

MA-510 19.1

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA 1



FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

EN MATHEMATIQUES

OPTION : RECHERCHE OPERATIONNELLE



**Optimisation d'allocations d'actifs financiers  
par une approche multi objectif**

Présenté par :  
SAIB Belkacem  
Kadir Rafik

Devant le jury compose de:

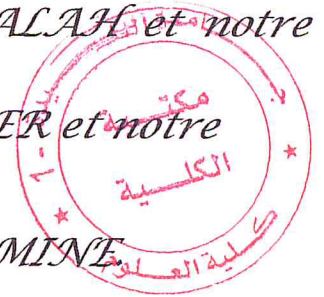
Président : Mr. TAMI OMAR USBD  
Examineurs : Mr. MANSEUR SALAH USBD  
Promoteur : Mr. AMRAOUI ABDELKADER USTHB  
CO-Promoteur: Mr. TALBI MOHAMED AMINE USDB

Promotion: 2015/2016

MA-510-59-1

# Remerciements

*Nous tenons à exprimer nos remerciements à Mr. LICHOURI MOHAMED qui n'a ménagé aucun effort pour la réussite de ce travail ainsi que Monsieur MANSEUR SALAH et notre promoteur Monsieur AMRAOUI ABDELKADER et notre Co-promoteur Monsieur TALBI MOHAMED AMINE.*



*Nous remercions également tous nos professeurs et nos amis qui nous ont aidés dans notre travail.*

*A tous ceux qui ont contribué à la réussite du présent travail qu'ils trouvent ici l'expression de notre sincère reconnaissance.*

*Pour l'aide précieuse, qu'ils nous ont apporté durant l'élaboration de ce travail.*

## Résumé

L'optimisation d'allocation d'actifs financiers est un problème connu de la littérature financière par le modèle de Markowitz.

L'optimalité d'une allocation testé est alors évalué selon le critère rendement-risque

On cherche l'optimum d'une fonction objectif à plusieurs dimensions, une amélioration du rendement entrainera une augmentation de la volatilité (risque) associée a l'allocation.

Le but de l'algorithme utilisé est alors de présenter au décideur un ensemble de solution dit de compromis ou de Pareto. Toute solution n'étant pas sur cette surface est sous optimale au sens de critère prédéfinis.

## Abstract

The optimization of the asset allocation financial is a well known problem in financial field of the model Markowitz.

The quality of an allocation is assessed through criterion also called profit – risk.

We look for the optimum of the objective function of a variety of dimensions, a profit improvement that leads to the rise of the risk associated to the allocation.

The aim of the used algorithm is to present to the decision maker a body of solution of compromise .Each solution which is not on this surface is under optimal in the sense of predefine criterion.

## ملخص

التفاضل بحصة مالية شيء ثمين هو حقا معروف في الميدان المالي بمشكل مركوفنز.

النوعية بالحصة يخمن دخل بواسطة مقياس الربح- المجازفة.

نحن دائما نبحث عن الحل الأمثل لدالة الهدف المتعددة الأبعاد. تحسين الربح يؤدي إلى ارتفاع المجازفة لحصة.

الهدف من الخوارزمية المستعملة لحل المشكل هو تقديم لصاحب القرار حل وسط (تسوية) بكل حل ليس في المساحة هو حل ثانوي بالنسبة للقياس (مقياس الربح-المجازفة)





## Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	3
<b>Chapitre I : fondement d'un portefeuille d'actifs financiers</b>	
I.1 Contexte .....	5
I.2 Allocation efficiente de Markowitz .....	5
I.2.1 Principe de la diversification.....	6
I.2.2 Construction d'un portefeuille optimal.....	6
I.3 Présentation du modèle de Markowitz.....	7
I.4 L'approche Espérance- Variance .....	8
I.4.1 L'espérance mathématique (rendement).....	8
I.4.2 La variance (risque).....	8
I.5 Portefeuille optimal : optimisation d'un portefeuille .....	9
I.6 La diversification.....	9
I.7 Portefeuille composé de deux actions.....	9
I.8 Portefeuille composé de "n" actions .....	11
I.9. La frontière efficiente.....	11
I.10 La théorie du choix de portefeuille optimal.....	13
I.10.1 Le concept de choix de portefeuille optimal.....	13
I.11 La théorie du choix de portefeuille optimal .....	14
I.12 Les limites du Modèle de Markowitz.....	19
<b>Chapitre II Méthode d'optimisation d'un problème multi objectif.</b>	
II Problème d'optimisation mono objectif .....	23
II.1 Introduction ou problème d'optimisation mono objectif.....	23
II.1.2 Éléments vocabulaire et quelques définitions.....	24
II.1.3 Variable de décision .....	24
II.1.4 Minimum globale.....	24
II.2 Méthodes d'optimisation d'un problème mono objectif.....	25
II.3 Optimisations multi-objectives .....	28



II.3.1 Notion de base .....	28
II.3.2 Multiplicité des solutions.....	29
II.3.3 Dominance.....	29
II.3.4 Les relations dérivées de la dominance .....	33
II.4 Optimalité lexicographique.....	33
II.4.1 Optimalité extrême.....	34
II.4.2 Optimalité maximal.....	34
II.5 La a-dominance.....	35
II.6 Approches non-Pareto .....	36
II.6.1 Les approches scalaires .....	36
II.6.2 Approche $\epsilon$ contrainte .....	37
II.7 Condition d'optimalité .....	37
II.8 Condition de khan-Tucker.....	38
II.9 La représentation de la surface de compromis.....	39
 <b>Chapitre III Application sur un portefeuille d'actifs – données boursières réelles</b>	
III.1 Introduction.....	42
III.2 Rendement d'un portefeuille.....	42
III.3 volatilité d'un portefeuille .....	42
III.4 Présentation du portefeuille (actifs).....	43
III.5 Données du portefeuille.....	44
III.6 Approche mono objectif.....	46
III.6.1 Description des résultats mono objectifs.....	46
III.7 Présentation du problème multi- objectif.....	49
III.7.1 Approche du problème.....	49
III.7.2 Description des résultats .....	50
Annexe 1.....	55
Annexe 2.....	59
Bibliographie.....	64

## **Introduction générale**

Les actifs financiers représentent les plus grandes sources de risque pour les investisseurs sur les marchés boursiers.

Le marché financier est un lieu de rencontre entre l'offre et la demande des actifs financiers ou les investisseurs interviennent, et ce par le biais de leurs portefeuilles.

L'accès à ce marché les oblige à supporter un risque de sur ou sous évaluation de leur actif

Les placements doivent être diversifiés pour minimiser le risque de perte, comme dit le célèbre adage « il ne faut pas mettre tous ses œufs dans le même panier » de plus les deux caractéristiques essentielles d'un placement ne sont le rendement et la volatilité (risque).

Selon la théorie de rationalité avancée par Markowitz les décideurs ont pour but ultime de combiner un ensemble d'actif ayant une rentabilité maximale avec un niveau de risque donné pour un niveau de rentabilité donné.

Plusieurs théoriciens se sont penchés sur l'analyse et la modélisation de ces deux paramètres de mesure de performance de portefeuille.

À cet effet Markowitz est considéré comme le fondateur du modèle régissant la relation "rentabilité-risque", ainsi que ce modèle devient l'outil le plus préconisé par les opérateurs et ce grâce à son opérationnalité et sa technicité

Le but du décideur est donc de trouver le bon compromis entre volatilité et rendement et de choisir la meilleure répartition possible de ses capitaux qui doivent être représentés en actifs en assurant une rentabilité maximale.

Les problèmes d'optimisation avec contraintes sur les actifs interviennent pour la résolution de ces problèmes.

## **Chapitre I**

### **Fondements de la théorie de gestion d'un portefeuille d'actifs Financiers.**



## I.1 : contexte :

Les techniques quantitatives d'allocation d'actifs actuelles sont essentiellement basées sur les travaux effectués par Markowitz, qui ont pour but d'élaborer une composition optimale du portefeuille, et ce par le biais de certaines caractéristiques historiques d'un portefeuille d'actifs et de critères donnés.

Ainsi Markowitz par l'effet de diversification – comme dit l'exemple « il ne faut pas mettre tous ces œufs dans le même panier » - montre que par le fait de choisir un portefeuille spécifique et varié, il est possible de réduire la variabilité totale du portefeuille pour une rentabilité donnée.

## I.2 Allocation efficiente de Markowitz :

### I.2.1 principe de la diversification

Markowitz a établi le fait qu'en diversifiant son portefeuille, on réduit le risque de celui-ci, tout en gardant un rendement satisfaisant. Se basant sur l'utilisation de tous les types d'actifs pour une diversification optimale.

Un exemple de ces effets peut être donné lorsqu'on calcule la variance d'un portefeuille composé d'actifs indépendants. Soit un portefeuille équi-pondéré composé de  $n$  actifs risqués indépendants avec :

- $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  le vecteur des poids relatifs des actifs composant le portefeuille

- $\bar{R} = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n)$  le vecteur des rendements des actifs.

- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  le vecteur des volatilités des actifs.

L'écart-type  $\sigma_p$  du portefeuille, utilisé comme mesure du risque, a pour expression selon le théorème central limite :

$$\sigma_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

A travers les hypothèses énoncées ci-dessus, plus le nombre d'actifs croît, plus la variance du portefeuille diminue. Le risque décroît avec la diversification.

## I.2.2 Construction d'un portefeuille optimal

On introduit la notion de portefeuille efficient. Il peut y avoir deux visions de l'efficience.

Il s'agit :

- du portefeuille qui offre le rendement le plus élevé pour un niveau de risque donné

Les portefeuilles efficients de l'ensemble d'actifs considéré forment la frontière efficiente parmi ses portefeuilles, pour obtenir un rendement plus élevé, il faut accepter un risque plus important. Au sens de ces deux seuls critères, tout autre investissement est sous-optimal : en termes de rendement et de volatilité, il ne sera pas possible de trouver un portefeuille meilleur.

## I.2.3 Absence d'un actif sans risque

La détermination des poids des actifs optimaux se fait suivant la minimisation de la variance du portefeuille sous la contrainte d'un rendement objectif  $\mu_p$  et le fait que la somme des poids est égale à 1.

Le problème de Markowitz

$$\begin{cases} \min(w^t \Sigma w) \\ g(w) = ew - 1 \\ h(w) = \bar{R}w - R_p \geq 0 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \quad i = 1 \dots \dots 10 \end{cases}$$

- Avec  $e = (1, 1, \dots, \dots, 1)$  de taille  $1 \times n$
- $w = (w_1, w_2, \dots, \dots, w_n)$  le vecteur colonne des poids des actifs composant le portefeuille
- $\Sigma$  La matrice de variance covariance

Le problème de Markowitz est un problème d'optimisation quadratique avec des contraintes mixtes

La résolution de ce problème en utilisant le lagrangien  $L$  telle que

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = w^t \Sigma w + \lambda_1 (ew - 1) + \lambda_2 (R_p - \bar{R}w)$$

Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les opérateurs de Lagrange avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \mathbb{R} * \mathbb{R}_+$

On calcule le gradient de  $L$  par rapport à  $w$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = f(w) + \lambda_1 g(w) + \lambda_2 h(w)$$

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} w^t \cdot \Sigma \cdot w + \lambda_1 \cdot (e \cdot w - 1) + \lambda_2 \cdot (R_p - \bar{R} \cdot w)$$

pour tout  $(w, \lambda_1, \lambda_2) \in (R^n, R, R_+)$

on calcule le gradient de  $\mathcal{L}$  par rapport a  $w, \lambda_1$  et  $\lambda_2$

$$\begin{cases} \nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) = \Sigma \cdot w + \lambda_1 \cdot e - \lambda_2 \cdot \bar{R} = 0 \dots \dots \dots (1) \\ \nabla_{\lambda_1} = ew - 1 = 0 \dots \dots \dots (2) \\ \nabla_{\lambda_2} = R_p - \bar{R} w = 0 \dots \dots \dots (3) \\ \lambda_2 g(w) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow w = \Sigma^{-1}(-\lambda_1 \cdot e + \lambda_2 \cdot \bar{R}) = w(\lambda_1, \lambda_2)$$

### I.3 Présentation du modèle de Markowitz

Le problème posé par Markowitz est la recherche d'un portefeuille qui minimise la variance du portefeuille pour un niveau de rentabilité donné.

le portefeuille est dit efficace s'il a la rentabilité la plus forte parmi les portefeuilles qui ont la même variance que lui. L'ensemble de tous les portefeuilles efficaces constitue la frontière efficace ou la frontière efficiente de Markowitz décrite en 1952 puis généralisée par Markowitz en 1959.

#### I.3.1 Rentabilité et risque

La théorie financière met l'accent dans le cadre de la gestion de portefeuille sur deux critères essentiels, à savoir, la rentabilité et le risque.

##### I.3.1.1 la rentabilité

Le concept de rentabilité a des acceptations différentes selon les investisseurs. Quand nous parlons de la rentabilité obtenue par un investisseur sur une action, nous nous référons non seulement au dividende net que lui rapporte ce titre, mais aussi à la plus-value éventuelle qu'il y prélève lors de la revente des actions. Ainsi, le taux de rentabilité comprend à la fois, le rendement ou le taux de rendement (dividende net rapporté au cours de l'action), et la plus-value (ou moins value) en capital rapportée au cours d'achat de l'action.

Le rendement est défini par la relation suivant:

$$R_t = (p_t - p_{t-1}) + c_t$$

$R_t$ : prix de marché au temps t de l'actifs financiers.



Le revenu  $c_t$  est supposé perçu au temps  $t$ , ou, s'il est perçu entre  $(t-1)$  et  $t$  il est supposé ne pas être réinvesti avant le temps  $t$ . Le prix de marché au temps  $(t-1)$  est une valeur "ex-coupon" c'est-à-dire une valeur enregistrée immédiatement après le détachement du coupon donnant à la perception, au temps  $(t-1)$ . Sur le plan empirique, l'hypothèse de non réinvestissement jusqu'à la période élémentaire de temps utilisée est courte (un mois maximum), afin d'éviter des distorsions statistiques trop importantes dans le traitement des données chronologiques. Pour faciliter les comparaisons entre investissements, nous utilisons une mesure exprimée en termes relatifs le "taux de rentabilité" ou "rate of return" défini assez logiquement par :

$$r_t = \frac{(p_t - p_{t-1}) + c_t}{p_{t-1}} \text{ ou } r_t \text{ est le taux de rentabilité pour la période } t.$$

### **I.3.1.2 le risque**

Le risque d'un actif financier pour un investisseur, peut être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future. L'objectif de tout investisseur étant de réaliser une certaine rentabilité sur les capitaux qu'il gère.

Cependant, l'obtention de celle-ci n'est pas certaine à l'avance. La rentabilité réalisée est plus ou moins différente de celle espérée.

Ainsi, on peut assimiler le risque d'un investissement à la dispersion ou variabilité de sa rentabilité autour de la valeur anticipée. Cette variabilité est mesurée le plus souvent par l'écart type (ou identiquement le carré: la variance).

## **I.4 L'approche espérance – variance**

### **I.4.1 L'espérance mathématique: mesure de la rentabilité espérée**

L'investisseur ne peut pas calculer d'avance la rentabilité, car la valeur du titre en fin de période est aléatoire, ainsi que dans certain cas, la rémunération perçue durant la période.

L'investisseur utilise alors, une rentabilité espérée qui est la moyenne des rentabilités possibles pondérées par leur possibilité de réalisation.

### **I.4.2 La variance : outil statistique d'analyse du risque :**

Si le détenteur d'obligations du trésor est assuré de toujours percevoir ses coupons, il est loin d'en être de même pour l'actionnaire d'une société qui intervient dans un -secteur pré potentiel : il pourra perdre ou gagner.

## I.5 Portefeuille optimal

La majorité des transactions boursières concernent le contenu des portefeuilles de titres (Security portfolio) qui sont l'ensemble des titres qu'un actif du marché peut détenir.

Gérer un portefeuille consiste donc à chercher un rendement maximal en minimisant les risques.

Les titres financiers (Financial Security) dérivent sous la forme d'actions, d'obligations, d'options de devises et de matières premières tous appelés plus généralement produits financiers ou encore actifs financiers.

En langage courant, le concept de portefeuille évoque la détention d'un ensemble de titres (actions, obligations...).

Actif sans risque : Titre offrant un Taux de rentabilité parfaitement certain sur l'horizon de décision de l'investisseur.

Ex : Emprunt d'état, obligation émise par le gouvernement, Bon du trésor ...

Actif risqué : Titre offrant une espérance de rentabilité avec un niveau d'incertitude donné.

## I.6 La diversification

La maximisation de rentabilité exige une gestion minutieuse des risques et cette dernière se fait à base de la diversification. La diversification stipule le mixage d'un portefeuille d'actifs entre ceux risqués ou bien les combiner avec d'autres sans risque. C'est l'investissement dans différentes classes d'actifs ou dans différents secteurs, cette diversification ne signifie pas seulement détenir beaucoup d'actifs.

Par exemple, si vous détenez 50 titres liés au secteur Informatique, votre portefeuille n'est pas diversifié. Par contre, si vous détenez 50 titres qui sont éparpillés parmi 20 différentes industries, vous êtes en possession d'un portefeuille diversifié.

## I.7 Portefeuille composé de deux actions

On suppose qu'un actionnaire dispose de deux actions A et B dont les caractéristiques sont:

-Une rentabilité mesurée par l'espérance (de A et B) ;

-Un risque mesuré par l'écart-type (de A et B).

Cet actionnaire investit en plaçant  $\alpha$  actions A et  $(1 - \alpha)$  actions B, ce qui donne le portefeuille suivant :

$$p = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B$$

Ceci permettra de réaliser une rentabilité comprise entre la rentabilité des deux actifs et un risque moindre.

L'espérance de ce portefeuille sera :

$$E(R_p) = \alpha \cdot E(R_a) + (1 - \alpha) \cdot E(R_b)$$

Donc la rentabilité espérée de ce portefeuille est la moyenne pondérée des deux rentabilités espérées des deux actions qui le composent.

La variance, quant à elle, est calculée de la manière suivante :

$$\text{Var}(R_p) = \alpha^2 \cdot V(R_a) + (1 - \alpha)^2 \cdot \text{Var}(R_b) + 2\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \text{cov}(R_a, R_b)$$

Avec :

$$\text{cov}(R_a, R_b) = \rho \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b$$

Ou «  $\rho$  » représente le coefficient de corrélation entre les deux actifs a et b.

La nature de la relation entre les actifs risqués est le signe de  $\rho$ . Ce dernier peut prendre une valeur entre -1 et 1.

La signification de ce coefficient peut être faite comme suit :

- Si  $\rho = 1$  : les rentabilités des deux actifs sont parfaitement corrélées. Le mixage, dans ce cas, augmente davantage le risque encouru.
- Si  $\rho = 0$  : Il n'y a aucune corrélation entre les rentabilités des deux actifs. Donc, le risque est la somme des risques des deux actifs pondérés par leurs proportions.
- Si  $\rho = -1$  : les rentabilités des deux actifs évoluent inversement l'une de l'autre. Dans ce cas extrême qui ne se réalise pas sur les marchés financiers, il est possible de constituer un portefeuille dénué du risque. Ainsi, la diversification permet une réduction du risque dès que le coefficient de corrélation est inférieur strictement à 1 et plus encore lorsque la corrélation est négative entre les rentabilités des actifs.



## I.8 Portefeuille composé de “n” actions

En général, pour un portefeuille comportant n actifs :

Rendement attendu (espérance) :

$$E(R_p) = \sum_i w_i E(R_i)$$

Variance du portefeuille :

La variance du portefeuille est la somme des produits des poids  $w_i$  de chaque couple d'actifs par leur covariance  $\sigma_{ij}$ , cette somme inclut les poids au carré et les variances  $\sigma_{ii}$  ou  $(\sigma_i^2)$  pour chaque actif i. La covariance est souvent exprimée en termes de corrélation  $\rho_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

La volatilité du portefeuille est donnée par :

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

## I.9 Limites de la diversification

Il existe deux limites à la diversification : une limite théorique et une limite pratique.

### a-Limite théorique

Prenons des portefeuilles comportant des investissements égaux dans N actions.

La proportion investie dans chaque action est de 1/N. Dans chacune des cas est de la matrice de variance, nous aurons  $(1/N)^2$  x la variance, et dans chacune des cas est de covariances, nous aurons  $(1/N)^2$  x la covariance. Il ya N cas de variances et  $(N^2-N)$  cas est de covariance. Ainsi avec l'augmentation de N la variance du portefeuille se rapproche de la covariance moyenne. Si la covariance moyenne était nulle, il serait possible d'éliminer totalement le risque en tenant suffisamment de titres.

Malheureusement, les actions évoluent ensemble, et non de façon indépendante.

### b-Limite pratique

Il existe deux types de risques :

#### b.1 Le risque spécifique:

- Appelé également risque intrinsèque ou risque non systématique.

- Il est indépendant des phénomènes qui affectent l'ensemble des titres.
- Il est inhérent aux caractéristiques fondamentales de l'entreprise (par exemple: la mauvaise gestion de l'entreprise, les grèves...).
- Ce risque est diversifié et donc susceptible d'être éliminé par la diversification.

### b.2 Le risque systématique:

- On l'appelle également risque non diversifiable ou encore, risque du marché.
- Il est lié aux structures du marché. Il résulte des périls qui peuvent affecter l'ensemble de l'économie tels que les variations du PIB, l'inflation, les taux d'intérêt.
- C'est un risque structurel qui ne peut pas être éliminé par la diversification.

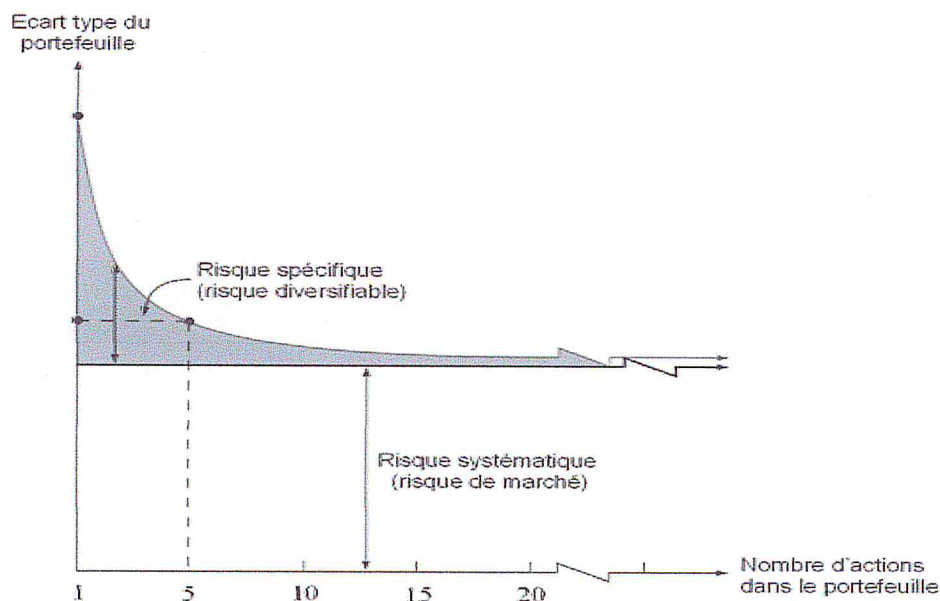


Figure 1 : Risque spécifique et risque systématique

Dans le schéma ci-dessus, on remarque que le risque est scindé en deux composantes.

Si l'investisseur ne détient qu'une action, le risque spécifique se révèle très important ; mais avec un portefeuille de plus de 20 actions, la diversification a fait le gros du travail.

Dans un portefeuille bien diversifié, seul le risque systématique importe.

## **I.10 La frontière efficiente**

### **I.10.1 Le concept de choix de portefeuille optimal**

Les travaux de Markowitz ont constitué la première tentative de théorisation de la gestion financière de portefeuilles et son modèle suggère une procédure de sélection de plusieurs titres boursiers, à partir de critères statistiques, afin d'obtenir des portefeuilles optimaux. Plus précisément, Markowitz a montré que l'actif financier cherche à optimiser ses choix en tenant compte non seulement de la rentabilité attendue de ses placements, mais aussi du risque de son portefeuille qu'il définit mathématiquement par la variance de sa rentabilité.

Ainsi, le "portefeuille efficient" est le portefeuille le plus rentable pour un niveau de risque donné. Il est déterminé au mieux par application de méthodes de programmation quadratique ou sinon de manière heuristique en les étapes suivantes :

#### **Etape 1 :**

Nous fixons une espérance de rentabilité et nous trouvons tous les portefeuilles de variance Minimale satisfaisant l'objectif de rentabilité. Nous obtenons ainsi un ensemble de portefeuilles de variance minimale.

#### **Etape2 :**

Nous gardons de ces portefeuilles celui qui à une variance plus faible et un rendement le plus élevé.

En procédant ainsi pour plusieurs valeurs de l'espérance, nous nous retrouvons avec un ou plusieurs portefeuilles efficients. Ainsi, entre deux portefeuilles (ensemble d'actifs) caractérisés par leurs rendements (supposés aléatoires), nous ferons les hypothèses suivantes :

#### **Hypothèse 1 :**

A risque identique, nous retenons celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée (gain maximal)



### Hypothèse 2 :

A espérance de rendement identique, nous retenons celui qui présente le risque le plus faible (aversion au risque)

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficaces que d'autres.

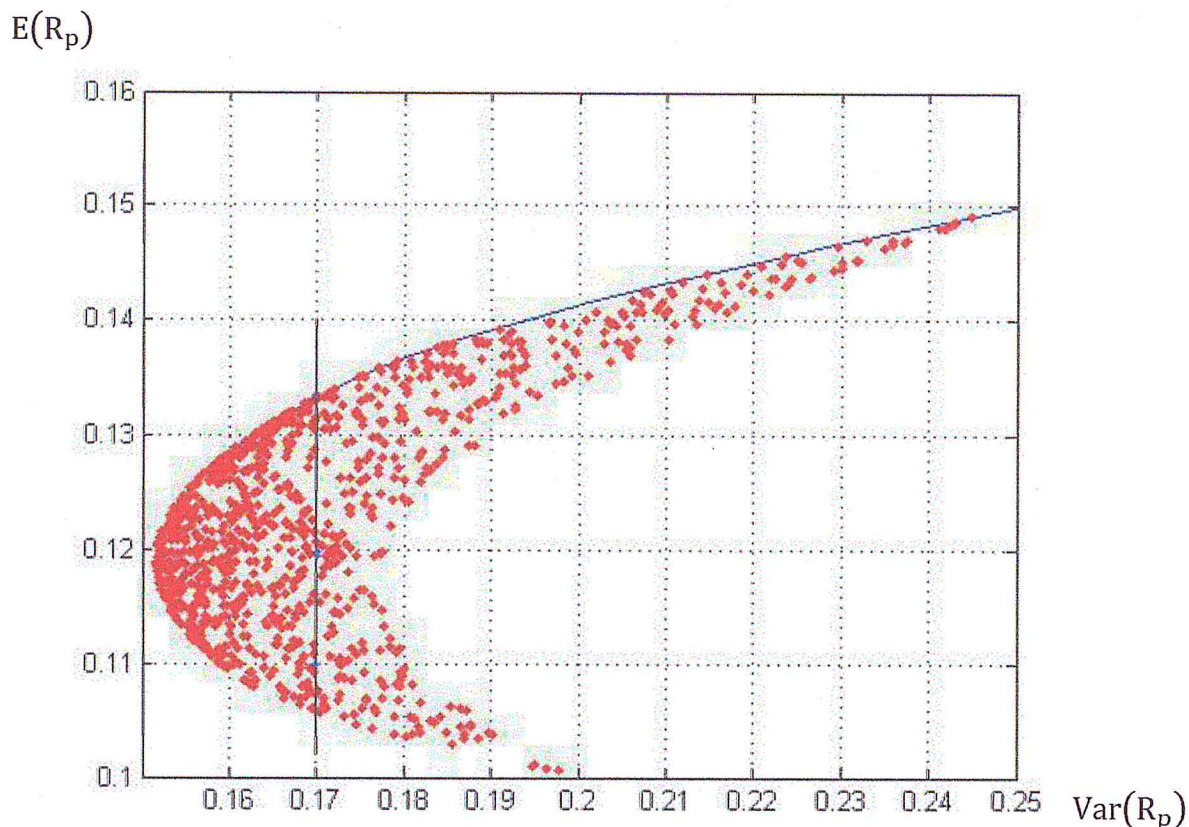


Figure 2 : graphe de la frontière efficient (Aide Matlab)

### I.11 La théorie du choix de portefeuille optimal

Soit  $R_p$  le rendement d'un portefeuille composé de  $n$  actifs caractérisés par leur rendement moyen respectif  $\bar{R} = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n)$

Chaque actif  $i$  entre pour une proportion  $w_i$  dans la composition du portefeuille  $P$  tel que:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 .$$

Donc l'espérance du portefeuille est donnée par :

$$E(R_p) = E(\sum_{i=1}^n \bar{R}_i w_i) = \sum_{i=1}^n E(R_i) w_i =$$

Maintenant, nous supposons que les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres: ils sont corrélés, ce qui revient aux covariances non nulles:

$$\text{cov}(R_i, R_j) \neq 0$$

La variance du portefeuille est donnée par :

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 v(R_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j)$$

Nous pouvons également écrire cette dernière relation sous forme matricielle le lecteur

Peut facilement vérifier qu'en prenant par exemple deux titres, les deux écritures

vont donner un résultat identique. Si nous notons  $w$  le vecteur des poids d'actifs

La matrice des covariances  $\Sigma$  s'écrit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{cov}(R_1, R_1) & \text{cov}(R_1, R_2) & \cdots & \text{cov}(R_1, R_n) \\ \text{cov}(R_2, R_1) & \text{cov}(R_2, R_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(R_n, R_1) & \cdots & \cdots & \text{cov}(R_n, R_n) \end{pmatrix}$$

Matrice qui se simplifie directement en :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(R_1, R_2) & \cdots & \text{cov}(R_1, R_n) \\ \text{cov}(R_2, R_1) & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(R_n, R_1) & \text{cov}(R_n, R_2) & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons finalement la relation de la variance sous forme matricielle condensée :

$$V(R_p) = w^t \cdot \Sigma \cdot w$$

Sélectionner un portefeuille revient donc à résoudre le problème de minimisation sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \min V(R_p) = w^t \cdot \Sigma \cdot w \\ E(R_p) = \text{const} \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases}$$

**Définition:**

La frontière qui caractérise le polygone ou la courbe des contraintes s'appelle dans cette situation la "frontière efficiente de Markowitz" et dans le polygone/courbe se situent tous les portefeuilles à rejeter dits "portefeuilles dominés". Une autre manière de formuler ceci

consiste à dire que les combinaisons (rendement, risque) de cette frontière forment un ensemble d'optima de Pareto, c'est-à-dire que si l'un des éléments augmente, l'autre doit augmenter aussi.

Maintenant, formalisons l'optimisation comme cela était fait à l'époque où les gens devaient encore développer les algorithmes eux mêmes...

Soit  $Z$  la fonction économique définie par:

$$\begin{cases} Z = \text{Max} (E(R_p) - V(R_p)) \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases}$$

Le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction économique  $Z$  définie par:

$$Z = \sum_{i=1}^n E(R_i)w_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) + \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^n w_i \right)$$

Cette fonction de  $n + 1$  variables  $(w_1, w_2, \dots, w_n, \lambda)$  est maximisée si sa dérivée (partielle) par rapport à chacune de ces variables est nulle, ce qui revient à poser le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial w_1} = E(R_1) - 2w_1 \text{cov}(R_1, R_1) - 2w_2 \text{cov}(R_1, R_2) - \dots - 2w_n \text{cov}(R_1, R_n) + \lambda - 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial w_2} = E(R_2) - 2w_2 \text{cov}(R_2, R_1) - 2w_2 \text{cov}(R_2, R_2) - \dots - 2w_n \text{cov}(R_2, R_n) + \lambda = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial Z}{\partial w_n} = E(R_n) - 2w_n \text{cov}(R_n, R_1) - 2w_n \text{cov}(R_n, R_2) - \dots - 2w_n \text{cov}(R_n, R_n) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + \dots + w_n - 1 = 0 \end{cases}$$

Posons:

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$$

Nous pouvons alors écrire:



$$\begin{cases} 2w_1\sigma_{11} + 2w_2\sigma_{12} + \dots + 2w_n\sigma_{1n} + \lambda = E(R_1) \\ 2w_1\sigma_{21} + 2w_2\sigma_{22} + \dots + 2w_n\sigma_{2n} + \lambda = E(R_2) \\ \vdots \\ 2w_1\sigma_{n1} + 2w_2\sigma_{n2} + \dots + 2w_n\sigma_{nn} + \lambda = E(R_n) \\ w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = 1 \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w^1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système d'équations à résoudre peut se résumer sous la forme matricielle:

$$\Sigma \cdot w^1 = B$$

Par conséquent:

$$w^1 = \Sigma^{-1} \cdot B$$

La détermination du poids de chacun des  $n$  actifs susceptibles d'entrer dans la composition d'un portefeuille passe donc par l'inversion d'une matrice carrée de  $n+1$  lignes et  $n+1$  colonnes comportant  $\frac{(n^2 - n)}{2}$  covariances (la diagonale comportant des variances seulement et la matrice

étant symétrique). Ce qui est relativement long à calculer pour de gros portefeuilles.

Cependant, même une fois la pondération des actifs terminée, nous pouvons donc connaître la frontière efficiente mais le client va lui imposer une contrainte bien logique au niveau du risque nul de son portefeuille et du rapport rendement/risque maximum.

Il est donc possible de constituer une infinité de portefeuilles en faisant varier les proportions investies dans chacun des titres. La prochaine étape consiste à sélectionner, parmi l'ensemble des portefeuilles disponibles, un portefeuille donné. Pour ce faire, on doit considérer les préférences individuelles de l'investisseur.

Un investisseur rationnel ne devrait donc considérer que les portefeuilles se trouvant sur la frontière efficiente pour ses choix d'investissement. Son portefeuille optimal se situera donc au point de tangence entre la frontière efficiente et sa courbe d'indifférence la plus haute qu'il serait capable d'atteindre. En procédant ainsi, chaque actif maximisera son utilité Espérée. En présence d'une économie ne contenant que des actifs risqués, la composition du portefeuille d'actifs risqués varie d'un individu à un autre.

En pratique, les actifs ont également la possibilité d'investir dans des actions financières sans risques.

Nous allons donc chercher à déterminer la nouvelle frontière efficiente en tenant compte de cette nouvelle opportunité d'investissement.

Considérons alors un portefeuille qui est une combinaison de l'actif sans risque et d'un portefeuille de marché (à risque). Nous avons alors :

$$R_p = w_m R_m + (1 - w_m) R_f$$

Où  $w_m$  est la fraction du portefeuille investie dans le portefeuille du marché ( $m$ ) et  $R_f$  est le "taux de rendement certain".

**Rappel :** L'espérance d'une constante est égale à cette constante. Nous avons donc :

$$E(R_p) = w_m E(R_m) + (1 - w_m) E(R_f) = w_m E(R_m) + (1 - w_m) R_f$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= E\left(\left(R_p - E(R_p)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(w_m R_m + (1 - w_m) R_f - w_m E(R_m) - (1 - w_m) R_f\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(w_m (R_m - E(R_m))\right)^2\right) \\ \text{Var}(R_p) &= w_m^2 \text{var}(R_m) \end{aligned}$$

Soit  $\sigma_p^2 = w_m^2 \sigma_m^2$

La dérivée du rendement espéré par rapport à  $w_m$  nous donne :

$$\frac{\partial \sigma(R_p)}{\partial w_m} = \sigma(R_m)$$

Mettant ces deux résultats ensemble, nous avons :

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma(R_p)} = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)}$$

Cette équation nous donne la pente de la "capital Market line" (C.M.L.). Elle est constante (la pente), et donc la C.M.L. est une droite. L'ordonnée à l'origine est évidemment  $R_f$ .

Puisque :

$$E(R_p) = w_m E(R_m) + (1 - w_m) R_f = w_m (E(R_m) - R_f) + R_f$$

L'équation de la C.M.L. se réduit alors à :

$$E(R_p) = \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R_m)} (E(R_m) - R_f) + R_f$$

Et puisque dans la finance l'intérêt est de représenter graphiquement.

$$E(R_p) = f(\text{Var}(R_p))$$

Alors il est de tradition de noter la fonction sous la forme suivante :

$$E(R_p) = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)} \sigma(R_p) + R_f$$

Par construction, cette droite associe donc à chaque niveau de risque, la rentabilité espérée la plus élevée. Ainsi, étant donnée le rendement d'un actif sans risque il devient facile à partir de cette équation de déterminer le point de tangence avec la frontière d'efficience de

Markowitz ou de Sharpe pour obtenir le portefeuille le plus efficace sur la base du rendement sans risque.

## I.12 Les limites du Modèle de Markowitz

Depuis son apparition, le modèle de Markowitz a pris une place très importante dans l'évolution de la finance moderne et il a réalisé beaucoup de succès avec son apport en matière de gestion de portefeuille.

Mais avec les ajustements récents, ce modèle s'est trouvé plusieurs limites soulevées par plusieurs



praticiens de la théorie financière. Parmi ces limites, on note :

- Le modèle suppose la rationalité des investisseurs. Or la réalité a prouvé qu'une croyance tout à fait irrationnelle peut être vue légitime par le seul fait qu'elle soit collectivement admise par un opérateur crédible.
- Le modèle ne s'est pas intéressé à la décomposition du risque global du marché mais s'est limité à l'analyse et à l'évaluation du risque individuel ou spécifique ; d'où l'apparition d'un nouveau modèle d'évaluation des actifs financiers.
- Le modèle suppose également la normalité de la distribution des rentabilités, chose qui n'est pas toujours vérifiable dans la réalité. Cette limite a été résolue par l'apparition du modèle de «Dominance stochastique» qui s'applique à tout type de distribution.
- La variance a été considérée comme une mesure simplificatrice de la fonction de la rentabilité, tandis que la «Dominance stochastique» admet une comparaison de la distribution entière.
- La variance étant une mesure non parfaite du risque, une nouvelle technique de mesure a été développée en 1993, appelé Value-At-Risk (VaR). Cette technique permet de déterminer la perte maximale probabilisée sur un portefeuille quelconque.

## Conclusion

Markowitz a donné le point de départ de la théorie moderne de gestion de portefeuille. Le modèle offre aux investisseurs la possibilité de maximiser leur rendement espéré et minimiser le risque de leur portefeuille mesuré par la variance.

Les taux de rentabilité viennent de souligner le concept de diversification qui a participé à cette réduction de risque, les principaux apports de ce modèle sont relativement généraux, permettant leur utilisation dans un grand nombre de situations pratiques.

Il faut signaler que le modèle présente des limites comme par exemple la périodicité de la validité du modèle puisque les prix ainsi que les informations des titres fluctuent d'un moment à l'autre chose qui impose une évaluation continue des différentes composantes de portefeuille, et pour arriver à déterminer une bonne sélection d'actifs plusieurs méthodes vont émerger pour combler les lacunes du modèle traditionnel.

## **Chapitre II**

### **Méthodes d'Optimisation d'un problème multi-objectif**



## II problème d'optimisation mono objectif

### II.1 Introduction aux problèmes d'optimisation mono objectif

Les problèmes d'optimisation non linéaire mono objective sont de forme divers en peut citer le cas de problème sans contraintes, avec contraintes égalités et avec contraintes mixtes.

Les problèmes d'optimisation mono objective quadratique c'est des problèmes ou les fonctions objectifs sont de forme quadratique.

Un problème d'optimisation consiste à la recherche d'un extremum (minimum ou maximum) d'une certaine fonction donnée. On peut aussi trouver des problèmes d'optimisation pour lesquels les différentes variables de la fonction à optimiser doivent se trouver dans une certaine zone ou périmètre de l'espace de recherche. Dans ce cas nous faisons face à ce que nous appelons un problème d'optimisation sous des contraintes mixtes ou bien problème d'optimisation contraint.

De manière générale un problème d'optimisation quadratique sous contrainte mixte se présente sous la forme suivante :

$$(P_1) \equiv \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} x^t \cdot D \cdot x \\ g(x) = a^t \cdot x - \alpha = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i - \alpha = 0 \\ h(x) = b^t \cdot x - \beta = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i - \beta \geq 0 \end{cases}$$

$$- x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \in \mathbb{R}^k ; g(x) \in \mathbb{R}^m ; h(x) \in \mathbb{R}^p ; b \in \mathbb{R}^n ; a \in \mathbb{R}^n$$

$$- (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$$

- $f(x)$  fonction quadratique à optimiser
- $D$  matrice carrée

$g(x)$  et  $h(x)$  représentent respectivement  $m$  contraintes d'égalités et  $p$  contraintes

D'inégalités.

Le problème dual est donné :

$$(p'_1) \equiv \begin{cases} \max h(x) = b^t \cdot x - \beta = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i - \beta \\ g(x) = a^t \cdot x - \alpha = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i - \alpha = 0 \\ f(x) = x^t \cdot D \cdot x - \gamma \leq 0 \text{ tel que } \gamma \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

On considère le problème  $(P_1)$ .

Ce problème est un problème d'optimisation quadratique l'ensemble de contraintes engendre un espace de recherche de la solution optimale et toute solution se trouvant dans cet espace est dite solution réalisable pour le problème  $(P_1)$

Généralement on trouve deux types de contraintes d'inégalités et qui sont :

-les contraintes d'égalités du type  $B_{i_{\min}} \leq x_i \leq B_{i_{\max}}$  : les valeurs de  $x$  vérifient ces contraintes définissent l'espace de recherche.

- les contraintes d'inégalité du type  $h(x) \geq 0$  ou  $h(x) \leq 0$  : les valeurs de  $x$  vérifient ces contraintes définissent l'espace des valeurs réalisables.

### II.1.2 Eléments de vocabulaire et quelques définitions :

**Fonction objectif** : c'est le nom donné à la fonction  $f$  (on l'appelle aussi fonction de coût ou critère d'optimisation). C'est adire trouver son extrémum

### II.1.3 Variables de décision

Elles sont regroupées dans le vecteur  $x$ . Le déroulement de l'algorithme faisant varier ce vecteur permet de trouver un optimum de la fonction  $f$ .

### II.1.4 Minimum global

Un point  $x^*$  est un minimum global de la fonction  $f$  si :  $f(x^*) < f(x)$  quel que soit  $x$  avec  $x^* \neq x$ . nous obtenons la définition du maximum global en inversant le sens de l'inégalité.

### II.1.5 Minimum local

Un point  $x^*$  est un minimum local de la fonction  $f$  si :  $f(x^*) \leq f(x)$  quel que soit  $x \in V(x^*)$  et  $x^* \neq x$ , ou  $V(x^*)$  définit un voisinage de  $x^*$ .

La définition de maximum local s'obtient en inversant le sens de l'inégalité de la définition du minimum local.

## II.2 méthodes d'optimisation d'un problème mono objectif

Pour ce type de problème d'optimisation où la fonction objective est quadratique avec des contraintes linéaires mixtes qui limitent le domaine des solutions réalisables est la solution optimale.

Il existe plusieurs algorithmes de résolution on cite algorithmes

- 1- **Algorithme de Wolfe** : cet algorithme possède un inconvénient par ce qu'il augmente le nombre de variables (l'extension du problème) on utilise les conditions de Kuhn Tucker et on passe à l'algorithme de simplexe généralisé qui augmente le nombre d'inconnues. (variables d'écart)
- 2- **Algorithme d'uzawa**
- 3- **Algorithme de d'Arrow-Hurwicz**

$$\text{Pour le problème } (P_1) \equiv \begin{cases} \min f(x) = x^t \cdot D \cdot x \\ g(x) = a^t \cdot x - \alpha = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i - \alpha = 0 \\ h(x) = b^t \cdot x - \beta = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i - \beta \geq 0 \end{cases}$$

On propose l'algorithme d'Arrow-hurwicz à pas fixe

Soit  $\mathcal{L}$  Le lagrangien du système

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) + \lambda_1 g(x) + \lambda_2 h(x)$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} x^t \cdot D \cdot x + \lambda_1 \cdot (a^t \cdot x - \alpha) + \lambda_2 \cdot (-b^t \cdot x + \beta)$$

Pour tout  $(x, \lambda_1, \lambda_2) \in (R^n, R, R_+)$

On calcule le gradient de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $x, \lambda_1$  et  $\lambda_2$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = D \cdot x + \lambda_1 \cdot a - \lambda_2 \cdot b \\ \nabla_{\lambda_1} = a^t \cdot x - \alpha \\ \nabla_{\lambda_2} = \beta - b^t \cdot x \\ \lambda_2 (b^t \cdot x - \beta) = 0 \end{cases}$$

on minimise le lagrangien par rapport à  $x$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow D \cdot x + \lambda_1 \cdot a - \lambda_2 \cdot b = 0 \Rightarrow \bar{x}(\lambda_1, \lambda_2) = D^{-1}(-\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b)$$

La fonction duale pour  $(\lambda_1, \lambda_2) \in (R, R_+)$



$$W(\lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{L}(\bar{x}(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2)$$

Gradient de la fonction duale

$$\nabla_{\lambda_1, \lambda_2} H(\lambda_1, \lambda_2) = \nabla \mathcal{L}(\bar{x}(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} a^t \cdot \bar{x}(\lambda_1, \lambda_2) - \alpha \\ \beta - b^t \cdot \bar{x}(\lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\lambda_1, \lambda_2} H(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} a^t \cdot D^{-1}(-\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b) - \alpha \\ \beta - b^t \cdot D^{-1}(-\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b) \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\lambda_1, \lambda_2} H(\lambda_1, \lambda_2) = - \begin{pmatrix} a^t \cdot D^{-1} \cdot a & -a \cdot D^{-1} \cdot b \\ -a \cdot D^{-1} \cdot b & b^t \cdot D^{-1} \cdot b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$H(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2} (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} a^t \cdot D^{-1} \cdot a & -a \cdot D^{-1} \cdot b \\ -a \cdot D^{-1} \cdot b & b^t \cdot D^{-1} \cdot b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} + cst$$

H est une fonction concave sur  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  le programme dual peut s'écrire

$$(\mathcal{D}) \equiv \begin{cases} \max H(\lambda_1, \lambda_2) \\ (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \end{cases}$$

## Algorithme d'Arrow-Hurwicz a pas fixe

1- Etape (0) : on fixe  $k = 0$  ;  $\lambda_1^0 \in IR$  ,  $\lambda_2^0 \in IR_+$  ,  $x^0 \in IR^n$  ,  $\theta > 0$  ,  $\rho > 0$  ,  $\varepsilon > 0$   
 $(\alpha, \beta) \in IR_+^2$

2 - Etape (1) : pour  $k = 1$  on calcule les nouveau paramètre  $x^1$  ,  $\lambda^1$  ,  $\mu^1$  tel que

$$* x^1 = x^0 - \alpha(Dx^0 + \lambda^0 a - \mu^0 b)$$

$$* \lambda_1^1 = \lambda_1^0 + \rho(a^t x^1 - \alpha)$$

$$* \lambda_2^1 = \text{Max} [0 ; \lambda_2^0 + \rho(\beta - b^t x^1)]$$

3-Etape(3) : on test si

$|\lambda_1^1 - \lambda_1^0| + |\lambda_2^1 - \lambda_2^0| < \varepsilon$  si oui alors  $x^1$  est la solution optimal si non aller a l'étape (4)

4- Etape(4) :  $k = k + 1$

$$* x^{k+1} = x^k - \alpha(Dx^k + \lambda_1^k a - \lambda_2^k b)$$

$$* \lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \rho(a^t x^{k+1} - \alpha)$$

$$* \lambda_2^{k+1} = \text{Max} [0 ; \lambda_2^k + \rho(\beta - b^t x^{k+1})]$$

$$|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| + |\lambda_2^{k+1} - \lambda_2^k| < \varepsilon \text{ fin si}$$

Si non aller a (4)

## II.3 optimisation multi-objectif

### II.3.1 Notions de base

Dans le problème d'optimisation multi-objectifs il s'agit pas d'optimiser une fonction mais plusieurs fonctions en même temps, ces problèmes sont aussi appelés problèmes multicritères.

L'optimisation mono-objective vient du fait que modéliser un problème sous forme d'un objectif unique peut faciliter les tâches pour la recherche de la solution optimale.

La modélisation ou optimisation multi-objectif présente des avantages et des inconvénients, par ce que la plupart des problèmes d'optimisation multi-objective nécessite des algorithmes de recherche de la solution et l'algorithme de choix de la solution optimal

La recherche ne nous donnera plus une solution unique mais une multitude de solutions. Ces solutions sont appelées solutions de compromis et l'ensemble de solutions que l'on obtient à la fin de la recherche est la surface de compromis.

Pour illustrer la manière dont on modélise en général un problème multi-objectif, nous allons prendre l'exemple d'une machine de

nt on veut que la performance soit la plus élevée possible et en même temps que sa consommation soit la plus faible possible, par exemple le moteur d'une voiture.

Nous posons  $x$  comme étant un vecteur qui représente les différentes valeurs des variables qui influent sur notre problème.

Le problème d'optimisation multi-objectif s'écrit alors de la manière suivante :

$$(P') : \begin{cases} \min f(x) = x^t D x \\ \min C(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \\ g(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i - \alpha = 0 \\ h(x) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i - \beta \geq 0 \end{cases}$$

Ou :

$$x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \in \mathbb{R}^k ; g(x) \in \mathbb{R}^m ; h(x) \in \mathbb{R}^p ; c \in \mathbb{R}^n ; a \in \mathbb{R}^n ; b \in \mathbb{R}^n$$

Le problème ( $P'$ ) présente deux fonctions objectifs à minimiser la première fonction est quadratique la deuxième est linéaire

Le but que l'on se fixe dans la résolution du problème d'optimisation multi-objectifs ( $P'$ ) est de minimiser les différents objectifs en même temps. Comme on va le voir dans le paragraphe suivant, dans un problème d'optimisation multi-objectif, on rencontre des fois des objectifs contradictoires lorsque la diminution d'un objectif entraîne une augmentation de l'autre objectif.

### **II.3.2 Multiplicité des solutions**

Lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimale à un problème d'optimisation multi-objectif donné, on s'attend souvent à trouver une solution et une seule.

La plupart du temps, on trouve une multitude de solutions, du fait que certains des objectifs sont contradictoires.

Donc, quand on résoudra un problème d'optimisation multi-objectif, on obtiendra une grande quantité de solutions, ces solutions ne seront pas optimales, au sens où elles ne minimiseront pas tous les objectifs du problème. Un concept intéressant qui nous permettra de définir les solutions obtenues, est le compromis. En effet, les solutions qu'on obtient lorsque l'on a résolu le problème sont des solutions de compromis. Elles minimisent un certain nombre d'objectifs tout en dégradant les performances sur d'autres objectifs.

### **II.3.3 La dominance :**

#### **II.3.3.1 Dominance de Pareto**

La notion d'optimalité dépend de la façon dont le décideur organise ses préférences. Parfois, ses préférences ne sont pas explicitées car elles sont évidentes :

Par exemple.

Pour un problème mono-objectif, les différentes solutions peuvent être totalement ordonnées selon la valeur réelle de l'unique fonction-objectif.

Cependant, pour un problème multicritère, du fait de l'antagonisme entre certains objectifs, il n'existe pas de définition aussi évidente de la solution optimale.

Par exemple, dans le problème de l'allocation efficiente de Markowitz où les critères d'optimisation sont le rendement et la volatilité, l'ensemble des solutions optimales est la frontière efficiente, vue dans le premier chapitre. Au seul sens de ces critères d'optimisation non ordonnés entre eux, ces solutions sont équivalentes.



C'est le paramètre d'aversion au risque dépendant du décideur, qui donne une pondération subjective des critères et permet de départager les solutions en transformant le problème multi objectif en problème mono-objectif.

De manière générale, la résolution du problème multi objectif conduit à l'obtention une multitude de solutions qui constituent autant de compromis entre les différents objectifs. Définir une notion d'optimalité multi objectif revient donc à se doter d'un outil de classement de ces compromis.

Dans ce cadre, la notion d'optimalité est définie au moyen d'une structure de préférence. Au fondement de la théorie de la prise de décision en optimisation multi objectif, on trouve l'hypothèse confronté à une alternative du choix du décideur :

- préfère strictement une possibilité à l'autre ;
- ou on considère que les deux possibilités sont incomparables.

Une telle structure de préférence ne peut être entièrement définie par une relation d'ordre. Optimiser revient donc à chercher les éléments minimaux de l'espace des valeurs réalisables ordonné par la relation de préférence.

Pour définir cette relation de préférence, la première étape est de définir une relation d'ordre entre vecteurs de  $R^k$  :

**Définition 1** (Relations sur  $R^k$ ).

Soit un couple de vecteurs  $(a, b)$  de  $IR^k \times IR^k = R^k$ , alors :

- $a < b$  si et seulement si  $\forall i \in 1, \dots, k, a_i < b_i$
- $a \leq b$  si et seulement si  $\forall i \in 1, \dots, k, a_i \leq b_i$

Les relations  $\geq$  et  $>$  sont définies de manière équivalente.

En conséquence, et contrairement au cas mono-objectif qui n'offre que deux possibilités face à une alternative, les problèmes multi-objectifs en offrent trois, l'incomparabilité étant permise :

- $F(a) \succ F(b)$
- $F(a) = F(b)$
- $F(a) \succ F(b)$  et  $F(b) \succ F(a)$  (incomparabilité).

Ces situations permettent de définir une structure de préférence formalisée par la notion de dominance de Pareto.

**Définition 2** (Dominance de Pareto (au sens de la minimisation)).

Soit un couple  $(u, v)$  de vecteurs de décision. Alors :

- $u \succ v$  ( $u$  domine  $v$ ) si et seulement si  $F(u) \prec F(v)$
- $u \geq v$  ( $u$  domine faiblement  $v$ ) si et seulement si  $F(u) \leq F(v)$
- $u \sim v$  ( $u$  et  $v$  sont incomparables) si et seulement si  $F(u) \not\leq F(v)$  et  $F(v) \not\leq F(u)$ .

Les solutions incomparables au sens de la dominance sont les solutions équivalentes au sens de Pareto, ou Pareto-équivalentes. Ces notions permettent de déterminer quels vecteurs de décision sont optimaux au sein d'un ensemble de vecteurs de décision :

**Définition 3** (Optimalité au sens de Pareto).

Un vecteur de décision  $u$  est dit non dominé par rapport à l'ensemble  $p$  si et seulement si :

$$\nexists v \in p / v > u$$

Le vecteur  $u$  est dit optimal au sens de Pareto s'il est non dominé par rapport à l'ensemble des vecteurs de décision.

La définition 4 pose la notion de sous-ensemble non dominé, qui donne l'ensemble des solutions optimales relativement à un ensemble de points, et qui sera utilisée par la suite dans le développement d'un algorithme d'optimisation.

**Définition 4** (Sous-ensemble non-dominé).

Soit  $P$  un ensemble de solutions-candidats d'un problème d'optimisation multi objectif. L'ensemble  $P' \subseteq P$  composé de tous les éléments de  $P$  qui ne sont dominés par aucun élément de  $P$  est dit sous-ensemble non-dominé de l'ensemble de solution  $P$ .

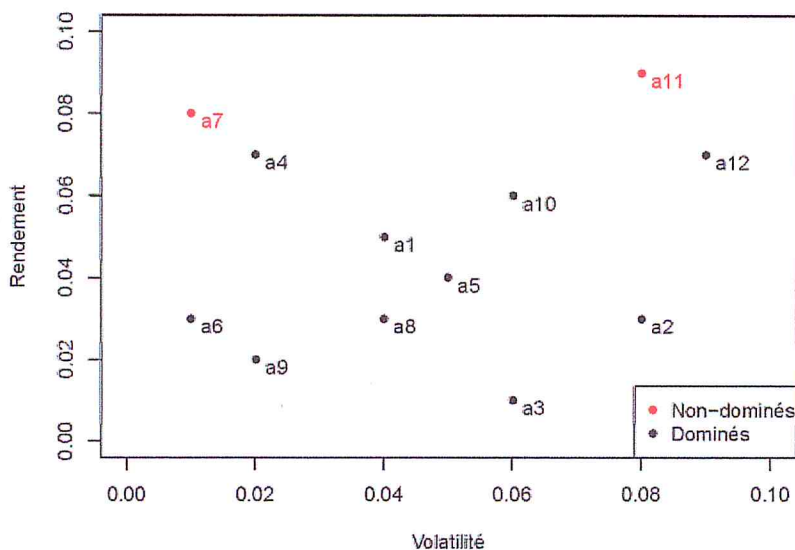
Le sous-ensemble non-dominé d'un ensemble de solutions est appelé le front de Pareto ou la surface de compromis (dans le cas de Markowitz, on l'avait appelée frontière efficiente).

### Illustration

Soient 12 actifs ayant les caractéristiques suivantes :

	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>8</sub>	a <sub>9</sub>	a <sub>10</sub>	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>
Rendement	5%	3%	1%	7%	4%	3%	8%	3%	2%	6%	9%	7%
Volatilité	4%	8%	6%	2%	5%	1%	1%	4%	2%	6%	8%	9%

**Tableau 1** : tableau du rendement et risque



**Figure 3**: graphe dominance de Pareto

Alors :

- L'actif a<sub>7</sub> domine l'actif a<sub>6</sub> : à volatilité égale, son rendement est supérieur ;
- L'actif a<sub>4</sub> domine l'actif a<sub>12</sub> : à rendement égal, sa volatilité est inférieure ;
- Les actifs a<sub>7</sub> et a<sub>11</sub> sont incomparables : même si a<sub>11</sub> est meilleur que a<sub>7</sub> sur le critère rendement, il est moins bon sur le critère volatilité.
- Le sous-ensemble {a<sub>7</sub>, a<sub>11</sub>} est non-dominé : aucune allocation n'obtient à la fois un rendement supérieur et une volatilité inférieure ou égale, ou un rendement supérieur ou égal et une volatilité inférieure. Au sein de cet ensemble d'allocations, choisir une autre allocation serait donc nécessairement sous-optimal.



### II.3.4 Les relations dérivées de la dominance

La relation de dominance n'offre pas de degrés de liberté dans sa définition. Par exemple, il n'est pas possible d'inclure dans la définition de la relation de dominance une préférence d'un objectif par rapport à un autre. C'est pour contrecarrer ce manque de souplesse que des relations dérivées de la relation de dominance ont été développées. Les solutions qui permettent de trouver ces relations dérivées de la dominance sont toutes optimales au sens de Pareto. La grande différence que l'on rencontre avec ces relations est que l'ensemble des solutions que l'on obtient avec ces relations est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions obtenues avec la relation de dominance de Pareto.

Dans cette section, l'ensemble  $s^k$  désigne l'ensemble des solutions réalisables d'un problème d'optimisation à  $k$  fonctions objectif.

### II.4 Optimalité lexicographique

#### Définition (Optimalité lexicographique)

Cette définition de l'optimalité permet d'inclure une préférence entre les objectifs.

Une solution  $x^* \in s^k$  est optimale au sens lexicographique si :

$$x^* \leq_{lex} x, \forall x \in s^k - \{x^*\}$$

Si  $x, y \in s^k$  on dit que  $x \leq_{lex} y$  s'il existe une valeur d'index  $q^*$  tel que  $x_q = y_q$  pour  $q = 1, \dots, (q^* - 1)$  et  $x_{q^*} < y_{q^*}$ . Les relations entre  $x_q$  et  $y_q$  pour  $q \geq q^*$  ne sont pas prises en compte car nous nous arrêtons à l'indice  $q^*$  (c'est le premier indice pour lequel  $x_q < y_q$ )

Cette définition implique que les objectifs sont rangés préalablement par ordre d'importance et la comparaison entre deux solutions se fera dans l'ordre de classement des objectifs.

#### Exemple :

Soient deux points  $A$  et  $B$  :

$$A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$B = (1, 2, 3, 9, 4, 1)$$

Pour cet exemple,  $A \leq_{lex} B$  car, jusqu'à la troisième position on a  $a_i = b_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$  et pour la quatrième position on a  $4 < 9$ .

On en conclut que la solution  $A$  domine lexicographiquement la solution  $B$ .



### II.4.1 Optimalité extrême

Comme pour la relation d'optimalité lexicographique, cette relation permet d'établir une préférence entre critères. Cette préférence est établie en utilisant des poids. Plus un objectif sera important, plus son poids sera élevé.

#### Définition (optimalité extrême)

Une solution  $x^* \in S^k$  est extrême-optimale si, étant donné un vecteur de poids  $\lambda \in R^k$  tel que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $x^*$  est une solution optimale du problème de maximisation mono objectif ayant pour fonction objectif

$$\text{Min} \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right)$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \forall x \in S^k - \{x^*\}$$

### II.4.2 Optimalité maximale

Cette relation, contrairement aux précédentes, ne permet pas d'introduire une préférence entre objectifs.

#### Définition (optimalité maximale)

Une solution  $x^* \in S^k$  est max-optimale si la valeur du pire objectif est aussi petite que possible

$$\max x^* \leq \max x_q$$

$$q \in \{1, 2, \dots, k\}$$

$$x_q \in S^k - \{x^*\}$$

## II.5 La a-dominance

Une solution  $x^* \in S^k$  a-domine une solution  $x \in S^k$  s'il existe un ensemble de combinaison de  $k+1-a$  critères (on note  $I_{(k+1-a)}$  l'ensemble des index correspondant à l'ensemble des combinaisons de ces critères) tel que :

$$x_j^* \leq x_j \text{ pour tout } j \in I_{(k+1-a)}$$

$$\text{Et } x_j^* \prec x_j \text{ pour au moins un } j \in I_{(k+1-a)}$$

Pour illustrer cette définition, prenons l'exemple suivant : soit une famille de trois critères  $(c_1, c_2, c_3)$  deux solutions  $x_A$  et  $x_B$  et cherchons à établir la

2-dominances.

Pour la 2-dominance, on doit tester la relation de dominance entre les vecteurs  $x_A$  et  $x_B$  sur toutes les combinaisons de  $3+1-2=2$  critères. Ces familles sont les suivant :

$$F_1 = \{c_1, c_2\} \Rightarrow I'_1 = \{1, 2\}$$

$$F_2 = \{c_1, c_3\} \Rightarrow I'_2 = \{1, 3\}$$

$$F_3 = \{c_2, c_3\} \Rightarrow I'_3 = \{2, 3\}$$

$$\text{Donc, } I_2 = \{I'_1, I'_2, I'_3\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Considérons maintenant les deux points  $A$  et  $B$ .

	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$A$	1	2	3
$B$	1	1	2

**Tableau 2 :** tableau de a-dominance

Le point  $A$  2-domine le point  $B$  car il domine le point  $B$  sur chaque famille de critère :

- $A$  domine  $B$  si l'on considère les critères 1 et 2.
- $A$  domine  $B$  si l'on considère les critères 1 et 3
- $A$  domine  $B$  si l'on considère les critères 2 et 3.

Donc,  $A$  2-domine  $B$  car  $A$  domine  $B$  si l'on considère les combinaisons de critères

$$\{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_2, c_3\}.$$

## II.6 approches non-Pareto

Les approches non-Pareto ne traitent pas le problème comme un véritable problème multi-objectif elles cherchent à ramener le problème initial à plusieurs problèmes mono-objectif .

Les approches non Pareto sont classées en deux catégories : les approches scalaires, qui transforment le problème multi-objectif en problème mono-objectif, et les approches non scalaires, qui gardent l'approche multi-objectif, mais en traitant séparément chacun des objectifs. Il existe un grand nombre d'approches non Pareto, nous allons présenter ci-dessous une liste non exhaustive de celles-ci.

### II.6.1 les approches scalaires

Dans certaines situations, pour simplifier les calculs et pour pouvoir appliquer des algorithmes classiques les problèmes multi-objectifs sont transformés en problèmes mono-objectif et pour ce faire il existe plusieurs approches, parmi elles les approches agrégées et les approches  $\varepsilon$  – Contraintes.

#### II.6.1.1 Les approche agrégées

Cette méthode consiste à transformer un problème multi-objectif en un problème mono-objectif en définissant une fonction objectif  $U$  comme étant la somme pondérée de différentes fonctions objectifs du problème initial. On affecte à chaque objectif un coefficient de poids qui représente l'importance relative que le décideur attribue à l'objectif.

$$\left\{ \begin{array}{l} U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) = \sum_{i=1}^k c_i w_i f_i(x) \\ \sum_{i=1}^M w_i = 1 \end{array} \right.$$

Où les  $c_i$  sont des constantes qui mettent à la même échelle les différents objectifs. Les

constantes  $c_i$  sont généralement initialisées à  $\frac{1}{f_i(x^*)}$  où  $f_i(x^*)$  et la solution optimale

associée à la fonction objectif  $f$ . Cette normalisation nécessite une optimisation préalable de chaque fonction-objectif prise indépendamment.

Il s'agit d'une méthode a priori pour laquelle la structure de préférence a été fixée en amont de l'optimisation. Il suffit alors de réaliser une optimisation mono-objectif. Si l'on veut utiliser une approche a posteriori et obtenir une approximation de la frontière de Pareto, il faut renouveler plusieurs fois l'optimisation avec des jeux de poids différents.



## II.6.2 les approche $\varepsilon$ –contraintes

Cette approche permet de transformer un problème d'optimisation multi-objectif en un problème d'optimisation mono-objectif comportant quelques contraintes supplémentaires. La démarche est la suivante :

Dans un premier temps on choisit l'objectif prioritaire qui va devenir la fonction objectif du problème .Dans un second temps on transforme les autres objectifs en contraintes d'inégalité, ainsi nous obtenons un problème mono-objectif (pour un problème de minimisation par exemple ) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_x f_m(x) \\ f_i \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, k, i \neq k \end{cases}$$

Ainsi ,le problème multi-objectif à été transformé en problème mono-objectif sujet à  $f_k$  étant la fonction objectif du problème .

Pour pouvoir obtenir différentes solutions appartenant au front de Pareto, il faut à chaque fois donner des valeurs différentes aux  $\varepsilon_i$  et résoudre à chaque fois le problème

## II.7 Condition d'optimalité

Dans cette section, nous citons les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité au sens de Pareto formulées pour un problème d'optimisation. Mais avant de citer ces conditions, nous rappelons ici quelques définitions liées à la convexité, qui nous seront utiles par la suite.

### Définition (La convexité )

la fonction  $f: R^n \rightarrow R$  est convexe si et seulement si pour toute paire de variables  $x_1, x_2 \in R^n$  et pour tout  $\lambda \in [0,1]$  ,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



**Définition :** Un problème d'optimisation multi-objectif est appelé convexe si et seulement si toutes les fonctions objectif  $f_m$  sont convexes et l'espace faisable est un ensemble convexe.

Nous sommes donc prêts maintenant à citer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Nous ne supposons par la suite que toutes les fonctions objectifs

$$f_m \quad m = 1, \dots, M$$

Ainsi que les contraintes

$g_j, j = 1, \dots, K$  et  $h_j, j = 1, \dots, L$  sont différentiables.

### **Théorème Condition nécessaire de Fritz-John**

si  $x$  une solution Pareto-optimale d'un problème d'optimisation, alors il existe deux vecteur non nuls  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\lambda \geq 0 \text{ et } \mu \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}^m \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^k)$$

1.  $\sum_{m=1}^M \lambda_m \Delta f_m(x^*) - \sum_{j=1}^K u_j \Delta g_j(x^*) = 0$
2.  $u_j g_j(x^*) = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, k$

## **II.8 Condition de Karush-Kuhn-Tucker**

Si un problème multi-objectif est convexe et si la condition nécessaire de Fritz-John est vérifiée, alors, la solution  $x$  est une solution Pareto-optimale.

Le petit nombre de solutions de rang 1 que l'on a sélectionnées en utilisant la règle de classement basée sur la définition de la dominance forme ce que l'on appelle la surface de compromis (ou front de Pareto).

Imaginons que nous ayons un problème à deux objectifs (minimiser  $f_1$  et minimiser  $f_2$  sous les contraintes  $g(x) \leq 0$  et  $h(x) = 0$

- On appelle  $S$  l'ensemble des valeurs du couple  $(f_1(x), f_2(x))$  quand  $x$  respect les contraintes  $g(x)$  et  $h(x)$

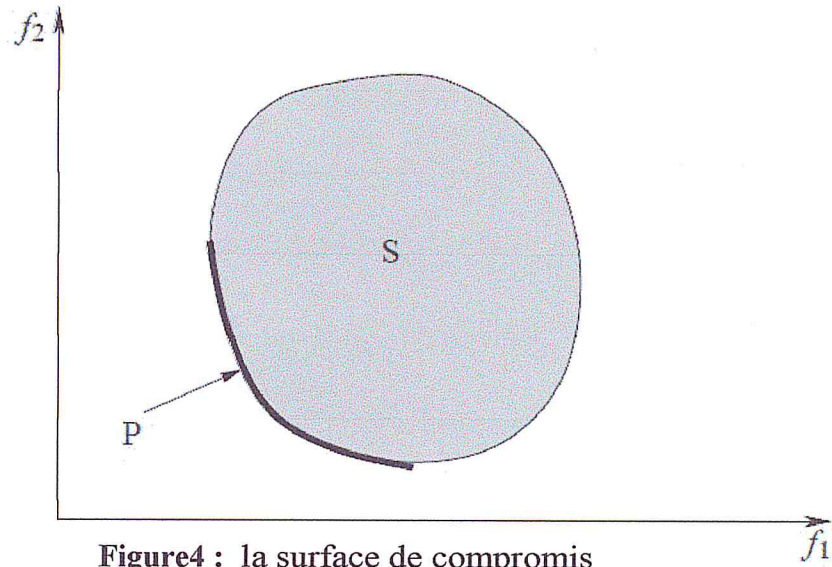


Figure4 : la surface de compromis

On appelle P la surface de compromis.

On observe deux points caractéristiques associés à une surface de compromis :

**Point idéal :** Les coordonnées de ce point sont obtenues en optimisant chaque fonction objectif séparément.

**Point nadir :** Les coordonnées de ce point correspondent aux pires valeurs obtenues par chaque fonction objectif lorsque l'on restreint l'espace des solutions à la surface de compromis.

Le point idéal est utilisé dans les méthodes d'optimisation comme point de référence. Le point nadir sert à restreindre l'espace de recherche ; il est utilisé dans certaines méthodes d'optimisation interactives.

## II.9 La représentation de la surface de compromis

Toutes les représentations de la surface de compromis, pour un même problème, ne sont pas équivalentes. En effet, la représentation idéale de la surface de compromis devra constituée de points solution de notre problème répartis de manière uniforme sur la surface de compromis.

Dans le premier cas, les points représentant la surface de compromis ne sont pas répartis de manière uniforme. L'utilisateur n'aura alors pas en sa possession un ensemble de solutions très utile. En effet, s'il décide que la solution qu'il avait choisie

ne lui convient pas, le choix d'une autre solution risque de faire varier brusquement tous ses objectifs, et cette nouvelle solution ne lui conviendra pas non plus. Il est alors probable que la solution offrant le "meilleur" compromis se trouve dans une zone qui ne soit pas représentée par des points solution.

La détermination d'une bonne représentation de la surface de compromis sera un critère de choix d'une méthode d'optimisation multi objectif.

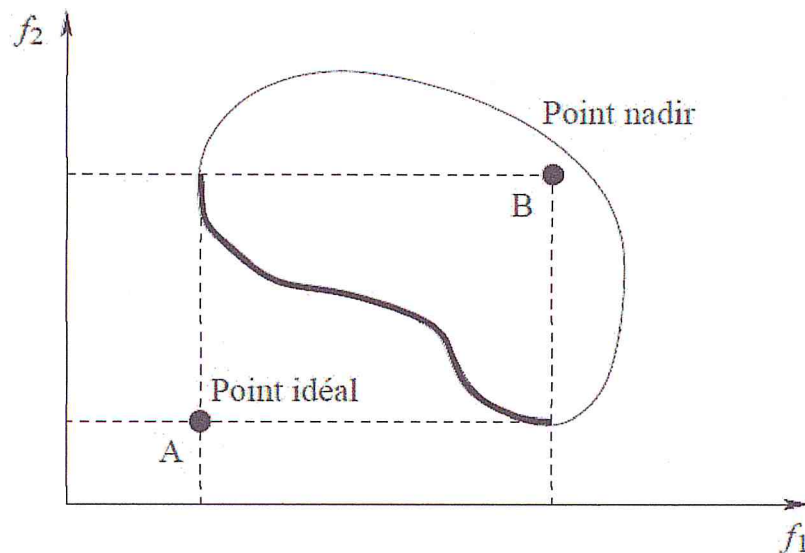


Figure5 : Représentation du point idéal et du point "nadir"

## Conclusion

La résolution d'un problème d'optimisation mono objectif consiste à trouver un extrémum (max,min) d'une fonction objectif  $f$ , cet extrémum s'il existe il est unique.

La résolution d'un problème d'optimisation multi objectifs consiste à trouver des extrémums (max,min) de plusieurs fonctions objectifs  $f_i$   $i = 1, \dots, n$  dans ce cas on a une alter native de solution du problème multi objectif.

Nous avons abordé dans ce chapitre les approches  $\epsilon$  contraintes qui transforment le problème d'optimisation multi objectif a un problème d'optimisation mono objectif. C'est cette approche que nous avons retenus par la résolution de problème d'optimisation selon les critères de rendement et de volatilité.

## **Chapitre III**

### **Application sur un portefeuille d'actifs – données boursières réelles**



### III.1 introduction

Le but de notre travail est d'optimiser l'allocation d'actifs financiers pour avoir un portefeuille de rendement optimal.

L'évaluation de notre portefeuille sera effectuée par rapport au rendement optimal des actifs et la volatilité.

Chaque actif est caractérisé par son rendement et une volatilité.

L'échantillon de données est collecté a partir du site de données mondiales yahoo finance <http://frofinance.yahoo.com>, portant sur des actifs en matières premières sur plusieurs lieu de placement (londre, new-york,chine).

### III.2 rendement d'un portefeuille

Le rendement d'un portefeuille  $E(R_p)$  représente les rendements moyens des actifs composants le portefeuille.

$$E(R_p) = E(\sum_{i=1}^n w_i \bar{R}_i) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

$$\bar{R}_i = E(R_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_i$$

$w_i$  : est le poid de l'actif  $i$  dans le portefeuille

$E(R_i)$  : la moyenne arithmétique des rendements de l'actif  $i$  prise dans un intervalle de temps  $T$  (période d'une année par exemple).

$$E(R_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{p_j^i - p_{j-1}^i}{p_{j-1}^i} \text{ ou } p_j^i : \text{est le prix de l'actif } i \text{ à l'instant } j$$

### III.3 volatilités d'un portefeuille (variance d'un portefeuille)

Les actifs composants le portefeuille peuvent être corrélés pour cela la variance ou volatilité du portefeuille se calcule de la façon suivante

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad i \neq j$$

on peut calculé la variance d'un portefeuille par la forme matricielle suivant

$$V(R_p) = w^T \Sigma w$$

$w^T = (w_1, w_2, \dots, \dots, w_n)$  : Vecteur des poids.

$\Sigma$  : Matrice carré de variance covariance symétrique .

### III.4 présentation du portefeuille (Actifs)

On présente les actifs par un vecteur  $w^T = (w_1, w_2 \dots \dots \dots w_{10})$  de dimension (1x10) représentant les poids des 10 actifs suivant.

**Actif 1** : cours des matières premières importées - minerai de fer importations chinoises

Modélisé par  $w_1$

**Actif 2** : cours des matières premières importées - aluminium importations Londres

Modélisé par  $w_2$ .

**Actif 3** : cours des matières premières importées – pétrole brut «Brent » Londres

Modélisé par  $w_3$ .

**Actif 4** : cours des matières premières importées – cuivre grade A Londres

Modélisé par  $w_4$ .

**Actif 5** : cours des matières premières importées – plomb Londres

Modélisé par  $w_5$ .

**Actif 6** : cours des matières premières importées – or Londres

Modélisé par  $w_6$ .

**Actif 7** : cours des matières premières importées – platine New – York

Modélisé par  $w_7$ .

**Actif 8** : cours des matières premières importées – riz blanchi 5% de brisures Bangkok

Modélisé par  $w_8$ .

**Actif 9** : cours des matières premières importées – huile de tournesol Etat Unis depuis le golfe du Mexique. Modélisé par  $w_9$

**Actif 10** : cours des matières premières importées – bois tropicaux Méranthe rouge sombre port Royaume Unis . Modélisé par  $w_{10}$ .

Les informations statistiques des actifs sont regroupées dans le tableau ci dessus

actif	Moyen	Valeur min	Q1(quartile1)	Q2(quartile2)	Q3(quartile3)
1	64,694	12,05	16,4	40,45	113,45
2	1919,870	1282,1	1535,975	1831,1	2204,4
3	65,760	18,7	32,475	62,15	38,2
4	5193,911	1377,4	2488,4	5800	7489,8
5	1506,010	411,8	754,4	1679,05	2110,775
6	848,700	261,1	393,65	807,6	1235
7	1126,734	423	801,75	1143,15	1455
8	387,576	162,1	240,325	358,6	540,26
9	388,718	332,6	673	1020,75	1168,05
10	743,752	466	596,15	801,65	868,85

**Tableau 3** : statistiques descriptifs des actifs.

### III.5 Données du portefeuille

Chaque actif a un rendement moyen qu'on appelle  $\bar{R}_i$   $i = (1,2 \dots 10)$

Le vecteur de rendement moyen  $\bar{R}$  des 10 actif de dimension (1x10)

$$\bar{R} = (\bar{R}_1, \bar{R}_2 \dots \dots \dots \bar{R}_{10})$$

$$\bar{R} = (0,011; 0,001; 0,006; 0,007; 0,01; 0,00; 0,006; 0,004; 0,009; 0,001)$$

Ce vecteur est calculé à partir du tableau de données présenté en annexe 2

la matrice de variance covariance est données par

### III-6 Approche mono objective

Le problème mono objectif d'allocation optimale est décrit par le système suivant

$$(P') \equiv \begin{cases} \min f(w) = w^t \Sigma w \\ \sum_{i=1}^{10} w_i - 1 = 0 \\ \sum_{i=1}^{10} \bar{R}_i \cdot w_i - 0.005 \geq 0 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \quad i = 1 \dots 10 \end{cases}$$

La résolution du système (P') par l'algorithme d'Arrow-Hurwicz nous permet d'avoir les résultats présentés dans les deux tableaux suivant



On a obtenu les résultats représentés dans le tableau de simulation ci-dessous

	Valeurs initiale	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10
Cas1	$\lambda_1 = 0,5$ $\lambda_2 = 0,5$	0,1650	0	0,0775	0,0925	0,1558	0,1641	0,1038	0,0672	0,1439	0,0299
Cas2	$\lambda_1 = -10$ $\lambda_2 = 10$	0,1820	0	0,0934	0,1098	0,1667	0,1383	0,0966	0,0586	0,1500	0,0042
Cas3	$\lambda_1 = 40$ $\lambda_2 = 30$	0,1829	0,003	0,0981	0,1142	0,1659	0,1301	0,0953	0,0581	0,1508	0
Cas4	$\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 10$	0,1819	0	0,0932	0,1097	0,1665	0,1383	0,0967	0,0588	0,1503	0,0042

**Tableau 4** : solution de compromis par un problème mono objective

### Remarque

On remarque que les vecteurs  $w^*$  dans les cas 2, 3 et 4 sont presque identiques par contre dans le cas 1 il y a une différence entre 0% jusqu'à 1.5% entre les poids.

Les couples (rendement, risque) et les valeurs finales de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  des 4 cas précédents sont données dans le tableau suivant

	Valeurs finale	$R_p$	$\text{Var}(R_p)$
Cas1	$\lambda_1 = -0,2446$ $\lambda_2 = 0,5030$	0,0080	0,0020
Cas2	$\lambda_1 = -8,369$ $\lambda_2 = 9,993$	0,0083	0,0023
Cas3	$\lambda_1 = 14,698$ $\lambda_2 = 30,049$	0,0083	0,0023
Cas4	$\lambda_1 = -0,295$ $\lambda_2 = 9,972$	0,0083	0,0023

**Tableau 5** : rendement-Risque du problème mono objective

Remarque :

D'après les résultats obtenus dans le tableau 4, on remarque que  $w_1$  (l'actif 1) a le poids maximal dans toutes les approches car son rendement moyen est bien considéré.

Par contre  $w_2$  (l'actif 2) a un poids nul dans tous les cas.



### III.6.1 descriptions des résultats mono objectifs

#### III.4.1.1 description des résultats du cas1

Déroulement de l'algorithme on fixe epsilon à 0,001 , alfa=0.5 et béta=0.5

On a initialisé le vecteur du poids initial  $w_0 = (0,1 ; 0,1; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1)$

Et Les multiplicateurs de LaGrange  $\lambda_1 = 0,5$  et  $\lambda_2 = 0,5$

On a trouvé la solution optimale du problème (P) ( cité dans le chapitre II ) après 25 itérations.

$w^* = (0,1650; 0 ; 0,0775 ; 0,9250 ; 0,1558 ; 0,1641 ; 0,1038 ; 0,0672 ; 0,1439 ; 0,0299)$

Le rendement (moyenne) du portefeuille  $E(R_p) = 0,0080 = 0,8\%$

la variance (risque) du portefeuille  $Var(R_p) = 0,002 = 0,2\%$ .

La location optimale obtenue avec l'algorithme est illustrée par la figure suivante :

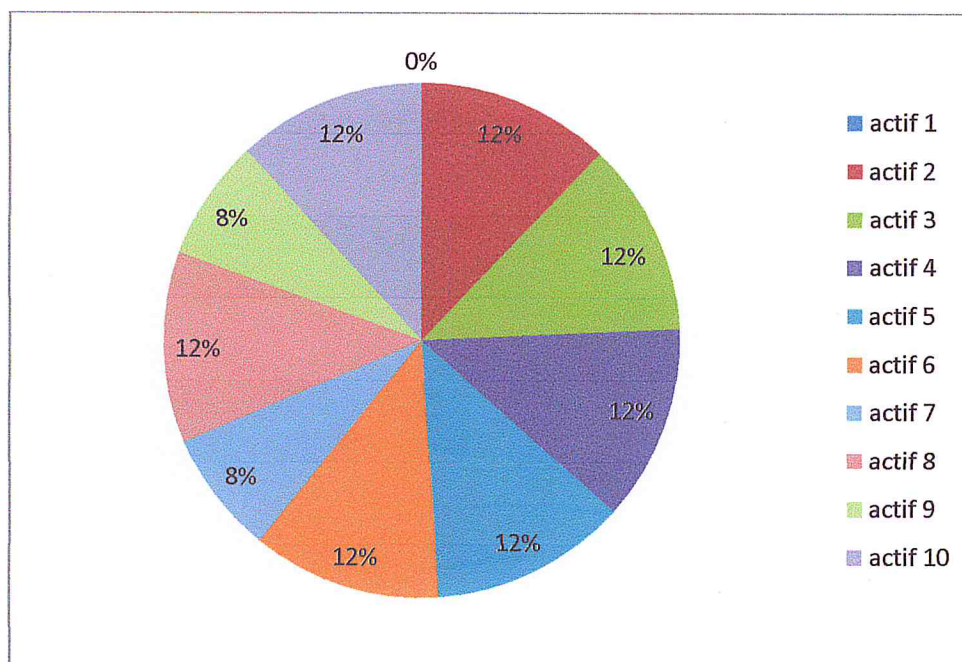


Figure6 : allocation des actifs de la solution optimale cas1

#### III.4.1.2 description des résultats du cas2

On a initialisé le vecteur du poids initial  $w_0 = (0,1 ; 0,1; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1)$

Et Les multiplicateur de LaGrange  $\lambda_1 = -10$  et  $\lambda_2 = 10$

On a trouvé la solution optimale du problème (P) ( cité dans le chapitre II paragraphe) après 120 Itérations.

$w^* = (0,1820 ; 0 ; 0,0934 ; 0,1098 ; 0,1667 ; 0,1383 ; 0,0966 ; 0,0586 ; 0,1500 ; 0,0042)$

La moyenne du portefeuille  $E(R_p) = 0,0083 = 0,83\%$

La variance (risque) du portefeuille  $Var(R_p) = 0,0023 = 0,23\%$ .

### III.4.1.3 description des résultats du cas3

On a initialisé le vecteur du poids initial  $w_0 = (0,1 ; 0,1; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1)$

Et Les multiplicateur de LaGrange  $\lambda_1 = 40$  et  $\lambda_2 = 30$

On a trouvé la solution optimale du problème (P) ( cité dans le chapitre II paragraphe) après 150 Itérations.

$w^* = (0,1829 ; 0,0033 ; 0,0981 ; 0,1142 ; 0,1669 ; 0,1301 ; 0,0953 ; 0,0581 ; 0,1509 ; 0)$

Le rendement (la moyenne) du portefeuille  $E(R_p) = 0,0083 = 0,83\%$

la variance (le risque) du portefeuille  $Var(R_p) = 0,0023 = 0,23\%$ .

### III.4.1.4 description des résultats du cas4

On a initialisé le vecteur du poids initial  $w_0 = (0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1)$

Et Les multiplicateur de LaGrange  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 10$  On a trouvé la solution optimale du problème (P) ( cité dans le chapitre II paragraphe) après 110 itérations.

$w^* = (0,1819 ; 0 ; 0,0932 ; 0,1097 ; 0,1665 ; 0,1383 ; 0,0967 ; 0,0588 ; 0,1503 ; 0,0042)$

Le rendement (moyenne) du portefeuille  $E(R_p) = 0,0083 = 0,83\%$

la variance (risque) du portefeuille  $Var(R_p) = 0,0023 = 0,23\%$ .

La location optimale obtenue avec l'algorithme d'Arrow-Hurwicz est illustrée par la figure suivante :

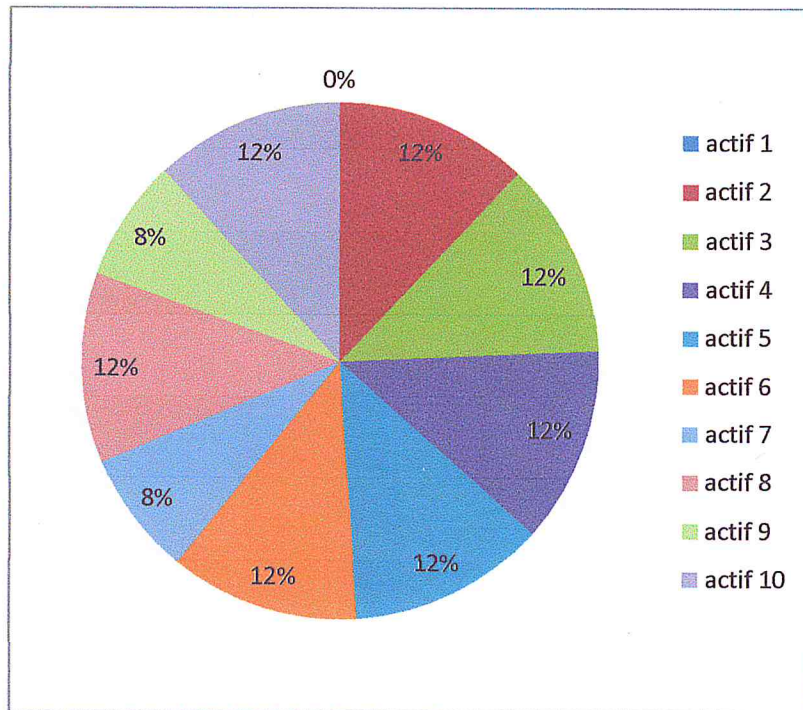


Figure7: allocation des actifs de la solution optimal

## Conclusion

D'après les différents test on conclut que l'algorithme d'Arrow-Hurwicz donne de très bonnes approches des solutions optimales dans le cas d'une optimisation mono-objectif avec de très faibles différences entre les solutions.

Dans notre cas l'approche 2,3 et 4 donne un rendement 0.83% avec un risque minimale de 0.23% par contre l'approche 1 donne un rendement de 0.8% avec un risque important qui dépasse 0.20%.

## III.7 Présentation du problème multi- objectif

Dans cette approche Nous allons faire une optimisation d'allocation d'actifs sur les 10 actifs précédents, on ajoutant un deuxième objectif qui minimise le cout de transport.

Notre problème multi objective est défini comme suite

$$(P') : \begin{cases} \min f(w) = w^t \Sigma w \\ \min C(w) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot w_i \\ g(w) = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0 \\ h(w) = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot w_i - 0.005 \geq 0 \end{cases}$$

$\Sigma$  : matrice de variance covariance symétrique semi définit positive ; matrice carré (10x10)

$w_i = (w_1; w_2; \dots \dots \dots w_{10})$  Vecteur de poids des actif de dimension (x10)



$$C_i = (C_1; C_2; \dots \dots C_{10}) = (200, 120, 120, 120, 120, 120, 150, 120, 150, 120)$$

Vecteur de dimension (1x10) qui représente les couts de transport des actifs

$$\bar{R}_i = (\bar{R}_1; \bar{R}_2; \dots \dots \bar{R}_{10}) \text{ Vecteur du rendement des actifs de dimension } (1 \times 10).$$

### III.7.1 Approche du problème multi objectif.

Dans notre situation, pour simplifier les calculs et pour pouvoir appliquer des algorithmes classiques, les problèmes multi-objectifs sont transformés en problèmes mono-objectif et pour ce faire il existe plusieurs approches, parmi elles l'approche  $\varepsilon$  – contraintes. Cette algorithmme consiste a considéré le deuxième objectif comme une contrainte majoré par un paramètre connu (cette contrainte limite les frais de transport.

Notre problème mono objectif est le suivant.

$$(P'') : \begin{cases} \min f(w) = w^t \sum w \\ \sum_{i=1}^n C_i \cdot w_i \leq \bar{C} \\ g(w) = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0 \\ h(w) = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot w_i - 0.005 \geq 0 \end{cases}$$

Ou  $\bar{C}$  est le cout moyen de transport des 10 actifs.

Cette approche nous conduit a un problème d'optimisation connu.

Donc  $(P'')$  est un problème d'optimisation quadratique sous des contraintes mixtes pour la résolution de ce type de problème il ya plusieurs algorithmes on a choisit l'algorithme d'Arrow Hurwicz cité au paragraphe II en ajoutant un troisième multiplicateur de Lagrange.

La résolution du système  $(P'')$  par l'algorithme d'arrow-hurwicz



Nous avons obtenu les résultats représentés dans le tableau de simulation ci dessous

Les cas	Valeurs initiale	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$
Cas1	$\lambda_1 = 0.5$ $\lambda_2 = 0.5$ $\lambda_3 = 0.5$	0	0,1207	0,1236	0,1250	0,1249	0,1184	0,0733	0,1202	0,0761	0,1174
Cas2	$\lambda_1 = -10$ $\lambda_2 = 10$ $\lambda_3 = 2$	0	0,1206	0,1239	0,1258	0,1258	0,1180	0,0728	0,1200	0,0761	0,1167
Cas3	$\lambda_1 = 40$ $\lambda_2 = 30$ $\lambda_3 = 5$	0	0,1207	0,1236	0,1250	0,1250	0,1184	0,0733	0,1202	0,0761	0,1174
Cas4	$\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 10$ $\lambda_3 = 20$	0	0,1209	0,1226	0,1233	0,1233	0,1196	0,0774	0,1206	0,0759	0,1190

**Tableau 6** : simulation de la solution de compromis par un problème mono objective

Les couples (rendement, risqué) des 4cas présidents sont données par

Les cas	Valeurs finale	$R_p$	$Var(R_p)$
Cas1	$\lambda_1 = -2,190$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 1,476$	0,0056	0,0014
Cas2	$\lambda_1 = 1,511$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 5,815$	0,0057	0,0014
Cas3	$\lambda_1 = 3,908$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 1,503$	0,0056	0,0014
Cas4	$\lambda_1 = 1,531$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 5,892$	0,0057	0,0014

**Tableau 7** : rendement-Risque du problème mono objective

**Remarque :**

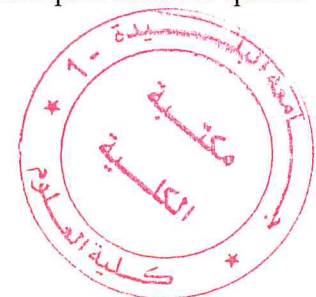
On a vu dans le problème mono objective que le poids de l'actif 1 ( $w_1$ ) est très important par contre dans le problème multi objectif est nulle car son coût de transport sont très élevé

**III.7.2 description des résultats**

D'après les résultats du tableau on remarque que les solutions sont identiques dans les quatre cas

Le déroulement de l'algorithme

On a fixé epsilon à 0,001 alfa à 0,5 et béta à 0,5



On a initialisé le vecteur du poids initial  $w_0 = (0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1)$

Et Les multiplicateur de Lagrange  $\lambda_1 = 0,5$  ;  $\lambda_2 = 0,5$  et  $\lambda_3 = 0,5$

On a trouvé la solution optimale du problème ( $P''$ ) (cité dans le chapitre II) après 10 itérations.

$w^* = (0 ; 0,12 07; 0,1236 ; 0,12 50; 0,1249 ; 0,1184 ; 0,0733; 0,1202 ; 0,0761 ; 0,1174)$

Le rendement (moyenne) du portefeuille  $E(R_p) = 0,0056 = 0.56\%$

la variance (risque) du portefeuille  $Var(R_p) = 0,0014 = 0.14\%$ .

dans cette approche on remarque que les 4 approches sont identiques donc le problème converge vers la même solution optimale, sauf dans le deuxième approche

La location optimale obtenue avec l'algorithme d'Arrow-Hurwicz est illustrée par la figure suivante :

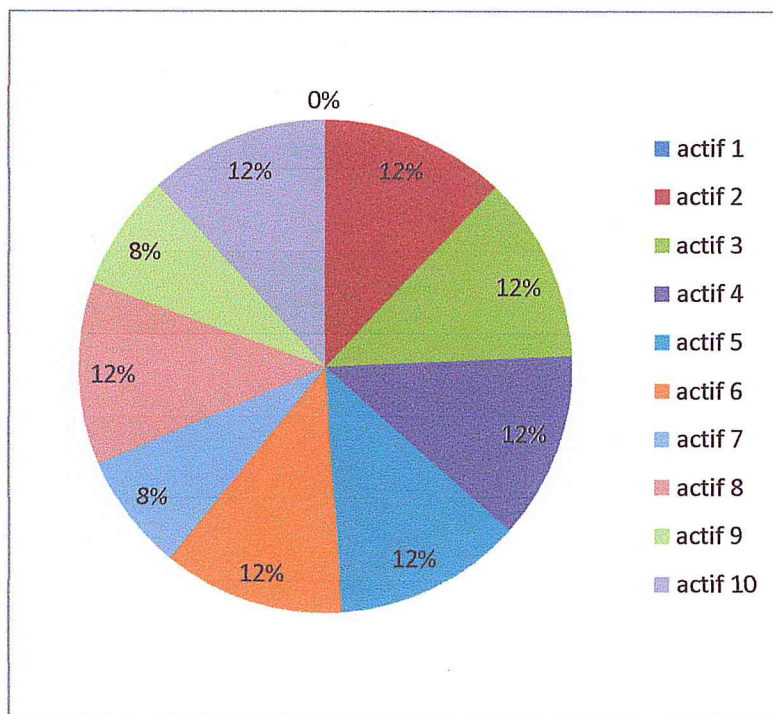


Figure 8 : allocation des actifs de la solution optimale

## Conclusion

Le rendement du portefeuille est très important dans le problème mono objectif par contre il diminue dans le problème multi objectif grâce à la fonction du coût de transport.

D'après les résultats obtenus par les différentes descriptions on conclut que l'algorithme d'Arrow Hurwicz donne des bonnes approches concernant le problème d'optimisation mono objectif quadratique à contraintes mixtes.

## Conclusion générale

A travers le travail que nous avons réalisé, nous nous sommes fait une idée sur les difficultés de représenter le domaine réel par la formulation objectif qui nous donne de bons résultats qui sont la projection de domaine réel.

En effet, le problème de non disponibilité des données sur un domaine réel local nous a fait défaut dans la progression de cette thèse.

Nous avons été confrontés au problème d'optimisation quadratique sous des contraintes linéaires mixtes qui limitent le domaine des solutions optimales (compromis), dans notre cas ces limites définissent les portefeuilles optimaux.

Ce qui nous a fait défaut dans notre étude est l'optimisation multi objectif .

En fin nous avons un peu compris l'utilité de l'application des algorithmes d'optimisation mono objectif et multi objectif et le lien entre eux.

Nous espérons que notre travail sera utile pour les secteurs financiers dans l'élaboration de plans de ressources financières.

## Table des tableaux

Tableau1 : rendement et risque.....	32
Tableau2 : tableau de a-dominance .....	35
Tableau3 : statistique descriptive des actifs .....	44
Tableau4 : solution de compromis par un problème mono objectif.....	45
Tableau 5 : rendement-Risque du problème mono objective.....	45
Tableau 6 : simulation des solutions de compromis par un problème mono objectif.....	50
Tableau 7 : rendement-Risque du problème multi objective.....	50



## Table des figures

Figure 1 : Risque spécifique et risque systématique.....	12
Figure 2 : Graphe de la frontière efficiente (Aide Matlab).....	14
Figure 3 : Dominance de Pareto.....	32
Figure 4 : Surface de compromis.....	39
Figure 5 : Point idéal et point nadir.....	40
Figure 6 : Allocation des actifs de la solution optimal cas1.....	46
Figure 7 : Allocation des actifs de la solution optimal cas2,3,4.....	48
Figure 8 : Allocation des actifs de la solution optimal cas1.....	51

## Annexel

Programme matlab pour le problème multi objective

```
clc;
clear;
%x=linspace(-1,1,20);
%y=linspace(-2,1,20);
%z=linspace(-2,3,20);
%x= repmat(x,20,1);
%y= repmat(y,20,1);
%z= repmat(z,20,1);
%F=x'*A*x;
%surf(F,'DisplayName','F');figure(gcf)
%en difinit lagrangienne
% L(x,lambda) =(1/2)*x'*A*x+lambda01(e*x'-d+lamba02);
% h(lambda)=D*x-b ;

x0=input('donner le vecteur colonne initiale de IR^10 x0=');
lambda01=input('donner le valeur initiale de IR lambda01=');
lambda02=input('donner le valeur initiale de IR+ lambda02=');
%lambda0=[1;2];
%x0=[0;0;0];
%title('l(x,lambda) = x*A*x+lambda1(D*x-1)-lambda2(R*x+0.2);')
%title('h(lambda)=e*x-1 ;')
A=[0.009231919 0.000698822 0.001271118 0.004672786 0.006152553
0.000659763 0.001207937 0.000326217 0.00085525 0.000313447
0.000698822 0.00255542 0.002003001 0.002361425 0.002124722
0.000549847 0.00097401 0.000482086 0.001036321 0.000247685
0.001271118 0.002003001 0.008062604 0.003104806 0.001891294
0.000770714 0.001780214 0.000634461 0.001083302 0.000471709
0.004672786 0.002361425 0.003104806 0.004672786 0.003005409
0.000846326 0.001785196 0.000801181 0.001148427 0.000307031
0.006152553 0.002124722 0.001891294 0.003005409 0.006152553
0.000497125 0.001140038 0.000479099 0.000262378 0.000235776
0.000659763 0.000549847 0.000770714 0.000846326 0.000497125
0.001520764 0.001085892 0.000288051 -0.000155518 0.000159477
0.001207937 0.00097401 0.001780214 0.001785196 0.001140038
0.001085892 0.004196657 0.000259134 -0.000218408 0.000291891
0.000326217 0.000482086 0.000634461 0.000801181 0.000479099
0.000288051 0.000259134 0.004042596 0.0036188 0.000195129
0.00085525 0.001036321 0.001083302 0.001148427 0.000262378 -
0.000155518 -0.000218408 0.0036188 0.01113047 0.000545922
0.000313447 0.000247685 0.000471709 0.000307031 0.000235776
0.000159477 0.000291891 0.000195129 0.000545922 0.000499907];
M=2*A;
B=inv(M);
%D=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
D=[100 70 70 70 70 70 80 70 80 70];
e=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
d=1;
R=[0.011 0.001 0.006 0.007 0.010 0.008 0.006 0.004 0.009 0.001];
alfa=0.05;
beta=0.05;
%epsilon=0.00001
```

```

x1=x0-alfa*( (M*x0')'+lambda01*e-lambda02*R);
lambda1=lambda01+beta*(e*x1'-1);
lambda2=max(lambda02+beta*(-R*x1'+0.005),0);
nb=nb+1;

    q=norm(beta*(e*x1'-1));
    p=norm(beta*(-R*x1'+0.005));
while p+p<0.001
    x0=x1;
    lambda01=lambda1;
    lambda02=lambda2;
    x1=x0-alfa*( (M*x0')'+lambda01*e-lambda02*R);
lambda1=lambda01+beta*(e*x1'-1);
lambda2=max(lambda02+beta*(-R*x1'+0.005),0);
nb=nb+1;
%x1=x0;
%LAMBDA= lambda1;
%lambda=lambda2;
q=norm(beta*(e*x1'-1));
p=norm(beta*(-R*x1'+0.005));
end
%disp('la solution est:')

x1_binaire = mat2gray(x1);
x1_norm = x1_binaire/norm(x1_binaire,1);
x2=x1_norm;
lambda1
lambda2
nb
fprintf('la solution est: %s\n' ,num2str(x2))
fprintf('la somme est: %f\n',sum(x2))
Rp=x2*R'
y=A*x2';
varRp=x2*y

```

Programme matlab pour le problème multi objective

```

clc;
clear;
%x=linspace(-1,1,20);
%y=linspace(-2,1,20);
%z=linspace(-2,3,20);
%x= repmat(x,20,1);
%y= repmat(y,20,1);
%z= repmat(z,20,1);
%F=x'*A*x;
%surf(F,'DisplayName','F');figure(gcf)
%en difinit lagrangienne
% L(x,lambda) =(1/2)*x'*A*x+lambda01(e*x'-d+lamda02);
% h(lambda)=D*x-b ;

x0=input('donner le vecteur colonne initiale de IR^10 x0=');
lambda01=input('donner le valeur initiale de IR lambda01=');
lambda02=input('donner le valeur initiale de IR+ lambda02=');

```



```

lambda03=input('donner le valeur initiale de IR+ lambda03=');
%lambda0=[1;2];
%x0=[0;0;0];
%title('l(x,lambda) = x*A*x+lambda1(D*x-1)-lambda2(R*x+0.2);')
%title('h(lambda)=e*x-1 ;')
A=[0.009231919 0.000698822 0.001271118 0.004672786 0.006152553
0.000659763 0.001207937 0.000326217 0.00085525 0.000313447
0.000698822 0.00255542 0.002003001 0.002361425 0.002124722
0.000549847 0.00097401 0.000482086 0.001036321 0.000247685
0.001271118 0.002003001 0.008062604 0.003104806 0.001891294
0.000770714 0.001780214 0.000634461 0.001083302 0.000471709
0.004672786 0.002361425 0.003104806 0.004672786 0.003005409
0.000846326 0.001785196 0.000801181 0.001148427 0.000307031
0.006152553 0.002124722 0.001891294 0.003005409 0.006152553
0.000497125 0.001140038 0.000479099 0.000262378 0.000235776
0.000659763 0.000549847 0.000770714 0.000846326 0.000497125
0.001520764 0.001085892 0.000288051 -0.000155518 0.000159477
0.001207937 0.00097401 0.001780214 0.001785196 0.001140038
0.001085892 0.004196657 0.000259134 -0.000218408 0.000291891
0.000326217 0.000482086 0.000634461 0.000801181 0.000479099
0.000288051 0.000259134 0.004042596 0.0036188 0.000195129
0.00085525 0.001036321 0.001083302 0.001148427 0.000262378 -
0.000155518 -0.000218408 0.0036188 0.01113047 0.000545922
0.000313447 0.000247685 0.000471709 0.000307031 0.000235776
0.000159477 0.000291891 0.000195129 0.000545922 0.000499907];
M=2*A;
B=inv(M);
C=[200 120 120 120 120 120 150 120 150 120];
e=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
%d=1;
R=[0.011 0.001 0.006 0.007 0.010 0.008 0.006 0.004 0.009 0.001];
alfa=0.5;
beta=0.5;
%epsilon=0.01
x1=x0-alfa*( (M*x0)'+lambda01*e-lambda02*R+lambda03*D);
lambda1=lambda01+beta*(e*x1'-1);
lambda2=max(lambda02+beta*(-R*x1'+0.005),0);
lambda3=max(lambda03+beta*(D*x1'-140),0);
nb=0;
q=norm(beta*(e*x1'-1));
p=norm(beta*(-R*x1'+0.005));
s=norm(beta*(D*x1'-140));
while p+q+s<0.001
    %fprintf('iteration N°%d\n',nb+1)
    %fprintf('*****\n')
    x0=x1;
    lambda01=lambda1;
    lambda02=lambda2;
    lambda03=lambda3;
    x1=x0-alfa*( (M*x0)'+lambda01*e-lambda02*R+lambda03*D);
lambda1=lambda01+beta*(e*x1'-1);
lambda2=max(lambda02+beta*(-R*x1'+0.005),0);
lambda3=max(lambda03+beta*(D*x1'-140),0);
nb=nb+1;

```



```

q=norm(beta*(e*x1'-1));
p=norm(beta*(-R*x1'+0.005));
s=norm(beta*(D*x1'-140));
%fprintf('*****\n')
end
%disp('la solution est:')
K=det(A)
x1_binaire = mat2gray(x1);
x1_norm = x1_binaire/norm(x1_binaire,1);
x2=x1_norm;
lambda1
lambda2
lambda3
nb
fprintf('la solution est: %s\n', num2str(x2))
fprintf('la somme est: %f\n', sum(x2))
Rp=R*x2'
VarRp=x2*A*x2'
t=C*x2'

```

## Annexe 2

Libellé	Cours des matières premières importées – Minerai de fer – Importations chinoises, port de Tianjin – Prix spot – CAF – Type 62% Fe – Prix en US dollars par tonne		Cours des matières premières importées – Aluminium Haut Grade Settlement (Londres) – Prix en US dollars par tonne		Cours des matières premières importées – Pétrole brut « Brent » (Londres) – Prix en US dollars par baril		Cours des matières premières importées – Cuivre Grade A Settlement (Londres) – Prix en US dollars par tonne		Cours des matières premières importées – Plomb Settlement (Londres) – Prix en US dollars par tonne		Cours des matières premières importées – Or (Londres) – Prix en US dollars par once		Cours des matières premières importées – Platine (New York) – Prix en US dollars par once troy		Cours des matières premières importées - Riz blanchi, 5% de brisures - FAB - Bangkok - Prix en US dollars par tonne		Cours des matières premières importées – Huile de tournesol – Exportation des États-Unis depuis le Golfe du Mexique - Prix en US dollars par tonne		Cours des matières premières importées -Bois tropicaux - Meranti rouge sombre, qualité select and better – Port du Royaume-Uni (coût et fret) - Prix en US dollars par mètre cube	
	Année	Mois																		
2016	2	46,2	1534,8	33,2	4704,5	1777	1201,4	931,9	373,3	1039,6	780,1									
2016	1	41,3	1480,1	30,8	4541	1710,5	1097,6	868,2	359,5	1020,1	785,6									
2015	12	39,6	1497,6	37,7	4701,5	1801	1069,9	887,9	354,4	1022,1	816,9									
2015	11	46,2	1465,1	44,4	4595	1629	1084	828,9	358,4	1045	828,6									
2015	10	52,7	1523,3	48,1	5135	1680	1159,9	981,6	360,5	1059,1	835,8									
2015	9	56,4	1588,2	47,2	5092,5	1655	1123,8	903,8	358,8	981,7	836,7									
2015	8	55,4	1539,6	47	5094	1675	1118,7	1007,8	375,6	980,3	850									
2015	7	51,5	1637,4	55,9	5218	1687,5	1128,1	980,9	387,7	1069,3	848,1									
2015	6	62,3	1682,9	62,4	5720	1753	1180,8	1074,8	370,6	1102,9	847,8									
2015	5	60,2	1806,2	64,6	6088	1959	1198,2	1106,7	382,4	1081,9	842,5									
2015	4	51,2	1812,3	59,4	6244,5	2124	1199,8	1141,3	392,4	1002	814,2									
2015	3	56,9	1771,9	55,8	6050	1807	1177,8	1138,6	400,7	957,3	816,6									
2015	2	62,7	1820,1	57,9	5880	1725,5	1224,9	1186	409,5	960,5	835,2									
2015	1	67,4	1808,9	48,4	5500	1843	1252,9	1237	409,7	1004,2	826,7									
2014	12	68,8	1905,7	62,2	6358	1852	1200,2	1205	410,7	1049	852,2									
2014	11	73,1	2053,3	78,4	6515	2026	1176,2	1198	419	1068,9	859,9									
2014	10	80,1	1937,7	87,3	6834,5	2014,5	1222,9	1231	432,7	1044,7	875,8									
2014	9	82,3	1991,8	97,3	6735	2082	1235,1	1297	436,5	983,1	889									
2014	8	92,6	2030,8	101,9	7001,8	2258	1295,1	1419	440,4	992,6	910,3									
2014	7	96,1	1944,8	107	7113,4	2236,5	1310,6	1455	428	1061,8	930,6									
2014	6	92,7	1833,9	111,8	6821,1	2128,5	1282,2	1481	414,7	1112,1	921,3									
2014	5	100,6	1749,5	109,2	6891,1	2084	1287,5	1448	403,6	1127,3	918,1									
2014	4	114,6	1811,6	108	6673,6	2088	1298,2	1422	409,9	1125,1	912,5									
2014	3	111,8	1703	107,9	6650	2056	1336,4	1414	434,1	1152,1	905,7									
2014	2	121,4	1693,3	108,7	7149,2	2110,1	1301	1441	447	1137	902,2									
2014	1	128,1	1727,6	107,6	7291,5	2148,5	1244,1	1372	441	1110,1	897,8									
2013	12	135,8	1735,5	110,7	7214,9	2132,7	1225	1369	447,6	1169,2	892,8									
2013	11	136,3	1748,6	107,7	7070,7	2089,8	1275,1	1359	448,8	1192,4	878,3									
2013	10	132,6	1811,7	109,4	7203	2111	1316,8	1446	453,3	1187,1	877									



2013	9	134,2	1759,8	111,6	7159,3	2088	1346	1401	470	1158,4	865,1
2013	8	137,1	1815	110,1	7186,3	2172,9	1352,7	1518	503,8	1152,4	845,1
2013	7	127,2	1767,1	107,7	6906,6	2047,9	1285,8	1436	538,3	1375,5	827,7
2013	6	114,8	1815,7	102,8	7000,2	2103,4	1342,1	1337	546,3	1470,6	844,6
2013	5	124	1829,1	103	7248,7	2027,9	1416,6	1455	552,1	1467	833,2
2013	4	137,4	1857,1	103,8	7221,2	2029,8	1484,6	1501	553,7	1439,2	834,4
2013	3	139,9	1911	109,7	7652,4	2183,1	1591,5	1569	564,5	1462	822
2013	2	154,6	2052,9	116,4	8060,9	2375,8	1627,5	1580	574,1	1512,6	842,9
2013	1	150,5	2037,5	112,1	8053,7	2339,8	1670,4	1674	573,4	1506,8	870,6
2012	12	128,9	2082,1	109,3	7966,5	2274,8	1684,4	1536	565,5	1510,9	879,9
2012	11	120,4	1942,4	109,3	7711,2	2179,1	1721,6	1598	590,7	1483	870,1
2012	10	114	1974,6	111,8	8062	2153	1744,4	1565	584,7	1483,2	873,4
2012	9	99,5	2053,1	113,4	8087,7	2168,9	1745,6	1657	590,5	1582,9	878,2
2012	8	107,8	1838,8	112,4	7510,4	1895,4	1629,9	1534	582,9	1549,9	856,7
2012	7	127,9	1873,5	102,3	7584,3	1876	1593,8	1411	578,4	1505,5	857,9
2012	6	134,6	1889,2	96,4	7428,3	1854,4	1600,7	1385	606,1	1441	862,8
2012	5	136,3	2001,9	111,5	7896,9	1998,5	1587,4	1411	612,4	1441	892,2
2012	4	147,7	2046,5	120,7	8285,5	2062,7	1649,5	1564	586	1441	896,4
2012	3	144,7	2182,3	124,5	8470,8	2061	1675,7	1634	577,1	1441	886,5
2012	2	140,4	2203,2	118,3	8441,5	2125,8	1742,9	1675	547,5	1441	885,1
2012	1	140,4	2135,6	111,5	8061,9	2093,7	1654,6	1584	541,1	1553,4	877
2011	12	136,5	2018,4	108,1	7558,9	2017	1640,3	1395	580,9	1535,6	888,4
2011	11	135,5	2072,8	110,8	7581	1981,6	1740,5	1553	609,1	1554,8	892,8
2011	10	150,4	2171,5	108,5	7394,2	1948,3	1669,9	1618	602,1	1565,2	954,2
2011	9	177,2	2295,9	110,8	8300,1	2297,9	1767,3	1517	615,6	1672,8	952,7
2011	8	177,5	2388,9	110,1	8998	2404,1	1758,5	1850	577,3	1666	973,6
2011	7	173	2511,2	116,5	9650,5	2682	1572,6	1785	546,2	1676,4	969,4
2011	6	170,9	2554,7	113,9	9066,9	2511,6	1528	1725	518,1	1700,9	973,2
2011	5	177,1	2599,6	115,1	8931,7	2419,5	1512,2	1835	500,6	1701,2	958,1
2011	4	179,3	2673,7	123,6	9482,8	2740,6	1482,9	1848	500,6	1691,8	946,2
2011	3	169,4	2551,8	114,5	9503,4	2623,3	1422,6	1780	509	1577	929,2
2011	2	187,2	2507,3	103,5	9880,9	2586,1	1374,5	1802	532,8	1591,5	927,8
2011	1	179,6	2439,3	96,4	9533,2	2600,9	1361,6	1780	528,4	1529	907,8
2010	12	168,5	2354	91,8	9152,9	2411,9	1393,3	1754	536,8	1466,3	897
2010	11	160,6	2332,2	85,3	8458,4	2376,1	1370,3	1660	543,1	1395,8	901,5
2010	10	148,5	2345,6	82,7	8289,8	2379	1343,2	1705	533,1	1304,1	880,2
2010	9	140,6	2161,6	77,8	7729,6	2183,7	1272	1662	520	1195,2	876
2010	8	145,3	2113,8	77	7302,7	2074,8	1217,4	1525	486,9	1140,1	892,2
2010	7	126,4	1987,3	75,4	6750,6	1836,4	1192,5	1562	470,7	1094,8	871,2
2010	6	143,6	1930,7	74,7	6501,5	1703,4	1234,7	1532	458,6	1090,3	841,1
2010	5	161,4	2046,4	75,7	6843,2	1882,2	1204,4	1560	472,5	1102,5	836,5
2010	4	172,5	2317,3	84,8	7729,9	2264,5	1150,3	1742	502,2	1132,8	820,2
2010	3	139,8	2204,8	78,8	7467	2171,7	1114,4	1648	540,1	1105,2	790,1
2010	2	127,6	2048,2	73,6	6867,7	2122,5	1097,8	1538	584,8	1091,4	781
2010	1	125,9	2233,2	76,2	7367,4	2367,7	1116,4	1517	598	1113,6	792,4
2009	12	105,3	2181,1	74,5	6977	2327,7	1127,9	1475	606	1132,9	796
2009	11	99,3	1948,6	76,7	6682,4	2308,2	1129,2	1452	566,3	1070,4	821,1



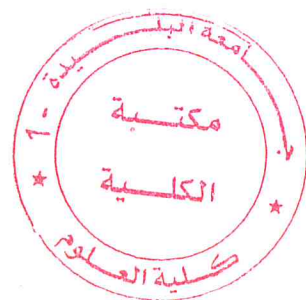
2009	10	86,8	1877,8	72,8	6306	2240	1044,3	1325	566,3	1005,2	805,1
2009	9	80,7	1833,1	67,5	6195,8	2203,8	998,5	1290	593,7	1021,4	784,3
2009	8	97,7	1930,5	72,6	6176,9	1899,3	949,7	1243	576,3	1078,9	769,7
2009	7	84	1667,1	64,8	5240,8	1678,1	935,5	1188	623	1021,9	760,3
2009	6	71,7	1572,9	68,5	5013,3	1673,6	946,4	1187	548,6	1115,6	817,9
2009	5	62,7	1458,1	57,4	4594,9	1439,6	931,5	1177	540,8	1043,8	855,4
2009	4	59,8	1422,9	50,2	4436,9	1382,1	892,2	1100	577,3	929,1	815,7
2009	3	64,1	1335,2	46,6	3770,9	1238,3	925,7	1122	625,3	831,4	815,9
2009	2	75,6	1329,4	43,2	3328,4	1099,6	942,3	1061	634	1038,1	806,7
2009	1	72,5	1414,3	43,9	3260,4	1131,6	862,1	986	615,3	1211,4	818,5
2008	12	70	1490,1	40,3	3105,1	961,9	823,8	912	550,8	1357	845,8
2008	11	60,8	1851,7	52,6	3729,2	1290,2	758	872	563,3	1624,4	872,3
2008	10	60,8	2120,2	71,6	4894,9	1478,9	802,1	823	624	1724,4	861,7
2008	9	60,8	2525,1	98,5	6975,1	1867,7	829,7	1010	722	1948,8	888,8
2008	8	60,8	2762,9	113,3	7633,8	1931,9	836	1485	737	2060,2	879,4
2008	7	60,8	3070,1	133,4	8407	1944,2	940,5	1763	799	2267,7	932,8
2008	6	60,8	2957,1	132,6	8292	1862,3	890,1	2069	834,6	2300,2	932,9
2008	5	60,8	2900	123,2	8356,1	2234,1	890,8	2013	1009,3	2214,6	933,6
2008	4	60,8	2958,4	109,5	8714,2	2821,7	909,9	1934	1015,2	2177,4	941
2008	3	60,8	2981,2	103,5	8434,3	3007,3	962	2044	672,6	1303,1	912,5
2008	2	60,8	2776	95,2	7941,1	3078,8	924,3	2155	481,1	673	855,8
2008	1	60,8	2440,5	92,1	7078,9	2606,9	889,8	1734	393,5	673	812,6
2007	12	36,6	2378,4	91,2	6630,7	2595,3	808,5	1528	378	673	788,3
2007	11	36,6	2505,7	92,5	6957,4	3327	806,7	1443	356,5	673	806,3
2007	10	36,6	2441,4	82,9	8020,6	3718,5	756,3	1443	335,3	673	813
2007	9	36,6	2390,1	77	7671,4	3225	714,7	1384	330	673	819,6
2007	8	36,6	2511,4	70,8	7500,2	3118,1	665,3	1270	331,5	673	816,7
2007	7	36,6	2732	76,8	7980,9	3082,8	666,5	1295	332,6	673	826,4
2007	6	36,6	2676,4	71	7514,2	2425,2	655,1	1276	326,3	673	807,1
2007	5	36,6	2792,3	67,2	7678	2099,7	668,4	1277	320,6	673	806,2
2007	4	36,6	2813,3	67,6	7753,3	1999,8	679,9	1292	322,3	673	808,8
2007	3	36,6	2760,2	62	6465,3	1913,1	655	1248	326,2	673	791,5
2007	2	36,6	2831	57,6	5718,2	1778,6	666,5	1243	316,1	673	795,4
2007	1	36,6	2804,2	53,6	5689,3	1665,3	631,7	1172	313,5	673	796,4
2006	12	33,5	2813,6	62,2	6681	1724,4	627,9	1120	309,3	673	798,2
2006	11	33,5	2701,2	58,7	7029,3	1624,1	629,3	1176	300,6	673	777
2006	10	33,5	2653	57,8	7497,4	1530,6	586,1	1076	309,6	673	762,1
2006	9	33,5	2471,8	62	7622,6	1341,5	599,5	1145	312,9	673	766,7
2006	8	33,5	2458,8	73,3	7690,3	1173,4	630,3	1248	313,4	673	769,3
2006	7	33,5	2511,6	73,6	7726,7	1051,7	633,7	1231	312,4	673	749,6
2006	6	33,5	2476,7	68,7	7222,8	963,3	595,7	1232	305,6	673	749,3
2006	5	33,5	2850,3	69,8	8059,2	1166,2	674	1285	301,3	673	759,9
2006	4	33,5	2615,6	70,3	6404,4	1169,9	611,6	1149	298,5	673,3	720,3
2006	3	33,5	2428,4	62,1	5123,7	1191,7	559,2	1076	297,7	693,9	713,3
2006	2	33,5	2454,5	60,1	4975	1276,2	555,3	1051	296,4	715,3	713,3
2006	1	33,5	2372,8	63	4743,9	1255,7	550,5	1072	284,5	1090,9	713,3
2005	12	28,1	2247,6	56,9	4577	1123,5	509,4	965	277,3	1152	685,3



2005	11	28,1	2049,7	55,2	4278,2	1017,9	477,9	979	279	1152	685,3
2005	10	28,1	1927,9	58,6	4056,2	1004,2	470,2	938	290,7	1152	671,3
2005	9	28,1	1839,1	62,9	3850,7	932,3	457,4	929	287,4	1152	671,3
2005	8	28,1	1867,2	64,1	3791,9	886,5	437,8	888	283,5	1152	664,3
2005	7	28,1	1778	57,5	3608,5	854,1	424,7	898	278,7	1152	657,3
2005	6	28,1	1730,7	54,3	3529,7	985,7	431,8	884	287,1	1152	657,3
2005	5	28,1	1745,6	48,7	3241,9	987,7	422,7	863	295,3	1160,9	657,3
2005	4	28,1	1893,5	51,9	3389,8	985,3	429,8	867	299,1	1161,3	643,4
2005	3	28,1	1979,4	52,9	3378,9	1005,2	434,6	864	295	1164,6	646,9
2005	2	28,1	1881,9	45,4	3247,1	977	424,3	864	292,4	1095,1	636,4
2005	1	28,1	1839,6	44,5	3168,1	952,4	424,4	869	288,4	1088,7	636,4
2004	12	16,4	1854,5	39,8	3139,8	974,4	442,6	861	278,4	893,2	608,4
2004	11	16,4	1813,5	42,9	3130,3	967,3	440	867	262,3	824,1	608,4
2004	10	16,4	1818,8	49,7	3009,4	931,9	421,1	835	253,5	752	601,4
2004	9	16,4	1723,2	43,3	2903,2	934,9	406,3	854	252	766,1	594,4
2004	8	16,4	1691,8	43,2	2844,2	920,8	401,9	864	252,6	727,2	594,4
2004	7	16,4	1708,9	38,3	2816,8	938,9	398,6	818	240,3	689	594,4
2004	6	16,4	1677,4	35,1	2689,1	869,7	392	793	244,2	583,8	590,9
2004	5	16,4	1626,1	37,8	2728,5	808,4	384,4	832	251,6	638,6	587,4
2004	4	16,4	1728,8	33,2	2927	753,2	404,7	798	253,4	706,9	552,5
2004	3	16,4	1655,6	33,6	3000,3	886	407,7	917	240,4	756	552,5
2004	2	16,4	1685,3	30,8	2751,7	888	404,3	877	213,3	755,5	552,5
2004	1	16,4	1605,5	31,1	2421,5	758	414,7	837	207,5	720,5	538,5
2003	12	13,8	1556,3	29,8	2202	691,7	409,1	813	197	711,7	538,5
2003	11	13,8	1508	28,6	2053,3	621,7	390,6	765	201,8	708,8	545,5
2003	10	13,8	1473,9	29,6	1925,6	586,8	378,9	753	204	705,2	545,5
2003	9	13,8	1415,3	27	1789,7	520,9	379,3	710	202,9	617,5	545,5
2003	8	13,8	1456,1	29,8	1756,7	495,9	360,6	707	196,4	552,2	559,4
2003	7	13,8	1435,7	28,4	1712,8	514,4	351,3	684	199,5	577,5	552,5
2003	6	13,8	1409,5	27,5	1685,1	467,7	356,5	667	203,7	634,1	552,5
2003	5	13,8	1396,4	25,7	1651,1	463,1	356,7	642	197,7	678,3	554,8
2003	4	13,8	1333,6	24,8	1587,9	437	329,2	603	195,2	667,6	550,1
2003	3	13,8	1389	30,4	1655,7	456,4	340,1	642	197	647	549,1
2003	2	13,8	1421,9	32,7	1682,2	475,4	358,2	681	198,8	640,6	549,8
2003	1	13,8	1376,5	31,2	1650,3	444,3	357,9	667	199,7	659,4	552,5
2002	12	12,7	1374,4	28,4	1593	443,2	335,5	598	185,3	730	565,2
2002	11	12,7	1371,9	24,2	1581	441,8	319,1	592	187,2	732,4	564,4
2002	10	12,7	1310,3	27,5	1486,2	417,8	316,3	579	185,5	635,4	565,2
2002	9	12,7	1301	28,3	1478,9	420,9	319,6	563	188,5	631,6	564,8
2002	8	12,7	1291,3	26,7	1482,9	422,9	310,2	564	191,3	639,8	532,7
2002	7	12,7	1337,8	25,7	1588,3	445,7	313,3	529	199,6	596,2	507,5
2002	6	12,7	1355,4	24,2	1650,6	439,7	321,2	545	202	556,9	500
2002	5	12,7	1343,3	25,4	1597	451,5	315,1	548	198,3	525	484,7
2002	4	12,7	1370,4	25,7	1588,6	472	303,5	536	189,5	545,7	485,1
2002	3	12,7	1403,7	23,8	1607,4	479,8	295	516	189,3	546,5	482,2
2002	2	12,7	1369	20,1	1561,4	479,6	296,4	493	194,4	563,1	482,5
2002	1	12,7	1366,7	19,4	1508,2	512,6	281,9	456	191,1	567,4	471



2001	12	13	1342,5	18,7	1472,9	482,8	276,4	480	179,4	627,6	468,9
2001	11	13	1327,1	18,9	1434,3	486,1	276,1	443	170	576,3	466
2001	10	13	1282,1	20,7	1377,4	467,6	283,3	423	170,9	440,5	484,7
2001	9	13	1344,2	25,6	1427,7	464,4	283,3	429	173	430,2	489,5
2001	8	13	1377,7	25,7	1466,4	482,6	273	446	168,7	465,2	475,5
2001	7	13	1416	24,6	1526,8	461,2	267,9	476	169,7	453,1	481,1
2001	6	13	1465,7	27,7	1610,5	443,8	270,8	558	167,8	412,6	476,7
2001	5	13	1539,5	28,3	1684,9	466,3	272,7	607	164,3	379,7	500
2001	4	13	1495	25,6	1666	477,1	261,1	594	162,1	372,3	500
2001	3	13	1508,8	24,5	1742,2	498	262,8	563	177,1	379,9	500
2001	2	13	1603,8	27,5	1766,1	501,5	261,7	610	185,1	349,1	501,8
2001	1	13	1612,6	25,6	1787,1	477,9	266,3	604	184,4	346,9	517,5
2000	12	12,5	1564,3	25,4	1852,4	462	271,8	619	183,6	356,1	524,5
2000	11	12,5	1473,5	32,4	1795,6	467,7	266,6	605	184,9	332,6	526,4
2000	10	12,5	1499,8	31	1894,4	485,7	269,9	584	186,7	338,9	538,5
2000	9	12,5	1600,8	33	1961,9	486,7	274,3	569	178,1	354,9	545
2000	8	12,5	1527	29,8	1857,1	472,7	274,6	588	187,1	352,7	604,9
2000	7	12,5	1563,1	28,5	1803,1	451,7	282,3	582	191	353,9	628,2
2000	6	12,5	1505,9	29,6	1752,1	419,2	286,1	558	197,9	373,2	629,4
2000	5	12,5	1465,7	27,7	1785,1	411,8	275,6	551	198,8	412,9	633,9
2000	4	12,5	1453,8	22,7	1681,9	420,8	279,9	525	217	436	636,4
2000	3	12,5	1576,7	27,2	1739,8	440,9	286,9	482	228,8	406,9	636,4
2000	2	12,5	1669,9	27,8	1807	452	300,5	490	243	405,5	643,4
2000	1	12,5	1677,5	25,5	1843,9	471,7	285,7	484	247,5	428,5	643,4



## Bibliographie

- [1] Collecte, P. SIARRY Optimisation Multiobjectif ,Edition EYROLLES,2002 .
- [2] CHARREUAX.G Gestion Financière, Edition 1998 .
- [3] Monsieur MANSEUR.S Cours D'optimisation USDB [2015-2016]
- [4] JACOUILAT. B , SOLNIK. B « Marchés financiers :gestion de portefeuille et des risques » 4éme édition dunod 2002.
- [5] Gestion de Portefeuille, support de Cours DIONGUE.A UFR SAT Université Gaston Berger de Saint-Louis Sénégal.
- [7] MEUNIER .C Optimisation Multiobjectif de l'allocation stratégique .Mémoire pour l'obtention du diplôme d'actuaire. Université de Lyon 2014.
- [8] SIMON. Y Encyclopédie de gestion, Edition Gestion, 2001.
- [9] VIVIANI G. Gestion de portefeuille, Edition Dunod, 1990 .

