

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE-SAAD DAHLAB-BLIDA

جامعة سعد دحلب - البليدة

Faculté des sciences

THESE

Présentée pour obtenir

**UN MASTER EN MATHEMATIQUES**

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

**Broadcast Domination et Broadcast Indépendance dans les Graphes**

Par

**M<sup>lle</sup> Fatma Zohra TOUNANI & M<sup>lle</sup> Hadjer HADJ SADOK**

**Soutenue publiquement le (30/10/2014), devant les membres de jury :**

**Mr CHELLALI Mustapha**

**Président**

**Professeur, USD Blida**

**Mr BOUMEDIENEMerouane**

**Examineur**

**MCB, USD Blida**

**Mr IKHLEF-ESCHOUFNouredine**

**Examineur**

**MCB, UnivYahia Farès Médéa**

**Mr BLIDIA Mostafa**

**Promoteur**

**Professeur, USD Blida**

**PROMOTION : 2013-2014**



# Résumé

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$  où  $V$  est l'ensemble des sommets, et  $E$  est l'ensemble des arêtes. Une fonction  $f : V \rightarrow [0, 1, \dots, \text{diam}(G)]$  est de broadcast sur  $G$  si pour tout sommet  $v \in V, f(v) \leq e(v)$ , où  $\text{diam}(G)$  représente le diamètre de  $G$  et  $e(v)$  représente l'excentricité du sommet  $v$ . On note par  $V_f^+$  l'ensemble des sommets  $v$  avec  $f(v) > 0$ . La somme des poids sur les sommets est représentée par  $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ . Une fonction broadcast est de domination ou dominante si tout sommet du graphe  $G$  se trouve au plus à une distance  $f(v)$  d'au moins un sommet  $v$  avec  $f(v) > 0$ . Le minimum de  $\sigma(f)$  sur toutes les fonctions broadcast de domination donne le nombre de broadcast dominant ou de domination du graphe, noté  $\gamma_b(G)$ . Une fonction broadcast  $f$  est dite indépendante si pour toute paire de sommets  $v, u \in V_f^+$ ,  $d(v, u) > \max(f(v), f(u))$  où  $d(v, u)$  est la distance entre  $v$  et  $u$  (longueur de la plus courte chaîne). Le poids maximum de  $\sigma(f)$  d'une fonction broadcast indépendante de  $G$  est le nombre de broadcast d'indépendance, noté  $\beta_b(G)$ .

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la fonction broadcast dans les graphes simples. On commence notre travail par une présentation du paramètre « nombre de broadcast dominant », puis on s'intéresse au problème de recherche de la fonction de broadcast indépendante maximum, pour certaines classes de graphe. On détermine les valeurs du nombre de broadcast d'indépendance dans les cas où le graphe est une chaîne, un cycle ou une variante de chenille, comme la chenille pleine et la chenille alternée. On détermine, aussi quelques bornes qui encadrent notre paramètre.

# Abstract

Let  $G = (V, E)$  be a simple graph of order  $n$ , where  $V$  is the set of vertices and  $E$  is the set of edges. A function  $f : V \rightarrow [0, 1, \dots, \text{diam}(G)]$  is a broadcast on  $G$ , if for any vertex  $v \in V$ ,  $f(v) \leq e(v)$ , where the diameter of  $G$  is denoted by  $\text{diam}(G)$  and the eccentricity of vertex  $v$  by  $e(v)$ . We denote by  $V_f^+$  the set of vertices  $v$  with  $f(v) > 0$ . The sum of the weights of the vertices of  $G$  is the weight of  $f$  denoted by  $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ . A broadcast function is dominating if for every vertex  $u$  of the graph  $G$ , there exists at least one vertex  $v$  with  $f(v) > 0$  such that the distance between  $u$  and  $v$  is at most  $f(v)$ . The minimum of the weight of  $f$  (i.e.  $\min(\sigma(f): f)$ ) where  $f$  is a broadcast dominating function is the broadcast domination number of  $G$  denoted by  $\gamma_b(G)$ . Broadcast function  $f$  is said independent if for every pair of vertices  $v, u \in V_f^+$ ,  $d(v, u) > \max(f(v), f(u))$ , where  $d(v, u)$  is the distance between  $v$  and  $u$ . The maximum of the weight of  $f$  (i.e.  $\max(\sigma(f): f)$ ) where  $f$  is a broadcast independent function of  $G$  is the broadcast independence number denoted by  $\beta_b(G)$ .

In this thesis we are interested in studying the broadcast function on simple graphs. In first, we have studying the parameter; broadcast domination number. Then, we became our work in the problem of finding the optimal broadcast independent function in the case of some special classes of graphs. We determined the broadcast independent number for paths, cycles and some cases of caterpillars, We also gave some bounds.

## ملخص

ليكن  $G = (V, E)$  بيان بسيط ذو الرتبة  $n$  حيث  $V$  مجموعة الرؤوس, و  $E$  مجموعة الأضلاع. تكون  $f : V \rightarrow [0, 1, \dots, \text{diam}(G)]$  دالة برودكاست على  $G$  اذا كان من أجل كل رأس  $v$  من  $V$ ,  $f(v) \leq e(v)$ , حيث  $\text{diam}(G)$  يمثل قطر البيان  $G$  و  $e(G)$  يمثل بعد الرأس  $v$ . نرسم  $V_f^+$  مجموعة الرؤوس  $v$  مع  $f(v) > 0$ . مجموعة الأوزان على الرؤوس تمثل ب  $\sigma(f) = \sum (f(v), v \in V)$ . الدالة برودكاست مهيمنة اذا كان من أجل كل رأس من البيان  $G$  يوجد على الأقل رأس  $v$  بحيث تكون المسافة بينه وبين الرأس  $v$  على الأكثر  $f(v)$  مع  $f(v) > 0$ . القيمة الحدية الصغرى ل  $\sigma(f)$  على كل الدوال برودكاست المهيمنة تعطي عدد برودكاست المهيمن للبيان  $G$  يرمز له ب  $\gamma_b(G)$ . نقول عن الدالة برودكاست أنها مستقلة اذا كان من أجل كل ثنائية من الرؤوس  $v, u \in V_f^+$ ,  $d(v, u) > \max(f(v), f(u))$ , حيث  $d(v, u)$  هي المسافة بين  $v$  و  $u$  (طول أصغر سلسلة). الوزن الأكبر  $\sigma(f)$  للدالة برودكاست المستقلة للبيان  $G$  هو عدد برودكاست المستقل ويرمز له ب  $\beta_b(G)$ .

في هذه المذكرة نهتم بدراسة برودكاست في البيانات البسيطة, في بداية الأمر ندرس الوسيط لبرودكاست المهيمن. وبعد ذلك نهتم بمشكل البحث عن الدالة برودكاست المستقلة في بعض أقسام البيان. لقد حددنا عدد برودكاست المستقل للسلاسل, الحلقات و بعض حالات اليرقات, و نعطي أيضا بعض الحدود.

# Remerciements

Qu'il nous soit permis de remercier Dieu pour nous avoir donné la patience et le courage nécessaires, pour finaliser ce présent travail.

Nous tenons à remercier très vivement la personne qui a su nous motiver à entreprendre cette recherche et nous aider de ses précieux conseils ; il nous importe en effet d'exprimer tous nos gratitudee et nos reconnaissances à Monsieur **Mostafa Blidia**, notre directeur de thèse et Professeur au département de mathématiques de l'U.S.D de Blida. Ses directives, son ouverture d'esprit, son soutien scientifique et son enthousiasme pour notre projet de recherche nous ont énormément aidés pour finaliser ce travail.

Nous remercions vivement Monsieur **Chellali Mustapha**, Professeur au département de Mathématiques de l'U.S.D de Blida, pour l'intérêt porté à ce travail et pour avoir accepté de présider le jury d'examination.

Nos remerciements vont aussi à Messieurs **Ikhlef Eschouf Nour eddine**, Maître de Conférences à l'U.Y.F de Médéa et **Boumediene Merouane**, Maître de Conférences à l'U.S.D de Blida, pour avoir acceptés d'être membres de ce jury et vouloir examiner notre travail de recherche.

Nous tenons à remercier, aussi chaleureusement tous les enseignants du département de mathématiques et à leur tête monsieur **Omar Tami**, pour leur dévouement durant toutes nos études.

Une thèse est une entreprise de longue haleine, souvent passionnante mais parfois aussi source de moments de découragement. C'est dans de tels instants que l'on apprécie d'autant plus le soutien de sa famille et de ses amis. Nous voudrions leur dire ici : Merci à tous.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	1
<b>Remerciements</b>	4
<b>Table des matières</b>	5
<b>Table des figures</b>	7
<b>Introduction</b>	8
<b>1. Notions fondamentales sur la théorie des graphes</b>	10
1.1 Définitions et notations	10
1.1.1 Graphe	10
1.1.2 Sous- graphe	11
1.1.3 Voisinage	11
1.1.4 Degré d'un sommet	11
1.1.5 Chaînes et cycles	12
1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon	12
1.1.7 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum	12
1.1.8 Stabilité	13
1.2 Graphes particuliers	13
1.2.1 Graphe complet	13
1.2.2 Graphe complémentaire	13
1.2.3 Graphe connexe	13
1.2.4 Graphe $k$ -parti	14
1.2.5 Arbre et forêt	14
1.2.6 Isomorphisme de graphes	15
1.3 Quelques opérations sur les graphes	16
1.3.1 Produit carré (cartésien)	16
1.3.2 Produit croisé (tensoriel)	16
1.3.3 Produit complet	17
1.4 Domination dans les graphes	17
1.4.1 Historique	17
1.4.2 Domination standard	18
1.4.3 Exemples concrets sur la domination	19
1.4.4 Quelques invariants de domination	19
1.4.5 Complexité du problème de domination	20
<b>2. Broadcasts dans les graphes</b>	21
2.1 Notions fondamentales sur les broadcasts	21
2.2 Résultats fondamentaux	25

2.3 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination . . . . .	28
2.4 Nombre de broadcast domination du produit de deux graphes . . . .	29
2.4.1 Produit carré (cartésien) . . . . .	29
2.4.2 Produit croisé (tensoriel). . . . .	30
2.4.3 Produit complet. . . . .	30
2.5 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination. . . . .	30
2.6 Invariants dans les broadcasts . . . . .	32
2.6.1 Broadcast indépendant. . . . .	33
2.6.2 Broadcast dominant indépendant. . . . .	37
2.6.3 Broadcast efficace . . . . .	38
2.7 Complexité algorithmique de broadcast domination . . . . .	39
<b>3. Nombre de broadcasts d'indépendance dans quelques classes de graphes. . . . .</b>	<b>40</b>
3.1 Nombre de broadcasts d'indépendance dans les chaînes. . . . .	40
3.2 Nombre de broadcasts d'indépendance dans les cycles . . . . .	43
3.3 Nombre de broadcasts d'indépendance dans les chenilles. . . . .	46
3.3.1 Les chenilles pleines. . . . .	47
3.3.2 Les chenilles alternées. . . . .	50
3.3.3 Bornes supérieures et inférieures de chenilles. . . . .	56
<b>Conclusion. . . . .</b>	<b>59</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>60</b>

# Table des figures

1.1 Un graphe $G$ . . . . .	10
1.2 Un sous graphe d'un graphe $G$ . . . . .	11
1.3 Exemple des graphes complets . . . . .	13
1.4 Exemple de graphes bipartis complets. . . . .	14
1.5 Un arbre $T$ . . . . .	14
1.6 Une forêt . . . . .	15
1.7 L'étoile $K_{1,n}$ . . . . .	15
1.8 Graphes isomorphes . . . . .	15
1.9 Le produit cartésien de la de la chaîne $P_3$ par la chaîne $P_5$ . . . . .	16
1.10 Le produit tensoriel de la de la chaîne $P_3$ par la chaîne $P_5$ . . . . .	16
1.11 Le produit fort de la de la chaîne $P_3$ par la chaîne $P_5$ . . . . .	17
1.12 Un graphe $G$ avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$ . . . . .	18
2.1 Les sommets $u$ et $x$ sont des sommets $f$ -dominants et $V_f^+ = \{u, x\}$ . . . . .	22
2.2 Le sommet $u$ est un $f$ -voisin de $v$ , le sommet $v$ n'est pas un $f$ -voisin de $u$ . . . . .	22
2.3 Un graphe $G$ avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$ . . . . .	23
2.4 Deux broadcast dominants sur $G$ . . . . .	24
2.5(a) Représente l'étoile $K_{1,4}$ . . . . .	26
2.5(b) Graphe subdivisé d'un graphe $K_{1,4}$ . . . . .	26
2.6 Le graphe $H_4$ . . . . .	26
2.7 Le graphe $S(K_{1,n})$ , $n \geq 3$ . . . . .	31
2.8 Le graphe $G_n$ . . . . .	31
2.9 Un graphe $G$ avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$ . . . . .	32
2.10 Broadcasts indépendants. . . . .	34
2.11 Graphe de Petersen . . . . .	35
2.12 Broadcast efficaces sur $P_5$ . . . . .	38
3.1 Une chaîne $P_n$ . . . . .	41
3.2 La chaîne $P_5$ . . . . .	42
3.3 Un cycle $C_n$ . . . . .	43
3.4 Le $\beta_b$ de $C_9$ et $C_6$ . . . . .	45
3.5 Codage de deux chenilles. . . . .	46
3.6 Le $\beta_b$ d'une chenille pleine. . . . .	50
3.7 Le $\beta_b$ d'une chenille alternée. . . . .	56
3.8 Deux chenilles quelconque $Ch$ et $Ch'$ . . . . .	57
3.9 Le $\beta_b$ de la chenille $Ch$ . . . . .	58

# Introduction

La Recherche opérationnelle est une discipline récente dont le but est de fournir des méthodes de résolution basées sur des concepts et des outils mathématiques.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, etc. Depuis le début de XX<sup>ème</sup> siècle, elle constitue une branche à part entière, des mathématiques.

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII<sup>ème</sup> siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg. Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts, sans passer deux fois par le même pont, puis de revenir à leur point de départ.

La théorie des graphes, comme son nom l'indique, traite des problèmes assez variés, qui possèdent tous la caractéristique de pouvoir être représentés par un schéma appelé "graphe". Un graphe est un schéma constitué de points (sommets) et de lignes de formes quelconques (arêtes) reliant ces points et symbolisant le lien existant entre ces points.

Un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes est la domination. Ce domaine a été étudié intensivement ces trois dernières décennies et est apparu, semble-t-il, au 16<sup>ème</sup> siècle en Inde [21] sur un problème de jeux d'échec. Le principe consistait à couvrir (dominer) l'ensemble des cases d'un échiquier par un nombre minimum de reines, c'est-à-dire, chaque place devrait être occupée soit par une reine, soit, en un seul mouvement de celle-ci.

Un dominant dans un graphe  $G$ , est un sous-ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble, ou bien adjacent à un sommet de celui-ci. Le problème de domination consiste à trouver un ensemble dominant de cardinal minimum.

Le problème de la broadcast domination est une généralisation du problème de domination. Ce problème, introduit en 2001 par D. J. Erwin [15], consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets d'un graphe, de sorte que, tout sommet de poids nul soit broadcast-dominé par un sommet de poids strictement positif. La somme des poids de tous les sommets doit être minimale ; formellement cela revient

# CHAPITRE I

## NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THÉORIE DES GRAPHES

### 1.1 Définitions et notations

Nous introduisons dans ce chapitre les notions usuelles dans le domaine de la théorie des graphes, ainsi que les définitions de base utilisées tout au long de ce mémoire. Nous présentons d'abord le concept de domination dans les graphes ainsi que quelques invariants de domination.

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à l'ouvrage de Berge [9].

#### 1.1.1 Graphe

Un graphe  $G$  est défini par un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini non vide, appelé « ensemble des sommets » de  $G$ , et  $E$  est un ensemble de paires de sommets distincts, appelé « ensemble des arêtes » de  $G$ . Le cardinal de  $V$  appelé ordre de  $G$  est noté par  $n$ . Le cardinal de  $E$  appelé taille de  $G$  est noté par  $m$ . Si  $n = 1$ , on dit que  $G$  est trivial.

Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules  $u, v, x, y, a, b$  etc, et deux sommets  $u$  et  $v$  d'un même graphe  $G$  sont adjacents ou voisins s'ils sont reliés par une arête.

Deux arêtes distinctes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune. Une arête  $e$  sera dite incidente à un sommet, si  $v$  est une de ses extrémités.

Un graphe simple est un graphe  $G$  dans lequel, tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête possède des extrémités distinctes. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simple et finis.

Au vu de ces définitions, il est naturel de représenter un graphe par un ensemble de points représentant les sommets du graphe et un ensemble de segments reliant les sommets, représentant les arêtes. La figure « FIG 1.1 » illustre un graphe  $G = (V, E)$  avec  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ .

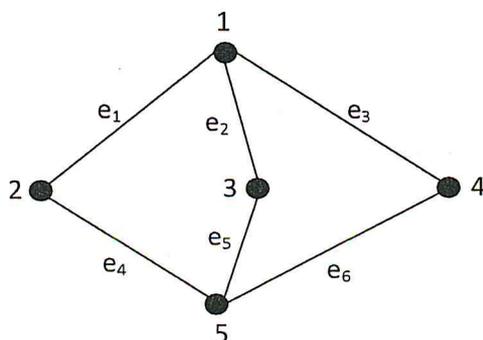


FIG 1.1 : Un graphe  $G$

### 1.1.2 Sous-graphe

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple avec  $V$  ensemble des sommets et  $E$  ensemble des arêtes, Pour un sous-ensemble  $A \subset V$ , on désigne par  $G[A]$  le sous graphe de  $G$  engendré par  $A$ . Donc, le sous graphe  $G[A]$  est le graphe ayant  $A$  pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ . Dans ce cas, on dira que l'ensemble des sommets  $A$  engendre ou induit le sous graphe  $G[A]$ . Voir le sous-graphe induit par  $A = \{1, 3, 4, 5\}$

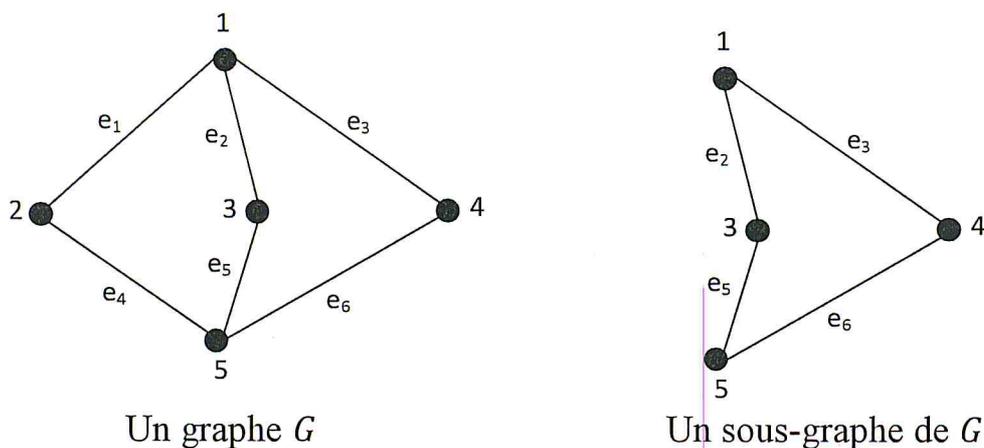


FIG1.2 : Un sous graphe d'un graphe G

### 1.1.3 Voisinages

Pour un sommet  $v$  de  $G$ , Le voisinage ouvert est définit par l'ensemble suivant  $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$  et le voisinage fermé est définit par  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . L'ensemble  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$  (resp  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ ) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous-ensemble  $S \subseteq V$ . Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe  $G$ , nous écrivons  $N(v)$  et  $N[v]$  au lieu de  $N_G(v)$  et  $N_G[v]$  respectivement. De même, nous écrivons  $N(S)$  et  $N[S]$  au lieu de  $N_G(S)$  et  $N_G[S]$  respectivement. Par exemple dans la « FIG 1.1 »,  $N_G(1) = \{2, 3, 4\}$  et  $N_G[1] = \{1, 2, 3, 4\}$ .

### 1.1.4 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$ , noté  $d_G(v)$ , est le nombre de sommets voisins. Un sommet de degré 0 est dit sommet isolé et un sommet de degré égal à 1 est dit sommet pendant ou feuille. On définit par  $\Delta(G) = \max \{d_G(v) \mid v \in V\}$  et  $\delta(G) = \min \{d_G(v) \mid v \in V\}$  le degré minimum et maximum dans  $G$  respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira  $d(v)$ ,  $\Delta$  et  $\delta$  pour désigner respectivement

$d_G(v), \Delta(G), \delta(G)$ . Par exemple dans la FIG 1.1 le degré  $d_G(1) = 3, \Delta(G) = 3, \delta(G) = 2$ .

### 1.1.5 Chaînes et cycles

Une chaîne  $p_k$  d'un graphe  $G = (V, E)$  de longueur  $k - 1$  est une suite  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  de sommets distincts tels que pour chaque  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$   $v_i v_{i+1}$  est une arête de  $G$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés les extrémités de la chaîne, une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête, est dite simple.

On appelle cycle  $C_k$  dans un graphe  $G$ , une chaîne simple de longueur  $k$  dont les extrémités initiale et finale sont confondues.

### 1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon.

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un graphe  $G$ . On appelle distance entre  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$ , la longueur de la plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ . L'excentricité d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est  $e(v) = \max \{d(v, w), w \in V\}$ . Le diamètre de  $G$ , noté  $diam(G)$ , est égal à  $\max\{e(v), v \in V\}$  et le rayon de  $G$ , noté  $rad(G)$ , est égal à  $\min\{e(v), v \in V\}$ . Les sommets centre de  $G$  sont les sommets dont l'excentricité est égal au rayon de  $G$ .

Pour le graphe illustré dans la figure « FIG 1.1 »,  $d(1,5) = 2$ ,  $diam(G) = 2, rad(G) = 2$ .

### 1.1.7 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit minimal par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas un sous ensemble  $S' \subset S$  tel que le sous graphe induit par  $S'$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ . Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit maximal par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas un sous ensemble  $S'$  tel que  $S \subset S'$  tel que le sous graphe induit par  $S'$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit minimum ou de taille minimale par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas un sous ensemble  $S' \subseteq V$  tel que le sous graphe induit par  $S'$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  et  $|S'| < |S|$ . Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit maximum ou de taille maximale par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas un sous ensemble  $S' \subseteq V$  tel que le sous graphe induit par  $S'$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  et  $|S'| > |S|$ .

### 1.1.8 Stabilité :

Soit un ensemble  $S \subseteq V$  de sommets, si les sommets de  $S$  ne sont pas adjacents deux à deux, l'ensemble  $S$  est dit un stable ou indépendant. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal est le nombre de stabilité inférieur noté  $i(G)$  (resp. le nombre de stabilité supérieur noté  $\beta_0(G)$ ).

## 1.2 Graphes particuliers

### 1.2.1 Graphe complet

Le graphe complet d'ordre  $n$ , noté  $K_n$  est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré  $n - 1$ . Ainsi, deux sommets quelconques de  $K_n$  sont adjacents. La figure « FIG 1.3 » donne quelques exemples de graphes complets.

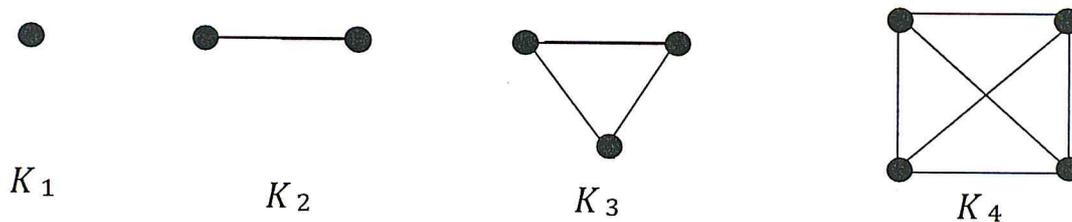


FIG 1.3 : Exemple des graphes complets

### 1.2.2 Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire de  $G = (V, E)$ , noté  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ , est le graphe dont l'ensemble des sommets est exactement  $V$  et l'ensemble des arêtes est l'ensemble complémentaire de  $E$  par rapport aux arêtes de la clique à  $|V|$  sommets, c'est-à-dire pour toute arête  $e$

$$e \in \bar{E} \Leftrightarrow e \in E(K_n) \setminus E.$$

### 1.2.3 Graphe connexe

Considérons l'ensemble des sommets d'un graphe  $G = (V, E)$ , la relation binaire  $C$  appelée relation de connexité, définie par  $xCy \Leftrightarrow$  il existe une chaîne de  $x$  à  $y$  est une relation d'équivalence.

- Dans un graphe  $G$ , on appelle classe connexe tout sous ensemble de sommets qui forment une classe d'équivalence de la relation de

connexité, une composante connexe est un sous graphe maximal qui engendre une classe connexe.

- Un graphe est connexe, s'il ne possède qu'une seule composante connexe.

### 1.2.4 Graphe $k$ -parti

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $k$ -parti s'il existe une partition de  $V$  en  $k$  sous-ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_k$  telle que chacun des  $V_i$  soit un stable. On appelle graphe biparti si  $k = 2$ . Un graphe biparti complet est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire que pour tout sommet  $v \in V_1$  et pour tout  $u \in V_2$ , on a  $uv \in E$ . Si  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$  alors le graphe biparti complet est noté  $K_{p,q}$ . Quelques exemples de graphes bipartis sont montrés dans la figure « FIG 1.4 ».

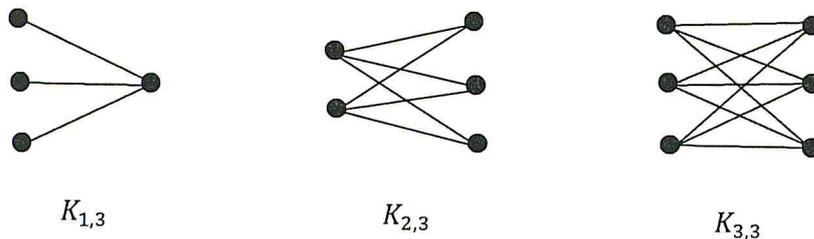


FIG 1.4 Exemple de graphes bipartis complets

### 1.2.5 Arbre et forêt

- On appelle arbre, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement  $(n - 1)$  arêtes. On appelle feuille d'un arbre, tout sommet de degré 1, dit aussi sommet pendent.

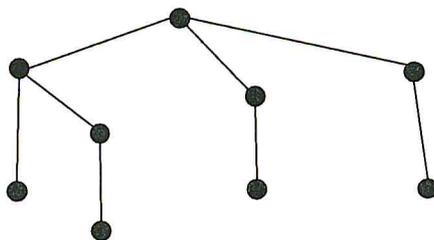


FIG 1.5 : Un arbre  $T$

- Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé forêt (chaque composante connexe est un arbre).

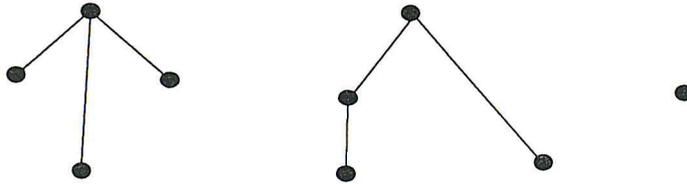
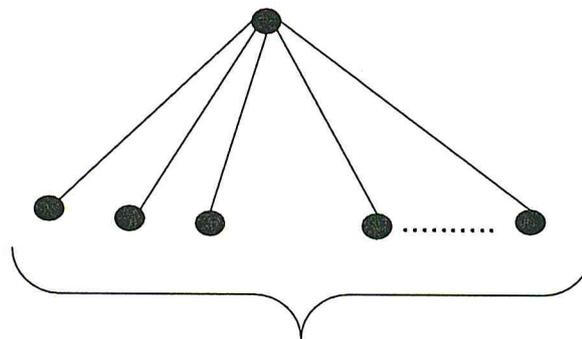


FIG 1.6 : Une forêt

- On appelle étoile, et on note par  $K_{1,n}$ , l'arbre à  $n + 1$  sommets ayant  $n$  feuilles. Un exemple d'une étoile est montré dans la figure « FIG 1.7 »



$n$  sommets

FIG 1.7 : L'étoile  $K_{1,n}$

### 1.2.6 Isomorphisme de graphes

Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont dits isomorphes s'il existe une application bijective  $\varphi$  de  $V$  sur  $V'$  telle que pour tous sommets  $u, v \in V$ ,  $uv \in E$  si et seulement si  $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$ .

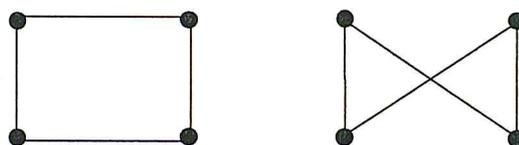


FIG 1.8 : Graphes isomorphes

## 1.3 Quelques opérations sur les graphes

### 1.3.1 Produit carré (cartésien)

Le produit cartésien de deux graphes  $G$  et  $H$ , noté  $G \square H$ , est un graphe dont les sommets sont les paires ordonnées  $(x, y)$  où  $x \in V(G)$  et  $y \in V(H)$ . Deux sommets  $(u, v)$  et  $(x, y)$  sont adjacents si et seulement si  $u = x$  et  $v$  est adjacent à  $y$  dans  $H$ , ou  $v = y$  et  $u$  est adjacent à  $x$  dans  $G$ .

**Exemple 1.3.1** Le graphe illustré dans la figure « FIG 1.9 » est le produit cartésien de la chaîne  $P_3$  par la chaîne  $P_5$ .

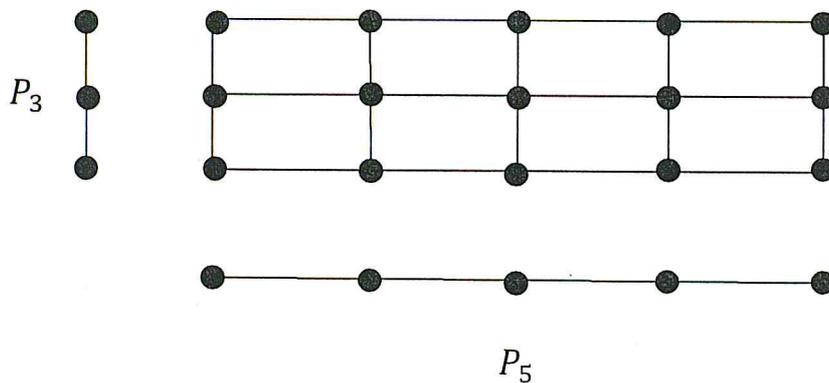


FIG 1.9 : Le produit cartésien de la chaîne  $P_3$  par la chaîne  $P_5$ .

### 1.3.2 Produit croisé (tensoriel)

Le produit tensoriel ou croisé de deux graphes  $G$  et  $H$ , noté par  $G \times H$ , est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées  $(x, y)$  où  $x \in V(G)$  et  $y \in V(H)$ . Deux sommets distincts  $(u, v)$  et  $(x, y)$  sont adjacents si et seulement si  $u \in N_G(x)$  et  $v \in N_H(y)$ .

**Exemple 1.3.2** Le graphe illustré dans la figure « FIG 1.10 » est le produit tensoriel de la chaîne  $P_3$  par la chaîne  $P_5$ .

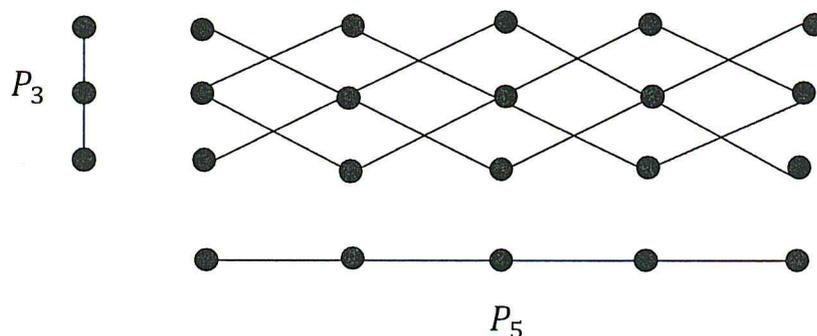


FIG 1.10 : Le produit tensoriel de la chaîne  $P_3$  par la chaîne  $P_5$ .

### 1.3.3 Produit complet (fort)

Le produit fort de  $G$  et  $H$ , noté par  $G \boxtimes H$ , est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées  $(x, y)$  où  $x \in V(G)$  et  $y \in V(H)$ . L'ensemble des arêtes est l'union de  $E(G \square H)$  et de  $E(G \times H)$ , c'est-à-dire,  $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$ .

**Exemple 1.3.3** Le graphe illustré dans la figure « FIG 1.11 » est le produit fort de la chaîne  $P_3$  par la chaîne  $P_5$ .

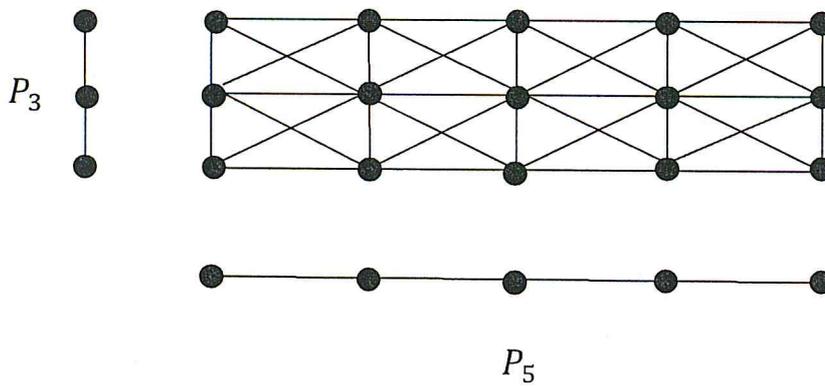


FIG 1.11 : Le produit fort de la chaîne  $P_3$  par la chaîne  $P_5$ .

## 1.4 Domination dans les graphes

### 1.4.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet trouve son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand De Jaenisch [12] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier  $n \times n$  de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles. Tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier  $8 \times 8$ , cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. Dans ce cas, le problème est appelé « le problème des cinq reines » qui est à l'origine de l'étude mathématique de la domination.

En 1892, Ball [1] a traité la question de De Jaenish en considérant d'autres conditions supplémentaires.

En 1964, les frères Yaglom [29] étudièrent les problèmes posés par De Jaenish et Ball. L'appellation « coefficient de stabilité externe » fut introduite par Berge [3] pour définir le nombre de domination et en 1962, Ore [25] fut le premier à employer les termes « ensemble dominant » et « nombre de domination » qu'il nota  $d(G)$ .

L'étude moderne de la domination a débuté après l'apparition de l'article de Cockayne et Hedetniemi [8] en 1977. Les auteurs de [8] ont été les premiers à utiliser la notation  $\gamma(G)$  pour désigner le nombre de domination.

### 1.4.2 Domination standard

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$  est un dominant de  $G$  si tout sommet de  $V - S$  est adjacent à au moins un sommet de  $S$ . Un ensemble dominant  $S$  d'un graphe  $G$  est minimal si  $\nexists S' \subset S$  tel que  $S'$  soit un dominant. Le nombre de domination inférieur  $\gamma(G)$  et le nombre de domination supérieur  $\Gamma(G)$  de  $G$  sont respectivement les cardinalités minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur  $G$ . Un ensemble dominant minimal de  $G$  de cardinalité minimum est appelé  $\gamma$ -ensemble, et un ensemble dominant minimal de  $G$  de cardinalité maximum est appelé  $\Gamma$ -ensemble.

Par exemple dans la figure « FIG 1.12 », l'ensemble  $S = \{u, v\}$  est un  $\gamma$ -ensemble et l'ensemble  $S' = \{w, x, y, z\}$  est un  $\Gamma$ -ensemble.

Dans la littérature, on trouve d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans un graphe :

- Un ensemble  $S \subseteq V$  est un ensemble dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v$  de  $V$ ,  $|N[v] \cap S| \geq 1$ .
- Un ensemble  $S \subseteq V$  est un ensemble dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v$  de  $V - S$ ,  $N(v) \cap S \neq \emptyset$ .
- Un ensemble  $S \subseteq V$  est un ensemble dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v$  de  $V - S$ ,  $|N(v) \cap S| \geq 1$ .
- Un ensemble  $S \subseteq V$  est un ensemble dominant de  $G$  si  $N[S] = V$ .

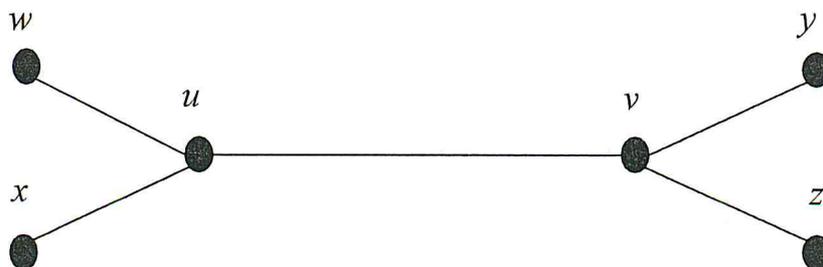


FIG 1.12 : Un graphe  $G$  avec  $\gamma(G) = 2$  et  $\Gamma(G) = 4$

### 1.4.3 Exemples concrets sur la domination

- 1) Considérons, un graphe d'une carte géographique où les sommets sont les localités et les arêtes sont les routes entre deux localités différentes, on suppose qu'un gardien d'une localité protège ses voisins et lui-même, nous cherchons le nombre minimum de gardien pour protéger toutes les localités. Pour résoudre ce problème, il suffit de déterminer un dominant minimum dans ce graphe.
- 2) Chercher le nombre minimum de policiers qu'on peut les placer pour contrôler tous les ronds-points d'une ville, revient à déterminer un dominant de cardinalité minimum dans le graphe correspondant à cette ville dont les sommets sont les ronds-points, et les arêtes sont les liens entre les ronds-points.

### 1.4.4 Quelques invariants de domination

On dénombre actuellement plusieurs types de domination et beaucoup de références dans le domaine de domination dans les graphes. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([19], [20]).

#### **Indépendance :**

Comme vu précédemment, un ensemble  $S$  de sommets est dit stable (ou indépendant) si les sommets de  $S$  sont non adjacents deux à deux. Le nombre de stabilité inférieur (nombre de domination stable)  $i(G)$  et le nombre de stabilité supérieur  $\beta_0(G)$  de  $G$  sont respectivement les cardinalités minimum et maximum d'un ensemble stable maximal dans  $G$ .

Par exemple dans la figure « FIG 1.12 »  $i(G) = 3$  et  $\beta_0(G) = 4$ .

Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal [2], on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

#### **Efficacité :**

Un ensemble dominant  $S$  de  $G$  est dit efficace si pour tout sommet  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap S| = 1$ , c'est-à-dire que tout sommet est dominé par un unique sommet de  $S$ .

Notons qu'un ensemble dominant efficace n'existe pas toujours puisque le cycle  $C_5$  ne possède pas d'ensemble dominant efficace.

Par ailleurs, si un graphe  $G$  possède un ensemble dominant efficace  $S$ , alors tout ensemble dominant efficace de  $G$  a le cardinal de  $S$  qui est forcément  $\gamma(G)$ .

## Irrédondance :

Un sous-ensemble  $S \subseteq V$  est dit irrédondant si pour tout sommet  $x \in S$  on a,  $N[x] - N[S - \{x\}] \neq \emptyset$ . Dans ce cas, l'ensemble  $N[x] - N[S - \{x\}]$  est appelé le voisinage privé de  $x$  relatif à  $S$ . Le nombre d'irrédondance inférieur  $ir(G)$  et le nombre d'irrédondance supérieur  $IR(G)$  de  $G$  sont respectivement les cardinalités minimum et maximum d'un ensemble irrédondant maximal dans  $G$ .

Par exemple dans la figure « FIG 1.12 »  $ir(G) = 2$  et  $IR(G) = 4$ .

Comme tout ensemble dominant minimal est un ensemble irrédondant maximal de  $G$  [8], nous avons la célèbre chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [20] qui relie les six paramètres de domination pour tout graphe  $G$  :

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G)$$

### 1.4.5 Complexité du problème de domination

Dans cette section, on omettra les rappels relatifs à la théorie de la complexité algorithmique. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux livres de Sakarovitch [28], Garey et Johnson [18] et Papadimitriou [26].

Soit  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n$ . Le problème de décision [10] associé au problème de recherche d'un ensemble dominant minimum est donné par :

#### **Ensemble dominant**

**Instance** : Un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  et  $k$  un entier positif,  $k \leq n$ .

**Question** : Existe-il un ensemble dominant de  $G$  de cardinal  $\leq k$  ?

Par la réduction du problème "3-SAT" au problème "Ensemble dominant", David Johnson montre que le problème de l'Ensemble dominant est difficile.

**Théorème** [18] Le problème "Ensemble dominant" est difficile.

Le problème "Ensemble dominant" reste difficile pour la classe des graphes bipartis [13] et les graphes triangulés [5]. Néanmoins, il est polynômial pour la classe des arbres avec un ordre de complexité égal à  $O(n)$  [7].

## CHAPITRE II

### FONCTION BROADCAST DANS LES GRAPHS

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de fonctions broadcasts dans les graphes et les résultats établis sur ces fonctions broadcasts. Nous énonçons aussi quelques invariants des broadcasts et les liens qui les relient.

#### 2.1 Notions fondamentales sur les fonctions broadcasts

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non trivial connexe.

##### Définition 2.1.1

Une fonction  $f$  définie sur l'ensemble de  $V \rightarrow [0, \dots, \text{diam}(G)]$  telle que  $f(v) \leq e(v)$  pour tout sommet  $v$  de  $G$  est appelée une fonction broadcast sur  $G$ . Un sommet  $v$  pour lequel  $f(v) > 0$  est un sommet  $f$ -dominant ou sommet broadcast, et l'ensemble  $f$ -dominant est  $V_f^+(G) = \{v \in V(G) : f(v) > 0\}$ . S'il n'y a pas risque de confusion, on note par  $V_f^+$  au lieu de  $V_f^+(G)$ .

##### Définition 2.1.2

Une fonction broadcast  $f$  est dominante sur  $G$  est une fonction broadcast  $f$  dans lequel chaque sommet est  $f$ -dominé par au moins un sommet dans  $V_f^+$ . Autrement dit, une fonction broadcast  $f$  est dominante si pour tout  $v \in V, H(v) \geq 1$ .

##### Remarque 2.1.3

S'il existe un sommet  $v$  avec  $f(v) = \text{diam}(G)$  alors,  $f$  est une fonction broadcast dominante. Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer des fonctions broadcasts dominantes avec des sommets de coût supérieur au  $\text{diam}(G)$ .

##### Remarque 2.1.4

Un sommet  $f$ -dominant  $v$   $f$ -domine chaque sommet  $u$  avec  $d(u, v) \leq f(v)$ , et les sommets dans  $V - V_f^+$  ne  $f$ -dominent aucun sommet de  $G$ . On dit que tout sommet  $u \in V_f^+$  est un sommet broadcast. Si  $u \in V_f^+$ ,  $v \in V$  et  $d(u, v) \leq f(u)$ , on dit que le sommet  $v$  peut atteindre un broadcast à partir de  $u$ . L'ensemble des sommets que  $v \in V$  peut atteindre est défini par :

$$H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u, v) \leq f(u)\}.$$

### Exemple 2.1.5

Dans la figure « FIG. 2.1 », le sommet  $u$  est un sommet broadcast et  $H(v) = H(w) = \{u\}$  et  $H(y) = H(z) = \{x\}$ .

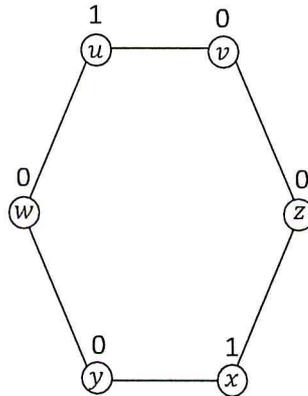


FIG. 2.1 : Les sommets  $u$  et  $x$  sont des sommets  $f$ -dominants et  $V_f^+ = \{u, x\}$

### Définition 2.1.6

Pour une fonction broadcast  $f$ , un sommet  $u$  qui est  $f$ -dominé par un sommet  $v$  est un  $f$ -voisin de  $v$ . L'ensemble des  $f$ -voisins de  $v$  est le  $f$ -voisinage de  $v$  et il est noté par  $N_f[v]$ . Si  $S \subseteq V_f^+$ , alors  $N_f[S] = \bigcup_{v \in S} N_f[v]$ . Le  $f$ -voisinage de  $f$  est  $N_f[V_f^+]$ .

### Remarque 2.1.7

Notons que  $u$  est un voisin de  $v$  si et seulement si  $v$  est un voisin de  $u$  mais, il est possible que  $u$  soit un  $f$ -voisin de  $v$  sans que  $v$  le soit pour  $u$ . En effet, le graphe illustré dans la figure « FIG.2.2 » avec  $f(u) = f(w) = 0$  et  $f(v) = 1$  montre que  $u$  est un  $f$ -voisin de  $v$ , mais que  $v$  n'est pas un  $f$ -voisin de  $u$ .

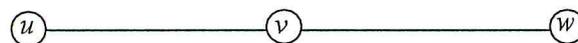


FIG. 2.2 : Le sommet  $u$  est un  $f$ -voisin de  $v$ , le sommet  $v$  n'est pas un  $f$ -voisin de  $u$ .

### Définition 2.1.8

Un sommet  $u$  est un  $f$ -voisin privé de  $v$  si  $u$  est  $f$ -dominé seulement par  $v$ . Pour un sommet  $v \in V_f^+$ , le  $f$ -voisinage privé  $pn_f[v]$  est l'ensemble des  $f$ -voisins privés de  $v$ . Si  $v \in pn_f[v]$ , alors on dit que  $v$  est son  $f$ -voisin privé propre. Pour  $S \subseteq V_f^+$ , on définit l'ensemble des  $f$ -voisins privés de  $S$  par  $PN_f[S] = N_f[S] - N_f[V_f^+ - S]$ .

**Définition 2.1.9**

Soit  $f$  une fonction broadcast sur un graphe connexe  $G$  et  $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ . Une fonction broadcast  $f$  d'un certain type (domination ou autre) est minimale (resp. maximale) s'il n'existe pas une fonction broadcast  $g \neq f$  tel que pour tout sommet  $v \in V$ ,  $g(v) \leq f(v)$  (resp  $g(v) \geq f(v)$ ) avec  $\sigma(g) < \sigma(f)$  (resp  $\sigma(g) > \sigma(f)$ ).

**Proposition 2.1.10** [16]

Soit  $f$  une fonction broadcast dominante minimum sur un graphe connexe  $G$ . Alors  $V_f^+ = \{v\}$  si et seulement si  $f(v) = e(v) = rad(G)$ .

**Définition 2.1.11**

Le nombre de fonctions broadcast domination  $\gamma_b(G)$  est la valeur minimum de  $\sigma(f)$  sur toutes les broadcasts dominantes de  $G$ .

Une fonction broadcast dominante  $f$  sur  $G$  pour laquelle  $\sigma(f) = \gamma_b(G)$  est la valeur minimum de  $\sigma(f)$  sur toutes les broadcasts dominantes de  $G$  est dite fonction broadcast dominante minimum sur  $G$ . Le nombre de broadcast domination supérieur  $\Gamma_b(G)$  est égal au coût maximum d'une fonction broadcast dominante minimale sur  $G$ .

**Exemple 2.1.12** Le nombre de broadcast domination et le nombre de broadcast domination supérieur du graphe illustré dans la figure « FIG. 2.3 » valent respectivement :  $\gamma_b(G) = 2$  et  $\Gamma_b(G) = 3$ .

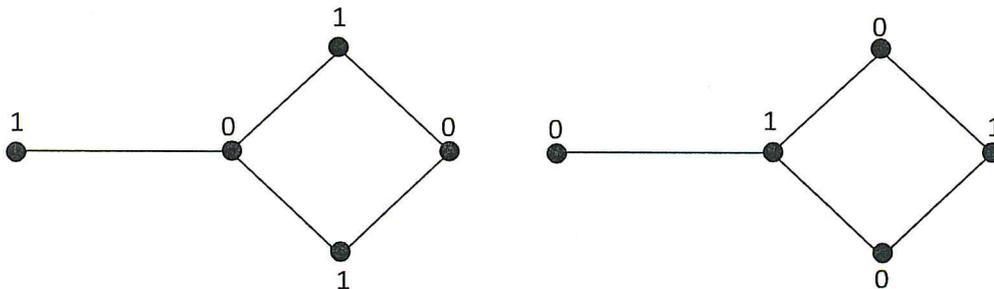


FIG. 2.3 Un graphe  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2$  et  $\Gamma_b(G) = 3$

**Exemple 2.1.13** [27] : Pour illustrer ces concepts, considérons le graphe  $G = (V, E)$  de diamètre 4 sur la figure « FIG 2.4 ». Les figures FIG 2.4(b) et 2.4(c) illustrent deux fonctions broadcasts dominantes  $f$  et  $g$ , où l'ensemble  $f$ -dominant est  $V_f^+ = \{s, v, y\}$ , et l'ensemble  $g$ -dominant est  $V_g^+ = \{t, z\}$ . Les sommets  $f$ -domine par  $s$  sont :  $t, u, w, x$  et son  $f$ -voisinage  $N_f[s] = \{s, t, u, w, x\}$ , mais  $s$  ne  $g$ -domine pas tous les sommets. Aussi,  $|H_f(u)| = 3, |H_f(x)| = 2, |H_f(z)| = 2$  et  $|H_f(r)| = 1$  pour tout sommet  $r \in \{s, t, v, w, y\}$ . La fonction  $f$  a  $\sigma(f) = f(V) = 4$  alors que

$\sigma(g) = g(V) = 3$ . En fait, il n'est pas difficile de voir que  $\gamma_b(G) = 3$  et  $g$  est un  $\gamma_b$ -broadcast.

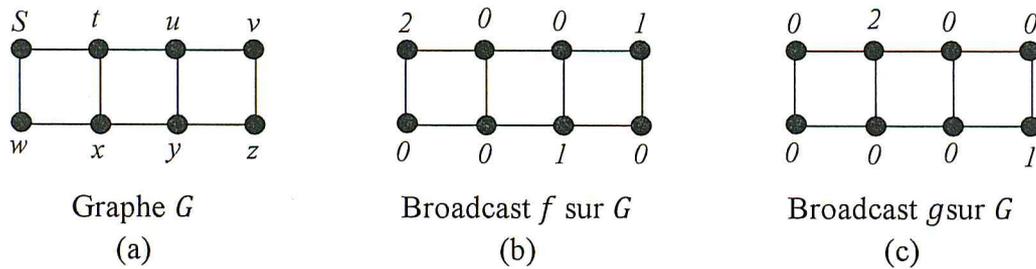


FIG 2.4 Deux fonctions broadcasts dominantes

### Exemples concrets sur le broadcast

Une application de la broadcast de domination est la localisation de stations radio FM dans une zone donnée, où les sites à localiser sont les sommets d'un graphe représentant la zone en question. En fait, les stations radio FM se distinguent par leurs fréquences de transmission et par leurs ERP (radiated effective power), et un transmetteur avec une grande ERP peut transmettre loin mais sa construction et son fonctionnement sont plus coûteux. Il est alors pertinent de minimiser la somme des ERP qui correspond à la minimisation du coût du broadcast de domination c.-à-d. à la recherche de  $\gamma_b(G)$ .

Une caractérisation de la minimalité d'un broadcast dominant peut être formulée en termes de  $f$ -voisins privés des sommets  $f$ -dominants.

#### Théorème 2.1.14 [15]

Soit une fonction broadcast dominante  $f$  sur un graphe  $G$ . Alors,  $f$  est minimale si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Chaque sommet  $v$  vérifiant  $f(v) \geq 2$  a un  $f$ -voisinage privé qui est à distance  $f(v)$  de  $v$ .
2. Chaque sommet  $v$  vérifiant  $f(v) = 1$  a un  $f$ -voisinage privé dans  $N[v]$ .

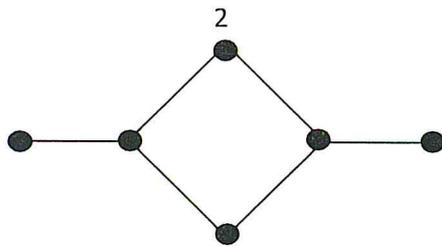
Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe non trivial et  $f_S: V \rightarrow \{0, 1\}$  la fonction caractéristique d'un ensemble  $S \subseteq V$ .

#### Remarque 2.1.15

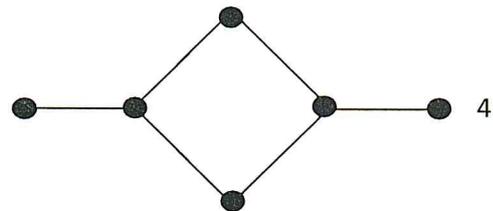
1. La fonction caractéristique  $f_S$  d'un ensemble dominant minimal  $S$  dans un graphe  $G$  est une fonction broadcast dominante minimale et donc  $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$
2. Soit  $u \in V$ , et soit  $f_u: V \rightarrow [0 \dots \text{diam}(G)]$  la fonction définie par :

$$f_u(v) = \begin{cases} e(u) & \text{si } u = v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction broadcast  $f_u$  est dominante minimale, puisque chaque sommet est  $f$ -dominé par  $u$ . Si  $u$  est un sommet centre de  $G$  c'est-à-dire  $e(u) = rad(G)$ , alors on dira que la fonction broadcast  $f_u$  est une fonction broadcast radiale, et si  $e(u) = diam(G)$ , alors on dira que la fonction broadcast  $f_u$  est une fonction broadcast diamétrale.



(a) Fonction broadcast radiale



(b) Fonction broadcast diamétrale

**Proposition 2.1.16** [15]

Si  $f$  est une fonction broadcast dominante minimale sur un graphe connexe  $G$  et  $|V_f^+| \geq 2$ , alors pour chaque sommet  $v$ ,  $f(v) < e(v)$ .

**Observation 1** [14]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\gamma_b(G) \leq \min \{ \gamma(G), rad(G) \} \leq \max \{ \Gamma(G), diam(G) \} \leq \Gamma_b(G).$$

## 2.2 Résultats fondamentaux

Pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k$  avec  $1 \leq k \leq rad(G)$ , le nombre de  $k$ -distance domination, noté  $\gamma_k(G)$ , est la plus petite cardinalité d'un ensemble de sommets  $S$  de  $G$  tel que tout sommet de  $G$  est à distance au plus  $k$  d'au moins un sommet de  $S$ .

**Proposition 2.2.1** [16]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\gamma_b(G) \leq \min \{ k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G) \}.$$

Notons que le résultat de la Proposition 2.2.1 produit une meilleure borne pour  $\gamma_b(G)$  que celle de l'Observation 1, car si  $k = 1$  (resp.  $k = rad(G)$ ), on obtient  $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$  (resp.  $\gamma_b(G) \leq rad(G)$ ).

Pour tout entier positif  $t \geq 3$ , on appelle *étoile* et on note par  $K_{1,t}$  l'arbre à  $t$  sommets pendants reliés à l'unique sommet de degré  $t$ . Le graphe de la figure FIG 2.5 (a) représente l'étoile  $K_{1,4}$ . On appelle graphe subdivisé d'un

graphe  $G$  le graphe  $S(G)$  obtenu en insérant un sommet sur chaque arête de  $G$  (voir figure FIG 2.5(b)). Considérons  $S(K_{1,t})$  le graphe subdivisé de l'étoile  $K_{1,t}$  où  $t \geq 2$  est entier. Pour un entier positif  $k$ , soit  $H_k$  le graphe obtenu en joignant un sommet pendant de  $S(K_{1,2+k})$  à un sommet pendant de la chaîne  $P_{2k}$  (voir figure « FIG 2.6 »).

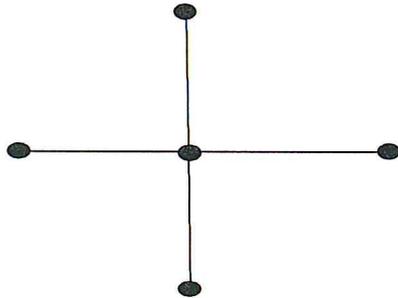


FIG 2.5 (a) représente l'étoile  $K_{1,4}$

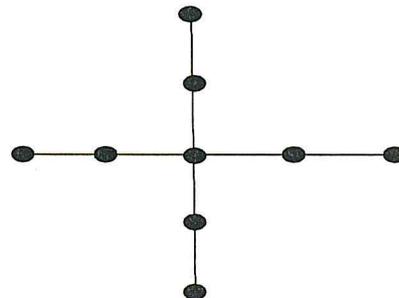


FIG 2.5 (b) Graphe subdivisé d'un graphe  $K_{1,4}$

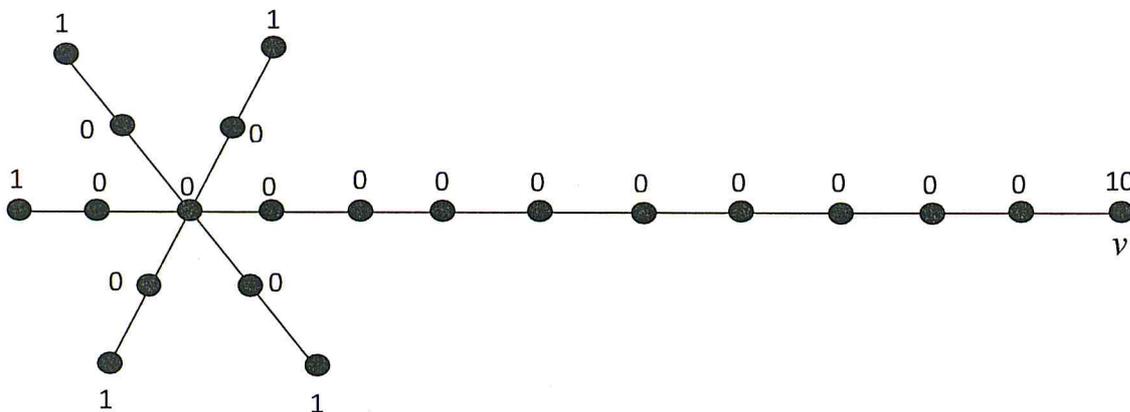


FIG 2.6 : Le graphe  $H_4$

Alors  $\Gamma(H_k) = 2k + 3$  et  $diam(H_k) = 2k + 4$ , donc,  $\max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} = 2k + 4$ . Soit  $v$  l'extrémité de  $P_{2k}$  qui est extrémité de  $H_k$ . Soit la fonction broadcast  $f: V(H_k) \rightarrow \{0, 1, 2k + 2\}$  définie par  $f(v) = 2k + 2$ ,  $f(x) = 1$  pour tout extrémité de  $H_k$  distincte de  $v$  et  $f(x) = 0$  pour tout autre sommet. Alors  $f$  est une fonction broadcast dominante minimale sur  $H_k$  de coût  $3k + 3$  et  $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$ , et on a le résultat suivant :

**Observation 2 [14]**

Pour tout graphe  $H_k$ ,

$$\Gamma_b(H_k) - \max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} \geq k - 1.$$

Dans [16], Erwin résoud le problème d'existence d'un graphe  $G$  avec  $\gamma_b(G) < \min \{k \gamma_k(G) : 1 \leq k \leq \text{rad}(G)\}$ , par théorème suivant :

**Théorème 2.2.2** [16]

Pour tout entier positif  $k$ ,  $\min\{t \gamma_t(H_k) : 1 \leq t \leq \text{rad}(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{2k}{15} - 1$ .

Les graphes  $G$  vérifiant  $\gamma_b = \text{rad}(G)$  sont fondamentaux pour l'étude des  $\gamma_b$ -broadcasts. Les trois propositions suivantes, dont deux sont des caractérisations de ces graphes, le montrent :

**Proposition 2.2.3** [16]

Soit  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur un graphe  $G$ . Alors  $V_f^+ = \{v\}$  si et seulement si  $f(v) = e(v) = \text{rad}(G)$ .

**Proposition 2.2.4** [16]

Soit  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Si  $v \in V_f^+$ , alors

$$f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v] \rangle) = \text{rad}(\langle N_f[v] \rangle).$$

**Proposition 2.2.5** [16]

Soit  $G$  un graphe. Alors  $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$  si et seulement si

$$\min\{k \gamma_k(G) : 1 \leq k \leq \text{rad}(G)\} = \text{rad}(G).$$

En général, il n'y a aucune relation entre le nombre de broadcast domination d'un graphe et le nombre de broadcast domination de ses sous-graphes, même si le sous-graphe est induit. En effet, considérons un graphe  $G$  d'ordre  $n \geq 4$  tel que le degré maximum  $\Delta(G) = n - 2$ . Puisque aucun sommet de  $G$  n'est adjacent à tous les sommets du graphe  $G$ , alors  $\gamma_b(G) \geq 2$ . Soit  $H$  le graphe obtenu en joignant un nouveau sommet à tous les sommets de  $G$ , Alors  $\gamma_b(H) = 1$ . Donc dans ce cas,  $G \subseteq H$ , bien que  $\gamma_b(G) > \gamma_b(H)$ . Cependant, le théorème suivant montre que cette relation n'est pas vraie en général :

**Théorème 2.2.6** [16]

Si  $H$  est le graphe subdivisé d'un graphe  $G$ , alors  $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$ .

Soit  $G$  un graphe. Pour tous entiers  $k \geq 0$ , on appelle graphe  $k$ -subdivisé du graphe  $G$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en insérant  $k$  sommets sur chaque arête de  $G$ . Pour tous entiers  $k \geq 0$  et  $t \geq 3$ , on note par  $S_{k,t}$  le graphe  $k$ -subdivisé du graphe  $t$ -étoile  $K_{1,t}$ . Le centre de  $S_{k,t}$  est l'unique sommet  $c$  de  $S_{k,t}$  l'excentricité  $e(c) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1$ .

Un graphe  $G$  est  $\gamma_b$ -radial si  $\gamma_b(G) = rad(G)$ . En 2001, Erwin [15] a montré que le graphe est  $\gamma_b$ -radial pour  $k \geq 0$  et  $t \geq 5$  puis a conjecturé que le résultat reste vrai pour  $t \in \{3, 4\}$ .

Soit  $P$  une chaîne diamétrale d'un arbre  $T$  (i.e.  $P$  est de longueur maximale). Un ensemble  $M$  des arêtes de  $P$  est un ensemble  $P$ -partition si les extrémités de chaque arête dans  $M$  sont de degré 2 dans  $T$ .

Le problème de caractérisation des arbres radiaux a été posé par Dunbar, Erwin, haynes et Hedetniemi dans [14], mais résolu par Herke et Mynhardt.

### **Théorème 2.2.7** [23, 24]

Un arbre  $T$  est radial si et seulement si  $T$  n'admet pas d'ensemble  $P$ -partition non vide.

Un  $\gamma_b$ -broadcast  $f$  est un  $\gamma_b$ -broadcast très efficace si et seulement si  $f$  est un  $\gamma_b$ -broadcast avec un nombre minimum de sommets broadcast. Un résultat se déduisant directement du Théorème 2.2.7 est :

### **Corollaire 2.2.8** [23, 24]

1. Soit  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast très efficace d'un arbre  $T$  à  $s$  sommets broadcasts.  
Alors  $\gamma_b(T) = rad(T) - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ .
2. Pour un arbre  $T$ , si  $M$  un ensemble  $P$ -partition de cardinal maximum  $m$ .  
Alors  $\gamma_b(T) = rad(T) - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ .

## **2.3 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination**

D. Erwin détermina la même borne inférieure établie pour le cas du nombre de domination et montre qu'elle reste valable pour le nombre de broadcast domination.

### **Théorème 2.3.1** [16]

Si  $G$  est un graphe connexe non trivial, alors :  $\gamma_b(G) \geq \left\lfloor \frac{diam(G) + 1}{3} \right\rfloor$ .

### **Théorème 2.3.2** [16]

Pour tout entier  $n \geq 2$ , d'une chaîne  $P_n$  :  $\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ .

- Puisque  $diam(G) \geq rad(G)$ , une borne inférieure en termes de rayon, a été déterminée par Bresar et Spacapan pour le nombre de broadcast domination.

**Théorème 2.3.3 [6]**

Si  $G$  est un graphe connexe, alors :  $\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{2rad(G)}{3} \right\rceil$ .

Pour tout graphe connexe  $G$  d'ordre  $n$ ,  $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$  est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

**Théorème 2.3.4 [24]**

Pour tout graphe connexe  $G$  d'ordre  $n$ ,  $\gamma_b(G) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ .

Il existe d'autres bornes qui dépendent du rayon. Pour un  $\gamma_b$ -broadcast  $f$ , notons par :

$$M = \max\{f(x) : x \in V_f^+\}.$$

**Lemme 2.3.5 [15]**

Soit  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Alors :

$$rad(G) \leq 2\gamma_b(G) + |V_f^+| - M - 1.$$

Du lemme 2.3.5, nous obtenons immédiatement le résultat suivant :

**Théorème 2.3.6 [15]**

Soit  $G$  un graphe et  $f$  un  $\gamma_b$ -broadcast sur  $G$ . Alors :

$$\gamma_b(G) \geq \left\lceil \frac{rad(G) + M + 1 - |V_f^+|}{2} \right\rceil.$$

## 2.4 Nombre de broadcast domination du produit de deux graphes

### 2.4.1 Produit carré (cartésien)

Il est facile de voir que  $d_{G \square H}((u, x), (v, y)) = d_G(u, v) + d_H(x, y)$  et donc :  $rad(G \square H) = rad(G) + rad(H)$ , alors :

$$\gamma_b(G \square H) \leq rad(G \square H) = rad(G) + rad(H) \leq \frac{3}{2} (\gamma_b(G) + \gamma_b(H))$$

### 2.4.2 Produit croisé (tensoriel)

Pour deux graphes  $G$  et  $H$ , Bresar et Spacapan ont déterminé une borne supérieure pour le nombre de broadcast domination de  $G \times H$ .

**Proposition[6]** Soit  $X = G \times H$  est le produit croisé de  $G$  et  $H$ , alors :

$$\gamma_b(G \times H) \leq \begin{cases} 3\gamma_b(G) & \text{si } rad(G) > rad(H) \\ 3 \min\{\gamma_b(G), \gamma_b(H)\} + 1 & \text{si } rad(G) = rad(H) \end{cases}$$

### 2.4.3 Produit complet (fort)

**Proposition [6]** Soit  $X = G \boxtimes H$  est le produit complet de deux graphes  $G$  et  $H$ , alors :

$$\gamma_b(G \boxtimes H) \leq \frac{3}{2} \max\{\gamma_b(G), \gamma_b(H)\}.$$

## 2.5 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

Une caractérisation connue des graphes  $G$  connexes de nombre de domination  $\gamma(G) = 1$  si et seulement si  $rad(G) = 1$ . Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation identique :

**Proposition 2.5.1 [16]**

Soit  $G$  un graphe. Alors :  $\gamma_b(G) = 1$  si et seulement si :  $rad(G) = 1$ .

Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 se caractérisent aussi en fonction du rayon :

**Théorème 2.5.2 [16]**

Soit  $G$  un graphe. Alors  $\gamma_b(G) = 2$  si et seulement si :  
 $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2$ .

Cependant, Erwin [16] propose des exemples pour montrer qu'il existe :

- (i) une infinité de graphes  $\gamma_b(G) = 2 = rad(G) < \gamma(G)$ . Il suffit de considérer les graphes  $S(K_{1,n})$ ,  $n \geq 3$ , pour lesquels on a :

$$\gamma_b(S(K_{1,n})) = \text{rad}(S(K_{1,n})) = 2 \text{ et } \gamma(S(K_{1,n})) = n.$$

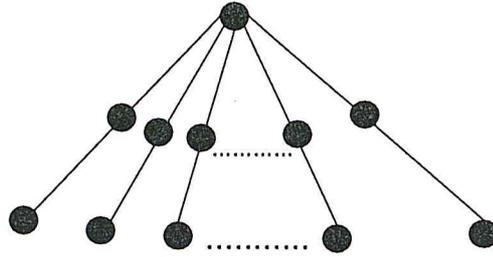


FIG 2.7: Le graphe  $S(K_{1,n})$ ,  $n \geq 3$

- (ii) une infinité de graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < \text{rad}(G)$ . Il suffit de considérer les graphes  $G_n$  obtenus en insérant 2 sommets sur chaque arête du graphe multiple à 2 sommets reliés par  $n$  arêtes,  $n \geq 1$ , pour les quels on a  $\gamma_b(G_n) = \gamma(G_n) = 2$  et  $\text{rad}(G_n) = 3$ .

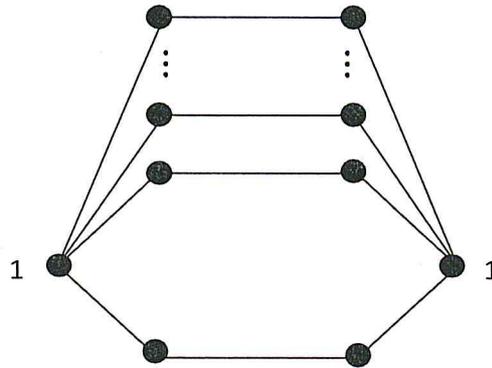


FIG 2.8 : Le graphe  $G_n$

- (iii) une infinité de graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) = \text{rad}(G)$ . Il suffit de considérer les graphes multipartis complets  $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ ,  $t \geq 2$  et  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $n_i \geq 2$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , pour les quels on a :

$$\gamma_b(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \gamma(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \text{rad}(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 2.$$

Il déduit de (i) qu'un graphe avec  $\gamma_b(G) = 2$  peut avoir un nombre de domination aussi grand que l'on voudrait. De (ii), il se pose la question sur la borne supérieure de  $\text{rad}(G)$  pour les graphes  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 2$ . Il y répondit par cette conséquence du Théorème 2.5.2

### Proposition 2.5.3 [16]

Si  $G$  est un graphe avec  $\gamma_b(G) = 2$ , alors :

1.  $rad(G) = 2$ , ou,
2.  $rad(G) = 3$  et  $\gamma(G) = 2$ .

Une autre conséquence du Théorème 2.5.2 est la suivante :

### Proposition 2.5.4 [16]

Si  $G$  est un graphe et  $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 3$ , alors  $\gamma_b(G) = 3$ .  
Erwin résuma la Proposition 2.5.1, le Théorème 2.5.2 et la Proposition 2.5.4 par :

### Proposition 2.5.5 [15]

Soit  $G$  un graphe. Si  $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$ , où  $1 \leq k \leq 3$ , alors  $\gamma_b(G) = k$ .

Erwin montra que le résultat de la Proposition 2.5.5 n'est pas vérifié lorsque  $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$  (au cas  $k = 4$ ). Il considéra le graphe  $G$  obtenu en joignant une extrémité de  $S(K_{1,4})$  à une extrémité de  $P_3$  (voir figure « FIG 2.9 ») et il montra que  $\gamma_b(G) = 3$  et  $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$ .

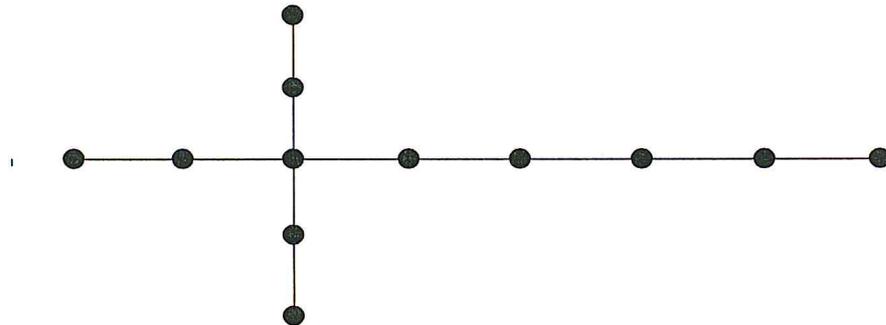


FIG 2.9 : Un graphe  $G$  avec  $\gamma_b(G) = 3$  et  $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$

## 2.6 Invariants dans des broadcasts

Dans [14], Dunbar et al. Définirent et étudièrent d'autres paramètres liés aux broadcasts appelés broadcasting invariants. Nous citerons dans cette partie l'essentiel des résultats obtenus :

### 2.6.1 Broadcast indépendant :

Une fonction broadcast  $f$  est dite indépendante si pour tout sommet  $v \in V_f^+$ ,  $N_f[v] \cap V_f^+ = \{v\}$ , ou encore  $|H(v)| = 1$ .

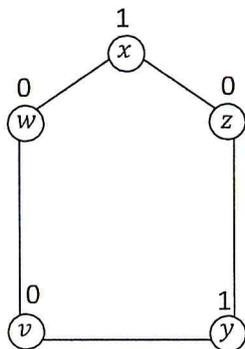
Le coût maximum d'une fonction broadcast indépendante de  $G$ , noté par  $\beta_b(G)$ , est le nombre de broadcast d'indépendance, et le nombre broadcast d'indépendance inférieur, noté  $i_b(G)$  est égal au coût minimum d'une fonction broadcast indépendante maximale de  $G$ .

L'observation suivante découle de la définition d'une fonction broadcast indépendante.

#### Observation 2.6.1

$$\forall x, y \in V_f^+, d(x, y) > \max(f(x), f(y)).$$

Par exemple dans la figure suivante, on a :



$$f(x) = f(y) = 1, d(x, y) = 2 > \max(f(x), f(y)) = 1.$$

Comme les deux fonctions broadcast radiale et broadcast diamétrale sont des fonctions broadcasts indépendantes maximales, on déduit les inégalités suivantes [14] :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G).$$

Soit  $M$  un sous-ensemble de sommets de  $G$  tel que pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $M$ ,  $d(u, v) = diam(G)$ , et soit  $\mu(G)$  la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de  $G$ . La proposition suivante montre que la borne inférieure sur  $\beta_b(G)$  peut être améliorée :

#### Proposition 2.6.2 [14]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte.

**Preuve :**

Pour tout sommet  $v \in M$ , soit  $f(v) = \text{diam}(G) - 1$  et pour tout sommet  $u \in V - M$ , soit  $f(u) = 0$ . Alors  $f$  est une fonction broadcast indépendante ce qui implique que  $\beta_b(G) \geq \mu(G)(\text{diam}(G) - 1)$ . Ensuite, nous montrons que l'étoile subdivisée  $T = S(K_{1,t})$  avec  $t \geq 2$  atteint la borne.

Notons d'abord que  $\text{diam}(T) = 4$  et  $\mu(T) = t$ , nous venons de montrer que  $\beta_b(G) \geq 3t$ . Pour voir que  $\beta_b(G) \leq 3t$ , soit  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum de  $T$ . Si  $f(v) = 4$  pour une  $v \in V_f^+$  alors  $V_f^+ = \{v\}$  et  $\sigma(f) = 4 < 3t$ . Ainsi on suppose que  $f(v) \leq 3$  pour tout  $v \in V^+$ .

Soit  $x$  le centre de  $T$  noté que  $f(x) \leq e(x) = 2$

- si  $f(x) = 2$ , alors  $f(u) = 0$ , pour tout  $u \in V - \{x\}$ .
- si  $f(x) = 1$ , alors  $f(u) = 0$ , pour tout  $u \in N(x)$  et  $f(v) \leq 1$  pour tout  $v \in V - N[x]$ .

Dans les deux cas  $\sigma(f) < 3t$ , par conséquent  $f(x) = 0$ . Etant donné que tout au plus un sommet d'une feuille et son support est dans  $V_f^+$ , il est claire que  $|V_f^+| \leq t$  et par conséquent,  $\sigma(f) \leq 3t$ . Donc on a bien  $\sigma(f) = \beta_b(G) = 3t$ .

Notons que la fonction caractéristique  $f_S$  d'un ensemble  $S$  indépendant maximal dans un graphe  $G$  est une fonction de broadcast indépendante, et donc  $i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$ , mais  $f_S$  n'est pas nécessairement une fonction broadcast indépendante maximale. En effet, considérons la chaîne  $P_4 : (v_1, v_2, v_3, v_4)$  de la figure FIG. 2.10 Si on affecte aux sommets les poids :  $f(v_1) = f(v_4) = 1$  et  $f(v_2) = f(v_3) = 0$  (voir la figure FIG (a)), alors  $f$  est la fonction caractéristique d'un ensemble indépendant maximal.  $f$  est aussi une fonction broadcast indépendante et une fonction broadcast dominante minimale. Mais cette fonction n'est pas une fonction broadcast indépendante maximale, puisque la fonction  $g$  définie par :

$g(v_1) = g(v_4) = 2$  et  $g(v_2) = g(v_3) = 0$  (voir la figure FIG (b)) vérifie  $g(u) \geq f(u), \forall u$ .

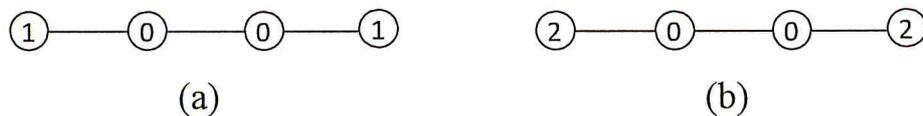


FIG 2.10 Fonctions broadcasts indépendantes

Dans ce qui suit, lorsque deux paramètres  $\theta$  et  $\eta$  sont incomparables, nous écrirons brièvement  $\theta \diamond \eta$ .

Notons que ni  $\gamma(G)$  ni  $i(G)$  n'est comparable à  $i_b(G)$ . En effet, Dunbar et al. montrèrent que pour la chaîne  $P_6$ , on a  $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2 < 3 = i_b(P_6)$ , alors que pour le graphe  $S(K_{1,t})$ , on a  $\gamma(S(K_{1,t})) = i(S(K_{1,t})) = t > 2 = i_b(S(K_{1,t}))$ .

Nous pouvons regrouper toutes ces remarques :

Pour tout graphe  $G$ ,

- (i)  $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$ ,
- (ii)  $\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G)$ .

Dans [14], les auteurs étudièrent l'extension de la chaîne d'inégalités

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G),$$

à savoir si

$$\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$$

est satisfaite. L'inégalité du milieu provient des définitions de  $i_b$  et  $\beta_b$ . L'inégalité de droite n'est pas vraie en générale puisque  $\beta_b(P_4) = 4 > \Gamma_b(P_4) = 3$  et  $\beta_b(PG) = 4 < \Gamma_b(PG) = 5$  où  $P_4$  est la chaîne d'ordre 4 et  $PG$  est le graphe de Petersen (voir figure FIG 2.11).

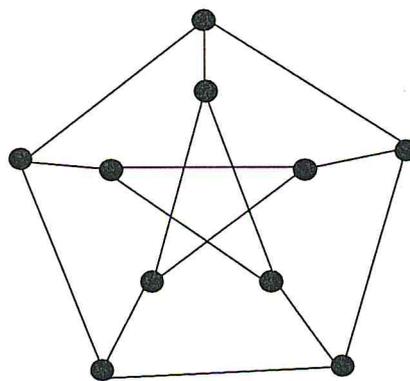


FIG 2.11 : Graphe de Petersen

La relation entre les deux invariants  $\gamma_b(G)$  et  $i_b(G)$  est donnée par le Théorème suivant :

**Théorème 2.6.3 [16]**

Soit  $f$  une fonction broadcast indépendante sur un graphe  $G$ . Si  $V_f^+ = \{v\}$  alors  $f$  est maximale si et seulement si  $f(v) = e(v)$ . Par ailleurs, si  $|V_f^+| \geq 2$ , alors  $f$  est maximale si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $f$  est une fonction broadcast dominante et
- (ii) pour tout  $v \in V_f^+$ ,  $f(v) = \min\{d(v, u) : u \in V_f^+ - \{v\}\} - 1$ .

Par ailleurs,  $\beta_b$  et  $\Gamma$  sont incomparables puisque  $\Gamma(PG) = 5 > 4 = \beta_b(PG)$  et  $\beta_b(P_4) = 4 > 2 = \Gamma(P_4)$ . Tous ces résultats se résument dans le corollaire qui suit :

**Corollaire 2.6.4 [14]**

Pour tout graphe  $G$ ,

- (i)  $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$ ,
- (ii)  $\beta_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$ ,
- (iii)  $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$ ,

D'autres relations existent entre les nombres de broadcasts d'indépendance  $i_b$  et  $\beta_b$  avec le nombre d'indépendance  $\beta_0$ . J. Dunbar et al. Ont énoncé une chaîne d'inégalité entre  $\beta_0$  et les nombres de broadcast d'indépendance.

**Proposition 2.6.5 [14]**

Pour tout graphe  $G$ ,  $i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$ .

Comme  $\gamma_b(G) \geq i_b(G)$ , de la proposition 2.6.5, on déduit :

**Corollaire 2.6.6 [14]**

Pour tout graphe  $G$ , si  $\gamma_b(G) = rad(G)$ , alors  $i_b(G) = rad(G)$ .

Suite à tous ces résultats, nous obtenons le schéma de comparaison suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \beta_0(G) & \leq & \Gamma(G) \\
 \vee \mid & & \diamond & & \mid \wedge & & \mid \wedge \\
 \gamma_b(G) & \leq & i_b(G) & \leq & \beta_b(G) & \diamond & \Gamma_b(G)
 \end{array}$$

## 2.6.2 Broadcast dominant indépendant

Une fonction broadcast  $f$  est dite dominante indépendante si elle est en même temps dominante et indépendante.

Le coût maximum (resp. minimum) d'une fonction broadcast dominante indépendante minimale de  $G$  est appelé nombre de broadcast indépendant de domination supérieur (resp. nombre de broadcast indépendant de domination), et il est noté  $\Gamma_{ib}(G)$  (resp.  $\gamma_{ib}(G)$ ) puisque la fonction caractéristique de tout ensemble indépendant maximal est une fonction broadcast dominante indépendante minimale,  $\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$  et  $\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$ .

Notons que si  $f$  est une fonction broadcast dominante indépendante minimale, alors pour toute fonction broadcast  $g \neq f$  qui vérifie  $g \leq f$ ,  $g$  est indépendante mais n'est pas forcément une fonction broadcast dominante.

### **Théorème 2.6.7** [15]

Si  $f$  est une fonction broadcast dominante mais non indépendante de  $G$ , alors il existe une fonction broadcast  $g$  qui est dominante, indépendante, avec  $g(V) \leq f(V)$ , et  $V_g^+ \subset V_f^+$ .

Ce théorème permet d'affirmer que tout graphe  $G$  a un  $\gamma_b$ -broadcast qui est indépendant, c'est-à-dire  $\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G)$ , et vérifie la chaîne d'inégalités :

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Concernant une borne supérieure pour le nombre de broadcast d'indépendance de domination supérieur, on a :

### **Proposition 2.6.8** [15]

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Les paramètres  $\Gamma_{ib}(G)$  et  $\Gamma(G)$  sont incomparables. En effet, Dundar et al. Montrèrent que, pour le graphe de Petersen  $PG$  et la chaîne  $P_{10}$ , on a  $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$  et  $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$ .

## 2.7 Complexité algorithmique du broadcast domination

Soit  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n$ . Le problème de décision [10] associé au problème de recherche d'une fonction broadcast dominante minimum est donné par :

### Broadcast dominant

**Instance :** Un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  et un entier positif  $k, k \leq n$ .

**Question :** Existe-il une fonction broadcast dominante  $f$  de  $G$  tel que :

$$\gamma_b(G) = \min \sum_{v \in V} f(v) \leq k ?$$

La complexité du problème de Broadcast dominant est polynomiale en  $O(n^3)$  [4] pour la classe des graphes d'intervalles, en  $O(nr^4)$  [4] pour la classe des graphes séries-parallèles ( $r$  représente le rayon du graphe), en  $O(nr)$  [4] pour la classe des arbres (où  $r$  représente le rayon de l'arbre) et en  $O(n^7)$  [22] pour les graphes en général.

## CHAPITRE III

### NOMBRE DE BROADCAST D'INDÉPENDANCE DANS QUELQUES CLASSES DE GRAPHERS.

Dans ce chapitre nous déterminons le nombre de broadcast d'indépendance maximum dans le cas où notre graphe  $G$  est une chaîne ou un cycle. Nous définissons ensuite quelques types de chenilles et nous établissons pour chacune d'elles, soit le nombre de broadcast d'indépendance exact, soit les bornes inférieure et supérieure qui encadrent ce nombre, dans le cas où une valeur exacte ne peut pas être déterminée.

En littérature, il n'y a pas un grand nombre de travaux dans le domaine. Cependant, on retiendra les résultats obtenus par Zemir & Bouchmakh [27], sur la valeur du nombre de broadcast indépendant maximum,  $\beta_b$  pour la grille  $G_{m,n}$ .

**Définition :** Une grille  $G_{m,n}$  est le produit cartésien de deux chaînes  $P_m$  et  $P_n$ , noté  $G_{m,n} = P_m \square P_n$  où  $2 \leq m \leq n$ .

**Théorème [27] :** Pour tous nombres entiers  $m$  et  $n$ ,

$$\beta_b(G_{m,n}) = \begin{cases} 2(n-1) & \text{si } m = 2 \text{ et } n \geq 2 \\ 2n & \text{si } m = 3 \text{ et } n \geq 3 \\ 2(n+1) & \text{si } m = 4 \text{ et } n \geq 4 \\ \left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor & \text{si } 5 \leq m \leq n, (m, n) \neq (5, 5), (5, 6) \end{cases}$$

Ce chapitre constitue notre contribution dans le domaine de la fonction broadcast indépendante dans les graphes.

#### 3.1 Nombre de broadcast d'indépendance dans les chaînes.

Erwin a déterminé le nombre de broadcast d'indépendance maximum dans le cas de chaînes. Dans ce paragraphe nous proposons une autre preuve de ce théorème d'Erwin [15].

**Théorème 3.1.1 :** [15]

Si  $P_n$  est une chaîne,  $n \geq 3$ , alors :

$$\beta_b(P_n) = 2(\text{diam}(P_n) - 1) = 2(n - 2).$$



D'une part :

$$\sum_{j=1}^l (f(x_{i_j}) + 1) = \sum_{j=1}^l f(x_{i_j}) + l = \sigma(f) + l = \beta_b(P_n) + l$$

Car  $f$  est une fonction broadcast indépendante maximum.

D'autre part :

$$\underbrace{d(x_{i_1}, x_{i_2}) + d(x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l})}_{\leq \text{diam}(P_n)} + \underbrace{d(x_{i_l}, x_{i_1})}_{\leq \text{diam}(P_n)} \leq \underbrace{\text{diam}(P_n) + \text{diam}(P_n)}_{2 \text{ diam}(P_n)}$$

Ce qui implique que :

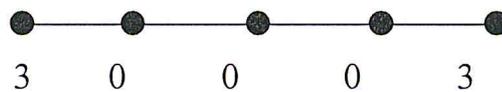
$$\begin{aligned} 2 \text{diam}(P_n) \geq \beta_b(P_n) + l &\Rightarrow 2 \text{diam}(P_n) - l \geq \beta_b(P_n) \Rightarrow 2(n-1) - l \geq \beta_b(P_n) \\ &\Rightarrow 2n - 2 - l \geq \beta_b(P_n) > 2n - 4. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 2n - 2 - l > 2n - 4 \Rightarrow 2 + l < 4$$

D'où :  $l < 2$  ce qui contredit  $l \geq 2$

Donc forcément :  $\beta_b(P_n) = 2n - 4$ . □

L'exemple illustré dans la figure ci-dessous, donne le nombre de broadcast indépendant de  $P_5$ .



$$\beta_b(P_5) = 6 = 2 \times 5 - 4$$

FIG 3.2 : La chaîne  $P_5$

### 3.2 Nombres de broadcast d'indépendance dans les cycles.

**Théorème 3.2.1 :** Si  $C_n$  est un cycle,  $n \geq 3$ , alors :

$$\beta_b(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n = 4 \\ 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

**Preuve :**

Soit  $C_n = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$ ,  $n \geq 3$ , avec  $\text{diam}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Pour  $n = 3$  ou  $4$  il est facile de vérifier le théorème.

Supposons que  $n \geq 5$ . D'après la Proposition 2.6.2,  $\beta_b(C_n) \geq 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)$ , donc il reste à montrer que  $\beta_b(C_n) \leq 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)$ .

Supposons au contraire que  $\beta_b(C_n) > 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)$ , soit  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum tel que :  $\sigma(f) = \beta_b(C_n)$ . Posons  $V_f^+ = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}\}$  pris dans le sens de l'aiguille d'une montre, dans cet ordre, voir figure FIG 3.3.

- Si  $|V_f^+|=1$ , alors  $\beta_b(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 2 \Rightarrow \frac{n-1}{2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 2 \Rightarrow n < 5 \rightarrow$  contradiction.
- Si  $|V_f^+|=2$ , alors  $2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) = \beta_b(C_n) > 2 \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \rightarrow$  contradiction.

Donc on peut voir que,  $|V_f^+| \geq 3$  avec,  $l \geq 3$

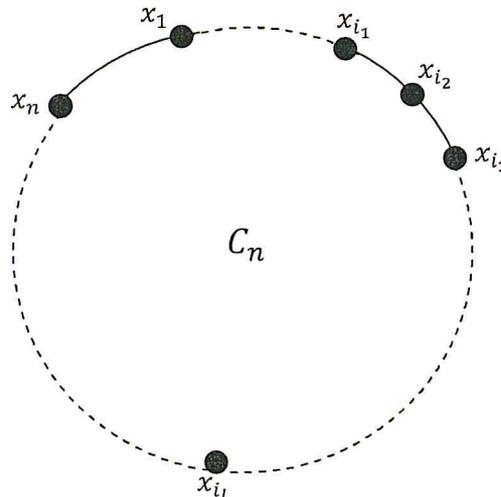


FIG 3.3 Un cycle  $C_n$

D'après l'Observation 2.6.1, pour chaque paire de sommets distincts de  $V_f^+$  :

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) > \max(f(x_{i_1}), f(x_{i_2})) \rightarrow d(x_{i_1}, x_{i_2}) > f(x_{i_1}) \rightarrow d(x_{i_1}, x_{i_2}) \geq f(x_{i_1}) + 1$$

$$d(x_{i_2}, x_{i_3}) > \max(f(x_{i_2}), f(x_{i_3})) \rightarrow d(x_{i_2}, x_{i_3}) > f(x_{i_2}) \rightarrow d(x_{i_2}, x_{i_3}) \geq f(x_{i_2}) + 1$$

⋮

⋮

⋮

$$d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l}) > \max(f(x_{i_{l-1}}), f(x_{i_l})) \rightarrow d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l}) > f(x_{i_{l-1}}) \rightarrow d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l}) \geq f(x_{i_{l-1}}) + 1$$

$$d(x_{i_l}, x_{i_1}) > \max(f(x_{i_l}), f(x_{i_1})) \rightarrow d(x_{i_l}, x_{i_1}) > f(x_{i_l}) \rightarrow d(x_{i_l}, x_{i_1}) \geq f(x_{i_l}) + 1$$

On fait la somme membre à membre dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) + d(x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l}) + d(x_{i_l}, x_{i_1}) \geq \sum_{j=1}^l (f(x_{i_j}) + 1)$$

D'une part avec :

$$\sum_{j=1}^l (f(x_{i_j}) + 1) = \sum_{j=1}^l f(x_{i_j}) + l = \sigma(f) + l = \beta_b(P_n) + l$$

On aura donc :

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) + d(x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l}) + d(x_{i_l}, x_{i_1}) \geq \beta_b(C_n) + l \quad (*)$$

D'autre part, soient deux sommets  $x_{i_k}$  et  $x_{i_m}$  dans  $V_f^+$  avec  $k < m$ . Considérons la chaîne  $x_{i_k} - x_{i_m}$  induite par ces sommets à partir du cycle  $C_n$ , dans le sens de l'aiguille d'une montre. La longueur de cette chaîne  $x_{i_k} - x_{i_m}$ , notée  $l(x_{i_k} - x_{i_m})$  est supérieure ou égale à la distance entre  $x_{i_k}$  et  $x_{i_m}$ , d'où :

$$l(x_{i_1} - x_{i_2}) \geq d(x_{i_1}, x_{i_2})$$

$$l(x_{i_2} - x_{i_3}) \geq d(x_{i_2}, x_{i_3})$$

⋮

$$l(x_{i_{l-1}} - x_{i_l}) \geq d(x_{i_{l-1}}, x_{i_l})$$

$$l(x_{i_l} - x_{i_1}) \geq d(x_{i_l}, x_{i_1})$$

En faisant la somme membre à membre dans les inégalités précédentes et en utilisant l'inégalité (\*), nous concluons que :

$$l(x_{i_1} - x_{i_2}) + l(x_{i_2} - x_{i_3}) + \dots + l(x_{i_{l-1}} - x_{i_l}) + l(x_{i_l} - x_{i_1}) \geq \beta_b(C_n) + l$$

Comme la somme des longueurs relatives, à chaque pair de sommets, est  $n$ , nous déduisons que :

$$n \geq \beta_b(C_n) + l \rightarrow n - l \geq \beta_b(C_n).$$

Comme :  $\beta_b(C_n) > 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)$ , nous déduisons que :  $n - l > 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)$

On distingue deux cas :

- Si  $n$  est pair  $n - l > 2\left(\frac{n-2}{2}\right) \rightarrow l < 2$ , contradiction.
- Si  $n$  est impair  $n - l > 2\left(\frac{n-3}{2}\right) \rightarrow l < 3$ , contradiction.

Dans les deux cas, on a « contradiction », donc forcément :

$$\beta_b(C_n) = 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right).$$

□

**Remarque :**

D'après le théorème précédent si  $n$  est pair,  $|V_f^+| = 2$ , il ne peut y avoir une fonction broadcast indépendante maximum si  $|V_f^+| \geq 3$ . Par contre pour  $n$  impair, il est possible d'avoir une fonction broadcast indépendante maximum pour  $|V_f^+| = 3$ .

Donc si  $n$  est pair  $|V_f^+| = 2$  et si  $n$  est impair  $|V_f^+| = 2$  ou  $3$ . La figure suivante illustre le  $\beta_b$  des cycles  $C_9$  et  $C_6$ .

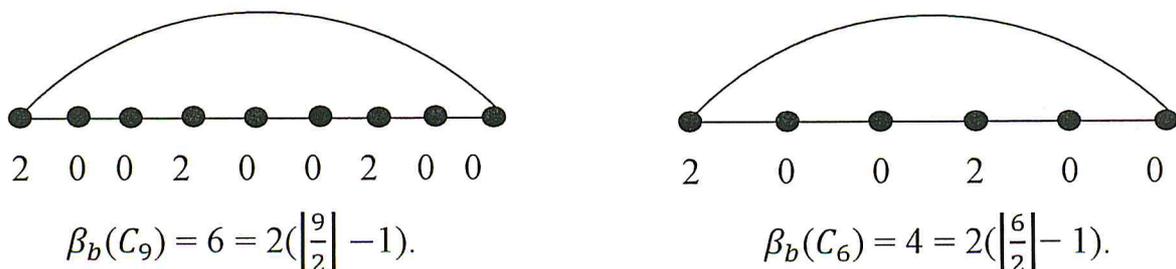


FIG 3.4 : Le  $\beta_b$  de  $C_9$  et  $C_6$

### 3.3 Nombre de broadcast d'indépendance dans les chenilles.

#### Définition 3.3.1

Une chenille, notée  $Ch$ , est un arbre tel que, si on supprime tous ses sommets pendants, on obtient une chaîne  $P_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ .  $P_n$  est appelée épine dorsale et ses sommets sont appelés épines. Les épines qui ne sont pas supports sont appelées troncs.

Le graphe d'une chenille est constitué de sommets supports, de sommets troncs formant la chaîne  $P_n$ , ainsi que, les sommets pendants, appelés aussi, feuilles.

Si  $S$  est l'ensemble des sommets supports, pour  $v \in S$ , on note par :

- $l_v$  : L'ensemble des sommets pendants adjacents au sommet support  $v$  de  $Ch$ .
- $S_{fa} = \{v \in S \mid |l_v| = 1\}$  : L'ensemble des supports faibles de  $Ch$ .
- $S_{fo}^2 = \{v \in S \mid |l_v| = 2\}$  : L'ensemble des supports forts ayant exactement deux sommets pendants de  $Ch$ .
- $S_{fo}^3 = \{v \in S \mid |l_v| \geq 3\}$  : L'ensemble des supports forts ayant au moins trois sommets pendants de  $Ch$ .
- $S_{fo} = S_{fo}^2 \cup S_{fo}^3$  : L'ensemble des supports forts de  $Ch$ .

Le code d'une chenille  $Ch$  est  $C[Ch] = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  où  $k_i$  est le nombre de sommets pendants adjacents au sommet support  $v_i$ ,  $k_1 \neq 0$  et  $k_n \neq 0$ .

**Exemple 3.3.1** Les graphes illustrés dans la figure « FIG 3.5 » et leurs codages respectifs, le premier a trois sommets troncs et le second a deux sommets troncs.

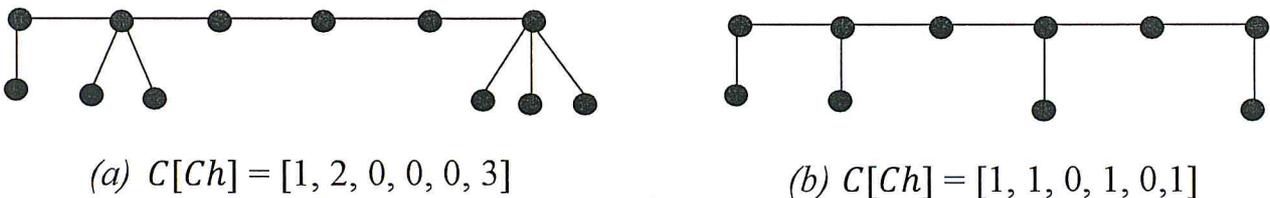


FIG 3.5 Codage de deux chenilles

Dans ce qui va suivre, on définira certains types de chenilles et on déterminera la valeur exacte du nombre de broadcast d'indépendance maximum  $\beta_b$  relatif à chaque chenille.

### 3.3.1 Les chenilles pleines.

**Définition :** Une chenille  $ChP$  de code  $C[ChP] = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ , est dite pleine si  $k_i \geq 1 \quad \forall i ; 1 \leq i \leq n$ .

#### Lemme 3.3.2 :

Soit  $G$  un graphe simple et  $S$  l'ensemble des sommets supports de  $G$ , si  $f$  est une fonction broadcast indépendante maximum, alors pour tout sommet support  $v$ , on a :  $f(v) = 0$ .

#### Preuve :

Supposons au contraire qu'il existe un support  $v$ , tel que :  $f(v) \neq 0$ , avec  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum, il est clair que  $\forall u \in l_v$ ,  $f(u) = 0$ .

Soit  $u$  un sommet pendant quelconque adjacent à  $v$ . On considère une fonction de broadcast  $f'$  définie par :

$$f'(w) = \begin{cases} f(w) & \text{si } w \neq u, v \\ 0 & \text{si } w = v \\ f(v) + 1 & \text{si } w = u \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que  $f'$  est une fonction broadcast indépendante avec :  $\sigma(f') > \sigma(f)$ , ce qui contredit le fait que  $f$  soit une fonction broadcast indépendante maximum.

□

### Théorème 3.3.3

Soit  $ChP$  une chenille pleine avec  $n \geq 2$ , alors :

$$\beta_b(ChP) = 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}|.$$

**Preuve :**

Soient  $C[ChP] = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ , le code d'une chenille où  $k_i \geq 1$  et  $i = 1, \dots, n$  et  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum dans  $ChP$  définie par :

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in S_{fa} \cup S_{fo} \\ 1 & \text{si } u \text{ est une feuille d'un support fort} \\ 2 & \text{si } u \text{ est une feuille d'un support faible} \end{cases}$$

Il est simple de vérifier que  $f$  est une fonction broadcast indépendante, on écrira donc :  $\beta_b(ChP) \geq 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}|$ .

Montrons maintenant que :  $\beta_b(ChP) \leq 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}|$ .

Soit  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum dans  $ChP$ , telle que  $V_f^+$  contient le plus possible de sommets pendants.

Il est clair que  $|V_f^+| \geq 2$ , sinon, si  $|V_f^+| = 1$  on a alors :  $\sigma(f) = \text{diam}(ChP) = n + 1$ , et dans ce cas, on peut trouver une autre fonction broadcast indépendante  $f'$ , tel que :  $\sigma(f') > \sigma(f)$ , donnée par :

$$f'(u) = \begin{cases} n & \text{pour une feuille du support } v_1 \text{ et une feuille du} \\ & \text{support } v_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a, dans ce cas :  $\sigma(f') = 2n$  et  $\sigma(f') > \sigma(f)$ , ce qui contredit le fait que  $f$  soit une fonction broadcast maximum. Ce qui nous amène à :  $2n \leq n + 1 \rightarrow n \leq 1$ , en contradiction totale avec  $n \geq 2$ .

Montrons les faits suivants :

**Fait 1:**

On montre que  $\forall v \in V(ChP), f(v) \leq 2$ .

Supposons, au contraire, qu'il existe  $x \in V(ChP)$  tel que,  $f(x) = k_1 \geq 3$ . D'après le Lemme 3.3.2  $x$  est un sommet pendent.

Soit  $y$  un sommet pendant appartenant à  $V(ChP)$ , tels que :  $f(y) = k_2 \neq 0$ .  
 Supposons, sans perte de généralité, que  $k_1 = \max(k_1, k_2)$  avec  $k_1 \geq 3$ .  
 $x$  et  $y$  existent car  $|V_f^+| \geq 2$ .

Soit  $P_{x,y}$  la chaîne unique reliant  $x$  et  $y$ , il est clair qu'on a au moins  $k_1$  sommets supports dans la chaîne entre les sommets pendants  $x$  et  $y$ , sinon :  $k_2 = 0$ .

Si  $k_2 \geq 2$ , on considère la fonction broadcast indépendante  $f'$  obtenu à partir de  $f$  en remplaçant  $f(x)$  et  $f(y)$  par zéro et en affectant 2 à une feuille seulement de chaque support de la chaîne  $P_{x,y}$ .

Il est clair que  $\sigma(f') \geq \sigma(f) - k_1 - k_2 + 2k_1 \geq \sigma(f)$  et que  $f'$  a plus de sommets pendants dans  $V_{f'}^+$ , contradiction avec le choix décidé pour  $f$ .

Si  $k_2 = 1$ , on considère la fonction broadcast indépendante  $f'$  obtenu à partir de  $f$  en remplaçant  $f(x)$  par zéro et en affectant 2 à une feuille seulement de chaque support de la chaîne  $P_{x,y}$ , sauf pour le sommet  $y$ .

Il est clair que  $\sigma(f') \geq \sigma(f) - k_1 + 2(k_1 - 1) = \sigma(f) + k_1 - 2 > \sigma(f)$ , contradiction avec le fait que  $f$  soit maximum.

**Fait 2 :**

On montre que pour toute feuille  $v$  :

$$\begin{cases} f(v) = 1 & \text{si } v \text{ est une feuille de support } \in S_{fo} \\ f(v) = 2 & \text{si } v \text{ est une feuille de support } \in S_{fa} \end{cases}$$

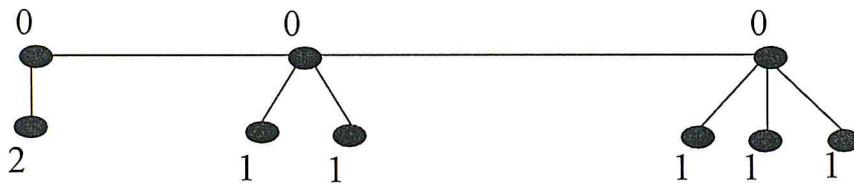
- Si  $v$  est une feuille de support fort  $\in S_{fo}$ .
  - Si  $f(v) = 0$ , alors il existe au moins une feuille  $u$  du même support de  $v$  telle que,  $f(u) \neq 0$ . On considère la fonction broadcast indépendante en affectant la valeur 1 aux sommets pendants associé au support de  $v$ , ce qui contredit le choix décidé sur  $f$ .
  - Si  $f(v) = 2$ , avec un raisonnement analogue, on aboutit à la même contradiction.
- Si  $v$  est une feuille de support faible  $\in S_{fa}$ .

- Il est clair que  $f(v) \neq 0$ , d'après le Fait 1 et Lemme 3.3.2. On peut maintenant voir que  $f(v) = 2$ , sinon on a une contradiction avec la maximalité de  $f$ . En considérant la fonction broadcast  $f'$  définie par :

$$f'(u) = \begin{cases} 2 & \text{si } u = v \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :  $\beta_b(ChP) = \sigma(f) = 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}|$ .

□



$$\beta_b(ChP) = (2 \times 1) + 5 = 7$$

FIG 3.6 : Le  $\beta_b$  d'une chenille pleine

### 3.3.2 Les chenilles alternées.

**Définition :** Une chenille de code,  $C[ChA] = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  est dite chenille alternée si et seulement si  $k_i = 0$  pour  $i \equiv 0[2]$  et  $k_i \neq 0$  pour  $i \equiv 1[2]$ .

**Nombre de broadcast d'indépendance dans les chenilles alternées :**

Soit  $G$  une chenille alternée  $ChA$ .

Soit  $GA'$  le sous graphe engendré par  $V(ChA) \setminus (S_{f_0}^3$  et leurs feuilles), les composantes connexes (C.C) de  $GA'$  sont :  $ChA'_1, ChA'_2, \dots, ChA'_m$ .

Les composantes connexes fortes sont les C.C qui ne contiennent pas de supports faibles et les composantes connexes faibles sont les C.C qui contiennent des supports faibles.

**Définition :** Une fonction broadcast  $f$  est antipodale dans une chenille  $Ch$ , si  $|V_f^+| = 2$  et  $f(u_1) = f(u_n) = n$  où  $u_1$  est un sommet pendant adjacent à  $v_1$  et  $u_n$  est un sommet pendant adjacent à  $v_n$ .

### **Théorème 3.3.4 :**

Si  $f$  est une fonction broadcast indépendante maximum non antipodale, d'une chenille alternée, alors :  $\forall v \in V(ChA), f(v) \leq 3$ .

#### **Preuve :**

Soit  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum de  $ChA$ . D'après le Lemme 3.3.2, pour tout sommet support  $v$ ,  $f(v) = 0$ .

Comme il existe un « sommet tronc » et « un sommet pendant », adjacents au même support, jouent le même rôle (la distance entre un sommet quelconque et ces deux sommets, est la même), il suffit de montrer que pour tout sommet pendant  $v$ ,  $f(v) \leq 3$ .

Supposons, au contraire qu'il existe un sommet pendant  $v$ , t.q :  $f(v) = k \geq 4$ .

Deux cas existent :

**1<sup>er</sup> cas :** Supposons qu'il existe un sommet pendant  $v'$  t.q :  $1 \leq f(v') \leq 3$ . Pour tout sommet  $\omega$  situé entre le sommet  $v$  et le sommet  $v'$ ,  $f(\omega) = 0$  et  $v'$  est le 1<sup>er</sup> sommet, le plus proche du sommet feuille  $v$ , avec :  $f(v') \neq 0$ .

Il est clair que le nombre de « sommets supports » entre  $v$  et  $v'$  est  $\left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor$ .

Soit la fonction broadcast  $f'$  définie par :

$$f'(u) = \begin{cases} 3 & \text{pour une feuille de chaque support de la chaîne} \\ & \text{entre } v \text{ et } v' \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma(f') \geq \sigma(f) - k - 3 + 3 \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor \geq \sigma(f) - k - 3 + \frac{3K}{2} + 3 \geq \sigma(f) + \frac{K}{2} > \sigma(f)$$

On conclut que  $f'$  est une fonction broadcast indépendante, car :  $\sigma(f') > \sigma(f)$ , d'où la contradiction avec le fait que  $f$  soit une fonction broadcast indépendante maximum.

Donc, effectivement :  $\forall v \in V(ChA) f(v) \leq 3$ .

**2<sup>ème</sup> cas :** Supposons qu'il n'existe pas un sommet pendant  $v'$ , t.q :  $1 \leq f(v') \leq 3$

Soient  $u_1, u_2, \dots, u_l$  des « sommets pendants », t.q :  $f(u_i) = k_i \geq 4$  pour  $i = 1, 2, \dots, l$ . Il est clair que :  $\sigma(f) = \sum_{i=1}^l k_i$ .

Mais si on calcule  $2(\text{diam}(\text{Ch}A) - 1)$  on trouve :

$$\begin{aligned}
 2(\text{diam}(\text{Ch}A) - 1) &= 2(d(k_1, k_2) + d(k_2 - 1, k_3 - 1) + \dots + d(k_{l-1} - 1, k_l - 1)) \\
 &\geq 2(\max(k_1, k_2) + \max(k_2 - 1, k_3 - 1) + \dots + \max(k_{l-1} - 1, k_l - 1)) \\
 &\geq 2k_1 + 2(k_2 - 1) + \dots + 2(k_{l-1} - 1) \\
 &= k_1 + k_1 + k_2 + (k_2 - 2) + \dots + k_{l-1} + (k_{l-1} - 2) \\
 &\geq k_1 + k_1 + k_2 + (k_2 - 2) + \dots + k_{l-1} + k_l - 2. \text{ (on a supposé que } k_{l-1} \geq k_l) \\
 &= k_1 + k_2 + \dots + k_{l-1} + \underbrace{k_l + k_1 + (k_2 - 2) + \dots - 2}_{\geq 2}
 \end{aligned}$$

$2(\text{diam}(\text{Ch}A) - 1) \geq \sum_{i=1}^l k_i = \sigma(f)$ , contradiction avec le fait qu'on a choisi une fonction broadcast indépendante maximum non antipodale.

□

- On définit la fonction broadcast indépendante maximum  $f^*$  par :

$$f^*(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout sommet } u \text{ support ou tronc d'une C.C faible} \\ 1 & \text{pour tout sommet } u \text{ feuille de supports de } S_{f_o}^3 \text{ ou de } S_{f_o}^2 \\ & \text{d'une C.C forte ou tronc d'une C.C forte.} \\ 3 & \text{pour tout sommet } u \text{ feuille de supports de } S_{f_a} \text{ ou une} \\ & \text{feuille exactement de support de } S_{f_o}^2 \text{ d'une C.C faible} \\ 0 & \text{pour tout sommet feuille restante de supports de } S_{f_o}^2 \\ & \text{d'une C.C faible} \end{cases}$$

### **Théorème 3.3.5 :**

Soit  $\text{Ch}A$  une chenille alternée, si la fonction broadcast indépendante maximum est différente d'une fonction broadcast antipodale, alors :

$$\beta_b(\text{Ch}A) = \sigma(f^*)$$

### **Preuve :**

Soit  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum contenant le moins possible de sommets troncs dans  $V_f^+$  et parmi eux, certains contiennent le plus possible de sommets pendants dans  $V_f^+$ .

- D'après le lemme 3.3.2, il est clair que  $f(v) = 0$  pour tout support  $v$ .
- On montre que pour toute feuille  $v$  de supports de  $S_{fa}$ ,  $f(v) = 3$ .

Supposons au contraire, qu'il existe une feuille  $v$  de supports de  $S_{fa}$ , t. q :  $f(v) \neq 3$ .

- Si  $f(v) = 0$ , d'après le lemme 3.3.2 et la maximalité de  $f$ , il y a contradiction.
- Si  $f(v) = 1$ , on considère une autre fonction broadcast  $f'$  t. q :

$$f'(u) = \begin{cases} 3 & \text{si } u = v \\ 0 & \text{pour tous les sommets troncs adjacents au support de } v \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Contradiction, car on a une fonction broadcast  $f'$  indépendante avec  $V_{f'}^+$  contenant moins de sommets troncs que  $V_f^+$  et  $\sigma(f') \geq \sigma(f)$ .

- Si  $f(v) = 2$ , il y a une contradiction avec la maximalité de  $f$ .  
Considérant la fonction broadcast  $f'$  définie par :

$$f'(u) = \begin{cases} 3 & \text{si } u = v \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

- On montre que pour toute feuille  $v$  de supports de  $S_{fo}^3$ ,  $f(v) = 1$ .

Supposons au contraire, il existe une feuille  $v$  de supports de  $S_{fo}^3$ , t. q :  $f(v) \neq 1$ .

- Si  $f(v) = 0$ , d'après le lemme 3.3.2, le théorème 3.3.4 et le choix de  $f$ , il y a une contradiction, on peut s'arranger pour avoir une autre fonction broadcast indépendante qui a plus de sommets pendants dans  $V_f^+$  et avec le même nombre de sommets troncs dans  $V_f^+$  ou plus grande en taille.
- Si  $f(v) = 2$  ou  $3$ , il y a contradiction, même argument que précédemment, on peut s'arranger pour avoir une autre fonction broadcast indépendante qui a plus de sommets pendants dans  $V_f^+$

avec le même nombre de sommets troncs dans  $V_f^+$  ou un nombre plus grande en taille.

➤ On montre que pour toute feuille  $v$  de supports de  $S_{f_0}^2$  d'une C.C forte,  $f(v) = 1$ . Supposons au contraire, il existe une feuille  $v$  de supports de  $S_{f_0}^2$  d'une C.C forte,  $t. q : f(v) \neq 1$ .

- Si  $f(v) = 0$ , d'après le lemme 3.3.2, le théorème 3.3.4 et le choix de  $f$ , il y a une contradiction, on peut s'arranger pour avoir une autre fonction broadcast indépendante qui a plus de sommets pendants dans  $V_f^+$  et avec le même nombre de sommets troncs dans  $V_f^+$  ou un nombre de plus grande taille.

- Si  $f(v) = 2$  ou  $3$ , il existe une autre fonction broadcast  $f'$  définie par :

$$f'(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour toute feuille de supports de } S_{f_0}^2 \text{ de} \\ & \text{la C.C forte contenant } v \\ 1 & \text{pour tout sommet tronc de la C.C forte} \\ & \text{contenant } v \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair qu'on a  $\sigma(f') > \sigma(f)$ , d'où une contradiction avec la maximalité de  $f$ .

➤ On montre qu'il existe une feuille  $v$  de supports de  $S_{f_0}^2$  d'une C.C faible, telle que  $f(v) = 3$  et  $f(v') = 0$  où  $v'$  est une autre feuille adjacente au support de  $v$ .

Supposons au contraire, il n'existe pas de feuille  $v$  de supports de  $S_{f_0}^2$  d'une C.C faible,  $t. q : f(v) = 3$  et notons par  $v'$  l'autre feuille adjacente au support de  $v$ . Sans perte de généralité on a distingué les cas suivant :

- Si  $f(v) = 0$  et  $f(v') = 0$ , d'après le lemme 3.3.2 et la maximalité de  $f$ , il y a une contradiction.
- Si  $f(v) = 0$  et  $f(v') = 1$ , on considère la fonction broadcast  $f'$ :

$$f'(u) = \begin{cases} 3 & \text{si } u = v' \\ 0 & \text{pour tous les sommets troncs adjacents} \\ & \text{au support de } v \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est simple de vérifier que  $f'$  est une fonction broadcast indépendante avec moins de sommets troncs dans  $V_{f'}^+$  et que  $\sigma(f') \geq \sigma(f)$ , d'où une contradiction.

- Si  $f(v) = 0$  et  $f(v') = 2$ , on considère la fonction broadcast  $f'$  :

$$f'(u) = \begin{cases} 3 & \text{si } u = v' \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est simple de vérifier que  $\sigma(f') > \sigma(f)$ , d'où la contradiction avec la maximalité de  $f$ .

- Si  $f(v) = 1$  et  $f(v') = 1$ , on considère la fonction broadcast  $f'$  :

$$f'(u) = \begin{cases} 3 & \text{pour exactement une feuille de supports} \\ & \text{de } S_{f_0}^2 \text{ de la C.C faible contenant } v \\ 0 & \text{pour tout sommet tronc de la C.C faible} \\ & \text{contenant } v \\ f(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair qu'on a,  $\sigma(f') \geq \sigma(f)$  avec  $f'$  contenant moins de sommets troncs dans  $V_{f'}^+$ . D'où la contradiction avec le choix de  $f$ .

- On montre que pour tout sommet tronc  $x$  d'une C.C faible,  $f(x) = 0$ . On utilise le même argument que pour le cas précédent et on construit la même fonction broadcast indépendante qui contredit le choix de  $f$ .
- On montre que pour tout sommet tronc  $x$  d'une C.C forte,  $f(x) = 1$ . On utilise le même argument que pour le cas, où on a pour toute feuille  $v$  de supports de  $S_{f_0}^2$  d'une C.C forte,  $f(v) = 1$ , on construit la même fonction broadcast indépendante qui contredit le choix de  $f$ .

Donc,  $\beta_b(\text{ChA}) = \sigma(f) = \sigma(f^*)$ .

□

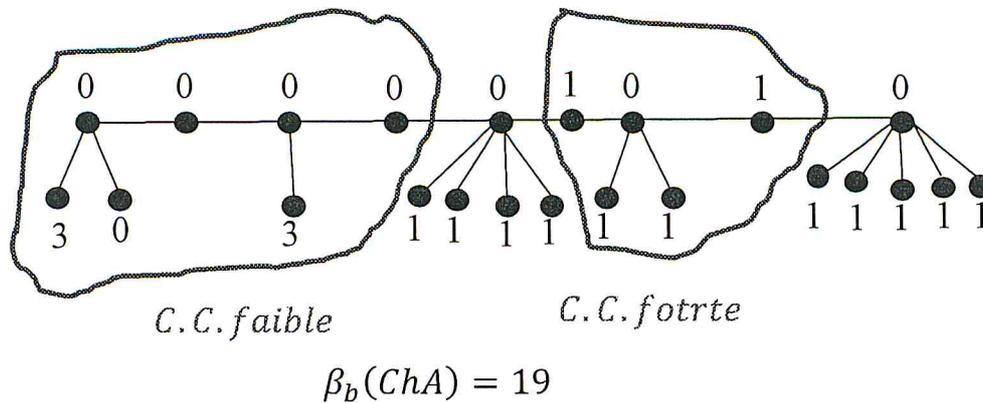


FIG 3.7 : le  $\beta_b$  d'une chenille alternée

On déduit facilement du théorème précédent, le résultat suivant :

**Corollaire 3.3.6 :**

Si  $ChA$  est une chaîne alternée, alors  $\beta_b(ChA) = \max(\sigma(f^*), 2n)$ .

**3.3.3 Bornes supérieures et inférieures de chenilles.**

Dans ce paragraphe, on donne des bornes qui encadrent le paramètre  $\beta_b(G)$  dans le cas des chenilles en général, ceci fournit une autre approche afin d'approximer la valeur de ce paramètre.

**Proposition 3.3.7 :**

Si  $Ch$  est une chenille, alors :

$$2n \leq \beta_b(Ch) \leq 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|$$

Où :  $X$  est l'ensemble des sommets troncs.

**Preuve :**

Il est facile de vérifier que  $\beta_b(Ch) \geq 2n$  et il reste à montrer que :  $\beta_b(Ch) \leq 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|$ .

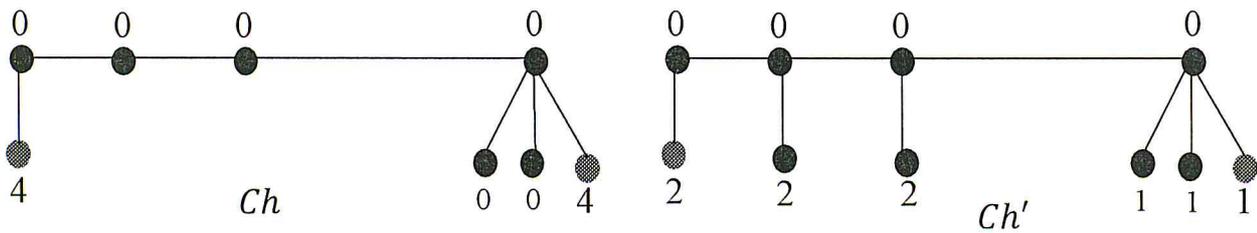
Soit  $Ch$  une chenille et soit  $f$  une fonction broadcast indépendante maximum, telle que  $\sigma(f) = \beta_b(Ch)$ .

Soit  $Ch'$  une chenille pleine obtenue à partir de la chenille  $Ch$  en attachant un sommet pendant à chaque sommet tronc de la chenille  $Ch$ . On considère la fonction broadcast  $f'$  obtenue à partir de  $f$  en donnant la valeur zéro aux sommets pendants nouvellement ajoutés. Il est simple de voir que  $f'$  est une fonction broadcast indépendante de la chenille  $Ch'$ .

Il est clair que :

$$\beta_b(Ch) = \sigma(f) = \sigma(f') \leq \beta_b(Ch') = 2(|S_{fa}| + |X|) + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v|.$$

Alors :  $\beta_b(Ch) \leq 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|.$  □



$$\beta_b(Ch) = (2 \times 4) = 8 \leq \beta_b(Ch') = (2 \times 1) + 3 + (2 \times 2) = 9$$

FIG 3.8 : Deux chenilles quelconque  $Ch$  et  $Ch'$

Dans ce qui suit on caractérise les chenilles qui atteignent la borne supérieure.

**Théorème 3.3.8 :**

Soit  $Ch = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  une chenille.  $\beta_b(Ch) = 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|$  si et seulement si  $Ch$  est une chenille pleine ou est une chenille avec au moins un sommet tronc,  $k_1, k_n = 1$  ou  $2$  et  $0 \leq k_i \leq 2, i = 2, \dots, n - 1$ .

**Preuve :**

Si  $Ch$  est une chenille pleine alors  $|X| = 0$  et d'après le Théorème 3.3.3 on a  $\beta_b(Ch) = 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}| = 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|.$

Il est simple aussi de vérifier que pour une chenille avec au moins un sommet tronc  $k_1, k_n = 1$  ou  $2$  et  $0 \leq k_i \leq 2$ , on a :

$$\beta_b(Ch) = 2n = 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}| + 2|X|.$$

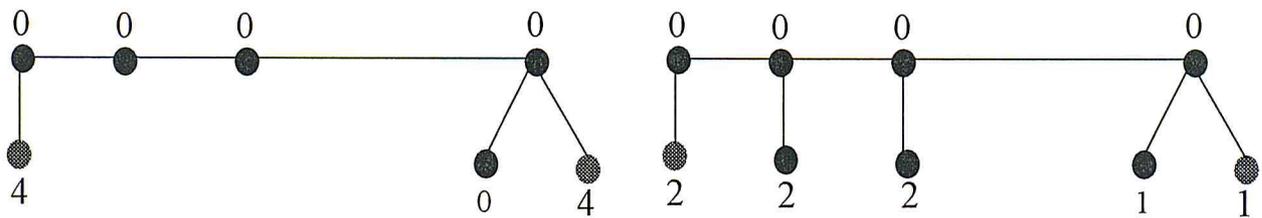
Pour montrer la réciproque, soit  $Ch = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  une chenille. Ou bien la chenille  $Ch$  est pleine ou bien elle ne l'est pas. Si la chenille est pleine,  $|X| = 0$  et d'après le Théorème 3.3.3, on a  $Ch$  vérifie

$\beta_b(Ch) = 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}| = 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|.$  Supposons que  $Ch = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  n'est pas pleine, alors elle contient au moins un sommet

tronc, si  $k_1, k_n = 1$  ou  $2$  et  $0 \leq k_i \leq 2$ , alors il est simple de voir que :  $\beta_b(Ch) = 2n = 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|$ . Sinon il existe un  $k_i$  ;  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $k_i \geq 3$ .

Comme il y a un sommet tronc, alors on peut voir que  $\beta_b(Ch) < 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|$ . En effet si  $\beta_b(Ch) = 2n$ , alors :  $2n < 2n + 1 \leq 2|S_{fa}| + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v| + 2|X|$ , à cause de  $k_i \geq 3$ . Si  $\beta_b(Ch) = \sigma(f)$ , alors si  $f'$  est la fonction broadcast obtenue à partir de  $f$  en donnant la valeur zéro aux sommets pendants nouvellement ajoutés. Alors il est clair que  $\sigma(f) = \sigma(f') < \beta_b(Ch') = 2(|S_{fa}| + |X|) + \sum_{v \in S_{fo}} |l_v|$  car  $Ch$  contient au moins un sommet tronc.

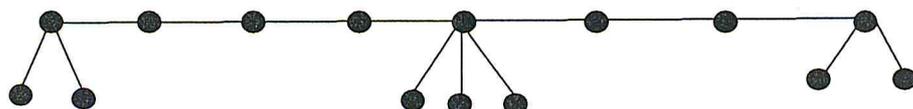
□



$$\beta_b(Ch) = (2 \times 1) + 2 + (2 \times 2) = 8$$

FIG 3.9 : Le  $\beta_b$  de la chenille  $Ch$

**Remarque :** Il est intéressant de voir la caractérisation des chenilles  $Ch$  telles que  $\beta_b(Ch) = 2n$ , parmi ces chenilles qui atteignent la borne inférieure, on a les chenilles  $Ch = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  avec  $k_1, k_n = 1$  ou  $2$  et  $0 \leq k_i \leq 2$  pour  $i = 2, \dots, n - 1$ .



Autre exemple de chenille avec  $\beta_b(Ch) = 2n = 16$

# Conclusion

Ce travail, dédié au problème de la recherche de la valeur exacte du nombre broadcast d'indépendance  $\beta_b(G)$  dans les graphes, nous a permis de prendre conscience de la multitude de difficultés rencontrés dans le domaine et nous a permis d'enrichir nos connaissances dans la théorie des graphes.

A notre connaissance, il n'existe pas d'algorithmes polynomiaux qui déterminent la valeur exacte de  $\beta_b(G)$  d'une manière générale.

Dans notre modeste contribution, nous avons déterminé la valeur de  $\beta_b(G)$  dans le cas où le graphe  $G$  est, soit une chaîne, soit un cycle, ou bien une chenille pleine, ou encore une chenille alternée. Nous avons aussi, déterminé les bornes inférieures et supérieures qui encadrent ce paramètre pour les chenilles.

Durant la préparation de ce mémoire, nous avons acquis une méthode de raisonnement qui nous permettra sûrement d'aborder d'autres problèmes plus difficiles.

En perspectives, un grand nombre de problèmes restent ouverts dans ce domaine et peuvent être étudiés ultérieurement. On citera, entre autres :

1. Détermination de la valeur exacte du nombre broadcast d'indépendance pour une chenille quelconque.
2. Caractérisation des chenilles pour lesquels :  $\beta_b(Ch) = 2n$ .
3. Caractérisation des arbres  $T$  pour lesquels :  $\beta_b(T) = 2(\text{diam}(T) - 1)$ .
4. Détermination des valeurs exactes, ou des bornes relatives au paramètre  $\beta_b$  pour les arbres, et les graphes à structure simple.

# Bibliographie

- [1] W.W. Ball Rouse, *mathematical and problems of past and present times*, MacMillan, London, 1892.
- [2] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 2, Dunod, Paris, 1958.
- [3] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Paris Dunod, 1970.
- [4] J. R. S. Blair, P. Heggernes, S. Horton, F. Manne, *Broadcast Domination Algorithms for Interval Graphs, Series-Parallel Graphs, and Trees*, Congressus Numerantium, 169(2004)55- 77.
- [5] K. S. Booth and J. H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*, SIAM J. Comput. pp, 11:191-199, 1982.
- [6] B. Bresar and S. Spacapan, *Broadcast domination of products of graphs*, University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.
- [8] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *towards a theory of domination*, Networks, 7:247-261, 1977.
- [7] E. J. Cockayne, S. E. Goodman, and S. T. Hedetniemi. *A linear algorithm for the domination number of a tree*. Inform. Process. Lett. 4:41-44, 1975.
- [9] C. Berge. *Graphes*, North Holland 1985.
- [10] S. A. Cook, *The complexity of theorem proving procedures*; Proc. 3rd ACM Symp. On Theory of computing, pp. 151-158, 1971.
- [12] C. F. De Jaenisch, *Trait des applications de l'analyse mathématique au jeu des Echecs*, Petrograd, 1862.
- [13] A. K. Dewdney, *Fast Turing reductions between problems in NP*, Tech. Rep. 71, Dept. of Computer Science, University of West Ontario, 1981.
- [14] J.E.Dunbar, D.J.Erwin, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, and S.T.Hedetniemi, *Broadcasts in graphs*, Discrete Appl. Math. 154:59-75, 2006.
- [15] D. J. Erwin, *Cost Domination in Graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.

- [16] D. J. Erwin, *Dominating broadcast in graphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42(2004)89- 105.
- [17] M. Farber and J. M. Keil, *Domination in Permutation Graphs*, J. Algorithms, pp. 6:309-321, 1985.
- [18] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guid to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Co., 1978.
- [19] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Domination in Graph: Advanced Topics*, Marcel Dekker, NewYork, 1998.
- [20] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [21] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86:3-9, 1990.
- [22] P.Heggernes and D.Lokshtanov, *Optimal broadcast domination of arbitrary graphs in polynomial time*, Discrete Mathematics 306:3267-3280, 2006.
- [23] S. Herke, *Dominating broadcasts in graphs*, Master's dissertation, University of Victoria,2009.
- [24] S. Herke, C.M. Mynhardt, *Radial trees*, Discrete Math. 309:5950-5962, 2009.
- [25] O. Ore. *Theory of Graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 38 (American. Mathematical Society Publications. AMS, Providence, 1962.
- [26] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison - wesly publishing company. 1994,
- [27] M.Zemir, *Nombre de broadcast indépendance dans les grilles*. Mémoire de magister, Université SAAD DAHLAB DE BLIDA. 2013.
- [28] M. Sakarovitch, *Optimisation Combinatoire*. Université scientifique et médicale, institut national polytechnique de Grenoble, ENSIMAG, 1983.
- [29] A.M. Yaglom and A.M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solution, in volume 1, Combinatorial analyse and probability theory, San Fransisco, 1964, Holden-Day*.

