

الجزائر دية الشعبية الديمقراطية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



UNIVERSITÉ de BLIDA 1
Faculté des Sciences
Département : Mathématiques



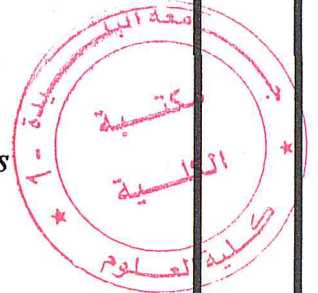
MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Modélisation Stochastique et Statistique



Thème

**ANALYSE DECISIONNELLE DES CLIENTS
DANS UN SYSTEME D'ATTENTE AVEC
ARRIVEES PAR GROUPES VIA LA THEORIE
DES JEUX**

Présenté par : Mr Sanogo Batoman

Devant le jury composé de :

Président :	Mr Tami Omar	M.A.A	Université Blida1
Examineur :	Mr El Mossaoui Hichem	M.A.A	Université Blida1
Promotrice :	Mme Oukid Nadia	M.C.A	Université Blida1

Promotion 2018-2019

REMERCIEMENTS

Je tiens en tout premier lieu à remercier le tout puissant Allah de m'avoir donné la force, la patience et le courage de bien mener ce travail.

Mes sincères remerciements à tous ceux qui par leurs aides m'ont permis de bien élaborer ce travail et de réussir cette année universitaire.

J'adresse mes honorables remerciements à *M^{me} Oukid Nadia* non pas seulement de m'avoir encadré pour la réussite de ce mémoire, mais pour son affection, ses conseils, sa patience, sa confiance et surtout pour les connaissances qu'elle m'a léguées durant mon cursus universitaire de deuxième cycle.

Je remercie également *Mr Tami Omar* d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance et aussi de m'avoir permis d'hériter de ses connaissances en Statistique.

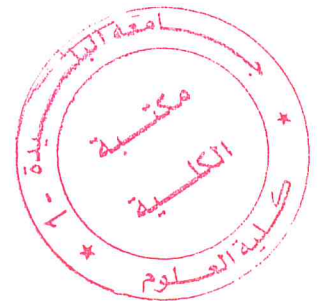
Je tiens à remercier également *Mr El Mossaoui Hichem* d'avoir accepté d'examiner mon travail, d'apporter ses corrections et surtout de m'avoir formé durant mon cycle de Master.

Je remercie mes parents (mon feu père, ma bien aimée mère, mes tantes et oncles, mes frères et sœurs et cousins...) pour leur éducation, leur soutien indéfectible, leurs encouragements, et leur patience. Mes remerciements à tous mes amis et proche (particulièrement Chaka Modibo Diarra, Fousseyni Togola, Issa Traoré et El Alem Mohamed) pour leurs soutien et encouragement afin mener ce mémoire à terme.

Je remercie sincèrement *M^{me} Nouria* pour ses conseils et surtout pour l'affection qu'elle m'a témoignée.

Mes sincères remerciements à tous mes professeurs (de la fondamentale à l'université) pour leurs encadrements, leurs conseils, leur patience et leurs contributions pour mon éducation.

Je remercie enfin toute la promotion MSS 2018-2019 pour leur fraternité.



DÉDICACES

Ce mémoire est dédié à :

Mon bien aimé défunt père Djankina Sanogo

Ma très tendre mère Assitan Sylla

Mon oncle et ma tante Yaya et Mariam Traoré

Mes frères : Adama, Tiekoro, Amadou et Moussa

Mes sœurs : Rokia, Mariam, Nakani et Korotoum

Mes cousins : Abdoul Kader, Diakalia, Mohamed et Drissa

Mon tuteur : Demba Sylla

Mon amie : Matokoman Diakité

Toutes les familles Sanogo, Sylla et Traoré

M^{me} Nouria

Toute la promotion MSS 2018 – 2019

Résumé :

Dans ce manuscrit, nous avons considéré un système de file d'attente avec arrivées par blocs de taille fixe k où il a été question de faire une analyse mathématique sur le comportement décisionnel des clients à leurs arrivées au système à l'aide de la théorie des jeux. Nous avons imposé une certaine structure récompense-coût (R, C) et calculer les mesures de performances dans les deux cas : observable (où les clients sont totalement informés de l'état actuel du système) et inobservable (où les clients n'ont aucune information sur l'état du système), afin de déterminer l'équilibre de Nash qui permettra aux clients de Maximiser leurs profits.

Abstract :

In this manuscript, we considered a queue system with fixed-size block arrivals where it was discussed to make a mathematical analysis of the decision-making behaviour of customers when they arrived at the system using the theory games. We have imposed a certain reward-cost structure (R, C) and calculate performance measures in both cases: observable (where customers are fully aware of the current state of the system) and unobservable (where customers have no no information on the state of the system), to determine the Nash equilibrium that will allow customers to Maximize their profits.

Table des matières

Tableau de symboles.....	8
Liste des figures.....	10
Introduction générale.....	11
1 Notions d'éléments de la théorie de jeux.....	13
1.1 Qu'est-ce qu'un jeu ?.....	14
1.1.1 Joueurs.....	14
1.1.2 Quelques exemples de jeux les plus familiers.....	14
1.1.2.1 Le dilemme du prisonnier.....	14
1.1.2.2 Le jeu de pierre-papier-ciseaux.....	14
1.1.3 La rationalité des joueurs.....	14
1.1.4 Les stratégies.....	14
1.1.5 L'utilité (le gain).....	15
1.2 Modélisation des jeux.....	15
1.2.1 Jeux sous forme normale (forme stratégique).....	15
1.2.2 Jeux sous forme extensive (développée).....	16
1.3 Classification des jeux.....	17
1.3.1 Selon l'ordre.....	17
1.3.2 Selon les relations entre les joueurs.....	17
1.3.3 Selon les gains des joueurs.....	17
1.3.4 Selon l'information.....	18
1.4 Jeux finis et jeux infinis.....	18
1.5 Les jeux symétriques.....	18
1.6 Concept de solution.....	18
1.6.1 Equilibre de Nash.....	18
1.6.2 Equilibre de Pareto.....	19
1.7 Dominance.....	19
1.7.1 Stratégie strictement dominée.....	19
1.7.2 Stratégie faiblement dominée.....	20
1.7.3 Equilibre en stratégie dominante.....	20
1.8 Jeux à deux joueurs.....	20
1.8.1 Jeux matriciels.....	20
1.8.2 Jeux bi-matriciels.....	21
1.9 Conclusion :.....	21
2 Processus stochastiques et files d'attente Markoviennes.....	23

2.1	Processus stochastiques	23
2.1.1	Processus de comptage.....	23
2.1.2	Processus de Poisson.....	24
2.1.3	Loi d'un processus de Poisson.....	24
2.1.4	Loi exponentielle	25
2.1.5	Processus de Poisson et loi exponentielle	25
2.2	Chaine de Markov à temps discret	25
2.3	Chaines de Markov à temps continu.....	25
2.4	Processus de naissance et de mort	26
2.5	Les files d'attente	27
2.5.1	Le processus d'arrivée	27
2.5.2	Le temps de service.....	27
2.5.3	Structure et discipline de la file	28
2.5.4	Notation de Kendall	29
2.6	Les files d'attente Markoviennes.....	29
2.7	Analyse mathématique.....	29
2.8	Caractéristiques d'un système de file d'attente.....	29
2.8.1	Formule de Little	30
2.9	Description du modèle M/M/1	30
2.9.1	Caractéristiques de la file M/M/1	30
2.10	Conclusion	32
3	Quelques modèles de files d'attente Markoviennes via la théorie des jeux.....	33
3.1	La file d'attente M/M/1 simple et observable	33
3.1.1	Le modèle descriptif	33
3.1.2	Le jeu associé à ce modèle	33
3.2	File d'attente M/M/1 simple et non observable.....	34
3.3	File d'attente M/M/1 avec possibilité d'inspection	34
3.3.1	Le modèle descriptif	34
3.4	File d'attente M/M/1 avec panne du serveur.....	35
3.4.1	Description du modèle	35
3.4.2	Modélisation sous forme d'un jeu	36
3.4.3	Les règles du jeu	36
3.5	La file d'attente M/M/1 avec vacances	37
3.5.1	Le modèle.....	37
3.5.2	Le jeu associé à ce modèle	37
3.6	File d'attente M/M/1 avec contrôle du service.....	38

3.6.1	Le modèle descriptif	38
3.6.2	Le jeu associé	39
3.7	File d'attente M/M/1 partitionnée	39
3.7.1	Le modèle.....	39
3.8	Etude d'une file d'attente M/M/1 avec temps d'installation.....	40
3.8.1	Description du modèle	40
3.8.2	Les règles et jeux associés.....	40
3.8.3	Equilibre dans le cas complètement observable	41
3.8.4	Le cas presque observable.....	43
3.8.5	Equilibre en stratégies mixtes pour les cas non observables	44
3.8.5.1	Cas presque non observable	44
3.8.5.2	Le cas totalement non observable	48
3.9	Concurrence entre deux serveurs dans une file d'attente Markovienne	48
3.9.1	Le modèle mathématique	48
3.9.2	Le jeu du modèle	49
3.10	Concurrence entre s serveurs dans une file d'attente Markovienne	49
3.10.1	Modélisation sous forme de jeu	49
3.11	Conclusion	50
4	Analyse de la décision des clients dans une file d'attente avec arrivées par bloc (Mk/M/1).....	51
4.1	Etude d'une file d'attente M2/M/1.....	52
4.1.1	Le modèle descriptif	52
4.1.2	Etude de la file M2/M/1 dans le cas observable.....	52
4.1.2.1	Caractéristiques du système.....	52
4.1.2.1.1	Les mesures de performances du système	55
4.1.2.2	Le jeu associé à ce modèle	56
4.1.2.3	Résolution du jeu	57
4.1.3	Etude d'une file d'attente M2/M/1 dans le cas non observable	58
4.1.3.1	Caractéristiques du système.....	58
4.1.3.1.1	Le nombre moyen de clients dans le système	61
4.1.3.1.2	Le temps moyen de séjour dans le système	62
4.1.3.2	Le jeu associé à ce modèle	62
4.1.3.3	Recherche d'équilibre de Nash	63
4.2	Etude générale sur le modèle Mk/M/1	64
4.2.1	Cas observable.....	64
4.2.1.1	Caractéristiques du système.....	64
4.2.1.1.1	Les mesures de performances du système	66

4.2.1.2	Le jeu associé.....	67
4.2.1.3	Détermination d'équilibre de Nash	68
4.2.2	Cas non observable	69
4.2.2.1	Caractéristiques du système.....	69
4.2.2.1.1	La fonction génératrice des probabilités stationnaires.....	70
4.2.2.1.2	Les mesures de performances du système	72
4.2.2.2	Le jeu attribué à ce modèle.....	74
4.2.2.3	Recherche d'équilibre de Nash	74
4.3	Les atouts et inconvénients du modèle $M_k/M/1$ pour les clients dans les deux cas d'un point de vue économique	75
4.3.1	Le cas observable.....	75
4.3.2	Le cas inobservable.....	76
4.3.3	Analyse d'information révélée par le serveur.....	76
4.4	Conclusion	76
5	Conclusion générale.....	77
	<i>Bibliographie</i>	78

Tableau de symboles

symboles	significations
J	L'ensemble des joueurs
S_i	L'ensemble des actions du joueur i
U_i	La fonction d'utilité du joueur i
$N(t)$	Le nombre de clients dans le système à l'instant t
$P_n(t)$	La probabilité d'avoir n clients dans le système à l'instant t
λ	Le taux d'arrivée des clients
μ	Le taux de service
$1/\lambda$	Le temps moyen d'inter-arrivées
$1/\mu$	Le temps moyen de service
T_n	La durée entre deux événements consécutifs
<i>FIFO</i>	Premier arrivé, premier à quitter
<i>LIFO</i>	Dernier arrivée, premier à quitter
<i>FCFS</i>	Premier arrivé, premier servi
<i>LCFS</i>	Dernier arrivé, premier servi
ρ	L'intensité du trafic
s	Le nombre de serveurs
M	Loi exponentielle
G	Loi générale
D	Loi constante (déterministe)
E_k	Loi d'Erlang d'ordre k
H_k	Loi hyper exponentielle
L	Le nombre moyen de clients dans le système
L_q	Le nombre moyen de clients dans la file
W	Le temps moyen de séjour dans le système
W_q	Le temps moyen de séjour dans la file
N_q	Le nombre de clients dans la file
R	La récompense d'un client après son service
C	Le coût d'attente par unité de temps
θ	Le coût fixe d'entrée dans le système
C_I	Le coût d'inspection
P_I	La probabilité d'inspection
P_B	La probabilité de quitter sans inspecter
P_J	La probabilité de rejoindre la file sans l'inspecter
λ_e	Le taux d'entrée
U_B	Le gain d'un client qui quitte sans inspecter
U_I	Le gain d'un client qui inspecte la file et rejoint
U_J	Le gain d'un client qui rejoint sans inspecter
ξ	Le taux de panne
η	Le taux de réparation
R_f	La compensation en cas de panne
n_e	La limite d'entrée dans le système ou seuil

$I(t)$	L'état du serveur
$\alpha(i)$	La part du marché de chaque serveur
μ_h	Le taux faible de service
μ_l	Le taux élevé de service
k	La taille du groupe
z_i	L'action choisi par le joueur i

Liste des figures

<i>Figure 1.2-1 : forme stratégique du jeu de pierre-papier-ciseaux</i>	16
<i>Figure 1.2-2 : le jeu pierre-papier-ciseaux sous forme extensive</i>	16
<i>Figure 2.4-1 : graphe du processus de naissance et de mort</i>	26
<i>Figure 2.5-1 : système de file d'attente</i>	27
<i>Figure 2.9-1 : graphe de transition de la file M/M/1</i>	30
<i>Figure 3.4-1 : graphe de transition d'une file d'attente M/M/1 avec panne</i>	36
<i>Figure 3.8-1 : la file d'attente M/M/1 avec temps d'installation</i>	40
<i>Figure 3.8-2 : file d'attente M/M/1 observable temps d'installation et structure</i>	42
<i>Figure 3.8-3 : file d'attente MM1 presque observable avec temps d'installation</i>	45
<i>Figure 4.1-1 : graphe de transition de la file M2/M/1 observable</i>	53
<i>Figure 4.1-2 : forme extensive du jeu associé au modèle M2/M/1 observable</i>	57
<i>Figure 4.1-3 : modèle M2/M/1 observable et avec récompense-coût(R,C)</i>	58
<i>Figure 4.1-4 : file d'attente M2/M/1 non observable</i>	59
<i>Figure 4.2-1 : graphe de transition de la file Mk/M/1 observable</i>	64

Introduction générale

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années "1909-1920" avec les travaux de l'ingénieur danois *Anger Krarup Erlang (1878-1929)* concernant le réseau téléphonique de *Copenhague*. A partir des années 1930, la théorie des files d'attente adopte un langage de plus en plus mathématique qui a été développée notamment grâce aux contributions de *Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek, ...* Et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Cette théorie s'est ensuite étendue à de nombreux champs d'applications comme *la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité des systèmes complexes, les réseaux téléphoniques, la modélisation des systèmes de production, ...*

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie de tous les jours, un outil d'analyse et de modélisation. L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application des processus stochastiques. Il y a file d'attente chaque fois que certaines entités appelées "*clients*" se présentent d'une manière aléatoire à des "*stations*" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont rencontrés partout et à tout moment dans notre société. D'amples exemples en découlent :

- ✓ *Attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration)*
- ✓ *Trafic urbain ou aérien*
- ✓ *Circulation de pièces dans un atelier*
- ✓ *Réseaux téléphoniques*
- ✓ *Programmes dans un système informatique*

Cependant, nous assistons dans ces dernières décennies à une tendance visant à étudier les systèmes de files d'attente d'un point de vue économique. Une certaine structure récompense-coût (R, C) est imposée sur les systèmes d'attente reflétant le désir du service par les clients et leurs mécontentements d'attente.

Il est également accordé aux clients de prendre des décisions concernant leurs actions dans le système. Ils ont le pouvoir de décider s'il est nécessaire de rejoindre ou de quitter le système dans le but de maximiser leurs profits espérés. Compte tenu du fait que les autres clients ont le même but, la décision prise par un client influe sur la décision des clients potentiels. Nous assistons alors à une situation de jeu entre les clients.

Sachant que l'objectif des clients est de maximiser leurs gains, ces derniers se posent la question suivante : quand est ce que je dois rejoindre le système ou bien quitter ?

Il existe généralement deux cas :

- Le cas observable : dans lequel les clients observent la longueur de la file avant de prendre leurs décisions.

- Le cas non observable : où les clients n'ont aucune information sur la taille du système.

La notion de théorie des jeux en files d'attente markoviennes a été initié par *P.Naor (1969)* [29] qui étudia une file d'attente $M/M/1$ avec une structure récompense-coût en supposant que les paramètres de service sont parfaitement connus et que l'actuelle information sur l'état du système est annoncée. *Edelson et Hildebrand (1975)* [16] ont étudié la version non observable de *Naor* dans laquelle les clients ne connaissent pas la longueur de la file à leurs arrivées. De nombreux articles font suite aux travaux de *Naor (1969)* et étudient le rôle de la fourniture d'information dans d'autres modèles de files d'attente [7], [9], [15], [18], [20], [21], [34],

Dans la file observable, les clients décident de rejoindre la file si la longueur de celle-ci est inférieure à un certain nombre seuil n_e et décident de quitter sinon. Lorsque la file n'est pas observable, les clients entreront alors avec une probabilité p .

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres partitionnés comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à l'introduction et la présentation de quelques éléments de base de la théorie des jeux,
- Quant au deuxième chapitre, il est consacré à la présentation des quelques notions de la théorie des files d'attente que nous utiliserons dans les chapitres suivants,
- Le troisième chapitre touchant la partie clé de ce manuscrit donne quelques modèles de files d'attente via la théorie des jeux,
- Et enfin le dernier chapitre où l'on trouve notre apport est consacré à l'étude des modèles markoviens avec arrivées par groupe de taille fixe, où nous avons considéré en premier lieu le modèle $M^2/M/1$ avec structure récompense-coût en déterminant le régime transitoire et le régime stationnaire afin de calculer les paramètres de performances dans les deux cas (observable et non observable).

Et ensuite faire une généralisation de l'étude sur le modèle $M^k/M/1$, $k \geq 2$, où nous avons fait une analyse mathématique comme dans le modèle précédent qui a été clôturé par une brève explication sur les avantages et les inconvénients des deux cas en matière de prise de décision.

1 Notions d'éléments de la théorie de jeux

Historiquement, la théorie des jeux est née à la frontière des mathématiques et de l'économie, et s'est ensuite développée dans ces deux domaines tout en trouvant d'autres champs d'applications notamment en biologie (dynamique des populations), et plus récemment en informatique (cryptographie, théorie algorithmique des jeux, vérification de preuve,...). La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématique des interactions stratégiques entre plusieurs agents rationnels (preneurs de décision).

En effet, dans la vie contemporaine, des preneurs de décision (hommes politiques, consommateurs, producteurs, comités d'entreprises, citoyens, ..) ont à faire un choix parmi plusieurs actions possibles.

Dans un grand nombre de problèmes décisionnels, les deux premiers aspects suivants sont au moins présents :

- il y a au moins deux preneurs de décision,
- il y a une interaction entre les décisions dans le sens où l'issue finale pour un des preneurs de décision dépend non seulement de l'action qu'il a choisie, mais aussi des actions choisies par d'autres décideurs.
- Il y a un ou plusieurs éléments d'incertitude.

Un des buts de la théorie des jeux est d'abord de créer des modèles mathématiques de bases. Ces modèles essaient de synthétiser tous les éléments essentiels pour décrire l'interaction, puis d'introduire des concepts de solutions pour décrire les issues possibles d'un jeu, et enfin d'appliquer ces outils pour mieux comprendre les phénomènes sociaux.

Notre objectif dans ce chapitre n'est pas de donner un état d'art exhaustif sur la théorie de jeux, nous voulons juste introduire quelques concepts qui nous seront utiles dans la suite de ce manuscrit.

1.1 Qu'est-ce qu'un jeu ?

Un jeu est une situation où des joueurs sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles et dans un cadre défini à l'avance qui seront les règles du jeu. Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu à laquelle est associé un gain (ou paiement), positif ou négatif pour chacun des participants.

1.1.1 Joueurs

Un joueur est un acteur qui devra au cours d'un jeu prendre une ou plusieurs décisions. Il peut être une personne, un groupe de personnes, une société, une région, un parti politique, un pays ou même la nature. Si dans un jeu, il y a N joueurs ($N \geq 2$) qui participent au jeu, on notera par $J = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ l'ensemble des joueurs.

1.1.2 Quelques exemples de jeux les plus familiers

Nous pouvons citer :

1.1.2.1 Le dilemme du prisonnier

Ce jeu est un exemple très célèbre dans la théorie de jeux, il s'explique par :

Une mise en scène deux individus séparément après avoir été pris en flagrant délit d'infraction. De plus, la police les soupçonne d'avoir commis un crime mais ne peut pas le prouver. Pour ce fait, la police propose à chaque prisonnier de dénoncer son acolyte (afin de pouvoir l'inculper du crime), la police promet que :

- *Si un prisonnier est le seul à avoir dénoncé l'autre, il sera immédiatement libéré et l'autre sera condamné à 5 ans de prisons.*
- *Si les deux prisonniers gardent le silence, chacun sera condamné à 1 an de prison.*
- *En cas de dénonciation mutuelle, chacun sera condamné à 4 ans de prison.*

1.1.2.2 Le jeu de pierre-papier-ciseaux

Le jeu de pierre-papier-ciseaux est aussi un jeu très connu, il met en scène deux individus qui choisissent simultanément un élément dans l'ensemble $\{pierre, papier, ciseaux\}$. S'ils ont choisi le même élément, alors le jeu est nul ; dans le cas échéant, papier gagne sur pierre, pierre gagne sur ciseaux et ciseaux gagne sur papier.

1.1.3 La rationalité des joueurs

Pour la rationalité des joueurs ; nous faisons recours à la rationalité parfaite qui est la capacité de compréhension du jeu, de calcul et de raisonnement par induction à rebours (backward induction). Et également à la connaissance commune du jeu qui s'explique par :

« *Chaque joueur comprend le jeu et il sait que les autres comprennent aussi le jeu et il sait qu'ils savent qu'il comprend le jeu et il sait qu'ils savent qu'il sait qu'ils comprennent le jeu* » [30], etc.

1.1.4 Les stratégies

➤ Stratégies pures

Une stratégie pure d'un joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur à chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On not par S_i l'ensemble des stratégies pures du

joueur i et par $s_i \in S_i$ une stratégie pure de ce joueur et $|S_i| = m_i$ le nombre de stratégie du joueur i .

➤ Stratégies mixtes

Une stratégie mixte dans un jeu fini (ie $|S_i| = m_i < +\infty$) est une distribution de probabilités α définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i . On notera par :

$$\Delta_{m_i} = \{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}) \in R^{m_i}, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j = 1; \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m_i} \} \quad (1.1)$$

L'ensemble des stratégies mixtes du joueur $i \in J$ où α_j est la probabilité que le joueur i joue sa stratégie $s_j \in S_i$.

1.1.5 L'utilité (le gain)

C'est une fonction attribuée à chaque joueur et représentant son gain. Elle est aussi utilisée pour définir les préférences des joueurs. La fonction d'utilité est plus élevée pour un choix de décision donné si le joueur préfère cette décision par rapport à une autre.

Pour $i \in J = \{1, 2, \dots, N\}$, on associe une fonction d'utilité U_i définie sur l'ensemble

$S = \prod_{j=1}^N S_j \rightarrow R$ des issues possibles du jeu :

$$U_i : \prod_{j=1}^N S_j \rightarrow R$$

$$s \in S \rightarrow U_i(s)$$

1.2 Modélisation des jeux

Les jeux peuvent être modélisés sous plusieurs formes représentatives. Nous distinguons deux formes de représentations des jeux [6]. Les jeux sous forme normale et les jeux sous forme extensive.

1.2.1 Jeux sous forme normale (forme stratégique)

Un jeu sous forme normale, également connu sous forme stratégique est la représentation la plus familière des interactions stratégiques dans la théorie des jeux. Cette représentation est donnée par :

- ✓ Un ensemble $J = \{1, 2, \dots, N\}$ des joueurs
- ✓ Pour chaque joueur i , un ensemble de stratégie S_i pour chaque $i \in J$
- ✓ Pour chaque joueur i , une fonction d'utilité $U_i = \prod_{j=1}^N S_j \rightarrow R$ qui a chaque ensemble de stratégies, associe le gain du joueur i [24].

Ce qui nous permet d'écrire un jeu sous forme stratégique de la manière suivante :

$$\langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{U_i\}_{i \in J} \rangle \quad (1.2)$$

La représentation sous forme normale du jeu pierre-papier-ciseaux est la suivante :

A \ B	pierre	papier	ciseaux
pierre	(0,0)	(-1, +1)	(+1, -1)
Papier	(+1, -1)	(0, 0)	(-1, +1)
ciseaux	(-1, +1)	(+1, -1)	(0, 0)

Figure 1.2-1 : forme stratégique du jeu de pierre-papier-ciseaux

1.2.2 Jeux sous forme extensive (développée)

Un jeu sous forme extensive est défini par :

- ✓ Un ensemble fini $J = \{1, 2, \dots, N\}$ des joueurs
- ✓ Un ensemble fini qui est composé de nœuds et d'un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque coup.
- ✓ Une fonction de nommage qui indique à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer
- ✓ Une fonction de gains qui associe à chaque nœud terminal un vecteur de nombre représentant les gains de chacun des joueurs
- ✓ Une partition de nœuds en un ensemble d'information représentant les croyances des joueurs.

La figure ci-dessous donne un exemple illustratif du jeu pierre-papier-ciseaux sous forme extensive

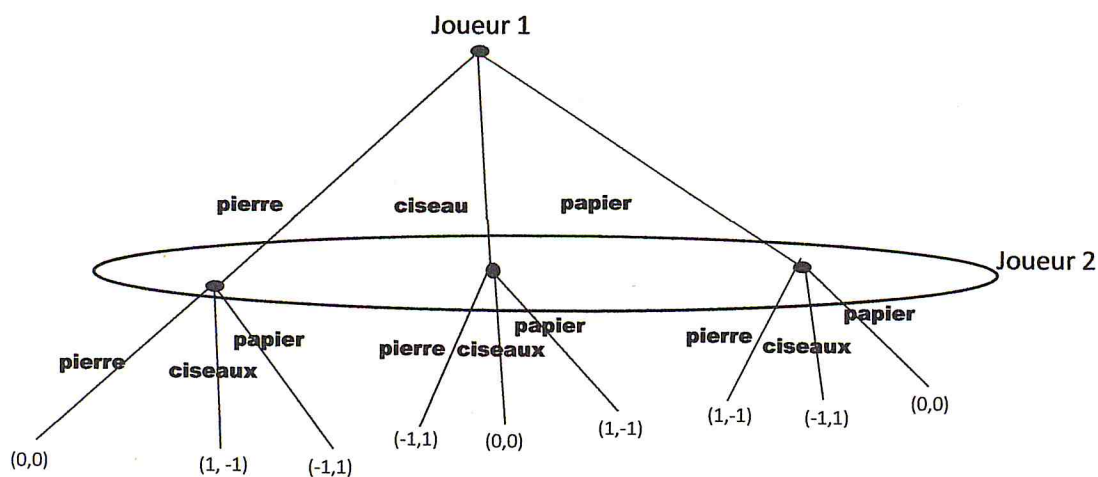


Figure 1.2-2 : le jeu pierre-papier-ciseaux sous forme extensive

1.3 Classification des jeux

Il existe plusieurs classifications de jeux dont nous définirons quelques catégories.

1.3.1 Selon l'ordre

- Jeux statique

Les jeux statiques sont les jeux les plus simples que l'on peut rencontrer en théorie de jeux et se définissent par un choix simultané des actions des joueurs en recevant ensuite leurs gains respectifs [6]. La représentation adéquate de ce jeu est la forme normale.

- Jeux séquentiels

Un jeu est dit séquentiel lorsque les joueurs interviennent les uns après les autres. La représentation la plus adéquate est la forme extensive [14].

1.3.2 Selon les relations entre les joueurs

L'une des caractéristiques fondamentales de la théorie des jeux est que le sort de chaque participant dépend non seulement des décisions qu'il prend, mais également des décisions prises par d'autres participants. Le choix optimal pour un joueur dépend donc généralement des choix des autres joueurs. Il convient alors de distinguer deux grandes familles de jeux à savoir : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs.

- Jeux coopératifs

Un jeu est dit coopératif (ou coalitionnel) lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante (contrats, lois, sanctions, ...). On dit alors qu'ils forment une coalition dont les membres agissent de concert [6].

- Jeux non coopératifs

Contrairement aux jeux coopératifs, un jeu est non coopératif lorsque chaque joueur cherche à maximiser son gain en tenant compte de la stratégie des autres. Donc il est impossible de former des coalitions.

1.3.3 Selon les gains des joueurs

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux jeux non coopératifs, qui se divisent en deux grandes familles également, à savoir : les jeux à somme nulle et les jeux à somme non nulle.

- Jeux à somme nulle

Les jeux à somme nulle sont les jeux où la somme des fonctions de paiement des joueurs est nulle. Dans ce type de jeu, les intérêts des joueurs opposés, donc le conflit est total et il n'y a pas de coopération possible.

- Jeux à somme non nulle

Un jeu à somme non nulle se définit comme étant un jeu où au moins pour une situation de jeu, la somme des gains des joueurs n'est pas nulle.

1.3.4 Selon l'information

Nous distinguons :

- Les jeux à information parfaite

Ce sont des jeux dans lesquels les joueurs accomplissent des actions les uns après les autres, dans un ordre prédéterminé en connaissant à tout instant les actions déjà choisies (les actions passées des autres joueurs).

- Les jeux à information imparfaite

Un jeu est à information imparfaite si l'arbre de jeu comporte au moins un nœud où un joueur n'observe pas toutes les actions passées.

- Jeux à information complète

Un jeu est à information complète si tous les joueurs ont une connaissance parfaite de la structure du jeu [28], c'est-à-dire l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information de chaque joueur et l'histoire du jeu.

- Jeux à information incomplète

C'est un jeu où au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement la structure du jeu.

1.4 Jeux finis et jeux infinis

Un jeu est fini si l'ensemble des stratégies de chaque joueur est fini. En d'autres termes un jeu est fini si $\forall i \in J$, l'ensemble S_i contient un nombre fini de stratégies.

Ce qui nous permet de dire qu'un jeu est infini s'il existe au moins un $i \in J$ tel que l'ensemble S_i est infini.

1.5 Les jeux symétriques

Un jeu est dit symétrique si tous les joueurs ont les mêmes stratégies et les mêmes gains.

1.6 Concept de solution

L'analyse d'un jeu permet de prédire l'équilibre qui émergera si les joueurs sont rationnels.

Un équilibre est un état ou une situation dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement un fois connu le comportement des autres joueurs. Parmi les résultats possibles, nous devons déterminer ceux auxquels le jeu peut aboutir : les résultats du jeu.

La solution idéale correspond à un équilibre unique et nous pouvons dans ce cas prédire la solution précise de cette situation conflictuelle. Néanmoins, on a souvent des équilibres multiples, et parfois il n'existe même pas d'équilibre. Nous donnerons quelques exemples d'équilibre dans les paragraphes qui suivent.

1.6.1 Equilibre de Nash

L'équilibre de Nash doit son nom au mathématicien et économiste américain John F Nash qui a introduit ce concept en 1950. Cette notion d'équilibre désigne une situation où chacun des

joueurs maximise ses gains. Il décrit également une issue du jeu dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie compte tenu de la stratégie de chacun de ses rivaux.

- Equilibre de Nash en stratégie pure

Une situation $s^* = \{s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*\} \in S$ est un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu (1.2) si :

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i, \forall i \in J \quad (1.3)$$

Avec

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$$

Autrement dit, un équilibre de Nash correspond à une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre.

- Equilibre de Nash en stratégies

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour le jeu (1.2) est un ensemble de stratégies mixtes α^* tel que :

$$U_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*), \forall \alpha_i \in \Delta_{m_i}, \forall i \in J \quad (1.4)$$

Avec

$$\Delta_{m_i} = \{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}) \in R^{m_i}, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m_i}, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j = 1 \}$$

Ainsi, tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Et il a été démontré que tout jeu fini admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

1.6.2 Equilibre de Pareto

On dit que $\hat{s} \in S$ est un équilibre de Pareto du jeu (1.2) si pour n'importe quelle situation $\check{s} \in S$, le système d'inégalités suivant est vérifié :

$$U_i(\hat{s}_i) \geq U_i(\check{s}_i), \text{ dont au moins une est stricte } \forall i \in J [12]$$

1.7 Dominance

1.7.1 Stratégie strictement dominée

Etant donné le jeu (1.2), une stratégie $s_i \in S_i$ du joueur i est dite strictement dominée s'il existe $s_i' \in S_i$ telle que :

$$\forall s_{-i} \in S, U_i(s_i, s_{-i}) < U_i(s_i', s_{-i}) \quad (1.5)$$

Ce qui nous permet de dire que s_i est strictement dominée par s_i' ou que s_i' domine strictement s_i .

1.7.2 Stratégie faiblement dominée

Une stratégie $s_i \in S_i$ du joueur i est dite faiblement dominée si :

$$\exists s_i' \in S_i, \text{ telle que } \forall s_{-i}, U(s_i, s_{-i}) \leq U(s_i', s_{-i})$$

1.7.3 Equilibre en stratégie dominante

Une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominante si elle domine toutes les autres stratégies [8]. Formellement,

$$\forall i \in J, \forall s_i' \in S_i, U(s_i, s_{-i}) > U(s_i', s_{-i}) \quad (1.6)$$

Une conséquence quasi-immédiate de la définition est :

Proposition 1.7.1 [8] : Si une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominante, alors elle est unique à avoir cette propriété.

Si un joueur a une stratégie dominante, on peut alors penser que cette stratégie constitue un bon choix. Pour chaque choix des autres, elle donne le meilleur gain possible.

1.8 Jeux à deux joueurs

Les jeux à deux joueurs ou duels regroupent la plus grande partie des jeux courants, comme les échecs, les dames, ou encore les deux équipes. Nous définissons ce jeu comme étant un cas particulier du jeu défini par la relation (1.2) lorsque l'ensemble des joueurs est réduit à deux ($N = \{1, 2\}$) et chacun des joueurs a un nombre fini de stratégies.

Dans ce qui suit, nous présenterons les principaux résultats concernant les jeux à deux joueurs ; ces derniers comportent deux catégories à savoir : *jeux finis à somme nulle et à somme non nulle*.

1.8.1 Jeux matriciels

Un jeu matriciel est un jeu fini à deux joueurs à somme nulle. Il est dit matriciel car il peut être complètement identifié par la matrice de gains d'un des joueurs. Ce jeu est représenté comme suit :

$$J = \langle S_1, S_2, A \rangle \quad (1.7)$$

Avec :

- ❖ $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{m_1}\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur P_1
- ❖ $S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{m_2}\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur P_2
- ❖ $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, m_2} : (a_{ij})$ est le gain du premier joueur quand il joue sa stratégie $x_i \in S_1$ et le deuxième joueur sa stratégie $y_j \in S_2$

- Concept de solution

Le concept d'équilibre de Nash dans les jeux à deux joueurs à somme nulle correspond au point selle donné par la définition suivante :

Définition 1.8.1 :

On appelle point selle ou équilibre de Nash, un couple $(x_{i^*}, y_{j^*}) \in S_1 \times S_2$ telle que:

$$a_{i^* j^*} \leq a_{i^* j} \leq a_{i^* j^*} \quad \forall i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, m_2}$$

1.8.2 Jeux bi-matriciels

Un jeu à deux joueurs à somme nulle peut être représenté par deux $m_1 \times m_2$ -matrices A et H, où A est la matrice de gains du joueur (P_1), et H la matrice de gains du joueur (P_2). Pour les deux matrices, les lignes correspondent aux stratégies pures de (P_1) et les colonnes à celles de (P_2) d'où l'appellation de jeu bi-matriciel.

Lorsque les deux joueurs choisissent leurs stratégies pures $x_i \in S_1$ et $y_j \in S_2$, la situation qui en résulte est décrite par le couple (x_i, y_j) . Un tel jeu est représenté de la manière suivante :

$$J_2 = \langle S_1, S_2, A, H \rangle \quad (1.8)$$

Avec

- ❖ S_1 et S_2 définies dans le jeu (1.7)
- ❖ A est la matrice de gains du joueur (P_1) définie par la relation suivante :

$$A = (a_{ij}) \quad \text{où } (a_{ij}) = U_1(x_i, y_j), \quad \forall i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, m_2}$$

- ❖ H est la matrice de gains du joueur (P_2) définie par :

$$H = (h_{ij}) \quad \text{où } (h_{ij}) = U_2(x_i, y_j), \quad \forall i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, m_2}$$

- Concept de solution

Définition 1.8.2 : une situation $(x_{i^*}, y_{j^*}) \in S_1 \times S_2$ est en équilibre de Nash du jeu bi-matriciel (1.8) si :

$$a_{i^* j^*} \geq a_{i^* j}, \quad \forall i = \overline{1, m_1}$$

$$h_{i^* j^*} \geq h_{i^* j}, \quad \forall j = \overline{1, m_2}$$

1.9 Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à la présentation des notions de base de la théorie de jeux qui nous seront utiles pour les chapitres qui suivent. Dans le chapitre 2, nous donnerons quelques

rappels sur les processus stochastiques et les files d'attente Markoviennes afin de mieux comprendre les analyses des systèmes d'attentes que nous avons abordées dans ce travail.

2 Processus stochastiques et files d'attente Markoviennes

L'évaluation de performances des systèmes est un domaine qui prend de plus en plus d'importance. Etant donné que les paramètres de performances sur le système réel ne peuvent être mesurés directement, il s'agit donc de proposer un formalisme mathématique permettant de le décrire au mieux. D'où l'importance de l'étape de modélisation.

Nous présenterons brièvement quelques définitions et principaux résultats sur les processus stochastiques et les files d'attente. Nous parlerons en particulier des files d'attente Markoviennes et nous nous attarderons également sur l'analyse du modèle $M/M/1$.

2.1 Processus stochastiques

On peut définir un processus stochastique comme étant une famille de variables aléatoires (v-a) $\{X_t, t \in T\}$ indexées par le temps t où T est un ensemble (dénombrable ou non) et $X(t)$ représente l'état du processus [13]. Les mots « processus » et « stochastique » signifient respectivement « fonction », « aléatoire ». Alors qu'une variable aléatoire X associe à chaque $\omega \in \Omega$ une réalisation, un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ associe à chaque ω une fonction (ou trajectoire) donnée par :

$$\begin{aligned} X: T &\rightarrow E \\ t &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

Où E est l'espace d'arrivées des variables aléatoires X_t , appelé également espace d'états du processus.

2.1.1 Processus de comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ en supposant que $N(0) = 0$. Nous cherchons à déterminer la distribution de cette valeur aléatoire discrète.

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ le temps d'occurrence du n ième évènement, le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé processus de comptage associé à $(S_n)_{n \geq 0}$ si ses réalisations sont des fonctions en escalier non décroissantes [25].

Tout processus de comptage vérifié les deux propriétés suivantes :

- ✓ pour $t \geq 0$, le nombre $N(t)$ est à valeurs entières positives,
- ✓ $N(u + t) - N(u)$ représente le nombre d'évènements se produisant dans

l'intervalle semi-ouvert $]u, u + t]$

Voici quelques exemples où l'on s'intéresse au comptage du nombre d'occurrences d'un évènement :

- Les appels téléphoniques à un standard,
- Les prises de poissons d'un pêcheur,
- Naissances d'individus,
- Arrivées de clients dans un guichet,
- L'occurrence d'accidents dans une entreprise,
- Le nombre d'étudiants présents dans une salle,
- Pannes de machines dans une usine... .

2.1.2 Processus de Poisson

Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ tel que $N(0) = 0$ est un *processus de Poisson* s'il satisfait aux trois conditions suivantes [2] :

- ✓ $N(t)$ est homogène dans le temps : i.e. le nombre d'évènements se produisant dans un intervalle de temps $[0, t]$ ne dépend que de t . Autrement dit :

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = P(N(t) = k) = P_k(t)$$

- ✓ $N(t)$ est à accroissements indépendants : i.e. le nombre d'évènements se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants :

$$\begin{aligned} P(N(s+t) - N(s) = k, N(s) = j) &= P(N(s+t) - N(s) = k) * P(N(s) = j) \\ &= P_k(t) * P_j(s) \end{aligned}$$

- ✓ La probabilité que deux évènements ou plus se produisent dans un petit intervalle (Δt) est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul évènement. i.e. :

$$P_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & (k \geq 2) \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t) & (k = 1) \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) & (k = 0) \end{cases}$$

Le coefficient λ est appelé intensité du processus de Poisson.

2.1.3 Loi d'un processus de Poisson

La distribution de probabilités d'un processus de comptage $N(t)$ satisfaisant aux trois conditions précédentes est donné par :

$$P(N(t) = k) = P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} * e^{-\lambda t}$$

Dont l'espérance et la variance sont données par :

$$E[N(t)] = \lambda t \text{ et } var[N(t)] = \lambda t$$

2.1.4 Loi exponentielle

Une variable aléatoire T à valeurs dans R_+ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \geq 0$ si sa fonction de densité est donnée par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Sa fonction de répartition sera alors donnée par : $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, son espérance est : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$; et sa variance est $var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.

NB : la loi exponentielle est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire que l'on exprime formellement par :

$$\forall s, t \geq 0 ; P(T > t + s | T > s) = P(T > t)$$

2.1.5 Processus de Poisson et loi exponentielle

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ et T_n la durée entre l'avant dernier et le dernier évènement (i.e. $(n-1)$ ième et n ième évènement). Nous avons les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.1.1. [2] : les temps d'attentes T_n d'un processus de Poisson de paramètre λ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Théorème 2.1.2. [2] : un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si les intervalles de temps entre deux évènements consécutifs sont des variables aléatoires iid obéissant à la même loi exponentielle de paramètre λ .

2.2 Chaîne de Markov à temps discret

On considère un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in N}$ à espace d'état discret et à temps discret. E est l'espace d'état, il peut être de dimension finie ou infinie (mais dénombrable car discret). $\{X_n\}_{n \in N}$ est une chaîne de Markov à temps discret s'il vérifie la propriété de Markov suivante [5] :

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

Pour tout $n \geq 0$ et pour tout état $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in E$.

Autrement dit, une chaîne de Markov est un processus stochastique dont la dépendance au passé est résumée par la seule observation présente.

Une chaîne de Markov à temps discret est dite *homogène (dans le temps)* si pour toute paire d'états (i, j) et tout instant n :

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = i] \quad \forall k \geq 0 \text{ [31]}$$

2.3 Chaines de Markov à temps continu

On considère un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ à espace d'état discret et à temps continu. E est l'espace d'état, il peut être de dimension finie ou infinie mais dénombrable (car discret).

$\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu si et seulement si [5]:

$$P[X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1},$$

$$\forall n \text{ et } \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

Une chaîne de Markov à temps continu est homogène si :

$$P[X(t+s) = j | X(s) = i] = P[X(t) = j | X(0) = i]$$

2.4 Processus de naissance et de mort

Utilisés plus particulièrement en biologie, démographie, physique, sociologie, pour rendre compte de l'évolution de la taille d'une population, les processus de naissance et de mort sont des chaînes de Markov à temps continu dont l'espace des états est E et A sa matrice génératrice telles que les seules transitions non négligeables possibles de i soit vers $(i+1)$ ou vers $(i-1)$ [11], et dont la matrice $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$a_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| \geq 2$$

On note par :

$$\lambda_i = a_{i,i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ le taux de naissance à l'état } i$$

$$\mu_i = a_{i,i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ le taux de mort à l'état } i \text{ (notons que } \mu_0 = 0)$$

Nous obtenons ainsi :

$$a_{ii} = -\lambda_i - \mu_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Les files d'attente de type Markovien ($M|M$) sont des cas particuliers très importants des processus de naissance et de mort.

La matrice génératrice de la chaîne est comme suit :

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le graphe représentatif de ce processus est donné par la figure suivante :

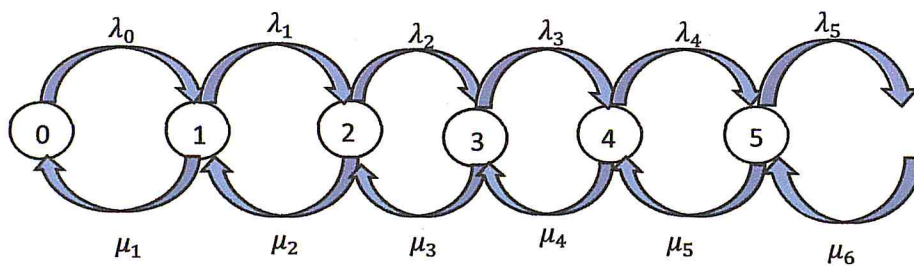


Figure 2.4-1 : graphe du processus de naissance et de mort

2.5 Les files d'attente

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. Elles sont rencontrées dans divers domaines d'activités comme :

Les guichets de poste, le trafic routier, les centrales téléphoniques, les ateliers de réparation, etc. L'étude mathématique de ces phénomènes constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

Un phénomène d'attente peut être décrit comme un système où certaines unités appelées « clients » désirent recevoir un service à un guichet et peuvent avoir à attendre que d'autres clients soient servis.

Afin de spécifier complètement une file d'attente, nous devons donner ses caractéristiques à savoir : le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

2.5.1 Le processus d'arrivée

L'arrivée des clients dans une station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage $\{N_t\}_{t \geq 0}$.

Soit A_n la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client dans le système avec $A_0 = 0$. Soit T_n la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du $(n-1)^{\text{ième}}$ client et du $n^{\text{ième}}$ client, alors on aura alors : $T_n = A_n - A_{n-1}$.

Nous représentons un système de file d'attente par ce schéma ci-dessous :

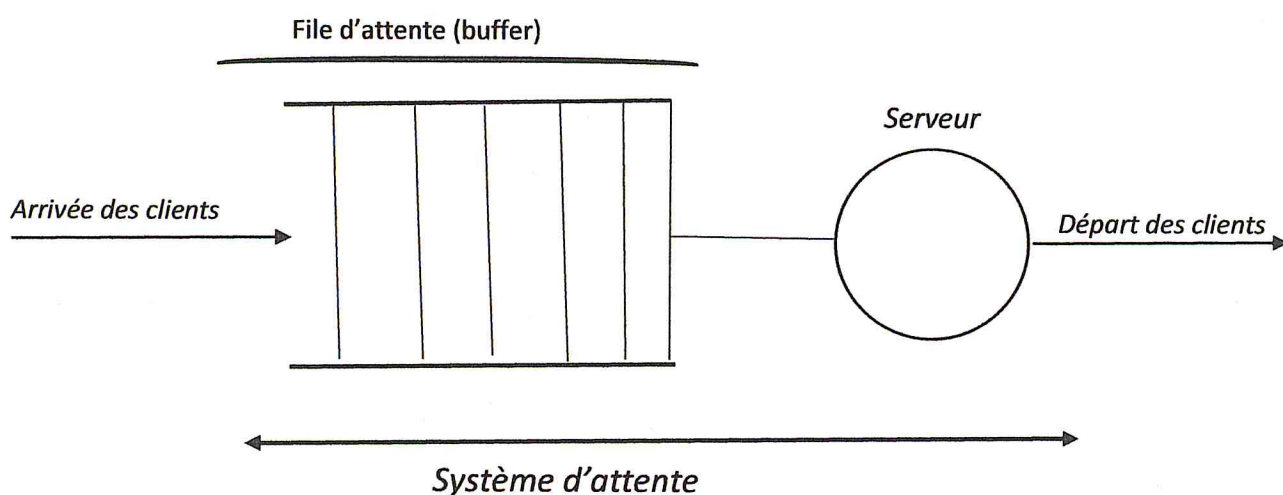


Figure 2.5-1 : système de file d'attente

2.5.2 Le temps de service

Soit D_n la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du $n^{\text{ième}}$ client du système et soit B_n la variable aléatoire mesurant le temps de service du $n^{\text{ième}}$ client (le temps séparant le début de la fin du service).

Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet qu'un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. Le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée d'un nouveau client.

Nous considérerons des stations dont les temps de service consécutifs sont décrits par les variables aléatoires $\{B_n\}_{n \geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées (iid). Si nous notons le taux de service par μ , alors la durée moyenne de service est $\frac{1}{\mu}$. Et notons également que la distribution du temps de service la plus simple à étudier (et donc la plus couramment employée) est la distribution exponentielle. Cependant, la propriété de « *sans mémoire* » de cette loi fait que celle-ci n'est pas généralement très réaliste pour modéliser les phénomènes réels. On est souvent obligé de recourir à d'autres distributions de service.

2.5.3 Structure et discipline de la file

➤ Nombre de serveurs

Une station peut disposer d'un ou de plusieurs serveurs en parallèle. Soit s le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur libre et ce client entre instantanément en service, ou soit tous les serveurs sont occupés et le client se place automatiquement dans le buffer en attendant la libération d'un serveur.

Pour définir une station multiserveur, il faut définir la distribution de service de chacun des serveurs. La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ils possèdent donc la même distribution) et indépendants les uns des autres.

➤ La capacité de la file

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit K la capacité de la file (incluant le ou les clients en service). Dans une file à capacité illimitée, nous avons $K = +\infty$. Lorsque la capacité de la file est limitée et qu'un client trouve cette dernière pleine, alors ce client sera perdu.

➤ Discipline de service

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont [32] :

- FIFO (*First In First Out*) ou FCFS (*First Come First Served*) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis selon leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file, tandis que dans la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, chez un autre serveur, termine avant lui.
- LIFO (*Last In First Out*) ou LCFS (*Last In First Served*) ou DAPS (*Dernier Arrivé Premier Servi*) : cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). A nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une *file mono-serveur*.
- RANDOM (*aléatoire*) : le prochain client qui servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.
- ROUN-ROBIN (*cyclique*) : tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuent un *quantum* Q de leur temps de service et sont replacés dans la file jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli. Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser des systèmes informatiques.

- PS (*Processor Sharing*) : c'est le cas limite de la discipline ROUND-ROBIN lorsque le quantum de temps Q tend vers 0. Tous les clients sont servis en même temps avec une vitesse inversement proportionnelle au nombre de clients simultanément présents. Si le taux de service est égal à μ et qu'à un instant donné, il y a n clients à la station, tous les clients sont donc simultanément servis avec un taux $\frac{\mu}{n}$.

Remarque : *dire que les n clients sont servis simultanément ne signifie absolument pas qu'ils seront libérés simultanément.*

2.5.4 Notation de Kendall

La plupart des files d'attente peuvent être classifiées par une séquence de 6 symboles appelée *notation de Kendall*. Ces symboles sont rangés dans l'ordre suivant :

$A/B/C/D/E/F$ Tels que :

A : indique la distribution des temps d'inter-arrivées des clients

B : la distribution des temps de service

C : le nombre de serveurs

D : la capacité du système

E : la capacité de la source

F : la discipline de la file

Les lois des deux premiers symboles (A et B) sont données par :

- ✓ M : loi exponentielle (Markovienne)
- ✓ G : loi générale
- ✓ D : loi constante (déterministe)
- ✓ E_k : loi d'Erlang d'ordre k
- ✓ H_k : loi hyper exponentielle

Lorsque la capacité du système et de la source sont infinies et la discipline est FIFO, on se contente alors des trois premiers symboles.

2.6 Les files d'attente Markoviennes

Les files d'attente markoviennes sont celles pour lesquelles les inter-arrivées et les durées de service sont exponentielles. Celles-ci sont caractérisées par le fait que le processus $N(t)_{t \geq 0}$ qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant t est de naissance et de mort. Leur notation de Kendall sera de la forme $M/M/...$ (M comme markovien).

2.7 Analyse mathématique

Nous nous intéressons en premier lieu au nombre de clients $N(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t et soit $P_n(t) = P[N(t) = n]$ les probabilités d'états définissant le régime transitoire du processus $\{N(t), t \geq 0\}$.

Le régime stationnaire du processus stochastique $\{N_t, t \geq 0\}$ défini par les distributions stationnaires de ce processus est : $P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P[N(t) = n] \quad n = 0, 1, 2, \dots$

2.8 Caractéristiques d'un système de file d'attente

Nous pouvons obtenir d'autres caractéristiques du système à partir de la distribution stationnaire du processus $\{N(t), t \geq 0\}$ telles que :

- L : le nombre moyen de clients dans le système
- L_q : le nombre moyen de clients dans la file d'attente
- W : le temps moyen de séjour d'un client dans le système

- W_q : le temps moyen de séjour d'un client dans la file d'attente.

2.8.1 Formule de Little

Le nombre moyen de clients dans le système est donné par :

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n \quad (2.1)$$

Nous pouvons également écrire le nombre moyen de clients dans la file d'attente par :

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=c}^{+\infty} (n - c)P_n \quad (2.2)$$

Avec N_q le nombre de clients dans la file d'attente.

Pour trouver W et W_q , nous faisons recours aux formules de Little données par le théorème suivant, plus précisément pour le modèle M/M/1.

Théorème 2.8.1 : [33]

Soient λ le taux d'arrivée et $\frac{1}{\mu}$ le temps moyen de service, on aura alors :

$$\begin{aligned} L &= \lambda \cdot W \\ L_q &= \lambda \cdot W_q \\ L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} \\ W &= W_q + 1/\mu \end{aligned}$$

2.9 Description du modèle M/M/1

Considérons un système de file d'attente de capacité infinie et d'un unique serveur. La discipline de service de la file est FIFO. Le processus d'arrivée des clients est de Poisson de taux λ (ce qui veut dire que les inter-arrivées sont exponentielles de paramètre λ), et le temps de service d'un client est une variable aléatoire ayant une distribution exponentielle de taux μ . Ce système est connu sous le nom d'une file d'attente M/M/1

2.9.1 Caractéristiques de la file M/M/1

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ le processus de naissance et de mort qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant $t \geq 0$ et P_n ses probabilités d'états. Cette file est caractérisée par le graphe de transition suivant :

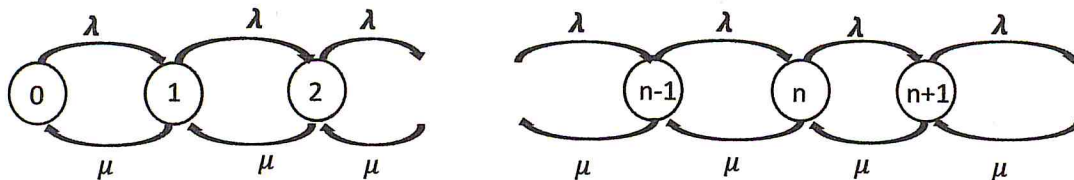


Figure 2.9-1 : graphe de transition de la file M/M/1

Les équations d'équilibre (équations de Kolmogorov) de ce système sont données comme suit :

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} * P_0 \quad \text{pour } n = 0$$

$$(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_1 \quad \text{pour } n = 1$$

$$(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

En raisonnant par récurrence, on obtient :

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0$$

En posant $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et en se servant du fait que les P_n définissent une distribution de probabilité, on peut alors écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$. Ce qui nous permet d'obtenir la probabilité $P_0 = 1 - \rho$. D'où l'expression finale des probabilités d'états est donnée par :

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) \quad (2.3)$$

Le nombre moyen de clients dans le système

Il s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n (1 - \rho) \rho^n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{+\infty} n \rho^n \end{aligned}$$

$$D'où \quad L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2.4)$$

Le nombre moyen de clients dans la file

Il est également donné par :

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n - 1) P_n \\ L_q &= \frac{\rho^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le temps moyen de séjour dans le système

En utilisant les formules de Little, on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} * \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \\ W &= \frac{1}{\mu - \lambda} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le temps moyen de séjour dans la file

De même comme le précédent, le temps moyen de séjour dans la file peut être déterminé en utilisant les formules de Little :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} * \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$
$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.7)$$

2.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'introduction de quelques notions de bases des processus stochastiques qui gouvernent certains modèles d'attente, à savoir les files d'attente Markoviennes et nous nous sommes intéressés en particulier au modèle M/M/1.

3 Quelques modèles de files d'attente Markoviennes via la théorie des jeux

En ce qui concerne l'application de la théorie des jeux en files d'attente Markoviennes, nous distinguons deux types de travaux :

- ❖ *Des travaux considérant que les joueurs sont les serveurs, où les jeux sont simultanés et non-coopératifs,*
- ❖ *Des travaux considérant que les joueurs sont les clients, où les jeux sont considérés séquentiels et non-coopératifs.*

Le premier travail réalisé concernant ce thème a été effectué en 1969 par *P. Naor* sur un modèle M/M/1 où il étudia le comportement des clients dans une station de péage [29]. Depuis ce, plusieurs travaux ont vu le jour [31], [9], [15], [10], [34], [21], [7], [16], [18], [20], [22],

Ce chapitre consistera à présenter quelques modèles de files d'attente markoviennes via la théorie des jeux. Dans un premier temps, nous présenterons des modèles de jeux entre les clients et dans un second temps, par ceux où les joueurs sont les serveurs.

3.1 La file d'attente M/M/1 simple et observable

Cette littérature remonte à Naor (1969) qui suppose que les paramètres de service sont connus et que l'actuelle « information sur l'état » est annoncée.

3.1.1 Le modèle descriptif

Considérons une file d'attente M/M/1/FIFO où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ , le service est considéré exponentiel de taux μ .

Chaque client entrant dans le système paye un coût fixe θ d'entrée à la file, encourt également un coût C par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système et reçoit en retour une récompense R une fois servi [29].

A l'arrivée d'un client, s'il trouve n clients dans le système, alors sa durée moyenne de séjour sera égale à la somme des n durées de séjour des clients qui le précèdent plus (+) la durée de séjour de lui-même. Cette durée est donnée par : $\frac{n+1}{\mu}$.

3.1.2 Le jeu associé à ce modèle

Nous pouvons modéliser cette situation comme étant un jeu entre les clients. Chaque client observe à son arrivée la longueur de la file et sélectionne une alternative sur deux : soit « entrer », soit « quitter » pour de bon. Dès qu'un client i arrive dans le système et trouve n clients, sa fonction de gain sera :

$$U_i = \left(R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \theta \right) j \quad (3.1)$$

Avec $j = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ entre} \\ 0 & \text{si le client } i \text{ quitte} \end{cases}$

Cette fonction est la même pour tous les joueurs. On peut alors dire que ce jeu est symétrique.

Supposons qu'il n'existe pas de coût pour un client qui ne rejoint pas la file d'attente, mais si un client décide d'entrer, alors il ne pourra plus revenir sur sa décision.

L'objectif était de trouver une taille n_e , telle qu'au moment d'arrivée d'un client, si $(t) \leq n_e$, alors le client rejoint la file, sinon il quitte, sachant que $\{N(t), t \geq 0\}$ représente le nombre de clients dans le système à l'instant t .

3.2 File d'attente M/M/1 simple et non observable

Edelson et Hildebrand (1975) [16] ont étudié la version inobservable de Naor [29], dans laquelle les clients prennent leurs décisions sans observer l'état du système.

Chaque client (joueur) a deux stratégies : $\{\text{entrer}, \text{quitter}\}$. La fonction d'utilité d'un client i est $U_i(q, p)$ donnée lorsque ce client utilise les stratégies mixtes $(q, 1 - q)$ et les autres utilisent les stratégies mixtes $(p, 1 - p)$. Cette fonction est donnée par :

$$U(q, p) = \left(R - \frac{C}{\mu - p\lambda} - \theta \right) \quad (3.2)$$

L'objectif était de trouver l'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

3.3 File d'attente M/M/1 avec possibilité d'inspection

Après les travaux de Naor [29], Edelson et Hildebrand [14], un autre type de travaux qui consiste à généraliser les travaux précédents du fait qu'il englobe les deux situations (observable et non observable) a vu le jour [20].

3.3.1 Le modèle descriptif

Soit une file d'attente M/M/1, où les clients arrivent suivant un processus poissonnien de taux λ et le service est exponentiel de taux μ .

A la question traditionnelle de rejoindre ou de quitter la file, nous ajoutons une troisième option dans laquelle les clients peuvent inspecter la longueur de la file et décider ensuite de rejoindre ou de quitter.

Notons par $C_w > 0$ le coût d'attente par unité de temps, $C_I \geq 0$ le coût d'inspection. Après être servis, les clients reçoivent une récompense $R > 0$.

Supposons que chaque client inspecte la file avec une probabilité P_I , quitte la file sans l'inspecter avec une probabilité P_B , et rejoint la file sans l'inspecter avec une probabilité

$$P_J = 1 - P_I - P_B.$$

Le taux d'entrée sera alors :

$$\lambda_e = \begin{cases} (1 - P_B)\lambda & \text{si } n < n_e \\ P_J & \text{si } n \geq n_e \end{cases}$$

L'objectif d'un client étant de maximiser son gain, il sera alors nécessaire de calculer son bénéfice. Notons par :

U_B : la fonction d'utilité d'un client pour le cas de quitter sans inspecter la file

U_J : la fonction d'utilité d'un client pour le cas de rejoindre la file sans l'inspecter

U_I : pour le cas d'inspection

Ainsi on aura :

$$U_B = 0 \quad (3.3)$$

$$U_I = \sum_{n=0}^{n_e-1} P_n \left(R - \frac{C_w(n+1)}{\mu} \right) - C_I \quad (3.4)$$

$$U_J = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(R - \frac{C_w(n+1)}{\mu} \right) \quad (3.5)$$

L'objectif de ce travail était de trouver les stratégies mixtes qui correspondent aux probabilités P_B, P_I, P_J .

Remarque 3.4.1:

Lorsqu'un client décide d'inspecter la file, alors nous nous retrouvons dans un jeu similaire à celui défini par Naor, et si le client décide de ne pas inspecter la file, alors nous revenons dans le jeu défini par Edelson et Hildebrand.

3.4 File d'attente M/M/1 avec panne du serveur

Un autre type de système d'attente réalisé par *O. Bountali et A. Economou* [7] voit le jour en étudiant le comportement des clients dans une file d'attente M/M/1 avec des retraits complets en cas de catastrophe (panne du serveur).

3.4.1 Description du modèle

Considérons une file d'attente à serveur unique avec un espace d'attente infini (capacité de la file), dans laquelle les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . Les exigences de service des clients successifs sont indépendantes et distribuées exponentiellement avec un taux μ . Le système est sujet à des catastrophes (pannes du serveur) selon un processus de Poisson de taux ξ .

En cas de panne du serveur, tous les clients sont contraints d'abandonner le système prématurément sans être servis. Le système est alors rendu inopérant et un processus de réparation est activé. La durée de réparation est distribuée de manière exponentielle de taux η et au cours de la réparation, les arrivées ne sont pas acceptées. Supposons enfin que les temps d'inter-arrivées, de service, d'inter-catastrophes et de réparation sont mutuellement indépendants.

Nous représentons l'état du système à l'instant t par le couple $(N(t), I(t))$ où $N(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t et $I(t)$ l'état du serveur qui prend les valeurs 1 si le système est en fonctionnement et 0 si le système est en réparation.

Notons bien qu'à chaque fois que $I(t) = 0$, alors $N(t)$ doit nécessairement être égal à zéro. Le graphe de transition de ce modèle est donné par la figure suivante :

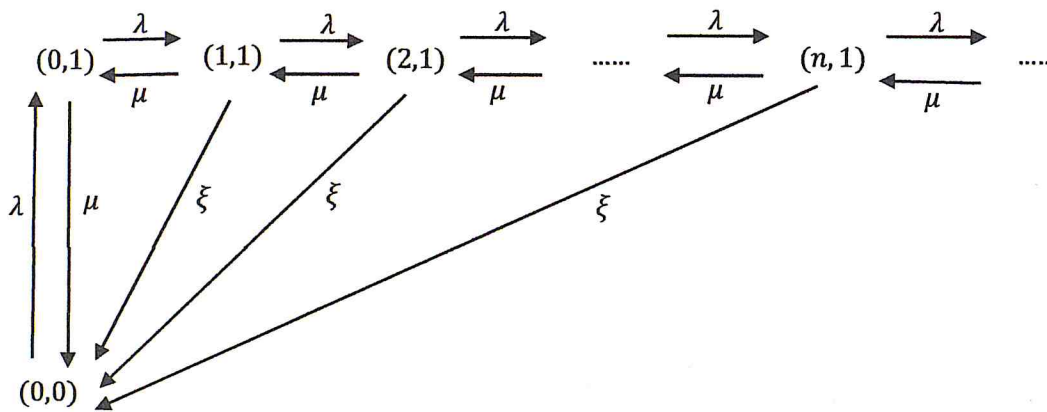


Figure 3.4-1 : *graphe de transition d'une file d'attente M/M/1 avec panne du serveur*

3.4.2 Modélisation sous forme d'un jeu

Etant donné que l'ensemble des joueurs sont les clients, chaque joueur a pour alternatives :

- Soit rejoindre la file (r)
- Soit quitter (q)

Les fonctions de gains des clients des joueurs diffèrent selon l'information disposée. Ces fonctions sont données explicitement dans la section qui suit.

3.4.3 Les règles du jeu

Nous nous intéressons au comportement des clients (joueurs) quand ils ont la possibilité de décider s'ils vont s'inscrire ou non. Nous modélisons ce cadre de décision en supposant que chaque client reçoit soit une récompense de R_s unités pour avoir terminé son service, soit une compensation de R_f unités au cas où il serait contraint d'abandonner le système en raison d'une défaillance. De plus, un client doit payer un montant de C unités par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système (en file d'attente ou dans l'espace de service).

Nous supposons également que les clients sont neutres en matière de risque et souhaitent maximiser leurs bénéfices nets. Enfin, leurs décisions sont présumées irrévocables, c'est-à-dire que ni la renonciation, ni les nouvelles tentatives de réprimande des clients ne sont autorisées. Etant donné que tous les clients sont supposés indiscernables, nous pouvons considérer cette situation comme un jeu symétrique entre eux.

Deux cas se présentent en ce qui concerne le niveau d'information disponible pour les clients à leurs arrivées, avant que leurs décisions ne soient prises : *le cas observable et le cas non observable*.

❖ Cas observable

Sans cette section, nous étudions le modèle supposant que le client qui trouve le serveur actif observe le nombre de clients $N(t)$ dans le système avant de décider d'entrer ou non.

Chaque joueur a pour alternatives : soit « entrer » ou soit « quitter ».

Le bénéfice net escompté d'un client qui observe n clients dans le système à son arrivée et décide d'y entrer est donné par :

$$U_{obs} = R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + R_f \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right] - \frac{C}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right], n \geq 0 \quad (3.6)$$

Telle que :

$\left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1}$ est la probabilité d'être servi;

$\frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right]$ est le temps moyen d'attente

Les auteurs ont trouvé l'équilibre de Nash pour ce jeu.

❖ Cas non observable

Nous tournons maintenant notre intérêt pour le cas non observable, dans lequel les clients ne connaissent que les valeurs des paramètres du système, et des paramètres économiques R_s , R_f et C . Mais n'observent pas l'état du système à leurs arrivées (c'est-à-dire $N(t)$). Dans ce cas, la fonction d'utilité d'un client est alors :

$$U_{nobs}(1, q) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{nobs}(k, 1) \cdot U_{obs}(k) \quad (3.7)$$

Avec $P_{nobs}(k, 1)$: la probabilité qu'il ait k clients dans le système lorsque le serveur est actif.

Il s'agit donc de chercher l'équilibre en stratégies mixtes tel qu'un client qui arrive entre avec la probabilité P_e .

3.5 La file d'attente M/M/1 avec vacances

Tout comme dans les modèles précédents, l'objectif visé dans ce modèle est la maximisation du bien être individuel et social des clients et également la détermination d'un meilleur taux d'entrée dans le système [18].

3.5.1 Le modèle

Considérons une file d'attente M/M/1/FIFO dans laquelle le service s'arrête en l'absence des clients et n'est repris que lorsque de la file d'attente atteint une longueur critique " N " donnée. Sauf indication contraire, supposons que $N > 1$, sinon cela devient une file d'attente normale. Nous pouvons dire que le serveur fait usage à la " N -politique".

3.5.2 Le jeu associé à ce modèle

Chaque client reçoit une récompense de R unités pour un service rendu et un coût d'attente de C unités de temps pour le séjour effectué dans le système. On note alors par :

W : le temps moyen d'attente dans le système

W^i : le temps moyen d'attente conditionnelle.

Nous pouvons associer deux différents jeux à ce système selon l'information dont on dispose.

❖ Cas non observable

Les clients qui arrivent n'observent pas la longueur de la file. De toute évidence, toute négligence (quitter) est toujours une stratégie en équilibre de Nash (avec $N > 1$). Si tous les clients choisissent de quitter, alors le serveur ne reviendra jamais en fonction, donc $\lambda = 0$ est toujours un taux d'équilibre. Lorsqu'un client utilise les stratégies mixtes $(q, 1 - q)$ et les autres les stratégies $(p, 1 - p)$, alors la fonction d'utilité d'un client est :

$$U(q, p) = q(R - C.W) \quad (3.8)$$

L'objectif est de trouver l'équilibre en stratégies mixtes, un taux d'entrée optimal et le " N " qui optimise le bien-être social.

❖ Cas observable

Les clients arrivant observent l'état du système et la fonction, et la fonction d'utilité d'un client i qui décide d'entrer dans la file sachant qu'il est précédé par n clients dans le système est donnée par :

$$U_i = (R - C.W^i) \quad (3.9)$$

On cherche dans ce cas l'équilibre en stratégies pures, en déterminant le seuil des stratégies, ensuite déterminer le taux d'entrée optimal et le nombre N -optimal.

3.6 File d'attente M/M/1 avec contrôle du service

L'étude de ce modèle s'est portée sur un système de file d'attente M/M/1/FIFO et réalisée par *A. Burnetas et Yiannis* [34].

3.6.1 Le modèle descriptif

Dans ce modèle, nous considérons un système de file d'attente M/M/1 avec une politique de service de seuil B dans lequel tous les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . A l'arrivée d'un client, s'il trouve que le serveur es libre, il l'occupe immédiatement et quitte le système une fis servi. Sinon si celui-ci est occupé, ce client entre et attend son tour, et ne quittera le système qu'après être servi.

Lorsque le nombre de clients dans le système est inférieur au seuil B , le serveur travaille avec un débit faible μ_h et il est commuté à un débit élevé μ_l lorsque le nombre de clients est supérieur ou égal à B avec $\frac{\lambda}{\mu_l} < 1$.

Les clients sont supposés identiques, et décident de quitter ou de rejoindre la file à leurs arrivées. Nous disons alors que le serveur adopte la politique (B, μ_h, μ_l) . Il existe une récompense de R unités pour chaque client servi et un coût d'attente de C unités par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système.

3.6.2 Le jeu associé

Etant donné que l'ensemble des joueurs constitue les clients, chaque joueur a deux alternatives : *soit rejoindre la file, soit quitter*.

Chaque client est informé de la politique du serveur dès son arrivée, par contre il ignore le nombre de clients dans le système.

Notons par $U(q, p)$ le bénéfice obtenu par un client en utilisant les stratégies mixtes q tandis que les autres utilisent les stratégies mixtes p .

Les clients entrent dans le système suivant un processus de Poisson de taux $\lambda_e = \lambda p$. L'équilibre en taux d'entrée est : $\lambda_e^* = \lambda p_e$ où p_e est une stratégie d'équilibre symétrique.

La fonction d'utilité d'un client est donnée par :

$$U(q, p) = q(R - CW(\lambda p)) \quad (3.10)$$

Avec $W(\lambda p)$: le temps moyen de séjour d'un client dans le système.

Nous nous intéressons à trouver un équilibre pour les clients, et un taux d'entrée optimal dans les deux cas de la politique du service.

3.7 File d'attente M/M/1 partitionnée

Ce travail dont l'objectif est d'examiner le comportement des clients aux différents niveaux d'informations concernant l'état du système a été réalisé par *A. Economou et S. kanta* où ils ont étudié une file d'attente M/M/1/FIFO partitionnée [15].

3.7.1 Le modèle

Considérons une file d'attente M/M/1 où les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ . Les temps de services des clients sont supposés être des variables aléatoires exponentielles identiquement distribuées de taux μ indépendant du processus d'arrivée.

Notons par $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ l'intensité du trafic du système. L'espace du système est divisé (partitionné) en compartiments de capacité finie de " a " clients.

Nous sommes intéressés par le comportement des clients quand ils peuvent décider de rejoindre ou de rechigner (quitter) lors de leurs arrivées. Supposons qu'il existe une récompense de R unités pour chaque client qui achève son service. Il existe également un coût d'attente de C unités par unité de temps tant que ce client reste dans le système (en file d'attente ou dans l'espace de service).

Les clients sont supposés neutres en termes de risque, ce qui signifie que leurs objectifs est de maximiser leurs bénéfices nets.

Les clients ont des informations partielles sur le nombre de clients présents dans le système. De ce fait, nous pouvons ainsi considérer deux cas d'informations pour les clients.

1^{er} cas : le numéro du compartiment connu

Les clients observent le numéro du compartiment dans lequel ils vont entrer, mais pas les positions qu'ils contiennent. Plus précisément s'il existe n clients dans le système avant l'arrivée d'un client, alors son information sera le numéro du compartiment $i = \left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil + 1$ dans lequel il entre s'il décide de rejoindre le système. La fonction d'utilité d'un tel client peut être donnée par :

$$U^N = R - \frac{C}{\mu} \{E[N|N \in \{(i-1)a, (i-1)a+1, \dots, ia-1\}] + 1\} \quad (3.11)$$

2^{ème} cas : la position du compartiment

Les clients observent la position du compartiment dans lequel ils vont entrer mais ne sont pas informés du numéro du compartiment. L'information d'un client entrant lorsqu'il y a n clients dans le système est la position : $i = (n \bmod a) + 1$.

L'objectif est de chercher les équilibres de Nash dans chaque cas.

3.8 Etude d'une file d'attente M/M/1 avec temps d'installation

L'objectif du travail étudié par *A. Burnetas et A. Economou* est de trouver les équilibres de Nash en étudiant plusieurs cas, selon l'observation du système par les clients [9].

3.8.1 Description du modèle

Considérons une file d'attente markovienne à serveur unique avec un espace d'attente infini sous la discipline FIFO, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . Les durées de service sont des variables aléatoires distribuées de manière exponentielle avec un taux μ et le serveur s'arrête lorsqu'il n'y a plus de clients à la fin d'un service.

Après l'arrêt du serveur, il ne peut plus être activé tant qu'un client ne se présente et qu'un processus d'installation n'a commencé dans lequel le temps d'installation est exponentiel de taux θ . Pendant l'installation, les clients continuent d'arriver. Finalement, nous supposons que les temps entre les arrivées, les temps de service et les temps d'établissement sont mutuellement indépendants.

Nous représentons l'état du système par la paire $(N(t), I(t))$ qui est une chaîne de Markov bidimensionnelle à temps continu et à espace d'état $E = \{(n, i), 0 \leq i \leq 1, n \geq i\}$ où $N(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t et $I(t)$ l'état du serveur. Le graphe de transition de ce modèle est donné par la figure suivante.

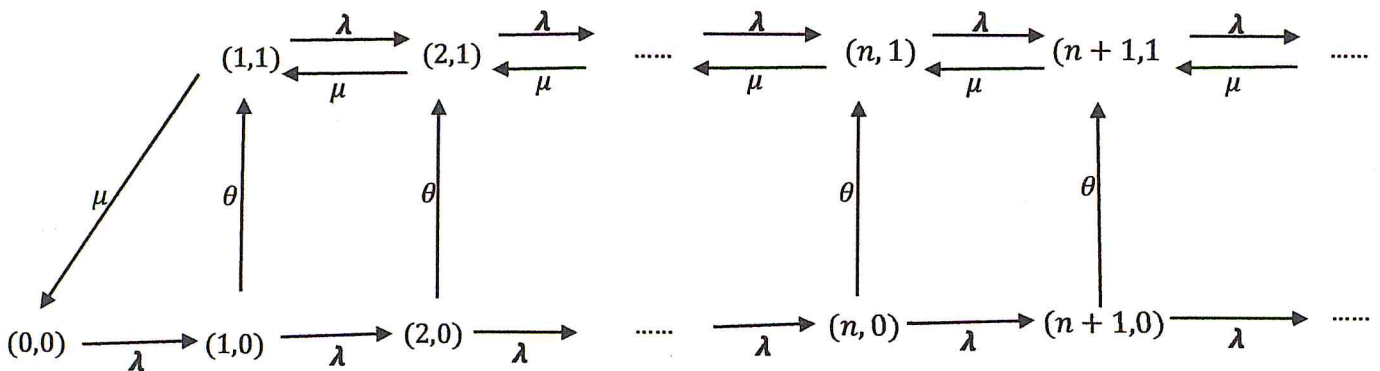


Figure 3.8-1 : la file d'attente M/M/1 avec temps d'installation

3.8.2 Les règles et jeux associés

Nous nous intéressons au comportement des clients lorsqu'ils ont le choix entre *rejoindre ou bien quitter* le système au moment de leurs arrivées.

Considérons que chaque client reçoit une récompense de R unités après l'achèvement du service et il existe également un coût d'attente de C unités par unité de temps quand ils se trouvent dans le système. L'ensemble des clients étant les joueurs ont les stratégies suivantes : soit entrer, soit quitter lors de leurs arrivées.

Ce jeu est symétrique et chaque client a pour objectif de maximiser son gain. On suppose que $R > \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}$; cette condition stipule que la récompense du service est supérieure au coût d'attente pour le client qui trouve le système vide sinon ce dernier n'entrera pas dans le système.

Enfin, les décisions des clients sont irrévocables, ce qui signifie que les tentatives de représailles et d'attitude réprimée ne sont pas autorisées. Nous distinguons quatre cas selon l'information disposée aux clients à l'instant de leurs arrivées :

- cas complètement observable: les clients observent $N(t)$ et $I(t)$,
- cas presque observable: les clients observent $N(t)$ seulement,
- cas presque non observable: les clients n'observent que $I(t)$,
- cas complètement non observable: les clients n'observent pas l'état du système

3.8.3 Equilibre dans le cas complètement observable

Dans le scénario entièrement observable qui suppose que les clients observent non seulement l'état du serveur, mais également le nombre exact de clients dans le système. Le temps moyen de séjour d'un client qui décide de rejoindre le système à l'état (n, i) est donné par : $\frac{n+1}{\mu} + \frac{1-i}{\theta}$. Et le bénéfice escompté d'un client est :

$$U = \left[R - C \left(\frac{n+1}{\mu} - \frac{i-1}{\theta} \right) \right] j \quad (3.12)$$

Avec $j = \begin{cases} 1 & \text{si le client entre} \\ 0 & \text{si le client quitte} \end{cases}$

Lorsque ce bénéfice est positif, le client préfère donc entrer et reste indifférent lorsque cette valeur est nulle, mais nous supposons qu'il préfère entrer. Dans ce dernier cas, un client qui arrive décide de rejoindre le système si et seulement si :

$$n + 1 \leq \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu(1-i)}{\theta} \quad (3.13)$$

Par conséquent, nous énonçons le résultat suivant :

théorème 3.9.1 [9]

Dans une file d'attente $M/M/1$ entièrement observable avec temps de configuration, il existe

des seuils $(n_e(0), n_e(1))$ avec
$$\begin{cases} n_e(0) = \left\lceil \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta} \right\rceil - 1 \\ n_e(1) = \left\lceil \frac{R\mu}{C} \right\rceil - 1 \end{cases}$$

Tel que la stratégie « entrer » si $N(t) \leq n_e(I(t))$, et « quitter » autrement est l'unique équilibre en stratégie pure, de plus, elle est toujours une stratégie dominante.

Nous nous retrouvons avec un système qui est une chaîne de Markov similaire à la précédente mais à espace d'état restreint :

$S = ((n, 0), 0 \leq n \leq n_e(0) + 1) \cup ((n, 1), 1 \leq n \leq n_e(1) + 1)$. Lorsque les clients suivent les seuils de stratégies définis ci-dessus. Le graphe de transition est le suivant :

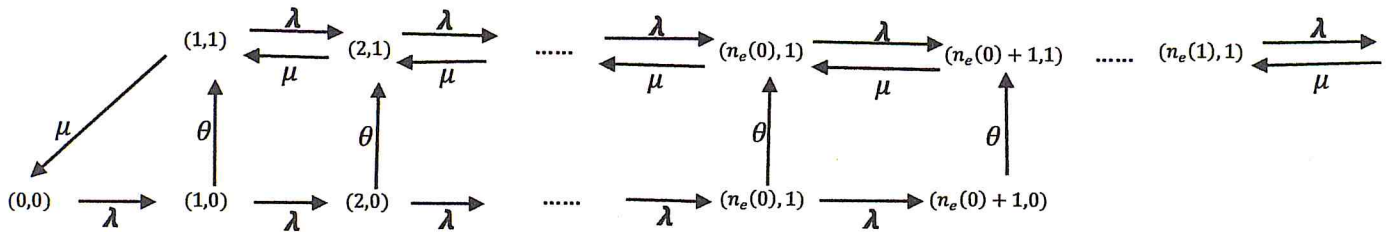


Figure 3.8-2 : file d'attente M/M/1 observable temps d'installation et structure récompense coût

proposition 3.9.1 [9] :

Dans une file d'attente M/M/1 avec temps d'installation, tel que $\sigma \neq 1 \neq \rho$ où les clients suivent la politique du seuil $(n_e(0), n_e(1))$ avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et $\sigma = \frac{\lambda}{\mu + \theta}$; les probabilités stationnaires $(P(n, i); (n, i) \in E)$ sont données comme suit :

$$P(1,1) = \left[\frac{1}{\rho(1-\sigma)(1-\rho)} - \frac{1}{(1-\rho)(1-\sigma)} \sigma^{n_e(0)+1} + \frac{1}{(1-\rho)(\sigma-\rho)} \rho^{n_e(1)+2} * (1 - \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{n_e(0)+1} \right]^{-1}$$

$$P(n, 0) = \frac{1}{\rho} * \sigma^n * P(1,1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_e(0)$$

$$P(n_e(0) + 1, 0) = \frac{1}{(1-\rho)} * \sigma^{n_e(0)+1} * P(1,1)$$

$$P(n, 1) = \frac{1}{\sigma - \rho} (\sigma^n - \rho^n) * P(1,1) \quad n = 1, 2, \dots, n_e(0)$$

$$P(n, 1) = \frac{1}{\sigma - \rho} (\sigma^{n_e(0)+1} - \rho^{n_e(0)+1}) * \rho^{n-n_e(0)-1} * P(1,1) \quad (3.14)$$

Avec $n = n_e(0) + 1, \dots, n_e(1) + 1$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; $\sigma = \frac{\lambda}{\mu + \theta}$

Ce qui signifie que lorsqu'un client arrive, la probabilité qu'il trouve le système à l'état $(n_e(0) + 1, 0)$ ou bien $(n_e(1) + 1, 1)$ et quitter est égale à $P(n_e(0) + 1, 0) + P(n_e(1) + 1, 1)$

Le bénéfice social par unité de temps lorsque tous les clients suivent la politique du seuil $(n_e(0), n_e(1))$ est égal à :

$$U_s = R\lambda(1 - P(n_e(0) + 1, 0) - P(n_e(1) + 1, 1)) - C \left(\sum_{n=0}^{n_e(0)+1} nP(n, 0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} nP(n, 1) \right) \quad (3.15)$$

Ces probabilités nous seront utiles pour les calculs concernant le cas presque observable.

3.8.4 Le cas presque observable

Nous examinons maintenant le cas presque observable dans lequel les clients qui arrivent observent uniquement le nombre de clients dans le système. Ensuite le temps de séjour moyen d'un client qui trouve n clients dans le système est donné par : $\frac{n+1}{\mu} + \frac{\Pi_{1/N}(o/n)}{\theta}$

Où $\Pi_{1/N}(o/n)$ est la probabilité qu'un client entrant trouve le serveur à l'état 0 (*inactif*), étant donné qu'il y a n clients dans le système. Par conséquent, le bénéfice attendu d'un tel client s'il décide d'entrer est égal à :

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C\Pi_{1/N}(o/n)}{\theta} \quad (3.16)$$

Nous recherchons des stratégies d'équilibre de type seuil. Par conséquent, nous devons calculer $\Pi_{1/N}(o/n)$ lorsque tous les clients suivent la même stratégie de seuil. Supposons que tous les clients utilisent le même seuil n_e . La distribution stationnaire de la chaîne de Markov correspondante provient de la proposition précédente avec $n_e(0) = n_e(1) = n_e$. Ainsi, les probabilités incorporées $\Pi_{1/N}(o/n)$ sont égales :

$$\Pi_{1/N}(o/n) = \frac{\lambda P(n, 0)}{\lambda P(n, 0) + \lambda P(n, 1) * 1_{\{n \geq 1\}}} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_e + 1$$

Où $1_{\{n \geq 1\}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\{1, 2, \dots\}$. En utilisant les valeurs de $P(n, i)$ trouvées en (3.14), on obtient :

$$\Pi_{1/N}(o/n) = \left[1 + \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^n \right) \right]^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, n_e$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \Pi_{1/N}(0/n_e + 1) &= \left[1 + \frac{\theta}{\mu} \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{n_e} \right) + \frac{\theta}{\mu} \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \frac{\theta}{\mu - \lambda - \theta} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{n_e + 1} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction $f(x, n)$ dans le bénéfice et la probabilité $\Pi_{1/N}(o/n_e + 1)$, nous aurons :

$$f(x, n) = R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\lambda x + \theta}{\mu - \lambda - \theta} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^n \right) \right]^{-1} \quad \text{avec } x \in [0, 1], n = 0, 1, \dots$$

Ce qui nous permettra de prouver l'existence des stratégies de seuil d'équilibre et en déduire les seuils correspondants. Soient

$$f_U(n) = f(1, n), \quad f_L(n) = f(0, n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Il est facile de voir que :

$$f_U(0) = f_L(0) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta} > 0, \text{ en outre,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_U(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_L(n) = -\infty$$

Par conséquent, il existe n_U tel que :

$$f_U(0), f_U(1), \dots, f_U(n) \geq 0 \text{ et } f_U(n_U + 1) \leq 0$$

La fonction $f(x, n)$ augmente clairement par rapport à x pour chaque n fixé ; ainsi, $f_L(n) \leq f_U(n)$; $n = 0, 1, 2, \dots$. En particulier, $f_L(n_U + 1) \leq 0$ tant que $f_L(0) > 0$. Il existe donc $n_L \leq n_U$ tel que :

$$f_L(n_L) > 0 \text{ et } f_L(n_L + 1), \dots, f_L(n_U), f_L(n_U + 1) \leq 0$$

Nous pouvons maintenant établir l'existence de politiques de seuil d'équilibre dans le cas presque observable. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.9.2 [9]:

Dans une file d'attente M/M/1 presque observable avec temps d'installation, toutes les stratégies pures « entrer si $N(t) \leq n_e$ et quitter autrement », pour $n_e = n_L, n_{L+1}, \dots, n_U$ sont des stratégies d'équilibre.

Preuve [9]: Considérons un client marqué à son arrivée et supposons que tous les autres clients suivent la même stratégie de seuil "observer $N(t)$, entrer si $N(t) \leq n_e$ et quitter autrement" pour un certain n_e fixe avec $n_e \in \{n_L, n_{L+1}, \dots, n_U\}$.

Si ce client trouve n clients dans le système avec $n \leq n_e$ et décide d'entrer, le bénéfice net escompté de ce client sera égal à :

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^n \right)^{-1} \right] = f_U(n) > 0$$

Donc dans ce cas, le client préfère entrer car il aura un gain égal à zéro(0) s'il quitte. Si ce client trouve $n = n_e + 1$ clients et décide d'entrer, son revenu sera :

$$R - \frac{C(n_e + 2)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{\mu - \lambda - \theta} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{n_e + 1} \right)^{-1} \right] = f_L(n_e + 1) \leq 0$$

Donc ce dernier quittera.

3.8.5 Equilibre en stratégies mixtes pour les cas non observables

Dans cette section, nous nous intéresserons aux cas non observables dans lesquels les clients n'observent pas le nombre de clients dans le système. Nous prouverons également qu'il existe l'équilibre en stratégies mixtes.

3.8.5.1 Cas presque non observable

Nous commençons par le cas presque non observable dans lequel les clients qui arrivent n'observent que l'état du serveur à leurs arrivées.

Une stratégie mixte pour un client est spécifiée par un vecteur $(q(0), q(1))$ où $q(i)$ est la probabilité de rejoindre le système lorsque le serveur est à l'état i ($i = \overline{0,1}$). Le taux d'entrée devient donc $\lambda(i) = \lambda q(i)$.

Soit $(P_{au}(n, i) : (n, i) \in S)$, les distributions stationnaires correspondantes au système lorsque le serveur est à l'état i . Le graphe de transition de ce cas est alors donné par :

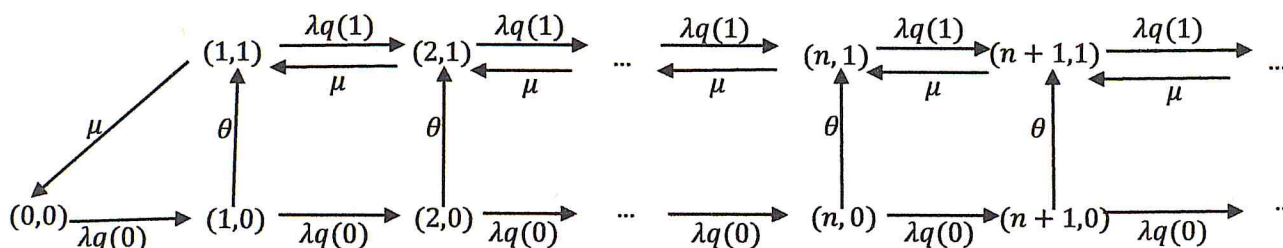


Figure 3.8-3 : file d'attente $M/M/1$ presque observable avec temps d'installation

Pour obtenir les probabilités stationnaires $P(n, i)$, nous procédons comme dans la proposition suivante. Nous notons par : $\rho(0) = \frac{\lambda(0)}{\mu}$; $\rho(1) = \frac{\lambda(1)}{\mu}$; $\sigma(0) = \frac{\lambda(0)}{\lambda(0)+\theta}$

Proposition 3.9.2 [9] : Prenons une file d'attente $M/M/1$ avec temps d'installation et $\sigma(0) \neq \rho(1)$ dans laquelle les clients observent l'état i du serveur à leurs arrivées et entrent avec la probabilité $q(i)$, c'est-à-dire qu'ils suivent la politique $(q(0), q(1))$. Le système est stable si et seulement si : $\rho(1) < 1$

Dans ce cas, les probabilités stationnaires $P_{au}(n, i) : (n, i) \in S$ sont :

$$P_{au}(n, 0) = \frac{(1 - \sigma(0))(1 - \rho(1))}{1 - \rho(1) + \rho(0)} * \sigma(0)^n ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

$$P_{au}(n, 1) = \frac{(1 - \sigma(0))(1 - \rho(1)) \cdot \rho(0)}{(1 - \rho(1) + \rho(0)) \cdot (\sigma(0) - \rho(1))} \cdot (\sigma(0)^n - (\rho(1))^n) ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Nous considérons maintenant un client qui trouve le serveur à l'état i , son temps moyen de séjour sera : $\frac{E[N/i]+1}{\mu} + \frac{1-i}{\theta}$ où $E[N/i]$ est le nombre moyen de clients dans le système lors d'une arrivée, étant donné que le serveur est trouvé à l'état i . Le bénéfice attendu d'un tel client qui décide d'entrer est :

$$R - \frac{C(E[N/i] + 1)}{\mu} - \frac{C(1 - i)}{\theta}$$

Nous devons calculer $E[N/i]$ lorsque tous les clients suivent la même stratégie mixte, par exemple $(q(0), q(1))$ et supposons que le système soit stable dans le cadre de cette stratégie, c'est-à-dire $\lambda q(1) < \mu$. Ensuite la probabilité $\Pi_{N/I}(n/i)$ qu'une arrivée trouve n clients dans le système étant donné que le serveur se trouve à l'état i est égale à :

$$\Pi_{N/I}(n/i) = \frac{P(n,i) \cdot \lambda(i)}{\sum_{k=i}^{\infty} P(k,i) \cdot \lambda(i)} = \frac{P(n,i)}{\sum_{k=i}^{\infty} P(k,i)}$$

A partir de laquelle on aura

$$E[N/i] = \sum_{k=1}^{\infty} n \Pi_{N/I}(n/i)$$

En utilisant les probabilités stationnaires (3.17) et (3.18) dans $\Pi_{N/I}(n/i)$, on obtient :

$$E[N/0] = \frac{\sigma(0)}{1 - \sigma(0)}$$

$$E[N/1] = \frac{\rho(1)}{1 - \rho(1)} + \frac{1}{1 - \sigma(0)}$$

D'où le résultat suivant

Théorème 3.9.3 [9] : Dans une file d'attente M/M/1 presque non observable avec temps d'installation et $\lambda < \mu$, il existe un unique équilibre en stratégie mixte $(q_e(0), q_e(1))$, observer $I(t)$ et entrer avec la probabilité $q_e(I(t))$.

Le vecteur $(q_e(0), q_e(1))$ est donné comme suit :

Cas 1 : $\frac{1}{\theta} < \frac{1}{\mu}$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta, 0 \right) \right), & R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} \right) \\ (1, 0), & R \in \left(\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu} \right) \\ \left(1, \frac{1}{\lambda} \left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta}} \right) \right), & R \in \left(\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda} \right) \\ (1, 1), & R \in \left(\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu - \lambda}, \infty \right) \end{cases}$$

$$\text{Cas 2 : } \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta \right), \frac{\mu - \theta}{\lambda} \right), & R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} \right) \\ \left(1, \frac{1}{\lambda} \left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta}} \right) \right), & R \in \left(\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu - \lambda} \right) \\ (1, 1), & R \in \left(\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu - \lambda}, \infty \right) \end{cases}$$

$$\text{Cas : } \frac{1}{\mu - \lambda} < \frac{1}{\theta}$$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta \right), 1 \right), & R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} \right) \\ (1, 1), & R \in \left(\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \infty \right) \end{cases}$$

Preuve : [9]

Prenons l'exemple d'un client qui trouve le serveur à l'état 0 à son arrivée. S'il décide d'entrer, alors son bénéfice net escompté est :

$$R - \frac{C[N/0] + 1}{\mu} - \frac{C}{\theta} = R - \frac{C}{\mu(1 - \sigma(0))} - \frac{C}{\theta} = R - \frac{C(\lambda(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}$$

Nous avons ainsi deux cas par rapport à cela :

$$\text{Cas a : } \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta} < R \leq \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}$$

Dans ce cas, si tous les clients qui trouvent le système vide entrent avec une probabilité $q_e(0) = 1$, le client qui arrive et entre obtiendra un gain négatif. Par conséquent, $q_e(0) = 1$ n'est pas un équilibre.

De même, si tous les clients utilisent $q_e(0) = 0$, alors le client qui arrive et décide d'entrer aura un gain positif, ainsi $q_e(0) = 0$ ne peut non plus faire partie d'un équilibre. Par conséquent, il existe un unique équilibre $q_e(0) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta \right)$ satisfaisant :

$$R - \frac{C(\lambda q_e(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta} = 0 \text{ pour lequel les clients sont indifférent entre « entrer et quitter ».}$$

$$\text{Cas b : } \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} < R$$

Dans ce cas, pour chaque stratégie des autres clients, un client qui arrive aura un bénéfice positif s'il décide d'entrer. Par conséquent, $q_e(0) = 1$.

3.8.5.2 Le cas totalement non observable

Nous considérons enfin le cas totalement non observable dans lequel les clients n'observent pas du tout l'état du système (ni le nombre de clients, ni l'état du serveur). Une stratégie mixte d'un client est spécifiée par la probabilité q d'entrée. Les distributions stationnaires sont données par la proposition (3.9.2) en prenant $q(0) = q(1) = q$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.9.4 [9] :

Dans une file d'attente M/M/1 entièrement non observable avec temps d'installation et $\lambda < \mu$ Il existe un unique équilibre en stratégie mixte "entrer avec la probabilité q_e " où q_e est donnée par :

$$q_e = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C}{\theta}} \right), & R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C}{\mu - \lambda} + \frac{C}{\theta} \right) \\ 1, & R \in \left(\frac{C}{\mu - \lambda} + \frac{C}{\theta}, \infty \right) \end{cases}$$

Considérons un client qui arrive et décide d'entrer, son avantage net est :

$$R - \frac{C}{\mu} (E[N] + 1) - \frac{C}{\theta} \cdot P_r(I = 0)$$

Où N est le nombre de clients dans le système et I l'état du serveur. En utilisant la proposition (3.9.2), nous obtiendrons :

$$E[N] = \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad \text{et} \quad P_r[I = 0] = 1 - \rho$$

$$\text{Avec } \rho = \frac{\lambda q}{\mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}$$

Par conséquent, le bénéfice net sera :

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda q} - \frac{C}{\theta}$$

3.9 Concurrence entre deux serveurs dans une file d'attente Markovienne

Après les travaux considérant que les joueurs sont les clients, un autre type de travail est celui qui considère que les joueurs sont les serveurs. Dans ce travail, nous étudierons la concurrence entre deux serveurs dans une file d'attente Markovienne en déterminant les meilleurs taux de service fournis par chaque serveur. Ce travail a été réalisé par *E. Kalai et M. Kamien [22]*.

3.9.1 Le modèle mathématique

Considérons une file d'attente Markovienne à deux serveurs et à espace d'attente infini dans laquelle les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ et les services sont

exponentielles de taux μ_1 et μ_2 pour les serveurs 1 et 2 respectivement. L'objectif de chaque serveur est de maximiser son gain.

Chaque serveur reçoit un coût de R unités pour chaque service rendu. Lorsqu'un client arrive et trouve les deux serveurs libres, il se dirige alors vers l'un d'entre eux d'une manière équiprobable, et s'il trouve un serveur libre et l'autre occupé, alors il se dirigera vers le serveur libre.

3.9.2 Le jeu du modèle

Nous pouvons modéliser cette situation par un jeu sous forme normale tel que :

- L'ensemble des joueurs sont les deux serveurs
- Les stratégies des serveurs sont les taux de services à fournir, chaque serveur choisit une stratégie $\mu_i, i = \overline{1,2}$

Le jeu est donné sous la forme suivante :

$$\langle J, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{U_i(\mu_1, \mu_2)\}_{i \in I} \rangle$$

Avec

$J = \{1,2\}$: l'ensemble des joueurs

μ_i : la stratégie du joueur i

$U_i(\mu_1, \mu_2)$: la fonction d'utilité du joueur i qui est donnée comme suit :

$$U_i(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2) - C(\mu_i) & \text{si } \mu_1 + \mu_2 > \lambda \\ R\mu_i - C(\mu_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\alpha_i(\mu_1, \mu_2)$ est la part du marché de chaque serveur.

Chaque serveur essaie de maximiser son gain. Les deux serveurs choisissent le taux de service à fournir d'une manière simultanée. La question qui se pose est la suivante :

Quelle est la meilleure stratégie à jouer de façon à maximiser le gain d'un serveur ?

Le problème consiste à déterminer l'équilibre de Nash pour ce jeu. Les stratégies qui procurent un équilibre de Nash après résolution sont :

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_c$ avec μ_c une valeur à déterminer.

3.10 Concurrence entre s serveurs dans une file d'attente Markovienne

Le travail de *E. Kalai et M. Kamien* a été généralisé par *V. Kinching, S. Choi et M. Huang* en maintenant les mêmes règles, mais en considérant plusieurs serveurs [10]. Le modèle considéré est : *M/M/s/FIFO*.

3.10.1 Modélisation sous forme de jeu

Le jeu donné par :

$$\langle J, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{U_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)\}_{i \in I} \rangle$$

Avec

$J = \{1,2, \dots, s\}$: l'ensemble des joueurs (s serveurs)

$\{\mu_i\}_{i \in I} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\}$ l'ensemble des stratégies de chaque serveur

$U_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$: la fonction d'utilité du joueur i par unité de temps

$$U_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) = \begin{cases} R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) & \text{si } \sum_{j=1}^s \mu_j > \lambda \\ R\mu_i - C(\mu_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où

$\alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ est la part du marché de chaque serveur.

De même, les stratégies qui procurent un équilibre de Nash après résolution du jeu sont :

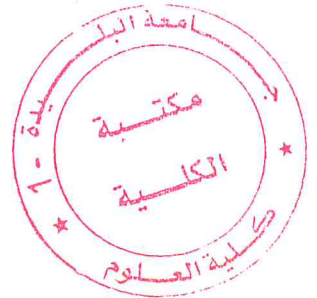
$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s = \mu_c$ telle que μ_c est à déterminer.

3.11 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des différents modèles d'attente Markoviens avec des structures récompense-coût.

Ces travaux ont pour objectif d'étudier le comportement des clients au moment de leurs arrivées au système en déterminant les stratégies suivies par les clients pour pouvoir maximiser leurs gains pour les jeux entre les clients ; et d'étudier également la concurrence entre les serveurs, en déterminant le meilleur taux de service à fournir par chaque serveur, en se basant sur le taux des autres pour les jeux entre les serveurs.

Notons que ces modèles étudiés considèrent que les clients arrivent individuellement. Nous proposons dans le chapitre suivant l'analyse des modèles d'attente Markoviens avec arrivées par groupe de taille fixe, via la théorie des jeux.



4 Analyse de la décision des clients dans une file d'attente avec arrivées par bloc ($M^k/M/1$)

Dans les études sur les problèmes classiques de files d'attente, les auteurs ont considéré que les clients arrivaient individuellement. Cependant, les clients arrivent par groupes de taille fixe ou généralement de taille aléatoire dans maintes situations réelles que nous pouvons représenter par des modèles d'attente avec arrivées par groupes (autrement appelée file d'attente par lot dans le cas d'un atelier de fabrication des pièces ou par bloc).

L'objectif de l'étude de ces systèmes est de modéliser des phénomènes réels (comme les systèmes informatiques, centres de fabrication des pièces) afin d'obtenir des informations sur leurs comportements. Parmi les auteurs qui ont fait des études sur les caractéristiques des systèmes d'attente avec arrivées par groupe (ou par lot), nous pouvons citer : *Leeh. W [26], Arrun. B et Gautan. C [3], Medhi. J [27], S. Ziani [35], Haridass et Arumuganathan [19], Abolnikou L et Dschalalow [1], Baruah M, Madan K and Eldabi [4], Khalaf F, Madann C et Luckas [23], etc.* Ces auteurs considèrent dans ces travaux, des groupes de taille aléatoire X .

Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle étude mathématique des systèmes d'attentes consistant à étudier des modèles d'attente avec arrivées par groupes de taille fixe k et avec la structure de récompense-coût (R, C) . Nous déterminerons dans un premier temps les caractéristiques des modèles considérés à savoir les paramètres de performances, puis ensuite les meilleures décisions à prendre par les clients afin de maximiser leurs gains, tout en se basant sur l'information disposée. Pour cela, nous étudierons un cas particulier en fixant notre $k = 2$ ($M^2/M/1$), puis nous généraliserons les résultats obtenus au modèle $M^k/M/1$ afin de dégager quelques avantages et inconvénients par le biais des jeux.

4.1 Etude d'une file d'attente $M^2/M/1$

4.1.1 Le modèle descriptif

Considérons une file d'attente $M^2/M/1/FIFO$, à espace d'attente infini où les clients arrivent par groupes de deux selon un processus de Poisson de taux λ . Le temps de service est une variable aléatoire distribuée de manière exponentielle de taux μ . Notons que les temps de service et des inter-arrivées sont mutuellement indépendants et supposons que chaque client reçoit une récompense de R unités à la fin de son service. Il existe également un coût de C unités par unité de temps aussi longtemps que le client reste dans le système (*dans la file ou bien en service*). Le bénéfice d'un client qui ne rejoint pas la file est nul. Nous pouvons décrire notre système par le processus $\{N(t), t \geq 0\}$.

Les clients arrivant par groupes de deux sont placés dans la file d'une manière aléatoire. Pour cela, supposons de plus que lorsqu'un groupe de deux clients arrive, chaque client peut passer avant l'autre avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Supposons aussi que $R - \frac{3C}{2\mu} > 0$; cependant, la décision d'un client est supposée irrévocable et les clients sont supposés identiques en matière de décision. Ils prennent leurs décisions au moment de leurs arrivées dans le but de maximiser leurs gains.

Comme l'indique le titre, l'objectif de ce travail est de déterminer les meilleures décisions à prendre par les clients au moment de leurs arrivées au système. Pour cela, il est nécessaire de faire une analyse mathématique complète du modèle $M^2/M/1$ afin de déterminer les caractéristiques intervenant lors de la prise de décisions à savoir : *le nombre moyen de clients (L) dans le système et dans la file, le temps moyen de séjour dans le système selon le cas qui se présente*. Nous considérons dans ce modèle les deux cas suivants : *le cas observable et le cas non observable*.

4.1.2 Etude de la file $M^2/M/1$ dans le cas observable

Dans ce cas, les clients sont totalement informés de la taille du système au moment de leurs arrivées. Donc ils prendront leurs décisions à travers cette information afin de maximiser leurs gains.

4.1.2.1 Caractéristiques du système

Dans cette section, nous déterminerons quelques mesures de performances du modèle $M^2/M/1$ à savoir : *le nombre moyen de clients ainsi que le temps de séjour dans le système*. Par conséquent, la détermination du graphe de transition nous permettra d'écrire les équations d'états d'équilibre (équations de Kolmogorov). Ce graphe est donné comme suit :

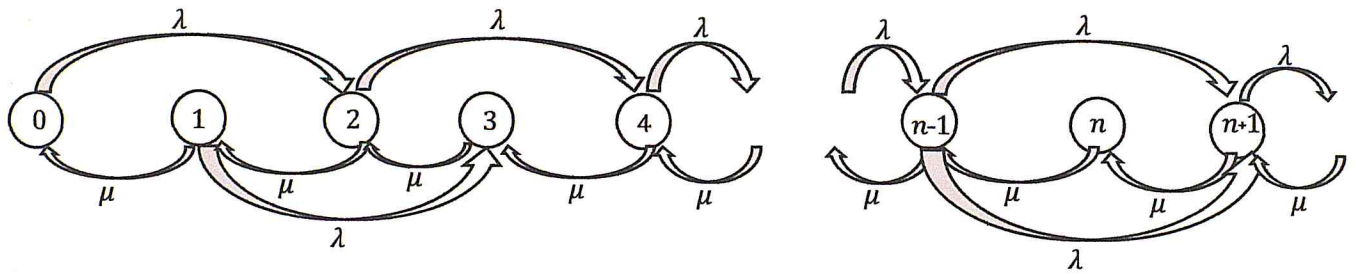


Figure 4.1-1 : graphe de transition de la file $M^2/M/1$ observable

Les équations de Kolmogorov correspondantes sont :

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 & \text{pour } n = 0 \quad (1) \\ (\lambda + \mu)P_1 = \mu P_2 & \text{pour } n = 1 \quad (2) \\ (\lambda + \mu)P_2 = \mu P_3 + \lambda P_0 & \text{pour } n = 2 \quad (3) \\ (\lambda + \mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-2} & \text{pour } n \geq 2 \quad (4) \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 & (5) \end{cases}$$

Où $P_n = [N(t) = n], \forall t \geq 0$ sont les probabilités d'états du système.

Afin de calculer les paramètres cités ci-dessus, nous allons introduire la fonction génératrice de la distribution stationnaire.

❖ La fonction génératrice de la distribution stationnaire

Elle s'écrit de la manière suivante :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n \quad (4.1)$$

En multipliant chaque membre des équations (1), (3), (4) par Z^n et en faisant la sommation terme à terme, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \lambda P_0 Z^0 + (\lambda + \mu)P_1 Z^1 + (\lambda + \mu) \sum_{n \geq 2} P_n Z^n &= \mu P_1 Z^0 + \mu P_2 Z^1 \\ &+ \sum_{n \geq 2} (\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-2}) Z^n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda P_0 + (\lambda + \mu)P_1 Z + (\lambda + \mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n - P_0 - P_1 Z \right] = \mu P_1 + \mu P_2 Z + \mu \sum_{n \geq 2} P_{n+1} + \lambda Z^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2} Z^2$$

En faisant le changement de variable suivant:

$j = n + 1 \Rightarrow n = j - 1$ on aura alors :

$$\lambda P_0 + (\lambda + \mu)P_1 Z - (\lambda + \mu)P_0 - (\lambda + \mu)P_1 Z + (\lambda + \mu)f(z) = \mu P_1 + \mu P_2 Z - \frac{\mu}{Z} \sum_{j \geq 3} P_j Z^j + \lambda Z^2 f(z)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lambda P_0 + \lambda P_1 Z + \mu P_1 Z - \lambda P_0 - \mu P_0 - \lambda P_1 Z - \mu P_1 Z + (\lambda + \mu)f(z) \\ = \mu P_1 + \mu P_2 Z + \frac{\mu}{Z} f(z) - \frac{\mu}{Z} [P_0 + P_1 Z + P_2 Z^2] + \lambda Z^2 f(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow -\mu P_0 + (\lambda + \mu)f(z) &= \mu P_1 + \mu P_2 Z + \frac{\mu}{Z}f(z) - \frac{\mu}{Z}P_0 - \mu P_1 - \mu P_2 Z + \lambda Z^2 f(z) \\
\Leftrightarrow (\lambda + \mu)f(z) - \mu P_0 &= \frac{\mu}{Z}f(z) + \lambda Z^2 f(z) - \frac{\mu}{Z}P_0 \\
\Leftrightarrow f(z) \left[\lambda + \mu - \frac{\mu}{Z} - \lambda Z^2 \right] &= \mu P_0 - \frac{\mu}{Z}P_0 = P_0 \left(\mu - \frac{\mu}{Z} \right) \\
\Leftrightarrow f(z) &= P_0 \left(\mu - \frac{\mu}{Z} \right) \frac{Z}{(\lambda + \mu)Z - \mu - \lambda Z^3} \\
\Leftrightarrow f(z) &= P_0 \left[\frac{Z\mu - \mu}{(\lambda + \mu)Z - \mu - \lambda Z^3} \right] \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Pour trouver P_0 , nous devons calculer $f(1) = 1$. On aura :

$$\begin{aligned}
f(1) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} P_0 \left[\frac{Z\mu - \mu}{(\lambda + \mu)Z - \mu - \lambda Z^3} \right] = 1 \\
\Leftrightarrow f(1) &= \frac{\mu P_0}{\mu - 2\lambda} = 1 \\
\Leftrightarrow P_0 &= \frac{\mu - 2\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2\lambda}{\mu} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

En posant $\rho = \frac{2\lambda}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{2\lambda}{\rho}$, nous pouvons dire que ce système est ergodique si : $\frac{2\lambda}{\mu} < 1$.

Par conséquent, l'équation (4.2) deviendra alors :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(1 - \frac{2\lambda}{\mu} \right) \left[\frac{Z \frac{2\lambda}{\mu} - \frac{2\lambda}{\rho}}{Z \left(\frac{2\lambda}{\rho} + \lambda \right) - \frac{2\lambda}{\rho} - \lambda Z^3} \right] \\
\Leftrightarrow f(z) &= 2(1 - \rho) \left[\frac{\lambda Z - \lambda}{\rho} * \frac{\rho}{2\lambda Z + \lambda \rho Z - 2\lambda - \lambda \rho Z^3} \right] \\
\Leftrightarrow f(z) &= 2(1 - \rho) \left[\frac{\lambda(Z - 1)}{\rho} * \frac{\rho}{\lambda(2Z + \rho Z - 2 - \rho Z^3)} \right] \\
\Leftrightarrow f(z) &= 2(1 - \rho) \left[\frac{Z - 1}{2Z + \rho Z - 2 - \rho Z^3} \right] \\
\Leftrightarrow f(z) &= \frac{2(1 - \rho)(Z - 1)}{2(Z - 1) + \rho Z(1 - Z)(1 + Z)} = \frac{2(1 - \rho)}{2 - \rho Z(1 + Z)} \tag{4.4}
\end{aligned}$$

D'où l'expression finale de la fonction génératrice de la distribution stationnaire est :

$$f(z) = \frac{2(1 - \rho)}{2 - \rho Z - \rho Z^2} \tag{4.5}$$

Ainsi, il nous sera facile de calculer nos différents paramètres à travers cette expression finale de $f(z)$.

4.1.2.1.1 Les mesures de performances du système

Dans cette section, nous allons donner les expressions mathématiques du nombre moyen de clients dans le système ainsi que le temps moyen de séjour d'un client.

❖ Le nombre moyen de clients dans le système

Nous le noterons par L et il est donné par l'expression suivante :

$$L = |f'(z)|_{z=1}$$

Calculons alors la dérivée de $f(z)$.

$$f'(z) = \frac{-2(1-\rho)(-\rho-2\rho Z)}{(2-\rho Z-\rho Z^2)^2}$$

Pour $Z = 1$, on obtiendra :

$$f'(1) = \frac{-2(1-\rho)(-3\rho)}{(2-2\rho)^2} = \frac{6\rho(1-\rho)}{4(1-\rho)^2} = \frac{3\rho}{2(1-\rho)}$$

En remplaçant ρ par $\frac{2\lambda}{\mu}$, on aura :

$$f'(1) = \frac{3}{2} * \frac{\frac{2\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{2\lambda}{\mu}\right)} = \frac{3\lambda}{\mu\left(\frac{\mu-2\lambda}{\mu}\right)} \quad (4.6)$$

D'où l'expression finale du nombre moyen de clients dans le système est :

$$L = \frac{3\lambda}{\mu - 2\lambda} \quad (4.7)$$

❖ Le temps moyen de séjour dans le système

Le temps moyen de séjour dans le système est obtenu en faisant recours aux formules de Little. Il est noté par W et donné par :

$$W = \frac{L}{\text{taux d'arrivée}}$$

Et notre taux d'entrée dans ce cas n'est autre que 2λ . D'où :

$$W = \frac{L}{2\lambda} = \frac{\frac{3\lambda}{\mu-2\lambda}}{2\lambda} = \frac{3}{2(\mu-2\lambda)}$$

Enfin

$$W = \frac{3}{2\mu - 4\lambda} \quad (4.8)$$

Il est aussi possible de calculer avec les formules de Little le nombre moyen de clients ainsi que le temps moyen de séjour dans la file d'attente.

4.1.2.2 Le jeu associé à ce modèle

Les clients observent la longueur de la file à leurs arrivées avant de prendre une décision qui leur permettra de maximiser leurs gains. Cette situation peut être modélisée comme étant un jeu symétrique entre deux clients qui arrivent. Chaque client a deux alternatives : soit « entrer (E) soit quitter (Q) » et ils prennent la décision d'entrer ou de quitter d'une manière simultanée. L'expression de ce jeu est la suivante :

$$J = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{U_i\}_{i \in J} \rangle \quad (4.9)$$

Avec

$J = \{1,2\}$ l'ensemble des joueurs (le groupe des 2 clients qui arrivent au système

$S_i = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t)\}$ les stratégies du client $i \forall i \in \{1,2\}$

Où $s_1(t) = \begin{cases} \text{entrer} & \text{si } N(t) \leq n \\ \text{quitter} & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall n = 0,1,2, \dots$

$s_2(t) = \text{entrer et } s_3(t) = \text{quitter}$

$U_i(s_i, s_{-i})$: la fonction de gain de chaque client i ($i = \overline{1,2}$). Cette fonction est la même pour les deux clients, car nous sommes dans le cadre d'un jeu symétrique.

Lorsque les deux clients arrivent et trouvent n clients dans le système, le temps moyen de séjour d'un client i ($i = \overline{1,2}$) sera : $\frac{n+1}{\mu}$ si ce client passe en premier et $\frac{n+2}{\mu}$ s'il passe en second de manière équiprobable. Chaque client aura alors un gain $R - C \frac{n+1}{\mu}$ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ s'il passe en premier et un gain de $R - C \frac{n+2}{\mu}$ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ s'il passe en second. D'où le bénéfice de chaque client est :

$$U_i(E, E) = R - C \left(\frac{n+1}{\mu} * \frac{1}{2} + \frac{n+2}{\mu} * \frac{1}{2} \right) = R - C \left(\frac{2n+3}{2\mu} \right)$$

Soit $z_i \in \{0,1\}$ la valeur caractérisant l'action du joueur i ($i = \{1,2\}$), elle est donnée par :

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si le joueur } i \text{ entre} \\ 0 & \text{si le joueur } i \text{ quitte} \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2\}$$

Donc l'utilité de chaque joueur sera :

$$U_i(E, E) = R - C \frac{2n+1+z_1+z_2}{2\mu} \quad \text{si les deux clients entrent}$$

$$U_i(E, E) = 0 \quad \text{si les deux clients quittent}$$

Nous pouvons représenter ce jeu sous la forme extensive suivante :

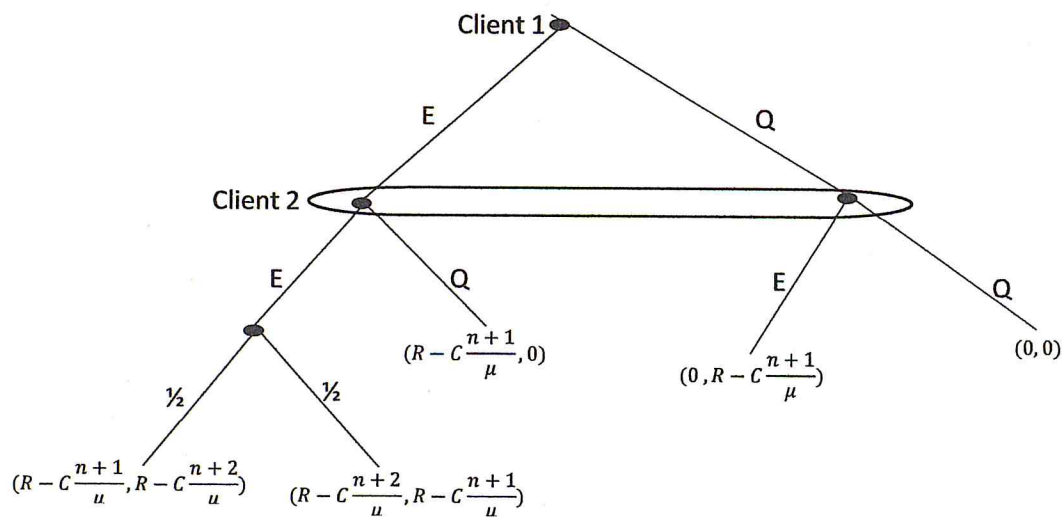


Figure 4.1-2 : forme extensive du jeu associé au modèle $M^2/M/1$ observable

4.1.2.3 Résolution du jeu

Sachant que les clients ont pour but de maximiser leurs gains, un client décidera alors de rejoindre le système s'il aura un gain positif. Supposons de plus que les clients préfèrent rejoindre le système même s'ils auront un bénéfice nul, cela reflète leur désir d'être servis. Nous pouvons alors écrire la fonction de gain si tous les deux clients entrent comme suit :

$$\begin{aligned}
 U_i(E, E) \geq 0 &\Leftrightarrow R - C \frac{(2n+3)}{2\mu} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2\mu R - C(2n+3) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2n+3 \leq \frac{2\mu R}{C} \\
 &\Leftrightarrow 2n \leq \frac{2\mu R - 3C}{C} \quad \Leftrightarrow n \leq \frac{2\mu R - 3C}{2C}
 \end{aligned}$$

Nous savons de plus que n ne prend que des valeurs entières, alors on aura :

$$U_i(E, E) \geq 0 \quad \Leftrightarrow n \leq \left\lfloor \frac{2\mu R - 3C}{2C} \right\rfloor$$

$$\text{Posons } n_e = \left\lfloor \frac{\mu R}{C} - \frac{3}{2} \right\rfloor$$

Ce résultat nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1.2

Dans une file $M^2/M/1/FIFO$ observable dans laquelle les clients ne quittent le système qu'après leurs services telle que $2\lambda < \mu$, il existe un seuil $n_e = \left\lfloor \frac{\mu R}{C} - \frac{3}{2} \right\rfloor$ tel qu'un groupe de

deux clients qui arrivent et trouvent n clients en un instant t , les stratégies "entrer si $n \leq n_e$ " et "quitter autrement" procurent un équilibre de Nash en stratégies pures.

Preuve :

Supposons deux nombre n_1 et n_2 tels que $n_1 \leq n_e$ et $n_2 > n_e$ et considérons l'arrivée de deux clients. Supposons que ces deux clients trouvent n_1 clients dans le système, leur gain espéré s'ils décident de rejoindre le système sera alors $R - C \frac{(2n_1+3)}{2\mu} \geq 0$ pour chacun des deux. Par conséquent, ces deux clients vont préférer rejoindre le système car un client qui quitte aura un bénéfice inférieur ou égal au bénéfice de celui qui décide d'entrer.

Autrement, si ces deux clients trouvent n_2 clients dans le système et décident de quitter, ils auront alors un gain nul pour chacun. Par contre si un client décide d'entrer, son gain sera $R - C \frac{n_2+1}{\mu} < 0$. Donc ce client n'a aucun intérêt à rejoindre le système.

Le graphe de transition deviendra alors :

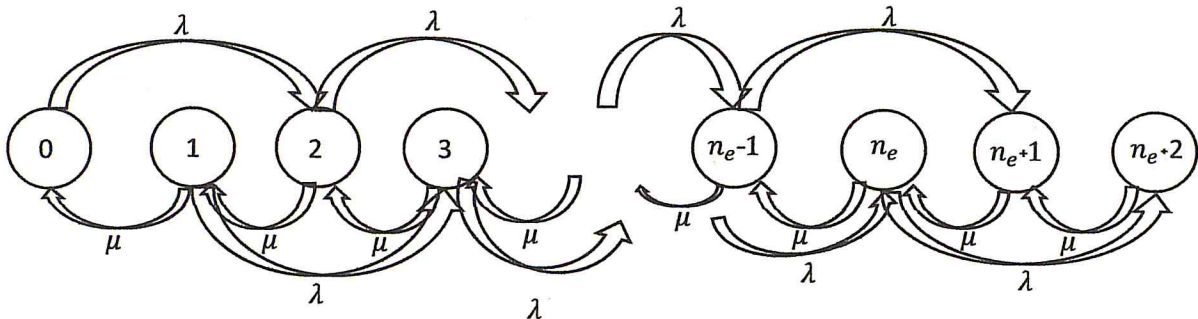


Figure 4.1-3 : modèle $M^2/M/1$ observable et avec récompense-coût(R, C)

4.1.3 Etude d'une file d'attente $M^2/M/1$ dans le cas non observable

Dans ce présent cas, les clients n'ont aucune information sur la longueur de la file à leurs arrivées.

4.1.3.1 Caractéristiques du système

Afin de déterminer le nombre moyen de clients ainsi que le temps moyen de séjour dans le système par le biais de la fonction génératrice de la distribution stationnaire, nous représenterons d'abord ce système par un graphe de transition. Ce système est équivalent à un système $M^X/M/1$, où X est une variable aléatoire de loi binomiale $(2, p)$ où p est la probabilité qu'un client entre. Donc $P[X = i] = C_2^i p^i (1 - p)^{2-i} \quad \forall i \in \{0, 1, 2\}$. Ce qui permet d'écrire :

$$P(X = 0) = C_2^0 p^0 (1 - p)^{2-0} = (1 - p)^2$$

$$P(X = 1) = C_2^1 p^1 (1 - p)^{2-1} = 2p(1 - p)$$

$$P(X = 2) = C_2^2 p^2 (1 - p)^{2-2} = p^2$$

Le graphe de transition sera comme suit :

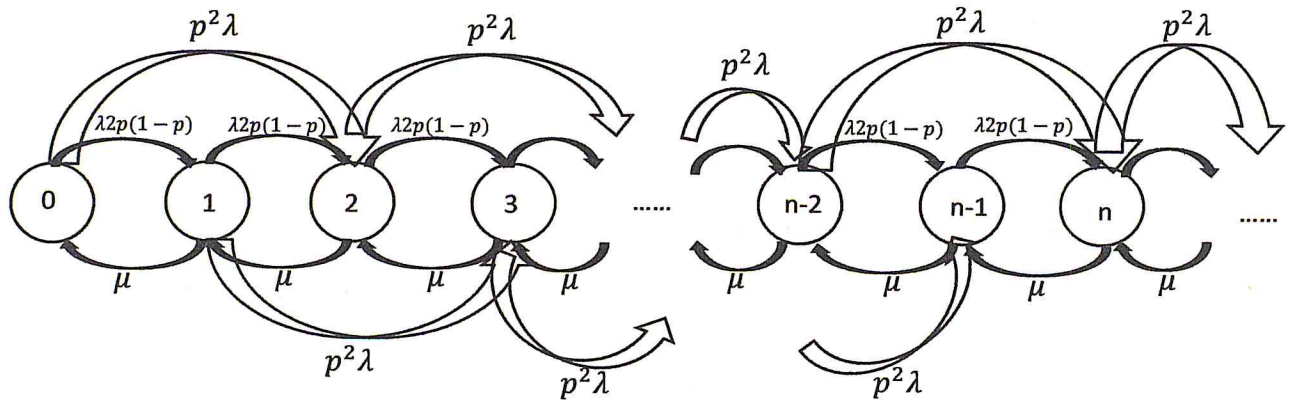


Figure 4.1-4 : file d'attente $M^2/M/1$ non observable

Les équations d'états d'équilibre de ce système sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (p^2\lambda + 2p(1-p)\lambda)P_0 = \mu P_1 \Leftrightarrow \lambda p(2-p)P_0 = \mu P_1 \text{ pour } n = 0 \quad (1) \\ (\lambda p(2-p) + \mu)P_1 = \mu P_2 + 2p(1-p)\lambda P_0 \text{ pour } n = 1 \quad (2) \\ (\lambda p(2-p) + \mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda p^2 P_{n-2} + 2p(1-p)\lambda P_{n-1} \text{ pour } n \geq 2 \quad (3) \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (4) \end{array} \right.$$

Nous introduisons la fonction génératrice de la distribution stationnaire $f(z) = \sum_{n \geq 0} P_n Z^n$. Ensuite, en multipliant chaque membre des équations (1), (2), (3) par Z^n et en sommant terme à terme, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \lambda p(2-p)P_0 Z^0 + (\lambda p(2-p) + \mu)P_1 Z^1 + (\lambda p(2-p) + \mu) \sum_{n \geq 2} P_n Z^n &= \mu P_1 Z^0 + (\mu P_2 + 2p(1-p)\lambda P_0)Z^1 + \\ &\mu \sum_{n \geq 2} P_{n+1} Z^n + \lambda p^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2} Z^n + 2p(1-p)\lambda \sum_{n \geq 2} P_{n-1} Z^n \\ \Leftrightarrow \lambda p(2-p)P_0 + (\lambda p(2-p) + \mu)P_1 Z + (\lambda p(2-p) + \mu) \left[\sum_{n \geq 0} P_n Z^n - P_0 - P_1 Z \right] &= \mu P_1 + (\mu P_2 + 2p(1-p)\lambda P_0)Z + \frac{\mu}{Z} \sum_{n \geq 2} P_{n+1} Z^{n+1} + \\ &\lambda p^2 Z^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2} Z^{n-2} + 2p(1-p)\lambda Z \sum_{n \geq 2} P_{n-1} Z^{n-1} \end{aligned}$$

Posons $j = n + 1 \Leftrightarrow n = j - 1$ on aura alors :

$$\begin{aligned} \lambda p(2-p)P_0 + (\lambda p(2-p) + \mu)P_1 Z + (\lambda p(2-p) + \mu)f(z) - (\lambda p(2-p) + \mu)P_0 - (\lambda p(2-p) + \mu)P_1 Z &= \mu P_1 + \\ (\mu P_2 + 2p(1-p)\lambda P_0)Z + \frac{\mu}{Z} \left[\sum_{j \geq 0} P_j Z^j - P_0 - P_1 Z - P_2 Z^2 \right] + \lambda p^2 Z^2 f(z) + 2p(1-p)\lambda Z \left[\sum_{j \geq 0} P_j Z^j - P_0 \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda p(2-p)f(z) + \mu f(z) - \mu P_0 = \mu P_1 + \mu P_2 Z + 2p(1-p)\lambda P_0 Z + \frac{\mu}{Z}f(z) - \frac{\mu}{Z}P_0 - \mu P_1 - \mu P_2 Z + \lambda P^2 Z^2 f(z) + 2p(1-p)\lambda Z f(z) - 2p(1-p)\lambda Z P_0$$

$$\Leftrightarrow \lambda p(2-p)f(z) + \mu f(z) - \mu P_0 = \frac{\mu}{Z}f(z) - \frac{\mu}{Z}P_0 + \lambda P^2 Z^2 f(z) + 2p(1-p)\lambda Z f(z)$$

$$\Leftrightarrow f(z) \left[\lambda p(2-p) + \mu - \frac{\mu}{Z} - \lambda P^2 Z^2 - 2p(1-p)\lambda Z \right] = \mu P_0 - \frac{\mu}{Z}P_0$$

$$\Leftrightarrow f(z) = P_0 \left[\frac{\mu - \frac{\mu}{Z}}{\lambda p(2-p) + \mu - \frac{\mu}{Z} - \lambda P^2 Z^2 - 2p(1-p)\lambda Z} \right]$$

$$\Leftrightarrow f(z) = P_0 \left[\frac{Z\mu - \mu}{\lambda p(2-p)Z + Z\mu - \mu - \lambda P^2 Z^3 - 2\lambda Z^2(1-p)} \right] \quad (4.10)$$

Pour déterminer P_0 , il suffit de calculer $f(1) = 1 = \lim_{Z \rightarrow 1} f(z)$. On aura :

$$f(z) = P_0 \left[\frac{Z\mu - \mu}{\lambda p(2-p)Z + Z\mu - \mu - \lambda P^2 Z^3 - 2\lambda Z^2(1-p)} \right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{Z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{Z \rightarrow 1} P_0 \left[\frac{Z\mu - \mu}{\lambda p(2-p)Z + Z\mu - \mu - \lambda P^2 Z^3 - 2\lambda Z^2(1-p)} \right]$$

$$= \lim_{Z \rightarrow 1} P_0 \frac{\mu}{\lambda p(2-p) + \mu - 3\lambda P^2 Z^2 - 4\lambda p Z + 4\lambda P^2 Z}$$

$$= P_0 \frac{\mu}{2\lambda p - \lambda P^2 + \mu - 3\lambda P^2 - 4\lambda p + 4\lambda P^2}$$

$$= P_0 \frac{\mu}{\mu - 2\lambda p} = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{\mu - 2\lambda p}{\mu}$$

Ce qui nous donne :

$$P_0 = 1 - \frac{2\lambda p}{\mu} \quad (4.11)$$

Le système est ergodique si $\frac{2\lambda p}{\mu} < 1$.

Posons $\rho = \frac{2\lambda p}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{2\lambda p}{\rho}$, on peut donc écrire $f(z)$ sous la forme suivante :

$$f(z) = \left(1 - \frac{2\lambda p}{\mu} \right) \left[\frac{\frac{2\lambda p Z}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho}}{\lambda p(2-p)Z + \frac{2\lambda p Z}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho} - \lambda P^2 Z^3 - 2\lambda p Z^2(1-p)} \right]$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{(1-\rho) \left(\frac{2\lambda p Z}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho} \right)}{\lambda p(2-p)Z + \frac{2\lambda p Z}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho} - \lambda P^2 Z^3 - 2\lambda p Z^2(1-p)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\frac{2\lambda p(1-\rho)}{\rho}(Z-1)}{\lambda p(2-p)Z + \frac{2\lambda p Z}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho} - \lambda p^2 Z^3 - 2\lambda p Z^2(1-p)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{(Z-1)\left(\frac{2\lambda p(1-\rho)}{\rho}\right)}{\lambda p(2-p) + \frac{2pZ}{\rho} - \frac{2p}{\rho} - p^2 Z^3 - 2pZ^2(1-p)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z) &= \frac{2p(1-p)(Z-1)}{\rho p Z(2-p) + 2pZ - 2p - \rho p^2 Z^3 - 2\rho p Z^2(1-p)} \\ &= \frac{2(1-p)(Z-1)}{\rho Z(2-p) + 2Z - 2 - \rho p Z^3 - 2\rho Z^2(1-p)} \\ &= \frac{2(1-p)(Z-1)}{Z(\rho(2-p) + 2) - \rho p Z^3 - 2\rho Z^2(1-p) - 2} \\ &= \frac{2(1-p)(Z-1)}{2(Z-1) - \rho p Z\left(Z - \frac{p-2}{p}\right)(Z-1)} \\ &= \frac{2(1-\rho)(Z-1)}{(Z-1)\left[2 - \rho p Z\left(Z - \frac{p-2}{p}\right)\right]} \end{aligned}$$

Enfin

$$f(z) = \frac{2(1-\rho)}{2 - \rho p Z\left(Z - \frac{p-2}{p}\right)} \quad (4.12)$$

4.1.3.1.1 Le nombre moyen de clients dans le système

Le nombre moyen de clients dans le système est la dérivée de f au point $Z = 1$. Il est noté par L .

$L = |f'(z)|_{z=1}$. Pour cela, nous allons calculer $f'(z)$ en premier lieu.

$$f'(z) = \frac{2(1-\rho)(2\rho p Z - \rho(p-2))}{[2 - \rho p Z\left(Z - \frac{p-2}{p}\right)]^2}$$

Calculons maintenant $f'(1)$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{2(1-\rho)(2\rho p - \rho(p-2))}{[2 - \rho p\left(\frac{2}{p}\right)]^2} \\ &= \frac{2(1-\rho)(p+2)}{4(1-\rho)^2} = \frac{\rho(p+2)}{2(1-\rho)} \end{aligned}$$

D'où

$$L = \frac{\rho(p+2)}{2(1-\rho)}$$

En remplaçant ρ par $\frac{2\lambda p}{\mu}$, on aura :

$$L = \frac{\frac{2\lambda p}{\mu}(p+2)}{2\left(1 - \frac{2\lambda p}{\mu}\right)} = \frac{\lambda p(p+2)}{\mu - 2\lambda p}$$

Finalement,

$$L = \frac{\lambda p(p+2)}{\mu - 2\lambda p} \quad (4.13)$$

4.1.3.1.2 Le temps moyen de séjour dans le système

De même que le précédent, ce temps est obtenu en utilisant les formules de Little. Il est noté par W et donné par :

$W = \frac{L}{\text{taux d'arrivée}}$. or notre taux d'entrée est $2\lambda p$. Donc on aura :

$$W = \frac{\frac{\lambda p(p+2)}{\mu - 2\lambda p}}{2\lambda p} = \frac{p+2}{2(\mu - 2\lambda p)}$$

Notre temps moyen de séjour sera enfin

$$W = \frac{p+2}{2(\mu - 2\lambda p)} \quad (4.14)$$

4.1.3.2 Le jeu associé à ce modèle

Dans le cas non observable, les clients ne sont pas informés de la taille du système au moment de leurs arrivées. Ils ignorent également si c'est bénéfique pour eux de rejoindre le système où de quitter. Chaque client entre dans le système avec une probabilité p vue ci-dessus qui sera déterminée par la suite.

Nous remarquons ici que l'interaction n'existe pas seulement entre deux joueurs, mais entre une infinité de clients puisque chaque client prend une décision en fonction d'une infinité de clients. Cette situation peut être modélisée par un jeu sous forme normale qui est donné par :

$$J < J, \{S_i\}_{i \in J}, \{U_i\}_{i \in J} > \quad (4.15)$$

Avec

J : l'ensemble des joueurs qui sont les clients

$S_i = \{E, Q\}$: l'ensemble des stratégies de chaque joueur

$U_i(p)$: la fonction de gain de chaque joueur qui est donnée par:

$$U_i(p) = p(R - CW)$$

$$\text{Or } W = \frac{p+2}{2(\mu - 2\lambda p)}$$

$$D'o\grave{u} \quad U_i(p) = p \left(R - C \frac{p+2}{2(\mu-2\lambda p)} \right) \quad (4.16)$$

4.1.3.3 Recherche d'équilibre de Nash

Si le gain moyen des clients est positif ou nul lorsqu'on remplace la valeur de p par 1 dans la fonction d'utilité des clients, alors tous les clients rejoindront le système sinon le gain moyen d'un client sera négatif. Mais cela n'équivaut pas à dire forcément qu'un client aura un gain négatif lorsqu'il entre dans le système car nous avons la condition $R > \frac{3C}{2\mu}$; pour cela, les clients entrent dans le système avec une probabilité p . L'objectif est de trouver une stratégie mixte de sécurité p_e telle que chaque client rejoigne le système avec la probabilité p_e . Supposons qu'un client est indifférent entre rejoindre et quitter le système s'il obtiendra un bénéfice nul en entrant. Mais il préfère entrer, on aura alors :

$$\begin{aligned} U(p) = 0 &\Rightarrow R - C \frac{p+2}{2(\mu-2\lambda p)} = 0 \\ &\Rightarrow 2R\mu - 4R\lambda p - Cp - 2C = 0 \\ &\Rightarrow p = \frac{2R\mu - 2C}{4R\lambda p + C} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.1.3 :

Dans une file d'attente $M^2/M/1$ inobservable dans laquelle les clients qui adhèrent le système ne peuvent le quitter qu'après la fin de leurs services, telle que $2\lambda p < \mu$, il existe un équilibre en stratégies mixtes « entrer avec la probabilité p_e » telle que :

$$p_e = \begin{cases} 1 & \text{si } R \in \left[\frac{3C}{2\mu - 4\lambda}, \infty \right[\\ \frac{2R\mu - 2C}{4R\lambda p + C} & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

Lorsque $R \in \left[\frac{3C}{2\mu - 4\lambda}, \infty \right[$, c'est-à-dire $p = 1$, tous les clients préfèrent donc entrer dans le système car $U(1) = R - \frac{3}{2\mu - 4\lambda} > 0$, donc aucun client n'a intérêt à quitter le système sinon son gain sera nul.

Supposons à présent que $R - \frac{3}{2\mu - 4\lambda} < 0$ c'est-à-dire $R < \frac{3}{2\mu - 4\lambda}$, donc la stratégie « entrer avec la probabilité 1 » n'est pas un équilibre de Nash, alors on supposera que tous les clients rejoignent le système avec la probabilité p_e . Le gain espéré par un client est alors :

$U(p_e) = p \left(R - C \frac{p_e+2}{2(\mu-2\lambda p_e)} \right) = 0$, soit alors un des deux clients qui arrivent au système et qui dévie unilatéralement et choisit une probabilité p d'entrée telle que $p \neq p_e$, son gain sera alors $U(p_e, p) = p \left(R - C \frac{p_e+2}{2(\mu-2\lambda p_e)} \right) = 0$, donc ce client n'a aucun intérêt à modifier sa stratégie.

L'objectif dans cette section était de déterminer les équilibres de Nash que les clients peuvent suivre afin de maximiser leurs gains dans un système $M^2/M/1$ selon l'information. Nous passerons maintenant à la généralisation de l'étude précédente dans la section suivante.

4.2 Etude générale sur le modèle $M^k/M/1$

Dans la section précédente, nous avons considéré que les clients arrivaient au système par groupe de deux. A présent, nous généraliserons cette notion dans cette section en supposant qu'à un instant t , il y a k clients qui arrivent au système. Le modèle sera alors noté par $M^k/M/1/FIFO$.

Nous garderons la même structure de récompense-coût (R, C) définie dans le modèle précédent, et les mêmes hypothèses en effectuant les changements suivants :

- Supposons que lorsqu'un bloc de k clients arrivent, chaque client du groupe peut être classé dans la $i^{\text{ème}}$ place avec une probabilité $\frac{1}{k}$.
- Supposons enfin que $R - C \frac{k+1}{2\mu} > 0$, qui stipule que les gains moyens d'un groupe de k clients qui décident de rejoindre la file lorsque celle-ci est vide sont positifs. Par analogie au modèle $M^2/M/1$, nous définirons le jeu correspondant à ce modèle en fonction de l'information disposée aux clients. Deux cas se présentent également : le cas observable et le cas non observable.

4.2.1 Cas observable

Notons que les k clients observent d'abord la taille du système avant de prendre une décision.

4.2.1.1 Caractéristiques du système

Afin de déterminer les mesures de performances du système, nous avons établi le graphe de transition suivant :

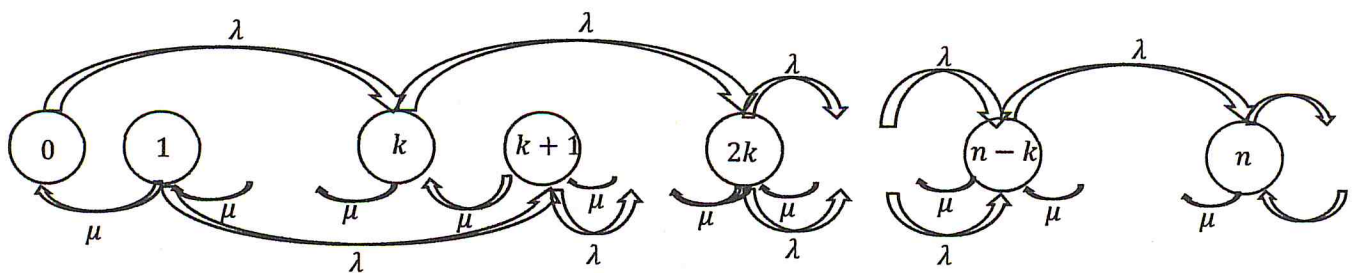


Figure 4.2-1 : graphe de transition de la file $M^k/M/1$ observable

Nous aurons les équations d'états d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 & \text{pour } n = 0 \quad (1) \\ (\lambda + \mu)P_n = \mu P_{n+1} & \text{pour } n < k \quad (2) \\ (\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-k} + \mu P_{n+1} & \text{pour } n \geq k \quad (3) \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 & (4) \end{cases}$$

La fonction génératrice de la distribution stationnaire est : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n$

En multipliant par Z^n les équations 1, 2, 3 et en faisant la sommation termes à termes, nous trouverons :

$$\begin{aligned} \lambda P_0 Z^0 + (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{k-1} P_n Z^n + (\lambda + \mu) \sum_{n=k}^{\infty} P_n Z^n &= \mu P_1 Z^0 + \mu \sum_{n=1}^{k-1} P_{n+1} Z^n + \mu \sum_{n=k}^{\infty} P_{n+1} Z^n + \lambda \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k} Z^n \\ \Rightarrow \lambda P_0 + (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} P_n Z^n &= \mu P_1 + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} Z^n + \lambda \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k} Z^n \\ \Rightarrow \lambda P_0 + (\lambda + \mu) [\sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n - P_0] &= \mu P_1 + \frac{\mu}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} Z^{n+1} + \lambda Z^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k} Z^{n-k} \end{aligned}$$

En posant $j = n + 1 \Rightarrow n = j - 1$ on aura :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)f(z) - \mu P_0 &= \mu P_1 + \frac{\mu}{Z} f(z) - \frac{\mu}{Z} P_0 - \mu P_1 + \lambda Z^k f(z) \\ \Rightarrow f(z) \left[\lambda + \mu - \frac{\mu}{Z} - \lambda Z^k \right] &= \mu P_0 - \frac{\mu}{Z} P_0 = P_0 \left(\mu - \frac{\mu}{Z} \right) \\ \Rightarrow f(z) \left[\lambda Z + \mu Z - \mu - \lambda Z^{k+1} \right] &= P_0 (Z\mu - \mu) \end{aligned}$$

D'où

$$f(z) = P_0 * \frac{Z\mu - \mu}{\lambda Z + \mu Z - \mu - \lambda Z^{k+1}} \quad (4.18)$$

Pour déterminer P_0 , on calcule $f(1) = 1 \Rightarrow \lim_{Z \rightarrow 1} f(z) = 1$, on aura donc :

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow 1} f(z) &= \lim_{Z \rightarrow 1} P_0 * \frac{Z\mu - \mu}{\lambda Z + \mu Z - \mu - \lambda Z^{k+1}} = \lim_{Z \rightarrow 1} P_0 * \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda(k+1)Z^k} \\ \Rightarrow \lim_{Z \rightarrow 1} f(z) &= P_0 * \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda(k+1)} = P_0 * \frac{\mu}{\mu - \lambda k} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } P_0 = \frac{\mu - \lambda k}{\mu} = 1 - \frac{\lambda k}{\mu} \quad (4.19)$$

En posant $\rho = \frac{\lambda k}{\mu}$, alors le système sera ergodique si $\lambda k < \mu$

La fonction génératrice sera alors :

$$f(z) = (1 - \rho) * \frac{Z\mu - \mu}{\lambda Z + \mu Z - \mu - \lambda Z^{k+1}} = (1 - \rho) * \frac{\mu(Z - 1)}{\mu(Z - 1) - \lambda Z(Z^k - 1)}$$

$$f(z) = (1 - \rho) * \frac{\mu(Z - 1)}{\mu(Z - 1) - \lambda Z(Z - 1) \sum_{j=0}^{k-1} Z^j} = \frac{\mu(1 - \rho)}{\mu - \lambda \sum_{j=0}^k Z^j}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\mu(1 - \rho)}{\mu - \lambda \sum_{j=1}^k Z^j} \quad (4.19)$$

4.2.1.1.1 Les mesures de performances du système

Il s'agit de calculer le nombre moyen de clients dans le système ainsi que le temps moyen de séjour d'un client dans le système.

✱ Le nombre moyen de clients dans le système

Il est noté par L et est obtenu en calculant la dérivée de la fonction génératrice au point $z = 1$. On aura :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \left| \frac{d}{dZ} f(z) \right|_{z=1}$$

On a :

$$\frac{d}{dZ} f(z) = \frac{d}{dZ} \left[\frac{\mu(1 - \rho)}{\mu - \lambda \sum_{j=1}^k Z^j} \right] = \mu(1 - \rho) * \frac{d}{dZ} [(\mu - \lambda \sum_{j=1}^k Z^j)^{-1}]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dZ} f(z) = \mu(1 - \rho) * (-1) [(\mu - \lambda \sum_{j=1}^k Z^j)^{-2}] * (-\lambda) \sum_{j=1}^k jZ^{j-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dZ} f(z) = \frac{\mu\lambda(1-\rho) \sum_{j=1}^k jZ^{j-1}}{(\mu - \lambda \sum_{j=1}^k Z^j)^2}$$

Au point $Z = 1$, on aura :

$$\frac{d}{dZ} f(z) = \frac{\mu\lambda k(1 - \rho) \left(\frac{1+k}{2} \right)}{(\mu - \lambda k)^2} = \frac{\lambda k(\mu - \lambda k)(k + 1)}{2(\mu - \lambda k)^2} = \frac{\lambda k(k + 1)}{2(\mu - \lambda k)}$$

D'où le nombre moyen de clients dans le système sera :

$$L = \frac{\lambda k(k + 1)}{2(\mu - \lambda k)} \quad (4.20)$$

✱ Le temps moyen de séjour dans le système

Obtenu par le biais des formules de Little, le temps moyen de séjour dans le système est donné par l'expression suivante :

$$W = \frac{L}{\text{taux d'arrivée}} = \frac{L}{\lambda k} = \frac{\frac{\lambda k(k+1)}{2(\mu - \lambda k)}}{\lambda k} = \frac{k+1}{2(\mu - \lambda k)} \quad (4.21)$$

Il est aussi possible de calculer d'autres mesures de performances tels que : *le nombre moyen de clients dans la file d'attente et le temps moyen de séjour dans la file d'attente*. Ils sont donnés par :

$$L_q = L - \rho = L - \frac{\lambda k}{\mu} = \frac{\lambda k(k+1)}{2(\mu - \lambda k)} - \frac{\lambda k}{\mu} \quad (4.22)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{k+1}{2(\mu - \lambda k)} - \frac{1}{\mu} \quad (4.23)$$

Dans la section suivante nous modéliserons notre étude générale sous forme d'un jeu, puis nous déterminerons le nombre seuil afin de trouver l'équilibre de Nash.

4.2.1.2 Le jeu associé

Sachant qu'il existe une récompense R pour un client servi et un coût d'attente C , nous pouvons alors modéliser cette situation par un jeu symétrique entre k clients qui arrivent au même moment dans le système. Les clients étant informés de l'état du système, il leur revient alors de prendre la décision d'entrer ou de quitter en fonction de cette information et d'une manière simultanée. Ce jeu peut s'écrire de la manière suivante :

$$J = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{U_i\}_{i \in J} \rangle \quad (4.24)$$

Où

$J = \{1, 2, \dots, k\}$ est l'ensemble des joueurs qui est constitué des k clients

$\{S_i\} = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t)\}$ est l'ensemble des stratégies de chaque clients

Avec

$$s_1(t) = \begin{cases} \text{entrer (E)} & \text{si } N(t) \leq n \\ \text{quitter (Q)} & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$s_2(t) = \text{entrer (E)} \text{ et } s_3(t) = \text{quitter (Q)}$$

$U_i(s_i, s_{-i})$: est la fonction d'utilité de chaque client i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ qui sera déterminer ci-dessous.

Le bénéfice moyen de chaque client lorsqu'un groupe de k clients arrivent et observent n clients dans le système et décident ensuite d'entrer est donné par :

$$U_i(E, \dots, E) = R - C \left(\frac{n+1}{\mu} \frac{1}{k} + \frac{n+2}{\mu} \frac{1}{k} + \dots + \frac{n+k}{\mu} \frac{1}{k} \right)$$

Où $\frac{1}{k}$ est la probabilité d'entrée de chaque client

$$\begin{aligned} U_i(E, \dots, E) &= R - C \left(\frac{1}{k\mu} \sum_{i=1}^k (n+i) \right) \\ &= R - C \left(\frac{1}{k\mu} \left(kn + \sum_{i=1}^k i \right) \right) \end{aligned}$$

Avec $\sum_{i=1}^k i = \frac{(1+k)k}{2}$ terme générale d'une suite arithmétique ; on aura alors :

$$\begin{aligned} U_i(E, \dots, E) &= R - C \left(\frac{1}{k\mu} \left(kn + \frac{(1+k)k}{2} \right) \right) \\ &= R - C \left(\frac{n}{\mu} + \frac{1+k}{2\mu} \right) \end{aligned}$$

$$d'où \ U_i(E, \dots, E) = R - C \left(\frac{2n+1+k}{2\mu} \right) \quad (4.25)$$

En se basant sur le cas particulier $M^2/M/1$, notons par $z_i \in \{0,1\}$ la valeur caractérisant l'action du joueur $i, i \in J$ donnée par :

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si le joueur } i \text{ entre} \\ 0 & \text{si le joueur } i \text{ quitte} \end{cases} \text{ avec } i \in J$$

Enfin, la fonction de gain de chaque client sera :

$$U_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} R - C \frac{2n+1+\sum_{i=1}^k z_i}{2\mu} & \text{si } z_i = 1 \\ 0 & \text{si } z_i = 0 \end{cases}$$

4.2.1.3 Détermination d'équilibre de Nash

Dans cette section, nous allons résoudre le jeu (4.22) sachant que l'objectif des clients est de maximiser leurs gains, donc un client décidera de rejoindre le système s'il aura un bénéfice positif. Supposons que tous les clients rejoignent le système même si leurs gains sont nuls. Alors on aura :

$$\begin{aligned} U_i(E, \dots, E) \geq 0 &\Leftrightarrow R - C \frac{2n+1+k}{2\mu} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2\mu R \geq C(2n+1+k) \\ &\Leftrightarrow 2n \leq \frac{2\mu R - C(1+k)}{C} \\ &\Leftrightarrow n \leq \frac{2\mu R - C(1+k)}{2C} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Puisque n ne prend que des valeurs entières, nous pouvons donc écrire :

$$n \leq \left\lceil \frac{2\mu R}{2C} - \frac{k+1}{2} \right\rceil \quad (4.27)$$

Posons $n_e = \left\lceil \frac{2\mu R}{2C} - \frac{k+1}{2} \right\rceil$, ce qui nous permet de généraliser le théorème précédent par ce résultat qui suit :

Théorème 4.2.1

Dans une file d'attente markovienne avec arrivées par bloc de taille k ($M^k/M/1/FIFO$) observable dans laquelle un groupe de k clients qui entrent dans le système ne peuvent le quitter qu'après leurs services telle que $k\lambda < \mu$, il existe un seuil $n_e = \left\lceil \frac{2\mu R}{2C} - \frac{k+1}{2} \right\rceil$ tel que les stratégies « entrer si $n \leq n_e$ et quitter autrement » procurent un équilibre de Nash en stratégies pures (Avec n le nombre de clients dans le système à l'instant t)

Preuve :

Considérons l'arrivée de k clients et trouvent n_1 clients dans le système tels que $n_1 \leq n_e$. Si ces clients entrent dans le système, alors chacun des clients aura un gain $R - C \frac{2n_1+1+k}{2\mu} \geq 0$.

Donc aucun client n'a intérêt à quitter sinon son gain sera nul.

Supposons maintenant une taille n_2 du système telle que $n_2 > n_e$, alors aucun client n'a intérêt à rejoindre le système car il aura un gain $R - C \frac{2n_1+1+k}{2\mu} < 0$.

4.2.2 Cas non observable

Contrairement au cas observable, les clients ne sont pas informés de la taille du système. Du coup, ils entreront au système avec une certaine probabilité p qui satisfait certaines conditions que nous déterminerons par la suite afin de trouver l'équilibre de Nash.

Nous déterminerons aussi les mesures de performances du système qui nous seront utiles pour la détermination de la fonction de gain des clients.

4.2.2.1 Caractéristiques du système

Comme dans le cas particulier précédent ($M^2/M/1$ non observable) où le nombre de clients qui entrent dans le système était une variable aléatoire suivant la loi binomiale $(2, p)$, nous considérons cette fois-ci que cette variable suit la même loi mais de paramètre (k, p) . Soit X cette variable aléatoire, on aura donc :

$$X \sim \mathcal{B}(k, p) \Leftrightarrow P(X = i) = C_k^p p^i (1 - p)^{k-i} \quad \text{avec } i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$$

Notons par a_i cette probabilité, on aura donc :

$$a_i = C_k^p p^i (1 - p)^{k-i} \quad \text{avec } i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$$

Les équations de Kolmogorov correspondantes à ce système en se basant sur le cas particulier précédent sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n = 0 \\ \text{pour } n = 1 \\ \text{pour } n \geq 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda \sum_{i=1}^k a_i P_0 = \mu P_1 \quad (1) \\ (\lambda \sum_{i=1}^k a_i + \mu) P_1 = \mu P_2 + \lambda a_1 P_0 \quad (2) \\ \left(\lambda \sum_{i=1}^k a_i + \mu \right) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=1}^n P_{n-i} a_i \quad (3) \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (4) \end{array} \right.$$

Sous la condition $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, ce système est équivalent alors, en ne prenant que les équations (1) et (3) au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n = 0 \\ \text{pour } n \geq 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda \sum_{i=0}^k a_i - a_0 \right) P_0 = \mu P_1 \\ \left(\lambda \left(\sum_{i=0}^k a_i - a_0 \right) + \mu \right) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=1}^n P_{n-i} a_i \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n = 0 \\ \text{pour } n \geq 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda(1 - a_0) P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda(1 - a_0) + \mu) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=1}^n P_{n-i} a_i \end{array} \right.$$

Donc nous pouvons enfin écrire les équations d'états d'équilibre comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n = 0 \\ \text{pour } n \geq 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda P_0 = \mu P_1 + \lambda a_0 P_0 \\ (\lambda + \mu) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Afin de trouver le nombre de clients ainsi que le temps le temps moyen de séjour dans le système, nous allons introduire la fonction génératrice de la distribution stationnaire.

4.2.2.1.1 La fonction génératrice des probabilités stationnaires

Il est nécessaire d'introduire deux fonctions génératrices afin de pouvoir résoudre ce système. Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n$ et $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$.

En multipliant chaque côté des équations du système (4.22) par Z^n et en faisant la sommation termes à termes, on aura :

$$\lambda P_0 Z^0 + (\lambda + \mu) \sum_{n \geq 1} P_n Z^n = \mu P_1 Z^0 + \lambda a_0 P_0 Z^0 + \mu \sum_{n \geq 1} P_{n+1} Z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n$$

$$\Leftrightarrow \lambda P_0 + (\lambda + \mu) \left[\sum_{n \geq 0} P_n Z^n - P_0 \right] = \mu P_1 + \lambda a_0 P_0 + \frac{\mu}{Z} \sum_{n \geq 1} P_{n+1} Z^{n+1} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n$$

En faisant le changement de variable $j = n + 1 \Rightarrow n = j - 1$ on aura :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lambda \sum_{n \geq 0} P_n Z^n + \mu \sum_{n \geq 0} P_n Z^n - \mu P_0 &= \mu P_1 + \lambda a_0 P_0 + \frac{\mu}{Z} \left[\sum_{n \geq 0} P_n Z^n - P_0 - P_1 Z \right] + \\ &\quad \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n - \lambda a_0 P_0 \\ \Leftrightarrow \lambda f(z) + \mu f(z) - \mu P_0 &= \mu P_1 + \lambda a_0 P_0 + \frac{\mu}{Z} f(z) - \frac{\mu}{Z} P_0 - \mu P_1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n - \\ &\quad \lambda a_0 P_0 \\ \Leftrightarrow \lambda f(z) + \mu f(z) - \mu P_0 &= \frac{\mu}{Z} f(z) - \frac{\mu}{Z} P_0 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n &= P_0 a_0 Z^0 + P_1 a_0 Z^1 + P_2 a_0 Z^2 + P_0 a_1 Z^1 + \dots + \sum_{i=0}^n P_{n-i} a_i Z^n + \dots \\ &= a_0 Z^0 (P_0 Z^0 + P_1 Z^1 + \dots + P_n Z^n + \dots) + a_1 Z^1 (P_0 Z^0 + P_1 Z^1 + \dots + \\ &\quad P_n Z^n + \dots) + \dots + a_n Z^n ((P_0 Z^0 + P_1 Z^1 + \dots + P_n Z^n + \dots) + \dots \\ &= f(z) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i Z^i = f(z) \cdot A(z) \end{aligned}$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned} \lambda f(z) + \mu f(z) - \mu P_0 &= \frac{\mu}{Z} f(z) - \frac{\mu}{Z} P_0 + \lambda f(z) \cdot A(z) \\ \Leftrightarrow f(z) \left[\lambda + \mu - \frac{\mu}{Z} - \lambda A(z) \right] &= \mu P_0 - \frac{\mu}{Z} P_0 = \mu P_0 \left(1 - \frac{1}{Z} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\mu P_0 \left(1 - \frac{1}{Z} \right)}{\mu \left(1 - \frac{1}{Z} \right) + \lambda (1 - A(z))} \\ \Leftrightarrow f(z) &= \frac{\mu P_0 (Z - 1)}{\mu (Z - 1) + \lambda Z (1 - A(z))} \quad (4.29) \end{aligned}$$

Pour calculer P_0 , notons bien que $\lim_{z \rightarrow 1} A'(z) = E(X)$ et $f(1) = 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$, on aura donc :

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\mu P_0 (Z - 1)}{\mu (Z - 1) + \lambda Z (1 - A(z))} = \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda E(X)} = 1$$

$$\Rightarrow \mu P_0 = \mu - \lambda kp \quad \Rightarrow P_0 = \frac{\mu - \lambda kp}{\mu}$$

$$\Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda kp}{\mu} \quad (4.30)$$

En posant $\rho = \frac{\lambda kp}{\mu}$ on aura $P_0 = 1 - \rho$. Donc la stabilité du système existe si : $\rho = \frac{\lambda kp}{\mu} < 1$

On sait que $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Z^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_k^p p^i (1-p)^{k-i} = (pZ + 1 - p)^k$

D'où la fonction génératrice sera :

$$f(z) = \frac{\mu P_0 (Z - 1)}{\mu (Z - 1) + \lambda Z [1 - (pZ + 1 - p)^k]} = \frac{\mu P_0 (Z - 1)}{\mu (Z - 1) + \lambda Z - \lambda Z (pZ + 1 - p)^k} \quad (4.31)$$

Pour trouver le nombre moyen de clients dans le système, on dérive la fonction $f(z)$. On a :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\mu P_0 [\mu (Z-1) + \lambda Z (1 - (pZ+1-p)^k)] - \mu P_0 (Z-1) [\mu + \lambda - (\lambda (pZ+1-p)^k) + \lambda kpZ (pZ+1-p)^{k-1}]}{[\mu (Z-1) + \lambda Z - \lambda Z (pZ+1-p)^k]^2} \\ &= \mu P_0 \left[\frac{\mu Z - \mu + \lambda Z - \lambda Z (pZ + 1 - p)^k - \mu Z + \mu - \lambda Z + \lambda + \lambda (Z - 1) \left((pZ + 1 - p)^k \right) + kpZ (pZ + 1 - p)^{k-1}}{[\mu (Z - 1) + \lambda Z - \lambda Z (pZ + 1 - p)^k]^2} \right] \\ \Rightarrow f'(z) &= \mu P_0 \left[\frac{\lambda - \lambda (pZ + 1 - p)^k + \lambda kpZ (Z - 1) (pZ + 1 - p)^{k-1}}{[\mu (Z - 1) + \lambda Z - \lambda Z (pZ + 1 - p)^k]^2} \right] \quad (4.32) \end{aligned}$$

4.2.2.1.2 Les mesures de performances du système

✱ Le nombre moyen de clients dans le système

Il est obtenu en calculant $|f'(z)|_{z=1}$. Ce qui équivaut à calculer $\lim_{z \rightarrow 1} f'(z)$, on aura :

$$\lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \mu P_0 \left[\frac{\lambda - \lambda (pZ + 1 - p)^k + \lambda kpZ (Z - 1) (pZ + 1 - p)^{k-1}}{[\mu (Z - 1) + \lambda Z - \lambda Z (pZ + 1 - p)^k]^2} \right]$$

Soient :

$$N(z) = \lambda - \lambda (pZ + 1 - p)^k + \lambda kpZ (Z - 1) (pZ + 1 - p)^{k-1}$$

$$N(z) = \lambda - \lambda (pZ + 1 - p)^k + \lambda kpZ^2 (pZ + 1 - p)^{k-1} - \lambda kpZ (pZ + 1 - p)^{k-1} \quad \text{et}$$

$$D(z) = [\mu (Z - 1) + \lambda Z - \lambda Z (pZ + 1 - p)^k]^2$$

Donc en dérivant N et D , on aura :

$$\begin{aligned} N'(z) &= -\lambda pk (pZ + 1 - p)^{k-1} + 2\lambda kpZ (pZ + 1 - p)^{k-1} + \lambda p^2 Z^2 k (k - 1) (pZ + 1 - p)^{k-2} \\ &\quad - \lambda kp (pZ + 1 - p)^{k-1} - \lambda p^2 Z k (k - 1) (pZ + 1 - p)^{k-2} \end{aligned}$$

$$N'(z) = -2\lambda pk (pZ + 1 - p)^{k-1} + 2\lambda kpZ (pZ + 1 - p)^{k-1} + \lambda p^2 k Z (k - 1) (Z - 1) (pZ + 1 - p)^{k-2}$$

$$N''(z) = -2\lambda p^2 k (k - 1) (pZ + 1 - p)^{k-2} + 2\lambda kp (pZ + 1 - p)^{k-1} + 2\lambda p^2 Z k (k - 1) (pZ + 1 - p)^{k-2} +$$

$$\lambda p^2 k Z k(k-1)(pZ+1-p)^{k-2} + \lambda p^3 Z^2 k(k-1)(k-2)(pZ+1-p)^{k-3} - \lambda p^2 k(k-1)(pZ+1-p)^{k-2} - \lambda p^3 Z k(k-1)(k-2)(pZ+1-p)^{k-3}$$

$$N''(z) = \lambda p^2 k(k-1)(4Z-3)((pZ+1-p)^{k-2} + 2\lambda k p Z(pZ+1-p)^{k-1} + \lambda p^3 Z k(k-1)(k-2)(Z-1)) - \lambda p^3 Z k(k-1)(k-2)(pZ+1-p)^{k-3}$$

$$D'(z) = 2[\mu + \lambda - \lambda(pZ+1-p)^k - \lambda k p Z(pZ+1-p)^{k-1}][\mu(Z-1) + \lambda Z - \lambda Z(pZ+1-p)^k]$$

$$D''(z) = 2[-2\lambda p k(pZ+1-p)^{k-1} - \lambda k Z p^2(pZ+1-p)^{k-2}][\mu(Z-1) + \lambda Z - \lambda Z(pZ+1-p)^k] + 2[\mu + \lambda - \lambda(pZ+1-p)^k - \lambda k p Z(pZ+1-p)^{k-1}][\mu + \lambda - \lambda(pZ+1-p)^k - \lambda k p Z(pZ+1-p)^{k-1}]$$

En remplaçant Z par 1 dans N'' et D'' , on aura :

$$N''(1) = \lambda p^2 k(k-1) + 2\lambda k p = \lambda k p((k-1)p + 2) \quad \text{et} \quad D''(1) = 2(\mu - \lambda k p)^2. \quad \text{D'où}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \mu P_0 \frac{N''(z)}{D''(z)} = \mu P_0 \frac{\lambda k p((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)^2}$$

$$\text{Or on sait que } P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda E(X)}{\mu} \quad \text{or } E(X) = k p \quad \text{donc } P_0 = 1 - \frac{\lambda k p}{\mu}$$

$$\text{D'où } L = (\mu - \lambda k p) \frac{\lambda k p((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)^2} = \frac{\lambda k p((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)}$$

Enfin,

$$L = \frac{\lambda k p((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)} \quad (4.33)$$

✱ Le temps moyen de séjour dans le système

Il est obtenu en utilisant les formules de Little. On a :

$$W = \frac{L}{\text{taux d'arrivée}} = \frac{L}{\lambda k p} = \frac{\lambda k p((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)} = \frac{(k-1)p + 2}{2(\mu - \lambda k p)}$$

Enfin,

$$W = \frac{(k-1)p + 2}{2(\mu - \lambda k p)} \quad (4.34)$$

✱ Le nombre moyen de clients dans la file

Toujours avec les formules de Little, on aura :

$$L_q = L - \rho = \frac{\lambda k p((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)} - \frac{\lambda k p}{\mu} \quad (4.35)$$

* Le temps moyen de séjour dans la file

Il est donné par l'expression suivante :

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{(k-1)p + 2}{2(\mu - \lambda kp)} - \frac{1}{\mu} \quad (4.36)$$

4.2.2.2 Le jeu attribué à ce modèle

En gardant les mêmes paramètres de récompense-coût (R, C), nous pouvons modéliser cette situation comme un jeu entre les clients, étant donné que chaque client prend sa décision en fonction d'une infinité de clients. Ce jeu est donné par :

$$J = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{U_i\}_{i \in J} \rangle \quad (4.37)$$

Où

$J = \{1, 2, \dots, k\}$ est l'ensemble des joueurs (les clients)

$S_i = \{E, Q\}$ est l'ensemble des stratégies de chaque joueur

$U_i(p) = p(R - CW)$ est la fonction de gain d'un client i .

Comme $W = \frac{(k-1)p+2}{2(\mu-\lambda kp)}$ alors la fonction d'utilité sera :

$$U_i(p) = p \left(R - C \frac{(k-1)p + 2}{2(\mu - \lambda kp)} \right) \quad (4.38)$$

4.2.2.3 Recherche d'équilibre de Nash

Notre objectif est de trouver un équilibre de Nash en stratégies mixtes vu que les clients ne sont pas au courant de l'état du système au moment de leurs arrivées. Donc si

$U(p) \geq 0$ pour $p = 1$, tous les clients ont donc intérêt à rejoindre le système, sinon le gain moyen d'un client sera négatif. Mais cela n'est pas valable dans le cas où les clients entrent dans le système étant donné celui-ci est vide, car ils auront un gain moyen positif.

Un client est indifférent entre « entrer ou quitter » si son gain est nul en rejoignant le système.

Nous aurons alors :

$$U(p) = 0 \Rightarrow R - C \frac{(k-1)p + 2}{2(\mu - \lambda kp)} = 0 \Rightarrow 2\mu R - 2\lambda kpR = C(k-1)p + 2C$$

$$\Rightarrow p(C(k-1) + 2\lambda kR) = 2\mu R - 2C \Rightarrow p = \frac{2\mu R - 2C}{2\lambda kR + C(k-1)}$$

Notons

$$p_e = \frac{2\mu R - 2C}{2\lambda kR + C(k-1)} \quad (4.39)$$

D'où le résultat suivant :

Théorème 4.2.2 :

Dans une file d'attente $M^k/M/1$ inobservable dans laquelle les clients ne peuvent plus revenir sur leurs décisions une fois accédés dans le système telle que $\lambda k < \mu$, il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes « entrer avec la probabilité p_e » telle que :

$$p_e = \begin{cases} 1 & \text{si } R \in \left[C \frac{(k+1)}{2(\mu - \lambda k)}, \infty \right[\\ \frac{2\mu R - 2C}{2\lambda k R + C(k-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

Si $R \in \left[C \frac{(k+1)}{2(\mu - \lambda k)}, \infty \right[$, tous les clients préfèrent rejoindre le système car $U(1) = R - C \frac{(k+1)}{2(\mu - \lambda k)} \geq 0$.

Donc aucun client n'a intérêt à rechigner sinon il aura un gain nul.

Supposons à présent que $U(1) < 0$. Si tous les clients utilisent la stratégie mixte $(p_e, 1 - p_e)$, un client qui rejoint le système aura alors un gain $R - C \frac{(k-1)p_e + 2}{2(\mu - \lambda k p_e)} = 0$. Supposons une arrivée de k clients dans le système et supposons qu'un seul client parmi eux choisit une probabilité d'entrée $p_1 \neq p_e$, son gain sera alors :

$$U(p_e, p_1) = p_1 \left(R - C \frac{(k-1)p_e + 2}{2(\mu - \lambda k p_e)} \right) = 0$$

Donc ce client n'a aucun intérêt à dévier unilatéralement.

4.3 Les atouts et inconvénients du modèle $M^k/M/1$ pour les clients dans les deux cas d'un point de vue économique

Dans cette section, nous parlerons des intérêts et des inconvénients du modèle d'attente avec arrivées par bloc de taille fixe d'un point de vue économique en attribuant au système une certaine structure récompense-coût (R, C) dans les cas observable et inobservable.

4.3.1 Le cas observable

Les clients observent la taille de la file à leurs arrivées avant de prendre une quelconque décision. Ils leur incombent de ne pas rejoindre le système lorsque le nombre de clients qui s'y trouvent à leurs arrivées est supérieur à $n_e = \left\lceil \frac{2\mu R}{2C} - \frac{k+1}{2} \right\rceil$ sinon ils auront un bénéfice négatif. L'avantage pour les clients est la réduction du risque de perte car ils ont l'information totale sur l'état du système. Par contre, les clients seront très méfiants lorsque le nombre de clients dépasse le seuil n_e , par conséquent ils n'entreront pas dans le système même s'ils ont envies d'y accéder.

4.3.2 Le cas inobservable

Dans ce présent cas, les clients n'ont aucune information sur l'état du système à leurs arrivées, donc ils accéderont au système avec la probabilité p_e . L'avantage est que malgré l'absence d'information, les clients auront au moins un bénéfice nul lorsqu'ils rejoignent le système avec la probabilité p_e . Par contre, un client peut décider de ne pas rejoindre le système alors que celui-ci est vide.

4.3.3 Analyse d'information révélée par le serveur

Cette section est consacrée à une synthèse des deux cas lorsque le serveur a la possibilité de divulguer ou non l'information sur l'état du système.

Après nos études sur le modèle $M^k/M/1$ avec une structure récompense coût, nous pouvons dire que l'avantage pour le serveur lorsqu'il donne l'information sur l'état actuel du système est que les clients vont entrer dans le système tant que sa taille n'atteint pas le nombre seuil. Par contre nous remarquerons une perte de clients lorsque le nombre de clients dans le système dépasse le seuil n_e .

En effet, lorsque le serveur ne donne pas d'information sur l'état actuel du système, les clients qui arrivent peuvent adhérer au système bien que sa taille soit très grande. Par contre il peut y avoir des pertes de clients étant donné que le système soit vide car ils ne sont pas informés de l'état du système.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une étude du modèle $M^k/M/1$ avec une structure récompense-coût (R, C) en commençant par le cas particulier (pour $k = 2$) où nous avons en premier lieu déterminé les caractéristiques du système et les équilibres de Nash dans les cas observable et non observable afin de donner les conditions d'entrée des clients dans le système pour pouvoir maximiser leurs profits. Et nous avons également élaboré quelques atouts et inconvénients pour les clients ainsi que le serveur lorsqu'il a le droit sur la divulgation de l'information sur l'état du système.

5 Conclusion générale

Dans ce manuscrit, après avoir défini un jeu, donner quelques exemples de jeux, donner quelques concepts de solution à savoir les équilibres de Nash, donné également quelques notions sur les files d'attente d'une manière générale et les files d'attente markoviennes en particulier, il a été présenté quelques modèles de files d'attente markoviennes via la théorie des jeux où il a été constaté que si les clients à leurs arrivées observent l'état du système (le nombre de clients présents dans le système à leurs arrivées), ils rejoindront le système si le nombre de clients s'y trouvant est inférieur ou égal à un certain nombre seuil n_e qui peut être déterminé par les calculs. Dans le cas échéant, si les clients n'ont pas la possibilité d'observer l'état du système à leurs arrivées, ils entrèrent au système avec une certaine probabilité p_e afin de maximiser leurs profits respectifs. Cette partie a été clôturée par un modèle de jeu entre les serveurs dans lequel chaque serveur cherche à maximiser son gain en fournissant un meilleur taux de service.

Notre travail réalisé sur les files d'attente circule dans le chapitre 4 où nous avons considéré un système d'attente avec arrivées par bloc de taille fixe k en imposant une certaine structure de récompense-coût (R, C) . Les clients décident à leurs arrivées d'adhérer le système ou de rechigner afin de maximiser leurs profits nets selon l'information qu'ils ont sur le système. Après avoir déterminé les caractéristiques du système dans les deux cas (observable et inobservable), nous avons déterminé les équilibres de Nash correspondant aux deux cas d'information où il a été question de trouver le nombre seuil dans le cas observable et la probabilité d'entrée dans le cas inobservable. Et enfin nous avons pu élaborer quelques avantages et inconvénients des deux cas dans la mesure où le serveur a la possibilité de divulguer ou non l'information sur l'état du système.

Il est éventuellement possible d'étendre cette étude sur d'autres modèles de files d'attente markoviennes (comme par exemple une file avec s serveurs) toujours dans le cadre des jeux ou bien dans les modèles d'attente non-markoviens.

Bibliographie

- [1]. Abolnikou L and Dschalalow J H (1992). On a Multilevel Controlled Bulk Queueing System $M^X/G^{r,R}/1$. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 3, 237-260.
- [2]. Alain R (1988). Processus stochastiques avec applications aux phénomènes d'attente et fiabilité. Edition 1
- [3]. Arrun B and Gautan C (1997). On a batch arrival poisson queue with generalized vacation. The indiana journal of statistics, volume 59, series b, p 369-383.
- [4]. Baruah M, Madan K C and Eldabi T (2013). An $M^X/(G_1, G_2)/1$ Vacation Queue with Balking and Optional Re-service. Applied Mathematical Sciences, 7, 837 - 856.
- [5]. Baynat B (2000). Théorie des files d'attentes : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit. Hermes science publication.
- [6]. Bonzone (2007). Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens Thèse de doctorat. Université Paul Sabatier de Toulouse 3
- [7]. Boundali O and Economou A (2007). Equilibrium balking strategies in the single server Markovian queue with catastrophes. ArXiv journal 1107-2209
- [8]. Bruno Z. Théorie des jeux. Policopié du cours
- [9]. Burnetas A and Economou A (2007). Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. Journal of Queueing Systems.
- [10]. Ching W, Choi S and Huang M (2008). Optimal Service Capacity in a Multiple-server Queueing System : A Game Theory Approach.
- [11]. Claudie C (2013). Processus stochastiques et modélisation. Université de Toulouse 2
- [12]. Corine T (2009). La théorie des jeux pour le partage des ressources dans les grands systèmes distribués.
- [13]. David C. Processus stochastiques
- [14]. Desquilbet J. Théorie des jeux. Université d'Artois
- [15]. Economou A and Kanta S (2008). Optimal balking strategies and pricing for the single server Markovian queue with compartmented waiting space. Queueing Systems Journal.
- [16]. Eldelson M and Hildebrand K (1975). Congestion tolls for Poisson queueing processes. Econometrica Journal.
- [17]. Guillaume V (2012). Cours de théorie des jeux. L3 MIDO
- [18]. Guo P and Hassin R (2011). Strategic behavior and social optimization in markovian vacation queues. Journal of Operations Research 59(4), 986-997.
- [19]. Harridass M and Arumuganathan R (2008). Analysis of a Bulk Queue with Unreliable Server and Single Vacation, 1, 130-148.

- [20]. Hassin R and Ricky G (2011). Equilibrium in a two dimensional queueing game : When inspecting the queue is costly.
- [21]. Haviv M (2009). Strategic customer behavior in a single server queue. Technical report. Department of Statistics. University of Jerusalem.
- [22]. Kalai E, Kamien M and Rubinovitch M (1992). Optimal Service Speeds in a Competitive Environment.
- [23]. Khalaf R F, Madann K C and Luckas C A (2011). An $M^X/G/1$ Queue with Bernoulli schedule General Vacation Times, General Extended Vacations, Random Breakdowns, General Delay Times for Repairs to Start and General Repair Times. Journal of Mathematics Research, 3, 8 -20.
- [24]. Konieczny S. Introduction a la théorie des jeux. Université d'Artois.
- [25]. Lebarbier E and Robin S. Processus de Poisson, processus de naissances et de morts. Université de Paris.
- [26]. Lee W (1988). M/G/1 batch arrival queue with variable vacation. Asian pacific. Oper Res. journal, p24-26.
- [27]. Medhi J (1991). Stochastic models in queueing theory. Academic press, Boston and San Diego.
- [28]. Murat Y (2003). Introduction à la théorie des des jeux. Dunod
- [29]. Naor P (1969). The regulation of queue size by levying tolls. Econometrica Journal. 37, 15-24.
- [30]. Penard T (2004). La théorie des jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques.
- [31]. Philippe N (1994). Basic elements of queueing theory: application to modelling of computer systems. Technical report. The University of Massachusetts.
- [32]. Raj J (2008). Introduction to queueing Theory. Washington University.
- [33]. Stephen R and Heig V (2009). Modélisation stochastique. Files d'attentes
- [34]. Yiannis and Burnetas A (2011). Customer Equilibrium and Optimal Strategies in an M/M/1 Queue with Dynamic Service Control. arXiv Journal. 1112-1372 v1
- [35]. Ziani S et Madi L (2012). Théorie des jeux dans les files d'attente markoviennes. Université A. Mira de Bejaïa.

