser le nombre Total des éléments (temps de calcul raisonnable)

La géométrie de la plaque considérée est maillée par l'élément à deux dimensions, rectangulaire avec à 4 nœuds et un raffinement de 1 (figure IV.3).

Détails de "Raffinement" - Raffinement	
[-] <b>Champ d'application</b>	
Méthode de champ d'application	Sélection de géométrie
Géométrie	1 Face
[-] <b>Définition</b>	
Désactivé	Non
<input type="checkbox"/> Raffinement	1

Figure IV.3 : Détails de raffinement.

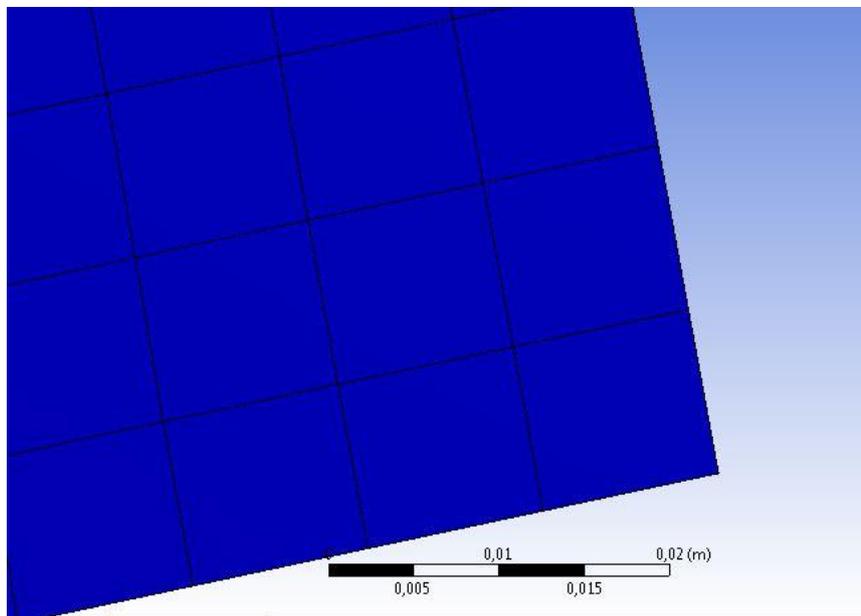


Figure IV.4 : Géométrie de l'élément.

- Le critère de la qualité des éléments est vérifié. Et la qualité de maillage est excellente (figure IV.5).

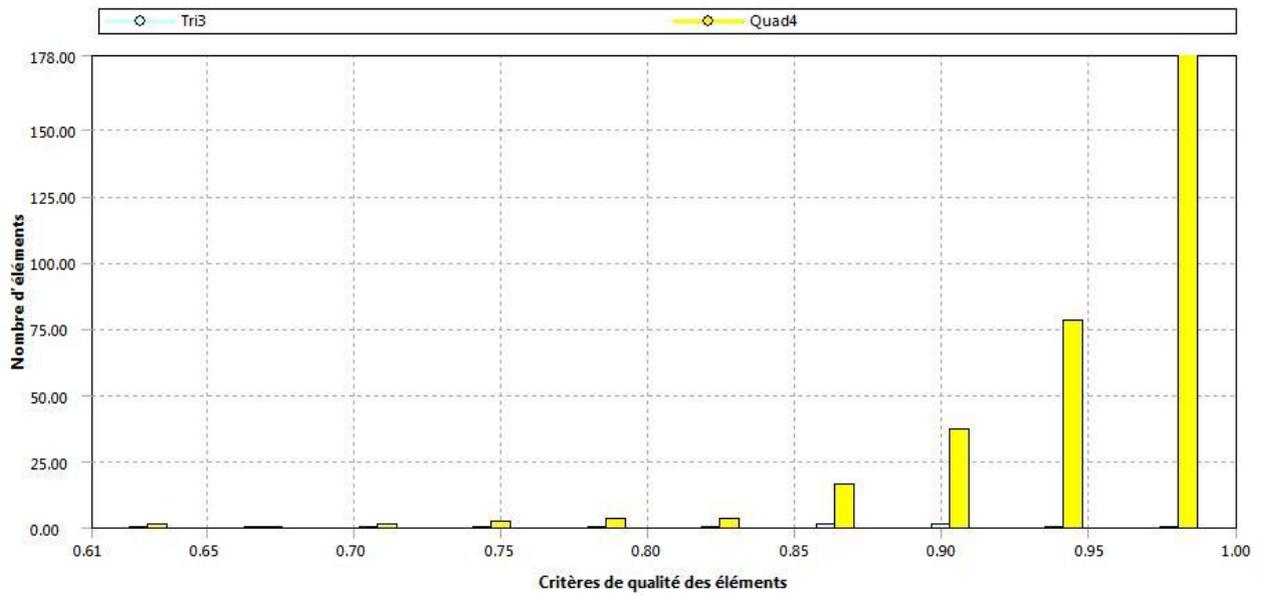


Figure IV.5 : Critères de qualité des éléments

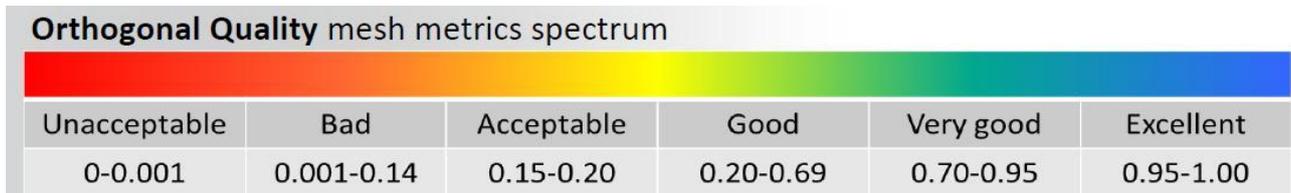


Figure IV.6 : Qualité des maillages recommandés

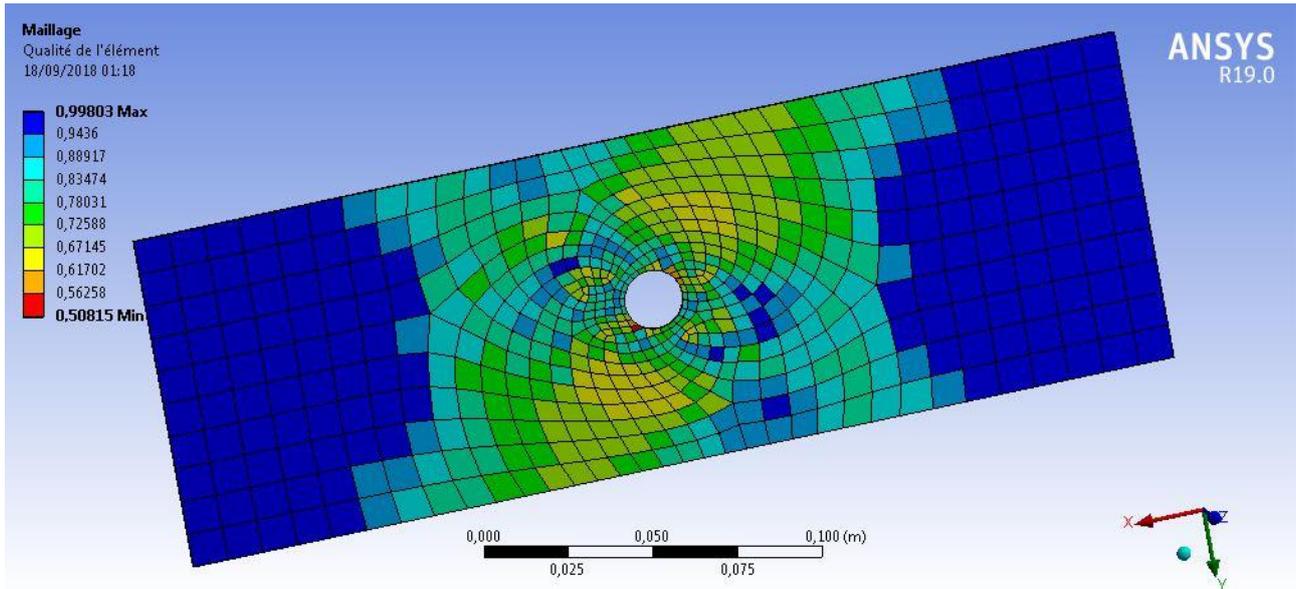


Figure IV.7 : Modèle géométrique de l'élément finis de la plaque trouée.

- Les conditions aux limites et les charges appliquées sont celle d'un test de traction :

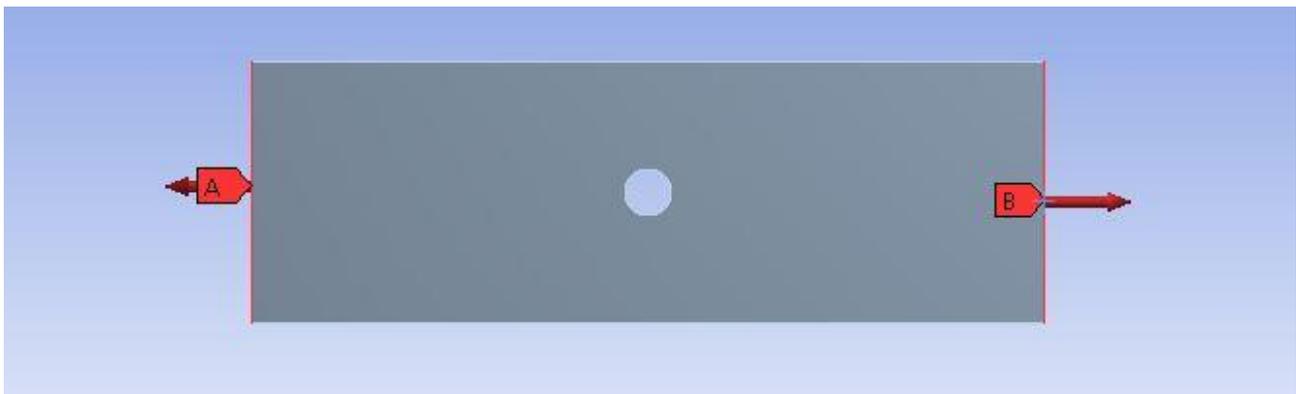


Figure IV.8 : Test de traction

#### IV.1.2. Variation du facteur de concentration des contraintes dans la direction du chargement :

Les plaques en matériaux composites munies d'un trou circulaire sont soumises à un chargement de traction (figure IV.1). Les graphes des figures (IV.9) à (IV.11) présentent la variation du facteur de concentration des contraintes dans la direction du chargement uniaxiale de la plaque orthotrope munie de trou circulaire de diamètre 5mm.

Les différentes courbes correspondent à différentes orientations des fibres  $\theta$  ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ ). On utilise les caractéristiques d'élasticité matérielle des matériaux orthotropes indiquées dans le tableau IV.1 :

E (Mpa)	Coefficient de Poisson $\nu$	Rayon (mm)	Longueur (mm)	Largeur (mm)	Epaisseur (mm)
210000	0,3	2,5	300	100	1

Tableau IV.1 : Caractéristiques mécaniques et géométriques des plaques.

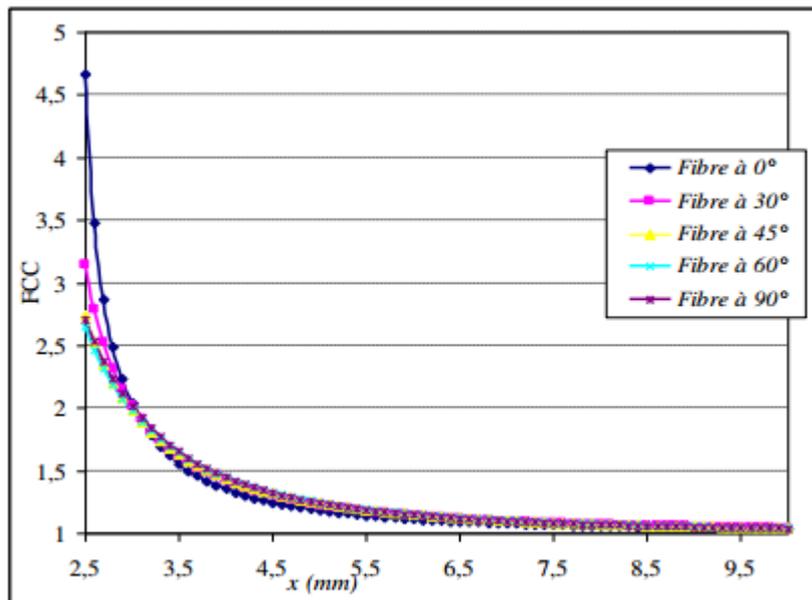


Figure IV.9 : Variation du FCC pour le matériau verre/époxyde en sollicitation de traction.

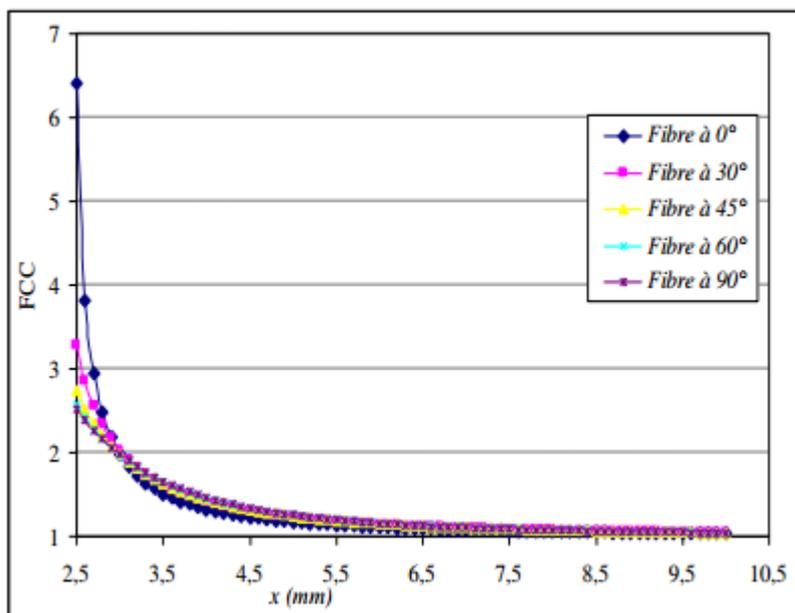


Figure IV.10 : Variation du FCC pour le matériau Graphite/époxy en sollicitation de traction.

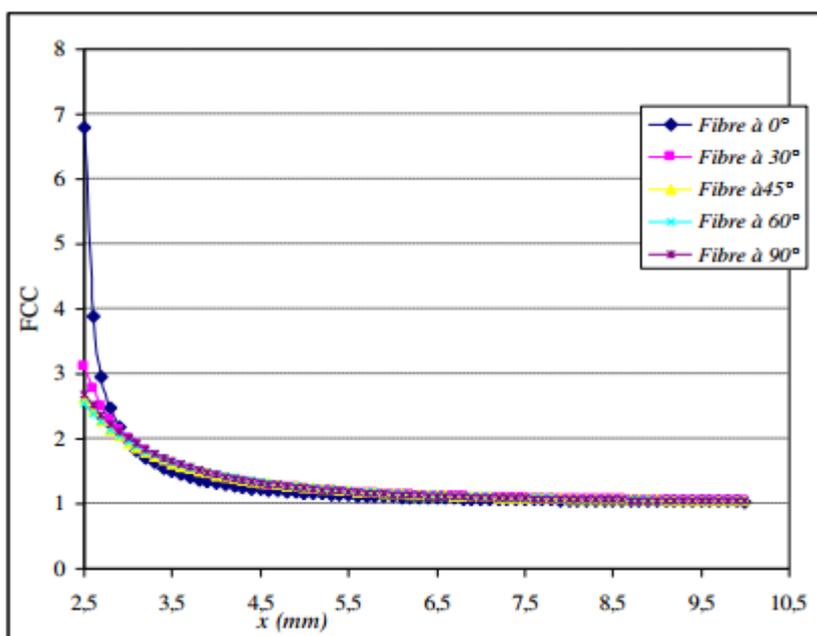


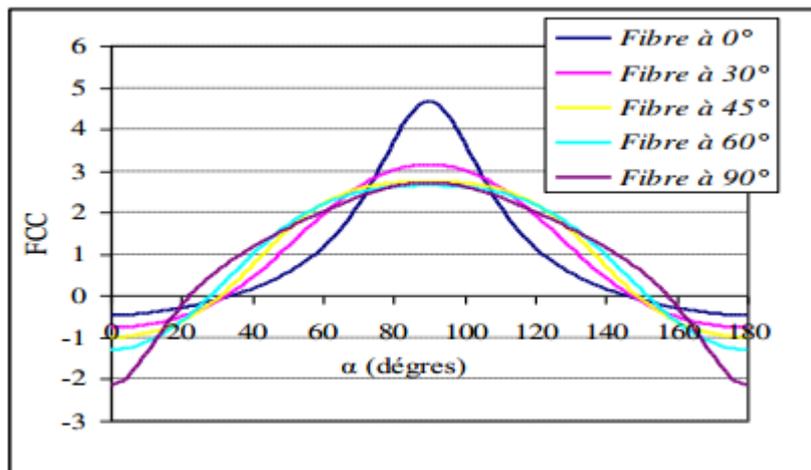
Figure IV.11 : Variation du FCC pour le matériau Bore/époxy en sollicitation de traction.

D'après les courbes des figures précédentes on remarque que pour les différents cas d'orientation des fibres la valeur du facteur de concentration des contraintes décroît le long de l'axe de chargement et atteint la valeur de 01.

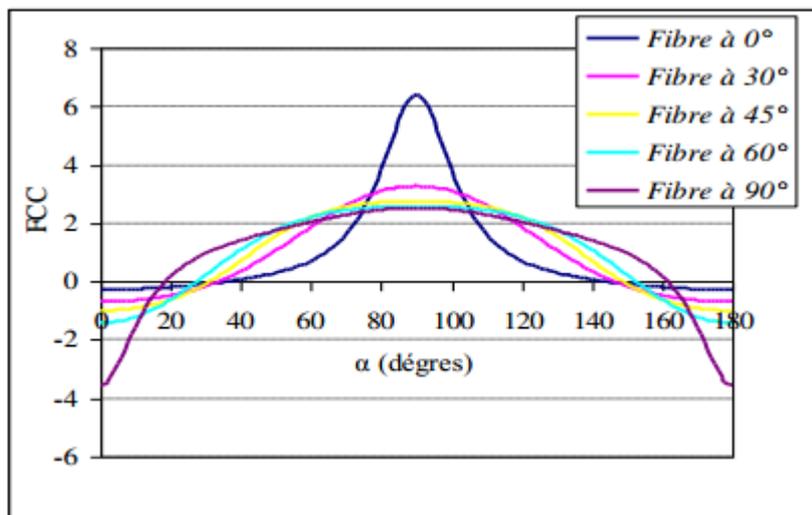
Cette diminution est plus rapide pour l'orientation des fibres à 0° par rapport aux autres cas d'orientation des fibres. Pour l'orientation des fibres à 45° ,60° et 90° la variation du facteur de concentration des contraintes est similaire.

#### IV.1.3. Distribution du facteur de concentration des contraintes au bord de trou :

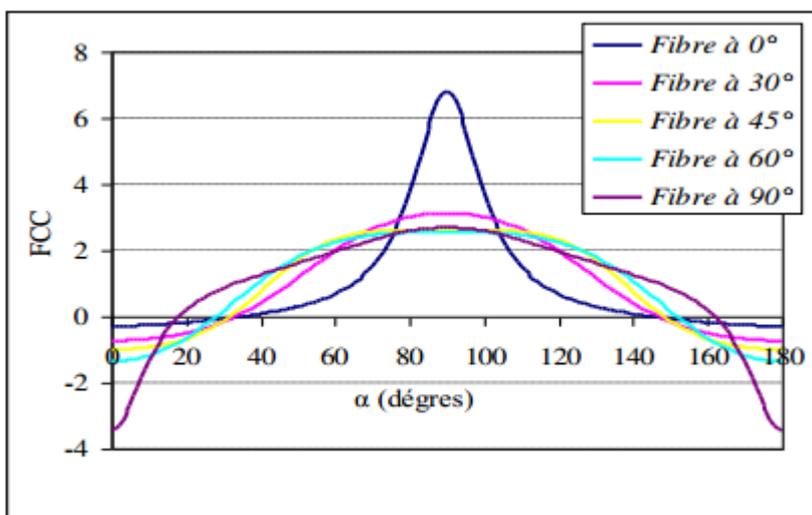
Les courbes des figures (IV.12), (IV.13) et (IV.14) représentent la variation du facteur de concentration des contraintes au bord du trou de la plaque en matériaux orthotropes soumise à la traction uni axiale, pour les orientations des fibres 0°,30°,45°,60° et 90°. Cette étude permet de montrer l'effet de l'orientation des fibres sur la valeur du facteur de concentration des contraintes pour différent emplacement au bord du trou circulaire. Les figures (IV.15), (IV.16) et (IV.17) représentant la distribution du facteur de concentration des contraintes au bord du trou.



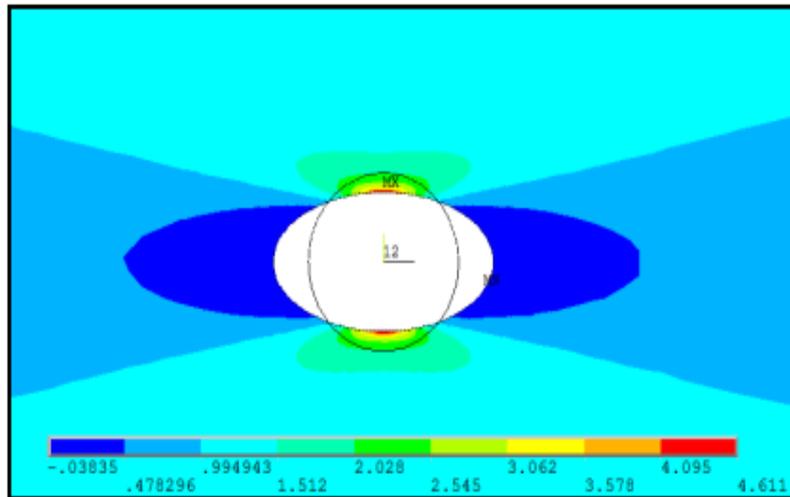
**Figure IV.12** : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau verre/époxyde en Sollicitation de traction.



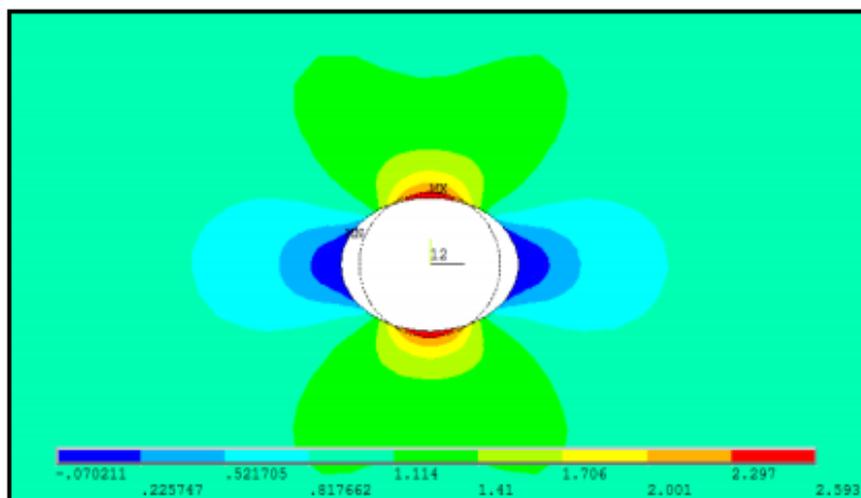
**FigureIV.13** : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Graphite/époxyde en sollicitation de traction.



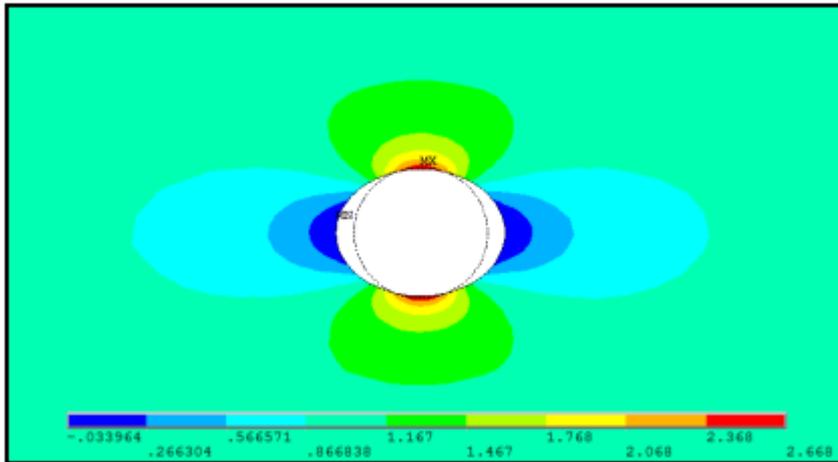
**Figure IV.14** : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Bore/époxyde en sollicitation de traction.



**Figure IV.15:** Distribution du FCC pour une orientation des fibres égale à  $0^\circ$  pour le matériau verre/époxyde en sollicitation de traction.



**Figure IV.16 :** Distribution du FCC pour une orientation des fibres égale à  $60^\circ$  pour le matériau Graphite/époxy en sollicitation de traction.



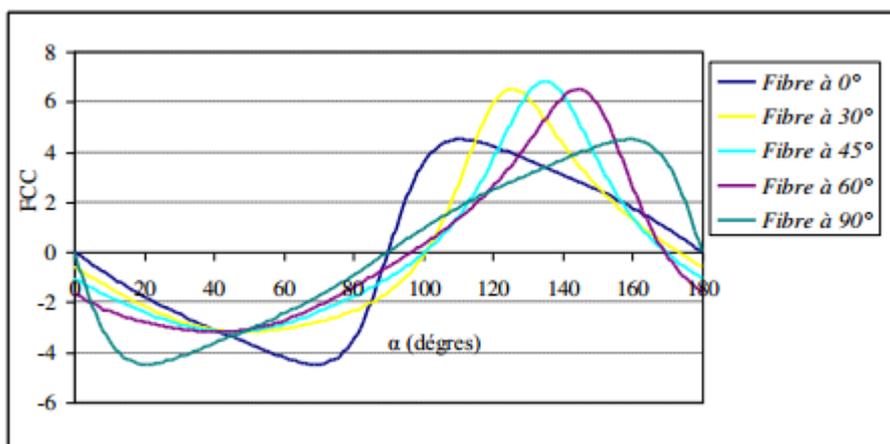
**Figure IV.17 :** Distribution du FCC pour une orientation des fibres égales à  $90^\circ$  pour le matériau Bore/époxy en sollicitation de traction.

On remarque que pour les différents matériaux étudiés, la valeur maximale du facteur de concentration des contraintes est localisée dans la plaque dont l'orientation des fibres est de  $0^\circ$ , tandis que la valeur minimale se trouve dans la plaque à  $90^\circ$ . Les plaques d'orientation des fibres égales à  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$  présentent des valeurs du facteur de concentration des contraintes maximales très proches. On remarque aussi que pour les différents matériaux étudiés la valeur maximale du facteur de concentration des contraintes au bord du trou est localisée dans l'emplacement  $\alpha=90^\circ$ . Tandis que la valeur minimale est localisé dans la position de  $\alpha=0^\circ$  et  $\alpha=180^\circ$ . La distribution du facteur de concentration des contraintes autour du trou est bien présentée dans les figures (IV.15), (IV.16) et (IV.17) pour les différents matériaux et l'orientation des fibres. On remarque bien la double symétrie des résultats et la localisation des valeurs maximale et minimale du facteur de concentration des contraintes dans la direction de la charge appliquée.

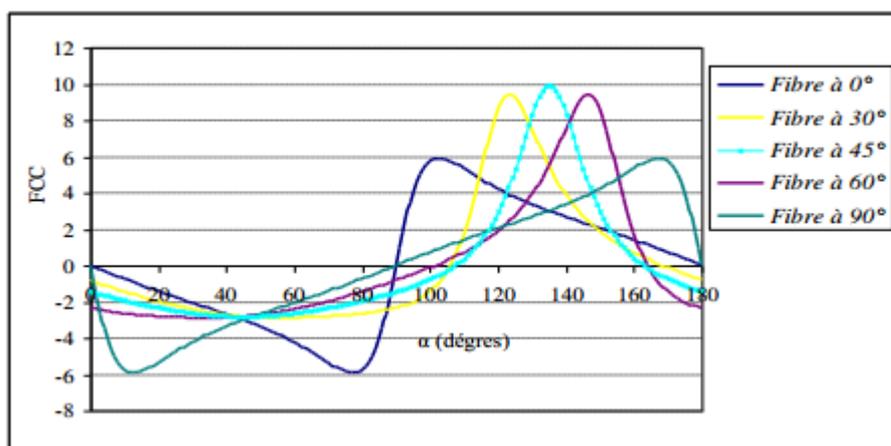
#### **IV.1.4.Effet de chargement de cisaillement sur le facteur de concentration des contraintes :**

Les courbes des figures (IV.18) à (IV.20) représentent la variation du facteur de concentration des contraintes au bord du trou des plaques orthotropes soumise au chargement de cisaillement, pour les différentes orientations des fibres.

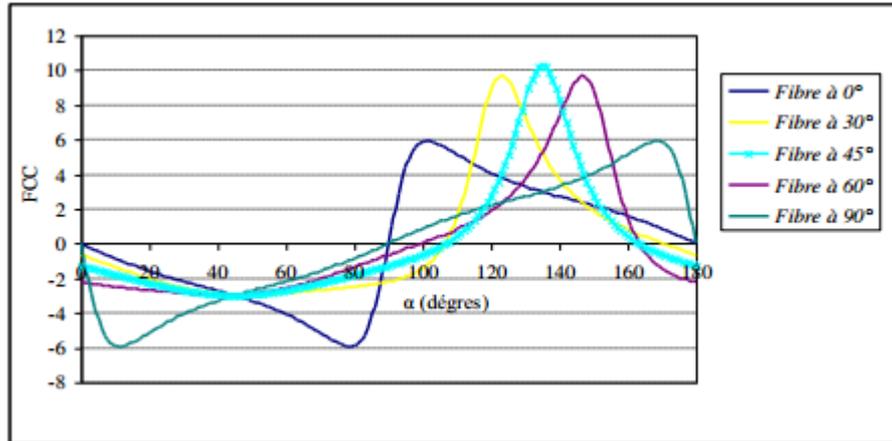
Les figures montrent l'effet de l'orientation des fibres sur la valeur du facteur de concentration des contraintes au bord du trou circulaire pour les différents emplacements.



**Figure IV.18** : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau verre/époxy en sollicitation de cisaillement.



**Figure IV.19** : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Graphite/époxy en sollicitation de cisaillement.



**Figure IV.20** : Variation du FCC au bord du trou pour le matériau Bore/époxy en sollicitation de cisaillement.

D'après les graphes des figures de (IV.18) à (IV.20) nous obtenons les résultats suivants :

Pour les différents matériaux orthotropes la valeur maximale du facteur de concentration des contraintes sont localisée dans la plaque dont l'orientation des fibres est à 45°. Tandis que la valeur minimale se trouve dans les plaques à 0° et 90°. On remarque aussi que l'emplacement de la valeur maximale du facteur de concentrations des contraintes varie en fonction de l'orientation des fibres contrairement au cas de la plaque soumise à la traction.

On remarque que pour l'orientation des fibres  $30^\circ$  et  $60^\circ$  les valeurs de facteur de concentration des contraintes sont égales. On remarque aussi que l'emplacement de la valeur minimale du facteur de concentration des contraintes est localisé dans l'intervalle de l'angle  $\alpha$  entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  et la valeur maximale entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ .

# **Conclusion Générale**

# Conclusion Générale

Dans ce travail nous avons présenté une étude numérique des plaques stratifiées menues d'une singularité géométrique. L'étude consistait à la détermination des valeurs du facteur de concentration des contraintes (FCC) qui est considérées comme un inducteur de l'augmentation locale de la contrainte due à la présence du trou circulaire.

En effet, la présence des singularités géométriques dans les structures composites peut conduire à un phénomène dangereux appelé phénomène de la concentration des contraintes, qui provoque un affaiblissement de la structure et influe négativement sur sa sécurité et peut conduire à son endommagement.

L'introduction de l'étude numérique a porté sur l'influence de la présence d'un trou de forme circulaire sur le comportement mécanique des plaques composites. Il s'agit d'appliquer à la frontière de la plaque différents types d'efforts de sollicitation (traction-compressions-cisaillement), puis analyser la distribution des contraintes autour et loin du trou. Cette analyse a permis d'entamer une étude du facteur de concentration des contraintes dans ces plaques stratifiée.

Pour savoir l'effet de l'orientation des fibres et la stratification des couches, on a effectué une étude numérique où on a remarqué que ces paramètres influents sur la valeur de facteur de concentration de contraintes et les endroits des points maximum peuvent se décaler avec le changement de l'orientation des fibres par rapport à l'axe de chargement. Il atteint la valeur maximale lorsque l'orientation des fibres est parallèle à la direction de la traction pour ( $\theta = 0^\circ$ ), tandis qu'il devient minimal pour l'orientation des fibres perpendiculaires à la direction de traction pour ( $\theta = 90^\circ$ ).

En sollicitation de traction sur une plaque stratifiée trouée, les valeurs maximales du facteur de concentration des contraintes sont localisées dans l'emplacement de  $\alpha = 90^\circ$ , et les valeurs minimales dans l'emplacement de  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 180^\circ$  au bord du trou.

A travers les différentes applications présentées, il s'avère que le comportement d'une plaque composite dépend de divers paramètres, et surtout l'orientation des fibres, Les différents efforts de sollicitations (traction, compression, cisaillement) et Le type de matériaux.

Cette étude ne peut pas cerner tous les phénomènes relatifs à la présence des singularités géométriques dans les plaques en matériaux composites, ainsi nous pouvons proposer pour la continuation de cette étude les Perspectives suivantes :

- Faire une étude du comportement des plaques composites munies d'autres formes de Singularité géométrique telles que : carrée, triangulaire, rectangulaire...etc.
- Faire une étude du comportement des plaques composites avec plusieurs trous circulaires et elliptiques.

# Références bibliographiques

- [01] BERREUR.L, MAILLARD.B.d, et NÖSPERGER.S, « *L'industrie française des matériaux composites* », Ministère de l'économie des finances et de l'industrie, p1-47,2002.
- [02] BOUDENNE.A, « *Etude expérimentale et théorique des propriétés thermo-physiques de matériaux composite à matrice polymère* », Université PARISXII, 2003.
- [03] JULES.E.J, « *Couplages entre propriétés thermiques, réactivité chimique et viscosité des matériaux composites therm durcissables en relation avec les conditions de leur élaboration fondée sur l'hystérésis Diélectrique* », Ecole nationale supérieure d'arts et métiers, 2001.
- [04] KAUSCH.H.-H, HEYMANS.N, PLUMER.C.J, and DECROLY.P, « *Matériaux polymères: propriétés mécaniques et physique*»,2001.
- [05] BEWA.H, « *Matériaux polymères biodégradables et applications Note de Synthèse II* », Direct ion des Energies Renouvelables, des Réseaux et des Marchés Energétiques, p1-16,2006.
- [06] BERTHELOT.J.-M, « *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse déstructures* »,1999.
- [07] BARDONNET.P, «*Résines époxydes(EP)* », Techniques de l'Ingénieur, vol.A3465.
- [08] BENSALD.S, «*Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes* », thèse de doctorat, l'université de Nantes, 2006.
- [09] BERTHELOT.J-M, «*Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures* »,4<sup>ième</sup> édition, Lavoisier, 2005.
- [10] CHEVALIER.M, « *Phénoplastesouphénols-formolsPF* », Techniques de l'Ingénieur, vol.A3435.
- [11] Glossaire des matériaux composites, Edition CARMA, octobre2006.
- [12] MOKADDEM.A, « *Modélisation du Comportement de L'interface Fibre-Matrice de Matériaux Composites* », Mémoire de magister, USTO, 2008.

- [13] RENARD.J, « *Elaboration, microstructure et comportement des matériaux composites à matrice polymère* », Lavoisier, 2005.
- [14] Berthelot J. M. Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures. 4ème édition, 2010.
- [15] Imen KALLEL-KAMOOUN, Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada), 30 Juin 1999.
- [16] Albert Willian FARIA, Modélisation par éléments finis de plaques composites : Contribution à l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte D'incertitudes. Mémoire de Doctorat Université Fédérale d'Uberlândia, 19 novembre 2010.
- [17] P. Vannucci, "Matériaux composites structuraux méthodes d'analyse et de conception", Master DSME, Université de Versailles et Saint-Quentin-en-Yvelines. Ed. EDP, Science, France, 2007
- [18] IRISARRI, F.X. Stratégies de Calcul pour l'Optimisation Multi-objectif des Structures Composites. Thèse de doctorat. Université de Toulouse III - Paul Sabatier, Toulouse, France, 2009.
- [19] CHOU, T.-W. Microstructural Design of Fiber Composites. 1.ed. New York: Cambridge University Press, 1992.
- [20] Laurent Gornet., "Généralité sur les matériaux composites", ECN, Centre Nantes, 2011.
- [21] J. Molimard., "Mécanique des Matériaux composites", EMSE, Version 2, 2004.
- [22] KOLLAR, L. P., SPRINGER, G. "Mechanics of Composite Structures", Cambridge University Press. 2003.
- [23] Laroze S., Barran J.J. (1983), Mécanique des structures. Tome 4 : "Calcul des structures en matériaux composites". Eyroues, Masson.
- [24] Jian LU, Henri-Paul LIEURADE, Concentration de contraintes, Technique de l'ingénieur, 10 avril 1998.
- [25] S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity. New York: McGraw Hill Book Co., 1988.
- [26] Shubhrata Nagpal, Nitin Jain, and Shubhashish Sanyal, Stress Concentration and its Mitigation Techniques in Flat Plate with Singularities, Engineering Journal Volume 16 Issue 1, ISSN 0125-8281. 2012.

- [27] Rosen T, Tenchev and Magne K. Nygard, Design procedure for reducing the stress concentration around circular holes in laminated composites, *Composites* 26.815-828.1995.
- [28] A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, London, 1954.
- [29] Lekhnitskii, S.G. *Anisotropic Plates*, Gordon & Breach, New York, 1968.
- [30] G. N. Savin, *Stress Distribution Around Holes*. NASA Technical Translation, NASA TTF-607,1970.
- [31] M. Y. Kaltakct, Stress concentration in orthotropic plates with circular hole. 2nd Bahkesir Engineering Symp., pp. 1455156. Uludag University, Bahkesir Engineering Faculty, Bahkesir, May 1991.
- [32] Lotfi, T. Moussa, K. Bernard, L. Stress concentration in a circular hole in composite plate. *Composite Structures* 68. 31–36. 2005.
- [33] Calcote, L.R.: *The Analysis of Laminated Composite Structures*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969.
- [34] Jones, R.M.: *The Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1975.
- [35] Tan S.C., “Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening”. *Journal of Composite Materials*, vol. 22, p. 1080-1097, 1988.
- [36] ANSYS Help System. “Analysis guide and theory”, Reference, version 12.1. 2014.
- [37] Yao Weixing., Yu Xinlu, “Stress concentration factor for an orthotropic finite-width plate containing elliptical edge notches”, *Composites Science and Technology*, 41 (1991) 47-53.
- [38] V.G. Ukadgaonker, D.K.N. Rao, “A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under inplane loading”, *Composite Structures* 49, 339-354, 2000.
- [39] Berthelot J-M., “*Matériaux composites*”, Editions Eyrolles, 2010.