

MA-510-38-1

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université SAAD DAHLEB-Blida1-

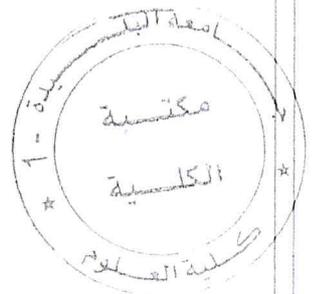
Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention de diplôme master en Mathématiques

Spécialité modélisation stochastique et statistique

**calcul de la prime de la  
réassurance par méthode  
POT**



Réalisé par : -Latreche imen

Encadré par : Mr Rassoul.A

-Elhouari achouak

Jury :

Président : Mr Tami .O

Examineur :Frihi

Encadreur :Mr Rassoul.A

2016/2017

MA-510-38-1

# Table des matières

0.1	Introduction générale . . . . .	2
0.2	Plan de travail . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Introduction à la théorie des valeurs extrêmes</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	4
1.2	Principe de la théorie des extrêmes . . . . .	6
1.3	Définitions et notations . . . . .	7
1.3.1	Statistique d'ordre . . . . .	7
1.3.2	Période de retour . . . . .	10
1.3.3	La loi des valeurs extrêmes . . . . .	12
1.4	Lois des excès . . . . .	16
1.4.1	Loi de Pareto Généralisée (GPD) . . . . .	17
1.4.2	Estimation des paramètres à l'aide de méthode de maximum de vraisemblance . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Estimation de quantiles extrêmes</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	L'approche par la loi des valeurs extrêmes . . . . .	24
2.2.1	Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	27
2.2.2	Estimation des paramètres par la méthode des moments pondérés . . . . .	28



2.2.3	L'approche par la loi des excès . . . . .	29
2.2.4	L'approche semi-paramétrique . . . . .	31
2.3	Recherche du seuil . . . . .	33
2.3.1	Méthodes graphiques . . . . .	33
2.3.2	Méthodes paramétriques . . . . .	35
2.3.3	Modèles de mélange . . . . .	35
2.3.4	Méthodes RMSE . . . . .	37
2.3.5	Choix automatisé du seuil graphique . . . . .	37
2.3.6	Valeurs de retour . . . . .	39
2.3.7	conclusion . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Estimation de la prime de réassurance</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Principes de la réassurance . . . . .	42
3.2.1	Formes de réassurance . . . . .	43
3.2.2	La réassurance proportionnelle (sommés) . . . . .	43
3.2.3	La réassurance non proportionnelle (dommage) . . . . .	43
3.3	Estimation de la prime de réassurance . . . . .	44
3.4	Principes de calcul des primes . . . . .	44
3.4.1	Quelques propriétés désirables . . . . .	45
3.4.2	Exemples des principes de calcul des primes . . . . .	46
3.5	Estimation de la prime de réassurance dans le cas i.i.d . . . . .	49
3.5.1	Estimateur paramétrique . . . . .	49
3.5.2	Définition de l'estimateur et résultat principal . . . . .	51
3.5.3	Preuve de résultat principal . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Simulation et application</b>	<b>61</b>
4.1	les données de danish . . . . .	61
4.2	Application . . . . .	73

**5 Conclusion**

**75**

**Bibliographie**

**76**

## Remerciement

Après avoir passé ces années aussi bénéfiques qu'enrichissant, il est juste de connaître tous les efforts et l'assistance que nous avons reçu de la part de tous le staff du département de mathématiques qui ne cesse de continuer de préserver la fierté de l'université de Blida dans son propre domaine.

De ce fait, nous exprimons toute notre gratitude à monsieur ABD ELEREZAK RAS-SOUL pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.

Nous adressons également notre remerciement à tous nos enseignants qui nous ont donné les bases des sciences.

Nous remercions aussi très sincèrement le chef du département Mr TAMI pour nous avoir aidés à accomplir ce travail dans les meilleures conditions.



## Résumé

Un réassureur s'engage contractuellement à prendre en charge, contre paiement d'une prime bien estimée, le risque de sinistres futurs. Afin de pouvoir honorer ses engagements financiers en cas de sinistre, le risque correspondant, c'est-à-dire le lien entre le potentiel de sinistre et la fréquence d'occurrence, doit être évalué aussi précisément que possible.

Les modélisations probabilistes modernes des sinistres reposent sur des simulations numériques d'un grand nombre d'événements susceptibles de se produire (série d'événements). La mission de réassurance doit être la constitution d'une communauté de solidarité entre assurés, dont les primes versées suffisent à indemniser les sinistres.

Le coût d'un sinistre n'est pas une grandeur unique et il dépend de ce que s'il s'agit du montant versé par l'assureur au réassureur ou de celui versé à l'assuré. En effet, du point de vue de l'assureur, il convient de prendre en compte un certain nombre de frais (spécifiques, hors frais de gestion), qui peuvent être les frais d'avocat, d'expertise, etc. Ces frais étant traités différemment du coût réel du sinistre (indemnité versée à l'assuré) dans les contrats de réassurance, il convient de modéliser convenablement la dépendance qui peut exister entre les deux.

## Abstract

A reinsurer undertakes to contract, against payment of a well-estimated premium, the risk of future claims. In order to meet its financial commitments in the event of a disaster, the corresponding risk, ie the link between the loss potential and the frequency of occurrence, should be assessed as accurately as possible.

Modern probabilistic modeling of claims based on numerical simulations of a large number of events likely to occur (series of events). The reinsurance mission must be the creation of a community of solidarity between insured persons, whose premiums paid are sufficient to compensate the claims. The cost of a claim is not a single quantity and depends on whether the amount paid by the insurer to the reinsurer or the amount paid to the insured. Indeed, from the point of view of the insurer, a number of costs (specific, excluding management fees) should be taken into account, what may be the costs of attorney, expertise, etc. Since these costs are treated differently from the actual cost of the claim (indemnity paid to the insured) in reinsurance contracts, the dependency that may exist between the two should be appropriately modeled.

## 0.1 Introduction générale

La réassurance est un secteur de l'économie indispensable à l'activité d'assurance mais peu connue du grand public. Elle constitue de plus un instrument de premier plan pour l'organisation de la bonne gestion de ses risques.

La réassurance permet de transférer en tout ou en partie le risque accepté par un assureur vers un réassureur pour limiter des engagements. Pour cela, la réassurance est familièrement qualifiée d'assurance au deuxième degré dans la mesure où elle consiste en une véritable assurance des assureurs. Donc elle représente un des secteurs d'activité plus méconnus du public en raison que la relation n'existe directement qu'entre assureurs et réassureurs.

La réassurance se veut essentiellement internationale contrairement aux sociétés d'assurance dont l'activité de leurs fonctions est localisée à un niveau régional ou national. Ainsi le réassureur accepte en général des risques de faible fréquence mais à un coût potentiel élevé peut améliorer la mutualisation de ses risques en les répartissant à l'échelle mondiale.

Cette mutualisation géographique peut même conduire à la couverture des tremblements de terre au Japon, des ouragans aux États-Unis et des tempêtes européennes à l'intérieur d'un traité de réassurance unique.

La réassurance est par nature liée à la gestion des risques, l'actuaire y exerçant devient donc un évaluateur de risque. Le réassureur peut, à l'aide d'outils de la statistique utilisant la modélisation stochastique, notamment la modélisation des catastrophes et l'évaluation des risques associées, exercer pleinement son métier et apporter des solutions innovantes et concrètes à une bonne gestion des risques.

Pour évaluer des situations de risque sur le plan descriptif que sur le plan prédictif, les moyens d'information adaptés à l'actuariat sont d'un apport grandissant, depuis quelques décennies.

L'actuaire en réassurance utilise la théorie des valeurs extrêmes pour quantifier correctement le risque, contrairement à l'approche d'analyse du risque retenue en assurance

reposant sur la loi des grands nombres et l'utilisation de la loi normale. Cette théorie est en effet adaptée pour modéliser les processus aléatoires de réassurance caractérisés par une faible fréquence mais à un coût de sinistre élevé, la loi normale étant complètement inadaptée dans telles situations.

## 0.2 Plan de travail

Ce mémoire s'organise en quatre chapitres

Le chapitre 1 présente le principe de la théorie des extrêmes, les définitions et notations des statistiques ainsi que la loi des valeurs extrêmes et plus particulièrement les lois des excès et la loi de Pareto Généralisée (GPD)

Chapitre 2 s'intéresse à l'approche par la loi des valeurs extrêmes, et l'estimation des paramètres de cette loi par différentes méthodes ainsi que l'approche par la loi des excès et la recherche du seuil par plusieurs méthodes

Dans le chapitre 3 on a défini les principes de la réassurance, les formes de la réassurance, l'estimation de la prime de réassurance, les principes de calcul de primes ainsi que l'estimation de la prime de réassurance dans le cas i.i.d.

Chapitre 4 représente une étude de simulation (au moyen du logiciel statistique R)

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des valeurs extrêmes

### 1.1 Introduction

Que sont les extrêmes et pourquoi ils posent problème ?

Les extrêmes sont des évènements rares qui conduisent à des pertes financières importantes, les catastrophes naturelles et les cracks boursiers sont des exemples d'événements extrêmes.

La question typique à laquelle les scientifiques essaient de répondre est la suivante :

"Si un évènement extrême se produit, jusqu'ou les pertes financières peuvent-elles aller ?".

La difficulté consiste à modéliser des évènements rares et essayer de prévoir des choses qui ne se sont jamais réalisées.

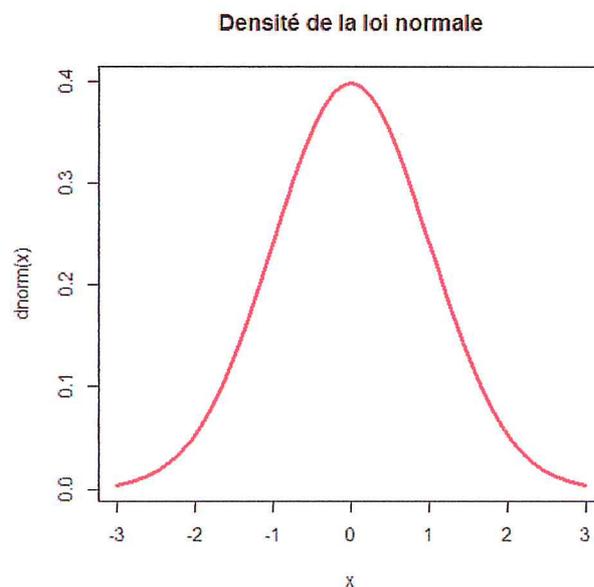
Pour l'homme de la rue, les tremblements de terre, les ouragans, les cracks boursiers sont des phénomènes atypique pour lesquels il n'existe à priori pas de règle.

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) fournit une base mathématique et probabilistes rigoureuse sur laquelle il est possible de construire des modèles statistiques pour prévoir la taille et la fréquence de ces phénomènes rares.

Cette théorie est apparue entre 1920 et 1940, grâce à Fréchet, Fisher et Tippett, Gumbel et Gnedenko. Lorsque l'on modélise le maximum d'un ensemble de variables aléatoires, alors, sous certaines conditions que nous précisons plus loin, la distribution ne peut appartenir qu'à l'une des trois lois suivantes : Weibull( à support borné), Gumbel( à support non borné et à queues fines) et Fréchet ( à support non borné et à queues épaisses).

Considérons un ensemble d'observations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (IID)  $X_1, \dots, X_n$  de distribution inconnue  $F$ .

Supposons que l'on cherche à estimer les queues de distributions de  $F$ .



La figure illustre la difficulté d'estimer de manière précise les queues de distribution de  $F$ .

La plupart des données concentrées dans le coeur (le centre) de la distribution  
Les données dans les queues de distribution sont rares

Au delà du minimum et du maximum, il n'y a plus d'observation et toute estimation semble hasardeuse.

La TVE fournit des procédures rationnelles et scientifiques pour l'estimation de phénomènes dans les queues de distribution.

## 1.2 Principe de la théorie des extrêmes

Il s'agit dans l'étude des valeurs extrêmes d'analyser l'épaisseur des queues de distribution, ou encore d'étudier les plus grandes observations d'un échantillon pour caractériser sa loi initiale. Ainsi, la théorie des extrêmes vient en complément de la théorie statistique classique ou il est plus commun d'étudier le comportement d'une distribution autour de sa moyenne plutôt que dans le domaine des observation extrêmes souvent appelées évènements rares. Nous allons voir que toute la théorie des extrêmes est fondée sur un équivalent au théorème central limite mais pour les queues de distribution on s'intéresse au comportement du maximum d'un échantillon, variable aléatoire définie par :

$$M_n = \max (X_1, \dots, X_n).$$

ou  $X_1, \dots, X_n$  est un échantillon de  $n$  variable aléatoire indépendantes et de même loi  $F$ .

La distribution de  $M_n$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(M_n < x) &= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \\ &= F(x)^n. \end{aligned}$$

On ne connaît pas la distribution  $F$  en pratique. Les techniques classiques d'estimation de  $F$  se basent sur les observations dont on dispose. Cependant de petites erreurs d'estimation sur  $F$  peuvent avoir des conséquences désastreuses sur  $F^n$ . Une alternative présuppose que l'on conserve  $F$  comme inconnue, et que l'on approche cette distribution par des distributions limites estimées dans le domaine des observations extrêmes. Cependant, la loi limite de  $M_n$  est dégénérée. Il s'agit alors, tout comme le théorème central limite, d'observer le comportement limite de la variable  $M_n$  renormalisée.

## 1.3 Définitions et notations

### 1.3.1 Statistique d'ordre

**Définition 1.1** *On considère  $n$  variables aléatoires réelles  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de fonction de répartition  $F(x) = P(X \leq x)$ . Rangons ces variables aléatoires par ordre croissant, on notera dans la suite l'échantillon ordonné :*

$$X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}.$$

Remarquons que les statistiques d'ordre ne sont pas indépendante par définition. Deux statistiques d'ordre sont particulièrement intéressantes pour l'étude des événements extrêmes : ce sont les deux statistiques extrêmes, autrement dit le minimum de l'échantillon  $X_{1,n}$  et le maximum  $X_{n,n}$ . On notera qu'il est très facile de passer de l'un à l'autre à l'aide de la relation :

$$X_{1,n} = -\max(-X_1, \dots, -X_n).$$

A partir de l'information apportée par ces variables aléatoires, on souhaite estimer des quantiles extrêmes. Soit  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  la fonction de survie, rappelons la définition d'un quantile.

**Définition 1.2** Soit un échantillon  $X = (X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec une distribution de probabilité  $F$ . On définit aussi la fonction de répartition empirique par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(X_i \leq x)$$

ou  $1(X_i \leq x)$  : c'est la fonction indicatrice, elle est définie par :

$$1(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{si } X_i > x \end{cases}$$

**Définition 1.3** Soit  $X$  une variable aléatoire d'une distribution  $F$ . On suppose que  $F$  est continue. Le quantile d'ordre  $p$  est vérifié :

$$F(x_p) = P(X \leq x_p) = p \quad \text{ou} \quad p \in [0, 1]$$

$x_p$  : est le quantile d'ordre  $p$  .

Par définition le quantile d'ordre  $p$  c'est la fonction inverse de  $F$ , c'est-à-dire  $x_p = F^{-1}(p)$  .

### Fonction des quantiles

Si on a  $F$  est continue et monotone alors  $F$  est bijective donc  $F^{-1}$  existe.

**Définition 1.4** Soit  $X$  une variable aléatoire et  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de  $X$ . La fonction des quantiles est définie par :

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \inf \{x : F(x) \geq p\} \quad \text{avec} \quad p \in [0, 1].$$

"La fonction des quantiles s'appelle la fonction inverse générale".

**Définition 1.5** L'estimateur de  $Q(p)$ , est la fonction des quantiles empirique :

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \inf \{x : F(x) \geq p\} \quad \text{avec } p \in [0, 1].$$

ou  $F_n$ , est la distribution empirique. Il est défini par la statistique d'ordre :

$$Q_n(p) = X_{i,n} \quad \text{ou} \quad \frac{i-1}{n} \leq p \leq \frac{i}{n}.$$

Une façon de trouver le quantile théorique  $x_p$ ,  $p \in [0, 1]$  est de chercher la solution de l'équation  $F_n(x_p) = p$ . Mais dans notre cas, nous disposons plutôt d'un échantillon  $X$ , dont à priori il n'est pas évident que nous en connaissions la loi  $F$ .

Alors, comment faire ? On donne par la suite une proposition qui nous permettra de calculer les quantiles à partir de notre statistique d'ordre.

**Proposition 1.6** Soit  $p \in ]0, 1[$ . Supposons que  $F$  est continue et qu'il existe une seule solution  $x_p$  à l'équation  $F_n(x) = p$ . Soit  $(k(n), n \geq 1)$ , une suite d'entiers telle que  $1 \leq k(n) \leq n$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = p$ . Alors, la suite des quantiles empirique données par la statistique d'ordre  $(X_{(k(n),n)}, n \geq 1)$ , converge presque sûrement vers  $x_p$ .

**Définition 1.7** Le quantile extrême d'ordre  $1 - \alpha$  de la fonction de répartition  $F$  est définie par :

$$q(\alpha) = \bar{F}^{\leftarrow}(\alpha) = \inf \{y : \bar{F}(y) \leq \alpha\}, \quad \text{avec } \alpha \in ]0, 1[.$$

ou  $\bar{F}^{\leftarrow}$  est l'inverse généralisée de  $\bar{F}$ . Le quantile extrême d'ordre  $1 - \alpha_n$  de la fonction de répartition  $F$  est définie par :

$$q(\alpha_n) = \bar{F}^{\leftarrow}(\alpha_n) \quad \text{avec} \quad \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

En résumé, un quantile sera dit extrême si l'on remplace son ordre  $\alpha$  par une suite  $\alpha_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Le fait que l'ordre  $\alpha_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  indique que l'information la plus importante pour estimer des quantiles extrêmes est contenue dans la queue de distribution.

### 1.3.2 Période de retour

**Définition 1.8** Soit la fonction appeler période de retour donnée par :

$$T(y) = \frac{1}{\bar{F}(y)}$$

Elle représente le nombre d'observation tel que, en moyenne, il y ait une observation égale ou supérieure à  $y$ . Il est évident que la période de retour augmente lorsque  $y$  augmente. On peut alors définir la fonction niveau de retour comme l'inverse de la période de retour :

$$Y(T) = \bar{F}^{\leftarrow} \left( \frac{1}{T} \right) = q \left( \frac{1}{T} \right).$$

Le niveau de retour représente le niveau (d'eau par exemple) qui sera atteint ou dépassé pour une certaine période de retour ( de probabilité : $1/T$  ). Un niveau de retour à 1 an revient à calculer le quantile  $1/365.25$ . Il est donc plus simple de s'exprimer en termes de niveau de retour à un an que de parler de quantile d'ordre 0.2737851% .

**Remarque 1.9** Un évènement extrême est un évènement dont le temps de retour est grand.

On supposera  $F$  continue. Comme les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, alors lorsque  $\alpha_n \rightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y_{n,n} \prec q(\alpha_n)) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i \preceq q(\alpha_n)\}\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n P(Y_i \preceq q(\alpha_n)) \\
 &= F^n(q(\alpha_n)) \\
 &= (1 - \alpha_n)^n \\
 &= \exp(n \log(1 - \alpha_n)) \\
 &= \exp(-n\alpha_n(1 + \theta(1)))
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

La probabilité que le quantile extrême soit plus grand que le maximum de l'échantillon dépend donc du comportement asymptotique de  $n\alpha_n$ .

Le résultat (1.1) nous indique que pour d'estimer des quantiles extrêmes, on a besoin de connaître le comportement du maximum de l'échantillon. Ce comportement est caractérisé par la fonction de répartition du maximum que l'on notera  $F_{Y_{n,n}}$ . Toujours d'après le résultat (1.1), on a  $F_{Y_{n,n}}(y) = F^n(y)$ . La loi  $F$  du phénomène étant inconnue en pratique, le comportement de  $F^n$  sera encore plus difficile à étudier.

On a :

$$F_{Y_{n,n}}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(y)]^n = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq y_F \\ 0 & \text{si } y \prec y_F \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\text{ou } y_F = \sup \{y \in \mathbb{R}, F(y) \prec 1\}$$

$y_F$  représente la borne supérieure du support de la loi.

Le résultat (1.2) nous indique que la distribution du maximum  $Y_{n,n}$  est une loi dégénérée. Ce résultat fournit très peu d'informations sur le comportement de  $Y_{n,n}$ . On

aimerait obtenir une loi non dégénérée pour le maximum.

L'idée est de procéder à une transformation. La plus connue en statistique est la normalisation illustrée à travers l'exemple du théorème central limite qui, après normalisation, donne la loi asymptotique (non dégénérée) de la moyenne de  $n$  variables aléatoires.

### 1.3.3 La loi des valeurs extrêmes

Grâce aux travaux de Von Mises (1936), et de Jenkinson (1955), on a une forme unifiée de la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes à un facteur d'échelle et de position près. L'utilisation des lois des valeurs extrêmes repose sur les propriétés des statistiques d'ordre et sur des méthodes d'extrapolation. Plus précisément, elle repose sur des convergences en loi des maximums de variables aléatoires convenablement normalisés. Les lois limites possibles sont connues ; elles sont appelées les lois des valeurs extrêmes.

Le théorème ci-dessous est fondamental en théorie des valeurs extrêmes car il établit la loi asymptotique du maximum  $Y_{n,n}$  convenablement normalisé d'un échantillon

**Théorème 1.10** *Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition  $F$ . S'il existe deux suites normalisantes réelles  $(\alpha_n)_{n \geq 1} > 0$  et  $(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}$  et une loi non-dégénérée  $H_\gamma$  telle que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{Y_{n,n} - b_n}{\alpha_n} \leq y \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n (\alpha_n y + b_n) = H_\gamma \quad (1.3)$$

alors à une translation et un changement d'échelle près on a :

$$H_\gamma(y) = \begin{cases} \exp \left[ - (1 + \gamma y)_+^{1/\gamma} \right] & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp (- \exp (-y)) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}, \quad (1.4)$$

$$\text{et } y_+ = \max(0, y).$$

$H_\gamma(y)$  est dite famille des lois des valeurs extrêmes généralisées notée (G.E.V.D).  
 $\gamma$  : indice des valeurs extrêmes ou bien indice de queue qui donne une information sur l'épaisseur des queues de distribution.

**Remarque 1.11** Si :  $\gamma < 0$ , "Queue fine" ; si :  $\gamma > 0$ , "Queue épaisse"; si :  $\gamma = 0$ , "Queue intermédiaire".

Le comportement limite du maximum normalisé est ainsi décrit par la fonction de répartition  $H_\gamma$  pour la plus grande partie des lois usuelles.  $H_\gamma$  est appelée fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes, en anglais " Generalized Extreme Value Distribution " notée GEV. Une preuve détaillée de ce théorème peut être trouvée dans Resnick et dans Embrechts et al .Si l'on souhaite faire un parallèle avec le théorème centrale limite, la suite  $(\alpha_n)$  jouerait le rôle d'un paramètre d'échelle ou de dispersion et la suite  $(b_n)$  celui d'un paramètre position. Ces suites ne sont pas uniques.L'unification du comportement du maximum en une seule fonction de répartition facilite grandement l'étude du comportement du maximum. Cette loi dépend du seul paramètre de forme  $\gamma$  appelé indice des valeurs extrêmes ou indice de queue.  $\gamma$  est le paramètre clé de toute la théorie des valeurs extrêmes. L'estimation de  $\gamma$  nous fournira le comporetement de la queue de distribution. En effet, selon son signe, on distingue trois domaines d'attraction dont quelques densités ont été représentées pour  $\gamma$  fixé sur la figure 1.2

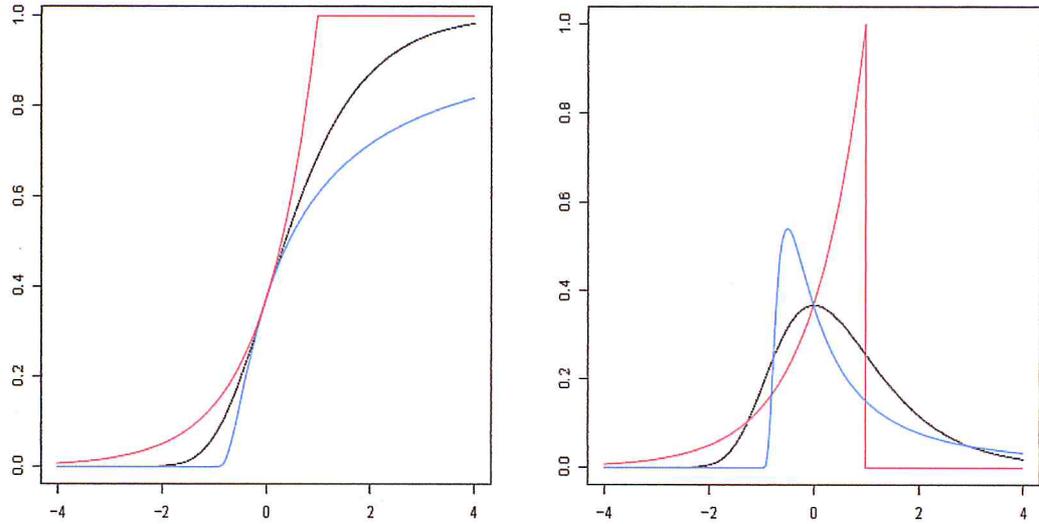


Figure 1.2 : A gauche :  $H$  . A droite : les densités associées à la loi des valeurs extrêmes  
(noir :  $\gamma = 0$ , bleu :  $\gamma = 1$ , rouge :=  $-1$ )

1. Si  $\gamma > 0$ , on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de Fréchet , que l'on notera  $D(\text{Fréchet})$ . Il contient les lois dont la fonction de survie est à décroissance polynomiale, i.e. les lois à queues lourdes ou lois de type Pareto. Les lois de ce domaine ont un point terminal  $y_F$  infini.
2. Si  $\gamma < 0$ , on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de Weibull , que l'on notera  $D(\text{Weibull})$ . Toutes les lois de ce domaine d'attraction ont un point terminal  $y_F$  fini.

3. Si  $\gamma = 0$ , on dit que  $F$  est dans le domaine d'attraction de Gumbel, que l'on notera  $D(\text{Gumbel})$ . Il contient les lois dont la fonction de survie est à décroissance exponentielle, i.e. les lois à queues légères.

Un classement de nombreuses lois par domaine d'attraction est disponible dans Embrechts et al .

On donne une liste non exhaustive de l'appartenance des lois à leur domaine d'attraction dans le tableau suivant :

<i>Fréchet</i> ( $\gamma > 0$ )	<i>Gumbel</i> ( $\gamma = 0$ )	<i>Weibull</i> ( $\gamma < 0$ )
<i>Pareto</i>	<i>Normale</i>	
<i>Student</i>	<i>Exponentielle</i>	
<i>Burr</i>	<i>Log – normale</i>	
<i>Chi – deux</i>	<i>Gamma</i>	<i>Uniforme</i>
<i>Fréchet</i>	<i>Weibull</i>	<i>Beta</i>
<i>Log – gamma</i>	<i>Benktander – type – I</i>	<i>ReverseBurr</i>
<i>Log – log istique</i>	<i>Benktander – type – II</i>	
<i>Cauchy</i>	<i>Logistique</i>	
	<i>Gumbel</i>	

Table 1.1 : Quelques lois et leurs domaines d'attraction.

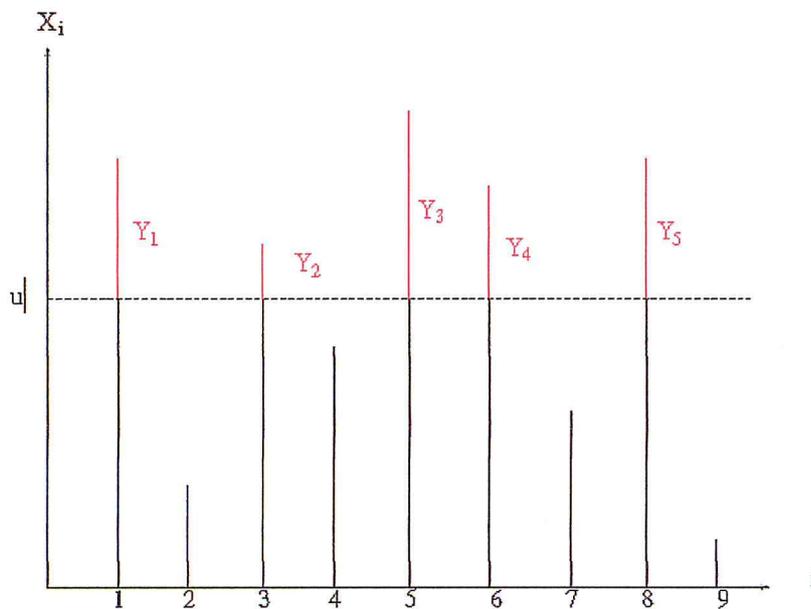
## 1.4 Lois des excès

L'approche basée sur les distributions **GEV** peut être réductrice du fait que l'utilisation d'un seul maxima conduit à une perte d'information continue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. La solution est de considérer plusieurs grandes valeurs au lieu de la plus grande.

La nouvelle approche de la théorie des valeurs extrêmes appelée **POT**, en anglais "Peaks-Over-Threshold approach", consiste à utiliser les observations qui dépassent un certain seuil, plus particulièrement les différences entre ces observations et le seuil, appelées excès.

Il est clair que cette méthode nécessite la détermination d'un seuil ni trop faible pour ne pas prendre en considération des valeurs non extrêmes, ni trop élevé pour avoir suffisamment d'observation. Notons le seuil par  $u$ .

L'excès  $Y$  de la variable  $X$  au dessus du seuil  $u$  est défini par  $X - u$  quand  $X \geq u$ .



**Définition 1.12** Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  et de point terminal  $x_F$ . Pour tout  $u < x_F$ , la fonction :

$$F_u(x) = P[X - u \leq x \mid X > u], x \geq 0 \quad (1.5)$$

est appelée fonction de répartition des excès au dessus du seuil  $u$ .

**Remarque 1.13** Par définition des probabilités conditionnelles,  $F_u$  peut être également définie par :

$$F_u(x) = \begin{cases} \frac{F(u+x)-F(u)}{1-F(u)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

**Remarque 1.14** Notons  $Y = X - u$  pour  $X > u$  et pour  $n$  v.a observées  $X_1, \dots, X_n$ , nous pouvons écrire  $Y_j = X_i - u$  telle que  $i$  est l'indice du  $j$ -me excès et  $j = 1, \dots, N_u$ . Le Mean Excess Plot appelé aussi le Mean Residual life Plot est un outil spécifique pour retenir le seuil performant. De plus, nous approchons la loi des excès  $(Y_1, \dots, Y_{N_u})$  par une loi de Pareto Généralisée  $GPD_{\gamma, \sigma}$  (Generalized Pareto Distribution) que nous présentons ci-dessous.

**Théorème 1.15** (Pickands [57])  $F$  appartient au domaine d'attraction  $D_\gamma$  si et seulement si il existe une fonction  $\sigma(\cdot)$  positive et un réel  $\gamma$  tels que la loi des excès  $F_t$  peut être uniformément approchée par une distribution de Pareto généralisée (GPD) notée  $G_{\gamma, \sigma}$ .  
i.e

$$\lim_{t \rightarrow \tau_F} \sup_{x \in (0, \tau_F - t)} |F_t(x) - G_{\gamma, \sigma(t)}(x)| = 0$$

ou

$$G_{\gamma, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0, x \geq 0 \text{ et } x < -\frac{\sigma}{\gamma} \text{ si } \gamma < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \gamma = 0, x \geq 0 \end{cases}$$

### 1.4.1 Loi de Pareto Généralisée (GPD)

Le théorème de Pickands est très utile lorsqu'on travaille avec des observations qui dépassent un seuil fixé puisqu'il assure que la loi excès peut être approchée par une loi de pareto généralisée.

**Définition 1.16** La fonction de survie est donnée par

$$\bar{G}_{\gamma,\sigma}(y) = \begin{cases} (1 + \gamma \frac{y}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp\left(\frac{-y}{\sigma}\right) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}^+$  si  $y \geq 0$  ou  $[0, -\sigma/\gamma[$  si  $\gamma < 0$ .

Elle dépend de deux paramètres :

-  $\sigma > 0$  est un paramètre d'échelle.

-  $\gamma \in \mathbb{R}$  est un paramètre de forme.

Deux cas particuliers :

-  $\gamma = 0$ , loi exponentielle d'espérance  $\sigma$ .

-  $\gamma = -1$ , loi uniforme  $[0, \sigma]$ .

L'idée de l'existence d'une équivalence entre la loi **GEV** et la loi des excès est la suivante :

A l'aide du résultat donné dans le théorème (1.9) pour  $n$  assez grand on a :

$$F^n(u) \approx \exp\left(-\left(1 + \gamma \left(\frac{u - b_n}{a_n}\right)\right)^{-1/\gamma}\right).$$

avec  $a_n > 0$  et  $(b_n, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi :

$$n \log(F(u)) \approx -\left(1 + \gamma \left(\frac{u - b_n}{a_n}\right)\right)^{-1/\gamma}. \quad (1.8)$$

Si  $u$  est assez grand alors un développement limité donne :

$$\log(F(u)) \approx -(1 - F(u)).$$

En remplaçant dans l'expression on obtient pour  $u$  est assez grand

$$1 - F(u) \approx \frac{1}{n} \left( 1 + \gamma \left( \frac{u - b_n}{a_n} \right) \right)^{-1/\gamma}.$$

De même pour  $\gamma > 0$  on a :

$$1 - F(u + y) \approx \frac{1}{n} \left( 1 + \gamma \left( \frac{u + y - b_n}{a_n} \right) \right)^{-1/\gamma}.$$

En remplaçant dans l'expression  $1 - F_u(y) = \frac{\bar{F}(u+y)}{\bar{F}(u)}$  "fonction de survie  $\bar{F}_u(y)$ " :

$$F_u(y) \approx 1 - \left( 1 + \gamma \frac{y}{\sigma} \right)^{-1/\gamma}.$$

avec :

$$\sigma = a_n + \gamma(u - b_n).$$

Les travaux de Balkema et de Haan[8] et de Pickands[141] donnent un résultat très précis sur l'approximation de cette fonction de survie ( ou de manière équivalente de la fonction de répartition) lorsque le seuil  $u$  est proche du point terminal  $y_F$ .

### 1.4.2 Estimation des paramètres à l'aide de méthode de maximum de vraisemblance

Supposons que nous avons un grand nombre d'observations indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  avec une fonction de distribution commune  $F$ . fixe un seuil élevé  $u$ , que  $N$  indique le nombre de dépassements de  $u$  et que  $Y_1, \dots, Y_N$  indique les excès. C'est  $Y_i = X_j - u$ , où  $j$  est l'index du dépassement. Conditionnellement sur  $N$ , les excès sont  $i, i, d$  avec fonction de distribution  $F_u$ . Notre proposition est de rapprocher  $F$  par GPD  $G_{\beta, \xi}(x)$ , disons en estimant  $\beta$  et  $\xi$  par les estimations de maximum de vraisemblance,  $\hat{\beta}_N$  et  $\hat{\xi}_N$ , basées sur  $Y_1, \dots, Y_N$ . combinées avec  $N/n$  comme estimateur de  $1 - F(u)$ , cela donne la queue

Estimateur

$$1 - \hat{F}(u + y) = n^{-1}N \left(1 - \hat{\xi}_N y / \hat{\beta}_N\right)^{1/\hat{\xi}_N}$$

pour  $0 < y < \infty$  (si  $\hat{\xi}_N < 0$ ) ou  $0 < y < \hat{\beta}_N / \hat{\xi}_N$  (si  $\hat{\xi}_N > 0$ ).

Cette approche générale nous permet de dériver un certain nombre d'autres estimateurs comme cas spéciaux. Si  $\hat{\xi}_N > 0$ , alors  $u + \hat{\beta}_N / \hat{\xi}_N$  est un estimateur du point final de la distribution. Ceci est effectivement le même estimateur que celui de Hall (1982) et de Smith et Wiesman (1985), mais la dérivation actuelle semble plus intuitive. Si  $\hat{\xi}_N < 0$ , alors  $\hat{\alpha}_N = -1/\hat{\xi}_N$  est un estimateur de l'indice de variation régulière qui est différent de l'estimateur de Hill (1975). Hill a supposé

$$\{1 - F(x)\} / \{1 - F(u)\} = (x/u)^{-\alpha}, \quad x > u \quad (1.9)$$

Et dérive de celui-ci l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\alpha$ , qui dans notre notation, est

$$\bar{\alpha}_N = N \left\{ \sum_{i=1}^N \log(1 + Y_i/u) \right\}^{-1} \quad (1.10)$$

Si (1.8) est satisfait exactement, alors l'estimateur de Hill est asymptotiquement efficace, mais si (1.8) n'est qu'une relation asymptotique, il se peut que  $\hat{\alpha}_N$  soit asymptotiquement plus efficace que  $\bar{\alpha}_N$ , voir la section 4. Csörgö, Deheuvels et Mason (1985) ont généralisé l'estimateur de Hill d'une manière tout à fait différente, en utilisant des combinaisons linéaires pondérées des valeurs ordonnées de  $\log(1 + Y_i/u)$ .

L'utilisation de  $\hat{\alpha}_N$  comme estimateur d' $\alpha$  est théoriquement justifiée (par le résultat de Pickand) par le fait que  $F$  est dans le domaine d'attraction de  $\Phi_\alpha$  si et seulement si  $\{1 - F(x)\} / \{1 - F(u)\} \rightarrow t^{-\alpha}$  quand  $x \rightarrow \infty$  tel que  $t > 0$ . La troisième loi limite  $\Lambda$  a été étudiée de manière moins approfondie, bien que l'idée d'utiliser la distribution exponentielle comme une approximation de  $F_u$  ait été développée par des hydrologues sous la méthode du nom sur les seuils au seuil (POT). Smith (1984) a inclus une discussion et des références. Davis et Resnick (1984) ont adopté une approche différente, montrant que

les estimations de la queue basées sur l'estimateur de Hill sont cohérentes pour beaucoup de  $F$  dans la domaine d'attraction de  $\Lambda$ .

### Estimation en utilisant GPD

Soit  $g(y; \beta, \xi) = (\partial/\partial y) G(y; \beta, \xi)$  la densité de GPD. Les dérivés de  $\log$  du premier et du deuxième ordre  $\log g(\cdot; \beta, \xi)$  et leurs attentes sont tirés en annexe.

Tout d'abord, considérez le cas où  $Y_1, \dots, Y_N$  est i.i.d avec une densité de GPD exacte. Soit  $L_n(\beta, \xi) = \sum_{i=1}^N \log g(Y_i; \beta, \xi)$  désigner log de vraisemblance du journal et définir  $U_N(\beta, \xi)$  comme vecteur 2 avec les composantes  $-\beta \partial L_N / \partial \beta$ ,  $-\partial L_N / \partial \xi$  et  $I_N(\beta, \xi)$  comme matrice  $2 \times 2$  avec éléments diagonaux  $-\beta^2 \partial^2 L_N / \partial \beta^2$ ,  $-\partial^2 L_N / \partial \xi^2$  et  $-\beta \partial^2 L_N / \partial \beta \partial \xi$  hors diagonale. Sauf pour ce facteur  $\beta$  il s'agit de la statistique de score négatif et de la matrice d'information observée pour  $(\beta, \xi)$ . Fourni  $k < 1/2$ . On a  $E U_N = 0$ ,

$$N^{-1} E U_N U_N^T = N^{-1} E I_N = M$$

où

$$M = \frac{1}{(1-2\xi)(1-\xi)} \begin{bmatrix} 1-\xi & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = (1-\xi) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1-\xi \end{bmatrix}$$

Les arguments standard [par exemple, Cox et Hinkley (1974), chapitre 9] suggèrent qu'il existe, avec une probabilité tendant à 1 quand  $N \rightarrow \infty$ , un maximum local  $(\hat{\beta}_N, \hat{\xi}_N)$  de  $L_N$ , satisfaisant

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_N/\beta - 1 \\ \hat{\xi}_N - \xi \end{pmatrix} = -I_N^{-1} U_N (1 + o(1)) \quad (1.11)$$

Et de cela il s'ensuit que

$$N^{1/2} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_N/\beta - 1 \\ \hat{\xi}_N - \xi \end{pmatrix} \rightarrow N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M^{-1} \quad (1.12)$$

Supposons maintenant que  $Y_1, \dots, Y_N$ , ne sont pas tirés du GPD, mais de l'un des  $F'_u$ 's.

Si

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 < y < x_0 - u} |F_u(y) - G(y; \beta(u), \xi)| = 0$$

détient, nous serons généralement en mesure de déterminer une fonction de reste telle que

$$\sup_{0 < y < x_0 - u} |F_u(y) - G(y; \beta(u), \xi)| = O(\Phi(u))$$

Où  $\Phi(u) \rightarrow 0$  quand  $u \rightarrow x_0$ . Dans ce cas, nous pourrions nous attendre (1.10) à rester valide, l'effet de  $\Phi$  être pour introduire une polarisation de  $O(\Phi(u))$  dans  $U_N$ . cela entraînera un biais dans (1.11).

Pour rendre cela plus précis, supposons que  $N \rightarrow \infty$ ,  $u = u_N \rightarrow x_0$  et  $\beta = \beta_N = \beta(u_N)$  et supposons que  $\Phi(u_N) = O(N^{-1/2})$ . Nous allons généralement pouvoir montrer que

$$N^{-1/2} E \{U_N(\beta_n, \xi)\} \rightarrow b,$$

# Chapitre 2

## Estimation de quantiles extrêmes

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on supposera que  $F$  appartient à l'un des domaines d'attraction défini précédemment. L'estimation de quantiles extrêmes en dehors de l'échantillon pose problème. En effet, on a vu que supposer que  $n\alpha_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , implique que  $P(Y_{n,n} < q_{\alpha_n}) \rightarrow 1$ .

Dans une telle situation, l'estimation du quantile extrême requiert une extrapolation au-delà de l'échantillon. Il existe en théorie des valeurs extrêmes différentes approches, nous présenterons les deux suivantes :

1. L'approche des maxima par bloc consiste à sparer l'échantillon en sous-blocs choisis arbitrairement assez grands puis à ajuster la loi des maxima de ces blocs à une loi des valeurs extrêmes. A partir de l'approximation  $F^n(\alpha_n y + \beta_n) \approx H_\gamma(y)$ , on pourra estimer des quantiles extrêmes. Cette estimation dépendra de l'ajustement de la loi des valeurs extrêmes, on présentera donc les différentes méthodes d'estimation des paramètres de celle-ci.
2. L'approche par dépassements de seuil consiste à ajuster la loi des excès à une loi de pareto généralisée.

A partir de l'approximation  $F_u(y) \approx G_{\gamma,\sigma}(y)$ , on pourra estimer des quantiles ex-

trêmes. Cette estimation dépendra de l'ajustement de  $F_u$  à  $G_{\gamma,\sigma}$ , donc du choix du seuil et de l'estimation des paramètres  $\gamma$  et  $\sigma > 0$ . On présentera donc les différentes méthodes d'estimation de ces derniers.

Il s'avère qu'il existe une analogie entre ces des méthodes d'estimation de quantiles extrêmes. Ces méthodes sont basées sur des estimateurs des paramètres des lois GEV et GPD et en particulier sur des estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes.

## 2.2 L'approche par la loi des valeurs extrêmes

Guide et Longo [106] se sont basés sur cette approche pour estimer des quantiles extrêmes. On a l'approximation suivante :

$$P\left(\frac{Y_{n,n} - b_n}{a_n} \leq y\right) = F^n(a_n y + b_n) \approx H_\gamma(Y) \quad (2.1)$$

ou de façon équivalente

$$P(Y_{n,n} \leq z) \approx H_\gamma\left(\frac{z - b_n}{a_n}\right) \quad (2.2)$$

Dans la suite on introduit :

$$H_{\gamma,a,b_n} = H_\gamma\left(\frac{z - b_n}{a_n}\right)$$

L'équation (2.2) montre que la loi du maximum  $Y_{n,n}$ , peut être approché par  $H_{\gamma,a,b_n}$ . On peut réécrire l'équation (2.1) comme suit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(F(a_n y + b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - \bar{F}(a_n y + b_n)) = \log(H_\gamma(y)).$$

On peut montrer que  $a_n y + b_n \rightarrow y_F$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , donc  $\bar{F}(a_n y + b_n) \rightarrow 0$ . On peut

alors faire un développement limité de  $\log(1 + u)$  au premier ordre ce qui donne :

$$\bar{F}(a_n y + b_n) \simeq -\frac{1}{n} \log(H_\gamma(y)).$$

Ce qui équivaut à :

$$\bar{F}(y) \simeq -\frac{1}{n} \log\left(H_\gamma\left(\frac{y - b_n}{a_n}\right)\right) = -\frac{1}{n} \log(H_{\gamma, a, b_n}(y)).$$

A l'aide de l'expression de  $H_\gamma(y) = \exp\left(- (1 + \gamma y)_+^{-1/\gamma}\right)$ , on obtient ainsi une approximation de la fonction de survie en queue :

$$\bar{F}(y) \simeq \frac{1}{n} \left(1 + \gamma \left(\frac{y - b_n}{a_n}\right)\right)^{-1/\gamma}. \quad (2.3)$$

que l'on peut prolonger à  $\gamma = 0$ , en faisant tendre  $\gamma \rightarrow 0$ , dans l'équation précédente ce qui donne :

$$\bar{F}(y) \simeq \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{y - b_n}{a_n}\right).$$

On souhaite estimer des quantiles, or par définition du quantile. il nous faut inverser la fonction de survie de l'équation (1.14), ce qui nous permet d'approcher le quantile  $q(\alpha)$  par :

$$q(\alpha) \simeq b_n + \frac{a_n}{\gamma} \left( \left(\frac{1}{n\alpha}\right)^\gamma - 1 \right). \quad (2.4)$$

De même que précédemment, le cas  $\gamma = 0$  dans l'expression (2.4) peut être vu comme le cas limite lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , on a alors :

$$q(\alpha) \simeq b_n - a_n \log(n\alpha)$$

On obtient ainsi un estimateur du quantile extrême donné dans la définition suivante.

**Définition 2.1** *L'estimateur du quantile extrême de la loi GEV est défini par :*

$$\hat{q}_n^{gev}(\alpha_n) = \hat{b}_n - \frac{\hat{a}_n}{\hat{\gamma}_n} \left( \left( \frac{1}{n\alpha_n} \right)^{\hat{\gamma}_n} - 1 \right). \quad (2.5)$$

ou  $(\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{\gamma}_n)$  sont respectivement des estimateurs des paramètres  $(a_n, b_n, \gamma)$ .

De même qu'auparavant, comme le cas  $\gamma = 0$  peut être vu comme le cas limite lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ . On a d'après l'expression (2.5) :

$$\hat{q}_n^{gev}(\alpha) = \hat{b}_n - \hat{a}_n \log(n\alpha).$$

Pour mettre en pratique cette approche basée sur la convergence en loi du maximum (convenablement normalisé) d'un échantillon vers une loi GEV, Jules Emile Gumbel a introduit en 1958 [109] l'approche des maxima par bloc, en anglais "Block maxima approach".

Ainsi si l'on dispose d'un échantillon *i.i.d*  $Y_1, \dots, Y_n$ , il nous faut tout d'abord obtenir des maxima. L'approche des maxima par bloc consiste à séparer l'échantillon en  $m$  sous-échantillon (blocs) disjoint, choisis arbitrairement assez grands. On extraira ainsi le maximum de chaque bloc nous donnant un échantillon de maxima noté  $Z_1, \dots, Z_m$ . La loi de ces maxima est alors approchée, pour une taille de chaque bloc assez grande, par une loi des valeurs extrêmes.

L'idée est résumée dans l'article Mandelbrot's Extremism de Beirlant et al.

Une fois cet échantillon de maxima obtenu, on peut alors s'en servir pour estimer de diverses façons les paramètres  $(a_n, b_n, \gamma)$  de la loi GEV.

### 2.2.1 Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

Prescott et Walden [142, 143] étudièrent au début des années 1980 l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance.

La fonction de log-vraisemblance obtenue à partir de la définition (2.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \log(L(a_n, b_n, \gamma)) &= -m \log(a_n) - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^m \log\left(1 + \gamma \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n}\right)\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left(1 + \gamma \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n}\right)\right)^{-1/\gamma} \end{aligned}$$

avec

$$1 + \gamma \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n}\right) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas explicite. Jenkinson a proposé un algorithme itératif de maximisation de la fonction de vraisemblance. L'algorithme de Newton-Raphson correspondant est donné dans Hosking [118] et amélioré dans Macleod [129].

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance furent étudiées par Smith [157] en 1985. Il montre que si  $\gamma > -1/2$ , on a la consistance, l'efficacité et la normalité asymptotique de ces estimateurs. Zhou [168] et Dombry [65] ont prouvé que l'estimateur du maximum de vraisemblance existe et est consistant pour  $\gamma > -1$ . Puis en 2010, Zhou [169] a également obtenu la normalité asymptotique pour  $-1 < \gamma < -1/2$  et prouvé qu'il n'est pas consistant pour  $\gamma < -1$ .

## 2.2.2 Estimation des paramètres par la méthode des moments pondérés

En 1985, Hosking et al. [120] proposent d'utiliser la méthode des moments pondérés pour estimer les paramètres de la loi GEV.

**Définition 2.2** On définit le moment pondéré d'ordre  $r$  par :

$$\mu_r = E \left( Z H_{a_n, b_n, \gamma}^r(Z) \right)$$

Cette quantité existe pour  $\gamma < 1$  et est donnée par :

$$\mu_r = \frac{1}{r+1} \left( b_n - \frac{a_n}{\gamma} (1 - (r+1)^\gamma \Gamma(1-\gamma)) \right)$$

ou  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler définie pour tout  $t > 0$  par :

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1} \exp(-u) du$$

En utilisant la formule précédente, trois moments pondérés suffisent pour calculer  $a_n, b_n$  et  $\gamma$ . En effet on a :

$$\mu_0 = b - \frac{a_n}{\gamma} (1 - \Gamma(1-\gamma))$$

$$2\mu_1 - \mu_0 = -\frac{a_n}{\gamma} (1 - 2^\gamma) \Gamma(1-\gamma)$$

$$\frac{3\mu_2 - \mu_0}{2\mu_1 - \mu_0} = \frac{3^\gamma - 1}{2^\gamma - 1}$$

Ainsi en remplaçant respectivement  $\mu_r, r \in \{0, 1, 2\}$  par son estimateur empirique

$$\hat{\mu}_{r,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,m} \left( \frac{i-1}{m} \right)^r$$

où les  $Z_{1,m}, \dots, Z_{m,m}$  sont les statistiques ordonnées associées à l'échantillon  $Z_1, \dots, Z_m$  et en résolvant le système précédent, on obtient les estimateurs des moments pondérés des paramètres  $a_n, b_n$  et  $\gamma$ .

Dans le cas d'échantillons de petite ou de moyenne taille, la méthode des moments pondérés donne de meilleurs résultats que la méthode du maximum de vraisemblance voir Hosking [118]. De plus les estimateurs des moments pondérés sont plus simples à calculer.

Afin de résoudre le principale critique Bakelma, de Haan et Pickands ont proposé l'approche POT ou l'approche par la loi des excès (voir Partie 1.4). On se fixe un seuil  $u$  arbitrairement grand, ce qui coupe notre échantillon en deux parties. On ne travaille plus que sur les plus grandes valeurs que l'on ajuste à une loi de Pareto généralisée. Inverser la fonction de survie de cette loi nous permet d'estimer des quantiles extrêmes.

### 2.2.3 L'approche par la loi des excès

L'approche par la loi des excès est basée sur l'idée suivante. On a pour tout  $y \geq 0$  la relation :

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(y).$$

Si on effectue le changement de variable  $z = u + y$ , alors l'approximation de la queue de distribution donne :

$$\bar{F}(z) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(z - u) \approx \bar{F}(u) \bar{G}_{\gamma, \sigma}(z - u).$$

où  $\bar{G}_{\gamma, \sigma}$  est la fonction de survie de la loi de Pareto généralisée  $G_{\gamma, \sigma}$ . On introduit alors la probabilité  $p$  que  $Y$  dépasse le seuil  $u$ ,  $p = P(Y > u) = \bar{F}(u)$ , d'où :

$$\bar{F}(z) = p \bar{G}_{\gamma, \sigma}\left(z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)\right).$$

On obtient ainsi pour  $\gamma \in \mathbb{R}$  une approximation de la fonction de survie en queue :

$$\bar{F}(z) \simeq p \left( 1 + \gamma \left( \frac{z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)}{\sigma} \right) \right)^{-1/\gamma}. \quad (2.6)$$

Le cas  $\gamma = 0$  peut être vu comme le cas limite  $\gamma \rightarrow 0$  dans l'équation (2.6) :

$$\bar{F}(z) \simeq p \exp \left( -\frac{z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)}{\sigma} \right).$$

On souhaite estimer des quantiles, or par définition du quantile, il nous faut inverser la fonction de survie de l'équation(2.6) ce qui donne :

$$q(\alpha) \simeq \bar{F}^{\leftarrow}(p) - \frac{\sigma}{\gamma} \left( \left( \frac{\alpha}{p} \right)^{-\gamma} - 1 \right). \quad (2.7)$$

et donne le cas  $\gamma = 0$  on fait tendre  $\gamma \rightarrow 0$  dans l'équation (2.7) ce qui donne :

$$q(\alpha) \simeq \bar{F}^{\leftarrow}(p) - \sigma \log \left( \frac{\alpha}{p} \right).$$

Lorsque l'on suppose  $\gamma = 0$ , deux variantes de cette méthode ont été présentées par Breiman et al [25] en 1990 sous les appellations Exponential Tail(ET) et Quadratique Tail (QT).

On notera la similitude entre l'expression du quantile de la loi GEV et celle du quantile de la loi GPD. Il y a trois paramètres inconnus dans chacune d'entre elles :

-L'indice des valeurs extrêmes  $\gamma$  qui est le même dans les deux expression soulignant de fait son importance dans le comportement de la queue de distribution et donc celui des valeurs extrêmes.

-Le paramètre d'échelle  $\sigma$  joue le rôle de  $a_n$  dans l'approche GEV.

-Le seuil  $u = \bar{F}^{\leftarrow}(p)$  joue le rôle de  $b_n$  dans l'approche GEV.

Pour pouvoir estimer des quantiles extrêmes, il nous faut donc estimer ces paramètres.

Le seuil  $u$  donné par  $\bar{F}^{\leftarrow}(p)$  est un quantile se trouvant dans l'échantillon, facile à estimer par inversion de la fonction de survie empirique.

Ainsi si  $p_n = k_n/n$ , ou  $k_n$  est le nombre d'excès on estime  $\bar{F}^{\leftarrow}(k_n/n)$  par  $Y_{n-k_n+1,n}$ . Une fois le seuil  $u$  choisi, il nous reste à estimer les paramètres  $\gamma$  et  $\sigma$  afin d'obtenir un estimateur du quantile extrêmes  $q(\alpha_n)$ .

L'estimateur du quantile extrême de la loi GPD est défini par :

$$\hat{q}_n^{gpd}(\alpha_n) = Y_{n-k_n+1,n} + \frac{\hat{\sigma}_n}{\hat{\gamma}_n} \left( \left( \frac{k_n}{n\alpha_n} \right)^{\hat{\gamma}_n} - 1 \right).$$

ou  $\hat{\gamma}_n$  et  $\hat{\sigma}_n$  sont des estimateurs des paramètres de forme et d'échelle.

Différentes valeurs du seuil  $u$  donneront différents échantillon d'excès plus ou moins grands, ce qui influencera l'estimation des quantiles extrêmes. La question étant jusqu'à quel point peut-on s'éloigner de l'échantillon, tout en restant dans la queue de distribution là où se situe l'information. Ce seuil doit être suffisamment grand ( $k_n$  petit) pour que l'on puisse appliquer le théorème (1.9).

## 2.2.4 L'approche semi-paramétrique

Le plus connu des estimateurs de quantiles extrêmes basé sur une approche semi-paramétrique est l'estimateur de Weissman [167]. On verra qu'il repose sur l'estimation de  $\gamma > 0$ . Comme estimateur de l'indice des valeurs extrêmes  $\gamma > 0$  on citera le plus connu d'entre eux qui est l'estimateur de Hill [116].

### Lois à queues lourdes

Dans le domaine d'attraction de Fréchet, l'approche semi-paramétrique est basée sur la définition de la fonction quantile. Pour tout  $\gamma > 0$ , on a

$$q(\alpha_n) = \alpha_n^{-\gamma} l(\alpha_n^{-1}) \quad \text{avec } l \in RV_0, \quad (2.8)$$

$$q(\beta_n) = \beta_n^{-\gamma} l(\beta_n^{-1}) \quad \text{avec } l \in RV_0, \quad (2.9)$$

En divisant (2.9) par (2.8) et à l'aide de la définition d'une fonction à variations lentes, si  $\alpha_n$  est suffisamment petit et  $\beta_n < \alpha_n$  on obtient l'approximation suivante :

$$q(\beta_n) \simeq q(\alpha_n) \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^\gamma \quad (2.10)$$

où  $q(\alpha_n)$  est un quantile choisi dans l'échantillon, facile à estimer par inversion de la fonction de survie empirique et  $q(\beta_n)$  un quantile choisi en dehors de l'échantillon. On va donc chercher à estimer  $q(\beta_n)$  en extrapolant à partir de  $q(\alpha_n)$ .

Ces approximations sont des cas particuliers de l'approche GPD avec  $\sigma = \gamma q(\alpha_n)$ . On peut alors remplacer  $q(\alpha_n)$  par son estimateur naturel  $Y_{n-\lfloor n\alpha_n \rfloor + 1, n}$  et  $\gamma$  par un estimateur quelconque  $\hat{\gamma}_n$  estimant  $\gamma > 0$ . Ce qui nous permet d'obtenir l'estimateur de Weissman [167] introduit en 1978.

**Estimateur de Hill** Voici une idée possible pour la construction de l'estimateur de Hill. Passons au logarithme dans l'équation (2.10) ce qui donne :

$$\log(q(\beta_n)) - \log(q(\alpha_n)) \simeq \gamma \log\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$$

On choisit comme précédemment,  $\alpha_n = k_n/n$  et on considère plusieurs valeurs pour  $\beta_n \cdot \beta_n = i/n$  avec  $i = 1, \dots, k_n - 1$  tout en ayant  $\beta_n < \alpha_n$ . On obtient alors :

$$\log(q(i/n)) - \log(q(k_n/n)) \simeq \gamma \log(k_n/i) \quad (2.11)$$

Ainsi en estimant les quantiles par leurs équivalents empiriques on obtient :

$$\log(Y_{n-i+1, n}) - \log(Y_{n-k_n+1, n}) \simeq \gamma \log\left(\frac{k_n}{i}\right)$$

En sommant de part et d'autre sur  $i = 1, \dots, k_n - 1$ , on obtient :

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{k_n-1} \log(Y_{n-i+1,n}) - \log(Y_{n-k_n+1,n})}{\sum_{i=1}^{k_n-1} \log\left(\frac{k_n}{i}\right)}$$

Le dénominateur se réécrit  $\log(k_n^{k_n-1}/(k_n-1)!)$ . En utilisant la formule de Stirling, il est équivalent à  $k_n$  au voisinage de l'infini. On obtient alors l'estimateur de Hill [116].

## 2.3 Recherche du seuil

Comme le font remarquer Davison et Smith [47], on ne dispose pas d'outils théoriques permettant de choisir de manière optimale le seuil. Sa détermination reste donc empirique. Généralement, on le détermine graphiquement.

Le choix adéquat de  $\mu$  influe fortement sur la qualité de l'estimateur.

En effet, un seuil trop faible conduit à une adéquation entre la fonction de répartition et la loi GPD et les estimateurs sont biaisés.

Inversement, un seuil trop élevé conduit à une faible taille d'échantillon de dépassement et donc des estimateurs de forte variance.

### 2.3.1 Méthodes graphiques

Les méthodes graphiques sont basées sur le tracé de la MRL et les parcelles de stabilité des paramètres. Les parcelles de MRL ont été introduites par Davidson et Smith (1990). Les parcelles de MRL impliquent un traçage  $u$  (axe de  $x$ ) par rapport à l'excès moyen  $\bar{v}$  (axe de  $y$ ) qui est la moyenne des dépassements de  $n$  i.i.d. observations pour une séquence de seuils  $u$  :

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - u)$$

Si les données sont  $X \sim GPD(\sigma_u, \xi)$ , alors l'excès moyen empirique est :

$$E(X - u | X > u) = \frac{\sigma_u}{1-\xi} \text{ pour } \xi < 1$$

Pour s'assurer que la moyenne existe. Pour tout plus haut  $\bar{v} > u$ , l'excès moyen empirique devient

$$E(X - v | X > v) = \frac{\sigma_u + \xi v}{1 - \xi}$$

L'excès moyen pour les données cohérentes avec un GPD sera linéaire lorsqu'on l'observe sur un graphique de MRL pour  $u > u_0$  où  $u_0$  est un meilleur seuil approprié. En outre, si une distribution  $GPD(\sigma_u, \xi)$  est un modèle valide pour les estimations de  $\xi$  et  $\sigma_u + \xi u_0$  doit être constant par rapport à  $u > u_0$ . Ainsi, les parcelles de stabilité des paramètres sont simplement des estimations de  $\sigma_u$  et  $\xi$  (Voir Scarrott et MacDonald, 2012). Calculé en utilisant toutes les données ci-dessus  $u$  comme  $u$  varie, et une valeur constante est attendue pour  $u > u_0$ . En résumé, On s'attend à ce qu'une queue soit bien adaptée par un GPD que la parcelle de MRL soit linéaire au-dessus d'un «meilleur»  $u$  (C'est-à-dire  $u_0$ ), Les deux paramètres GPD seront constants au-dessus de ce meilleur  $u_0$ . Cela implique de placer  $u_0$  à l'extrémité inférieure d'un plateau raisonnablement bien défini dans les parcelles de stabilité des paramètres (Scarrott et MacDonald, 2012). Ces règles ont été appliquées de manière indépendante par trois praticiens pour sélectionner les seuils et sur les «seuils manuels»

Thompson et al. (2009) a développé une procédure de sélection de seuil moins subjective, semi-automatique, qui utilise des éléments de l'approche de sélection manuelle, mais ne le reproduit pas.

Thompson et al. (2009), les estimations des paramètres GPD (c'est-à-dire  $\tau = \sigma - \xi$ ), en prenant efficacement la dérivée de celle représentée par rapport à  $u$ , qu'ils prétendent, devraient normalement être distribuées. Ils prennent alors le plus haut  $u$  qui remplit ce critère lorsqu'il est testé en utilisant un test  $\chi^2$  pour la normalité. Différents paramètres doivent être définis (par exemple, le niveau de signification du test), et une méthode

qui imite directement l'approche manuelle peut s'avérer plus intuitive. La méthode de Thompson n'est pas implémentée ici.

### 2.3.2 Méthodes paramétriques

Rosbjerg et al. (1992) a introduit une procédure paramétrique basée sur le calcul du seuil comme valeur moyenne de l'ensemble de données original plus trois écarts types. Cette méthode suppose que les données sont normalement distribuées. D'autres méthodes paramétriques (par exemple. Grabemann et Weisse, 2008) sont basées sur un percentile fixe de données avec la gamme des percentiles variant entre le 97.5ème (McMillan, 2011) et le 99.7ème (Arns et al., 2013). Les seuils prédéfinis peuvent être considérés comme une procédure initiale pour faire un choix de seuil a priori lors de la gestion de plusieurs ensembles de données nécessite beaucoup de temps . Un autre avantage de cette approche est qu'il est facilement automatisé. Chacune des méthodes paramétriques est reproduite exactement ici.

### 2.3.3 Modèles de mélange

Les modèles de mélange estiment le domaine dans lequel une distribution correspond au puits de la queue par des méthodes d'inférence ( voir Frigessi et al., 2002 ; Behrens et al., 2004 ; Mendes et Lopes, 2004 ; Tancredi et al., 2006 ; Carreau et Bengio, 2009). De cette façon, des ajustements de queue appropriés peuvent être obtenus en utilisant une estimation automatisée du seuil «statistique» et à condition que le modèle de distribution «en vrac» soit suffisamment souple et, par ce moyen ou par d'autres moyens, l'ajustement en vrac et en queue ne s'influence pas fortement (Scarrott et MacDonald, 2012). Les estimations de seuil sont obtenues en sous-produit de la procédure d'ajustement du modèle. Les aperçus des approches possibles sont donnés dans Ghil et al. (2011) avec une illustration utile ( Scarrott et MacDonald (2012)).

Dans la première méthode, Frigessi et al. (2002) a conçu un modèle de mélange pour les ensembles de données contenant uniquement des valeurs positives, et l'ensemble de données complet est utilisé pour l'inférence pour le composant GPD. C'est un modèle de mélange à pondération dynamique, où une partie est le GPD et l'autre est une distribution de densité légère comme la Weibull. Il n'y a pas de seuil explicite dans cette approche, la transition entre le GPD et Weibull est progressive suite à une pondération cdf de Cauchy (Voir Scarrott et MacDonald, 2012). Cependant, un seuil est attribué pour être le point sur lequel la contribution pondérée du terme GPD est plus élevée. Cette approche comporte deux limites (Scarrott et MacDonald, 2012); Un manque de robustesse dans l'inversion et une tendance à la masse à influencer au moins partiellement le caractère estimé de la queue

La méthode de Behrens et al. (2004) est sans doute le plus simple des modèles de mélange de valeur extrême avec lesquels s'adapter à l'intégralité de l'ensemble de données, et l'utilisation d'un seuil vise à découper le volume et la queue. Cette méthode a combiné une forme paramétrique pour la distribution en vrac (par exemple, normale ou gamma) jusqu'à un seuil avec un GPD pour la queue au-dessus de ce seuil, évalué à l'aide d'une inférence bayésienne. Le seuil est explicitement estimé comme un paramètre avec sa propre fonction de densité de probabilité. C'est ce qui permet d'évaluer l'incertitude de sa valeur. Dans une approche connexe, Mendes et al. (2004) ont monté des modèles à la fois des queues d'une distribution, même si cela fait peu de différence pour les données de surtension d'inclinaison où seule la queue "supérieure" est considérée. Ils ont utilisé une distribution normale pour les modèles en vrac et en GPD pour s'adapter aux deux queues.

Pour éviter l'influence de prendre une forme pour la distribution en vrac, Tancredi et Al. (2006) a proposé un modèle de mélange qui combine une estimation de densité non paramétrique à l'aide d'un nombre inconnu  $k$  de distributions uniformes pour le volume. L'extension en vrac s'étend d'un seuil inférieur  $u_{low}$  faible, ce qui est bien inférieur à toute estimation raisonnable d'un meilleur seuil  $u_0$ , jusqu'à  $u$  au-dessus duquel un GPD

s'applique. Les variantes de  $u$  sont testées pour déterminer  $u_0$ .

Cependant, cette méthode est complexe en termes de calcul avec des difficultés pour assurer la convergence (Thompson et al., 2009; Scarrott et MacDonald, 2012), et une certaine subjectivité existe dans le choix des paramètres antérieurs bayésiens (Tancredi et al., 2006)..

### 2.3.4 Méthodes RMSE

Li et al. (2014) a proposé une mesure  $RMSE$  de la différence entre les cdfs analytiques et observés de  $X$  pour sélectionner des seuils appropriés

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Valeur\ observée_i - Valeur\ ajustée_i)^2}$$

Les valeurs observées par RMSE sont les cdfs ajustés attribués  $i/n$  à chacune des valeurs observées à partir des données observées, où  $i$  est le nombre d'observation attachée à cette valeur. Pour ces mêmes données, un GPD a été ajusté au-dessus de  $u$ , dont les paramètres  $(\sigma_u; \xi)$  ont été obtenus par maximum de vraisemblance. À partir de ce GPD, un cdfs analytique ou adapté a été construit. Ensuite, ces cdfs analytiques ont été comparés à ceux du cdfs observé pour chaque observation au-dessus de  $u$ .

Chaque observation est traitée comme un potentiel  $u$ , chaque  $u$  a un RMSE calculé pour cela et le  $u$  avec le RMSE le plus bas considéré comme le meilleur. Arbitralement, Li et al. (2014) a également choisi de considérer seulement les événements avec un RP supérieur à environ 1 an.

### 2.3.5 Choix automatisé du seuil graphique

La méthode de sélection de seuil graphique automatisé (AGTS) proposée est basée sur des calculs et des paramètres tels que décrits dans la section 3.1. AGTS décrit initialement

pour un seul seuil de test  $u$ . Ainsi, cette méthode imite la méthode graphique fournissant un support de calcul dans le processus de sélection des seuils. Plus précisément, chaque observation dans  $X$  est traitée comme un seuil de potentiel  $u$  et tous les composants sont calculés et additionnés pour créer la métrique AGTS pour chaque  $u$ . Les valeurs possibles de  $u$  sont considérées entre le pourcentage de 0% et 99,99% de l'ensemble de données; Ceci est arbitraire, mais en ligne avec la pratique publiée (Grabemann et al., 2008), et il y a toujours > 2 valeurs supérieures à 99,99% dans les données utilisées ici. Les paramètres sont combinés pour que l'AGTS mesure, chaque composant étant normalisé à l'amplitude de 1,0 dans la plage évaluée de  $u$ .

$$AGTS = \frac{1}{3} (E_{MRL} + E_{STAB} + E_{ER})$$

Un RMSE est calculé pour la différence verticale (tel que tracé) entre les observations (excès moyens) et la ligne pour la région supérieure ou égale à  $u$ . L'ensemble des valeurs  $E_{MRL}$  est alors normalisé de telle sorte que le plus bas est défini sur 0 et le plus élevé vers 1,0. Le  $E_{STAB}$  est calculé d'une manière similaire à la  $E_{MRL}$  mais en utilisant les deux paramètres GPD, l'échelle et la forme modifiées; Une ligne qui est plane avec une valeur constante égale à celle du paramètre à  $u$  est utilisée pour calculer un RMSE. Ces deux valeurs RMSE sont normalisées (les valeurs les plus élevées sont définies sur un et le plus bas vers zéro) avant d'être ajoutées pour donner  $E_{STAB}$ .  $E_{STAB}$  est lui-même normalisé de la même manière à des valeurs comprises entre 0 et 1.  $E_{ER}$  est simplement le nombre de  $X_i$  ci-dessus  $u$  divisé par le nombre total de données considérées (c'est-à-dire,  $X_i > 0$ ). Notez que cela implique normalement  $E_{ER}$  et que  $E_{ER}$  diminue à mesure que le seuil considéré augmente.

Enfin, pour stabiliser les résultats d'AGTS bruts, un polynôme est installé. Ensuite, l'estimation finale d'un seuil «statistique» optimal est choisie comme point d'inflexion le plus élevé du polynôme avec une erreur totale d'AGTS inférieure à 0,5. Les polynômes des ordres 2 à 10 ont été évalués pour leur pertinence. L'AGTS est mis en œuvre dans «R» (R Core Team, 2014) en utilisant plusieurs paquets, notamment «evmix» (Hu et

Scarrott, 2013). L'AGTS a pris <1 minute pour évaluer un seuil pour ces jauges, qui ont chacun 50 000 points de données .

### 2.3.6 Valeurs de retour

Une façon de comparer la méthode de sélection du seuil est de calculer le niveau de retour  $H_m$  pour la période de retour  $m$  année. Après avoir identifié le seuil et estimé les paramètres de l'échelle et de la forme  $(u, \sigma, \xi)$  pour chaque méthode de sélection du seuil, la valeur de retour pour le GPD peut être estimée par :

$$H_m = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ (m\lambda)^\xi - 1 \right]$$

Où  $\lambda$  est le nombre moyen de dépassements par an ,  $k$  est la taille de l'ensemble des excès au-dessus d'un seuil élevé et  $n$  le nombre d'années pour lesquelles des données sont disponibles.

$$\lambda = \frac{k}{n}$$

### 2.3.7 conclusion

En comparant une gamme de méthodologies de sélection de seuil aux sélections visuelles de trois interprètes indépendants, il est possible de conclure que l'AGTS est une technique complémentaire utile pour estimer le seuil pour l'analyse de la valeur extrême du niveau de la mer et s'avère applicable dans d'autres domaines En tant que finance . L'AGTS a généré des résultats favorables dans la majorité des cas, à la fois dans l'ensemble de données de surtension et les ensembles de données . Cette recherche fournit une méthode automatisée de sélection de seuil qui reproduit efficacement des seuils dérivés manuellement. Il correspond également à l'effet de l'incertitude associée à l'estimation de sélection de seuil à l'aide du test bootstrap avec remplacement, ce qui réduit la subjecti-

vité de l'approche manuelle bien établie. Cependant, nous notons que d'autres méthodes numériques seront également valides, selon les circonstances

Les avantages de l'AGTS sont qu'il est efficace sur le plan informatique, reproductible et que les méthodes testées reproduisent les seuils manuels les plus précisément estimés par les praticiens. Il peut également être un outil utile pour les non-experts, ou accélérer les flux de travail qui incluent l'estimation du seuil manuel. La quantité d'expertise préalable requise dans la sélection du seuil est considérablement réduite, ce qui rapproche l'EVA à une plus large gamme d'utilisateurs. Notre nouvelle méthode automatisée est significativement facile et rapide à mettre en œuvre (librement disponible en annexe) d'un point de vue pratique, pour des ensembles de données longs. La nouveauté de l'AGTS réside dans le fait que la première procédure consiste à reproduire la méthode traditionnelle de sélection du seuil visuel. Une recherche plus poussée pourrait impliquer l'élaboration d'une interface utilisateur graphique qui peut fournir des résultats d'une manière plus commerciale; une interface conviviale nécessite des compétences techniques minimales pour les praticiens sans connaissance du logiciel R. À l'heure actuelle, l'AGTS n'a pas été testé contre des séries chronologiques synthétiques de données, ce qui donnerait un aperçu supplémentaire de son efficacité si le synthétique était conçu de manière appropriée, mais nous prévoyons que Une estimation de seuil supérieure à d'autres méthodes pourrait être généralement obtenue.

# Chapitre 3

## Estimation de la prime de réassurance

### 3.1 Introduction

La réassurance est un secteur de l'économie indispensable à l'activité d'assurance. De plus, elle constitue un instrument de premier plan pour toute organisation soucieuse de la bonne gestion de ses risques. Bien qu'utilisée dans tous les secteurs d'activité de l'assurance, elle demeure fortement orientée vers l'assurance non-vie.

La réassurance est un mécanisme permettant de transférer en tout ou en partie le risque accepté par un assureur vers un réassureur afin de limiter ses engagements. A ce titre, la réassurance est familièrement qualifiée d'assurance au deuxième degré dans la mesure où elle consiste en une véritable assurance des assureurs.

En conséquence, elle représente un des secteurs d'activité les plus méconnus du public en raison que la relation (de travail) n'existe directement qu'entre assureurs et réassureurs.

Contrairement aux sociétés d'assurance dont l'exercice de leurs fonctions est localisé à un niveau régional ou national, la réassurance se veut essentiellement internationale. Ainsi, le réassureur acceptant en général des risques de faible fréquence mais à un coût

potentiel élevé peut améliorer la mutualisation de ses risques en les répartissant à l'échelle mondiale. Cette mutualisation géographique peut même conduire, par exemple, à la couverture des tempêtes européennes, des tremblements de terre au Japon et des ouragans aux Etats-Unis à l'intérieur d'un traité de réassurance unique.

**Définition 3.1** *L'assurance est opération par laquelle une personne (l'assureur) groupe en mutualité d'autres personnes (les assurés) afin de les mettre en situation de s'indemniser mutuellement des pertes éventuelles (les sinistres) auxquelles les expose de la réalisation de certains risques, aux moyen de sommes (primes ou cotisations) versés par chaque assuré à une masse commune gérée par l'assureur.*

**Définition 3.2** *La réassurance est une opération par laquelle une compagnie d'assurance s'assure auprès d'une autre société pour une partie des risques qu'elle a pris en charge*

## 3.2 Principes de la réassurance

Il s'agit pour la société d'assurance (la cédante) de céder à une société spécialisée (le réassureur) un risque aléatoire (les conséquences d'un sinistre incendie, de la mort, d'un tremblement de terre, d'un naufrage) contre le règlement d'une prime de réassurance correspondant au risque transféré et au mode de transfert prévu dans le contrat de réassurance (le traité}. La société d'assurance effectue une cession auprès d'un ou plusieurs réassureurs (l'assureur secondaire) par un contrat de réassurance (ou programme). Un contrat de réassurance existe sous de nombreuses formes et peut couvrir une période donnée ou non, bien que la plupart des contrats de réassurance aient une période de validité d'un an.

Dans la réalité, les portefeuilles cédés aux réassureurs peuvent porter sur des centaines de milliers, voire des millions de particuliers, et les garanties peuvent s'élever à des centaines de millions.

Il arrive souvent qu'un réassureur se réassure lui-même auprès d'autres réassureurs. Cela s'appelle la rétrocession. Le réassureur sera alors appelé rétrocedante et il rétrocède tout ou partie de son risque auprès d'un rétrocessionnaire.

### **3.2.1 Formes de réassurance**

On distingue deux types : réassurance proportionnelle et réassurance non proportionnelle.

### **3.2.2 La réassurance proportionnelle (sommés)**

La réassurance proportionnelle est déterminée en fonction des capitaux assurés sur chaque contrat relevant du champ d'application du traité. Cette réassurance est donc déterminée à la souscription des contrats, avant tout sinistre.

On trouve deux formes de réassurance proportionnelle :

La réassurance dite en participation pure, dans laquelle le réassureur cède à la réassurance un pourcentage des primes d'un portefeuille donné, et la même proportion des sinistres.

La réassurance dite en excédent de capitaux, dans laquelle le réassureur intervient lorsque la garantie de chaque contrat dépasse une certaine somme.

La réassurance proportionnelle est très utilisée pour les assurances individuelles, accidents, incendie ou encore dans les assurances vie.

### **3.2.3 La réassurance non proportionnelle (dommage)**

On dit que la réassurance est non proportionnelle lorsque l'assureur détermine le montant limite qu'il est prêt à assumer soit par rapport à sa charge de sinistres, soit par rapport à sa perte, la part excédentaire étant prise en charge par le réassureur. On trouve deux types dans cette catégorie (réassurance non proportionnelle) :

La réassurance dite en excédent de sinistres, dans laquelle le réassureur intervient pour les sinistres dépassant un certain montant.

La réassurance dite en excédent de pertes, dans laquelle le réassureur intervient lorsque l'ensemble des sinistres d'une année dépasse un certain pourcentage des primes encaissées.

La réassurance non proportionnelle est caractéristique des assurances de responsabilité.

**Remarque 3.3** *Les assureurs s'efforcent de respecter une règle d'or :  $S = P$  :  $S =$  sinistres ;  $P =$  primes :*

$$S = P$$

### 3.3 Estimation de la prime de réassurance

Pour estimer une prime de réassurance, on doit employer un principe d'évaluation approprié. Il y a plusieurs variantes pour définir des principes de calcul de prime.

Wang propose un principe de calcul de prime basé sur une transformation proportionnelle de la fonction de hasard. Ce principe est lié à l'idée des mesures de risque cohérentes.

Cette approche à évaluer des contrats d'assurance traite des pertes d'assurance en tant que variables aléatoires positives, et produit des primes qui sont plus hautes que la valeur prévue de la perte d'assurance.

### 3.4 Principes de calcul des primes

Soient  $\chi$  dénoter l'ensemble des risques d'assurance ; et  $X, Y, Z, \dots$  dénotent les membres typiques de  $\chi$ .

Un principe de calcul de prime est une fonction :

$$\begin{aligned}\Pi : \mathcal{X} &\rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty[ \\ X &\rightarrow \Pi(X)\end{aligned}$$

### 3.4.1 Quelques propriétés désirables

Beaucoup de types des principes de prime d'assurance peuvent être caractérisés au moyen d'un ensemble d'axiomes, nous énonçons brièvement les axiomes de Wang et al "cite :41" :

L'indépendance : Le prix d'un risque d'assurance dépend seulement de sa distribution. C'est-à-dire, si  $X$  et  $Y$  ont les mêmes fonctions de distribution, alors :

$$\Pi(X) = \Pi(Y)$$

Monotonie : si  $X, Y \in \mathcal{X}$ , sont tels que  $X \leq Y$  en probabilité, alors :

$$\Pi(X) \leq \Pi(Y)$$

Sous additivité : pour  $X, Y \in \mathcal{X}$ , nous avons :

$$\Pi(X + Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$$

Additivité de comonotonie : soient  $X, Y \in \mathcal{X}$ , comonotonic, alors :

$$\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$$

on dit que  $X$  et  $Y$  seraient comonotonic s'il existent des fonctions à valeurs réelles croissantes  $f_1$  et  $f_2$  et une variable aléatoire  $Z \in \mathcal{X}$ , tels que  $X = f_1(Z)$  et  $Y = f_2(Z)$ .

Continuité : soient  $X \in \mathcal{X}$  et  $a \geq 0$ , alors :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Pi(\max(X - a, 0)) = \Pi(X) \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \Pi(\min(X, a)) = \Pi(X)$$

### 3.4.2 Exemples des principes de calcul des primes

On a proposé beaucoup de différents principes de calcul des primes en science actuarielle. nous énumérons les bien connus :

**Principe de prime nette :**

$$\Pi(X) = E(X) = \int_0^{\infty} S_X(t) dt$$

**Principe prévu de valeur :** pour certains  $\theta > 0$  :

$$\Pi(X) = (1 + \theta) E(X)$$

à condition que  $E(X) < \infty$ .

**Principe de variance :** pour certains  $\beta > 0$  :

$$\Pi(X) = E(X) + \beta var(X)$$

**Principe de l'écart-type :** pour certains  $\alpha > 0$  :

$$\Pi(X) = E(X) + \alpha \sqrt{var(X)}$$

**Principe exponentiel :** pour certains  $\gamma > 0$  :

$$\Pi(X) = \frac{1}{\gamma} \log E(\exp \Gamma(X))$$

Tous les principes de prime cités jusqu'à présent sont principalement basés sur les deux premiers moments. Il est bien connu que les deux premiers moments ne puissent

pas correctement refléter le niveau du risque d'assurance puisque des distributions de perte souvent sont fortement biaisées.

Wang "cite 39" a proposé un nouveau principe de prime basé sur le hasard proportionnel.

**Principe de hasard proportionnel "Proportional Hazards Premium Principle"** : Dans l'assurance accidents, un risque est une perte aléatoire non négative  $X$  défini par sa fonction de distribution  $F_X(x)$  ou fonction de survie  $S_X(x) = 1 - F(x)$ .

Pensant à la taille de revendication en tant que "vie", nous pouvons définir un taux de hasard pour un risque  $X$  à condition que  $F(x)$  soit absolument continu :

$$\eta_X(x) = \frac{F'_X(x)}{1 - F_X(x)} = -\frac{d}{dx} \log S_X(x)$$

Une expérience de revendications défavorable signifie que la perte réalisée est plus grande que prévue, ou la vie est plus longue que la vie moyenne et le taux de hasard est inférieur (qui est vis-à-vis le risque de mortalité pour des assureurs de la vie). Pour imposer une marge de sûreté, on peut dégonfler le taux de hasard par un multiple :

$$\eta_Y(t) = \frac{1}{\rho} \eta_X(t), \rho > 0, (t \geq 0)$$

ce qui définit une autre variable aléatoire  $Y$  avec

$$S_Y(t) = [S_X(t)]^{1/\rho}$$

**Principe de prime de Wang cite :40** :Ce principe de prime est lié à l'idée des mesures de risque cohérentes, on a alors :

$$\Pi_g(X) = \int_0^\infty g[S_X(t)] dt$$

où  $g$  est une fonction de distorsion croissante, et concave avec  $g(0) = 0, g(1) = 1$ , et

$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  .

On considère que le risque d'assurance est une variable aléatoire positif  $X$  avec la fonction de survie  $S(x) = \bar{F}(x) = 1 - F(x)$ . Un principe de calcul de prime généralement utilisé en littérature d'assurance est le principe de prime nette, dans lequel la prime de risque  $\Pi$  égale à la valeur prévue :

$$\Pi(X) = E(X) = \int_0^{\infty} S(x) dx.$$

**Wang cite :40** :généralise ce principe comme suit :

$$\Pi_g = \int_0^{\infty} g(S(x)) dx.$$

où  $g$  est une fonction de distorsion croissante, et concave avec  $g(0) = 0, g(1) = 1$ , et  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  .

Considérons un excès-de-perte de réassurance au-dessus d'un niveau élevé de rétention  $R$ , la fonction de survie de toute la quantité de revendication  $(X - R)_+$  , avec  $s_+ = \max(0, s)$  égale

au  $S_R(y) = S(y + R)$  , quand  $y > 0$  , appliquons du principe de prime de **Wang** à cette réassurance, la prime de risque  $\Pi$  pour une politique de réassurance au-dessus d'un niveau élevé de rétention  $R$  devient

$$\Pi_{g,R} = \int_0^{\infty} g(S_R(y)) dy = \int_0^{\infty} g(S(y + R)) dy. \quad (3.1)$$

Après avoir remplacé  $y + R$  par  $x$  , la prime de risque  $\Pi_R$  devient

$$\Pi_{g,R} = \int_R^{\infty} g(S(x)) dx$$

Si la fonction de distorsion  $g(x) = x^{1/\rho}$ ,  $\rho \geq 1$  ,on trouve le principe de prime de

hasard proportionnel (PH)

$$\Pi_{\rho,R} = \int_R^{\infty} [S(x)]^{1/\rho} dx. \quad (3.2)$$

### 3.5 Estimation de la prime de réassurance dans le cas i.i.d

Dans quelques problèmes actuariels, comme dans le traité de réassurance, on s'intéresse par l'estimation d'une prime pour un niveau indiqué de rétention  $R > 0$ . Nous citons deux estimateurs pour la prime de réassurance  $\Pi_{\rho,R}$

#### 3.5.1 Estimateur paramétrique

On considère  $(X_1, \dots, X_n)$  un n-échantillon de  $X$  de fonction de répartition  $F$  et on définit la statistique d'ordre associée  $(X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n})$ .

De plus, soit  $1 \leq k = k_n \leq n$  une suite des entiers positifs, tels que  $k_n \rightarrow \infty$  et  $k_n/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Le nombre entier  $k$  représente le nombre des extrêmes utilisées dans l'estimation de l'indice de queue.

Maintenant, soit  $\delta_{opt} = \delta_n := k/n$  puis le niveau de rétention optimal sera estimé par  $\hat{R}_{opt} = X_{n-k,n}$ .

Necir et Boukhetala cite 33 proposent un estimateur non paramétrique pour  $\Pi_{\rho,R}$ , pour un indice d'aversion de risque fixe  $\rho \geq 1$ , basé sur la distribution empirique concernant l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , comme suit :

$$\hat{\Pi}_{\rho, \hat{R}_{opt}}^{npar} := \sum_{i=1}^k \left( \frac{i}{n} \right)^{1/\rho} [X_{n-i+1,n} - X_{n-i,n}]$$

Sous la condition de variation régulière du second ordre de la fonction de survie  $1 - F(x)$ , leur estimateur est asymptotiquement normale.

**Estimateur de Vandewall et Beirlant cite 38 :** Afin d'obtenir un estimateur pour la prime de réassurance données dans l'expression (3.1) Vandewall et Beirlant utilisent le théorème de Karamata qui permet de dire que si  $\mathcal{L}$  est une fonction à variation lente au voisinage de l'infini, et  $\alpha < -1$ , alors :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{\alpha+1} \mathcal{L}(y)}{\int_y^\infty x^\alpha \mathcal{L}(x) dx} = -(\alpha + 1).$$

Soient  $\bar{F}(x) = S(x) = x^{-1/\xi} \mathcal{L}(x)$  et  $g(1/\cdot)$  est à variation régulière au voisinage de l'infini d'indice  $-\beta$ , i.e.  $g(1/x) = x^{-\beta} \mathcal{L}_1(1/x)$  où  $\mathcal{L}_1$  est une fonction à variation lente au voisinage de l'infini, En utilisant des résultats sur la composition des fonctions à variation régulière, on en déduit que :

$$g(S(x)) = x^{\beta/\xi} \mathcal{L}_2(x)$$

où  $\mathcal{L}_2$  est une fonction à variation lente au voisinage de l'infini.

En invoquant le théorème de Karamata, on en déduit pour  $\xi < -\beta$  que :

$$\Pi_{g,R} \sim \frac{R^{1+\beta/\xi} \mathcal{L}_2(R)}{-\beta/\xi - 1} \sim \frac{1}{-\beta/\xi - 1} R g(S(R)), \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

– pour  $g = x^{1/\rho}$ ,  $\rho \geq 1$  on a

$$\Pi_{g,R} \sim \frac{R^{1+\beta/\xi} \mathcal{L}_2(R)}{-\beta/\xi - 1} \sim \frac{1}{-\beta/\xi - 1} R (S(R))^{1/\rho}, \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

Par conséquence, l'estimateur de la prime de réassurance  $\Pi_{\rho,R}$  est donné par :

$$\widehat{\Pi}_{\rho,R} = \frac{1}{-\beta/\widehat{\xi} - 1} R (\widehat{S}(R))^{1/\rho} \quad (3.3)$$

Après l'estimation de  $\xi$  et  $S(R)$  et sous la condition de variation régulière du second ordre de la fonction de survie  $1 - F(x)$ , l'estimateur (3.3) est asymptotiquement normale.

### 3.5.2 Définition de l'estimateur et résultat principal



Soient  $X, X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires positives avec la fonction de distribution  $F$ , où

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = cx^{-1/\xi} (1 + x^\delta L(x))$$

Pour  $\xi \in (0, 1)$ ,  $\delta > 0$ ,  $L \in RV_0$ , et une constante  $c$ .  $L \in RV_0$  signifie que  $L$  est une fonction qui varie lentement, c'est-à-dire  $L(tx)/L(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \infty$  pour tout  $t > 0$ .

Pour  $\xi \in (0, 1/2)$ ,  $X$  a une variance finie et l'estimation de  $E[X]$  pourrait être effectuée en utilisant la moyenne de l'échantillon  $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$  qui est asymptotiquement normal quand  $n \rightarrow \infty$  "par le théorème de central limite". Si  $\xi \in (1/2, 1)$ ,  $\bar{X}$  converge vers une distribution stable et est toujours une estimation valide (voir par exemple Durrett (1996)). Cependant, il existe des difficultés à estimer les paramètres de la distribution stable limitante. Si l'échantillon est assez grand, il pourrait être divisé en sous-échantillons, pour lesquels on peut calculer la moyenne de chacun. Une telle procédure rendrait  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$ , qui serait iid avec une distribution qui est presque stable. L'inférence sur les paramètres inconnus pourrait alors être basée sur des méthodes de vraisemblance maximale. Si la taille de l'échantillon  $n$ , n'est pas assez grande pour tenir compte de cette méthode, bootstrap décrit dans Romano et Wolf (1999), est une alternative.

Ci-dessous, une procédure différente est suggérée pour le modèle. Elle donne des estimateurs qui sont asymptotiquement normalement répartis et impartiaux avec une variance facilement estimée. Dans les calculs,  $\delta$  ne sera pas estimé. La raison en est que, normalement, La taille de l'échantillon  $n$  devrait être très grande pour l'estimer raisonnablement bien. En même temps, les propriétés de l'estimation moyenne seront examinées en tant que fonctions de  $\delta$ .

L'estimation standard de  $E[X]$  est

$$\bar{X} = \int x dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Où  $F_n$  est la fonction de distribution empirique. On propose une estimation du formulaire

$$\hat{E}[X] = \hat{M} = \hat{\mu} + \hat{\tau} = \int_0^{u_n} x dF_n(x) + \int_{u_n}^{\infty} x d\hat{F}_n(x)$$

Où  $\tau$  est la partie de  $M$  issue de la queue de la distribution. On suppose que la queue commence à un certain niveau  $u_n$ , qui dans l'analyse, supposera avoir tendance à l'infini.  $\hat{F}_n$  est une estimation de la fonction de distribution de la queue.

Soit  $F_{u_n}(y) = P(X - u_n \leq y \mid X > u_n)$  la répartition des excès sur le seuil  $u_n$  telle que :

$$\bar{F}_{u_n}(y) = \frac{\bar{F}(u_n + y)}{\bar{F}(u_n)} = \left(1 + \frac{y}{u_n}\right)^{-1/\xi} \frac{1 + (u_n + y)^{-\delta} L(u_n + y)}{1 + u_n^{-\delta} L(u_n)}$$

Et si  $\beta_n = \beta(u_n) = u_n \xi$ , alors  $\bar{F}_{u_n}(y)$  est un GPD perturbé, où le df de la distribution Pareto généralisée (GPD) a la forme

$$G_{\beta, \xi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{x}{\beta})^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-x/\beta}, & \xi = 0 \end{cases} \quad x \in \begin{cases} [0, \infty[, & \xi \geq 0. \\ [0, -\beta/\xi], & \xi < 0 \end{cases}$$

Cela signifie que pour de grandes valeurs de  $u_n$ ,

$$F_{u_n}(y) \approx G_{\beta(u_n), \xi}(y) \tag{3.4}$$

dans le sens que

$$\lim_{u_n \rightarrow y_F} \sup_{0 < y < y_F - u_n} |F_{u_n}(y) - G_{\beta(u_n), \xi}(y)| = 0$$

Où  $y_F$  est le bon point final de  $F$  et  $\beta$  est une fonction positive. Voir aussi Théorème 3.4.13 dans Embrechts et al. (1997).

On étudie ce résultat à titre d'exemple un estimateur alternatif pour la transformation de risque proportionnel  $\Pi_\rho$  comme suit :

$$\hat{\Pi}_{\rho, n} = \int_0^{u_n} \left( n^{-1} \sum_{j=1}^n 1(X_j \geq x) \right)^{1/\rho} dx + (\hat{p}_n)^{1/\rho} \frac{\rho \hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n \rho}$$

Selon des hypothèses appropriées, cet estimateur est asymptotiquement normalisé et impartial avec une variance facilement estimée.

Par définition  $\bar{F}(u_n + y) = \bar{F}(u_n) \bar{F}_{u_n}(y)$ , et pour  $N = N_n = |\{i : X_i > u_n\}|$ , Le nombre de  $X_i$  qui dépassent  $u_n$ , on a  $N \sim \text{Bin}(n, p_n)$  avec  $p_n = P(X_1 > u_n)$ , et l'estimation de  $p_n = \bar{F}(u_n)$  peut être effectuée en utilisant

$$\hat{p}_n = \hat{\bar{F}}(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u_n\}} = \frac{N}{n}$$

Pour les grandes valeurs de  $u_n$ , on utilise

$$\hat{\bar{F}}_{u_n}(y) = \bar{G}_{\hat{\beta}, \hat{\xi}}(y)$$

Pour des estimations appropriées  $\hat{\beta} = \hat{\beta}(u_n)$ , et  $\hat{\xi} = \hat{\xi}_n$  notez que  $\beta$  sera estimé séparément, c'est-à-dire que  $\beta = \xi u_n$  un ne sera pas utilisé. La raison en est d'obtenir une plus grande souplesse dans le montage des paramètres, ce qui permet de compenser la distribution sous-jacente, ce qui n'est pas un GPD exact.

Soit

$$Y_{i,n} = X_j - u_n \quad \text{à condition de } X_j > u_n \quad i = 1, \dots, n$$

(Où  $j$  est l'indice du  $i$ ème dépassement) sont i.i.d. Rv's with cdf  $F$  un basé sur l'échantillon  $(Y_{1:n}, Y_{2:n}, \dots, Y_{N_n:n})$ , l'approximation (3.4) nous motive à prendre un estimateur pour  $F_{u_n}(y)$  comme suit :

$$\hat{\bar{F}}_{u_n}(y) = \bar{G}_{\hat{\beta}_n, \hat{\xi}_n}(y) \quad , y > 0 \quad (3.5)$$

Par conséquent, un estimateur de  $F(u_n + y)$  est

$$\hat{\bar{F}}(u_n + y) = \hat{\bar{F}}(u_n) \hat{\bar{F}}_{u_n}(y) = \hat{p}_n \bar{G}_{\hat{\beta}_n, \hat{\xi}_n}(y) \quad (3.6)$$

Où  $\hat{\beta}_n$  et  $\hat{\xi}_n$  sont des estimateurs cohérents de  $\xi$  et  $\beta$  respectivement. En outre, ces estimateurs sont asymptotiquement normaux à condition que  $\xi > -1/2$ . Smith (1987) établit dans le théorème (3.2), la normalité asymptotique de  $(\hat{\beta}_n, \hat{\xi}_n)$  comme suit :

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_N / \beta_N - 1 \\ \hat{\xi}_N - \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2(0, \mathbb{Q}^{-1}) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

où

$$\mathbb{Q}^{-1} = (1 + \xi) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 + \xi \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

À condition que  $\sqrt{N}u_N^{-\delta}L(u_N) \rightarrow 0$  comme  $N \rightarrow \infty$  et  $x \rightarrow x^{-\delta}L(x)$  ne soit pas croissant près de l'infini. Dans le cas  $\sqrt{N}u_N^{-\delta}L(u_N) \rightarrow 0$ , la distribution limite dans (3.7) est polarisée.

Ici  $\xrightarrow{D}$  désigne la convergence dans la distribution et  $N_2(0, \varepsilon^2)$  représente la v.a de la moyenne 0 et de la variance  $\varepsilon^2$ .

On suppose que la queue de la distribution commence au seuil  $u_n$ , alors, on a

$$\Pi_\rho = \int_0^{u_n} (\bar{F}(x))^{1/\rho} dx + \int_{u_n}^{\infty} (\bar{F}(x))^{1/\rho} dx \quad , \rho > 1 \quad (3.9)$$

Un estimateur de  $\Pi_\rho$  Est donné en remplaçant (3.6) par l'équation (3.9), comme suit :

$$\hat{\Pi}_{\rho,n} = (\hat{p}_n)^{1/\rho} \int_{u_n}^{\infty} (\bar{G}_{\hat{\beta}_n, \hat{\xi}_n}(y))^{1/\rho} dy$$

Où  $F_n$  est la fonction de distribution empirique appartenant à l'échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Après l'intégration, nous obtenons le nouvel estimateur fourni par la formule (1.5).

$$\Pi_{\rho,R} = \int_0^{\infty} (\bar{F}(x))^{1/\rho} dx$$

D'après le théorème de pickands on a :

$$\bar{F}(x) \approx \bar{G}(x) = \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

D'ou

$$\Pi_{\rho,R} = \int_0^\infty \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-1/\rho\xi} dx$$

On pose  $t = 1 + \frac{\xi x}{\beta}$  ,  $dt = \frac{\xi}{\beta} dx \Rightarrow dx = \frac{\beta}{\xi} dt$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho,R} &= \int_1^\infty \frac{\beta}{\xi} t^{-1/\rho\xi} dt \\ &= \frac{\beta}{\xi} \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{\xi\rho}} t^{1-1/\xi\rho} \right]_1^\infty \\ &= \frac{\beta\rho}{1 - \xi\rho} \end{aligned}$$

La normalité asymptotique de  $\hat{\Pi}_{\rho,n}$  est établi dans le théorème suivant.

**Théorème 3.4** *Soit  $F$  une fonction de distribution vérifiant (1.3) avec  $\xi \in (1/2, 1)$ . Supposons que la fonction  $L$  soit délimitée localement dans  $[x_0, +\infty)$  pour  $x_0 \geq 0$  et  $x \rightarrow x^{-\delta}L(x)$  décroît près de l'infini, pour un certain  $\delta > 0$ . Pour tout  $u_n = O(n^{\alpha\xi})$ , Avec  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\rho > 1$  tel que  $4\alpha/\rho - 2\alpha\xi < 1$ , on a*

$$\frac{\sqrt{n}}{\gamma_n \sigma_n} \left( \hat{\Pi}_{\rho,n} - \Pi_\rho \right) \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Où

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\theta_1^2}{\gamma_n^2} p_n (1 - p_n) + \frac{2(1 + \xi) \theta_2^2 \beta_n^2}{p_n \gamma_n^2} + \frac{(1 + \xi)^2 \theta_3^2}{p_n \gamma_n^2} - \frac{(1 + \xi) \beta_n \theta_2 \theta_3}{p_n \gamma_n^2}$$

$$\gamma_n^2 = \text{var} \left( \int_0^{u_n} \left( \bar{F}(x) \right)^{1/\rho-1} 1_{\{X_1 \leq x\}} dx \right)$$

et

$$\theta_1 = \frac{\beta_n (p_n)^{1/\rho-1}}{1 - \xi\rho} \quad \theta_2 = \frac{\rho (p_n)^{1/\rho}}{1 - \xi\rho} \quad \theta_3 = \frac{\rho^2 \beta_n (p_n)^{1/\rho}}{(1 - \xi\rho)^2}$$

avec  $\beta_n = u_n \xi$

### 3.5.3 Preuve de résultat principal

La proposition suivante est déterminante pour la preuve de notre résultat.

**Proposition 3.5** *Soit  $F$  une fonction de distribution remplissant (1.3) avec  $\xi \in (0, 1)$ ,  $\delta > 0$  et quelques  $c$  réels. Supposons que  $L$  soit délimité localement dans  $[x_0, +\infty[$  pour  $x_0 \geq 0$ . Ensuite, pour  $n$  assez grand, pour tout  $u_n = O(n^{\alpha\xi})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , on a*

$$p_n = P(X_1 > x) = c(1 + o(1))n^{-\alpha},$$

$$\gamma_n^2 = \text{var} \left( \int_0^{u_n} (\bar{F}(x))^{1/\rho-1} 1_{\{X_1 \leq x\}} dx \right) = O(n^{2\alpha(\xi-1/\rho+1)})$$

et

$$\sqrt{np_n}u_n^{-\delta}L(u_n) = O(n^{-\alpha/2-\alpha\xi\delta+1/2})$$

**Preuve du théorème 2.1.** Ecrivons ■

$$\sqrt{n} \left( \hat{\Pi}_{\rho,n} - \Pi_\rho \right) = B_{n,1} + B_{n,2}$$

et

$$\sqrt{n} \left( \hat{p}_n^{1/\rho} \frac{\rho \hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n \rho} - \int_{u_n}^{\infty} (\bar{F}(x))^{1/\rho} dx \right) = B_{n,1} + B_{n,2}$$

Où

$$B_{n,1} = \hat{p}_n^{1/\rho} \frac{\rho \hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n \rho} - p_n^{1/\rho} \frac{\rho \beta_n}{1 - \xi_n \rho}$$

et

$$B_{n,2} = p_n^{1/\rho} \frac{\rho \beta_n}{1 - \xi_n \rho} - \int_{u_n}^{\infty} (\bar{F}(s))^{1/\rho} ds$$

Tout d'abord, remarques que  $B_{n,1}$ , peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} B_{n,1} &= \frac{\rho \hat{\beta}_n}{1 - \hat{\xi}_n \rho} \sqrt{n} \left( (\hat{p}_n)^{1/\rho} - (p_n)^{1/\rho} \right) \\ &\quad + (p_n)^{1/\rho} \frac{\rho}{1 - \hat{\xi}_n \rho} \sqrt{n} \left( \hat{\beta}_n - \beta_n \right) \\ &\quad + \frac{\rho^2 \beta_n (p_n)^{1/\rho}}{(1 - \hat{\xi}_n \rho) (1 - \xi_n \rho)} \sqrt{n} \left( \hat{\xi}_n - \xi_n \right) \end{aligned}$$

D'après le résultat de Smith (1987), On a , quand  $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\beta}_n / \beta_n - 1 = O_p \left( u_n^{-\delta} L(u_n) \right) \quad , \text{et} \quad \hat{\xi}_n - \xi_n = O_p \left( u_n^{-\delta} L(u_n) \right)$$

D'autre part, par le théorème central limite, on a

$$\hat{p}_n - p_n = O_p \left( \sqrt{p_n/n} \right) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty$$

Puis, avec la méthode delta, nous obtenons

$$B_{n,1} = \theta_1 (1 + op(1)) \sqrt{n} (\hat{p}_n - p_n) + \theta_2 (1 + op(1)) \sqrt{n} (\hat{\beta}_n - \beta_n) + \theta_3 (1 + op(1)) \sqrt{n} (\hat{\xi}_n - \xi_n),$$

où

$$\theta_1 = \frac{\beta_n (p_n)^{1/\rho - 1}}{1 - \xi_n \rho}, \quad \theta_2 = \frac{\rho (p_n)^{1/\rho}}{1 - \xi_n \rho}, \quad \theta_3 = \frac{\rho^2 \beta_n (p_n)^{1/\rho}}{(1 - \xi_n \rho)^2}.$$

Pour  $B_{n,2}$  : on a

$$B_{n,2} = (p_n)^{1/\rho} \frac{\rho \beta_n}{\xi_n \rho - 1} - \int_{u_n}^{\infty} \left( \bar{F}(s) \right)^{1/\rho} ds$$

D'après l'équation

$$\bar{F}_{u_n}(s) = \frac{\bar{F}(u_n + s)}{\bar{F}(u_n)} = \left( 1 + \frac{s}{u_n} \right)^{1/\xi} \frac{1 + (u_n + s)^{-\delta} L(u_n + s)}{1 + u_n^{-\delta} L(u_n)}.$$

Cela nous permet de réécrire

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left( \bar{F}(s + u_n) \right)^{1/\rho} ds &= \left( \bar{F}(u_n) \right)^{1/\rho} \int_0^\infty \left( \bar{F}_{u_n}(s) \right)^{1/\rho} ds \\
&= \left( \bar{F}(u_n) \right)^{1/\rho} \int_0^\infty \left[ \left( 1 + \frac{s}{u_n} \right)^{-1/\xi} \frac{1 + (u_n + s)^{-\delta} L(u_n + s)}{1 + u_n^{-\delta} L(u_n)} \right]^{1/\rho} ds \\
&= (p_n)^{1/\rho} \left( \frac{1}{1 + u_n^{-\delta} L(u_n)} \right)^{1/\rho} \\
&\quad \times \int_0^\infty \left[ \left( 1 + \frac{s}{u_n} \right)^{-1/\xi} 1 + (u_n + s)^{-\delta} L(u_n + s) \right]^{1/\rho} ds \\
&= (p_n)^{1/\rho} \left( \frac{1}{1 + u_n^{-\delta} L(u_n)} \right)^{1/\rho} u_n^{1/\xi\rho} \int_{u_n}^\infty x^{-1/\xi\rho} (1 + x^{-\delta} L(x))^{1/\rho} dx \\
&= (p_n)^{1/\rho} \left( \frac{1}{1 + u_n^{-\delta} L(u_n)} \right)^{1/\rho} u_n^{1/\xi\rho} \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{\xi\rho}{1 - \xi\rho} u_n^{1-1/\xi\rho} \right) + \int_{u_n}^\infty x^{-1/\xi\rho - \delta} L(x)^{1/\rho} dx \right]
\end{aligned}$$

Puisque la fonction  $L$  est délimitée localement dans  $[x_0, \infty)$  pour  $x_0 \geq 0$  et  $x^{-\delta}L(x)$  ne croît pas près de l'infini, alors pour tous les grands  $n$ , on a :

$$u_n^{1/\xi\rho} \int_{u_n}^\infty x^{-1/\xi\rho - \delta} L(x)^{1/\rho} dx = O(u_n^{-\delta})$$

Et donc, pour tous les grands  $n$

$$\int_{u_n}^\infty \left( \bar{F}_{u_n}(x) \right)^{1/\rho} dx = (p_n)^{1/\rho} \frac{\rho\beta_n}{1 - \xi\rho} (1 - u_n^{-\delta}L(u_n) + O(u_n^{-\delta}L(u_n)))^{1/\rho}$$

par conséquent

$$B_{n,2} = O(u_n^{1-1/\xi\rho - \delta/\rho})$$

Ce qui signifie que, depuis  $1 - 1/\xi\rho - \delta/\rho < 0$ , que  $B_{n,2} \xrightarrow{P} 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Enfin, on obtient cela

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left( \hat{\Pi}_{\rho,n} - \Pi_{\rho} \right) &\rightarrow \theta_1 \sqrt{p_n(1-p_n)} \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_n)}{\sqrt{p_n(1-p_n)}} \\ &+ \frac{\theta_2 \beta_n}{\sqrt{p_n}} \sqrt{np_n} \left( \hat{\beta}_n / \beta_n - 1 \right) \\ &+ \frac{\theta_3}{\sqrt{p_n}} \sqrt{np_n} \left( \hat{\xi}_n - \xi_n \right) + o_p(1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cela nous permet de réécrire

$$\sqrt{n} \left( \hat{\Pi}_{\rho,n} - \Pi_{\rho} \right) \rightarrow \theta_1 \sqrt{p_n(1-p_n)} W_1 + \frac{\theta_2 \beta_n \sqrt{2(1+\xi)}}{\sqrt{p_n}} W_2 + \frac{\theta_3(1+\xi)}{\sqrt{p_n}} W_3 + o_p(1)$$

Où  $(W_i)_{i=1,2,3}$  sont des variables aléatoires normales standard avec  $E[W_i W_j] = 0$  pour tout  $i, j = 1, \dots, 4$  sauf pour

$$\begin{aligned} E[W_2 W_3] &= E \left[ \frac{1}{\sqrt{2(1+\xi)}} \sqrt{np_n} \left( \hat{\beta}_n / \beta_n - 1 \right) \frac{1}{(1+\xi)} \sqrt{np_n} \left( \hat{\xi}_n - \xi_n \right) \right] \\ &= \frac{1}{(1+\xi) \sqrt{2(1+\xi)}} E \left[ \sqrt{np_n} \left( \hat{\beta}_n / \beta_n - 1 \right) \sqrt{np_n} \left( \hat{\xi}_n - \xi_n \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2(1+\xi)}} \end{aligned}$$

De Johansson 2003, sous les hypothèses du théorème (3.4), nous avons, pour tous les nombres réels,  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$

$$\begin{aligned} &E \left[ \exp \left\{ it_1 \frac{\sqrt{n}}{\gamma_n} \left( \bar{Z} - E[Z_1] \right) + i \sqrt{np_n} (t_2, t_3) \begin{pmatrix} \hat{\beta}_N / \beta_N - 1 \\ \hat{\xi}_n - \xi \end{pmatrix} + it_4 \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_n)}{\sqrt{p_n(1-p_n)}} \right\} \right] \\ \rightarrow &\exp \left\{ -\frac{t_1^2}{2} - \frac{1}{2} (t_2, t_3) \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} - \frac{t_4^2}{2} \right\} (1 + o_p(1)) \end{aligned}$$

Comme  $n \rightarrow \infty$ , où  $\mathbb{Q}^{-1}$  est dans (3.8),  $\gamma_n^2 = \text{Var}(Z_1)$  et  $i^2 = -1$ . Il s'ensuit que, avec ce résultat

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \left( \hat{\Pi}_{\rho,n} - \Pi_\rho \right) \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

où

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\theta_1^2}{\gamma_n^2} p_n (1 - p_n) + \frac{2(1 + \xi) \theta_2^2 \beta_n^2}{\gamma_n^2 p_n} + \frac{(1 + \xi)^2 \theta_3^2}{\gamma_n^2 p_n} - 2 \frac{(1 + \xi) \beta_n \theta_2 \theta_3}{\gamma_n^2 p_n}$$

Ceci complète la preuve du théorème (3.4).

# Chapitre 4

## Simulation et application

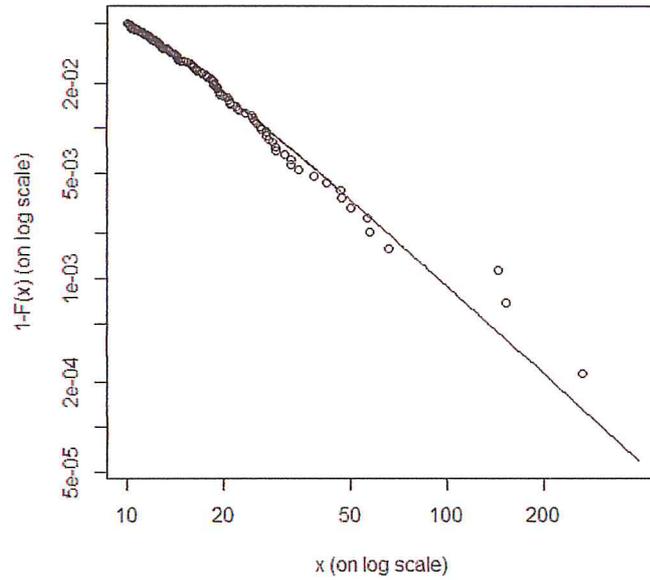
### 4.1 les données de danish

Ces données décrivent les grandes demandes d'assurance incendie au Danemark du jeudi 3 janvier 1980 au lundi 31 décembre 1990. Les données sont contenues dans un vecteur numérique. Les dates de chaque observation sont contenues dans un attribut times. Ils ont été fournis par Mette Rytgaard de Copenhagen Re. Notez que ces données forment une série temporelle irrégulière.

Tracer des données de seuil contre la distribution exponentielle ou la distribution

généralisée de Pareto.

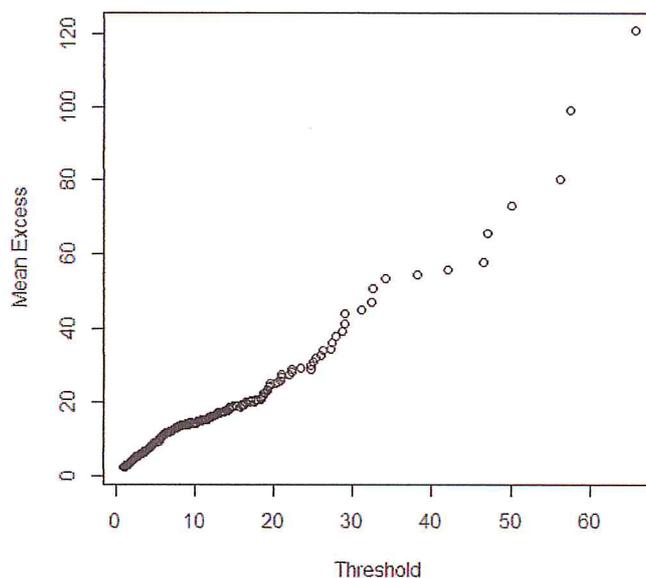
1



4.png

Si  $\xi$  est nul, la distribution de référence est l'exponentielle ; Si  $\xi$  est différent de zéro, la distribution de référence est le Pareto généralisé avec cette valeur de  $\xi$ . Dans le cas de l'exponentielle, l'intrigue est interprétée comme suit. Les déviations concaves d'une ligne droite sont un signe de comportement à queue lourde. Les départs connus montrent un comportement à la fine queue.

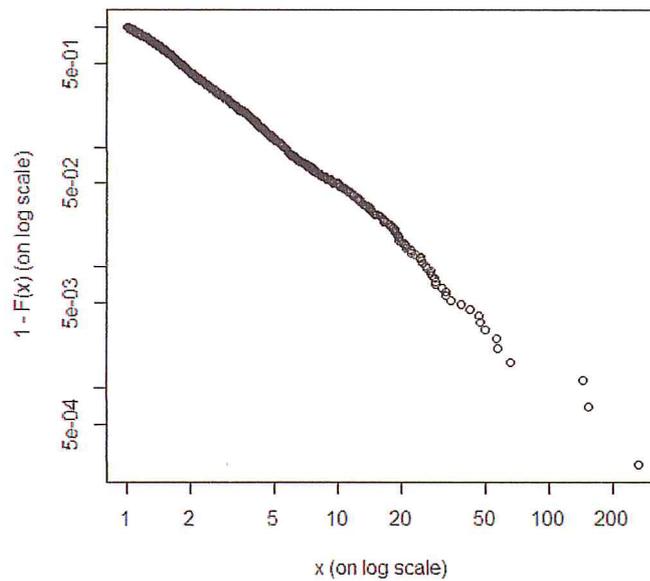
Les parcelles montrent des excès moyens par rapport à l'augmentation des seuils.



Une tendance à la hausse dans l'intrigue montre un comportement à queue lourde. En particulier, une ligne droite avec un gradient positif au-dessus d'un seuil est un signe de comportement de Pareto dans la queue. Une tendance à la baisse montre un comportement à queue mince tandis qu'une ligne avec un gradient zéro montre une queue exponentielle. Parce que les points de traçage supérieurs sont la moyenne d'une poignée d'excès extrêmes, ceux-ci peuvent être omises pour une parcelle plus jolie.

Tracer la fonction de répartition empirique d'un échantillon.

3



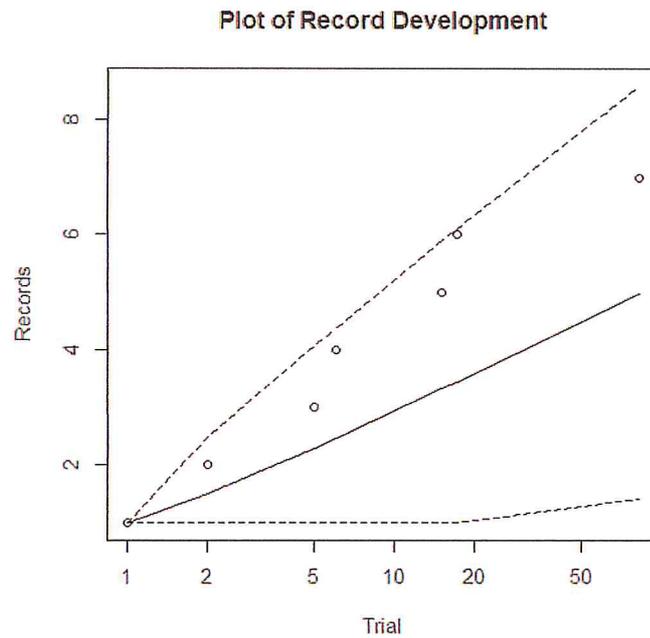
6.png

Il s'agit d'une fonction explicative simple. Une ligne droite sur l'échelle de double filet indique le comportement de la queue de Pareto.

Crée un cadre de données montrant le développement des enregistrements dans un

ensemble de données et calculant le comportement attendu pour les données iid.

4



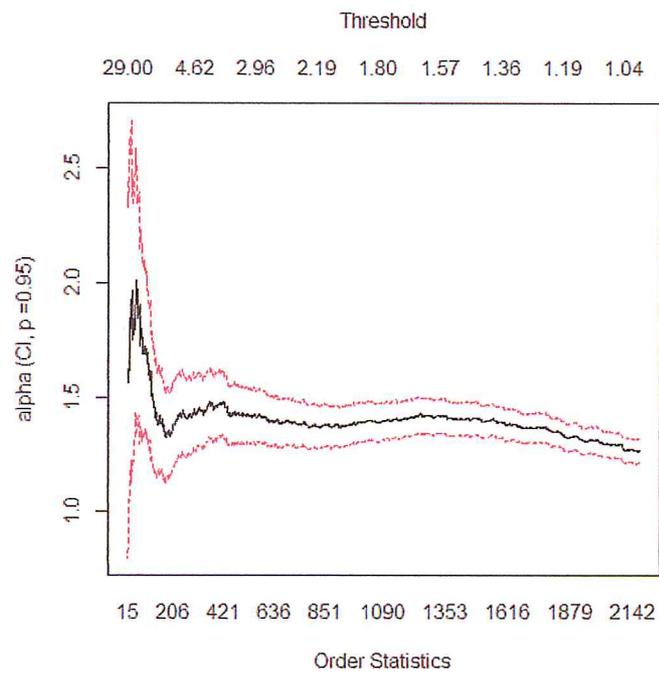
*7.png*

Les enregistrements sont comptés et les observations à laquelle ils se produisent enregistrés. Ceci est comparé au comportement attendu pour les données iid

Parcourez l'estimation Hill de l'indice de queue des données à queue lourde ou d'une

estimation quantile associée

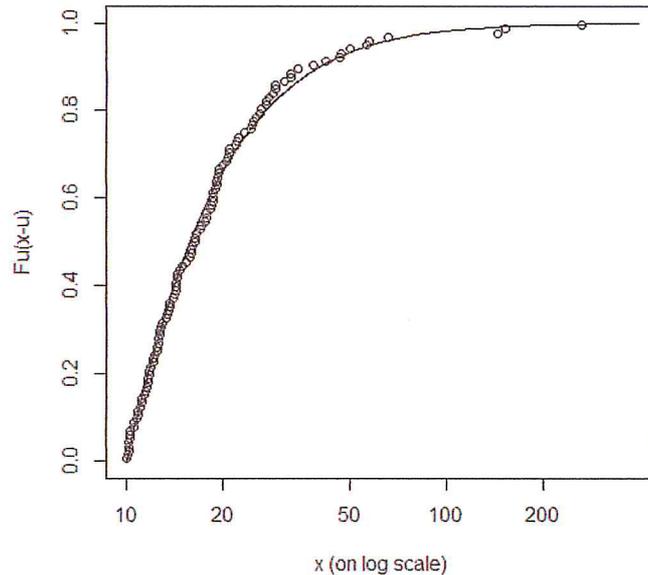
$\xi$



s.png

Cette trame est généralement calculée à partir de la perspective alpha. Pour une analyse Pareto généralisée des données à queue lourde à l'aide de la fonction gpd, il permet de tracer les estimations Hill pour  $\xi$ .

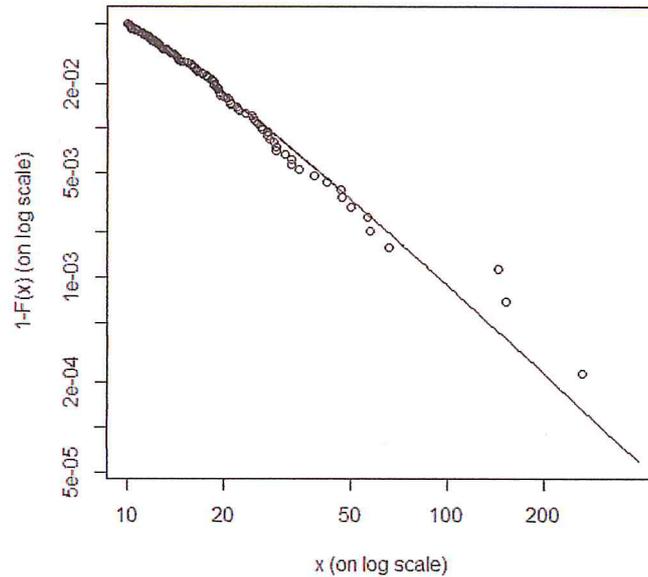
Les parcelles montrent des excès moyens par rapport à l'augmentation des seuils.



Une tendance à la hausse dans l'intrigue montre un comportement à queue lourde. En particulier, une ligne droite avec un gradient positif au-dessus d'un seuil est un signe de comportement de Pareto dans la queue. Une tendance à la baisse montre un comportement à queue mince tandis qu'une ligne avec un gradient zéro montre une queue exponentielle. Parce que les points de traçage supérieurs sont la moyenne d'une poignée d'excès extrêmes, ceux-ci peuvent être omises pour une parcelle plus jolie.

Interagit avec la sortie de `gpd` pour produire un graphique de la queue de la distribution sous-jacente des données. C'est l'une des options de `plot.gpd`, mais `tailplot` permet

à l'utilisateur de contourner le menu du premier.

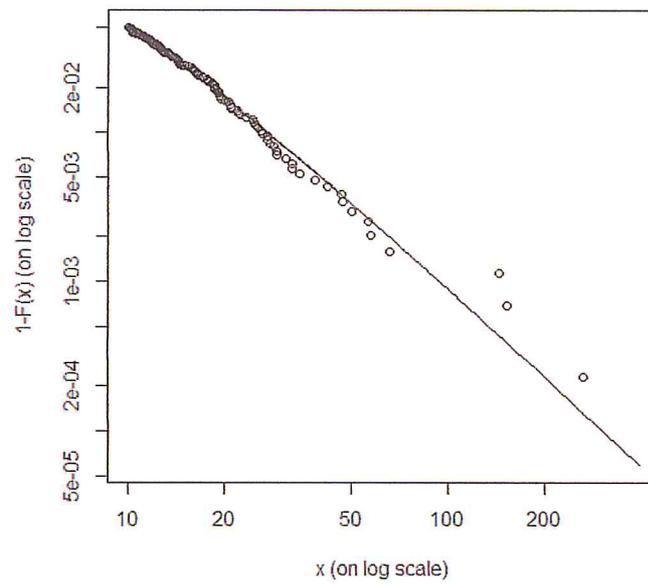


Un objet de liste contenant des détails de l'intrigue est renvoyé de manière invisible. Cet objet doit être utilisé comme premier argument de `gpd.q` ou `gpd.sfall` pour ajouter des estimations de quantile ou des estimations de déficit prévues à l'intrigue.

Interagit avec la sortie de `gpd` pour produire un graphique de la queue de la distribution sous-jacente des données. C'est l'une des options de `plot.gpd`, mais `tailplot` permet

à l'utilisateur de contourner le menu du premier.

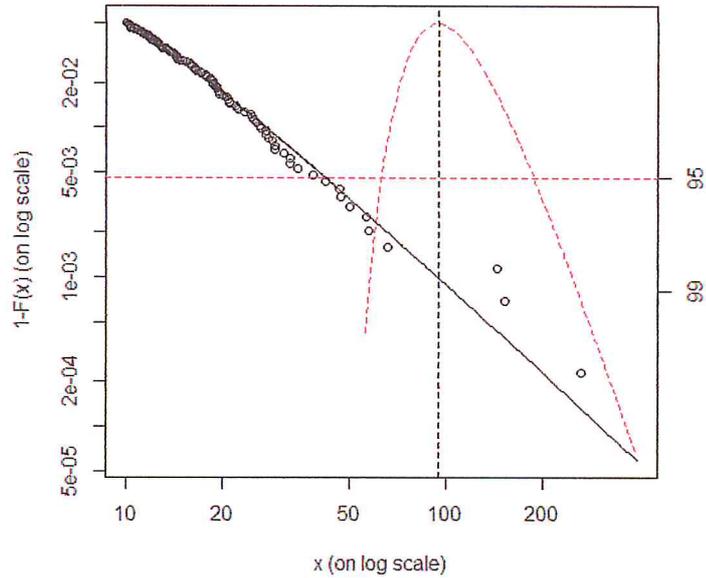
1



11.png

Calcule les estimations de quantile et les intervalles de confiance pour les quantiles élevés au-dessus du seuil dans une analyse GPD, et ajoute une représentation graphique

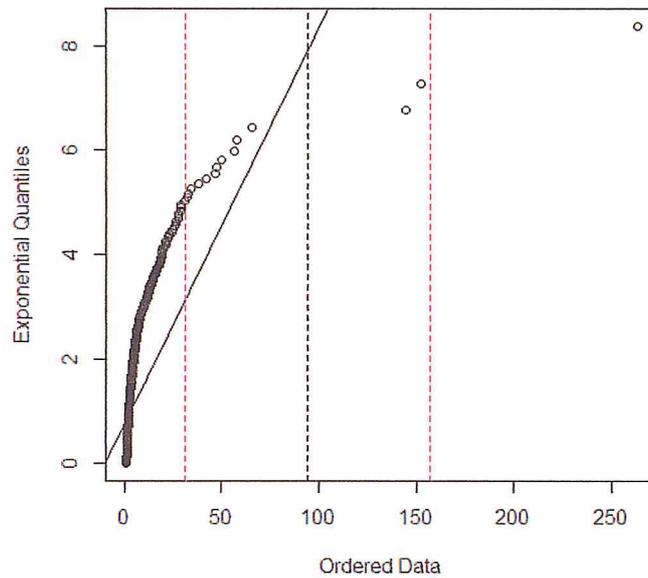
à un complot existant.



L'approximation GPD dans la queue est utilisée pour estimer le quantile. La méthode "wald" utilise la matrice d'information de Fisher observée pour calculer l'intervalle de confiance. La méthode de «vraisemblance» permet de réparer la probabilité en termes de quantile inconnu et utilise des arguments de probabilité de profil pour construire un intervalle de confiance.

Évalue le paramètre de la distribution Wald standard par estimation de vraisemblance

maximale.

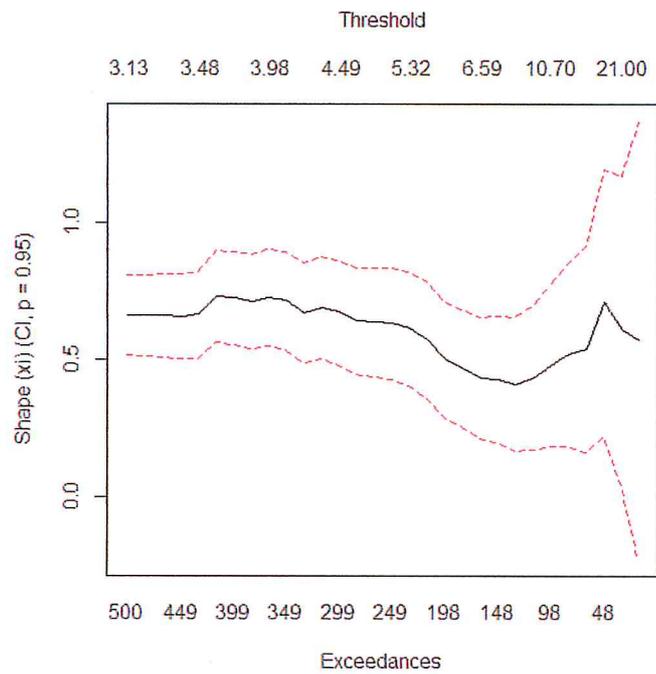


La distribution standard de Wald est un cas particulier de la distribution gaussienne inverse avec  $\mu = 1$ . Il a une densité qui peut être écrite comme

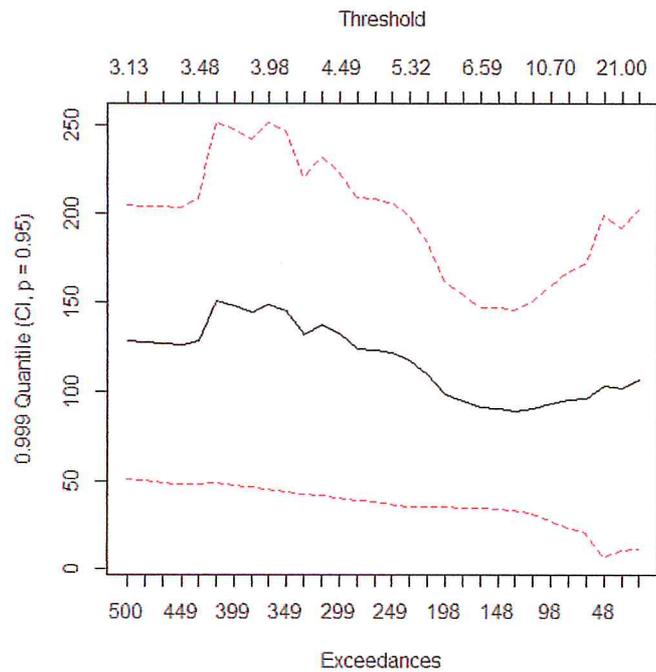
$$f(y, \mu, \lambda) = \text{sqrt}(\lambda / (2 * \pi * y^3)) * \exp(-\lambda * (y - 1)^2 / (y * 2))$$

Où  $y > 0$  et  $\lambda > 0$ . La moyenne de  $Y$  est 1 (renvoyée comme valeurs ajustées) et sa variance est  $1/\lambda$ .

Un graphique montrant comment l'estimation de la forme varie avec le seuil ou le nombre d'extrêmes.



Un graphique montrant comment l'estimation d'un quantile élevé dans la queue d'un jeu de données basé sur l'approximation GPD varie avec le seuil ou le nombre d'extrême



Pour chaque modèle, GDP s'appelle. L'évaluation peut être lente, les intervalles de confiance par la méthode Wald (qui est le plus rapide).

## 4.2 Application

Dans cette section, on effectue une étude de simulation (au moyen du logiciel statistique R) pour illustrer la performance de notre procédure d'estimation. On génère des échantillons des distributions de Fréchet avec la queue  $\bar{F}(x) = 1 - \exp(-x^{-1/\gamma})$  Avec indice de queue ( $\gamma = 1/2$  et  $\gamma = 3/4$ ), et l'indice d'aversion ( $\rho = 1.1$  et  $\rho = 1.2$ )

Dans cette étude, on génère 1000 répliques indépendantes de tailles 1000 et 2000 à partir d'une distribution de Fréchet,

Après simulations, les résultats numériques sont présentés dans le Tableau

$\gamma$	1/2				3/4			
$\rho$	1.1		1.2		1.1		1.2	
$\Pi$	0.2980		0.2735		1.8527		1.7011	
n	1000	2000	1000	2000	1000	2000	1000	2000
$\hat{\Pi}_{\rho,n}$	0.5023	0.5003	0.5584	0.3541	1.9982	1.7764	3.2689	2.2098
<i>biais</i>	0.2043	0.2023	0.2848	0.0805	0.1455	0.0763	1.5677	0.5087

On génère des échantillons des distributions de Pareto avec la queue  $\bar{F}(x) = 1 - (x^{-1/\gamma})$  Avec indice de queue ( $\gamma = 1/2$  et  $\gamma = 3/4$ ), et l'indice d'aversion ( $\rho = 1.1$  et  $\rho = 1.2$ )

Dans cette étude, on génère 1000 répliques indépendantes de tailles 1000 et 2000 à partir d'une distribution de Pareto,

Après simulations, les résultats numériques sont présentés dans le Tableau

$\gamma$	1/2				3/4			
$\rho$	1.1		1.2		1.1		1.2	
$\Pi$	0.4974		0.7211		3.7342		7.9657	
n	1000	2000	1000	2000	1000	2000	1000	2000
$\hat{\Pi}_{\rho,n}$	0.5442	0.5150	0.7849	0.7816	4.6693	3.9844	6.1356	7.3327
<i>biais</i>	0.0467	0.0176	0.0637	0.0605	0.9351	0.2501	1.8301	0.3366

# Chapitre 5

## Conclusion

La théorie des valeurs extrêmes classique ou basée sur la loi de Pareto généralisée ne résout pas ces difficultés d'un coup, mais elle fournit des jumelles à travers lesquelles les assureurs peuvent observer les événements extrêmes avec une certaine objectivité afin d'une part de contrôler l'adéquation des primes pures avec la sinistralité et la hiérarchisation des classes de risque et d'autre part, de constituer des provisions pour faire face à ces risques extrêmes. Donc, on a étudié la distribution à queue lourde et approximé la queue de distribution par Pareto et établir un estimateur pour le quantile extrême, on a utilisé ce quantile pour proposer un estimateur à la prime de réassurance pour la distribution à queue lourde et montrer sa normalité asymptotique. Des résultats de simulation ont été réalisés pour montrer le comportement d'estimateur par logiciel R à l'aide des packages (evir, evd).

# Bibliographie

- [1]
- [2] von Mises(1936) :Von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. Rev. math. Union interbalcanique, 1(1).
- [3] Jenkinson (1955) :Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 81(348), 158-171.
- [4] Resnick [147] :Pate, D., Resnick, D., Andre, M., Sartoris, D. J., Kursunoglu, S., Bielecki, D., ... & Vassiliadis, A. (1986). Perspective : three-dimensional imaging of the musculoskeletal system. American Journal of Roentgenology, 147(3), 545-551.
- [5] Embrechts et al [71] :Hebal, A., & Remini, B. (2011). Choix du modèle fréquentiel le plus adéquat à l'estimation des valeurs extrêmes de crues (cas du nord de L'Algérie). Canadian Journal of Civil Engineering, 38(8), 881-892.
- [6] Embrechts et al [71], page 145 :Sundt, B., & Teugels, J. L. (1995). Ruin estimates under interest force. Insurance : Mathematics and Economics, 16(1), 7-22.
- [7] Hall (1982) :Greenwood, C. R., Delquadri, J., & Hall, R. V. (1984). Opportunity to respond and student academic performance. Focus on behavior analysis in education, 58-88.
- [8] smith (1985) :Smith, P. K., Krohn, R. I., Hermanson, G. T., Mallia, A. K., Gartner, F. H., Provenzano, M., ... & Klenk, D. C. (1985). Measurement of protein using bicinchoninic acid. Analytical biochemistry, 150(1), 76-85.

- [9] wisman (1985) :Wiseman, C. (1985). Strategy and computers. Dow Jones-Irwin.
- [10] Hill (1975) :Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The annals of statistics*, 3(5), 1163-1174.
- [11] Deheuvels et Mason (1985) :Csorgo, S., Deheuvels, P., & Mason, D. (1985). Kernel estimates of the tail index of a distribution. *The Annals of Statistics*, 1050-1077.
- [12] Smith (1984) :Shribman, A. J., Smith, G., & Achola, K. J. (1987). Cardiovascular and catecholamine responses to laryngoscopy with and without tracheal intubation. *BJA : British Journal of Anaesthesia*, 59(3), 295-299.
- [13] Davis et Resnick (1984) :Davis, R., & Resnick, S. (1984). Tail estimates motivated by extreme value theory. *The Annals of Statistics*, 1467-1487.
- [14] Jules Emile Gumbel a introduit en 1958 [109] :El Methni, J. (2013). Contributions à l'estimation de quantiles extrêmes. Applications à des données environnementales (Doctoral dissertation, Université de Grenoble).
- [15] Hosking [118] :McCrabb, G. J., Egan, A. R., & Hosking, B. J. (1992). Maternal undernutrition during mid-pregnancy in sheep : variable effects on placental growth. *The Journal of Agricultural Science*, 118(1), 127-132.
- [16] Macleod [129] : SPANGELO, B. L., JARVIS, W. D., JUDD, A. M., & MACLEOD, R. M. (1991). Induction of interleukin-6 release by interleukin-1 in rat anterior pituitary cells in vitro : evidence for an eicosanoid-dependent mechanism. *Endocrinology*, 129(6), 2886-2894.
- [17] Smith [157] :Scotland, S. M., Willshaw, G. A., Smith, H. R., & Rowe, B. (1987). Properties of strains of *Escherichia coli* belonging to serogroup O 157 with special reference to production of Vero cytotoxins VT1 and VT2. *Epidemiology & Infection*, 99(3), 613-624.
- [18] Zhou [168] et Dombry [65] :Wang, J. H., Zhou, X. L., & Lu, J. F. (2003). Dynamic response of pile groups embedded in a poroelastic medium. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 23(3), 53-60.

- [19] Zhou [169] :Gould, A., Udalski, A., An, D., Bennett, D. P., Zhou, A. Y., Dong, S., ... & Christie, G. W. (2006). Microlens OGLE-2005-BLG-169 implies that cool Neptune-like planets are common. *The Astrophysical Journal Letters*, 644(1), L37.
- [20] Hosking et al. [120]1985 :Hosking, J. R. (1985). Algorithm as 215 : Maximum-likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 34(3), 301-310.
- [21] Breiman et al [25] en 1990 :Schwartz, B., Facklam, R. J., & Breiman, R. F. (1990). Changing epidemiology of group A streptococcal infection in the USA. *The Lancet*, 336(8724), 1167-1171.
- [22] Weissman [167] :Gershenfeld, H. K., Tsukamoto, A., Weissman, I. L., & Joho, R. (1981). Somatic diversification is required to generate the V kappa genes of MOPC 511 and MOPC 167 myeloma proteins. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 78(12), 7674-7678.
- [23] Hill [116] :Kendall, M. G., & Hill, A. B. (1953). The analysis of economic time-series-part i : Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1), 11-34.
- [24] Weissman [167]1978 : Gershenfeld, H. K., Tsukamoto, A., Weissman, I. L., & Joho, R. (1981). Somatic diversification is required to generate the V kappa genes of MOPC 511 and MOPC 167 myeloma proteins. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 78(12), 7674-7678.
- [25] Scarrott et MacDonald, 2012 : Scarrott, C., & MacDonald, A. (2012). A review of extreme value threshold estimation and uncertainty quantification. *REVSTAT-Statistical Journal*, 10(1), 33-60.
- [26] Thompson et al. (2009) :Thompson, D. M., & Parker, R. (2009). Stressing out over tRNA cleavage. *Cell*, 138(2), 215-219.
- [27] Rosbjerg et al. (1992) :Rosbjerg, D., Madsen, H., & Rasmussen, P. F. (1992). Prediction in partial duration series with generalized pareto-distributed exceedances.

Water Resources Research, 28(11), 3001-3010.

- [28] Grabemann et Weisse, 2008 :Grabemann, I., & Weisse, R. (2008). Climate change impact on extreme wave conditions in the North Sea : an ensemble study. *Ocean Dynamics*, 58(3), 199-212.
- [29] McMillan, 2011 :McMillan, M. S., & Rodrik, D. (2011). Globalization, structural change and productivity growth (No. w17143). National Bureau of Economic Research.
- [30] Arns et al., 2013 :Arns, M., Conners, C. K., & Kraemer, H. C. (2013). A decade of EEG theta/beta ratio research in ADHD : a meta-analysis. *Journal of attention disorders*, 17(5), 374-383.
- [31] Frigessi et al., 2002 :Frigessi, A., Haug, O., & Rue, H. (2002). A dynamic mixture model for unsupervised tail estimation without threshold selection. *Extremes*, 5(3), 219-235.
- [32] Behrens et al., 2004 :Smith, S. M., Jenkinson, M., Woolrich, M. W., Beckmann, C. F., Behrens, T. E., Johansen-Berg, H., ... & Niazy, R. K. (2004). Advances in functional and structural MR image analysis and implementation as FSL. *Neuroimage*, 23, S208-S219.
- [33] Mendes et Lopes, 2004 :da Fonseca, M. D. J. M., Faerstein, E., Chor, D., & Lopes, C. S. (2004). Validade de peso e estatura informados e índice de massa corporal : estudo pró-saúde. *Revista de Saúde Pública*, 38(3), 392-398.
- [34] Tancredi et al., 2006 :Tomaselli, S., Esposito, V., Vangone, P., van Nuland, N. A., Bonvin, A. M., Guerrini, R., ... & Picone, D. (2006). The  $\alpha$ -to- $\beta$  Conformational Transition of Alzheimer's A $\beta$ -(1-42) Peptide in Aqueous Media is Reversible : A Step by Step Conformational Analysis Suggests the Location of  $\beta$  Conformation Seeding. *ChemBioChem*, 7(2), 257-267.
- [35] Ghil et al. (2011) :Ghil, M., Yiou, P., Hallegatte, S., Malamud, B. D., Naveau, P., Soloviev, A., ... & Mestre, O. (2011). Extreme events : dynamics, statistics and

prediction. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18(3), 295-350.

- [36] Frigessi et al. (2002) :Frigessi, A., Haug, O., & Rue, H. (2002). A dynamic mixture model for unsupervised tail estimation without threshold selection. *Extremes*, 5(3), 219-235.
- [37] Behrens et al. (2004) :Smith, S. M., Jenkinson, M., Woolrich, M. W., Beckmann, C. F., Behrens, T. E., Johansen-Berg, H., ... & Niazy, R. K. (2004). Advances in functional and structural MR image analysis and implementation as FSL. *Neuroimage*, 23, S208-S219.
- [38] Mendes et al. (2004) :Mendes dos Santos, G., Mérona, B. D., Juras, A. A., & Jégu, M. (2004). Peixes do raixo Rio Tocantins : 20 anos depois da usina hidrelétrica Tucuruí.
- [39] Tancredi et Al. (2006) :Tomaselli, S., Esposito, V., Vangone, P., van Nuland, N. A., Bonvin, A. M., Guerrini, R., ... & Picone, D. (2006). The  $\beta$ -to- $\alpha$  Conformational Transition of Alzheimer's A $\beta$ -(1-42) Peptide in Aqueous Media is Reversible : A Step by Step Conformational Analysis Suggests the Location of  $\beta$  Conformation Seeding. *ChemBioChem*, 7(2), 257-267
- [40] Arbitralement, Li et al. (2014) :Hébié, M. (2014). LES ACCORDS CONCLUS ENTRE PUISSANCES COLONIALES ET ENTITES POLITIQUES AFRICAINES : QUELQUES ELEMENTS POUR RECONSIDERER LA DECISION DE LA CIJ EN L'AFFAIRE DE LA FRONTIERE TERRESTRE ET MARITIME (CAMEROUN V. NIGERIA ; GUINEE EQUATORIALE (INTERVENANT)). *African Yearbook of International Law Online/Annuaire Africain de droit international Online*, 20(1), 97-119.
- [41] Grabemann et al., 2008 :Grabemann, I., & Weisse, R. (2008). Climate change impact on extreme wave conditions in the North Sea : an ensemble study. *Ocean Dynamics*, 58(3), 199-212.

- [42] R Core Team, 2014 :Team, R. C. (2014). R : A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria : R Foundation for Statistical Computing; 2014.
- [43] Hu et Scarrott, 2013 :Hu, Y., & Scarrott, C. J. (2013). evmix : An R package for extreme value mixture modelling, threshold estimation and boundary corrected kernel density estimation. Submitted, available from <http://www.math.canterbury.ac.nz/~c.scarrott/evmix>.
- [44] Wang "cite 39" :Cabrilac, B. (2004). Où va l'économie chinoise ?. Revue d'économie financière, 77(4), 23-42.
- [45] Wang cite :40 :Nouyrgat, V., & Réfabert, L. (2001). Bilan des mercredis de l'asthme. Revue française d'allergologie et d'immunologie clinique, 41(7), 651-658.
- [46] Van De Walle et Beirlant cite 38 :Schueremans, L., & Van Gemert, D. (2001, April). Predicting masonry properties from component properties using probabilistic techniques. In Strumas V, 2001, the 5th Symposium on Computer Methods in Structural Masonry.
- [47] Smith (1987) :Bonnesen, T., Fenchel, W., Boron, L. F., Christenson, C. O., & Smith, B. A. (1987). Theory of convex bodies.
- [48] Romano et Wolf (1999) :Politis, D., Romano, J. P., & Wolf, M. (1999). Weak convergence of dependent empirical measures with application to subsampling in function spaces. Journal of statistical planning and inference, 79(2), 179-190.
- [49] Embrechts et al. (1997) :Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). Modelling extremal events, volume 33 of Applications of Mathematics.

