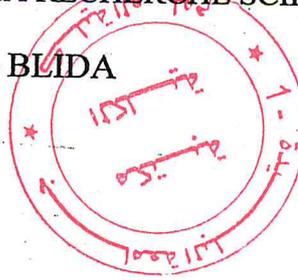


MA-510-24-1

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLEB - BLIDA



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option :

Modélisation stochastique et Statistique

Thème :

## La théorie de la fiabilité et ses applications

Par :

LAISSANI Assia

TABARLI Asma

Devant le jury composé de :

O.TAMI

Z.DAHMANE

N. OUKID

Président

Examinatrice

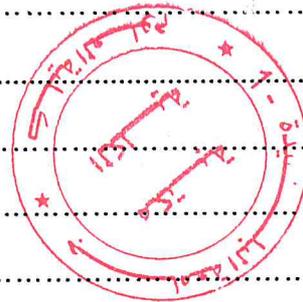
Promotrice

MA-510-24-1

Blida, juin 2015

# TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES.	
INTRODUCTION.....	04
<b>1. GENERALITES.....</b>	<b>06</b>
1.1 Introduction.....	06
1.2 Notions de probabilités.....	06
1.2.1 Espace de probabilité.....	06
1.2.2 Formule de Bayes.....	08
1.3 Variables aléatoires.....	09
1.3.1 Fonction de répartition.....	09
1.3.2 Variables discrètes.....	10
1.3.3 Variables continues.....	10
1.4 Les moments d'une variable aléatoire.....	11
1.4.1 L'espérance mathématique.....	11
1.4.2 La variance.....	12
1.4.3 L'écart type .....	12
1.5 Quelques lois usuelles.....	12
1.5.1 Lois discrètes.....	12
1.5.2 Lois continues.....	14
1.6 La fonction génératrice.....	17
1.7 Produit de convolution.....	18
1.8 Transformée de Laplace .....	19
<b>2. NOTIONS FONDAMENTALES DE LA FIABILITE.....</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction.....	20
2.2 Historique de la fiabilité.....	20
2.3 Objet de la fiabilité.....	22



2.4	Notions préliminaires.....	23
2.5	Indices et lois de fiabilité.....	23
2.5.1	Probabilité de défaillance.....	24
2.5.2	Fonction de fiabilité.....	24
2.5.3	MTTF.....	25
2.5.4	Taux de défaillance.....	26
2.5.5	Taux de défaillance cumulé.....	28
2.5.6	Durée de vie résiduelle d'un élément d'âge $t$ .....	28
2.6	Principales lois de probabilité utilisées en fiabilité.....	29
2.6.1	La loi Exponentielle.....	29
2.6.2	La loi de Weibull.....	30
2.6.3	La loi normale (Laplace-Gauss).....	31
2.6.4	La loi lognormale.....	32
2.6.5	La loi Gamma.....	33
2.7	Fiabilité des systèmes.....	34
2.7.1	Quelques méthodes pour l'analyse de la fiabilité des systèmes complexes.....	34
2.7.2	Calcul de la fiabilité de quelques systèmes.....	38
2.8	Distributions non paramétriques.....	43
<b>3.</b>	<b>POLITIQUE DE RENOUVELLEMENT.....</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction.....	47
3.2	Rappel sur les processus.....	47
3.2.1	Processus de comptage.....	48
3.2.2	Processus de Poisson.....	48
3.3	Processus de renouvellement.....	49
3.3.1	Processus de renouvellement simple.....	49
3.3.2	Fonction de renouvellement.....	50

3.3.3 Théorèmes limites de renouvellement.....	53
3.4 Processus alterné de renouvellement.....	54
3.4.1 Temps moyens.....	54
3.4.2 Disponibilité.....	56
3.5 La maintenance.....	58
3.5.1 Définition et objectif de la maintenance.....	58
3.5.2 Types de maintenance.....	59
3.5.3 Comment choisir le type de maintenance.....	62
<b>4. LES APLICATIONS DE LA FIABILITE.....</b>	<b>63</b>
4.1 Introduction.....	63
4.2 Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables: Application à un système photovoltaïque".....	63
4.3 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés.....	69
4.4 Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques. "Application sur système embarqué" .....	73
4.5 Files d'attente et fiabilité.....	78
4.6 Etude de fiabilité d'un bras d'onduleur.....	81
4.6.1 Présentation du problème.....	81
4.6.2 Calcul de la fiabilité des structures.....	81
4.6 Conclusion.....	86
<b>5. CONCLUSION.....</b>	<b>87</b>
<b>REFERENCES.....</b>	<b>88</b>

## INTRODUCTION

Depuis les trois dernières décennies, les systèmes industriels sont devenus de plus en plus complexes utilisant des nouvelles technologies permettant d'accroître la qualité des produits et des services ainsi que la productivité des systèmes. En revanche, ces évolutions ont rendu les systèmes plus vulnérables aux défauts, poussant les chercheurs à concevoir des systèmes possédant une certaine tolérance aux défauts dans le but d'améliorer la productivité.

La nécessité s'est donc rapidement imposée de renforcer la sûreté de fonctionnement de tous ces systèmes, pour assurer la sécurité des usagers, un nouveau mot a été créé pour caractériser le degré de confiance qu'on pouvait attribuer à ces systèmes et à leur composant: la fiabilité.

Le terme fiabilité a été admis en 1962 par l'Académie de Sciences selon la définition: « Grandeur caractérisant la sécurité du fonctionnement, ou mesure de la probabilité de fonctionnement d'un appareillage selon les normes prescrites ». Plus tard, dans les années 70, le Comité Électrotechnique International a proposé la définition suivante: "Caractéristique d'un dispositif, exprimée par la fiabilité, qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée ". La définition de la fiabilité par L'"Oxford English Dictionary" est la qualité d'une entité sur laquelle on peut compter à un instant donné. En anglais « reliability » vient de « to rely on » signifiant « compter sur, avoir confiance en... », alors que « fiabilité » en français vient effectivement du mot « fiable », c'est-à-dire en qui on peut se fier.

La théorie de la fiabilité est une discipline qui permet de prévoir les dates de panne pour établir les méthodes de maintenance préventive afin d'éliminer les événements catastrophiques. ■

Cette science trouve ses applications en technologie industriel et en science économique. En effet le développement de cette science ces dernières années et dû à plusieurs raisons:

- Le caractère essentiel et vital du bon fonctionnement des dispositifs, lorsque sont en jeu des vies humaines (centrale nucléaire, transport, aviation...). En effet, le système de contrôle doit être fiable pour ne pas engendrer des catastrophes du type de « CHERNOBYL ».

- La nécessité de rationaliser les activités industrielles ou autres, du fait de la taille des entreprises et la complexité des tâches. En d'autres termes, garantir lors de la conception d'un système, le succès de la mission qui lui est destinée (fournir par exemple de meilleures performances ou du moins les maintenir).

- L'aspect économique (le coût d'exploitation du matériel étant greffé par celui des défaillances). Les équipements de production doivent être fiables pour qu'il n'y ait pas de baisse de production.

Dans ce mémoire, nous étudions l'intérêt et les applications de la fiabilité dans divers domaines tels que: l'économie, l'électronique...

Dans un premier temps, nous présentons une synthèse assez riche des travaux de recherche sur le rôle fondamental de la fiabilité dans l'aide à la décision dans différents domaines.

Dans un deuxième temps, nous étudions la fiabilité d'un bras en fonction de nombre de ses composants.

Le mémoire est structuré comme suit:

Le chapitre 1 comporte les notions fondamentaux de la théorie de la probabilité, on rappelle la notion de variables aléatoire, les transformées de Laplace et les fonctions génératrice. Ces résultats permettent de définir les coefficients de la fiabilité.

Le chapitre 2 est consacré principalement aux notions de la théorie de fiabilité et nous présentons aussi les principales classes de distributions de survie.

Nous exposons dans le chapitre 3 quelques résultats de la théorie de renouvellement (fonction de renouvellement, les théorèmes limites,...), avec une introduction sur la maintenance et ses objectifs.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les travaux de recherche récents sur la fiabilité et ses applications dans divers domaines.

Ensuite, nous passons à notre contribution qui concerne l'étude de fiabilité d'un bras d'onduleur à l'aide du logiciel MATLAB.

# CHAPITRE 1

## GÉNÉRALITÉS

### 1.1 Introduction

L'objet de la théorie des probabilités est de modéliser des phénomènes complexes dont il n'est pas en général possible de prédire avec certitude leur évolution ou les conséquences qu'ils peuvent engendrer. L'archétype d'un tel phénomène est le lancer d'une pièce à pile ou face : les mécanismes physiques à prendre en compte pour décrire l'expérience du lancer sont d'une telle complexité qu'il n'est pas envisageable de répondre de façon déterministe à la question la pièce va-t-elle tomber coté pile, face, sur la tranche ? On dit alors que le résultat de l'expérience est aléatoire ou encore stochastique.

Dans ce chapitre, nous allons donner les définitions de base concernant la théorie des probabilités que nous utiliserons dans ce mémoire.

### 1.2 Notions de probabilités

#### 1.2.1 Espace de probabilité

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F})$  un espace probabilisable (telle que  $\mathfrak{F}$  une tribu sur  $\Omega$ ).

On appelle probabilité sur  $(\Omega, \mathfrak{F})$  toute application de  $(\Omega, \mathfrak{F})$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  que l'on notera  $P$  et qui vérifie les deux conditions suivantes :

- i)  $P(\Omega) = 1$ .
- ii) Pour toute suite d'événement  $A_i$  deux à deux disjoints :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Le triplet  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  s'appelle espace probabilisé (espace de probabilité).

### Propriétés élémentaires

Soit  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espace de probabilité. On considère deux événements quelconques  $A$  et  $B$  de  $\mathfrak{S}$ . on a alors :

- ★  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- ★ Si  $P(A) = 0$ , l'événement  $A$  est dit impossible.
- ★ Si  $P(A) = 1$ , l'événement  $A$  est dit certain.
- ★  $A = \emptyset \implies P(A) = 0$ .
- ★  $A = \Omega \implies P(A) = 1$ .
- ★  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- ★  $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ .
- ★  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , en générale:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

- ★ Soit l'événement  $A$  qui conduit les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  donc :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

**Définition 1.2.1.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espace de probabilité. Soit  $A$  et  $B$  deux événements tel que:  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors il en est de même de  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  et  $B$ ,  $A$  et  $\bar{B}$ . Les événements  $A_i, i \in I, (I \text{ fini ou dénombrable})$  sont dits indépendants (dans leurs ensemble); si pour tout ensemble d'indices  $i_1, i_2, \dots, i_m; m \geq 2$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m}).$$

**Définition 1.2.2.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espace de probabilité.

Soit  $B$  un événement tel que  $P(B) \neq 0$ . L'application:

$$P_B : \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1].$$

$$A \rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

est une probabilité sur  $\mathfrak{S}$ . Pour tout  $A \in \wp(\Omega)$ .

**Définition 1.2.3.** L'application  $P_B$  ainsi définie s'appelle "probabilité  $B$ -conditionnelle".

On note souvent  $A \setminus B$  l'événement "A est réalisé" sachant que B l'est.

On note aussi  $P(A \setminus B)$  au lieu de  $P_B(A)$ .

On a ainsi :

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Définition 1.2.4.** On dit qu'une famille  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événement lorsque:

★  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$ . (On dit alors que  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont deux à deux disjoints).

$$\star \bigcup_{k=1}^n B_k = \Omega.$$

**Théorème 1.2.1. (Formule des Probabilités totales)**

Soit  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espace probabilisé.

Si une famille  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements, alors pour tout événement  $A$  on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A \setminus B_i)P(B_i) \quad (1).$$

L'équation (1) établit que  $P(A)$  est une moyenne pondérée des  $P(A \setminus B_k)$ , les poids valant les probabilités des événements sur lesquels on conditionne.

Cette formule est extrêmement utile puisqu'elle nous permet de déterminer la probabilité d'un événement en commençant par le conditionner selon l'apparition ou non d'un autre événement. En d'autres mots, il existe de nombreuses situations où il est difficile de calculer directement la probabilité d'un événement mais où il est, par contre, possible de la calculer connaissant ses probabilités conditionnelles si certains événements sont réalisés.

### 1.2.2 Formule de Bayes

Supposons maintenant que  $A$  s'est réalisé et que nous cherchons à déterminer la probabilité que l'un des  $B_k$  soit aussi réalisé, on en déduit de l'équation (1) le théorème suivant:

**Théorème 1.2.2.**     *(Formule de Bayes)*

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  un système complet d'événements.

Soit  $A$  un événement tel que  $P(A) \neq 0$ .

Alors :

$$\forall j \in \mathbb{N}, P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}.$$

### 1.3 Variables aléatoires

**Définition 1.3.1.** *On appelle variable aléatoire notée v.a toute grandeur liée à une expérience aléatoire, et qui peut à l'issue de cette épreuve prendre telle ou telle valeur. Soit  $E$  l'ensemble des valeurs possibles de la v.a; Une variable aléatoire  $X$  est donc une fonction numérique de  $\Omega$  dans l'ensemble  $E : \omega \rightarrow X(\omega)$ .*

**Exemple 1.3.1.** *Expérience: 10 tirs sur une cible.*

$X = \text{nombre d'échecs}; E = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ .

Des v.a prenant des valeurs discrètes, pouvant être énumérées d'avance, sont dites discrètes.

Des v.a dont les valeurs possibles remplissent d'une manière continue certains intervalles sont dites continues.

#### 1.3.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition est la caractéristique la plus universelle d'une v.a, elle existe pour toutes les v.a tant discrète que continue.

**Définition 1.3.2.** *On appelle fonction de répartition de  $X$ , et on note  $F_X(x)$ , la fonction de  $\mathbb{R}$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  définie par:*

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$$

$$x \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x).$$

### Propriétés

- ★  $F_X$  est non décroissante.
- ★  $F_X$  est continue à gauche.
- ★  $F_X$  est continue à droite dans le cas des v.a continues.
- ★  $F_X(-\infty) = 0$  et  $F_X(+\infty) = 1$ .
- ★  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .

### 1.3.2 Variables discrètes

Une v.a est discrète si  $\text{card}[E]$  est fini ou dénombrable.

Généralement, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération sont de types discrets.

#### ★ Loi de probabilité

La loi d'une v.a discrète est entièrement déterminée par les probabilités  $P_i$  des événements  $\{X = x_i\}$ ,  $x_i \in \Omega$ . La loi de probabilité est donnée par les couples  $(x_i; P_i)$  avec:

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1.$$

#### ★ Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de la v.a  $X$  la fonction:

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P_i, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 1.3.3 Variables continues

Une v.a est dite continue si elle peut prendre toute les valeurs dans un intervalle donné.

En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de types continues.

#### ★ Loi de probabilité

Dans le cas d'une v.a continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définis dans un intervalle donné. En effet, pour une v.a continue, la probabilité associée à l'événement  $\{X = a\}$  est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que la v.a  $X$  prenne des valeurs comprises dans un intervalle  $[a, b]$  tel que  $P(a \leq X \leq b)$ . Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par  $X$  tend vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité

**Définition 1.3.3.** On appelle fonction densité de probabilité toute application continue par morceaux :

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

tel que:

$$\star \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0.$$

$$\star \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1. \text{ (On suppose que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \text{ existe).}$$

## 1.4 Les moments d'une variable aléatoire

### 1.4.1 L'espérance mathématique

L'espérance d'une v.a  $E(X)$  correspond à la moyenne des valeurs possible de  $X$  pondérées par les probabilités associés à ces valeurs, c'est un nombre qui correspond au moment d'ordre 1 de la v.a  $X$ .

★ Si  $X$  est une v.a discrète de loi de probabilité  $(x_i, p_i)$  défini sur un nombre fini  $n$  d'évènements élémentaires alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

★ Si  $X$  est une v.a absolument continue de densité  $f$ , on appelle espérance de  $X$ , le réel  $E(X)$ , défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

si cette intégrale est convergente.

#### Propriétés

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même univers  $\Omega$ , admettant une espérance, alors :

$$\star E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

$$\star E(aX) = aE(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\star X \geq 0, E(X) \geq 0.$$

★ Si  $X$  est un caractère constant tel que:  $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = k$  alors  $E(X) = k$ .

### 1.4.2 La variance

La variance d'une v.a  $var(X)$  est l'espérance mathématique du carrée de l'écart à l'espérance mathématique. c'est un paramètre de dispersion qui correspond au moment centrée d'ordre 2 de la v.a  $X$ .

#### Propriétés

$$\star var(aX + b) = a^2 var(X).$$

$$\star var(aX) = a^2 var(X).$$

$$\star var(X + b) = var(X)$$

★ On peut calculer la variance avec la relation suivante:

$$var(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

### 1.4.3 L'écart type

Si  $X$  est une v.a ayant une variance  $var(X)$ , on appelle écart type de  $X$ , le réel :

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)}.$$

## 1.5 Quelques lois usuelles

### 1.5.1 Lois discrètes

#### 1.5.1.1 Loi de Bernoulli $B(p)$

La distribution de *Bernoulli* ou la loi de *Bernoulli* de paramètre  $p$ , est une distribution discrète de probabilité, qui prend la valeur 1 avec la probabilité  $p$ , et 0 avec la probabilité  $(1 - p)$ .

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On a:

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = p(1 - p).$$

### 1.5.1.2 Loi Binomiale $B(n, p)$

Une variable *Binomiale* est une somme de  $n$  variables de *Bernoulli*  $X_i$  indépendantes de même paramètre  $p$ .  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .

la loi de  $X$  est donnée par:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = np(1 - p).$$

### 1.5.1.3 Loi uniforme discrète

Soit  $X$  la v.a prenant ses valeurs  $1, 2, \dots, n$  avec une probabilité  $\frac{1}{n}$ .

Loi de probabilité

$$P(X = x) = \frac{1}{n}.$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

### 1.5.1.4 Loi de Poisson $P(\lambda)$

Cette distribution dépend essentiellement de deux paramètres ( $k > 0, \lambda > 0$ ). Cette loi est utilisée pour étudier les phénomènes de non-simultanéité des réalisations, c'est à dire un seul événement a lieu à la fois. Le nombre d'événement qui se produise pendant une période  $t$  ne dépend que de la durée de cette période.

Tous l'intérêt de la loi de poisson est de décrire la limite de la loi Binomiale si  $n$  est grand et  $p$  est petit. Elle s'écrit:

$$P(x) = \frac{np}{x!} \exp(-np)$$

en posant  $np = \lambda$ , on obtient:

$$P(x) = \frac{\lambda}{x!} e^{-\lambda}.$$

Les moments de la loi de poisson sont:

$$E(X) = \lambda \quad \text{var}(X) = \lambda.$$

## 1.5.2 Lois continues

### 1.5.2.1 Loi exponentielle $\xi(\theta)$

Soit  $\theta$  un réel strictement positif. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\theta$  lorsque sa densité de probabilité est la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  est donnée par :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \text{ si } x \geq 0$$

La fonction de répartition est:

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x}$$

Les moments d'ordre  $k$  sont:

$$E(X^k) = \frac{k!}{\theta^k}$$

### 1.5.2.2 Loi normale $N(\mu, \sigma)$

On parle de loi normale lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante.

Une variable aléatoire absolument continue  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$ , et de variance  $\sigma^2$  si sa densité est donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition de la loi normale n'a pas une expression explicite.

### 1.5.2.3 Loi normale centrée réduite $N(0, 1)$

La loi normale centrée réduite  $N(0, 1)$  est un cas particulier de la loi normale  $N(\mu, \sigma)$  avec une moyenne  $\mu = 0$ , et un écart type  $\sigma = 1$ , et on a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

**\* Relation entre variable normale et variable normale centrée réduite**

Si  $X$  une v.a qui suit la loi normale  $N(\mu, \sigma)$ , alors la v.a  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

**1.5.2.4 Loi lognormale**

Une v.a continue et positive  $X$  est distribuée selon une loi lognormale si son logarithme est distribué suivant une loi normale. La loi lognormale a deux paramètres: la moyenne  $\mu$  et l'écart type  $\sigma$ .

Elle est caractérisée par:

la densité:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(x) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}.$$

La répartition:

$$F(x) = \Phi \left( \frac{\log(x) - \mu}{\sigma} \right).$$

Où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Tous les moments existent et sont donnés par:

$$E(x^k) = e^{k\mu + k^2\sigma^2}.$$

**1.5.2.5 Loi gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$**

La loi de distribution gamma repose sur une fonction  $\Gamma$  portant le même nom. Cette fonction est une intégrale n'admettant pas de primitive sous la forme d'une fonction élémentaire. Elle s'écrit:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Une v.a continue  $X$  obéit à une loi gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , si sa fonction de densité de probabilité s'écrit:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

La loi gamma est une généralisation de la fonction exponentielle. En effet, elle permet de déterminer le temps qui s'écoule entre la  $i^{eme}$  et la  $(i+r)^{eme}$  apparition de l'événement ( $r$  est un réel). Ainsi,  $\Gamma(1, \beta)$  est la loi exponentielle.

Les moments de la loi gamma vaut::

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

### 1.5.2.6 Loi de Weibull $W(\beta, \eta, \gamma)$

Proposée par l'ingénieur et le mathématicien Waloddi Weibull, la loi de Weibull est une loi de probabilité à 3 paramètres positives  $\eta$  (paramètre d'échelle),  $\beta$  (paramètre de forme), et  $\gamma$  (paramètre de localisation) notée  $W(\eta, \gamma, \beta)$ . Elle est caractérisée par :

Sa fonction de densité :

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left( \frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta} \right\}, \quad \text{avec } t > \gamma$$

Sa fonction de répartition:

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta} \right\}.$$

La moyenne et la variance de la loi de Weibull s'expriment de la manière suivante:

$$E(X) = \eta \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) + \gamma \quad \text{et} \quad var(X) = \eta^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) - \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)^2 \right].$$

La loi de Weibull est définie par deux paramètres lorsque  $\gamma = 0$ .

Lorsque  $\beta = 1$  et  $\gamma = 0$ , on se retrouve dans le cas particulier de la loi exponentielle avec  $\lambda = \frac{1}{\eta}$ .

Aussi, lorsque  $\beta \approx 3.5$  et  $\gamma = 0$ , on est dans le cas d'une distribution normale.

### 1.5.2.7 Loi de Khi-deux $\chi_n^2$

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des v.a indépendantes de même loi normale, tels que:

$$E(X_i) = \mu, \quad var(X_i) = \sigma^2.$$

Alors la v.a:

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

obéit à une loi de Khi-deux à  $n$  degré de liberté. La fonction de densité est de la forme:

$$f(y) = \frac{y^{(n/2)-1} e^{-y/2}}{2^{(n/2)} \Gamma(n/2)}.$$

Ses moments valent:

$$E(Y) = n, n \geq 1 \quad \text{var}(Y) = 2n.$$

### 1.5.2.8 Loi de Student

Si  $X, Y$  sont indépendantes, tel que  $X$  suit la loi normal centrée réduite et  $Y$  suit la loi de Khi-deux de  $n$  degré de liberté, alors la v.a  $T = \sqrt{n} \frac{X}{\sqrt{Y}}$  obéit à une loi de Student à  $n$  degré de liberté.

$$f(x) = [2^{(n-1)/2} \Gamma(n/2) \sqrt{\pi n}]^{-1} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

Pour  $n = 1$ , on obtient la loi de Cauchy.

Les moment d'ordre supérieur strictement à  $n$  n'existe pas.

L'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} x^k \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

converge pour tous  $k, -1 < k < n$ , et diverge pour  $k > n$ . La distribution de Student étant symétrique les moments d'ordre pair sont nuls (s'il existe).

pour  $k = 1$  on obtient:

$$E(X) = 0 \quad \text{si } n > 1.$$

$$\text{var}(X) = \frac{n}{n-2} \quad \text{pour } k > 2.$$

## 1.6 La fonction génératrice

En mathématiques, et plus particulièrement en théorie des probabilités, une fonction génératrice des probabilités est une série génératrice associée à une suite de probabilités, permettant d'en étudier les propriétés; on l'identifie à la fonction dont elle est le développement en série entière.

**Définition 1.6.1.** La fonction  $G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k$  définie sur  $[0; 1]$ , s'appelle la fonction génératrice de la loi de  $X$ . Elle caractérise cette loi au sens où deux variables aléatoires entières  $X$  et  $Y$  ayant même fonction génératrice ont la même loi.

**Proposition 1.6.1.** Soit  $X$  une v.a. On a:

★  $E(X) = G'_X(1)$ .

★ Si  $X$  admet une espérance finie (c'est à dire  $g'(1) < \infty$ ),

$$\text{var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2.$$

★ Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes alors:

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

## 1.7 Produit de convolution

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes non négatives de fonction de répartition  $F_1$  et  $F_2$  respectivement, alors la fonction de répartition de la somme  $S = X_1 + X_2$  est donnée par le produit de convolution des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  défini par:

$$F(t) = F_1 * F_2(t) = \int_0^t F_2(t-x) dF_1(x) = \int_0^t F_1(t-x) dF_2(x).$$

**Remarque 1.7.1.** 1- Le produit de convolution se définit pour des distributions arbitraires, pas forcément définies sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} F_1(t-x) dF_2(x).$$

2- Le produit de convolution de  $n$  variables aléatoires  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  indépendantes de fonction répartition  $F$  est donnée par récurrence:

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x) dF(x) = \int_0^t F(t-x) dF^{(n-1)}(x).$$

## 1.8 Transformée de Laplace

**Définition 1.8.1.** Soit  $f$  une fonction définie pour  $t \geq 0$ , continue par morceau et telle qu'il existe:  $c > 0, a > 0$  tels que  $|f(t)| < ce^{at}$ .

On appelle transformée de Laplace de cette fonction l'intégrale:

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > a.$$

### 1.8.1 Propriétés

Soient  $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions admettant des transformées de Laplace  $\widehat{f}(s)$  et  $\widehat{g}(s)$  et soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

#### ★ Linéarité

$$\int_0^{+\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-st} dt = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt.$$

#### ★ Transformée de la dérivée

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = s\widehat{f}(s) - f(0).$$

#### ★ Transformée de la convolution

La transformée de Laplace de la fonction  $f * g$  est de la forme:

$$\int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-st} dt = \widehat{f}(s)\widehat{g}(s).$$

## CHAPITRE 2

# NOTIONS FONDAMENTALES DE LA FIABILITÉ

### 2.1 Introduction

L'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement. A l'origine, la fiabilité concernait les systèmes à haute technologie (centrales nucléaires, aérospatial...). Aujourd'hui, la fiabilité est devenue un paramètre clé de la qualité et d'aide à la décision, dans l'étude de la plupart des composants, produits et processus "grand public": Transport, énergie, bâtiments, composants électroniques, composants mécaniques. . .

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les éléments de base sur la fiabilité nécessaire pour comprendre les chapitres suivants.

### 2.2 Historique de la fiabilité

Dès que les hommes ont inventé les premiers instruments, ils sont devenus dépendants de leur bon fonctionnement. Dans ce sens, la problématique de fiabilité était née. Avec l'arrivée de l'électronique, la fiabilité est entrée dans une nouvelle ère de complexité.

Dans les années 60, considéré dans le secteur du transport aérien, le mot fiabilité a acquis un sens technique pour caractériser de la sûreté de fonctionnement des équipements. Dès 1930 les transports aériens commencent à collecter des informations statistiques sur les incidents des appareils. Les premiers résultats quantifiés sont publiés entre 1939 et 1942 par le capitaine A.F. Pugsley de la 7<sup>ème</sup> brigade d'infanterie canadienne, avec un taux d'accident évalué à  $10^{-5}/h$  pour les avions et  $10^{-7}/h$  pour leur structure.

Pendant la seconde guerre mondiale, suite aux défaillances des premiers missiles V-1, s'est développée une approche probabiliste de la défaillance d'un système: la fiabilité d'un système est une composition des fiabilités de tous les éléments qui le constituent. C'est

Eric Pieruschka qui va finalement proposer la formule de calcul de la fiabilité d'une chaîne:  $R_{chaîne}(t) = R_1(t) * R_2(t) * \dots * R_n(t)$ . La probabilité de survie d'une chaîne à une date « $t$ » arbitraire est le produit des probabilités de survie de chacun de ses composants à cette date, dans l'hypothèse où les composants sont indépendants les uns des autres.

La fiabilité a commencé d'être enseignée aux Etats-Unis dans les années 1950 avec le développement de l'électronique. C'est à cette époque que la marine militaire américaine constate que ses tubes électroniques ne sont opérationnels qu'à hauteur de 30 % de leur temps d'utilisation. Les premières directives en électronique voient le jour par des spécifications d'essais de vieillissement accéléré, directives qui seront reprises et adaptées par la NASA. En France, c'est le Centre National d'Etudes sur les Télécommunications qui rassemble un recueil des données de la fiabilité des composants électronique.

A partir des années 1960, les méthodes d'analyse prévisionnelle de la fiabilité et de la sécurité des systèmes se généralisent dans l'industrie aéronautique et spatiale. Ces méthodes ont également été très utilisées par la NASA pour accompagner les débuts du programme APOLLO. Dans le nucléaire, on assiste aux premiers pas de la méthode du "Diagramme de Succès". En 1961, le nouveau concept d'arbres des causes est introduit par Watson des «Bell Telephone Laboratories» comme une méthode permettant d'évaluer la sécurité du système de contrôle du missile Minuteman. Cette technique sera reprise par Boeing.

En France, la SNIAS (Société Nationale des Industries Aéronautiques et Spatiales) utilise la méthode des combinaisons de pannes sur le projet Concorde, puis sur Airbus. Toutes ces méthodes trouvent un écho favorable dans l'industrie civile, notamment au Japon. Apparaissent alors les premières bases de données et les premiers ouvrages de référence: ouvrage de Bazovsky publié en 1961, la revue «IEEE Transaction on Reliability»; en France c'est en 1962 que le mot « fiabilité » a été admis par l'Académie des Sciences et c'est vers 1965 que le concept de maintenabilité est introduit, et sur lequel le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique) travaillera activement dans les années 67-68.

En 1971 sont publiés les résultats des premiers travaux sur la fiabilité du logiciel. En 1972, EDF et le CEA mènent les premières études exhaustives sur le nucléaire. En 1975, le rapport américain Rasmussen présente une évaluation complète d'un risque nucléaire

sur les centrales de Surry 1 et Peach Bottom 2: en synthèse, le risque calculé pour les populations avoisinant lesdites centrales est inférieur à celui que font courir les chutes de météorites. En 1979, la catastrophe nucléaire de TMI (Three Miles Island) apporte une manière inattendue de promouvoir les outils de sûreté de fonctionnement puisque le scénario qui a mené à la catastrophe était quasiment décrit dans le rapport Rasmussen.

En Algérie, la fiabilité n'en est encore qu'à son stade embryonnaire. La création récente de l'institut National de Maintenance (I.N.M.A.) et l'organisation de rencontre technique régulière Algéro-français montrent l'intérêt que notre pays accorde à ces questions aujourd'hui.

### **2.3 Objet de la fiabilité**

La théorie de la fiabilité est la discipline scientifique qui étudie les méthodes générales et les procédés à suivre lors de la réception, le transport, le stockage et/ou l'exploitation du système pour garantir une efficacité maximale.

- Elle étudie la loi d'exploitation des défaillances et les méthodes de leur prévision.
- Elle établit et étudie les caractéristiques quantitatives (critères) de sûreté de fonctionnement.
- Elle élabore les méthodes de contrôle de la fiabilité et les procédures d'essais de fiabilité.
- Elle étudie les méthodes d'élévation de la fiabilité à l'étape de la conception; par exemple: choix de la structure optimale du système qui garantit une fiabilité donnée.
- Elle établit les méthodes de maintenance préventive (choix optimal des dates de renouvellement prophylactique); les méthodes permettant de conserver la fiabilité à son niveau maximal au cours de l'exploitation.

L'objet principal des études de fiabilité est donc de choisir des méthodes de décision, des techniques de fabrication... qui assurent l'incidence la plus faible de l'intervention humaine sur la fiabilité "intrinsèque" du système.

## 2.4 Notions préliminaires

On définit les notions de base:

**Système:** Ensemble d'éléments en interaction.

**Élément:** Est une partie constitutive et indécomposable du système.

**Fiabilité (Reliability):** Aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée.

**Défaillance:** Perte partielle ou totale des propriétés de l'élément qui diminue significativement ou bien entraîne la perte totale de la capacité du fonctionnement.

**Disponibilité (Availability):** Est la probabilité pour que l'équipement ou le système utilisé dans les conditions prévues soit en état d'accomplir une fonction requise à un instant donné.

**Sécurité (Safety):** Est l'aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques.

**Durabilité:** Aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise dans les conditions données d'utilisation et de maintenance, jusqu'à ce qu'un état limite soit atteint.

**Maintenabilité:** Caractérise l'aptitude du système à être réparé quand il est défaillant, ou évoluer.

**Durée de réparation:** L'intervalle de temps qui s'écoule entre la manifestation d'une faute et la remise en service du système. (Détection des pannes, réparation, vérification après réparation).

**Système réparable:** Est un système qui, après sa défaillance, peut être remis en état de marche par des actions de réparation ou maintenance.

**Système non réparable:** Est un système qui est mis au rebut dès qu'il tombe en panne.

## 2.5 Indices et lois de fiabilité

Ce paragraphe est un recueil de principaux éléments probabilistes permettant de mesurer la fiabilité. Nous pouvons trouver plus de détail dans les ouvrages suivants: [1,3,14,15,18,25,26]. ■

On suppose que le système devient opérationnel à la date  $t = t_0 = 0$ .

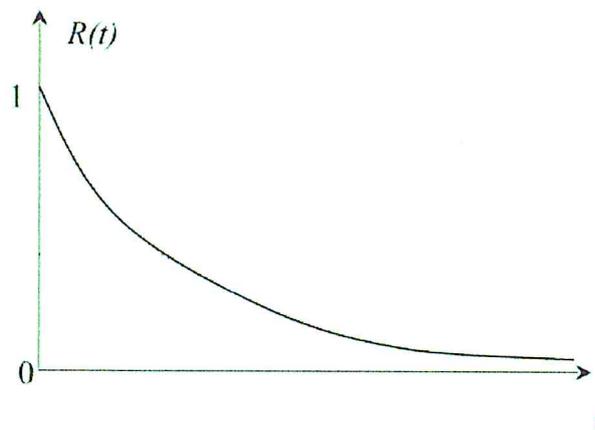


FIGURE 2.2. Fonction de fiabilité

Comme  $F_X(t)$  est une fonction croissante, la fiabilité  $R(t)$  est une fonction décroissante.

Et on a:

$$\star R(0) = 1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0.$$

$$\star P(t_1 < X \leq t_2) = R(t_1) - R(t_2).$$

La fonction de fiabilité a, en général, la forme présentée dans la figure 2.2.

### 2.5.3 MTTF (mean time to failure)

Une autre grandeur est aussi associée à la fiabilité, c'est le temps moyen de fonctionnement jusqu'à la première défaillance, noté MTTF. (" Mean Time To Failure "). Cette notion permet notamment de visualiser plus concrètement la fiabilité d'un matériel. Elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt = - \int_0^{+\infty} t \frac{dR(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} R(t) dt - [tR(t)]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

puisque

$$[tR(t)]_0^{+\infty} = 0.$$

alors

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t) dt.$$

#### 2.5.4 Taux de défaillance $\lambda(t)$

Le taux de défaillance,  $\lambda(t)$ , est l'une des caractéristiques de la fiabilité. La valeur  $\lambda(t)\Delta t$  représente la probabilité conditionnelle d'avoir une défaillance dans l'intervalle de temps  $[t; t + \Delta t]$ , sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance dans l'intervalle de temps  $[0; t]$ .

Ainsi, en appliquant le théorème des probabilités conditionnelles,  $\lambda(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda(t)\Delta t &= \frac{P \{ \text{défaillant sur } [t, t + \Delta t] \text{ sans défaillance sur } [0, t] \}}{P \{ \text{non défaillant sur } [0, t] \}} \\ \lambda(t)\Delta t &= \frac{P \{ \text{défaillant sur } [0, t + \Delta t] \} - P \{ \text{défaillant sur } [0, t] \}}{P \{ \text{non défaillant sur } [0, t] \}}. \end{aligned}$$

En d'autre terme:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X \leq t + \Delta t / X > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - F_X(t + \Delta t) + F_X(t)}{\Delta t} = \frac{f_X(t)}{R(t)}. \end{aligned}$$

Si  $F_X$  est dérivable de fonction de densité  $f_X(t)$ , alors:

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{R(t)}.$$

L'expérience montre que pour la plupart des composants, la courbe représentative du taux d'avarie instantané  $t \rightarrow \lambda(t)$  a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée "courbe en baignoire".

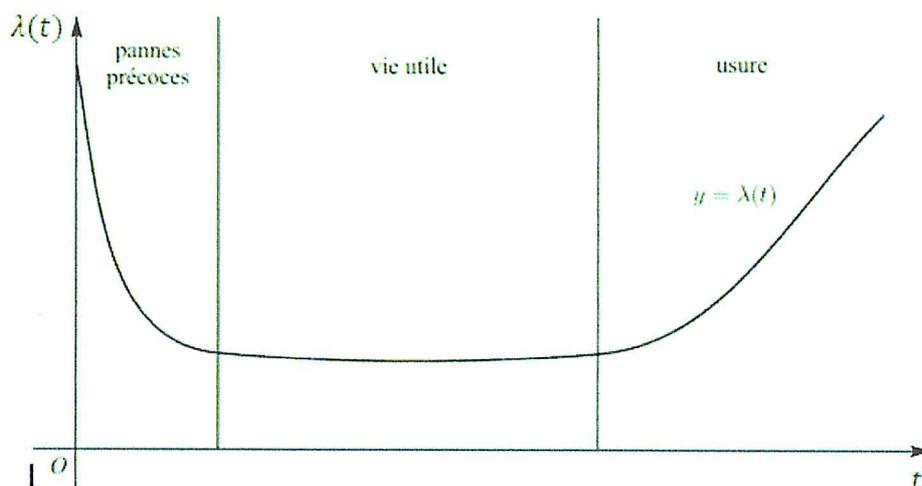


FIGURE 2.3. La courbe en baignoire

Cette courbe comporte trois parties distinctes :

★ La première phase correspond à la période de jeunesse de l'élément et se caractérise par un taux de défaillance décroissant. Ces défaillances de jeunesse (early failures) sont dues à des défauts de fabrication ou de conception. On peut les éliminer en instaurant des essais sur les prototypes ainsi que des périodes de rodage.

★ La seconde phase ou période de vie utile est caractérisée par un taux de défaillance approximativement constant. Les pannes de cette période (chance failure) sont inévitables malgré un bon rodage ; elles sont «accidentelles».

★ Enfin, les avaries de vieillesse sont dues à l'usure de l'équipement. Elles peuvent cependant être considérablement atténuées par une bonne stratégie de maintenance et d'inspection.

**Remarque 2.5.1.** *la connaissance du taux de panne suffit à déterminer sa fiabilité.*

*En effet:*

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{R(t)}.$$

$$\int_0^t \lambda(x) dx = - \int_0^t \frac{-f_X(x)}{1 - F_X(x)} dx \implies F_X(t) = 1 - \exp\left\{- \int_0^t \lambda(x) dx\right\}, t > 0.$$

$$R(t) = \exp\left\{- \int_0^t \lambda(x) dx\right\}, t > 0.$$

*D'où une relation entre le taux de panne et la fonction de fiabilité.*

### 2.5.5 Taux de défaillance cumulé

La fonction  $\Lambda$  définie par:

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(t) dt$$

s'appelle fonction de hasard et représente le taux de défaillance cumulé jusqu'à l'instant  $x$ .

### 2.5.6 Durée de vie résiduelle d'un élément d'âge $t$

Lorsqu'un élément a fonctionné jusqu'à la date  $t$ , le temps d'attente de la panne est appelé tout naturellement la durée de survie de l'élément au temps  $t$  (ou encore la durée de vie résiduelle) ; elle représente en quelque sorte la v.a  $X_t = X - t$  conditionnée par l'événement  $\{X > t\}$ .

La fonction de répartition de  $X_t$  notée  $F_t$  est définie par:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= P(X_t \leq x / X > t) = P(X - t \leq x / X > t) \\ &= \frac{P(t < X \leq t + x)}{P(X > t)} \\ &= \frac{F(t + x) - F(t)}{R(t)}. \end{aligned}$$

Sa fonction de fiabilité est alors  $R_t$  donnée par:

$$R_t(x) = \frac{R(t + x)}{R(t)}.$$

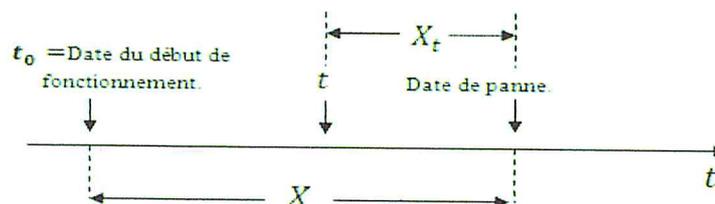


FIGURE 2.4. Durée de vie résiduelle

## 2.6 Principales lois de probabilité utilisées en fiabilité

Dans ce paragraphe, nous présenterons quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse des données de vie et qui sont communes à plusieurs disciplines. Nous parlerons en particuliers des lois continues. Nous énoncerons les principales propriétés de ces lois (densité de probabilité, fonctions fiabilité et taux de défaillance) ainsi que leur application en fiabilité.[1,14,17,18,19,25].

### 2.6.1 La loi Exponentielle

Cette loi concerne tous les matériels pendant une durée de leur vie (vie utile) et les matériels électroniques pendant presque toute leur vie.

La fonction fiabilité :

$$R(t) = \exp\{-\theta t\}.$$

Le temps moyen de bon fonctionnement est:

$$MTTF = \frac{1}{\theta}$$

Le taux de défaillance est :

$$\lambda(t) = \theta.$$

Le taux de défaillance est donc constant ce qui signifie que la loi exponentielle modélise les durées de vie de systèmes qui ne s'usent pas et qui ne s'améliorent pas.

**\* Propriété d'absence de mémoire de la loi Exponentielle**

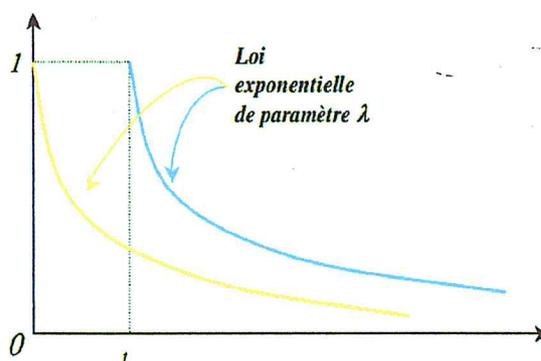


FIGURE 2.5. Propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Une propriété principale de la loi exponentielle est d'être sans mémoire ou "Memoryless property", ce qu'on exprime de la façon suivante : la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui a fonctionné sans tomber en panne jusqu'à l'instant  $t$  est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant  $t$ , le dispositif est considéré comme neuf (ou "as good as new" en anglais), de durée de vie exponentielle de paramètre  $\theta$ . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$P(X \geq t + x | X \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = P(X \geq x) \quad t > 0, x > 0.$$

### 2.6.2 La loi de Weibull

C'est la plus populaire des lois, utilisée dans plusieurs domaines (électronique, mécanique,...). Elle permet de modéliser en particulier de nombreuses situations d'usure de matériel. Elle caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie: période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure.

- La fonction de fiabilité de la loi de weibull est:

$$R(t) = \exp \left\{ - \left( \frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right\}.$$

- Le taux de défaillance:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}.$$

Le taux de défaillance de la loi de Weibull est donc une puissance du temps, ce qui permet de modéliser de nombreuses situations. En particulier :

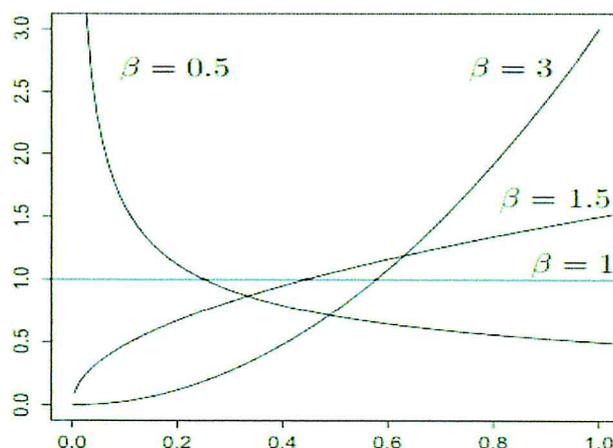


FIGURE 2.6. Taux de défaillance de la loi de Weibull.

- ★ Si  $\beta < 1$ :  $\lambda$  est décroissante, donc le système s'améliore.
- ★ Si  $\beta = 1$ :  $\lambda$  est constante, indépendance du temps.
- ★ Si  $\beta > 1$ :  $\lambda$  est croissante, donc le système s'use.

La distribution de Weibull permet donc de représenter les trois périodes de la vie d'un dispositif décrites par la courbe en baignoire.

La figure 2.6 donne les graphes des taux de défaillance de la loi de Weibull pour  $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$ .

Remarquons que pour  $\beta \in ]1, 2[$ ,  $\lambda$  est concave, donc le système s'use, mais de moins en moins vite. Pour  $\beta > 2$ ,  $\lambda$  est convexe, ce qui correspond à une accélération de l'usure.

De plus, cette loi de Weibull permet de décrire un phénomène de fatigue lorsque  $\beta \in [1, 5; 2, 5]$ , un phénomène ayant un taux de défaillance linéaire lorsque  $\beta = 2$  et un phénomène d'usure ou de corrosion lorsque  $\beta \in [3; 4]$ .

### 2.6.3 La loi normale (Laplace-Gauss)

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) car le taux de défaillance est toujours croissant. On ne l'utilisera que si la moyenne des durées de vie est supérieure

à 3 fois l'écart type.

La fiabilité est donnée par:

$$R(t) = 1 - \phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right).$$

où  $\phi$  est la fonction de répartition de la loi Normale centré ( $\mu = 0$ ) réduite ( $\sigma = 1$ ) :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

#### 2.6.4 La loi lognormale

La fonction de répartition, la fiabilité et le taux de défaillance de la loi lognormale n'ont pas d'expression explicite. En revanche, on peut vérifier que le taux de défaillance croît puis décroît en tendant vers 0 (figure 2.7). Ceci peut modéliser des situations réelles: un système qui se détériore puis se met à s'améliorer au bout d'un moment. En fait l'expérience montre que la loi lognormale est plus à même de modéliser des durées de réparation que des durées de bon fonctionnement.

-La fonction de survie d'une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  est:

$$R(t) = 1 - \phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right).$$

- Le temps moyen de bon fonctionnement est:

$$MTTF = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

- Le taux de défaillance:

$$\lambda(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{t \int_0^{+\infty} \sigma \sqrt{2\pi} f(t) dt}.$$

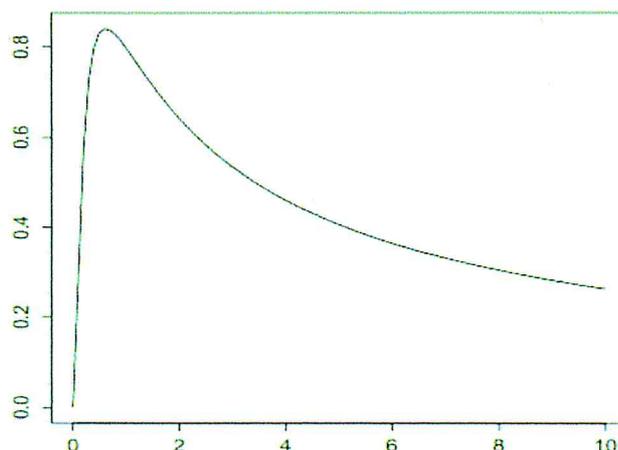


FIGURE 2.7. Taux de défaillance de la loi lognormale

### 2.6.5 La loi Gamma

Elle représente la loi de probabilité d'occurrence de  $\alpha$  événements dans un processus poissonien. Par exemple si  $t_i$  est le temps entre les défaillances successives d'un système, et que  $t_i$  suit une distribution exponentielle, le temps cumulé d'apparition de  $\alpha$  défaillances suit une loi Gamma. La loi gamma est un bon modèle de probabilité pour prévoir la durée de vie des appareils qui subissent une usure (e.g. véhicules, appareils ménagers, ordinateurs...).

Le taux de défaillance est donné par:

$$\lambda(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_t^{+\infty} \Gamma(\alpha) f(u) du}$$

On peut montrer que:

- ★ Si  $\alpha < 1$ ,  $\lambda$  est décroissant donc le système s'améliore.
- ★ Si  $\alpha > 1$ ,  $\lambda$  est croissant donc le système s'use.
- ★ Si  $\alpha = 1$ ,  $\lambda$  est constant et on retrouve la loi exponentielle.

Ces 3 cas sont représentés dans la figure 2.8.

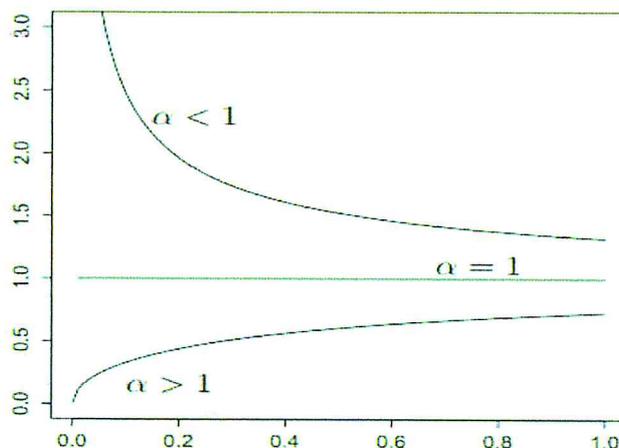


FIGURE 2.8. Taux de défaillance de la loi gamma

## 2.7 Fiabilité des systèmes

L'évaluation de la fiabilité des systèmes représente un des problèmes principaux en théorie de la fiabilité, pour le résoudre, il faut connaître:

- ★ La structure des systèmes (au sens de la fiabilité)
- ★ La fiabilité des éléments constituants

Cette dernière précise de manière dont l'état du système dépend des états de ses composants.

Il existe plusieurs types pour représenter la structure du système : diagrammes de fiabilité, arbres de défaillance, graphes de Markov, réseaux de Petri, diagrammes de décision binaires, réseaux bayésiens, etc... On ne s'intéressera ici qu'à des systèmes non réparables et on représentera leur fonctionnement par un diagramme de fiabilité.

### 2.7.1 Quelques méthodes pour l'analyse de la fiabilité des systèmes complexes

#### 2.8.1.1 Diagramme de fiabilité

Historiquement, la méthode du diagramme de fiabilité ou de succès est la première à avoir été utilisée pour analyser les systèmes. Ses limites sont rapidement apparues, néanmoins elle permet de modéliser rapidement le système.

Le diagramme de fiabilité d'un système est un graphe sans circuit admettant une entrée

E et une sortie S, dont :

- ★ Les sommets, appelés blocs, représentent les composants du système.
- ★ Les arcs traduisent les relations entre les différents composants, au sens où le système fonctionne si et seulement si il existe un chemin allant de E à S qui ne passe que par des composants en fonctionnement.

Cette méthode est utilisée pour les systèmes non réparables.

### **2.8.1.2 AMDEC**

L'analyse des modes de défaillance, et leurs effets et leurs criticités, est une méthode inductive d'analyse du système utilisée pour l'étude systématique des causes et des effets des défaillances qui peuvent affecter les composants de ce système. Cette méthode se base sur la décomposition du système en éléments.

L'AMDEC est une analyse détaillée de toutes les défaillances simples, de leurs conséquences. Elle permet de:

- ★ Identifier les modes de défaillances des différentes parties du système.
- ★ D'évaluer les effets de chaque mode de défaillance des composants sur les fonctions du système.
- ★ D'identifier les modes de défaillances qui auront un effet important sur la sécurité, la fiabilité . . .

### **2.8.1.3 Arbre de défaillance**

L'idée de cette méthode est de représenter graphiquement la logique de dysfonctionnement d'un système.

L'analyse par l'arbre de défaillance se concentre sur un événement particulier qualifié d'indésirable ou de redouté. Cet événement est appelée TOP. On détermine les combinaisons d'événements reliant ce TOP. Pour chacun de ces événements, on recherche à nouveau les causes. On possède ainsi de manière récursive jusqu'à atteindre des événements considérés comme élémentaires.

Cette analyse est représentée par une arborescence où le TOP est le sommet de l'arbre, et les événements de deux niveaux sont reliés par des portes (ET, OU,..). La syntaxe des arbres de défaillance est décrite dans la figure 2.9.

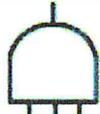
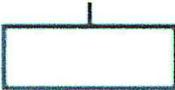
Événements	Dénomination	Portes	Dénomination
	Événement de base		Porte "ET"
	Événement-sommet ou événement intermédiaire		Porte "OU"
	Le sous arbre situé sous ce drapeau est à dupliqué		Porte "OU exclusif »
	A l'endroit indiqué par ce second drapeau		Porte "combinaison"

FIGURE 2.9. La syntaxe des arbres de défaillance.

Voici un exemple d'analyse par Arbre de Défaillance d'un système simple constitué d'une ampoule fonctionnant sur batterie et dont la mise en action est commandée à l'aide d'un bouton poussoir.

L'arbre de défaillance correspondant à cette analyse est la suivante :

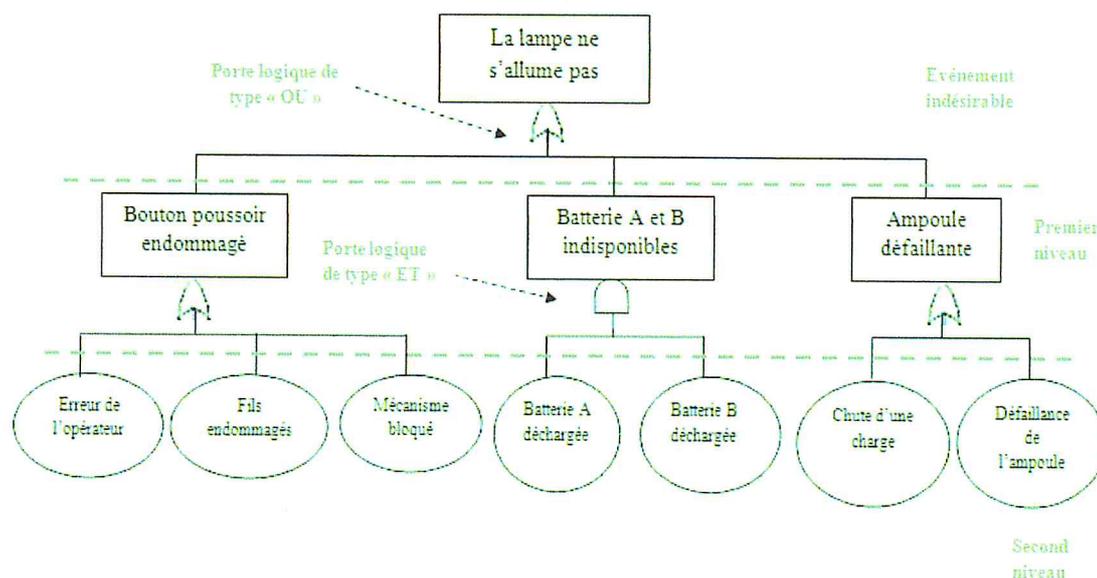


FIGURE 2.10. Arbre de défaillance d'une ampoule défaillante.

★ Événement redouté :

- L'ampoule ne s'allume pas.

★ Premier niveau :

\* Événements de niveau inférieur pouvant générer l'événement redouté :

- Défaillance au niveau du bouton poussoir;
- Défaillance des batteries A et B (redundance) ;
- Défaillance de l'ampoule.

★ Second niveau :

\* Événements pouvant être à l'origine de l'indisponibilité du bouton poussoir :

- Erreur de l'opérateur (pression trop forte sur le bouton) ;
- Dégradation des fils au niveau de l'interrupteur ;
- Blocage du mécanisme.

\* Événements pouvant être à l'origine de l'indisponibilité d'une batterie :

- Décharge complète de la batterie.

\* Événements pouvant être à l'origine de la défaillance de l'ampoule :

- Agression mécanique de l'ampoule ;

- Défaillance de l'ampoule elle-même.

**Remarque 2.7.1.** *Le calcul de la probabilité de l'événement indésirable, est possible en affectant une probabilité de réalisation à chaque événement élémentaire pour une durée de mission donnée. La méthode des arbres de défaillance ne permet pas de prendre en compte des dépendances entre événements, des politiques de réparation. Elle ne donne qu'une image statique du système.*

#### **2.8.1.4 Réseaux de Petri stochastiques**

Un réseau de Petri est un graphe orienté avec deux types de nœuds : les places (états ou conditions) représentées par des cercles et les transitions (ou événements) symbolisées par des barres. Ces nœuds sont connectés entre eux par des arcs orientés à des places aux transitions (arcs amont) et des transitions aux places (arcs aval) exclusivement. La circulation de jetons (marqueurs indivisibles), symbolisant la présence à un instant donné d'une information ou d'une initialisation particulière aux places où ils résident, permet la modélisation dynamique du comportement du système (aussi bien désiré que redouté) au sein du réseau.

Le principal avantage des réseaux de Petri est la possibilité d'analyser le comportement dynamique d'un système en présence de défaillances. Cette modélisation dynamique permet d'obtenir des mesures en termes de fiabilité.

Une présentation complète de ses méthodes se trouve dans [9,10,19,22].

#### **2.7.2 Calcul de la fiabilité de quelques systèmes [6,19,18,20]**

Dans la suite, nous allons calculer la fiabilité de quelques systèmes simples fréquemment rencontrés dans la pratique. Pour cela on considère des systèmes à  $n$  composants seront supposés indépendants. Pour le composant  $i$ , on note:

- ★  $X_i$  sa durée de bon fonctionnement.
- ★  $R_i(t)$  sa fiabilité.
- ★  $\lambda_i(t)$  son taux de défaillance.

Pour le système, on note  $X$  sa durée de bon fonctionnement,  $R(t)$  sa fiabilité et  $\lambda(t)$  son taux de défaillance.

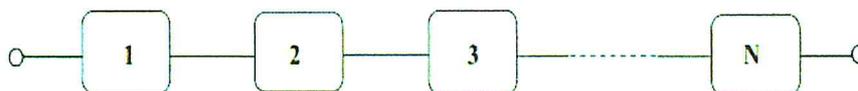


FIGURE 2.11. Diagramme de fiabilité pour un système en série.

### 2.8.2.1 Système en série

Un système est dit en série si son fonctionnement est assujéti au fonctionnement simultané de tous ses composants. Si un seul de ses composants est en panne, alors le système sera en panne. Le diagramme de fiabilité est représenté dans la figure 2.11.

Dans ce cas, la durée de vie du système est définie par:

$$X = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

La fiabilité du système est alors:

$$R(t) = 1 - P(X < t) = P(X > t) = P(X_1, X_2, \dots, X_n > t).$$

comme les  $X_i$  sont indépendantes alors:

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t).$$

on a donc:

$$R(t) = \prod_{i=1}^n \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(x) dx \right\} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(x) dx \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx \right\}.$$

et comme  $R(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(x) dx \right\}$ , on en déduit que:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t).$$

### 2.8.2.2 Système en parallèle

Le fonctionnement de ce système est assuré si au moins un de ses composants est en bon état, le système sera en panne si et seulement si tous ses composants sont en panne simultanément. Le diagramme de fiabilité est donnée dans la figure ci-dessous.

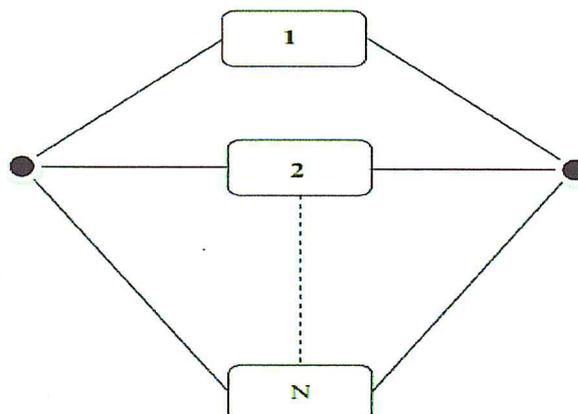


FIGURE 2.12. Le diagramme de fiabilité pour un système parallèle

On a évidemment:

$$X = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

La fiabilité de ce système est:

$$R(t) = P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t) = 1 - P(X_1 < t, X_2 < t, \dots, X_n < t).$$

comme les  $X_i$  sont indépendantes, alors

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)).$$

En écrivant:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left( 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(x) dx \right\} \right)$$

puis:

$$\lambda(t) = - \frac{R'(t)}{R(t)}$$

On obtient que le taux de défaillance du système est:

$$\lambda(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(x) dx \right\} \prod_{j \neq i} \left( 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_j(x) dx \right\} \right)}{1 - \prod_{i=1}^n \left( 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(x) dx \right\} \right)}.$$

Donc, contrairement au cas d'un système en série, le taux de défaillance d'un système parallèle ne s'exprime pas facilement en fonction du taux de défaillance de ses composants. Il n'y a pas non plus d'expression simple du *MTTF*.

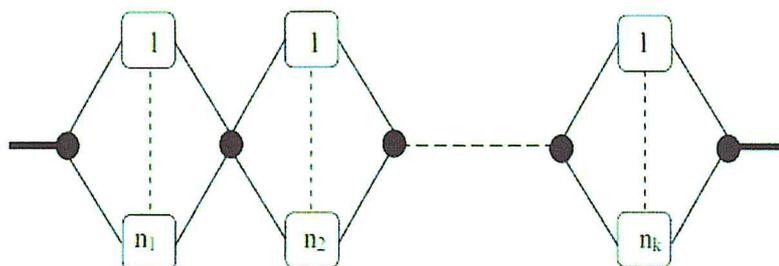


FIGURE 2.13. Le diagramme de fiabilité pour un système parallèle-série.

### 2.8.2.3 Système en parallèle-série

Il est formé de  $r$  blocs montés en série, et chaque bloc  $i$  constitue un système en parallèle de  $n_i$  composants  $j = 1, \dots, n_i$  (Figure 2.13). Ce système fonctionne si tous les blocs fonctionnent et chaque bloc fonctionne si au moins un composant fonctionne.

Si on note  $R_{ij}(t)$  la fiabilité du  $j^{\text{ème}}$  composant du  $i^{\text{ème}}$  bloc, les résultats précédents montrent que la fiabilité est :

$$R(t) = \prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}(t)) \right).$$

### 2.8.2.4 Système série-parallèle

Il est formé de  $r$  blocs montés en parallèle, et chaque bloc  $i$  constitue un système en série de  $n_i$  composants  $j = 1, \dots, n_i$  (Figure 2.14). Ce système fonctionne si au moins un bloc fonctionne et chaque bloc fonctionne si tous ses composants fonctionnent.

Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \right).$$

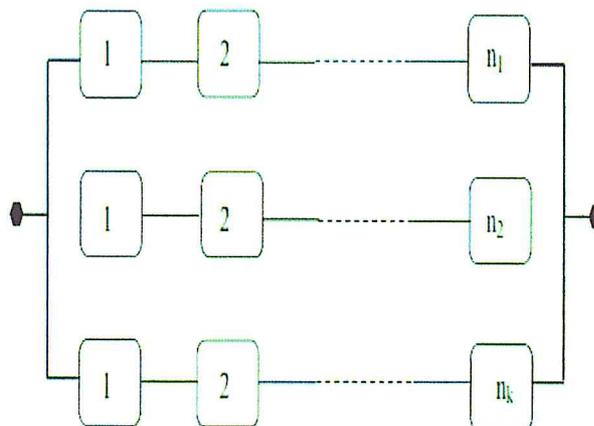


FIGURE 2.14. Le diagramme de fiabilité pour un système série-parallèle.

### 2.8.2.5 Système $k$ parmi $n$

Un système  $k$  parmi  $n$  est un système qui fonctionne si et seulement si au moins  $k$  composants fonctionnent.

Si  $k = 1$  correspond à un système parallèle.

Si  $k = n$  correspond à un système série.

La fiabilité  $R(t)$  est la probabilité que  $k$  composants au moins parmi  $n$  fonctionnent encore à l'instant  $t$ . Si on note  $N_t$  le nombre de composants qui fonctionnent à l'instant  $t$ , on a :

$$R(t) = P(N_t \geq k).$$

Dans le cas général, on ne peut rien dire de plus. Mais si on suppose que tous les composants sont identiques et indépendants, de même fiabilité  $r(t)$ , alors la variable aléatoire  $N_t$  est de loi binomiale  $B(n, R(t))$ , ce qui permet de calculer:

$$R(t) = \sum_{j=k}^n C_n^j (r(t))^j (1 - r(t))^{n-j}.$$

### 2.8.2.6 Systèmes redondants parallèle

La configuration « parallèle » est la forme la plus simple de redondance qui est l'une des méthodes principales pour augmenter la fiabilité d'un système.

Tous les éléments ont le même fonctionnement et l'un remplace l'autre en cas de panne.

L'élément N°1 est appelé élément principal et les autres éléments de réserve (ou redondants). Si l'élément principal tombe en panne, il est remplacé par l'un des éléments de réserve qui assure alors la fonction principale et ainsi de suite.

Cette redondance est de trois types :

★ Redondance active (réserve chargée) : Tous les éléments fonctionnent en même temps.

★ Redondance passive (réserve non chargée) : A chaque instant seul un élément (le principal) fonctionne, les autres (éléments de réserve ou redondants) pouvant être mis en «stand by ».

★ Redondance allégée: Les éléments de réserve fonctionnent, mais avec un régime moindre.

## 2.8 Distributions non paramétriques [21,24]

L'étude des classes de distributions non paramétriques de survie ou de vieillissement (life or ageing distributions) a été motivée initialement par des problèmes issue de la théorie de fiabilité pour pallier aux difficultés liées au choix de la loi adéquate sur la base de durée statistique.

Elles sont utilisées actuellement dans la littérature scientifique en relation avec divers problèmes de modélisation stochastique (Fiabilité, Files d'attente, Ordonnancement,...) pour une étude quantitative et qualitative.

Une des premières applications de ces classes de distributions en fiabilité par exemple, est qu'elle nous renseigne sur la notion de jeunesse ou de vieillesse du système du point de vue de la durée de vie résiduelle connaissant l'âge (propriété qualitative).

A défaut d'information suffisante, on les utilise souvent en guise de première approximation dans les modèles de fiabilité. La connaissance de la classe "d'âge" de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision.

Nous considérons ici les principales classes de distributions de survie recensées dans la littérature de fiabilité de ces dernières années.

**Définition 2.8.1.** On dit que la fonction de distribution  $F$  de moyenne  $\mu$  finie est:

★*IFR (Increasing Failure Rate)*

$$\text{si } \bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}_t(t+x)}{\bar{F}_t(x)} \text{ est non croissante en } t, \forall x, t \geq 0.$$

Si  $f$  existe alors,

$$F \text{ est IFR} \iff \lambda(t) \text{ est non décroissante en } t, \forall t \geq 0.$$

Notée parfois *IHR (Increasing Hazard Rate)*.

★*IFRA (Increasing Failure Rate in Average)*

$$\text{si } \Lambda(t) = -\frac{1}{t} \log \bar{F}(t) \text{ est non décroissante en } t, \forall t \geq 0.$$

Notée aussi *IHRA*.

★*NBU (New Better than Used)*

$$\text{si } \bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y), \forall x, y \geq 0.$$

Cette condition est équivalente à:

$$\bar{F}_t(x) \leq \bar{F}(x), \forall x, t \geq 0.$$

Dans ce cas la fiabilité d'un système usagé d'âge  $t$  est inférieure à celle d'un système neuf.

★*NBUE (New Better than Used in Expectation)*

$$\text{si } \int_t^{+\infty} \bar{F}(x) dx \leq \mu \bar{F}(t), \forall t \geq 0.$$

★*HNBUE (Harmonic New Better than Used in Expectation)*

$$\text{si } \int_t^{+\infty} \bar{F}(x) dx \leq \mu \exp\left(\frac{-t}{\mu}\right), \forall t \geq 0.$$

★*NBUC (New Better than Used in Convex Ordering)*

$$\text{si } \int_t^{+\infty} \bar{F}(t+y) dy \leq \bar{F}(t) \int_x^{+\infty} \bar{F}(y) dy, \forall x \geq 0.$$

★*NBUFR (New Better than Used in Failure Rate)*

$$\text{si } \lambda_F(0) \leq \lambda_F(x), \forall x \geq 0.$$

Où  $\lambda_F(t) = F(t)\lambda(t)$ .

★*NBUFRA* (New Better than Used in Failure Rate Average)

$$si \lambda_F(0) \leq \frac{1}{x} \int_0^x \lambda(u) du, \forall x \geq 0.$$

★*L* (Laplace)

$$si \int_0^{+\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt \leq \frac{\mu}{1+s\mu}, \forall s, t \geq 0.$$

★*NBU - t<sub>0</sub>* (New Better than Used of age t<sub>0</sub>)

$$si \bar{F}(x+t_0) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t_0), \forall x \geq 0.$$

★*IMRL* (Increasing Mean Residual Life)

$$ssi \mu(t_2) \geq \mu(t_1), \forall t_2 \geq t_1 \geq 0.$$

Où  $\mu(t_i)$  est la durée de vie résiduelle moyenne d'un élément d'âge  $t_i$ .

Autrement dit; la moyenne de la durée de vie résiduelle  $X_t$  est non décroissante en  $t, \forall t \geq 0$ .

★*IVRL* (Increasing Variance of Residual Life)

$$ssi \sigma^2(t_2) \geq \sigma^2(t_1), \forall t_2 \geq t_1 \geq 0.$$

★*SIFR* (Stochastically Increasing Failure Rate)

$$si P \left( Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^k X_i \right) \leq P \left( Y \geq \sum_{i=0}^k X_i / Y \geq \sum_{i=0}^{k-1} X_i \right), \forall k = 1, 2, \dots$$

★*SNBU* (Stochastically New Better than Used)

$$si P \left( Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^k X_i \right) \leq P(Y \geq X_{k+1}), \forall k = 1, 2, \dots$$

★*sBT* ( a survival cure  $S$  is better at age  $s$  than age  $t$  )

$$si \frac{\bar{F}(x+s)}{\bar{F}_t(x)} \leq \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}_t(x)}, \forall x \geq 0.$$

★*NBU - A* (New Better than Used at age  $A$ )

$$si \bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t), \forall x \geq 0, \forall t \in A \text{ où } A \in [0, +\infty).$$

★*ILR (Increasing Likelihood Ratio)*

$$\text{si } \frac{f(t+x)}{f(t)} \text{ est non décroissante en } t, \forall x \geq 0.$$

★*NIVRL (Net Increasing Variance of Residual Life)*

$$\text{si } \sigma^2(x) \leq \sigma^2(0), \forall x \geq 0.$$

★*SS (Star-Shaped)*

$$\text{si } \frac{f(x)}{x} \text{ est croissante pour tout } x \geq 0.$$

★*DMRLHA (Decreasing Mean Residual Life Harmonic Average)*

$$\text{si } \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{\mu F(u)} du \right]^{-1} \text{ est décroissante en } t.$$

Les définitions des classes de distributions duales sont obtenues à partir de celles données précédemment, mais en inversant les inégalités. On parlera dans ce cas, de (respectivement) *DFR, DFRA, NWE, NWUE, HNWUE, NWUC, NWUFR, NWUFRA, NWU - t<sub>0</sub>, DMRL, DVRL, SDFR, SNWU, sWt, NWU - A, DLR, NDVRL, XSS, IMRLHA*.

## CHAPITRE 3

# POLITIQUE DE RENOUVELLEMENT

### 3.1 Introduction

A un instant donné considéré comme instant initial, un système est mis en fonctionnement. Ce système est susceptible d'être en dérangement ou bien de tomber en panne. A la suite d'une panne ou d'un dérangement, le système est remis en marche après une période de réparation.

Si les durées de réparation sont négligeables devant les durées de bon fonctionnement, la succession des instants de mise en marche du matériel neuf formes un processus de renouvellement simple.

Si les durées de réparation ne sont pas négligeables, mais sont toutes indépendantes et de même loi, on observe un processus de renouvellement alterné.

Dans ce chapitre, nous allons décrire le modèle mathématique de l'élément qui fonctionne pendant une période  $(0, t)$ . Chaque panne étant suivie d'une réparation (ou d'un renouvellement) de l'élément.

### 3.2 Rappel sur les processus

**Définition 3.2.1.** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indexées par un paramètre  $t$  appartenant à un espace métrique appelé espace d'indice " $Q$ ":*

$$X(t, \omega) = \{X(t), t \in Q\}.$$

*D'un point de vue théorique, un processus stochastique est une fonction de deux arguments  $(t, \omega) : (t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$ , où  $\omega$  est un élément d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , et " $t$ " un élément de  $Q$ .*

La réalisation du processus  $X(t, \omega)$ , associée à un événement  $\omega$ , est une fonction non aléatoire du paramètre " $t$ " :  $t \rightarrow X(t, \omega)$ . Cette réalisation est appelée la trajectoire associée à l'événement  $\omega$ .

Si l'ensemble des indices  $Q$  est dénombrable (fini ou infini), nous dirons que le processus est à temps discret. Dans le cas contraire, il sera dit à temps continu.

On dit qu'on a définie la loi temporelle du processus si, pour tout entier  $n$  et pour tout instant  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , on connaît la loi conjointe de l'ensemble des variables aléatoires  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ . Cette loi conjointe peut être connue, par exemple par la donnée de sa fonction de répartition:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X_{t_1}(\omega) \leq x_1, X_{t_2}(\omega) \leq x_2, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq x_n).$$

**Définition 3.2.2.** Un processus  $X(t)$  tel que  $X_0 = 0$  est à accroissements indépendants si, pour toute suite finie  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ , les variables aléatoires:  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.

### 3.2.1 Processus de comptage

**Définition 3.2.3.** Un processus aléatoire  $\{N_t, t \geq 0\}$  à valeurs entières est un processus de comptage si:

- i)  $N_0 = 0$ ;
- ii)  $\forall s < t, N_s < N_t$ .

Les trajectoires d'un tel processus sont donc des fonctions en escalier dont les marches sont de taille aléatoire. Les processus de comptage peuvent modéliser de nombreux phénomènes. Si l'on s'intéresse au nombre d'accès de clients à un serveur durant une période  $(0, T)$ , on observe en fait un processus de comptage sur cet intervalle de temps. De même, le nombre de particules détectées par un capteur ou le nombre de buts marqués lors d'un match de football peuvent être modélisé par des processus de comptage.

### 3.2.2 Processus de Poisson

**Définition 3.2.4.** On appelle processus de poisson un processus de comptage vérifiant les trois conditions suivantes:

★ Le processus  $N(t)$  est homogène dans le temps. Ceci signifie que la probabilité d'avoir  $K$  événement dans un intervalle de longueur donnée  $\tau$  ne dépend que de  $\tau$  et non pas de la position de l'intervalle dans l'axe temporel:

$$P\{N(t + \tau) - N(t) = k\} = P_k(\tau).$$

pour tous  $t, \tau > 0$  et  $k = 0, 1, 2, \dots$

★ Le processus  $N(t)$  est à accroissement indépendants et stationnaires. Ceci signifie que, pour tout système d'intervalles disjoints, les nombres d'événement s'y produisant sont des variables aléatoires indépendantes.

★ La probabilité que deux événement ou plus se produisent dans un intervalle infiniment petit  $\Delta\tau$ , est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement.

### 3.3 Processus de renouvellement

#### 3.3.1 Processus de renouvellement simple

Considérons un élément (ou système) fonctionnant au cours d'une période indéfinie. Dès que l'élément tombe en panne, il est soit réparé, soit remplacé par un neuf. La durée de réparation est négligeable. La suite des intervalles entre deux pannes successives (deux renouvellements successifs) forme un processus de renouvellement.

Le modèle de fonctionnement de l'élément est représenté schématiquement sur la figure ci-dessous.

**Définition 3.3.1.** Soit un flux d'événements aléatoires  $\{t_n, n \geq 1\}$ , les variables  $\{X_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1\}$  forme une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Notons pour  $n \geq 2$  :  $F(t) = P(X_n \leq t)$  et pour  $n = 1$  :  $F_1(t) = P(X_1 \leq t)$ .

Le processus de comptage  $N(t)$  des événements du flux dans l'intervalle  $(0, t)$  est appelé processus ordinaire de renouvellement si  $F(t) = F_1(t)$ ; il est attardé si  $F(t) \neq F_1(t)$ .

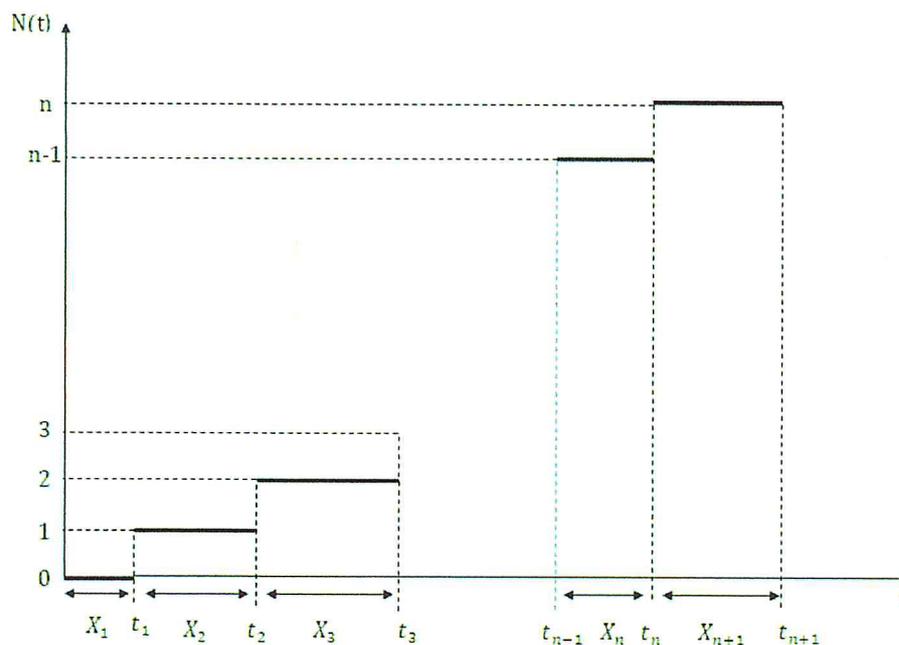


FIGURE 3.1. Processus de renouvellement

**Notation:**

$X_i$ : la durée de bon fonctionnement.

$t_i$ : la date de la  $i^{\text{ème}}$  panne.

$\mu_1 = E(X_i)$ : le temps moyen de bon fonctionnement,  $\sigma_1^2 = \text{var}(X_i)$ .

**3.3.2 Fonction de renouvellement**

A chaque instant, le processus de renouvellement  $N(t)$  admet des moments de tous ordres. En particulier, la moyenne de la v.a  $N(t)$  joue comme souvent un rôle prépondérant.

**Définition 3.3.2.** On appelle fonction de renouvellement, le nombre moyen de renouvellement (panne) effectués entre 0 et  $t$ . On la désigne par:

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{n \geq 0} nP(N(t) = n).$$

**Théorème 3.3.1.** Soit  $\{N(t), t \geq 0\}$  un processus de renouvellement, alors:

i) La distribution de probabilité de la v.a de renouvellement est de la forme:

$$P[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t).$$

ii) La fonction de renouvellement  $M(t)$  s'exprime sous la forme:

$$M(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F^{(n)}(t).$$

iii) Elle est solution de l'équation fondamentale du renouvellement:

$$M(t) = \int_0^t (1 + M(t-x)) dF(x).$$

Preuve. D'après la figure 3.1 on a:

$$[N(t) = n] \Leftrightarrow [(t_n \leq t) \cap (t_n + X_{n+1} > t)].$$

La probabilité de  $n$  renouvellement dans l'intervalle  $(0, t)$ , s'écrit:

$$P[N(t) = n] = P(t - X_{n+1} < t_n \leq t) = P(t_n < t) - P(t_n + X_{n+1} < t).$$

donc:

$$P[N(t) = n] = P(t_n < t) - P(t_{n+1} < t) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1).$$

$$P[N(t) = n] = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t\} - P\{X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} \leq t\}.$$

C'est à dire:

$$P[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t).$$

On obtient ainsi:

$$M(t) = \sum_{n \geq 0} \{F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)\} = \sum_{n \geq 0} F^{(n)}(t).$$

ou encore:

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^t \sum_{n \geq 1} F^{(n-1)}(t-x) dF(x). \\ &= \int_0^t F^{(0)}(t-x) dF(x) + \int_0^t \sum_{n \geq 2} F^{(n-1)}(t-x) dF(x). \end{aligned}$$

Après un calcul élémentaire et le fait que  $F^{(0)}(t) = 1$ , on trouve:

$$M(t) = \int_0^t [1 + M(t-x)] dF(x) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x).$$

**Remarque 3.3.1.** Si  $M$  a pour dérivée  $m$ , alors:

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = f(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx.$$

$m(t)$  représente le nombre moyen de renouvellement dans l'intervalle  $(t; t + \Delta t)$ , on l'appelle la densité de renouvellement.

Si le processus est attardé:

$$M_1(t) = \int_0^t [1 + M(t-x)] dF_1(x) = F_1(t) + \int_0^t M(t-x)dF_1(x).$$

et:

$$m_1(t) = \frac{dM(t)}{dt} = f_1(t) + \int_0^t m(t-x)f_1(x)dx.$$

qui représente le taux de renouvellement du processus ( qui n'est pas forcément une densité dans  $\mathbb{R}^+$  ).

□

### \* Résolution de l'équation de renouvellement

L'équation de renouvellement peut être résolue numériquement. La transformée de Laplace peut être utilisée lorsqu'on a besoin que des moments.

La transformée de Laplace de la fonction de renouvellement  $M$  est:

$$\widehat{M}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dM(x).$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation générale de renouvellement et en utilisant la transformée de la convolution de deux fonctions, on obtient pour le processus ordinaire:

$$\widehat{M}(s) = \widehat{F}(s) + \widehat{F}(s)\widehat{M}(s) \Rightarrow \widehat{M}(s) = \frac{\widehat{F}(s)}{1 - \widehat{F}(s)}.$$

Pour le processus attardé on a:

$$\widehat{M}_1(s) = \frac{\widehat{F}_1(s)}{1 - \widehat{F}(s)}.$$

**Théorème 3.3.2.** soit un processus de renouvellement de fonction de répartition  $F$  de moyen, alors:

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu_1} p.s.$$

Preuve. On trouve la démonstration de ce théorème dans [23].

□

### 3.3.3 Théorèmes limites de renouvellement

Les théorèmes limites de ce paragraphe permettent d'obtenir des approximations pour les caractéristiques du processus de renouvellement relative à des grandes périodes d'exploitation. ■

#### **Théorème 3.3.3.** (Théorème élémentaire de renouvellement)

Etant donné un processus de renouvellement simple d'espérance  $\mu_1$ , et la fonction de renouvellement  $M$ , nous avons pour tout  $t > 0$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu_1}.$$

*Preuve.* Pour établir ce résultat, utiliser l'identité de Wald généraliser [12]. □

**Interprétation:** Pour  $t$  suffisamment grand on a l'approximation linéaire  $M(t)$  pour le nombre moyen de renouvellement au cours de la période  $(0, t)$ . Évidemment cette approximation reste valable pour un processus de renouvellement attardé.

#### **Théorème 3.3.4.** (Théorème clé de renouvellement)

Si:

- i)  $F$  n'est pas périodique
- ii)  $Q$  une fonction non décroissante sur  $[0; +\infty[$ .
- iii)  $Q$  est intégrable au sens de Riemann.

Alors:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t Q(t-x) dM(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{+\infty} Q(x) dx.$$

#### **Théorème 3.3.5.** (Theorème de Black well)

Pour toute fonction de répartition  $F$  non périodique, on a :

$$\forall h > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} (M(t+h) - M(t)) = \frac{h}{\mu_1}.$$

**Interprétation:** Le nombre moyen de renouvellements dans un intervalle d'amplitude  $h$ , est approximativement égal à  $\frac{h}{\mu_1}$ .

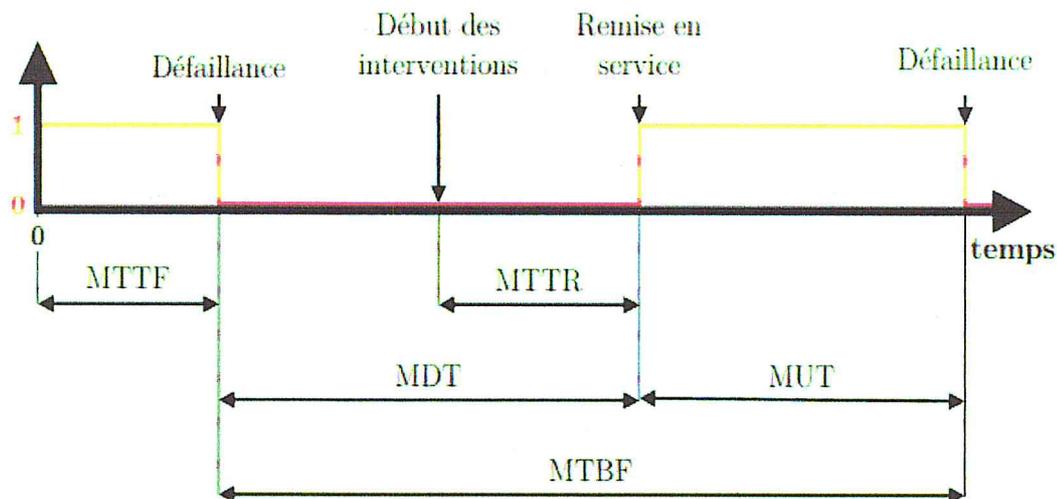


FIGURE 3.3. Les durées moyennes.

où  $M(t)$  est la probabilité pour que le système est réparable sur  $[0; t]$ .

- ★ *MUT* (Mean Up Time) est la durée moyenne de fonctionnement après réparation
- ★ *MDT* (Mean Down Time) est la durée moyenne d'indisponibilité après défaillance.
- ★ *MTBF* (Mean Time Between Failure) est la durée moyenne entre deux défaillances:

$$MTBF = MDT + MUT.$$

Ces durées sont présentés dans la figure 3.3.

Il résulte de ces définitions une grandeur qui caractérise un appareil au même titre que la fiabilité : la disponibilité.

### 3.4.2 Disponibilité

La disponibilité  $D(t)$  du matériel à l'instant  $t$  est la probabilité pour que le matériel fonctionne à cet instant.

Cette quantité est également appelée **disponibilité instantanée** à l'instant  $t$ .

On appelle **disponibilité moyenne** sur l'intervalle  $[0; t]$ , la moyenne de la disponibilité instantanée sur cet intervalle qui est égal à:

$$\frac{1}{t} \int_0^t D(s) ds.$$

Il est évident que:

$$t_{n_1} + t_{n_2} = t'_n.$$

De plus on a:

$$P(t_{n_1} \leq t) = F^{*(n)}(t).$$

$$P(t_{n_2} \leq t) = G^{*(n)}(t).$$

$$P(t'_n \leq t) = F^{*(n)}(t) * G^{*(n)}(t) = \Phi^{*(n)}(t).$$

L'événement  $B_n$  est alors de probabilité:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(t'_n \leq t < t_{n+1}) = P(t'_n \leq t < t'_n + X_{n+1}) \\ &= \int_0^t P(x < t'_n \leq x + dx) P(X_{n+1} > t - x) \\ &= \int_0^t (\Phi^{*(n)}(x + dx) - \Phi^{*(n)}(x)) P(X_{n+1} > t - x) \\ &= \int_0^t P(X_{n+1} > t - x) d\Phi^{*(n)}(x). \end{aligned}$$

Calculons  $P(B_0)$  :

$$P(B_0) = P(t'_0 \leq t \leq t_1) = P(0 \leq t < t_1) = R(t).$$

$$D(t) = P(B) = R(t) + \sum_{n \geq 1} \int_0^t R(t-x) d\Phi^{*(n)}(x)$$

$$D(t) = R(t) + \int_0^t R(t) dM_2(x), \text{ où } M_2(x) = \sum_{n \geq 1} \Phi^{*(n)}.$$

Pour montrer la seconde partie utilisons le théorème clé de renouvellement, en posant  $Q(y) = R(y)$ , on obtient le résultat cherché:

$$D(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D(t) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

□

## 3.5 La maintenance

### 3.5.1 Définition et objectif de la maintenance [2,5,8]

Selon l'AFNOR par la norme NF X 60-010, la maintenance se définit comme étant : ensemble des actions permettant de maintenir ou de rétablir un bien dans un état spécifié ou en mesure d'assurer un service déterminé. Bien maintenir, c'est assurer l'ensemble de ces opérations au coût optimal.

La définition de la maintenance fait donc apparaître 4 notions :

- ★ Maintenir qui suppose un suivi et une surveillance.
- ★ Rétablir qui sous-entend l'idée d'une correction de défaut.
- ★ État spécifié et service déterminé qui précise le niveau de compétences et les objectifs attendus de la maintenance.
- ★ Coût optimal qui conditionne l'ensemble des opérations dans un souci d'efficacité économique.

Un équipement est exprimé ici par le terme **bien**, qui est un terme plus général correspondant à: " Tout élément, composant , mécanisme, sous système, unité fonctionnelle, équipement ou système qui peut être considéré individuellement".

Le rôle de la maintenance est donc de garantir la plus grande disponibilité des équipements, au meilleur rendement, tout en respectant le budget alloué.

Les objectifs de la maintenance se décompse en 4 point essentielle:

- ★ Assurer le fonctionnement du système.
- ★ Maintenir la valeur économique du bien.
- ★ Assurer la sécurité des biens et des hommes.
- ★ Assurer le bien-être de l'humanité.

### 3.5.2 Types de maintenance[5,16]

Les stratégies de maintenance peuvent être répertoriées en deux grandes catégories : la maintenance corrective et la maintenance préventive.

La maintenance corrective est la maintenance qui intervient suite à la défaillance du système alors que la maintenance préventive est réalisée lorsque le système est encore en

fonctionnement. Le recours à l'une ou à l'autre de ces stratégies diffère suivant l'élément considéré mais aussi le type de structure, la politique d'exploitation et de suivi, les coûts, la disponibilité de l'information, etc.

Le diagramme suivant montre les différents types de maintenances.

**Maintenance corrective** Maintenance effectuée après détection d'une panne et destinée à remettre une entité dans un état lui permettant d'accomplir une fonction requise. La maintenance corrective peut être:

**Maintenance curative:** La maintenance corrective curative regroupe les activités de maintenance corrective ayant pour objet de rétablir un bien dans un état spécifié ou de lui permettre d'accomplir une fonction requise.

Ces activités du type réparation, modification ou amélioration doivent présenter un caractère permanent.

**Maintenance palliative :** La maintenance corrective palliative regroupe les activités de maintenance corrective destinées à permettre à un bien d'accomplir provisoirement tout ou partie d'une fonction requise.

Ces activités du type dépannage qui présentent un caractère provisoire devront être suivies d'activités curatives.

Cette maintenance est utilisée lorsque l'indisponibilité du système n'a pas de conséquences majeures ou quand les contraintes de sécurité sont faibles.

**Maintenance préventive** Maintenance effectuée selon des critères prédéterminés, dans l'intention de réduire la probabilité de panne d'une entité ou la dégradation d'un service rendu.

C'est une intervention de maintenance prévue, préparée et programmée avant la date probable d'apparition de la défaillance. Des visites préventives et périodiques permettent de surveiller l'état du matériel en service. Parmi ses objectifs:

- Augmenter la durée de vie des matériels.
- Diminuer la probabilité des défaillances en service.
- Diminuer le temps d'arrêt en cas de révision ou de panne.
- Eviter les consommations anormales d'énergie, de lubrifiant.

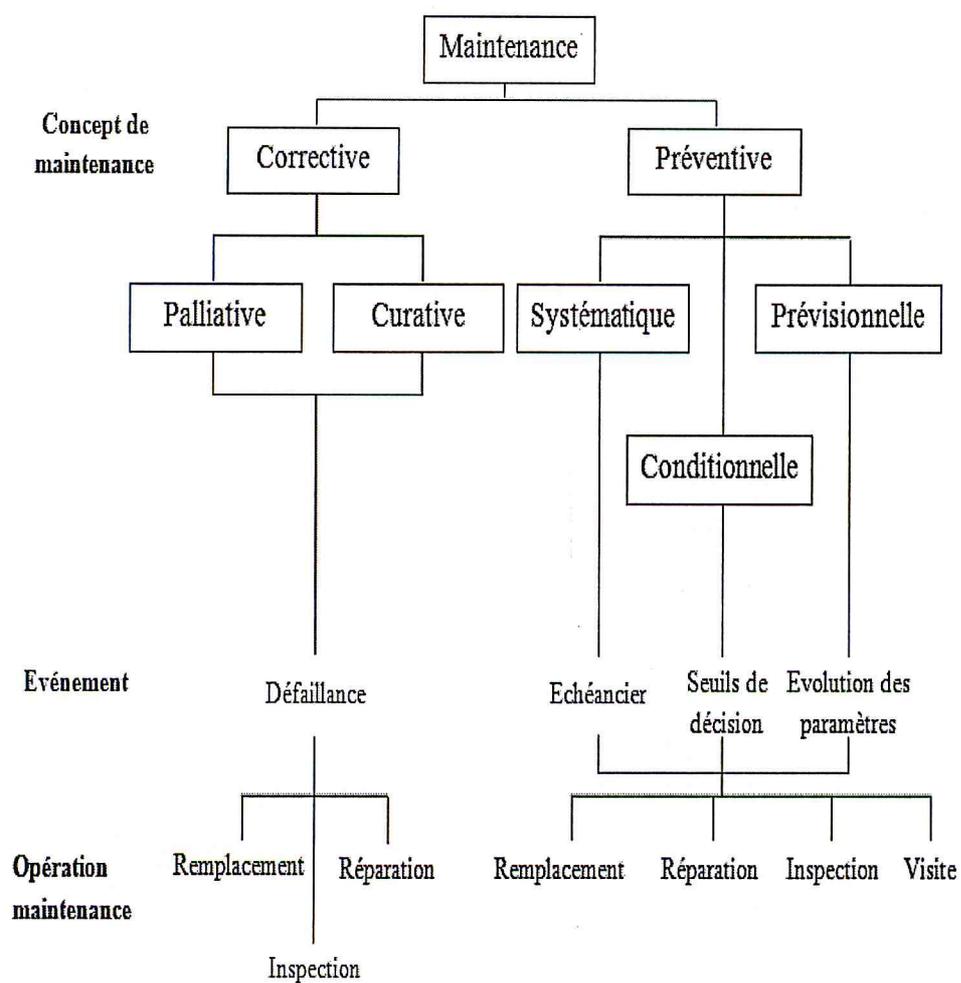


FIGURE 3.4. Les types de maintenance

- Améliorer les conditions de travail du personnel de production.
- Diminuer le budget de maintenance.
- Supprimer les causes d'accidents graves.

La maintenance préventive se subdivise à son tour en:

#### **Maintenance systématique**

Maintenance préventive exécutée à des intervalles de temps préétablis ou selon un nombre défini d'unités d'usage mais sans contrôle préalable de l'état du bien.

Cette méthode de maintenance s'applique à des équipements :

- soumis à une réglementation sécuritaire : ponts roulants, matériels d'incendie, installations sous pression. . .
- présentant des coûts de défaillance très élevés : système avec processus de production continu, lignes de fabrication automatisées. . .
- pour lesquels une défaillance peut entraîner des accidents graves : matériels de transport en commun des personnes, appareils et constituants utilisés dans l'énergie nucléaire. . .

**Remarque 3.5.1.** *Cette méthode nécessite de connaître le comportement du matériel, les usures, les modes de dégradations et le temps moyen de bon fonctionnement entre deux avaries.*

#### **Maintenance conditionnelle**

Maintenance préventive basée sur une surveillance du fonctionnement du bien et/ou des paramètres significatifs de ce fonctionnement intégrant les actions qui en découlent. La surveillance du fonctionnement et des paramètres peut être exécutée selon un calendrier, ou à la demande, ou de façon continue. La planification des interventions repose sur l'existence et la détermination de seuils critiques pour ces paramètres de dégradation. On parle alors de seuils de décision.

#### **Maintenance prévisionnelle**

Maintenance conditionnelle exécutée en suivant les prévisions extrapolées de l'analyse et de l'évaluation de paramètres significatifs de la dégradation du bien.

La différence entre la maintenance prévisionnelle et la maintenance conditionnelle est qu'on ne fixe pas de seuils pour les indicateurs mais la décision est basée sur l'analyse de

l'évolution de ces indicateurs pendant tout le processus de fonctionnement du système.

### **3.5.3 Comment choisir le type de maintenance**

Le choix du type de maintenance est selon les critères suivants :

- ★ L'âge du matériel.
- ★ L'indépendance du matériel.
- ★ La complexité du matériel.
- ★ Le coût du matériel.
- ★ L'origine du matériel.
- ★ La perte ou non de produit en cas de défaillance.
- ★ Les conditions de travail.
- ★ Les délais d'exécution.

## CHAPITRE 4

### LES APPLICATIONS DE LA FIABILITÉ

#### 4.1 Introduction

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreux domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, technique et industriel. . . Elle est étroitement liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité ou de performance. L'étude de fiabilité est nécessaire aux différents niveaux de la vie du système ( ou équipement) : au niveau de la conception ou de la fabrication, afin de pouvoir élever le degré de la fiabilité selon les normes spécifiées ; au niveau de l'exploitation afin d'estimer les incidences du support logistique sur ses conditions d'utilisation ; au niveaux des services de maintenance, dans le but de prévoir les dates de prophylaxie et d'arrêt préventifs ; au niveau des gestionnaires des pièces de rechanges, afin d'estimer le volume des stocks de sécurité et assurer par là même la disponibilité de la pièce, en évitant les stock mort...

Dans ce chapitre, nous allons présenter une synthèse de travaux récents, qui consiste à donner une modélisation mathématique au sens de la fiabilité pour résoudre des problèmes appliqués aux différents discipline: mécanique, électronique, mécatronique et file d'attente.

#### 4.2 Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables.

##### "Application à un système photovoltaïque"[17]

Aujourd'hui la technologie solaire thermique semble avoir atteint un palier de performance tandis que pour le solaire photovoltaïque, l'optimum ne sera atteint qu'en 2020. De nombreuses recherches sont actuellement en cours à travers le monde pour améliorer le rendement des modules photovoltaïques.

Les fabricants des modules annoncent une durée de vie de 30 ans sur leurs produits et les garantissent 5 ans. Ils offrent aussi une garantie de puissance de 90% au bout de 10 ans, et de 80% au bout de 25 ans.

Les questions que l'on doit se poser sont comment s'assurer de la durée de vie d'un système ou comment pouvons-nous l'évaluer?

Cette thèse [17] présente les différents travaux effectués au sein de laboratoire LASQUO qui ont consisté à développer une méthodologie permettant d'estimer la fiabilité, la disponibilité et la durabilité d'un système photovoltaïque.

Cette recherche s'articule autour de plusieurs axes principaux:

- \* Analyse fonctionnelle et dysfonctionnelle du système.
- \* Etude de la fiabilité à l'échelle du module.
- \* Etude de la fiabilité et la disponibilité à l'échelle du système.

L'étude a été commencée par une analyse fonctionnelle qui permet de décrire synthétiquement les modes de fonctionnement d'un système et de connaître les fonctions à garantie. Pour cette analyse [18] a utilisé plusieurs méthodes comme la bête en corne, diagramme de pieuvre, bloc diagramme fonctionnel...

Après avoir pris connaissance du fonctionnement du système, il est nécessaire d'effectuer une analyse dysfonctionnelle pour connaître les modes de défaillance et de dégradation des différents composants du système. Deux méthodes sont utilisées: AMDEC et l'arbre de défaillance.

Grace à ces deux méthodes l'auteur a déterminé le nombre et la nature des modes de défaillances qui sont la corrosion et la décoloration de l'encapsulant.

Dans un premier temps, l'étude de la fiabilité se place à l'échelle du module en concentrant sur la dégradation de la puissance maximale.

Grace à l'analyse dysfonctionnelle qui a été faite, la fiabilité d'un module est estimé par:

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t).$$

où  $i$ : la  $i^{\text{ème}}$  mode de défaillance parmi les  $m$  modes définie par l' AMDEC.

Comme les données de fiabilité pour chacun des modes de défaillance sont inconnues, l'auteur a proposé une méthodologie permettant d'estimer la fiabilité. Cette méthodologie

consiste à réaliser des essais accélérés sous conditions sévèrisées (essais de chaleur humide et l'essai à l'exposition UV pour reproduire respectivement la corrosion et la décoloration) afin de déterminer les paramètres de la loi de dégradation.

Ensuite, pour obtenir une distribution de durée de vie pour chaque condition sévèrisée, [17] a proposé d'utiliser le processus de Weiner. Après une simulation d'un nombre important d'évolution de dégradation et grâce aux processus de Weiner, il résulte que la distribution des temps de pseudo-défaillance suit une loi de Weibull à deux paramètres.

Après la détermination de la durée de vie moyenne, il est assez simple de déterminer les paramètres de la loi de d'accélération.

Pour la corrosion, il a utilisé le modèle de Peck (humidité et température) tandis que pour la décoloration de l'encapsulant, le modèle d'Arrhenius a été utilisé (température et exposition UV).

Enfin, et pour démontrer la pertinence de son approche basée sur des essais de dégradation accélérés, l'auteur a considéré une campagne d'essai simulées dans des conditions réelles stochastiques et estimer la fiabilité à l'aide de l'outil PVMODREL développé dans la thèse. Cet outil permet tout d'abord de simuler les conditions atmosphériques. Les lois intégrées dans cet outil ont été définies à partir de mesures de données météorologiques réelles. Ensuite, la fiabilité est construite à partir de ces conditions environnementales stochastiques et des paramètres du modèle d'accélération.

L'auteur a proposé 3 essais:

Essai1: avec une température 85° et humidité relative 85%.

Essai2: avec une température 105° et humidité relative 85%.

Essais3: avec une température 85° et humidité relative 95%.

Les simulations par le processus de Weiner permettent d'obtenir les paramètres de la loi de Weibull qui sont :

Essais 1:  $\beta = 3,098$  et  $\eta = 3186,9$  h donc  $\tau = 2849,98$  h.

Essai 2:  $\beta = 3,088$  et  $\eta = 457,1$  h donc  $\tau = 408,69$  h.

Essai 3:  $\beta = 2,988$  et  $\eta = 2185,3$  h donc  $\tau = 1942,19$  h.

Enfin, la fiabilité est estimée, elle est exprimée à partir d'une loi de Weibull dont les paramètres sont:  $\beta = 3$  et  $\eta = 4304954,7h \pm 70182h$ . La durée de vie moyenne estimée

est donc de  $438.54ans \pm 8.01ans$ .

La fiabilité à 20 ans est donc de  $R(20 \text{ ans}) = 99,993260\%$  et la fiabilité à 25 ans est de  $R(25 \text{ ans}) = 99.986836\%$ .

Dans un second temps, l'étude se place à l'échelle du système photovoltaïque. Une méthodologie a été proposée basée sur la simulation du fonctionnement et du dysfonctionnement par le réseau de Petri.

Le but est de connaître l'effet de défaillance et de dégradation de chaque composant sur le système.

La recherche a été réalisée à l'aide de plusieurs réseaux de Petri stochastiques imbriqués sur plusieurs niveaux afin de se situer, pour chaque composant, aux échelles pour lesquelles les modes de défaillance pouvaient être saisis et leurs fiabilités peuvent être formulées.

La probabilité de défaillance de chaque composant est donnée comme suit:

★ Module photovoltaïque:

L'étude dysfonctionnelle du système montre que la défaillance d'un module est due à 5 causes, donc la probabilité de défaillance peut être déterminé par:

$$F(t) = 1 - \prod_{h=1}^5 F_h(t).$$

où  $F_h$  correspond à la probabilité d'apparition du mode de défaillance  $h$  au temps  $t$ .

Dans le cas où les probabilités d'apparition des 5 modes suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_h$ , la probabilité de défaillance d'un module est simple à obtenir et elle est donnée par:

$$F(t) = 1 - e^{-(\sum_{h=1}^5 \lambda_h)t}.$$

A l'aide du réseau de petri toujours, la probabilité de réparation est déterminée par une loi exponentielle de paramètre  $\mu_{module}$ .

★ Série de module:

Les modules étant branchés en série, la puissance de chaque module s'ajoute pour déterminer la puissance de la série. Et pour éviter la défaillance de toute la série lorsqu'un module est défaillant, l'auteur a proposé de connecter à le système une diode bypasse.

★ Champ photovoltaïque:

La probabilité de défaillance d'un champ composé de  $n$  séries de  $m$  modules (série-parallèle) est donnée par:

$$F(t) = \prod_{i=1}^n \left( 1 - \prod_{j=1}^m (1 - F_{ij}(t)) \right).$$

Comme les séries sont branchées en parallèle, la puissance à l'entrée de l'onduleur sera proportionnelle à la puissance de la série la plus faible, donc lorsqu'une série est défaillante, la puissance de cette série est nulle.

★ Les câbles:

Les câbles sont considérés comme des composants secondaires dans un système photovoltaïque mais ils sont évidemment essentiels pour le transfert de l'électricité.

La fiabilité des composants électriques ou électroniques tels que les câbles peut être estimée en utilisant les bases de données de guides connus tels que le manuel militaire MIL-HDBK-217 ou le guide FIDES. La probabilité de défaillance et de réparation du câble est estimée à partir d'une loi exponentielle de paramètres respectivement  $\lambda_{câble}$  et  $\mu_{câble}$  d'après le guide FIDES.

★ Onduleur:

Le temps moyen avant défaillance (MTTF) des onduleurs photovoltaïques est très faible (8 à 12 ans). D'après le guide FIDES la probabilité de défaillance et de réparation suivent une loi exponentielle.

Pour la réparation, elle est déterminée par une loi exponentielle de paramètre  $\mu_{onduleur}$ .

A la fin de cette étude et pour illustrer le travail, l'auteur a simulé certains paramètres de la sûreté de fonctionnement d'un système photovoltaïque à l'aide du logiciel MOCA-RP qui permet de modéliser les réseaux de petri pour l'estimation de la durée de vie et de la disponibilité du système.

Les simulations qui ont été faites ont pour objectif d'étudier la performance d'un système photovoltaïque sur une période de 50 ans, en prend en considération les coûts.

Pour les simulations, 3 configurations sont proposées:

- 1 cas: 1 série de 18 modules.
- 2 cas: 2 séries de 9 modules.
- 3 cas: 3 séries de 6 modules.

D'abord, l'auteur a traité un exemple d'évolution de la puissance d'un module et d'un système photovoltaïque dans la configuration 3.

Les résultats de simulation montrent que pendant les 50 années d'opération, le module est réparé deux fois. Les temps de réparation après les défaillances du module sont assez longs car le système continue à produire de l'électricité grâce aux autres modules et il n'est pas considéré comme défaillant.

Dans ce cas, la maintenance n'est pas réalisée juste après la défaillance d'un module mais lorsque le système complet est défaillant.

Pour estimer la durabilité, il est nécessaire de déterminer les coûts de l'installation. Dans cet exemple, la durabilité du système photovoltaïque est de 39,5 ans et le temps de retour sur investissement est de 18,2 ans.

Ensuite, il a étudié l'influence des différents types de configuration présentés précédemment sur la performance du système photovoltaïque.

Les résultats de simulation montrent que la configuration des modules a un faible impact sur la performance (MTTF, MTBF et la disponibilité) du système même si la configuration 1 a, en général, une meilleure performance que les autres configurations.

Le système série présente aussi la meilleure durabilité parmi les différentes configurations étudiées.

La différence de durabilité entre les configurations 1 et 3 est plus de 18 ans. L'analyse montre que la configuration 3 produit un courant plus élevé (en moyenne) que la configuration 1, ce qui affecte directement le choix de la section du câble et de type d'onduleur.

Ainsi, l'auteur a étudié l'influence du nombre de réparateurs sur la performance du système afin d'optimiser la maintenance et diminuer le temps de réparation. L'auteur a considéré la configuration 3 et la performance a été étudiée en fonction du nombre de réparateurs (1, 2 et 3 réparateurs).

La disponibilité asymptotique d'un système photovoltaïque est élevée, supérieure à 98,9%, ce qui correspond à une durée de non fonctionnement de quatre jours par an pour les différents cas étudiés. Une grande disparité de la disponibilité est toutefois observée avec un écart de 0,37% entre les cas avec un réparateur et deux réparateurs. L'ajout d'un troisième réparateur ne fait que très peu améliorer la disponibilité du système. Pour les

autres paramètres de performance (MTTF, MTBF) ainsi que la durabilité, les données sont sensiblement identiques suivant le nombre de réparateurs. Pour conclure, le fait d'avoir deux réparateurs permet d'améliorer sensiblement la disponibilité du module sans pour autant améliorer la durabilité.

Ce travail permet finalement de donner les bases méthodologiques et les outils de simulations pour qualifier et garantir la durée de vie de systèmes photovoltaïques.

### 4.3 Estimation de la fiabilité en par les essais accélérés [25]

L'évaluation et l'optimisation de la fiabilité des structures mécaniques sont indispensables pour concevoir des systèmes de plus en plus performants. Il n'y pas de méthode unique ou normalisée pour calculer la fiabilité des systèmes mécaniques, comme c'est le cas pour des systèmes électroniques. Le choix de la méthode à appliquer se fait en fonction des objectifs fixés et des outils disponibles.

Parmi les méthodes les plus utilisées, on trouve les essais aggravés, les essais bayésiens, les essais accélérés...

La thèse [25] porte essentiellement sur l'estimation de la fiabilité des systèmes mécaniques par les essais accélérés, plus particulièrement l'auteur a étudié les modèles standard de vie accélérés notés SVA appliqués aux composants mécaniques soumis aux dommages par fatigue.

Ces modèles permettent de déterminer de quelle façon la fonction de fiabilité (ou une autre caractéristique) change quand le stress vari en utilisant une fonction de transfert.

D'abord, [25] a écrit le modèle de SVA pour des systèmes hautement fiable.

Pour cela, il est nécessaire de procéder à des Essais Accélérés au cours desquels les systèmes subissent des stress supérieurs à ceux qu'ils supportent dans les conditions normales d'utilisation.

Le modèle Standard de Vie Accélérée est défini par :

$$R_s(\cdot) = R_{s0} \left( \int_0^t r(s(\tau)) d\tau \right).$$

$R_{s0}$  la fiabilité sous le stress usuel

s le stress.

La fonction  $r(\cdot)$  représente physiquement le taux d'accroissement de la vitesse de dégradation.

Cette équation est valable lorsque le stress dépend du temps, et lorsque le stress est constant, le modèle est:

$$R_s(t) = R_{s0} (r(s)t) \dots\dots(1)$$

Donc, Si la fonction  $r$  est complètement inconnue alors la fonction de fiabilité  $R_s(t)$  ne peut être déterminée. Donc il est nécessaire de déterminer  $r$ :

$$r(s) = e^{\beta_0 + \beta_1 z(s)} \dots\dots(2)$$

où  $z(s)$  est une fonction connue,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des paramètres inconnus à estimer.

Ainsi (1) et (2) peuvent s'écrire:

$$R_s(\cdot) = R_{s0} \left( \int_0^t e^{\beta^t z(\tau)} d\tau \right) \dots\dots(3)$$

$$R_s(t) = R_{s0} e^{\beta^t z t} \dots\dots(4)$$

$\beta^t$  est le vecteur de paramètres.

Ensuite, les modèles SVA sont appliqués aux composants mécaniques.

En mécanique, il est courant de définir la loi de fiabilité par une distribution de type Weibull, Log-normale ou Birnbaum-Saunders qui caractérisent correctement les durées de vie des systèmes soumis à des dégradations mécaniques.

Dans la thèse la distribution paramétrique des durées de vie est supposée lognormale.

La fonction de fiabilité  $R_{s0}(n)$ , avec  $n$  représentant le nombre de cycles, est définie par une loi log-normale de paramètres  $\eta, v$  :

$$R_{s0}(n) = 1 - \phi \left[ \ln \left( \left( \frac{n}{\eta} \right)^v \right) \right].$$

avec:

$\phi$ : la fonction de répartition de la loi normale.

Pour un stress constant  $s$ , la loi de fiabilité est une loi lognormale de paramètres  $\gamma^t z, \sigma$  sous le stress  $s$ , définie par la relation (4),  $s'$  écrit :

$$R_s(n) = 1 - \phi \left[ \ln \left( \left( \frac{r(s)n}{\eta} \right)^v \right) \right] = 1 - \phi \left[ \ln \left( \left( \frac{e^{\beta^t z} n}{\eta} \right)^v \right) \right] = 1 - \phi \left[ \frac{\ln(t) - \gamma^t z}{\sigma} \right].$$

avec:  $\gamma^t = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $\gamma_0 = \ln \eta - \beta_0$ ,  $\gamma_i = -\beta_i$  et  $\sigma = 1/v$ .

Ainsi, Pour déterminer les paramètres de la fonction de survie, l'auteur a choisi d'appliquer le modèle SVA selon deux plans d'expérience avec des méthodes d'estimation paramétriques, semi-paramétriques et non-paramétriques. Le premier plan consiste à déterminer les paramètres de la fonction  $r$  à partir des résultats d'essais effectués uniquement dans des conditions sévères et de déduire par régression la fonction de survie en conditions nominales.

Pour ce plan, deux types d'estimation sont utilisés:

★ Estimation paramétrique qui consiste d'un modèle SVA consiste à prendre une loi statistique particulière pour estimer la fiabilité. L'estimation des paramètres de la fonction de survie se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.

★ Estimation semi paramétrique qui consiste à ne faire aucune hypothèse sur la loi statistique de fiabilité et à supposer que la fonction  $r(\cdot)$  appartienne à une classe de fonction exponentielle de la forme:

$$r(z) = e^{\beta^t z}.$$

L'estimateur de Kaplan-Meier permet d'estimer la fonction de survie

★ Estimation semi-paramétrique à hasards proportionnelles (modèle de Cox): la ressource utilisée dans ce modèle est le taux de défaillance.

De plus, ce type de plan d'essai par régression nécessite une bonne connaissance de la fonction  $r(\cdot)$  ce qui n'est pas toujours évident surtout dans les cas où de nombreuses variables sont utilisées pour sévérer les essais. Par conséquent, cela impose de réaliser des essais avec différentes combinaisons de niveaux de stress afin d'estimer les paramètres de  $r(\cdot)$ . De plus, les niveaux de stress retenus pour réaliser les essais sont relativement élevés par rapport aux conditions nominales et les différentes estimations sont entachées d'incertitude. Cela provoque par régression une plus grande incertitude sur l'estimation de la fonction de survie dans les conditions nominales

Le second plan est basé sur l'idée que pour des systèmes hautement fiables, les défaillances nécessaires pour l'estimation de la fiabilité dans les conditions normales sont obtenues par un essai avec deux groupes de composants: le premier groupe est testé sous

un stress accéléré et le deuxième sous un stress échelonné : sous un stress accéléré jusqu'à un certain moment et sous le stress nominal après ce moment.

Pour illustrer ces plans, L'auteur a traité différents exemples. Les résultats de simulation montrent que le premier plan d'essai par régression nécessite une bonne paramétrisation de la loi d'accélération, ce qui n'est pas toujours évident surtout dans les cas où de nombreuses variables sont utilisées pour sévérer les essais. Par conséquent, cela impose de réaliser des essais avec différentes combinaisons de niveaux de stress, qu'il faut bien choisir, afin d'estimer les paramètres de la fonction  $r$ . En effet, choisir correctement les niveaux de stress de sévération représente une difficulté pratique pour le plan par régression. En plus, l'application des stress très élevés par rapport aux conditions nominales provoque une plus grande incertitude sur les résultats et risque de modifier le mode de défaillance.

Quant au deuxième plan avec un endommagement préalable, il offre une réelle alternative en proposant une faible paramétrisation de la fonction  $r$  qui peut être source d'erreur. L'inconvénient majeur de ce plan, c'est qu'il demande un temps d'essai un peu long du fait qu'on est obligé de revenir en condition normale après un certain temps.

A la fin du travail, [25] traite un exemple concret. Il a étudié la tenue à la déformation d'un trombone papier. L'objectif est de définir la fiabilité, en fonction du nombre de cycle à rupture (phénomène de fatigue oligocyclique), du trombone sous déformation angulaire. Les conditions nominales sont supposées être une déformation angulaire de  $45^\circ$ .

Cette expérience se fait selon les deux types de plan d'essai.

Les résultats de cette expérience montrent l'adéquation des modèles SVA en mécanique.

Enfin, cette étude a permis d'estimer la fonction de survie dans les conditions normales d'utilisation et pour la première fois de constater l'applicabilité des modèles SVA aux systèmes soumis à des dégradations mécaniques en menant des analyses théoriques, par simulation et expérimentale. C'est la première application avec des données réelles des plans d'expériences.

#### 4.4 Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques. "Application sur système embarqué".[19]

La mécatronique est à l'influence de plusieurs technologies, la mécanique, l'électronique et l'informatique. L'utilisation simultanée de plusieurs technologies augmente le risque de dysfonctionnement des systèmes mécatroniques. Afin d'obtenir des systèmes mécatroniques dans lesquels les utilisateurs placent une grande confiance, des études de fiabilité, doivent être menées tout au long du cycle de développement ou de vie du système : de la spécification jusqu'à la validation et à la mise en exploitation.

L'objectif de la thèse [19] est de développer une méthodologie globale permettant d'évaluer et d'estimer la fiabilité prévisionnelle, expérimentale et opérationnelle des systèmes mécatroniques.

La première étape de cette méthodologie proposée, est l'estimation de la fiabilité prévisionnelle par la méthode des réseaux de Petri stochastiques déterministes (RdPSD) , L'estimation de cette dernière nécessite la connaissance de l'architecture du système et de tous les mécanismes de défaillance des composants pour chaque technologie intégrée dans le système et des lois de fiabilité associées.

L'architecture du système, définie lors de l'analyse fonctionnelle et de la conception (choix de composants pour chaque fonction) est complétée par une étude du comportement dysfonctionnel. Cette étude s'appuie sur plusieurs méthodes, telles que, l'AMDE et l'arbre de défaillance. Suite à cette étude, une liste des défaillances est établie ; ces défaillances sont classées par rapport au type de défaillance, au type de composant et aux modes de défaillance. Pour chaque composant du système, une recherche de données de fiabilité est effectuée, soit à l'aide de bases de données existantes, soit selon l'avis des experts sur les composants pour lesquels on n'a aucune information précise.

Ces données sont injectées dans RdPSD pour obtenir le modèle stochastique.

Ainsi, et par la simulation de n système mécatronique, les instants de défaillance sont déterminées, ce qui permet d'estimer la fiabilité de chaque composant, L'estimation des paramètres des lois s'est effectuées par la méthode du maximum de vraisemblance (MV).

Une fois que les lois de fiabilité sont connues, il est possible d'estimer la fiabilité du sys-

tème en considérant sa structure. Le diagramme série correspond au cas le plus pessimiste du calcul de la fiabilité.

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^c \prod_{j=1}^{k_i} R_{ij}(t).$$

où  $c$  : le nombre des composants ;

$k_i$  : le nombre des modes de défaillance pour le composant  $i$ .

Ensuite, et pour quantifier l'impact des incertitudes affectant les variables d'entrées (les fiabilités des composants ) sur le résultat final (la fiabilité du système), une étude de sensibilité a été faite.

Cette étude peut être considérée comme un outil d'aide à la décision sur le choix des composants et sur l'architecture du système.

la sensibilité de  $R_{sys}$  par rapport à  $R_{ij}$  est donnée par:

$$mes(R_{ij}) = \frac{1}{R_{sys}} \frac{\partial R_{sys}}{\partial R_{ij}}.$$

La mesure de la sensibilité associée à un composant est dépendante du temps. Ainsi, elle permet au fiabiliste d'observer à chaque instant l'impact de la fiabilité des composants sur la fiabilité du système. Plus la sensibilité est grande et plus l'impact est important, plus la fiabilité du composant est faible.

Après l'estimation de la fiabilité prévisionnelle, la seconde étape de la méthodologie proposée par [19] est l'estimation de la fiabilité expérimentale et opérationnelle, Pour cela, l'auteur a proposé d'utiliser la méthode Bayesian Restoration Maximization ( BRM) pour réaliser les estimations dans le cas d'utilisation les résultats d'essais ou des données d'exploitation (REX).

Le point essentiel de la méthode est la construction de la distribution a priori. Plus cette distribution est informative et plus les estimations seront précises.

Grace à l'analyse de la fiabilité prévisionnelle qui a été faite, les distributions de probabilité des composants du système sont obtenues. Ces distributions sont les a priori pour l'estimation de la fiabilité expérimentale. La méthode BRM est appliquée sur les données issues des essais sur les prototypes du système. Le résultat est la distribution a posteriori de tous les paramètres des lois de fiabilité des composants du système.

Pour la fiabilité opérationnelle, l'a priori est constitué par les résultats obtenus lors de l'estimation de la fiabilité expérimentale et la vraisemblance sur les données des retours des expériences.

La fiabilité expérimentale et opérationnelle du système a calculées de la même manière que la fiabilité prévisionnelle.

Finalement, [19] a proposé d'appliqué cette méthodologie sur les systèmes mécatroniques de l'ABS (Anti-Lock Brake System ).

L'ABS est un système qui empêche le blocage d'une ou de plusieurs roues, la perte de la stabilité ou de la maniabilité du véhicule. L'ABS se substitue efficacement au conducteur.

D'abord, Pour estimer la fiabilité prévisionnelle de l'ABS, une liste de défaillance a été identifier (rupture mécanique, problème de fluidité,...), en utilisant les méthodes cité précédemment.

La modélisation fonctionnelle, dysfonctionnelle et stochastique du système ABS est réalisée à travers un RdPSD. Pour les distributions dysfonctionnelles associées aux composants, la distribution Weibull est choisie pour les composants mécaniques (Disques de frein), la distribution exponentielle pour les composants électroniques (Capteur) et le modèle exponentiel de temps d'exécution de Musa pour les composants logiciels.

La fiabilité prévisionnelle pour chaque composant du système ABS est évaluée par la simulation du modèle RdPSD. La simulation a été faite sur un nombre important du système (1000 systèmes) et pour un temps de censure  $\tau_c$  suffisamment grand pour le système soit défaillant.

A l'aide de la méthode MV, les paramètres de distribution de la fiabilité des composants par rapport au temps sont obtenus. Et pour vérifier l'efficacité de la méthode, l'auteur a calculé la valeur théorique de référence et les comparés avec les valeurs estimées. Une faible différence est observée entre ces valeurs.

La fiabilité prévisionnelle pour le système de l'ABS est déterminée à partir du produit entre les fiabilités des composants pour un niveau de confiance de 90%. Par exemple, pour  $t = 918$  heures, la fiabilité prévisionnelle est  $R(t) \approx 0,5$  et l'intervalle de confiance est  $[0,4452; 0,5373]$ .(Figure 4.1).

Et pour compléter l'analyse, L'auteur a procédé à l'analyse de la sensibilité afin

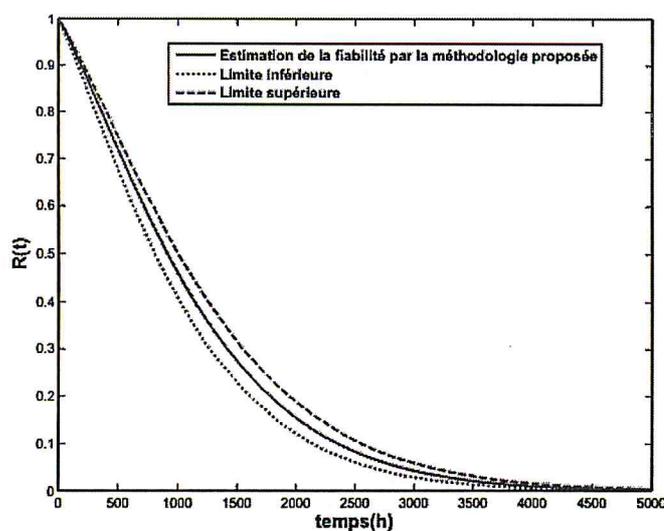


FIGURE 4.1. Fiabilité prévisionnelle pour le système ABS

d'observer la contribution de chaque composant à la fiabilité globale du système. Dans cet exemple, l'ensemble des composants contribue de la même manière à la défaillance du système. Une analyse plus détaillée de la sensibilité peut détecter, par exemple, le composant le plus "fragile" ou bien le composant le plus "robuste".

Ensuite, la fiabilité expérimentale, l'a priori est donné pour chaque paramètre de fiabilité des composants du système ABS par les distributions obtenues suite à l'estimation de la fiabilité prévisionnelle des composants, et les données d'essais de fiabilité sont obtenues par simulation.

La simulation a été réalisée pour 150 systèmes et pour un temps de censure 900 heures.

Concernant la fiabilité opérationnelle, l'a priori opérationnel est constitué par les distributions a posteriori expérimentales, et les données du REX sont obtenues par simulation de 1000 systèmes pendant 200 heures.

La fiabilité expérimentale et opérationnelle pour le système ABS représente le produit entre les fiabilités des composants.

Les résultats de la méthodologie proposée sont comparés avec l'estimation de la fiabilité par la loi de Weibull obtenue par l'application de la méthode MV sur les données globales (résultats d'essai ou de REX) et avec l'estimation non paramétrique Kaplan-Meier.

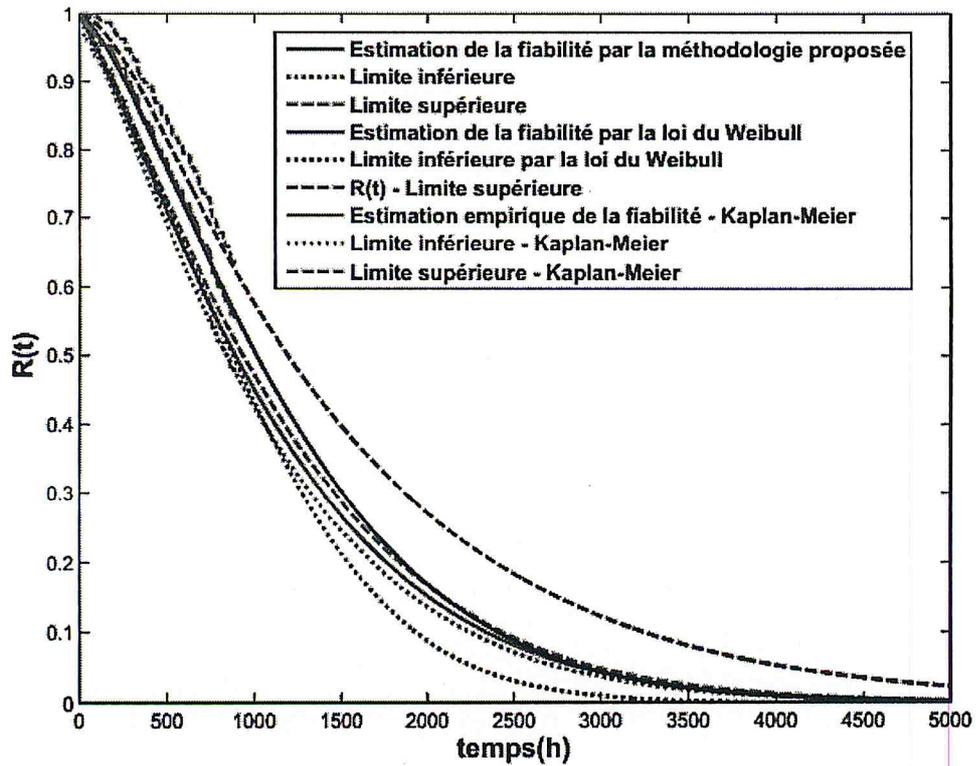
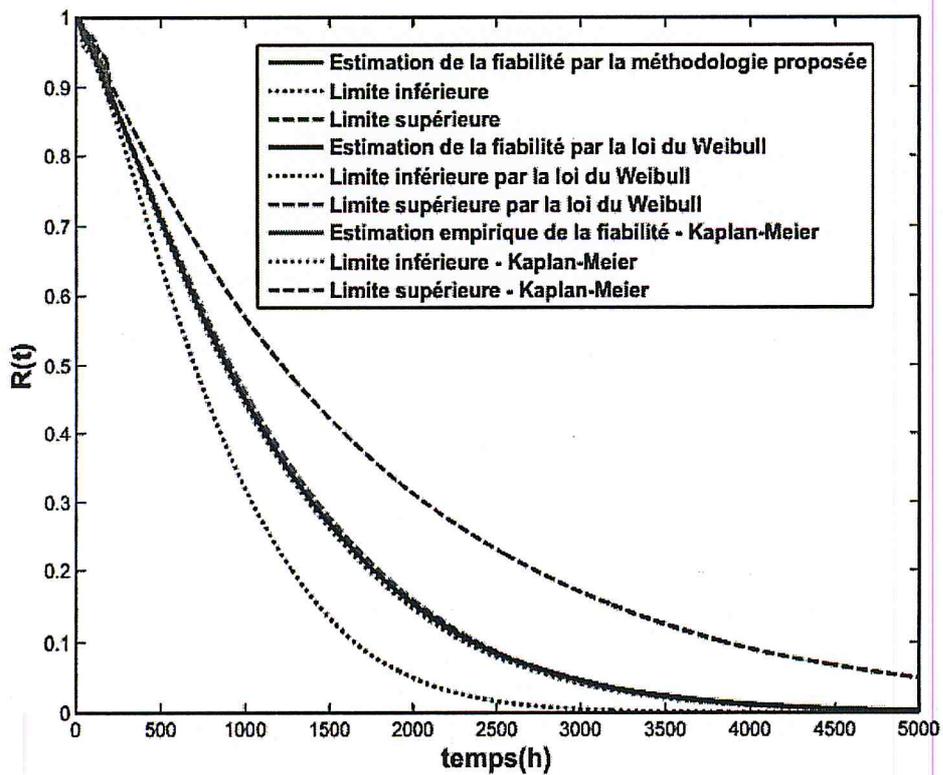


FIGURE 4.2. Fiabilité expérimentale pour le système ABS



Fiabilité opérationnelle pour le système ABS.

Par exemple, pour  $t = 892$  heures, la fiabilité expérimentale est  $R(t) \approx 0,5$ , l'intervalle de confiance est  $[0,4757; 0,5199]$  pour méthode proposée et, pour  $t = 1013$  heures, la fiabilité expérimentale est  $R(t) \approx 0,5$ , l'intervalle de confiance est  $[0,4319; 0,5752]$  pour la loi de Weibull.

Pour  $t = 895$  heures, la fiabilité opérationnelle est  $R(t) \approx 0,5$ , l'intervalle de confiance est  $[0,4903; 0,5090]$  pour la méthode proposée et, pour  $t = 888$  heures, la fiabilité opérationnelle est  $R(t) \approx 0,5$ , l'intervalle de confiance est  $[0,3817; 0,6091]$  pour la loi de Weibull.

Enfin, une analyse de sensibilité a été faite pour détecter le composant le plus et le moins fiable et le résultat obtenu confirme lors de l'étude de sensibilité prévisionnelle.

#### 4.5 Files d'attente et fiabilité [21]

Les modèles de files d'attente constituent un outil théorique ou appliqué pour la modélisation, l'évaluation de performance et le contrôle de différents types de systèmes concrets (systèmes de production, systèmes informatiques...). Les modèles d'attente développés ces dernières années tentent de tenir compte de l'influence des phénomènes de répétition d'appels qui exercent une influence non négligeable sur les indices de performance de certains systèmes réels, tels que les systèmes de télécommunications. La conception de ces systèmes nécessite par leur complexité et leurs implications économiques, des outils d'aide qui permettent l'évaluation ou l'analyse des performances du système. Cette évaluation consiste à déterminer de manière qualitative et quantitative le comportement du système étudié, en vue vérifier sa correction, d'optimiser l'utilisation de ses ressources et d'augmenter sa fiabilité.

A cet effet plusieurs techniques d'évaluation ont été obtenues, ainsi que plusieurs modélisations sont aujourd'hui utilisées. Parmi les principales approches introduites ces dernières années, on trouve les méthodes de comparaison stochastique qui tendent d'éluder cette difficulté par l'obtention d'approximation ou d'encadrement des principales mesures de performance.

La thèse [21] est consacrée à l'étude de l'application de ces méthodes à des modèles

de files d'attente GI/GI/1 avec rappels et lorsque le serveur sujet à des pannes aléatoires pour une maintenance corrective.

Dans un premier temps, [21] a déterminé la période d'activité pour les systèmes classiques GI/GI/1, cette période est définie comme l'intervalle de temps  $(T, T')$ , où  $T$  est la date d'arrivée d'un client dans le système vide.  $T'$  est l'instant où pour la première fois le système redevient vide. Cette période et pour un système non fiable, peut débuter soit par l'arrivée d'un appel primaire (événement A), soit par une panne qui se produit (événement B).

La borne inférieure de la période d'activité est estimée par:

$$E(L) \geq \gamma\beta_1 + \delta\alpha_{01}.$$

où :

$$\begin{aligned}\gamma &= P(A) = \int_0^{+\infty} \widehat{A}(x) dD_0(x). \\ \delta &= P(B) = \int_0^{+\infty} [1 - \widehat{A}(x)] dD_0(x). \\ \beta_1 &= E(\beta), \alpha_{01} = E(\alpha_0).\end{aligned}$$

avec:  $A$  : la distribution des durées des inter-arrivées.

$\beta$  : la durée de service avant la panne+la durée de réparation qui s'en suit.

$D_0$  : La distribution de probabilité que le serveur tombe en panne dans l'intervalle  $(t; t+x)$  sachant qu'il était libre à l'instant  $t$ , et  $\alpha_0$  : La durée de réparation correspondante.

Ainsi, à partir de cette borne, il est possible d'obtenir un borne pour la période d'inactivité, qui est donnée par:

$$E(I) \geq \frac{1-P}{P} \{\gamma\beta_1 + \delta\alpha_{01}\}.$$

où:  $P = \lim_{t \rightarrow +\infty} P\{\text{le système est non vide à l'instant } t\}$ .

Ensuite, des estimations par majoration et minoration sont obtenues selon les classes distributions non paramétriques:

1-Si la distribution des arrivées  $A$  est *NBU* (*NWU*), alors:

$$E(L) \geq (\leq) \frac{\gamma\beta_1}{1 - \langle H_A, G \rangle} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle}.$$

tel que:

$\langle F, G \rangle = \int_0^\infty F(x) dG(x)$  et  $H_A = E[v(t)] = \sum A^{*n}(t)$  est la fonction de renouvellement de distribution fondamentale  $A(\cdot)$  associé à un processus d'arrivées  $\{v(t), t \geq 0\}$ .

A partir de cette borne, [21] a obtenu le corollaire suivant:

\* Si  $A$  est *NBUE*, alors:

$$E(L) \geq \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01}}.$$

\* Si  $A$  est *NWUE*, alors:

$$E(L) \leq \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1 - \lambda^2\sigma^2} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01} - \lambda^2\sigma^2}.$$

où  $\sigma^2 = var(\xi)$ .

Dans un deuxième temps, [21] a considéré un système d'attente GI/GI/1 avec rappels avec serveurs non fiable, et il a obtenu les résultats suivants:

\* Si  $A$  est *NWU*, alors:

$$E(L) \leq \frac{\gamma[\beta_1 + \hat{a}_1 + \hat{v}_1 \langle H_A, G \rangle]}{1 - \langle H_A, G \rangle} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \hat{a}_1 + \hat{v}_1 \langle H_A, R_0 \rangle]}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle}.$$

\* Si  $A$  est *NBU*,  $\hat{A}$  et  $\hat{V}$  sont *IFRA*, alors:

$$E(L) \geq \frac{\gamma[\beta_1 + \sum \beta_1]}{1 - \langle H_A, G \rangle} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \sum \alpha_{01}]}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle}.$$

où  $\sum(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{P(v(x) = k)}{\hat{a}_1^{-1} + k\hat{v}_1^{-1}}$ .

\* Si  $A$  est *NWU*,  $\hat{A}$  et  $\hat{V}$  sont *DFRA*, alors:

$$E(L) \geq \frac{\gamma[\beta_1 + \sum \beta_1]}{1 - \langle H_A, G \rangle} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \sum \alpha_{01}]}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle}.$$

## 4.6 Etude de fiabilité d'un bras d'onduleur

### 4.6.1 Présentation du problème

Le domaine particulier du génie électrique qu'est l'électronique de puissance a connu, comme tout domaine scientifique, un essor important durant ces dernières années. Pour

la performance de l'outil de production industrielle, on fait appel à la conversion statique d'énergie.

Les fruits de cette expansion sont: l'émergence de nouveaux composants de puissance de nouvelles structures de conversion. Ces études sont aussi menées sur des problématiques de fiabilité et de sûreté de fonctionnement de ces dispositifs. La thématique de recherche "sûreté de fonctionnement et disponibilité des convertisseurs statiques".

#### 4.6.2 Calcul de la fiabilité des structures

A partir de la connaissance du taux de défaillance des composants de puissance, il est possible de calculer la fiabilité d'une structure complète.

Ces calculs s'appuient généralement sur des diagrammes de fiabilité, dans chaque cas, des méthodes mathématiques permettent de relier la fiabilité soient connues ainsi que toutes les interactions.

Etudions la fiabilité d'un bras d'onduleur " simple" (deux niveaux à deux interrupteurs) (Figure 4.3) dont le taux de défaillance de chaque interrupteur est égal à  $\lambda_{inter}$ .

Le calcul de la fiabilité de ce bras passe en premier lieu par une analyse des modes de défaillance de ce système. La défaillance d'un interrupteur se matérialise très souvent par un premier état de court-circuit d'une des deux puces de silicium (diode). Cet état peut résulter de plusieurs facteurs ayant pour conséquence une contrainte trop élevée pour le composant. Cette défaillance revient à un court-circuit de bras et du même coup un court-circuit de la source continue.

Si les interrupteurs de puissance sont commandés par un driver intégrant une protection rapide, l'interrupteur initialement non défaillant et qui subit le court-circuit peut être sauvé.

Pour les modules de puissance, il y a une très forte probabilité pour que l'énergie dissipée dans le court-circuit provoque la fusion des métallisations d'émetteur et le décollement des bondings. Ce décollement engendre l'ouverture du court-circuit.

Dans le cas des boîtiers de type press-peck, aucune connectique ne peut jouer le rôle de fusible, la non-défaillance du bras est donnée par la non-défaillance simultanée des deux interrupteurs. Ils sont donc fonctionnellement en série sur le diagramme de la fiabilité, le

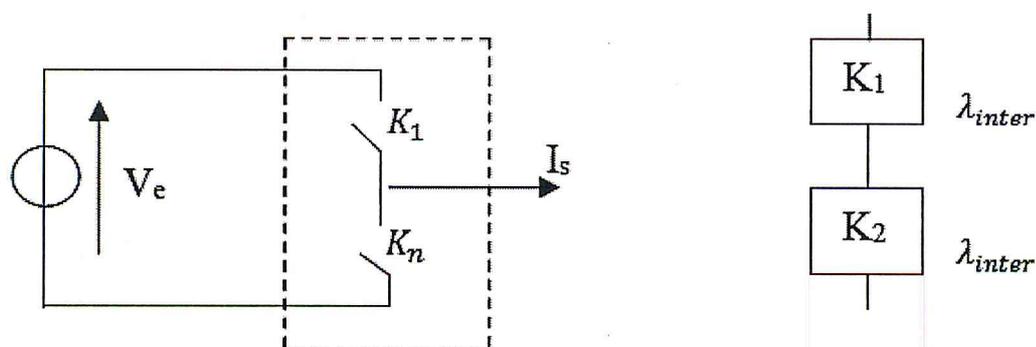


FIGURE 4.3. Bras d'onduleur 2 niveaux, 2 interrupteurs.

taux de défaillance globale est donc donné par:

$$\lambda_{bras} = 2\lambda_{inter}.$$

$V_e$ : Tension d'entrée.

$K_1, K_2$ : Deux interrupteurs.

$I_s$ : Courant de sortie.

Etudions maintenant le cas du même bras d'onduleur, mais où chaque interrupteur de puissance est constitué de  $n$  interrupteurs en série commandés de façon synchrone (Figure 4.4). En fonctionnement normal, la tension aux bornes de chaque interrupteur ouvert d'un demi-bras est théoriquement égal à  $V_e/n$ . De cette façon, une défaillance est susceptible de se produire lorsqu'un interrupteur commute plus rapidement que les autres (à l'ouverture ou à la fermeture), celui-ci alors soumis à une surtension qui peut provoquer un court-circuit.

Du fait l'association série, cette défaillance ne provoque pas une défaillance du bras mais seulement une augmentation de la tension à l'état bloqué des autres interrupteurs associés.

Le demi-bras défaillant passe ainsi de  $n$  à  $n-1$  interrupteurs supportant chacun à l'état ouvert une tension théoriquement de  $V_e/n-1$  tandis que l'autre demi-bras n'est pas affecté par le défaut.

Le diagramme de fiabilité conforme à cette analyse est un système à redondance partiel

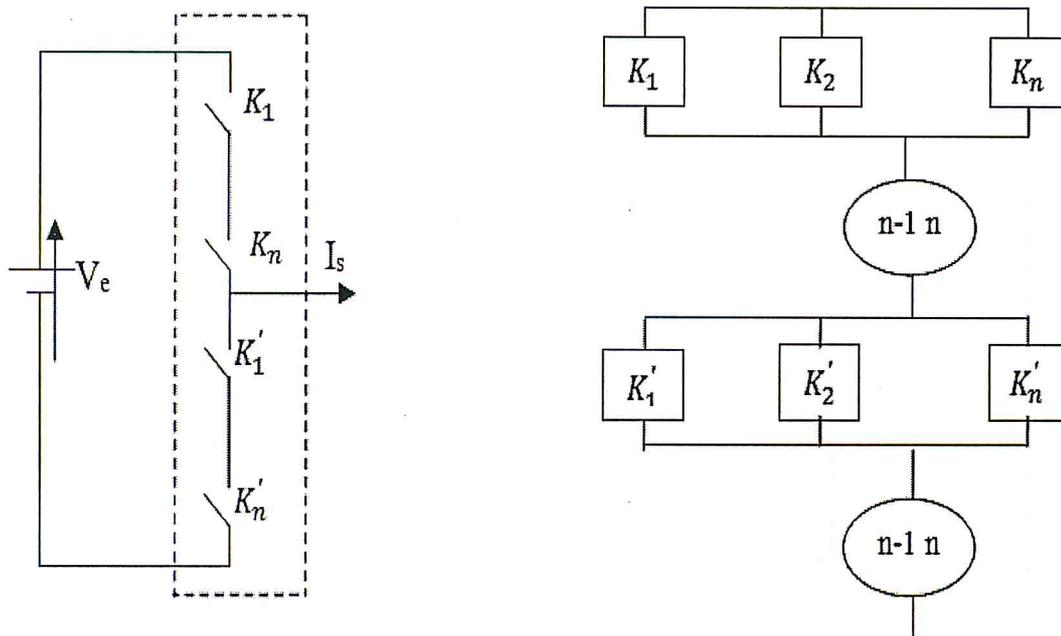


FIGURE 4.4. Bras d'onduleurs à 2 niveaux à  $2n$  interrupteurs.

" $n - 1$  parmi  $n$ " où bien évidemment le taux de défaillance de chaque interrupteur va dépendre de la tension de leurs bornes.

Le calcul de la fiabilité n'est pas trivial, il faut utiliser des techniques de calcul spécifiques.

Dans le cas général de  $n$  interrupteurs en série, la loi de fiabilité est la suivante:

$$R(t) = \left\{ e^{-n\lambda_1 t} + \frac{1}{1 - \frac{(n-1)\lambda_2}{n\lambda_1}} (e^{-(n-1)\lambda_2 t} - e^{-n\lambda_1 t}) \right\}^2.$$

A partir de cette loi, il est possible de calculer le MTTF du bras:

$$MTTF = \frac{1}{2n\lambda_1} \left\{ \frac{2}{1 + \frac{(n-1)\lambda_2}{n\lambda_1}} \left( 1 + \frac{n\lambda_1}{2(n-1)\lambda_2} \right) \right\}.$$

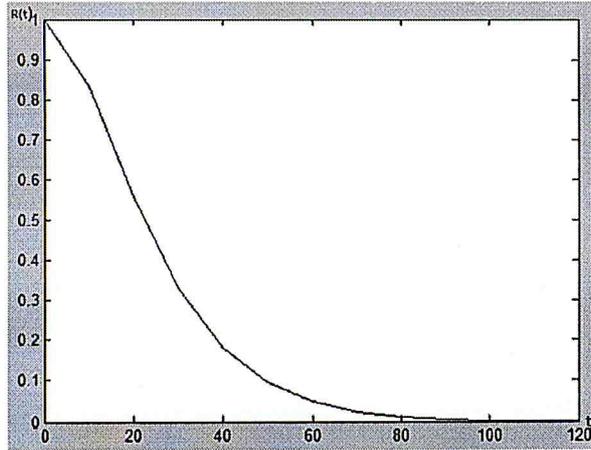
$\lambda_1$  : Le taux de défaillance d'un interrupteur sous tension  $E/n$ .

$\lambda_2$  : Le taux de défaillance d'un interrupteur sous tension  $E/(n-1)$ .

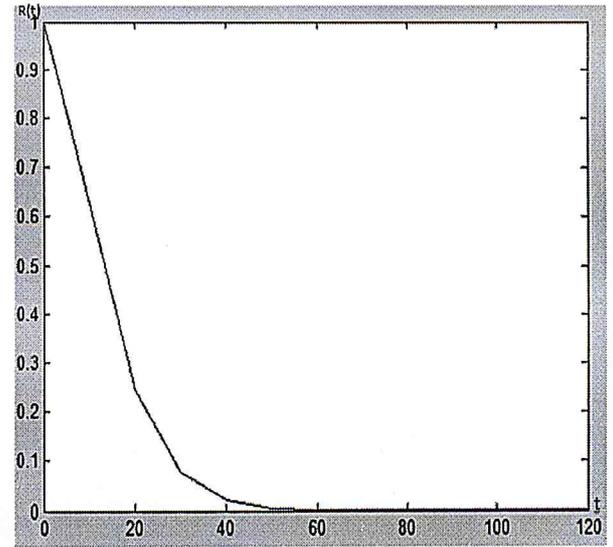
L'objectif est de calculer la fiabilité du bras en fonction de nombre d'interrupteurs.

Pour cela on a conçu un programme MATLAB.

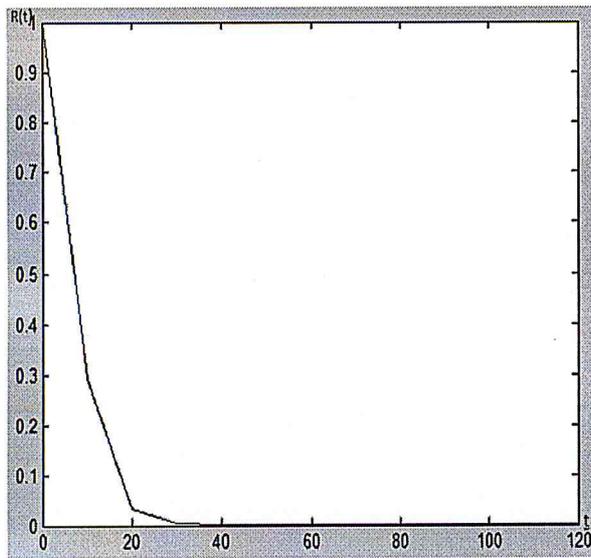
Le résultat sur la fiabilité globale est le suivant:



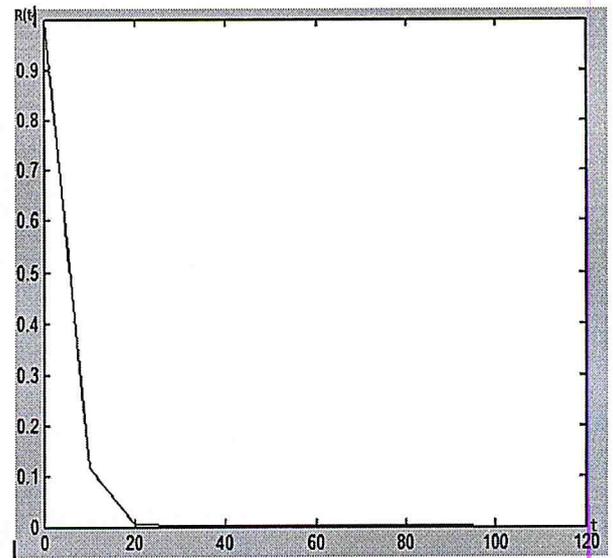
$n=2.$



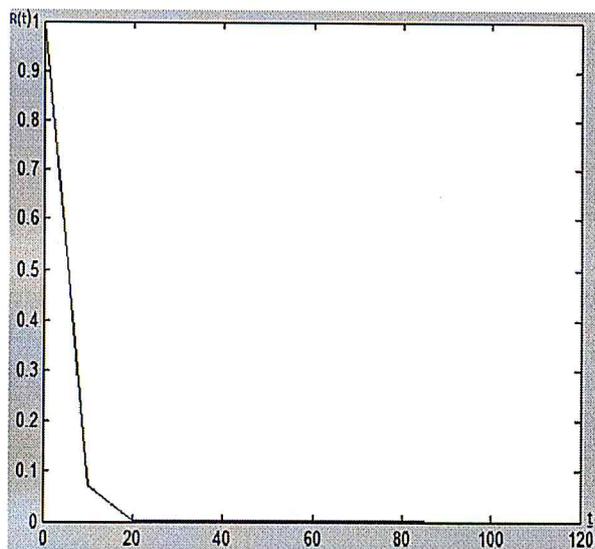
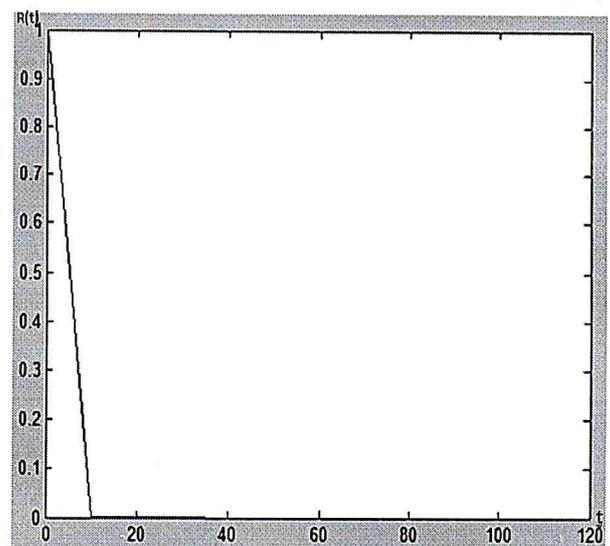
$n=3.$



$n=5.$



$n=7.$

 $7 < n < 15.$  $n > 14$ 

En fonction de nombre d'interrupteurs en série, l'optimum est atteint pour  $n=2$ , au delà la fiabilité du bras se dégrade. De plus, pour un nombre élevé de composants ( $n \geq 5$ ), on remarque que la fiabilité du bras ne s'améliore pas.

Nombres d'interrupteurs « n »	MTTF
2	25.8333
3	14.7467
5	8.0712
7	5.5754
8<n<15	3
n>14	1.7

Le MTTF selon le nombre d'interrupteur est donnée dans le tableau ci-dessus.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques travaux de recherche récents sur la fiabilité dans différents domaines. Ensuite, nous avons étudié la fiabilité d'un bras d'onduleur en fonction de leurs composant à l'aide d'un outil de simulation MATLAB.

Le programme MATLAB qu'on a réalisé est le suivant:

```
lamd1=input('Donner le taux de defaillance de l_interrupteur 1');
lamd2=input('Donner le taux de defaillance de l_interrupteur 2');
essai=input('Donner le nombre d_essai');
t=[0:10:120];
for i=1:essai
n=input('Donner le nombre d_interrupteurs');
R=(exp(-n*lamd1*t)+(1/(1-((lamd2*(n-1))/(lamd1*n))))*(exp(-(n-1)*lamd2*t)-exp(-n*lamd1*t))).^2;
plot(t,R);
fun=@(x)(exp(-n*lamd1*x)+(1/(1-((lamd2*(n-1))/(lamd1*n))))*(exp(-(n-1)*lamd2*x)-exp(-n*lamd1*x))).^2;
MTTF(i)=integral(fun,0,Inf);
hold on;
```

## Conclusion

Les constructeurs et utilisateurs de systèmes et matériels dont les défaillances pourraient entraîner des dommages corporels, des dégâts matériels importants ou conduire à d'autres conséquences jugées inacceptables, s'intéressent depuis plusieurs années, à la "science de défaillance" que constitue la fiabilité.

Notre travail a pour objectif de montrer l'intérêt et les applications de la fiabilité dans divers domaines tels que: l'économie, système de production, système de télécommunication... qui interviennent directement dans le développement des pays.

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques travaux de recherche qui concernent la fiabilité dans les principaux domaines scientifiques et économiques.

Ensuite nous avons conçu un programme MATLAB qui calcule la fiabilité d'un bras d'onduleurs en fonction du nombre de ses composants.

Il est tout à fait possible de mener le même genre d'étude dans le cas d'un bras d'onduleur multi-niveaux en calculant la fiabilité de ce bras en fonction du nombre de cellules.

## RÉFÉRENCES

- [1] Aissani A. Modèle stochastique et théorie de fiabilité. Office des publications universitaires. 11-1992.
- [2] Alali Alhouaij A. Contribution à l'optimisation de la maintenance dans un contexte distribué. Thèse de Doctorat. Université de Grenoble, 2010.
- [3] Baptiste Menye J. Validation de la maintenabilité et de la disponibilité en conception d'un système multi-composants. Thèse de Doctorat. Université Laval, Qubec, 2009.
- [4] Bassel S. Processus stochastiques pour l'ingénieur. Collection technique et scientifique des télécommunication. Presses polytechniques et universitaire romandes et des écoles de télécommunications, 2006.
- [5] Benameur A. Conception d'une plateforme d'ingénierie de maintenance guidée par les données: Application à la maintenance préventive et curative. Thèse de Magister. Université d'Oran, 2010.
- [6] Cabau E. Introduction à la conception de la sureté. Cahier technique N°144. 1999.
- [7] Coccozza C. Processus stochastiques et fiabilité des systèmes. <http://books.google.fr/books isbn=3540633901>.
- [8] Dekker R . Applications of maintenance optimization models: a review and analysis. Reliability Engineering and System Safety 51, pp: 229-240, 1996.
- [9] Delahaye D. Cours de sureté de fonctionnement. Parcours système embarqué et mobile. Cours N°08.2009-2010. [www.cedric.cnran.fr/delahaye/does/cours8.pdf](http://www.cedric.cnran.fr/delahaye/does/cours8.pdf).
- [10] Delahaye D. Cours de surété de fonctionnement. Parcours système embarqué et mobile. Cours N°09.2009-2010. [www.cedric.cnran.fr/delahaye/does/cours9.pdf](http://www.cedric.cnran.fr/delahaye/does/cours9.pdf)

- [11] Delloux E. Politique de maintenance conditionnelle pour un système à dégradation continue soumis à un environnement stressant. Thèse de Doctorat. Université de Nante 2008.
- [12] François O. Notes de cours de processus aléatoires.2004-2005. [www.timc.imag.fr/olivier.francois/processus.pdf](http://www.timc.imag.fr/olivier.francois/processus.pdf).
- [13] Gaudoin O. Fiabilité des systèmes et des logiciels. [www.ljk.bnag.fr/membres/OlivierGaudoin/FSL.pdf](http://www.ljk.bnag.fr/membres/OlivierGaudoin/FSL.pdf).
- [14] Guenab F. Contribution aux système tolérant aux défauts: Synthèse des méthodes de reconfiguration et/ou restauration intégrant la fiabilité des composants. Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré, Nancy1, 2007.
- [15] Guérin F. Estimation de la fiabilité par les essais. Thèse de Doctorat. Université d'Angers, 2004.
- [16] Guessoum Y. Modélisation probabiliste de l'impact des actions de maintenance sur le comportement des matériels électrique de réseaux. Thèse de Doctorat. Université de technologie de Troyes, 2012.
- [17] Laronde R. Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables. Application à un système photovoltaïque. Thèse de Doctorat. Université d'Angers, 2011.
- [18] Messaoudene E. Maintenance préventive optimale de systèmes redondants. Thèse de Magister. Université de Blida, 1998.
- [19] Michalache G A. Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques: Application sur système embarqué. Thèse de Doctorat. Université d'Angers, 2007.
- [20] Mouy M. Estimation de la fiabilité d'un système et de ses composants. Thèse de Magister. Université de Mentouri, 2009.
- [21] Oukid N. Comparaison stochastique et applications. Thèse de Doctorat, Blida, 2009.

- [22] Paggetti C. surt  t   de fonctionnement, 2012.
- [23] Richard Barlow E. Proschan F. Mathematical theory of reliability.
- [24] Saidi G. Lois non paramétriques de survie et leurs applications. Thèse de Doctorat. Ecole nationale supérieure de statistique et d'économie appliquée, 2011.
- [25] Tebbi O. Estimation de lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés. Thèse de Doctorat. Université d'Angers, 2005.
- [26] Vallon J. Introduction à l'étude de la fiabilité des cellules de commutation à IGBT sous fortes contraintes. Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 2003.

