

**UNIVERSITÉ DE BLIDA 1**  
**Faculté des Sciences**  
Département de Mathématiques

**THÈSE DE DOCTORAT**

**SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA DOMINATION**  
**DANS LES GRAPHES**

Par

**Karima ATTALAH**

devant le jury composé de :

N. OUKID	Maître de conférences A, USD Blida 1	Présidente
M. CHELLALI	Professeur, USD Blida 1	Directeur de thèse
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. BLIDIA	Professeur, USD Blida 1	Examineur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examinatrice
N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de conférences A, U. Média	Examineur

Février 2020

## RESUME

L'objet principal de cette thèse est l'étude de la  $k$ -domination dans les graphes ainsi que l'effet de la contraction d'une arête quelconque sur le nombre de 2-domination d'un graphe.

Etant donné un graphe connexe non trivial  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  et soit  $k$  un entier, un sous ensemble  $D \subseteq V$  est un  $k$ -dominant de  $G$  si tout sommet de  $V(G) - D$  est adjacent à au moins  $k$  sommets de  $D$ . Si de plus le sous graphe induit par  $D$  est connexe nous parlerons d'un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$ . Le nombre de  $k$ -domination (connexe)  $\gamma_k(G)$  ( resp.  $\gamma_k^c(G)$ ) est le cardinal minimum d'un ensemble  $k$ -dominant (connexe) de  $G$ .

Dans cette thèse, nous nous concentrons en premier lieu sur la caractérisation des graphes vérifiant des égalités qui existent dans la littérature sous forme de problèmes ouverts. Nous donnons quelques propriétés des graphes connexes  $G$  d'ordre  $n$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Ensuite, nous fournissons une caractérisation complète des graphes connexes cubiques  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  et des graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . D'autre part, nous traitons le problème de la caractérisation des graphes connexes  $G$  vérifiant  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  ou  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  pour certaines classes de graphes: les graphes pour lesquels  $\delta(G) = 1$ , ou qui sont de maille d'au moins 5, les graphes sans griffes et les graphes sans triangles maximaux.

En second lieu, nous nous intéressons à l'effet de la contraction d'une arête (identification de deux sommets adjacents) sur le nombre de 2-domination. Nous donnons en particulier une caractérisation constructive des arbres dont le nombre de 2-domination diminue ( resp. ne change pas) par l'effet de la contraction d'une arête quelconque de l'arbre.

## ABSTRACT

The main object of this thesis is the study of  $k$ -domination in graphs and the effect of the contraction of any arbitrary edge on the number of 2-domination of a graph.

Given a nontrivial connected graph  $G = (V, E)$  of order  $n$  and  $k$  an integer, a subset  $D \subseteq V(G)$  is a  $k$ -dominating set of  $G$  if every vertex of  $V(G) - D$  is adjacent to at least  $k$  vertices of  $D$ . Moreover, if the subgraph induced by  $D$  is connected we shall speak of the connected  $k$ -dominating set of  $G$ . The  $k$ -domination (resp. the connected  $k$ -domination) number  $\gamma_k(G)$  (resp.  $\gamma_k^c(G)$ ) is the minimum cardinality among the  $k$ -dominating (resp. connected  $k$ -dominating) sets of  $G$ .

Firstly, in this thesis, we focus on the characterization of graphs verifying equalities that exist in the literature in the form of open problems. we give some properties of connected graphs  $G$  with  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Then we provide a complete characterization of connected cubic graphs  $G$  such that  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  and connected 4-regular claw-free graphs with  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . On the other hand, we treat the problem of characterization of connected graphs  $G$  such that  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  or  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  for some classes of connected graphs  $G$ : graphs for which  $\delta(G) = 1$ , or which are of girth at least 5, claw-free graphs or maximal triangle graphs.

Secondly. We consider the effect of dotting any edge (identification of two adjacent vertices) on the 2-domination number. In particular, we give a constructive characterization of the trees whose number of 2-domination decreases (or does not change) by the effect of dotting of any edge of the tree.

## ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو دراسة  $k$ -الهيمنة للبيانات بالإضافة إلى التأثير الناتج عن تقليص أي ضلع من البيان على العدد 2-الهيمنة للبيان.

ليكن  $G = (V, E)$  بيانا بسيطا رتبته  $n$  حيث  $V$  مجموعة الرؤوس و  $E$  مجموعة الأضلاع. من أجل العدد الطبيعي  $k \geq 1$ . نقول عن مجموعة جزئية  $D$  من  $V$  أنها  $k$ -مهيمنة في  $G$  إذا كان لكل رأس من  $D-V$  على الأقل  $k$  جارا من  $D$ . إذا كان بالإضافة، البيان الفرعي الناتج عن  $D$  متصل فنقول عن المجموعة  $D$  أنها  $k$ -مهيمنة متصلة في  $G$ . نرسم  $\gamma_k(G)$  للأصلي الأدنى لمجموعة  $k$ -مهيمنة (متصلة).

في هذه الأطروحة، نهتم أولا بتوصيف البيانات  $G$  التي تحقق مساواة موجودة من قبل على شكل مشاكل مفتوحة. نعطي بعض خصائص البيانات المتصلة ذات الرتبة  $n$  والتي تحقق العلاقة  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . نقدم بعد ذلك توصيفا كاملا للبيانات المكعبة المتصلة حيث  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  و البيانات 4-منتظمة عديمة المخالب التي من أجلها  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . من ناحية أخرى، نتعامل أيضا مع مشكلة توصيف البيانات  $G$  التي تحقق المساواة  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  أو  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  من أجل بعض أقسام البيانات، نذكر منها: البيانات التي من أجلها  $\delta(G) = 1$  أو ذات عقدة على الأقل 5 وكذلك البيانات عديمة المخالب والبيانات الحديدية التي لا تحتوي على مثلثات.

ثانيا، نتعرض أيضا إلى دراسة آثار تقليص أي ضلع على الأصلي الأدنى 2-هيمنة في البيان. نعطي على وجه الخصوص توصيف بناء للأشجار التي من أجلها العدد 2-هيمنة ينقص (او لا يتغير) تحت تأثير تقليص أي ضلع في الشجرة.

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes. Je souhaite ici les en remercier.

En premier lieu, je tiens à exprimer mes sincères remerciements, mes gratitudes, et ma profonde reconnaissance à Monsieur **Mustapha Chellali** mon directeur de thèse, Professeur en Mathématiques à l'université de Blida 1. Ses précieux conseils, sa patience et l'intérêt qu'il a porté à mes travaux ont mené à l'aboutissement de mes recherches.

Je remercie Madame **Nadia Oukid** qui me fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également les professeurs **Abdelhafid Berrachedi**, **Mostafa Blidia**, **Isma Bouchemakh** et **Noureddine Ikhlef Eschouf** qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis sans doute de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je souhaite également témoigner toute ma reconnaissance à **Razika Boutrig**.

Je voudrais remercier chaleureusement mes parents qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles et je leurs exprime la reconnaissance, le respect et le merci d'être mes parents.

Mes remerciements s'étendent également à celui que je ne peux pas oublier, celui qui partage ma vie : **Rachid Tiberkak**. Merci d'avoir respecté mon choix de faire cette thèse et de m'avoir soutenu, merci surtout d'avoir été présent et compréhensif pendant les moments difficiles de cette thèse.

Et enfin, j'adresse toute mon affection à mes filles, ma famille et mes amis qui par leurs soutiens et leurs encouragements, j'ai pu réaliser ce travail.

# TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION.....	8
CHAPITRE 1. GÉNÉRALITES SUR LES GRAPHS .....	13
1.1 Notions de base et notation .....	13
1.1.1 Définitions préliminaires.....	13
1.2 Quelques graphes particuliers.....	15
1.2.1 Quelques opérations sur les graphes.....	19
1.3 Quelques propriétés sur les graphes .....	22
1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes.....	25
1.4.1 Quelques paramètres de domination.....	27
1.5 Problèmes de modification des graphes.....	30
CHAPITRE 2. ETAT DE L'ART SUR LA DOMINATION MULTIPLE ET LES GRAPHES MODIFIES .....	33
2.1 La domination et la domination multiple dans les graphes.....	33
2.1.1 Le nombre de domination usuelle $\gamma(G)$ .....	33
2.1.2 Le nombre de la $k$ -domination $\gamma_k(G)$ .....	35
2.1.2.1 Définitions et propriétés préliminaires .....	35
2.1.2.2 Borne sur la $k$ -domination .....	37
2.1.2.3 Comparaisons entre $\gamma(G)$ et $\gamma_k(G)$ .....	38
2.2 La domination multiple connexe .....	42
2.2.1 Borne sur la $k$ -domination connexe .....	42
2.2.2 Comparaison entre les nombres $\gamma_k^c(G)$ et $\gamma_c(G)$ .....	43

2.3 Notion de graphes modifiés.....	47
<b>CHAPITRE 3. SUR LA <math>\kappa</math>-DOMINATION CONNEXE DANS LES GRAPHEs.....</b>	<b>53</b>
3.1 Propriétés des graphes connexes $G$ avec $\gamma_{\kappa}^c(G) = n - 2$ .....	54
3.1.1 Graphes connexes cubiques tels que $\gamma_2^c(G) = n - 2$ .....	58
3.1.2 Graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que $\gamma_3^c(G) = n - 2$ .....	61
3.2 Propriétés des graphes connexes tels que $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .....	65
3.2.1 Quelques familles de graphes $G$ tels que $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .....	69
3.3 Propriétés des graphes connexes tels que $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ .....	73
3.3.1 Quelques familles de graphes $G$ tels que $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ .....	74
<b>CHAPITRE 4. GRAPHEs 2-DOMINATION POINT-STABLES ET POINT- CRITIQUES .....</b>	<b>78</b>
4.1 Quelques résultats préliminaires.....	79
4.2 Graphes $\gamma_2$ -point stables.....	80
4.3 Arbres $\gamma_2$ -point stables .....	82
4.4 Arbres $\gamma_2$ -point critiques .....	91
<b>CONCLUSUON ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>98</b>
<b>RÉFÉRENCES.....</b>	<b>100</b>

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure1	Le problème de la ville de Königsberg.....	9
Figure 1.1	Un graphe $G$ d'ordre 9 et de taille 10.....	14
Figure 1.2	Exemple sur la subdivision d'une étoile $K_{1,3}$ et d'une étoile double $S_{3,3}$ .....	18
Figure 1.3	Exemple d'un graphe $C_4$ -cactus.....	18
Figure 1.4	Exemple d'un graphe biparti et d'un graphe scindé.....	19
Figure 1.5	Le cycle $C_6$ et son complémentaire .....	19
Figure 1.6	Le produit cartésien $C_4 \times C_3$ .....	20
Figure 1.7	Le joint $C_3 + C_3$ .....	20
Figure 1.8	Les couronnes $C_5 \circ K_2$ et $C_5 \circ K_1$ .....	21
Figure 1.9	Exemple sur quelques opérations appliquées au graphe $G$ .....	22
Figure 1.10	Exemple sur des ensembles dominants.....	23
Figure 2.1	Exemple de graphes de la famille $\mathcal{H}$ .....	41
Figure 2.2	Graphe $J$ .....	42
Figure 3.1	Le graphe $G'$ .....	74
Figure 3.2	Le graphe $G''$ .....	75
Figure 4.1	Opération $F_1$ .....	84
Figure 4.2	Opération $F_2$ .....	84
Figure 4.3	Opération $F_3$ .....	85
Figure 4.4	Opération $\mathcal{T}_1$ .....	92
Figure 4.5	Opération $\mathcal{T}_2$ .....	93
Figure 4.6	Opération $\mathcal{T}_3$ .....	93
Figure 4.7	Exemples d'arbres appartenant à $\mathcal{T}$ .....	93



# INTRODUCTION

Un mathématicien confronté à un problème de la vie réelle est amené à modéliser celui-ci en un problème mathématique. Ainsi, les graphes s'avèrent être fort utiles pour illustrer les différentes relations liant les objets d'un problème donné. La théorie des graphes est la discipline mathématique et informatique qui étudie les graphes, lesquels sont des modèles abstraits de dessins de réseaux constitués par des « *points* », appelés *sommets* et des « *liens* » entre ces points, appelés *arêtes*. Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes.

La théorie des graphes est si vaste qu'une telle introduction ne peut parcourir tous ses résultats et toutes ses applications. Elle s'est développée dans diverses disciplines telles que l'informatique (topologie des réseaux, complexité algorithmique), la chimie (isomères), la physique quantique, la biologie, les sciences sociales (réseaux de transports), gestion de projets. Elle a connu un grand regain d'intérêt suite à l'émergence des réseaux sociaux Internet dont les connexions entre "amis" et "suiveurs" peuvent être modélisées par des graphes.

Le suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) est le mathématicien à qui on doit la naissance de tous premiers fondements de la théorie des graphes. Comme l'indique sa période de vie, l'émergence de la théorie des graphes se situe au dix-huitième siècle avec un article datant de 1736 [1] et qui est considéré comme le premier papier scientifique dans le domaine. Lors d'une promenade dans la ville de Königsberg (maintenant Kaliningrad) où les différentes parties de la ville sont reliées par sept ponts, comme indiqué sur la Figure 1, Euler posa le célèbre problème qu'il s'agissait de parcourir les sept ponts sur la rivière Pregel une et seule fois chacun, et qui l'a résolu en 1741 [2].

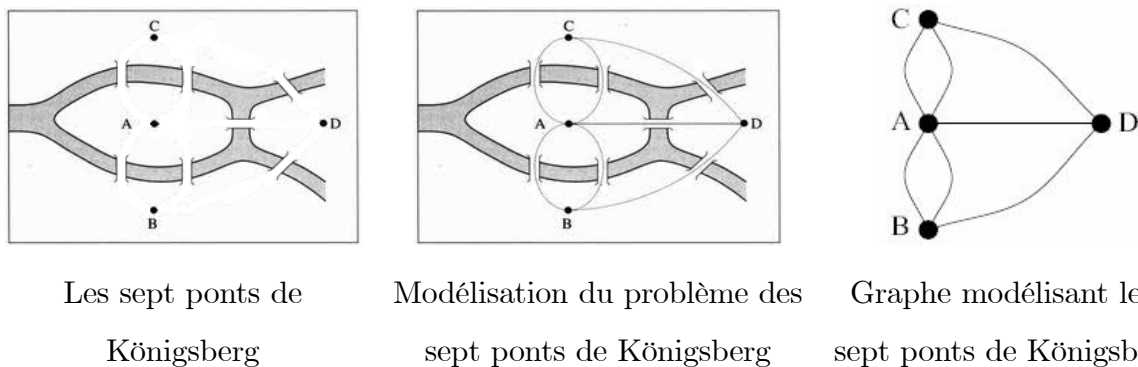


Figure 1. Le problème de la ville de Königsberg

Un autre chercheur à qui la théorie des graphes semble aussi être due est Monge en 1781 à propos d'un problème de déplacement de terre de déblai et de remblai. En 1813 et 1861, Cauchy et L'Huilier, respectivement, ont donné naissance à la topologie [3, 4] quand ils ont généralisé une formule découverte par Euler [5] (équation liant le nombre d'arêtes d'un graphe à son nombre de sommets et de facettes). Nous remarquons ensuite les contributions de Kirkman et Hamilton en 1856 au sujet des parcours désormais appelés chemins hamiltoniens. En 1878, Sylvester a introduit le mot "*graphe*" pour mettre en évidence une analogie entre des structures algébriques et chimiques. Un siècle plus tard, une bonne partie de la terminologie utilisée actuellement en théorie des graphes a été fondée par Cayley en fusionnant des idées mathématiques et des résultats en chimie théorique obtenus par Pólya entre 1935 et 1937 et généralisés par De Bruijn en 1959. D'autres problèmes ont aussi l'opportunité d'être modélisé par la théorie des graphes tels que celui de la marche du cavalier sur l'échiquier posé par le poète indien Rudrata [6], étudié et résolu par le joueur et théoricien d'échecs arabe al-Adli ar-Rumi en 840 [7] ainsi que le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

La domination figure parmi les concepts les plus florissants de la théorie des graphes avec plus de 6000 articles publiés. Sa popularité est due à la diversité d'axes de recherche qu'elle couvre avec un grand nombre de problèmes ouverts. Le début de la théorie de la domination à été marqué par les problèmes des jeux d'échecs. Grâce à Claude Berge [8] elle est devenue un domaine théorique en 1958. Les premiers indices qui ont dévoilé l'importance de la domination étaient l'article de Cockayne et Hedetniemi [9] publié en

1977. L'intéressement majeur à cette théorie est dû à sa richesse dans de nombreuses applications (réseaux de communications, de micro-processeurs, les problèmes de localisation, etc.) et aussi à ses multiples problèmes ouverts.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le nombre de domination d'un graphe est la taille minimale d'un ensemble dominant. Beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination des propriétés supplémentaires dans le graphe considéré. En imposant, par exemple, que tout sommet d'un graphe soit dominé par au moins  $k$  sommets de l'ensemble dominant, nous avons la *domination multiple* ou la *k-domination* qui est l'objet d'étude dans cette thèse. La domination multiple a été introduite par Fink et Jacobson [10, 11] en 1985, lors d'une conférence à Kalamazoo (l'État du Michigan, aux États-Unis).

Vu la difficulté de la détermination de ces paramètres de domination, il est commode d'établir des bornes supérieures et inférieures simples à vérifier pour ces paramètres, chercher des inégalités entre ces paramètres puis caractériser les graphes pour lesquels l'égalité est atteinte dans les inégalités et les bornes établies.

Un paramètre de domination donné peut être vu augmenter, diminuer ou rester inchangé lorsqu'un graphe a subi une modification quelconque comme la suppression d'un sommet, l'ajout, la suppression ou la contraction d'une arête. Si le paramètre de domination en question change lors d'une modification quelconque, alors le graphe est dit critique, et dans le cas contraire, ce graphe est dit stable. Les concepts de criticité et de stabilité ont été étudiés en premier lieu pour des paramètres comme la connectivité et le nombre chromatique et se sont révélés très utiles pour une compréhension plus profonde de ces paramètres, pour être étudiés ensuite pour les paramètres de domination.

Pour le nombre de domination, Walikar et Acharya [12] ont été les premiers à étudier les graphes critiques par rapport aux arêtes supprimées, suivi par un travail de Sumner et Blich [13] portant sur les graphes critiques pour n'importe quelle arête ajoutée. Depuis, de nombreuses recherches dans ce sens ont été menées pour différents paramètres

de domination.

Dans la présente thèse, nous nous intéressons à la caractérisation de quelques graphes vérifiant des égalités sur la  $k$ -domination existant déjà sous forme de problèmes ouverts. Nous tenons aussi à étudier les graphes critiques et stables par rapport à la 2-domination suite à la contraction d'une arête quelconque. Dans la suite, nous donnons une brève présentation du contenu des différents chapitres de cette thèse.

Le premier chapitre, consacré aux généralités, comporte deux sections. Nous introduisons dans la première les éléments de base de la théorie des graphes qui sont utilisés dans cette thèse. Ensuite, nous faisons une présentation de la domination dans les graphes. En effet, après un aperçu historique, nous explicitons l'intérêt important que présente la domination en mettant en évidence ses différents paramètres. En dernier, nous exposons les différents aspects pratiques et théoriques qui font de la domination un domaine de recherche si intéressant. Dans la deuxième section, Nous donnons les différentes définitions liées aux notions de criticité et de stabilité pour un paramètre de domination quelconque, ainsi qu'un bref historique sur l'étude de ces deux notions pour le nombre de domination et d'autres paramètres.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons d'abord un état de l'art sur la domination multiple en rappelant les principaux résultats existants, puis celui sur les graphes modifiés, en faisant le tour de ce qui a précédé nos contributions dans le domaine de la criticité et de la stabilité par rapport à la domination et ses paramètres.

Notre contribution est présentée dans les deux derniers chapitres. Le troisième chapitre est consacré à la caractérisation des graphes vérifiant des égalités proposées par Volkmann dans [14]. Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première, nous commençons par donner quelques propriétés des graphes connexes  $G$  d'ordre  $n$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Ensuite, une caractérisation complète des graphes connexes cubiques  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  et les graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que  $\gamma_3^c(G) = n - 2$  est fournie. Le problème de la caractérisation des graphes connexes vérifiant  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  fait l'objet du deuxième section, où nous donnons quelques propriétés. Par ailleurs, nous

caractérisons les graphes pour lesquels  $\delta(G) = 1$ , ou qui sont de maille d'au moins 5, ainsi que les graphes sans griffes. Dans la troisième section, nous fournissons quelques propriétés pour les graphes connexes  $G$  vérifiant  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  accompagnées d'une caractérisation de ceux tels que  $\delta(G) = 1$  ou qui sont des graphes sans triangles maximaux.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de 2-domination d'un graphe, en particulier lorsque ce nombre change ou reste inchangé. Trois sections rassemblent les résultats de ce chapitre. Dans la première, quelques propriétés des graphes 2-domination point-stables sont exposées. Dans la deuxième section nous fournissons une caractérisation de tous les arbres 2-domination point-stables. L'objectif de la troisième section est la caractérisation de tous les arbres 2-domination point-critiques.

Pour terminer, cette thèse sera achevée par une conclusion générale qui portera sur l'ensemble du travail accompli et sur les perspectives dans ce domaine.

## CHAPITRE 1

# GENERALITES SUR LES GRAPHS

Dans ce premier chapitre nous introduisons le contexte de notre travail à savoir la théorie des graphes et la domination. Nous y présentons les concepts de base. Dans la première section nous rappelons les définitions fondamentales de la théorie des graphes. D'autres notions seront introduites au fur et à mesure selon leurs nécessités dans les prochains chapitres. Ensuite nous donnons un aperçu sur la domination dans les graphes. La deuxième section sera consacrée aux graphes modifiés par une opération élémentaire (suppression ou ajout d'arête, contraction,...) ainsi que l'effet de ces modifications sur un paramètre de domination donné.

## 1.1 Notions de base et notations

### 1.1.1 Définitions préliminaires

Commençons déjà par définir ce qu'est un graphe. Un graphe  $G$  est défini par un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble de *sommets* et  $E$  est un ensemble de paires (non ordonnées) d'éléments de  $V$ , appelé ensemble des *arêtes*  $E(G)$ . Les cardinaux de  $V$  et de  $E$  désignent respectivement l'*ordre*,  $n = n(G)$  et la *taille*,  $m = m(G)$  de  $G$ . Un graphe est *fini* ou *infini* suivant son ordre. Un graphe est dit *trivial* si  $n = 1$  et  $m = 0$ .

Une *arête*  $e \in E$  est une paire de sommets  $(u, v)$  notée par  $e = uv$  ou bien  $e = vu$ , où  $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$ . Une *boucle* est une arête de la forme  $e = uu$ . Si une arête aït pour extrémités les mêmes sommets qu'une autre arête, dans ce cas, on parle d'*arêtes parallèles*. Un ensemble d'arêtes parallèles relatif à une paire de sommets forme une *arête multiple*. Un graphe sans boucles et sans arêtes multiples est dit *simple*. Dans cette thèse, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  sont dits *adjacents* ou *voisins* si  $uv \in E$ . L'ensemble des voisins de  $v$ , qu'on note  $N_G(v)$  est appelé *voisinage ouvert* de  $v$  dans  $G$  tandis que  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$  est le *voisinage fermé* de  $v$ . Pour un sous-ensemble  $S \subseteq V$ , le voisinage ouvert de  $S$  est  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$  et le voisinage fermé de  $S$  est  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ .

On dit qu'une arête et un sommet sont *incidents* lorsque ce sommet est une extrémité de l'arête. Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet  $v$  est appelé le *degré* de  $v$ , noté par  $\deg_G(v) = \deg(v) = |N_G(v)|$ . Nous désignons par  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$  le degré *minimum* et *maximum* dans  $G$ , respectivement. Un sommet de degré nul est dit *isolé* et un sommet de degré un est dit *pendant* ou *feuille*. Un *support* est un sommet voisin d'une feuille. L'ensemble des feuilles adjacentes à un support  $v$  est désigné par  $L_v$ . Si  $|L_v| = 1$ , alors  $v$  est un support *faible* sinon ( $|L_v| > 1$ ),  $v$  est un support *fort*. On note par  $L(G)$  l'ensemble des sommets pendants de  $G$ , avec  $|L(G)| = l(G)$  et par  $S(G)$  l'ensemble des sommets supports de  $G$ , avec  $|S(G)| = s(G)$ .

**Exemple 1.1.** *Considérons le graphe  $G$  de la Figure 1.1, où  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$  et  $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7\}$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont adjacents, alors que  $v_1$  et  $v_3$  ne le sont pas. Aussi, le sommet  $v_9$  est isolé, le sommet  $v_4$  est un support faible tandis que  $v_5$  est un support fort.*

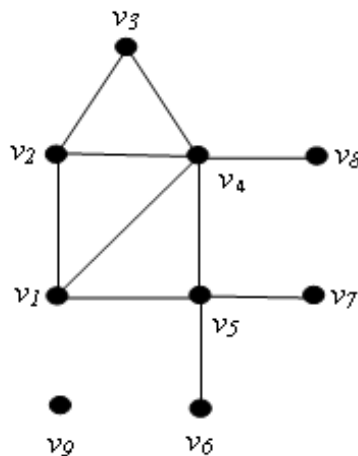


Figure 1.1. Un graphe  $G$  d'ordre 9 et de taille 10.

Pour toutes ces notations, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe correspondant aux indications que l'on souhaite donner, alors on supprimera l'indice  $G$  de la notation.

Une *chaîne*  $P$  est une séquence de sommets successifs  $v_1, v_2, \dots, v_k$  telle que  $v_i v_{i+1} \in E$  pour tout  $1 \leq i \leq k-1$ . La longueur de la chaîne  $P$  est le nombre d'arêtes dans la chaîne et  $v_1, v_k$  sont les extrémités de la chaîne. En particulier une chaîne est un *cycle* lorsque  $v_1 = v_k$ . On note par  $P_k$  une chaîne de longueur  $k-1$  ayant  $k$  sommets distincts et par  $C_k$  un cycle de longueur  $k$  ayant  $k$  sommets distincts (dits aussi chaîne ou cycle *élémentaire*). Une *maille* d'un graphe  $G$ , notée par  $g(G)$ , est la longueur du plus petit cycle dans  $G$ . Notons que  $g(P) = \infty$ .

Un graphe est *connexe* si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet. Autrement dit, si pour toute paire de sommets distincts  $(u, v)$ , il existe une chaîne entre  $u$  et  $v$ .

La *distance* entre deux sommets  $u, v$  d'un graphe  $G$ , notée  $d_G(u, v) = d(u, v)$  est la longueur d'une plus courte chaîne joignant  $u$  et  $v$ . L'*excentricité* d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est  $exc(v) = \max \{d(v, w) : w \in V\}$ . L'excentricité maximale d'un sommet de  $G$  est alors le *diamètre* du graphe  $G$ ,  $diam(G) = \max \{exc(v) : v \in V\}$ . Un sommet de  $G$  ayant une excentricité minimum est appelé *centre*.

Ces notions de base pourront le cas échéant être précisées à nouveaux dans les chapitres où elles sont utilisées. D'autres notions moins générales pourront aussi être présentées aux moments où elles seront nécessaires. Dans l'ensemble, plusieurs ouvrages regroupent ces notations indispensables dans cette thèse. Nous invitons notamment le lecteur à consulter les références de [8, 15].

## 1.2 Quelques graphes particuliers

Certains graphes utiles dont la structure présente un intérêt particulier, disposent d'une désignation unique pour pouvoir les décrire et les distinguer rapidement. Nous allons lister ici certains types de graphes qui nous serviront au cours de cette thèse.



Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et  $S \subseteq V$ . Le graphe ayant  $S$  comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs extrémités dans  $S$  est appelé le *sous-graphe de  $G$  induit* par  $S$ , noté  $\langle S \rangle$  ou  $G[S]$ . On écrira  $G - S$  au lieu de  $G[V - S]$ . Si  $S$  est réduit à un sommet  $v$  on écrira  $G - v$ .

Une *composante connexe* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe induit de  $G$  qui est connexe et maximal (aucun autre sous-graphe connexe maximal de  $G$  ne le contient). Cela nous conduit à une définition similaire d'un graphe connexe: Un graphe est connexe si et seulement si il admet une unique composante connexe.

Un *point d'articulation* est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe. Si le graphe  $G$  est connexe alors toute arête  $e$  de  $G$  telle que  $G - e$  n'est plus connexe est *un pont* ou *isthme*. Un graphe connexe sans points d'articulation est dit *bloc*. Un *bloc* dans un graphe  $G$  est un sous-graphe de  $G$  qui est lui-même un bloc et qui est maximal par rapport à cette propriété.

Au cours de nos travaux, nous avons considéré des classes de graphes particulières. Afin de les caractériser avec certaines propriétés, il convient d'abord de définir ce qu'est une *classe de graphe*, et de décrire un certain nombre de celles-ci, celles qui seront les plus importantes pour nous.

Une *classe* de graphe, qui pourra aussi par moment être appelée une *famille* de graphes, est un ensemble de graphes défini par une ou plusieurs propriétés sur la structure du graphe. Tout graphe  $G$  possédant la ou les propriétés requises appartient de fait à la classe correspondante. Par contre, tout graphe  $G$  pour lequel au moins une propriété définissant la classe de graphe ne correspondrait pas sera de fait hors de cette classe de graphe.

Voyons maintenant quelques unes des plus importantes classes de graphes que nous pourrions retrouver au fil des chapitres de ce document.

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *régulier* de degré  $r$  ou  *$r$ -régulier* si tous les sommets de  $G$  sont de degré  $r$ . Si  $r = 3$  le graphe est dit *cubique*. Si  $G$  est *régulier d'ordre  $n$*  et  $r = n - 1$ , alors  $G$  est le graphe *complet* noté  $K_n$ . Une *clique* est un sous-graphe complet

d'un graphe  $G$ .  $G$  est dit *semi-régulier* si  $\Delta(G) - \delta(G) = 1$ . Un graphe  $G$  est un *bloc graphe* si chaque bloc de  $G$  est complet. Un *bloc-cactus* est un graphe  $G$  tel que chaque bloc de  $G$  est un graphe complet ou un cycle. Un *cactus* est un graphe où toute arête appartient à au plus un cycle. Un graphe contenant un seul cycle est dit *unicyclique*.

On trouve parfois dans la littérature des graphes définis par la notion de sous graphes *exclus* ou *interdits*. Par exemple: Un graphe *sans-triangle* est un graphe ne contenant aucun triangle (cycle d'ordre 3) et il est dit *sans-triangle maximal* si en ajoutant n'importe quelle arête on induit un triangle. Un graphe *triangulé* est un graphe sans cycles induits de longueur 4 ou plus. Un graphe dans lequel il n'existe aucun cycle possible est dit *acyclique*.

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti* lorsque l'ensemble de sommets  $V$  peut être partitionné en deux sous-ensembles  $V_1, V_2$  de telle sorte que chaque arête de  $E$  a une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$  et est noté par  $G = (V_1 \cup V_2, E)$ . Si de plus pour tous sommets  $u \in V_1, v \in V_2$ , l'arête  $uv \in E$ , alors le graphe est dit *biparti complet*, noté par  $K_{r,s}$  avec  $r = |V_1|$  et  $s = |V_2|$ . En particulier, si  $r = 1$ , alors  $K_{1,s}$  est dite *une étoile*. Le sommet de  $V_1$  est dit le *centre* de l'étoile. L'étoile  $K_{1,3}$  est dite une *griffe*.

Un graphe biparti est dit *k-semi régulier* si chaque sommet de l'une des deux parties à un degré  $k$ .

Plus général, un graphe est dit *k-multiparti complet*, noté par  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , lorsque l'ensemble de sommets  $V$  peut être partitionné en  $k$  sous-ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_k$  tels que  $|V_i| = n_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  et pour tous sommets  $u \in V_i, v \in V_j$ , l'arête  $uv \in E$ .

Un *arbre*, souvent noté  $T$ , est un graphe connexe acyclique.

Subdiviser un graphe  $G$  consiste à remplacer chaque arête  $uv$  de  $G$  par un sommet  $w$  et les arêtes  $uw$  et  $vw$ , le graphe obtenu est noté  $SS(G)$ . Dans le cas où  $G$  est le graphe trivial on définit  $SS(G) = G$ . Une *étoile subdivisée*  $SS_t$  est un arbre obtenu à partir d'une étoile  $K_{1,t}$  en subdivisant chaque arête par exactement un sommet. Une *étoile double*, notée  $S_{r,s}$ , est un arbre obtenu en joignant par une arête les centres des étoiles  $K_{1,r}$  et  $K_{1,s}$ . Pour l'*étoile double subdivisée* on écrit  $SS_{r,s}$  au lieu de  $SS(S_{r,s})$ .

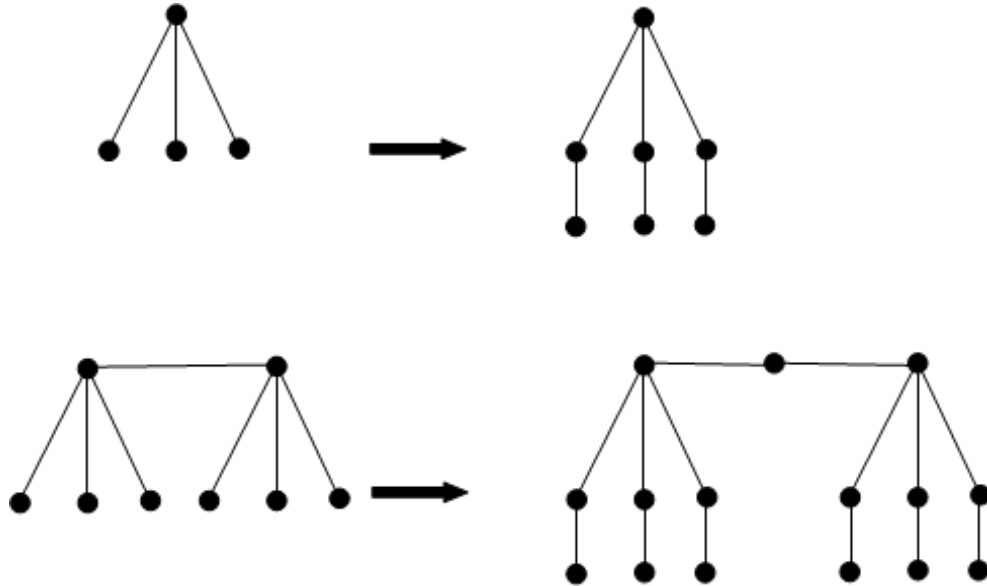


Figure 1.2. Exemple sur la subdivision d'une étoile  $K_{1,3}$   
et d'une étoile double  $S_{3,3}$ .

Un graphe  $C_4$ -*cactus* est un graphe obtenu à partir d'un arbre non trivial en remplaçant chaque arête par une arête double puis en subdivisant chacune d'elles.

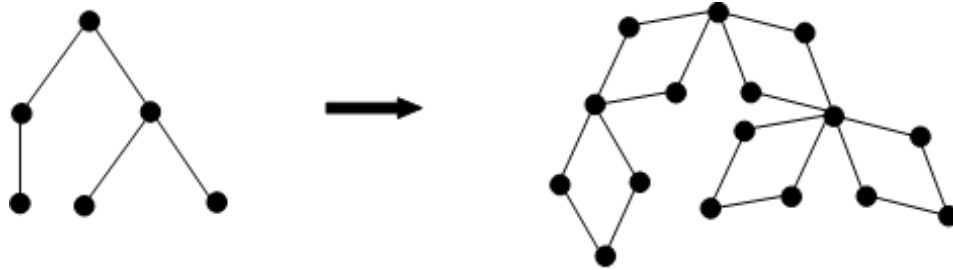


Figure 1.3. Exemple d'un graphe  $C_4$ -*cactus*.

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *scindé* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles  $C$  et  $I$  tels que

- $C$  induit une clique de  $G$ .
- $I$  est un ensemble dont les sommets sont deux à deux non adjacents. On dénote alors le graphe  $G$  par  $G = (C, I, E)$ .

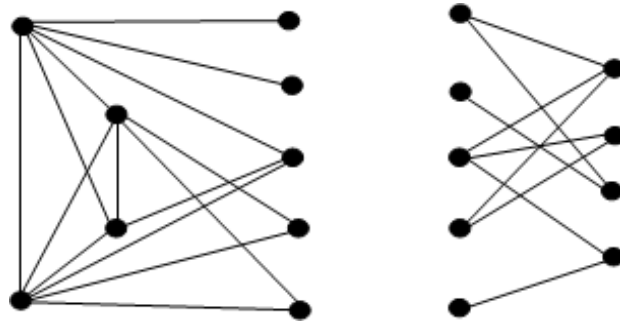


Figure 1.4. Exemple d'un graphe biparti (à droite)  
et d'un graphe scindé (à gauche).

### 1.2.1 Quelques opérations sur les graphes

On pourra rencontrer aussi des graphes particuliers pouvant être définis en appliquant des opérations élémentaires sur un graphe initial ou plus. Par exemple:

- Le graphe *complémentaire* de  $G = (V, E)$  est le graphe  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et une arête est dans  $\overline{G}$  si et seulement si elle n'est pas dans  $G$ .

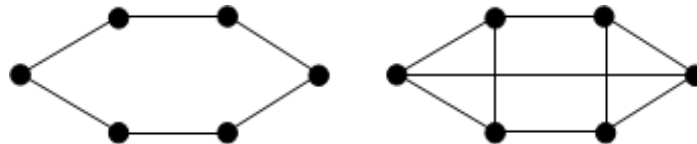


Figure 1.5. Le cycle  $C_6$  et son complémentaire  $\overline{C_6}$

Etant donné deux graphes  $G$  et  $H$  tels que  $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  et  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

- Le *produit cartésien* de  $G$  et  $H$  est le graphe  $G \times H$  où  $V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(u_i, v_j) / u_i \in V(G), v_j \in V(H)\}$  et  $e = (u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G \times H)$  si et seulement si soit  $i = k$  et  $v_j v_l \in E(H)$  ou  $j = l$  et  $u_i u_k \in E(G)$ .

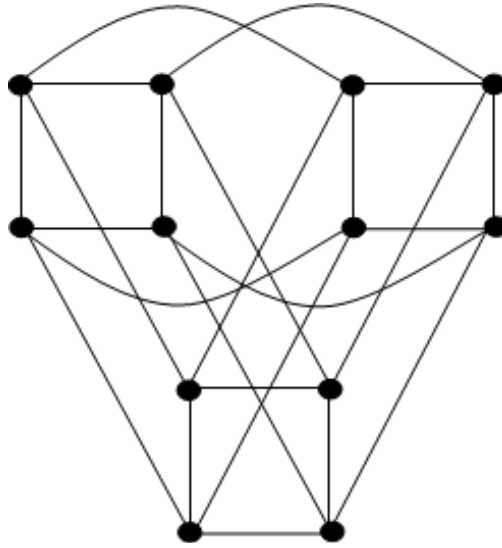


Figure 1.6. Le produit cartésien  $C_4 \times C_3$ .

- Le *joint* de  $G$  et  $H$  est le graphe  $G + H$  où  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  et  $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{u_i v_j / (u_i, v_j) \in V(G) \times V(H)\}$ .

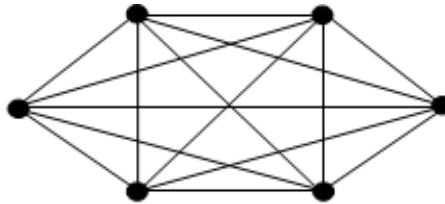


Figure 1.7. Le joint  $C_3 + C_3$ .

- La *H-couronne* d'un graphe  $G$  est le graphe  $G \circ H$  obtenu d'une copie de  $G$  et  $|V(G)|$  copies de  $H$  où le  $i^{\text{ième}}$  sommet de  $G$  est adjacent à tous les sommets de la  $i^{\text{ième}}$  copie de  $H$ . Lorsque  $H \cong K_1$ , alors  $G \circ K_1$  est appelé la *couronne* du graphe  $G$ .

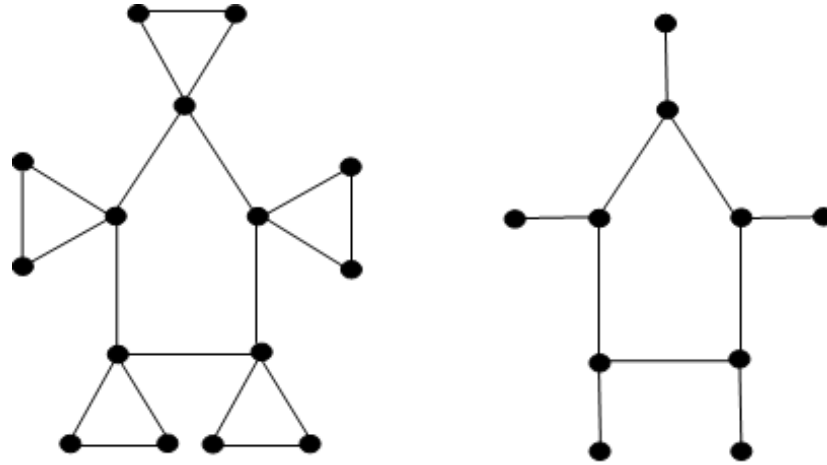


Figure 1.8. Les couronnes  $C_5 \circ K_2$  et  $C_5 \circ K_1$ .

Parfois, les graphes sont soumis à des opérations élémentaires. Par exemple:

- La *contraction* de deux sommets adjacents  $u$  et  $v$  (ou l'*identification* de deux sommets adjacents) forme un nouveau sommet, désigné par  $\overline{uv}$ , dont le voisinage ouvert est  $(N(u) \cup N(v)) - \{u, v\}$ . Le graphe obtenu sera désigné par  $G_{uv}$ .
- La *suppression d'un sommet*  $v$  d'un graphe  $G$  produit le graphe noté  $G - v$ , obtenu suite à l'effacement de  $v$  et de toutes les arêtes de  $G$  incidentes à  $v$ .
- La *suppression d'une arête*  $uv$  d'un graphe  $G$  produit le graphe noté  $G - uv$  où  $V(G - uv) = V(G)$  et  $E(G - uv) = E(G) - \{uv\}$ .
- L'*ajout d'une arête*  $uv$  à un graphe  $G$  produit le graphe noté  $G + uv$  où  $V(G + uv) = V(G)$  et  $E(G + uv) = E(G) \cup \{uv\}$ .

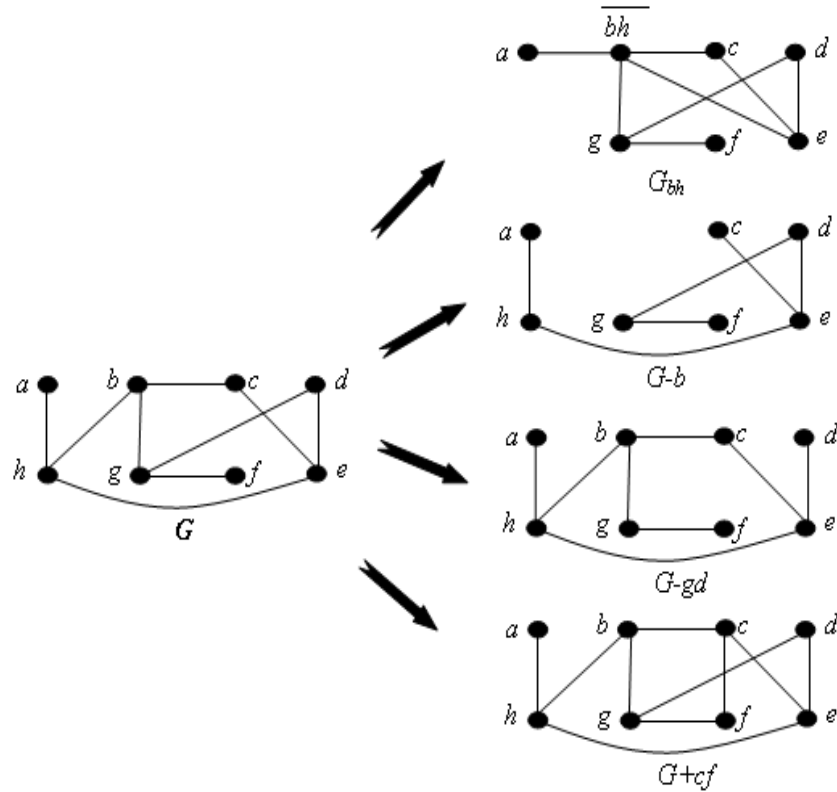


Figure 1.9. Exemple sur quelques opérations appliquées au graphe  $G$ .

### 1.3 Quelques propriétés sur les graphes

Un *isomorphisme* de graphes est une bijection entre l'ensemble des sommets de deux graphes qui préserve les propriétés (ou structures). Autrement dit un isomorphisme  $f$  d'un graphe  $G$  vers un graphe  $H$  est une bijection de  $V(G)$  dans  $V(H)$ , telle que  $uv$  est une arête dans  $G$  si et seulement si  $f(u)f(v)$  est une arête dans  $H$ . Deux graphes *isomorphes* ont des propriétés communes. On appelle *un invariant* toute propriété qui ne change pas par isomorphisme de graphes. Si on prend deux graphes isomorphes alors ils ont certainement le même ordre, la même taille, le même nombre de domination etc..., tous ces paramètres s'appellent des *invariants de graphes*.

Avant de donner quelques invariants qui serviront dans la suite de cette thèse on est amené à définir ce qu'on appelle ensemble minimal (ou maximal) et ensemble minimum (ou maximum).

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $\mathcal{P}$  une propriété. Un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est dit **minimal** par rapport à  $\mathcal{P}$  si aucun sous-ensemble strict de  $A$  ne vérifie cette propriété. Aussi,  $A$  est dit **maximal** par rapport à  $\mathcal{P}$ , si aucun sous-ensemble de  $V$  contenant  $A$  et différent de  $A$  ne vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

Parmi les invariants de graphes qui nous intéressent figure le nombre d'*indépendance*. Un ensemble stable dans un graphe  $G$  est un sous-ensemble de sommets non adjacents deux à deux. Tout graphe admet un ensemble stable car tout ensemble de cardinal 1 est un tel ensemble. Le *nombre d'indépendance* de  $G$  est le cardinal maximum d'un ensemble stable noté  $\alpha(G)$ .

La *domination* dans les graphes est actuellement l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes. Plus formellement, pour un graphe  $G = (V, E)$  un sous ensemble  $D$  de  $V$ , est un dominant si tout sommet de  $(V - D)$  est adjacent à au moins un sommet de  $D$ . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de  $G$  est le *nombre de domination*, noté  $\gamma(G)$ . Un ensemble dominant  $D$  de  $G$  est dit  $\gamma(G)$ -ensemble si  $|D| = \gamma(G)$ .

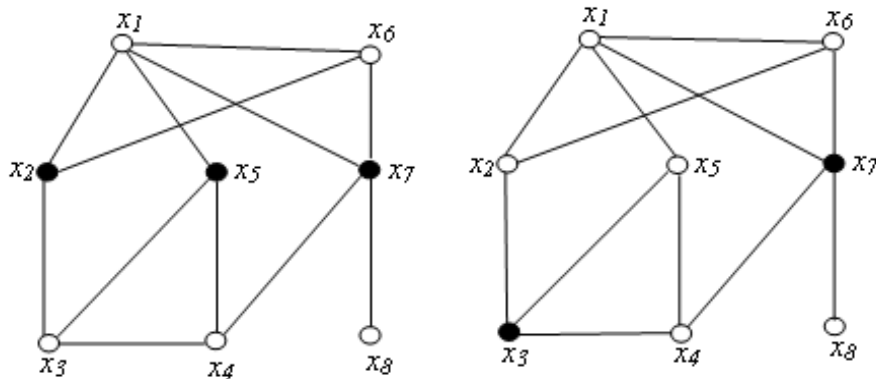


Figure 1.10. Exemple sur des ensembles dominants.

Pour le graphe  $G$  de la Figure 1.10, les ensembles  $D_1 = \{x_2, x_5, x_7\}$  et  $D_2 = \{x_3, x_7\}$  sont des dominants de  $G$ . De plus, nous pouvons facilement voir que  $\gamma(G) = 2$  (puisque un seul sommet ne suffit pas pour dominer tous les autres sommets). On peut en déduire que  $D_2$  est un  $\gamma(G)$ -ensemble.



Il existe dans la littérature plusieurs définitions équivalentes d'un ensemble dominant dans un graphe. Nous citons à titre d'exemple quelques-unes.

- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si  $N[D] = V$ ,
- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap D| \geq 1$ ,
- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout  $v \in V - D$ ,  $N(v) \cap D \neq \emptyset$ .
- Soit la fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1\}$  telle que pour tout sommet  $v \in V$ ,

$$\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1.$$

Les différents aspects que présente la domination la rendent parmi les branches les plus étudiées en théorie des graphes et qui offrent ainsi une grande variété d'opportunités de recherche. Quelques-uns de ces aspects seront abordés dans les paragraphes suivants.

Il existe bien entendu plusieurs versions de ce problème et plusieurs façons de l'exploiter selon que l'on souhaite avoir ou non des propriétés pour l'ensemble dominant, comme de la connexité ou le fait de dominer aussi les éléments de l'ensemble. Ces propriétés supplémentaires font naître plusieurs types de domination.

Donnons d'abord un aperçu sur la domination puis citons quelques types.

## 1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes

La domination dans les graphes constitue actuellement un domaine florissant. Bien que l'histoire de l'étude mathématique des ensembles dominants n'a commencé qu'à la fin des années 50 du 20<sup>ème</sup> siècle, le concept de domination semble avoir des origines remontant au 16<sup>ème</sup> siècle en Inde dans les problèmes du jeu d'échec [16]. En 1850 [17] les amateurs du jeu d'échec en Europe voulaient couvrir l'ensemble des cases en plaçant un nombre minimum de reines sur l'échiquier, de telle manière que chaque case de ce dernier soit ou bien occupée par une reine ou bien atteinte par un seul déplacement d'une reine. En 1862 De Jaenish [18] posa le problème suivant: Déterminer le nombre de reines à déplacer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. C'est avéré que le nombre minimum de reines dans un échiquier  $5 \times 5$  est égal à 3, et pour un échiquier  $8 \times 8$  c'est égal à 5. Le nombre minimum de reines dans un échiquier de  $n \times n$  reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails, voir [19].

En 1958, la domination est devenue un domaine théorique grâce à Claude Berge [20] qui a donné une définition de l'ensemble dominant dans les graphes orientés. En effet, il associe un graphe aux différentes situations, dans lesquelles on cherche un ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Pour l'exemple de déplacement du roi dans un échiquier  $n \times n$ , on a associé un graphe  $K_n$  (différent de la clique  $K_n$ ) possédant  $n^2$  sommets qui correspondent aux cases de l'échiquier et deux sommets sont adjacents si les cases correspondantes de l'échiquier ont un côté ou un coin en commun, c'est-à-dire les arêtes de ce graphe correspondent aux déplacements du roi dans l'échiquier suivant les règles du jeu d'échec.

Le nombre de domination était connu sous le nom "*coefficient de stabilité externe*". En 1962, dans son livre de théorie des graphes, Ore [21] renomma ce nombre en lui donnant l'actuelle appellation "*nombre de domination*" et utilisa la notation  $d(G)$  dans les graphes non orientés.

Les premiers indices qui ont dévoilé l'imposant intérêt que portaient les chercheurs à la domination étaient l'article de Cockayne et Hedetniemi [9] publié en 1977 et le numéro spécial de *discrete mathematics* consacré entièrement à la domination, publié en 1990

par Hedetniemi et Laskar [16] afin d'émerger et évaluer ce domaine. Depuis, une grande fenêtre était ouverte sur l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles ce qui a donné naissance à plusieurs paramètres de domination. Une multitude de variantes du problème de domination ont été étudiées. La bibliographie de 1990 a révélé une augmentation incroyable du nombre de références dans ce domaine qui, dans un laps de temps de 30 ans, est passé de 20 à 400 références (voir [16]). Cette croissance intensive est actuellement plus évidente avec plus de 6000 références. Les livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [17, 22] publiés en 1998 offrent un très large panorama puisque plus de 75 types de domination y sont cités.

Grace au grand nombre de ses applications, la domination dans les graphes est devenue un domaine de recherche très convoité. En effet, beaucoup de situations réelles peuvent être modélisées par des problèmes étudiés en domination. Comme les réseaux sociaux occupent une place considérable dans la vie actuelle, nous allons citer l'application de la domination dans ce domaine.

Les réseaux sociaux peuvent être modélisés par les ensembles dominants afin d'étudier la dynamique des relations entre un grand nombre d'individus dans différents domaines. Un réseau social est une structure sociale constituée d'individus ou de groupes d'individus liés par un ou plusieurs types spécifiques d'interdépendance. Le choix d'ensembles initiaux des individus ciblés est un problème important dans la théorie des réseaux sociaux. Kelleher et Cozzens [23] ont modélisé les réseaux sociaux en termes de graphes et ils ont montré que le choix de certains ensembles d'individus peut être fait en utilisant les propriétés des ensembles dominants.

De nouveaux paramètres de domination ont vu le jour lorsque les chercheurs ont imposé à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré.

### 1.4.1 Quelques paramètres de domination.

Souvent le problème requiert des conditions ou des propriétés supplémentaires sur l'ensemble dominant. Ce qui fait le second aspect de la domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination sont apparus en combinant cette dernière avec une autre propriété dans les graphes. La condition qu'on impose à la domination peut être intérieure à l'ensemble dominant, extérieure à l'ensemble dominant ou bien les deux en même temps, citons quelques-unes : Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.

► L'ensemble dominant doit être connexe: Un sous ensemble  $S \subseteq V$  est dit dominant connexe de  $G$  si  $S$  est un dominant et le sous graphe induit par  $S$  est connexe. Le nombre de domination connexe  $\gamma_c(G)$  est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de  $G$ . Pour un graphe  $G$ , un ensemble  $S$  est dit  $\gamma_c(G)$ -ensemble si  $S$  est un dominant connexe et  $|S| = \gamma_c(G)$ . Il en sera similairement pour les autres paramètres.

► Il doit être stable (ou indépendant): Autrement dit, un sous ensemble  $S \subseteq V$  est dit dominant indépendant de  $G$  si  $S$  est à la fois dominant et stable. Le nombre de domination indépendante  $i(G)$  est la taille minimum d'un ensemble dominant indépendant de  $G$ . Il en résulte immédiatement que pour tout graphe  $G$

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$$

La notion de stabilité dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. En effet, il est facile de voir que tout ensemble stable  $S$  est maximal si et seulement si  $S$  est un stable et un dominant, et tout stable maximal est un ensemble dominant minimal. Le Survey [24] de Goddard et Henning fournit un résumé intéressant sur la domination indépendante.

► Il doit être *total*. Plus formellement, si  $G$  est un graphe sans sommets isolés, alors  $S \subseteq V$  est un dominant total de  $G$  si tout sommet de  $V$  est adjacent à un sommet de  $S$  (i.e.  $N(S) = V$ ). On note par  $\gamma_t(G)$  le cardinal minimum d'un dominant total de  $G$ . La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes et Heddetniemi dans [25]. Pour plus de détails sur la domination totale nous orientons le lecteur vers le récent ouvrage de Henning et Yeo [26] et le survey de Henning sur la domination totale [27].

► Il existe aussi des variations du problème classique de la domination qui autorisent un sommet à dominer plus que son voisinage et/ou attribuent des poids aux sommets. Par exemple, le problème de la *domination romaine* introduit par Cockayne et al. [28] en 2004. Une fonction de domination Romaine sur  $G$  est une fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  telle que chaque sommet  $u$  avec  $f(u) = 0$  est adjacent à au moins un sommet  $v$  avec  $f(v) = 2$ . Le poids de  $f$  est la valeur  $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$  et le poids minimum de  $f$  est appelé le nombre de domination Romaine de  $G$ , noté  $\gamma_R(G)$ .

► Comme on peut imposer deux conditions simultanément, par exemple un dominant sans sommets isolés et qui domine au moins deux fois tout sommet extérieur est un *dominant double* qui est un cas particulier de la *k-tuple domination* introduite par Harary et Haynes [29]. Plus formellement, pour un entier positif  $k$ , un sous-ensemble  $S$  de  $V$  est un *k-tuple dominant* si pour tout sommet  $v$  de  $V$ ,  $|N[v] \cap S| \geq k$ . Le nombre de *k-tuple domination*  $\gamma_{\times k}(G)$ , est le cardinal minimum d'un *k-tuple dominant* de  $G$ . Pour le cas particulier  $k = 1$ , la 1-tuple domination n'est autre que la domination ordinaire.

Nous avons énuméré ici quelques types bien connus, bien que le problème central que nous étudions dans cette thèse est celui de la domination multiple introduite par Fink et Jacobson [10, 11] en 1985. En voici la définition correspondante

► Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est un *k-dominant* de  $G$  si tout sommet de  $V - S$  possède au moins  $k$  voisins dans  $S$ . Le nombre de *k-dominance*  $\gamma_k(G)$  est le cardinal minimum d'un ensemble *k-dominant* de  $G$ . On désigne par  $\gamma_k(G)$ -ensemble tout ensemble *k-dominant*  $S$  de  $G$  avec  $|S| = \gamma_k(G)$ .

► Soit  $G$  un graphe connexe: Si de plus le graphe induit par le *k-dominant*  $S$  est connexe on parlera de la *k-dominance connexe* introduite par Volkmann [14].  $\gamma_k^c(G)$  est le nombre de *k-dominance connexe* de  $G$ .

D'autres paramètres seront définis plus loin au moment de présenter des résultats en relation avec notre travail ou en faisant référence à ces types de domination suivant le contexte du paragraphe en court.

Grâce au grand nombre de types de domination, beaucoup de problèmes réels sont modélisés en termes d'autres paramètres de domination, et ce en fonction des conditions qui peuvent être exigées et suivant la spécificité du problème. Comme on s'intéresse dans cette thèse au problème de la domination multiple, citons à titre d'exemple deux applications.

- a) Le problème d'implantation des imprimantes dans un réseau de micro-ordinateurs, la  $k$ -domination peut s'avérer fort utile pour résoudre ce problème. Sous la condition qu'une imprimante ne fonctionne qu'au plus à une distance 1 dans le réseau alors on est amené à choisir un nombre minimum d'ordinateurs pour y implanter à chacun une imprimante. Si on considère que la probabilité de panne des imprimantes est de  $(k - 1) / k$ , alors chaque ordinateur doit être relié à  $k$  imprimantes à distance au plus 1. Le nombre d'ordinateurs auxquels sont implantées les imprimantes est un ensemble  $k$ -dominant du réseau.
- b) Le problème de localisation des radars pour contrôler une région donnée. Les unités militaires pourvues de radars surveillent certains nombre de points stratégiques (des cellules); on exige que chaque cellule soit surveillée par au moins  $k$  radars. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leurs emplacements de telle manière à contrôler toutes les cellules en respectant la contrainte de la  $k$ -domination pour chaque cellule.

Théoriquement, la grande variété d'axes de recherche offerte par la domination lui donne un autre aspect de distinction. Les chercheurs se sont orientés vers l'élaboration de bornes pour le nombre de domination ou pour les différents paramètres de domination, étant donné que la détermination des valeurs exactes pour ces paramètres est souvent difficile. D'autres chercheurs se sont concentrés sur la recherche de bornes en fonction de l'ordre du graphe, de son degré minimum ou maximum, en fonction d'autres paramètres de domination, etc...

D'autres études se sont focalisées sur le développement des relations du type Nordhaus-Gaddum, i.e. pour un paramètre de domination  $\pi(G)$ , ces relations sont de la forme:

$$\pi(G) + \pi(\overline{G}) \leq f_1(n, \delta, \Delta) \text{ et}$$

$$\pi(G)\pi(\overline{G}) \leq f_2(n, \delta, \Delta)$$

Aussi, une fois une borne est établie, il serait intéressant de caractériser les graphes qui la vérifient.

Il est aussi intéressant d'étudier des classes de graphes critiques ou stables par rapport aux différents paramètres de domination. Il s'agit d'étudier l'effet résultant de la suppression, l'ajout ou la contraction d'une arête quelconque sur le paramètre de domination étudié. De même étudier l'effet que peut donner la suppression de n'importe quel sommet d'un graphe sur le paramètre de domination en question, sachant que ces modifications dans un graphe peuvent augmenter, faire baisser ou bien laisser inchangés les paramètres de domination suivant le cas traité. Dans ce cadre, le chapitre quatre de cette thèse sera consacré à l'étude de la *2-dominaton* dans les graphes sous la contraction d'une arête quelconque.

## 1.5 Problèmes de modification des graphes

Les problèmes de modification des graphes sont fondamentaux en théorie des graphes. Parfois, les graphes sont soumis à des opérations ayant des effets remarquables sur la stabilité des invariants. Par conséquent, de nombreuses études ont été effectuées sur certains invariants de graphes lorsqu'une arête est ajoutée, enlevée ou contractée, et il en est de même pour la suppression d'un sommet.

Les notions de *criticité* et de *stabilité* ont été introduites selon que le paramètre de domination augmente, diminue ou reste inchangé. Si le paramètre de domination en question change après modification, alors le graphe est dit *critique*, et dans le cas contraire, ce graphe est dit *stable*.

Les concepts de criticité et de stabilité se sont révélés très utiles pour une compréhension plus profonde pour d'autres paramètres comme la connectivité et le nombre chromatique.

Afin de familiariser le lecteur avec ce domaine et d'explicitier sa grande importance aussi bien sur le plan théorique que pratique, nous donnons un exemple fourni par Haynes et al dans [17]. Cet exemple explique l'intérêt d'étudier les effets sur  $\gamma(G)$  lorsque  $G$  est modifié suite à la suppression d'un sommet, l'ajout ou la suppression d'une arête.

Pour la conception d'un réseau, il est important de prendre en compte la capacité de ce réseau à fournir un service, même un ou plusieurs composants sont défectueux. Cette propriété est connue sous le nom "*tolérance aux pannes*". L'analyse du comportement d'un réseau en présence d'un défaut se fait en déterminant l'influence de la suppression d'une arête (défaillance d'une liaison) ou d'un sommet (défaillance d'un processeur) de son graphe représentatif  $G$  sur le critère de tolérance aux pannes. Par exemple, un ensemble de processeurs de taille minimale pouvant communiquer directement avec tous les autres processeurs dans le système représente un  $\gamma(G)$ -ensemble. S'il est nécessaire à l'ensemble des serveurs d'avoir cette propriété et que le nombre de processeurs désignés pour jouer le rôle de serveurs de fichiers soit limité, alors le nombre de domination  $\gamma(G)$  est le critère de tolérance aux pannes dans ce cas. Dans cet exemple, il est important que  $\gamma(G)$  ne doit pas augmenter quand le graphe est modifié en supprimant un sommet ou une arête. D'un autre côté, il faut ajouter des arêtes pour que cette tolérance soit assurée. Par conséquent, il s'agit dans ce cas d'examiner les effets sur  $\gamma(G)$  lorsque  $G$  est modifié suite à la suppression d'un sommet, l'ajout ou la suppression d'une arête.

L'exemple ci-dessus illustre la criticité et la stabilité d'un graphe lorsque les opérations en question sont suppression-ajout. Ainsi, d'autres types peuvent être définis en appliquant sur un graphe d'autres modifications comme la contraction d'une arête ( l'identification de deux sommets adjacents). Toutefois, nous nous contentons, dans cette thèse d'étudier l'effet résultant sur  $\gamma_2(G)$  lorsque  $G$  est modifié suite à la contraction d'une arête quelconque.



Il est à rappeler que pour le nombre de domination, Walikar et Acharya [12] ont été les premiers à étudier les graphes critiques par rapport aux arêtes supprimées, suivi par un travail de Sumner et Blich [13] portant sur les graphes critiques pour n'importe quelle arête ajoutée. Depuis, de nombreuses recherches dans ce sens ont été menées pour différents paramètres de domination.

Les graphes dont le nombre de domination augmente à la suppression de tout sommet ont été étudiés par Bauer et al [30] tandis que Brigham et al. [31] ont étudié les graphes pour lesquels le nombre de domination diminue pour n'importe quel sommet supprimé. Les graphes stables par rapport aux arêtes supprimées ont été étudiés par Dutton et Brigham [32]. L'étude des graphes modifiés suite à la contraction d'arêtes a été initiée en 2006 par Burton et Sumner [33]. Les auteurs de [33] ont étudié les graphes  $\gamma$ -*point-critique*, c'est-à-dire les graphes pour lesquels le nombre de domination diminue suite à la contraction de n'importe quelle arête.

Autres désignations seront données plus loin s'il est nécessaire.

## CHAPITRE 2

# ÉTAT DE L'ART SUR LA DOMINATION MULTIPLE ET LES GRAPHES MODIFIÉS

Afin de situer notre travail ainsi que ses contributions, il est nécessaire de mener une analyse de l'état de l'art lié à la domination multiple et aux graphes modifiés.

Le présent chapitre est composé de deux sections. Dans la première nous donnons un bref aperçu sur la domination et la  $k$ -domination dans les graphes, ainsi que la domination connexe et la  $k$ -domination connexe. Nous exposons les principales propriétés de ces types ainsi que les résultats les plus importants les concernant. Par cette présentation, nous voulons familiariser le lecteur avec ces types de domination tout en lui permettant de connaître ce qui a été fait pour ce concept.

La deuxième section est consacrée à l'étude des graphes stables et critiques, où nous présentons les principaux concepts que contient cette notion. Puis nous exposons quelques résultats antérieurs pour les graphes critiques et stables par rapport à la domination usuelle et nous poursuivons cette présentation en donnant d'autres résultats concernant en particulier la domination multiple.

## 2.1 La domination et la domination multiple dans les graphes

On s'intéresse dans cette partie à la présentation de quelques résultats obtenus sur les deux paramètres  $\gamma(G)$  et  $\gamma_k(G)$  dans différentes classes de graphes en donnant toute fois les relations illustrant la comparaison des deux paramètres.

### 2.1.1 Le nombre de domination usuelle $\gamma(G)$

Beaucoup de travaux sur la domination gravitent sur la recherche de bornes pour le nombre de domination. Il est évident que  $1 \leq \gamma(G) \leq n$  pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ .

L'émergence des bornes de domination remonte en 1962 par l'article de Ore qui était le premier à publier des résultats concernant le problème des ensembles dominants dans les graphes.

**Théorème 2.1** (Ore [21], 1962). *Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés, alors  $\gamma(G) \leq n(G)/2$ .*

Les graphes d'ordre pair pour lesquels  $\gamma(G) = n(G)/2$  ont été caractérisés par Payan et Xuong [34] en 1982 et Fink, Jacobson, Kinch and Roberts en 1985. En 1998, Renderath et Volkmann [35] et indépendamment Xu, Cockayne, Haynes, Hedetniemi et Zhou [36] en 2000 ont caractérisé les graphes d'ordre impair tels que  $\gamma(G) = \lfloor n(G)/2 \rfloor$ .

Dans le même article [21], Ore a donné une condition nécessaire est suffisante pour qu'un ensemble dominant soit minimal.

**Théorème 2.2** (Ore [21], 1962). *Un ensemble dominant  $D$  d'un graphe  $G$  est minimal si et seulement si pour tout sommet  $x \in D$ , l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.*

1.  $x$  est isolé dans  $D$ ,
2. Il existe un sommet  $y \in V(G) - D$  pour lequel  $N(y) \cap D = \{x\}$ .

Le résultat suivant de Bollobas et Cockayne [37] concernant la minimalité de l'ensemble dominant joue un rôle important dans le troisième chapitre.

**Théorème 2.3** (Bollobas et Cockayne [37], 1979). *Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés, alors  $G$  a un ensemble dominant minimum  $D$  tel que pour tout sommet  $d \in D$  il existe un voisin  $f(d) \in V(G) - D$  de  $d$  avec  $f(d)$  n'est voisin à aucun sommet  $x \in D - \{d\}$ .*

Beaucoup de recherches ont été menées pour l'établissement de bornes supérieures pour le nombre de domination en termes d'ordre et degré minimum. Des résultats importants de ce type sont donnés dans [38, 39, 40, 41, 42]. Pour plus de compréhension sur le traitement de la domination, nous invitons le lecteur à se référer aux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [17, 22].

### 2.1.2 Le nombre de la $k$ -domination $\gamma_k(G)$

Etant donné  $D$  un ensemble dominant dans un graphe  $G = (V, E)$ . L'ensemble  $D$  peut être vu comme étant un ensemble qui contrôle ou surveille les sommets de  $V - D$ , alors en supprimant un sommet ou une arête arbitraire, l'ensemble  $D$  pourrait ne plus être un ensemble dominant. En supposant qu'en tant que situation non souhaitée, ce problème pourrait être évité en augmentant le niveau de domination en exigeant de chaque sommet en dehors de l'ensemble dominant, une fois un sommet ou une arête a échoué (n'est pas dominé) afin de garder toujours la propriété de dominer le graphe par l'ensemble  $D$ . Cette idée a poussé Fink et Jacobson [10, 11] à introduire lors d'une conférence à Kalamazoo (l'État du Michigan, aux États-Unis) la notion de la *domination multiple* en 1985. Les papiers [10, 11] parus dans les actes de la conférence contiennent les définitions de ces nouveaux paramètres, quelques propriétés et deux conjectures dont l'une a été prouvée par Favaron [43] et l'autre a fait l'objet de la thèse de doctorat de Bouchou [44].

#### 2.1.2.1 Définitions et propriétés préliminaires

Nous présentons dans ce qui suit les résultats basiques concernant ce type de domination. Dans leur article [10] Fink et Jacobson ont généralisé le concept de la domination en considérant l'impact de la suppression d'une arête ou d'un sommet. Cette étude a été motivée par le résultat suivant:

**Théorème 2.4** (Fink et Jacobson[10], 1985). *Si  $D$  est un  $\gamma(G)$ -ensemble, alors au moins un sommet de  $V - D$  est dominé par au plus deux éléments de  $D$ .*

Ce théorème indique que la propriété de domination pour un  $\gamma(G)$ -ensemble donné peut être détruite en supprimant un sommet ou une arête d'un graphe. Si on exige un degré d'assurance plus élevé de telle sorte que la suppression des arêtes ne détruira pas la propriété de domination de  $D$ , alors un degré de domination plus grand sera nécessaire. Ce qui donne la définition suivante:

**Définition 2.5** (Fink et Jacobson[10], 1985). *Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit  $k$ -dominant de  $G$  si tout sommet de  $V - D$  possède au moins  $k$  voisins dans  $D$ .*

Un sommet  $v$  de  $V - D$  est dit  $k$ -dominé s'il est dominé par au moins  $k$  sommets de  $D$ , c'est à dire,  $|N(v) \cap D| \geq k$ . Le nombre de  $k$ -domination  $\gamma_k(G)$  est le cardinal minimum d'un ensemble  $k$ -dominant de  $G$ . Un ensemble  $k$ -dominant  $D$  d'un graphe  $G$  est dit  $\gamma_k(G)$ -ensemble si  $|D| = \gamma_k(G)$ . Notons que si  $k = 1$ , alors  $\gamma_1(G) = \gamma(G)$ , est le nombre de domination usuelle.

Par définition, puisque tout sommet de  $V - D$  est au moins  $k$ -dominé par  $D$ , alors tout ensemble  $k$ -dominant de  $G$  contient tous les sommets de degré inférieur à  $k$ . Par ailleurs, si  $n \geq k$ , alors  $\gamma_k(G) \geq k$ .

**Définition 2.6** ([10]). *Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Un  $k$ -dominant de  $G$  est minimal si pour tout sommet  $v$  de  $D$ ,  $D - \{v\}$  n'est pas un  $k$ -dominant.*

Il est clair que tout sur-ensemble  $k$ -dominant d'un graphe est un  $k$ -dominant. De plus, tout ensemble  $(k + 1)$ -dominant est aussi un ensemble  $k$ -dominant et puisque l'ensemble des sommets  $V$  est l'unique ensemble  $(\Delta + 1)$ -dominant, on a par conséquent, pour tout graphe  $G$  :

$$\gamma(G) = \gamma_1(G) \leq \gamma_2(G) \leq \cdots \leq \gamma_\Delta(G) < \gamma_{\Delta+1}(G) = |V|.$$

Fink et Jacobson [10, 11] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un  $k$ -dominant soit minimal dans un graphe  $G$ .

**Théorème 2.7** (Fink et Jacobson[10, 11], 1985). *Soit  $D$  un ensemble  $k$ -dominant d'un graphe  $G$ . Alors  $D$  est minimal si et seulement si pour tout sommet  $v$  de  $D$  :*

1.  $v$  a moins de  $k$  voisins dans  $D$ , ou
2. il existe un sommet  $u \in N(v) \cap (V - D)$  tel que  $|N(u) \cap D| = k$ .

Comme tout paramètre, il est important d'encadrer le nombre de la  $k$ -domination puis caractériser les graphes pour lesquels les bornes sont atteintes. Le Survey de Chellali, Favaron, Hansberg et Volkmann [45] englobe les principaux résultats sur la  $k$ -domination et la  $k$ -indépendance dans les graphes. En s'inspirant de ce Survey, nous allons nous

attacher aux résultats qui nous semblent importants et nécessaires pour notre travail.

### 2.1.2.2 Bornes sur la $k$ -domination

Commençons par exposer quelques bornes supérieures où la première sur le nombre de  $k$ -domination est celle fournie par Cockayne, Gamble et Shepherd [46] en 1985 et qui généralise celle de Ore (Théorème 2.1).

**Théorème 2.8** (Cockayne et al. [46], 1985). *Si  $G$  est un graphe tel que  $k \leq \delta(G)$ , alors*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n.$$

De nombreuses recherches ont été effectuées pour l'amélioration de cette borne, parmi lesquelles, on cite les travaux de Caro et Roditty [47], Stracke et Volkmann [48], Chen et Zhou [49] et Favaron, Hansberg et Volkmann [50]. Pour plus de détails sur ces résultats, on invite le lecteur à se référer à [45].

Par ailleurs, Fink et Jacobson [10] ont présenté une borne inférieure avec une caractérisation de tous les graphes vérifiant l'égalité.

Rappelons qu'un graphe est dit biparti  $k$ -semi régulier si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles tels que chaque sommet de l'une des deux parties a un degré  $k$ .

**Théorème 2.9** (Fink et Jacobson [10], 1985). *Soit  $k$  un entier. Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  et de taille  $m$ :*

1.  $\gamma_k(G) \geq \frac{k}{k+\Delta}n$
2.  $\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k}$ . De plus si  $m \neq 0$ , alors  $\gamma_k(G) = n - \frac{m}{k}$  si et seulement si  $G$  est un graphe biparti  $k$ -semi régulier.

Il est bien connu que pour les arbres d'ordre  $n$ ,  $m = n - 1$  et il en résulte du Théorème 2.9-(2) que pour tout arbre d'ordre  $n$  et tout entier  $k$ ,

$$\gamma_k(G) \geq \frac{k(n-1) + 1}{k}.$$

En [51], Volkmann a caractérisé les arbres extrémaux vérifiant  $\gamma_k(G) = \left\lceil \frac{k(n-1)+1}{k} \right\rceil$ .

### 2.1.2.3 Comparaison entre les nombres $\gamma(G)$ et $\gamma_k(G)$

La première question soulevée par Fink et Jacobson était sur la comparaison entre  $\gamma_k(G)$  et  $\gamma(G)$ .

Etant donné un graphe  $G$  et un entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq \Delta(G)$ . Soit  $D$  un  $\gamma_k(G)$ -ensemble et  $x$  un sommet de  $V - D$ . Si  $X \subseteq N_G(x) \cap D$  est l'ensemble des voisins de  $x$  dans  $D$  tels que  $|X| = k - 1$ , alors il est évident que tout sommet de  $V - ((D - X) \cup \{x\})$  a au moins un voisin dans  $(D - X) \cup \{x\}$  et donc ce dernier est un ensemble dominant de  $G$ . Ceci donne le résultat suivant qui établit une relation entre  $\gamma(G)$  et  $\gamma_k(G)$ .

**Théorème 2.10** (Fink et Jacobson [10], 1985). *Si  $G$  est un graphe avec  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ , alors*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2.$$

Un autre résultat dans ce sens établi par Chellali et al. [52] qui donne une borne inférieure sur la différence  $\gamma_k - \gamma$  en fonction de l'ordre et le degré maximum de  $G$ .

**Observation 2.11** (Chellali et al. [52], 2010). *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta \geq 3$ , alors*

$$\gamma_k(G) - \gamma(G) \geq \frac{5k - 3\Delta}{8(\Delta + k)}n.$$

Les derniers résultats en cette direction sont ceux de Hansberg qui a donné des propriétés de graphes pour que la borne du Théorème 2.10 soit atteinte.

**Théorème 2.12** (Hansberg [53], 2015). *Soit  $G$  un graphe connexe et  $k$  un entier tel que  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ . Si  $\gamma_k(G) = \gamma(G) + k - 2$ , alors tout sommet de  $G$  appartient à un cycle induit de longueur 4.*

Comme l'indique le Théorème 2.12, les graphes tels que  $\gamma_k(G) = \gamma(G) + k - 2$  contiennent un nombre important de cycles induits  $C_4$ .

**Théorème 2.13** (Hansberg [53], 2015). *Soit  $G$  un graphe connexe et  $k$  un entier avec  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ . Si  $\gamma_k(G) = \gamma(G) + k - 2$ , alors  $G$  contient au moins  $(\gamma(G) - 1)(k - 1)$  cycles induits de longueur 4.*

En inversant les données des deux derniers théorèmes, Hansberg et autres ont obtenu une amélioration pour la borne inférieure du Théorème 2.10. Des classes de graphes pour lesquelles la borne  $\gamma(G) + k - 2$  du Théorème 2.10 a été légèrement améliorée par  $\gamma(G) + k - 1$  ont été déterminées.

**Corollaire 2.14** (Hansberg [53], 2015). *Soit  $G$  un graphe connexe. S'il existe un sommet  $u \in V$  qui n'est contenu dans aucun cycle induit de longueur 4 de  $G$ , alors*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 1.$$

**Corollaire 2.15** (Hansberg [53], 2015). *Soit  $G$  un graphe tel que  $\Delta(G) \leq n(G) - 2$  et  $k$  un entier avec  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ . Si  $G$  a moins de  $(\gamma(G) - 1)(k - 1)$  cycles induits de longueur 4, alors*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 1.$$

**Corollaire 2.16** (Chellali et al. [52], 2010). *Soit  $k$  un entier tel que  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ . Si  $G$  est un graphe sans cycles induits  $C_4$ , alors*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 1.$$

Puisque les graphes triangulés ne contiennent aucun cycle  $C_4$  alors le résultat suivant est immédiat.

**Corollaire 2.17** (Chellali et al. [52], 2010). *Soit  $k$  un entier tel que  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ . Si  $G$  est un graphe triangulé, alors*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 1.$$

Voici un autre résultat dans le cas où le nombre des cycles induits  $C_4$  et au plus  $k - 2$ .

**Corollaire 2.18** (Chellali et al [52], 2010). *Pour un entier  $k$  avec  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ , Si  $G$  est un graphe avec au plus  $k - 2$  cycles induits  $C_4$  alors*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 1.$$



Pour le cas des arbres, le résultat suivant a été obtenu lorsque  $k \geq 3$ .

**Théorème 2.19** (Chellali et al. [52], 2010). *Soit  $T$  un arbre tel que  $\Delta(T) \geq k \geq 3$  pour un entier  $k$ . Alors  $\gamma_k(T) = \gamma(T) + k - 1$  si et seulement si  $T$  est isomorphe à une étoile subdivisée  $SS_k$  moins  $p$  feuilles pour un entier  $1 \leq p \leq k$ .*

Le cas  $k = 2$  a été considéré par Hansberg et Volkmann dans [54, 55, 56] qui ont montré que  $\gamma_2(G) \geq \gamma(G) + 1$  pour les graphes blocs ou unicycliques sans  $C_4$ . De plus ils ont caractérisé les graphes appartenant à ces deux familles vérifiant l'égalité  $\gamma_2(G) = \gamma(G) + 1$ . Les arbres extrémaux lorsque  $k = 2$ , sont donnés par le résultat suivant.

**Théorème 2.20** (Volkmann [51], 2007). *Tout arbre non trivial satisfait  $\gamma_2(T) = \gamma(T) + 1$  si et seulement si  $T$  est une étoile subdivisée  $SS_t$  ou une étoile subdivisée  $SS_t$  moins une feuille ou une double étoile subdivisée  $SS_{s,t}$ .*

Hansberg et Volkmann [56] ont observé que si  $k = 2$ , alors le Théorème 2.10 devient: *Si  $G$  est un graphe avec  $\Delta(G) \geq 2$ , alors*

$$\gamma_2(G) \geq \gamma(G).$$

Ainsi, ils se sont intéressés à la caractérisation des graphes  $G$  tels que  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ .

**Théorème 2.21** (Hansberg et Volkmann [56], 2008). *Si  $G$  est un graphe connexe non trivial tel que  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ , alors  $\delta(G) \geq 2$ .*

En utilisant le Théorème 2.3, Hansberg et Volkmann [56] ont prouvé l'Observation suivante:

**Observation 2.22** ([56]). *Soit  $G$  un graphe connexe. Si  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ , alors  $G$  a au moins deux ensembles dominants minimums.*

Rappelons qu'un graphe est dit  $C_4$ -cactus s'il est obtenu à partir d'un arbre non trivial en remplaçant chaque arête par une arête double puis en subdivisant chacune d'elles.

Le résultat suivant donne une caractérisation des graphes cactus vérifiant  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ .

**Théorème 2.23** (Hansberg et Volkman [56], 2008). *Soit  $G$  un graphe cactus. Alors  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$  si et seulement si  $G$  est un  $C_4$ -cactus.*

Le prochain résultat dû à Hansberg, Randerath et Volkman [57] concerne les classes des graphes sans griffes. Décrivons la famille  $\mathcal{H}$  utilisée dans cette caractérisation:

Soit  $\mathcal{H}$  la famille des graphes tels que  $G \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $G$  provient d'un produit Cartésien de deux graphes complets d'ordre  $p$  pour un entier  $p \geq 3$  en gonflant chaque sommet sauf ceux situés sur une diagonale en une clique d'ordre arbitraire, ou bien  $G$  est un graphe sans griffes avec  $\Delta(G) = n(G) - 2$  contenant deux sommets non adjacents de degré maximum.

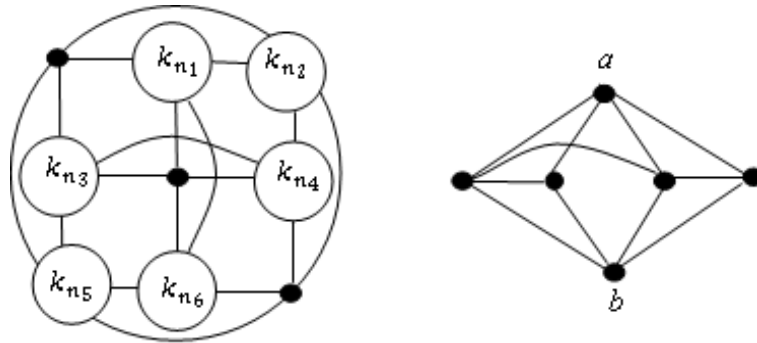
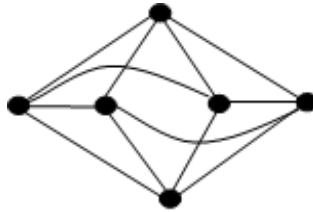


Figure 2.1. Exemple de graphes de la famille  $\mathcal{H}$ .

**Théorème 2.24** (Hansberg et al.[57], 2016). *Soit  $G$  un graphe connexe sans griffes. Alors  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$  si et seulement si  $G \in \mathcal{H}$ .*

On appelle *graphe adjoint* de  $G$ , le graphe  $\mathcal{L}(G)$  ayant pour ensemble de sommets l'ensemble  $E$  des arêtes de  $G$  et tel que deux sommets dans  $\mathcal{L}(G)$  sont adjacents si les arêtes correspondantes sont adjacentes dans  $G$ . A noter que les graphes adjoints sont des graphes sans griffes.

**Théorème 2.25** (Hansberg et al.[57], 2016). *Soit  $G$  un graphe adjoint Alors  $\gamma_2(G) = \gamma(G)$  si et seulement si  $G = \mathcal{L}(K_{p,p})$  ou  $G = \mathcal{L}(K_4)$  illustré dans la Figure 2.2.*

Figure 2.2. Graphe  $\mathcal{L}(K_4)$ .

## 2.2 La domination multiple connexe

La  $k$ -domination connexe a été introduite par Volkmann [14]. Rappelons qu'un sous ensemble  $D \subseteq V(G)$  d'un graphe connexe  $G$  est un  $k$ -dominant connexe, si  $D$  est un ensemble  $k$ -dominant de  $G$  et le sous graphe induit par  $D$  est connexe. Le nombre de  $k$ -domination connexe  $\gamma_k^c(G)$  est le cardinal minimum d'un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$ .

### 2.2.1 Bornes sur la $k$ -domination connexe

Il est évident que  $1 \leq \gamma_k^c(G) \leq n$  pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ . Dans [14], Volkmann a caractérisé tous les graphes connexes  $G$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n$  pour un entier  $k \geq 2$ .

**Proposition 2.26** (Volkmann [14], 2009). *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 2$  et  $k \geq 2$  un entier. Alors  $\gamma_k^c(G) = n$  si et seulement si tous les sommets de  $G$  sont des points d'articulation ou bien de degré inférieur à  $k$ .*

Puisque tout sommet d'un arbre différent d'une feuille est un point d'articulation alors il s'ensuit que

**Corollaire 2.27** (Volkmann [14], 2009). *Soit  $k \geq 2$  un entier. Si  $T$  est un arbre, alors*

$$\gamma_k^c(T) = n(T).$$

**Corollaire 2.28** (Volkmann [14], 2009). *Si  $G$  est un graphe connexe avec  $\delta(G) \geq k$  pour  $k \geq 2$  un entier, alors*

$$\gamma_k^c(G) \leq n(G) - 1.$$

Un résultat plus général que le Corollaire 2.28 est la proposition suivante donnée par Volkmann [14]:

**Proposition 2.29** (Volkmann [14], 2009). *Soient  $k, p$  deux entiers tels que  $k \geq 1$  et  $p \geq 0$ . Si  $G$  est un graphe connexe d'ordre  $n$  et de degré minimum  $\delta \geq p + k$ , alors*

$$\gamma_k^c(G) \leq n - p - 1.$$

Volkmann a fourni une caractérisation de tous les graphes connexes  $G$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n - 1$  lorsque  $\delta(G) \geq k \geq 2$ . C'est le cas spécial  $p = 0$  pour la Proposition 2.29.

**Théorème 2.30** (Volkmann [14], 2009). *Soit  $k \geq 2$  un entier, et soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  et de degré minimum  $\delta$ .*

1. *Si  $\delta \geq 2$ , alors  $\gamma_2^c(G) = n - 1$  si et seulement si  $G$  est un cycle.*
2. *Si  $\delta \geq k \geq 3$ , alors  $\gamma_k^c(G) = n - 1$  si et seulement si  $G \cong K_{k+1}$ .*

### 2.2.2 Comparaison entre les nombres $\gamma_k^c(G)$ et $\gamma_c(G)$

En s'inspirant du Théorème 2.10, Volkmann a déduit que pour tout graphe connexe  $G$

$$\gamma_k^c(G) \geq \gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2 \quad (*)$$

ce qui donne une comparaison entre  $\gamma_k^c(G)$  et  $\gamma(G)$ , i.e.

$$\gamma_k^c(G) \geq \gamma(G) + k - 2.$$

Pour  $k \geq 4$ , Volkmann [14] a donné les familles des graphes pour lesquelles  $\gamma_k^c(G) = \gamma(G) + k - 2$ . Par ailleurs, il a donné aussi des bornes inférieures sur  $\gamma_k^c$  pour  $k \in \{2, 3\}$  en fonction de  $\gamma_c$  en montrant le résultat suivant:

**Théorème 2.31** (Volkmann [14], 2009). *Si  $G$  est un graphe connexe d'ordre  $n \geq 2$ , alors*

$$\gamma_2^c(G) \geq \gamma_c(G) + 1 \text{ et } \gamma_3^c(G) \geq \gamma_c(G) + 2.$$

Les problèmes ouverts suivants ont été proposés par Volkmann [14, 45]:

**Problème 2.32** (Volkmann [14], 2009. Chellali et al.[45], 2012). *Soit  $k \geq 2$  un entier. Caractériser les graphes connexes  $G$  avec une des propriétés suivantes.*

1.  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ ,
2.  $\gamma_2^c(G) = \gamma_c(G) + 1$ ,
3.  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ ,
4.  $\gamma_3^c(G) = \gamma_c(G) + 2$ ,
5.  $\gamma_k^c(G) = \gamma(G) + k - 2$ , pour  $k \geq 4$ ,
6.  $\gamma_k^c(G) = \gamma_c(G) + k - 2$ , pour  $k \geq 4$ ,
7.  $\gamma_k^c(G) = \gamma_k(G)$ ,
8.  $\gamma_k^c(G) = n(G) - 2$ , pour  $\delta(G) \geq k \geq 2$ ,
9.  $\gamma_k^c(G) = \left\lceil n(G) + \frac{n(G)-m-1}{k-1} \right\rceil$ ,
10.  $\gamma_k^c(G) = \left\lceil \frac{kn(G)-2}{\Delta+k-2} \right\rceil$ .

Hansberg [58] a caractérisé les graphes bloc-cactus tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma_c(G) + 1$  (ce résultat sera donné un peu plus loin).

Quant à nous, nous tenons dans le chapitre trois à caractériser les graphes connexes  $G$  avec  $\gamma_k^c(G) = n - 2$  lorsque  $\delta(G) \geq k \geq 2$ . Nous donnerons quelques propriétés des graphes connexes  $G$  vérifiant  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . En considérant les cas  $k = 2$  et  $k = 3$ , nous poursuivrons notre travail par une caractérisation complète des graphes connexes cubiques  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  et les graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . Nous donnerons aussi quelques propriétés pour les graphes connexes  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  et d'autres pour ceux vérifiant  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  accompagnées d'une caractérisation de quelques familles de graphes.

Si  $\gamma(G) \geq k - 1$ , alors le résultat suivant implique que  $\gamma_k^c(G) \geq \gamma(G) + k - 1$ .

**Théorème 2.33** (Volkman [14], 2009. Chellali et al.[45], 2012). *Si  $G$  est un graphe connexe d'ordre  $n \geq 2$ , alors*

$$\gamma_k^c(G) \geq \min\{2\gamma(G), \gamma(G) + k - 1\}.$$

Un résultat analogue à celui de Fink et Jacobson [10] (Théorème 2.10) procurant une borne sur  $\gamma_k^c$  en fonction de  $\gamma_c$  a été établi par Hansberg [58]. Ce résultat améliore la borne (\*).

**Théorème 2.34** (Hansberg [58], 2010). *Soit  $G$  un graphe connexe et  $k$  un entier avec  $1 \leq k \leq \delta(G)$ . Alors*

$$\gamma_k^c(G) \geq \gamma_c(G) + k - 2.$$

En définissant le paramètre  $\kappa_{\max}(G)$  d'un graphe  $G$ , qui désigne le nombre maximum de composantes de  $G - u$  parmi tous les sommets  $u \in V$ , Hansberg [58] a amélioré d'une certaine manière la borne de Volkman [14] (Théorème 2.31) pour les graphes ayant des points d'articulation et  $k = 2$ .

**Théorème 2.35** (Hansberg [58], 2010. Chellali et al.[45], 2012). *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 2$ . Si  $G$  a un point d'articulation, alors*

$$\gamma_2^c(G) \geq \gamma_c(G) + \kappa_{\max}(G).$$

L'inégalité de Volkman  $\gamma_2^c(G) \geq \gamma_c(G) + 1$  du Théorème 2.31 assemblée avec celle du Théorème 2.35 implique le Corollaire suivant:

**Corollaire 2.36** (Hansberg [58], 2010. Chellali et al.[45], 2012). *Si  $G$  est un graphe connexe non trivial, alors*

$$\gamma_2^c(G) \geq \gamma_c(G) + \kappa_{\max}(G).$$

De cette assertion, dérivent les corollaires suivants:

**Corollaire 2.37** (Hansberg [58], 2010). *Si  $G$  est un graphe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma_c(G) + q$ , alors*

$$\kappa_{\max}(G) \leq q.$$

**Corollaire 2.38** (Hansberg [58], 2010). *Si  $G$  est un graphe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma_c(G) + 1$ , alors  $G$  ne contient pas de points d'articulation.*

Il en résulte

**Corollaire 2.39** (Hansberg [58], 2010). *Soit  $G$  un graphe bloc-cactus. Alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma_c(G) + 1$  si et seulement si  $G$  est un graphe complet  $K_n$  d'ordre  $n \geq 2$ , ou bien un cycle  $C_n$  de longueur  $n \geq 3$ .*

D'une façon plus générale, Hansberg [58, 45] a présenté le théorème associé suivant.

**Théorème 2.40** (Hansberg [58], 2010). *Soit  $G$  un graphe connexe et  $k$  un entier avec  $2 \leq k \leq \delta(G)$ . Alors*

$$\gamma_k^c(G) \geq \gamma_c(G) + (k - 2) \kappa_{\max}(G).$$

Pour les graphes ayant des points d'articulation, où  $\kappa_{\max}(G) \geq 2$ , nous gagnons le corollaire suivant:

**Corollaire 2.41** (Hansberg [58], 2010). *Soit  $G$  un graphe connexe et  $k$  un entier tel que  $2 \leq k \leq \delta(G)$ . Si  $G$  contient un point d'articulation, alors*

$$\gamma_k^c(G) \geq \gamma_c(G) + 2(k - 2).$$

**Théorème 2.42** (Hansberg [58], 2010). *Soit  $G$  un graphe connexe de  $n$  sommets avec un degré minimum  $\delta(G) \geq 2$ , et soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq \delta(G)$ . Alors*

$$\gamma_k^c(G) \leq n - \kappa_{\max}(G) (\delta(G) - k + 1).$$

Les résultats qu'on a cités dans ce paragraphe ne représentent -en aucun cas - toute la littérature existante pour la domination et la domination multiple. Notre but est d'expliciter les problèmes ouverts qui font l'objet de ce document et pour que le lecteur puisse sentir la grande importance que donnent les chercheurs à cet axe de recherche.

### 2.3 Notion de graphes modifiés

En étudiant un paramètre de domination, nous nous intéressons aux graphes qui sont dans un sens critiques ou stables par rapport à ce paramètre. En effet, nous sommes conduits à explorer la structure de ces graphes en explicitant leurs propriétés.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. On désigne par  $G - v$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $v$ . Le graphe  $G - e$  dénote le graphe résultant de la suppression de l'arête  $e$  tandis que  $(G + e)$  est celui obtenu à partir de  $G$  en ajoutant l'arête  $e$ . On note par  $G_{uv}$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant les deux sommets adjacents  $u$  et  $v$ . Rappelons que la contraction de l'arête  $uv$  est une opération qui consiste, de façon imagée, à fusionner les deux extrémités en les remplaçant par un nouveau sommet  $\overline{uv}$ . Ces opérations sont illustrées dans la Figure 1.9.

Dans ce qui suit nous donnerons les définitions des concepts de criticité et de stabilité pour un paramètre de domination quelconque. Nous ferons aussi un bref passage sur l'historique de l'étude de ces deux concepts en commençant d'abord par celle faite pour le nombre de domination puis nous citerons aussi, quand le contexte le permettra, des études similaires menées pour d'autres types de domination.

Pour un paramètre de domination quelconque  $\pi$ , différentes désignations sont attribuées à un graphe modifié selon les modifications qu'il a subies, pour en citer quelques une :



$\pi$ -sommet-stable	si $\pi(G - v) = \pi(G)$ pour tout sommet $v$ de $V(G)$
$\pi$ -sommet-critique	si $\pi(G - v) < \pi(G)$ pour tout sommet $v$ de $V(G)$
$\pi^+$ -sommet-critique	si $\pi(G - v) > \pi(G)$ pour tout sommet $v$ de $V(G)$
$\pi$ -arête-enlevée-stable	si $\pi(G - e) = \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(G)$
$\pi$ -arête-enlevée-critique	si $\pi(G - e) > \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(G)$
$\pi^-$ -arête-enlevée-critique	si $\pi(G - e) < \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(G)$
$\pi$ -arête-stable	si $\pi(G + e) = \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(\overline{G})$
$\pi$ -arête-critique	si $\pi(G + e) < \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(\overline{G})$
$\pi^+$ -arête-critique	si $\pi(G + e) > \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(\overline{G})$
$\pi$ -point-stable	si $\pi(G_{uv}) = \pi(G)$ pour toute arête $uv \in E(G)$
$\pi$ -point-critique	si $\pi(G_{uv}) < \pi(G)$ pour toute arête $uv \in E(G)$
totalement $\pi$ -point-stable	si $\pi(G_{uv}) = \pi(G)$ pour toute arête $uv \in E(\overline{G})$
totalement $\pi$ -point-critique	si $\pi(G_{uv}) < \pi(G)$ pour toute arête $uv \in E(\overline{G})$

Les notations qu'on vient de citer seront précédées par un entier positif  $k$  si le graphe  $G$  vérifiant l'une de ces propriétés a de plus  $\pi(G) = k$ . Par exemple, un graphe  $G$  est dit  $k$ - $\pi$ -point-stable si  $\pi(G_{uv}) = \pi(G)$  avec  $\pi(G) = k$  pour toute arête  $uv \in E(G)$ .

Beaucoup de chercheurs ont été motivés par les concepts cités ci-dessus à faire des études concernant différents paramètres de domination, mais comme toute approche sur la domination, le nombre  $\gamma$  est le premier paramètre à être étudié.

Les références qu'on donnera dans ce paragraphe ne représentent pas toute la littérature existante pour les concepts qu'on a définis. Il s'agit juste de mettre en évidence le grand intérêt que donnent les chercheurs à ce domaine. Quand il s'agira d'un fait concernant la contraction d'une arête ou la domination multiple, nous allons investir dans ce concept par détailler quelques résultats. Commençons d'abord par citer ceux concernant la domination ordinaire.

Walikar et Acharya [12] suivis par Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [30] ont étudié les graphes pour lesquels le nombre de domination est altéré suite à la suppression d'une arête

quelconque. Ce sont les graphes  $\gamma$ -arête-enlevée-critique satisfaisant  $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$  pour toute arête de  $G$ . Le chapitre 5 du livre [17] en contient plus de détails et de références.

L'article de Walikar et al. [12] a poussé Sumner et Blich [13] à initier l'étude des graphes  $\gamma$ -arête-critiques. Ils ont consacré la plus grande partie de leurs résultats pour l'étude du cas  $1 \leq \gamma \leq 3$ , où ils ont caractérisé des graphes 1- $\gamma$ -arête-critiques et 2- $\gamma$ -arête-critiques. Depuis, plusieurs articles comme [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65] portant le thème des graphes  $\gamma$ -arête critiques sont apparus.

Pour le concept des graphes  $\gamma$ -sommet-critiques, il a été abordé pour la première fois par Brigham, Chinn et Dutton [66, 67] qui ont exploré en particulier le cas  $\gamma = 2$ . L'étude des graphes  $\gamma$ -sommet-critiques pour le cas  $\gamma \geq 3$  est jusqu'à présent, loin d'être achevée sauf quelques propriétés structurelles de ces graphes ont été établies dans [66, 67, 68, 69].

Concernant les cas de stabilité:  $\gamma$ -arête-stable,  $\gamma$ -sommet-stable et  $\gamma$ -arête-enlevée-stable, quelques articles comme [12, 70, 71, 72, 73] ont étudié les trois cas sans aboutir à des caractérisations constructives des graphes  $\gamma$ -arête-stables et  $\gamma$ -sommet-stables.

Les graphes (totalement)  $\gamma$ -point-critiques ont été introduits par Burton et Sumner [33]. Comme ce concept fait l'objet du quatrième chapitre de cette thèse, nous allons nous contenter de citer quelques résultats fournis par Burton et Sumner [33].

Notons qu'un sommet est dit critique si  $\gamma(G - v) < \gamma(G)$ .

**Proposition 2.43** (Burton et Sumner [33], 2006). *Soient  $G = (V, E)$  un graphe simple et  $a, b \in V(G)$ . Alors  $\gamma(G_{ab}) < \gamma(G)$  si et seulement s'il existe un  $\gamma(G)$ -ensemble  $S$  tel que  $a, b \in S$  ou bien  $a$  ou  $b$  est critique.*

**Proposition 2.44.** *Si  $G$  est un graphe ayant  $\gamma(G) = k \geq 2$ , alors  $G$  est  $\gamma$ -point critique (resp. totalement  $\gamma$ -point critique) si et seulement si tout couple de sommets adjacents non critiques appartient au même  $\gamma(G)$ -ensemble.*

Burton et Sumner [33] ont également donné une caractérisation des arbres  $\gamma$ -point critiques.

Vers la fin de leur Article, les auteurs [33] ont laissé deux problèmes ouverts portant sur la recherche d'une borne en fonction de diamètre pour les graphes  $k$ - $\gamma$ -point-critiques (resp. totalement  $k$ - $\gamma$ -point-critiques) pour lesquels l'ensemble des sommets critiques est vide pour  $k \geq 4$ . Ce problème a été traité dans l'article de Chengye, Yuansheng et Linlin [74] qui ont prouvé aussi que les graphes 4- $\gamma$ -point-critiques (resp. totalement 4- $\gamma$ -point-critiques) ont un diamètre au plus cinq et cette borne est atteinte.

D'autres chercheurs se sont investis dans l'étude de classe des graphes critiques et stables par rapport aux différents paramètres. Citons à titre d'exemple quelques résultats:

Dans sa thèse de Master, Derrick Wayne Thacker [75, 76] sous la direction de Teresa Haynes s'est intéressée aux graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques où ils ont caractérisé les cycles et les arbres ayant cette propriété. De plus, ils ont étudié les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques ayant un nombre de domination double égal à trois ou quatre après avoir donné quelques propriétés de ces graphes.

Wang et Shan [77] ont élaboré des travaux concernant les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, et qui viennent s'ajouter à ceux de Haynes et Thacker [75] et ce en donnant quelques propriétés plus générales dont certaines figurent aussi dans l'article de Haynes et Thacker. Wang et Shan [77] se sont orientés en particulier vers l'étude d'existence de couplage dans les graphes 4- $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques.

Dans [78], Wang et Kang ont continué l'étude des propriétés de couplages dans les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, en particulier pour ceux ayant un nombre de domination double égal à trois ou quatre.

L'étude des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-enlevée-stables à été initié par Chellali et Haynes dans [79]. Dans cet article, les auteurs donnent une caractérisation constructive des arbres ayant cette propriété, ainsi que d'autres classes particulières comme les chaînes, les cycles et les graphes bipartis complets.

D'un autre coté, Khelifi et al. [80] se sont intéressés aux graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête critiques. Ils ont donné une condition nécessaire et suffisante pour de tels graphes. Ils ont aussi caractérisé quelques classe de graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête critiques à savoir: les arbres, les graphes sans  $P_4$  et sans  $P_5$ . Par ailleurs, Khelifi et Chellali [81] ont étudié les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet stables (critiques).

Dans un mémoire de Master, Boukhalifa et Zahra [82] sous la direction de Chellali se sont intéressées à l'étude des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -point-stables. Ils ont établi des conditions nécessaires pour les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -point-stables dans le cas général.

**Proposition 2.45** (Boukhalifa et Zahra [82], 2012). *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 3$  et  $u, v$  deux sommets adjacents de  $G$ . Alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(G) + \min(d_{G(u)} - 1, d_{G(v)} - 1) - 1.$$

**Proposition 2.46** (Boukhalifa et Zahra [82], 2012). *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -point-stable, alors  $G$  ne contient pas de supports adjacents.*

**Proposition 2.47** (Boukhalifa et Zahra [82], 2012). *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -point-stable, alors tout support de  $G$  est adjacent à exactement une seule feuille.*

**Proposition 2.48** (Boukhalifa et Zahra [82], 2012). *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -point-stable connexe de maille  $g(G) \geq 4$ . Alors le sous graphe induit par tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble est un graphe 1-régulier.*

Ainsi, une caractérisation des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -point-stables a été établie dans ce mémoire. Aussi, ils ont étudié les graphes totalement  $\gamma_{\times 2}$ -point-stables pour quelques classes particulières à savoir: les arbres, les cycles et les graphes unicycliques.

Les graphes stables (critiques) ont été aussi étudiés par rapport au nombre de domination totale. Les graphes  $\gamma_t$ -point-stables ont été étudiés par Rickett et Haynes [83]. Les auteurs ont obtenu en particulier les résultats suivants:

**Théorème 2.49** (Rickett et Haynes [83], 2011). *Un graphe  $G$  est  $\gamma_t$ -point-stable si et seulement si pour tout  $\gamma_t(G)$ -ensemble  $S$ , le sous graphe induit par  $S$  est un graphe 1-régulier.*

**Observation 2.50.** *Si  $G$  est un graphe connexe avec  $\gamma_t(G) \geq 4$ , alors  $G$  a un  $\gamma_t(G)$ -ensemble ne contenant pas des sommets supports.*

**Théorème 2.51** (Rickett et Haynes [83], 2011). *Si  $G$  est  $\gamma_t$ -point-stable d'ordre  $n$  et  $\gamma_t(G) \geq 4$ , alors  $\gamma_t(G) \leq \frac{2(n-1)}{3}$ .*

Dans le même contexte, Chellali et Jafari Rad [84] ont étudié le cas de l'identification des sommets non adjacents. Par ailleurs, Chellali, Maffray et Tablennehas [85] ont considéré ce problème par rapport à la domination connexe où ils ont étudié différentes classes de graphes à savoir: les graphes cactus, unicycliques et les graphes scindés.

Dans [86], Chellali s'est investi dans l'étude de la  $k$ -domination par rapport à la suppression d'une arête quelconque. En outre, il a donné une caractérisation constructive des arbres  $\gamma_k$ -enlevée-arête stables après avoir établi une condition nécessaire et suffisante pour ces graphes qu'il a noté  $\gamma_k^-$ -stables.

**Théorème 2.52** (Chellali [86], 2015). *Soit  $k$  un entier positif. Un graphe  $G$  est  $\gamma_k^-$ -stable si et seulement si pour toute paire de sommets adjacents  $u, v \in V(G)$ ; il existe un  $\gamma_k(G)$ -ensemble  $D$  tel que une des conditions suivantes est satisfaite:*

- i)  $u, v$  sont tous les deux dans  $D$  ou dans  $V(G) - D$ ;
- ii) si  $u \in D$  et  $v \notin D$  alors  $v$  est  $(k + 1)$ -dominé par  $D$ .

Nous clôturons cette partie en mentionnant que d'autres travaux sont considérés par rapport aux paramètres de domination, Chellali et Jafari Rad [87], Hansberg, Jafari Rad et Volkmann [88] pour la domination romaine., et Jafari Rad [89] pour la domination 2-rainbow.

### CHAPITRE 3

## SUR LA $k$ -DOMINATION CONNEXE DANS LES GRAPHE

Dans ce chapitre nous présentons nos contributions concernant des problèmes ouverts sur la caractérisation des graphes connexes.

Dans [14], Volkmann a caractérisé les graphes connexes  $G$  d'ordre  $n$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n$  pour tout entier  $k \geq 2$ . Il a aussi caractérisé tous les graphes connexe  $G$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n - 1$  où  $\delta(G) \geq k \geq 2$ . Les problèmes de caractériser tous les graphes connexe  $G$  avec  $\gamma_k^c(G) = n - 2$  où  $\delta(G) \geq k \geq 2$ ,  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  et  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  restent ouverts.

Le présent chapitre comporte trois sections. Dans la première, nous donnons d'abord quelques propriétés des graphes connexes  $G$  d'ordre  $n$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Ensuite, nous fournissons une caractérisation complète des graphes connexes cubiques  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  et les graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . Dans la deuxième section nous traitons le problème de la caractérisation des graphes connexes vérifiant  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ , où nous donnerons quelques propriétés. Par ailleurs, nous caractérisons ceux pour lesquels  $\delta(G) = 1$ , ou qui sont de maille d'au moins 5, ainsi que les graphes sans griffes. Une troisième section comporte quelques propriétés pour les graphes connexes  $G$  vérifiant  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  accompagnées d'une caractérisation de quelques familles de graphes à savoir: les graphes connexes tels que  $\delta(G) = 1$  et les graphes sans triangles maximaux.

Une partie des résultats présentés dans ce chapitre fait l'objet d'un article publié dans Australasian Journal of Combinatorics [90]. Ces résultats ont été également acceptés dans COSI'2012.

### 3.1 Propriétés des graphes connexes $G$ avec $\gamma_k^c(G) = n - 2$

Dans cette partie nous donnons quelques propriétés des graphes  $G$  d'ordre  $n$  satisfaisant  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Nous commençons par quelques lemmes qui seront utiles pour la suite.

**Lemme 3.1** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soit  $k \geq 2$  un entier et  $G$  un graphe connexe tel que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Alors  $\delta(G) \leq k + 1$ .*

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\gamma_k^c(G) = n - 2$  pour un entier  $k \geq 2$ . Supposons que  $\delta(G) \geq k + 2$ . Soit  $D$  un  $\gamma_k^c(G)$ -ensemble et  $x$  un sommet quelconque de  $D$  tel que  $G[D - \{x\}]$  est connexe. Il est clair qu'un tel sommet existe. Puisque  $d_G(x) \geq k + 2$ ,  $x$  a au moins  $k$  voisins dans  $D - \{x\}$ . De plus, tout sommet de  $V - D$  a toujours  $k$  voisins dans  $D - \{x\}$ . Il en résulte que  $D - \{x\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  de taille  $(n - 3)$ , une contradiction.  $\square$

Rappelons qu'un *ensemble indépendant* d'un graphe  $G$  est un ensemble de sommets  $S$ , de telle sorte qu'aucune arête de  $G$  n'a ses deux extrémités en  $S$ . Nous mentionnons que nous utilisons souvent dans nos preuves le fait que dans un graphe connexe non trivial  $G$ , il existe deux sommets tels que la suppression de chacun ne déconnecte pas le graphe résultant.

**Lemme 3.2** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soit  $k \geq 2$  un entier et  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) \geq k$  tel que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Alors pour tout ensemble indépendant  $S$  de taille au moins trois,  $G - S$  est un graphe non connexe.*

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) \geq k \geq 2$  tel que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Soit  $S$  un ensemble indépendant avec  $|S| \geq 3$ . Etant donné que tous sommet de  $S$  a au moins  $k$  voisins dans  $V - S$ , le sous graphe induit par  $V - S$  n'est pas connexe sinon  $V - S$  deviendra un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  de cardinal inférieure à  $n - 2$ .  $\square$

**Lemme 3.3** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soit  $k \geq 2$  un entier positif et  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  avec  $\delta(G) = k + 1$ . Si  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ , alors  $G$  ne contient pas d'isthmes.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) = k + 1$  tel que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$  pour  $k \geq 2$ . Supposons que  $G$  contient un isthme  $uv$ . Notons par  $G_u$  et  $G_v$  les deux composantes résultant de la suppression de  $uv$ , où  $u \in V(G_u)$  et  $v \in V(G_v)$ . En outre, nous supposons que  $uv$  est choisie de manière qu'au moins l'une des composantes  $G_u$  ou  $G_v$  soit sans isthmes, disons  $G_u$ . Puisque  $\delta(G) = k + 1$  et  $k \geq 2$ , chacune de  $G_u$  et  $G_v$  est d'ordre au moins trois. Soit maintenant  $w$  et  $w'$  deux sommets quelconques adjacents dans  $G_u$  différents de  $u$  et soit  $v' \neq v$  un sommet de  $G_v$  tel que  $G_v - \{v'\}$  est connexe. Si  $G_u - \{w, w'\}$  est connexe, alors  $V(G) - \{w, w', v'\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , contradiction. Ainsi, supposons que  $G_u - \{w, w'\}$  n'est pas connexe. Notons par  $G_u^i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $G_u - \{w, w'\}$ . Il est à noter que chaque composante  $G_u^i$  a un ordre au moins deux et puisque  $G_u$  est supposé sans isthme, il existe au moins deux arêtes entre  $\{w, w'\}$  et  $V(G_u^i)$  pour tout  $i$ . Considérons deux cas.

**Cas 1.**  $i \geq 3$ . Sans perte de généralité, soit  $G_u^1$  et  $G_u^2$  deux composantes ne contenant pas  $u$ . Soit maintenant  $x$  un sommet quelconque de  $G_u^1$  tel que  $G_u^1 - \{x\}$  est connexe. Similairement, Soit  $y$  un sommet quelconque de  $G_u^2$  défini comme  $x$ . Observons que  $S = \{x, y, v'\}$  est un ensemble indépendant et donc par le Lemme 3.2,  $G - S$  n'est pas connexe. Par conséquent, ou bien  $G_u - \{x\}$  ou  $G_u - \{y\}$  n'est pas connexe, disons  $G_u - \{x\}$ . Puisqu'il y a au moins deux arêtes entre  $\{w, w'\}$  et  $V(G_u^1)$ , nous concluons que  $w$  et  $w'$  sont tous les deux adjacents à  $x$  et n'ont pas d'autres voisins dans  $G_u^1$  différents de  $x$ . Maintenant, puisque  $\delta(G) = k + 1 \geq 3$ ,  $G_u^1$  est d'ordre au moins trois et donc soit  $x' \neq x$  un sommet de  $G_u^1$  tel que  $G_u^1 - \{x'\}$  est connexe. Egalement, soit  $y'$  un sommet de  $G_u^2$  avec  $y' \neq y$  si  $y$  est l'unique voisin de  $w$  et  $w'$  dans  $G_u^2$  et  $y' = y$  sinon. Il est clair maintenant que  $\{x', y', v'\}$  est un ensemble indépendant de  $G$  et  $G - \{x', y', v'\}$  est connexe, ce qui contredit le Lemme 3.2.

**Cas 2.**  $i = 2$ . Ainsi,  $u$  appartient à  $G_u^1$  ou à  $G_u^2$ , disons  $G_u^1$ . Il est clair que l'un des  $w$  et  $w'$  doit avoir au moins un voisin dans chaque composante. Supposons que  $w$  est un tel sommet. Soit  $y$  un sommet quelconque de  $G_u^2$  tel que  $G_u^2 - \{y\}$  est connexe. Si  $w$  a un autre voisin dans  $G_u^2$  différent de  $y$ , alors  $V(G) - \{w', y, v'\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  de taille  $(n - 3)$ , une contradiction. Par conséquent  $y$  est l'unique voisin de  $w$  dans  $G_u^2$ . Puisque  $\delta(G) = k + 1 \geq 3$ ,  $G_u^2$  est d'ordre au moins trois et alors il y a un sommet



$y' \neq y$  dans  $G_u^2$  tel que  $G_u^2 - \{y'\}$  est connexe. Par conséquent,  $V(G) - \{w', y', v'\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , également une contradiction. La preuve du Lemme 3.3 est complète.  $\square$

**Lemme 3.4** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soit  $k \geq 2$  un entier et  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) = k + 1$ . Si  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ , alors pour tout couple de sommets adjacents  $x, y$ ,  $V(G) - \{x, y\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe minimum de  $G$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) = k + 1$  tel que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$  pour un entier  $k \geq 2$ . Soient  $x, y$  deux sommets adjacents de  $G$ . Puisque  $\delta(G) = k + 1$ ,  $V(G) - \{x, y\}$   $k$ -domine  $G$ . Par conséquent, pour démontrer que  $V(G) - \{x, y\}$  est un  $\gamma_k^c(G)$ -ensemble, il suffit de démontrer  $G' = G - \{x, y\}$  est connexe. Supposons donc le contraire,  $G'$  n'est pas connexe et soit  $C_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $G'$ . Notons que chaque composante  $C_i$  est non triviale et il y a au moins deux arêtes entre  $V(C_i)$  et  $\{x, y\}$ , sinon on aura un isthme, ce qui contredit le Lemme 3.3. Maintenant, soit  $x_i$  un sommet de  $C_i$  tel que  $C_i - \{x_i\}$  est connexe. Si le sous graphe induit par les sommets de  $(V(C_i) - \{x_i\}) \cup \{x, y\}$  n'est pas connexe, alors  $x$  et  $y$  sont tous les deux adjacents à  $x_i$  et n'ont pas d'autres voisins dans  $C_i$  différents de  $x_i$ . Mais il existe alors un autre sommet  $x'_i$  dans  $C_i$  tel que le sous graphe  $G'_i$  induit par  $(V(C_i) - \{x'_i\}) \cup \{x, y\}$  est connexe. Par conséquent, sans perte de généralité, on peut supposer qu'un tel sommet  $x'_i$  existe dans chaque composante  $C_i$ . Maintenant, si  $G'$  a trois composantes ou plus, alors les sommets  $x'_i$  forment un ensemble indépendant dont la suppression ne déconnecte pas  $G$ , ce qui contredit le Lemme 3.2. Par conséquent,  $G'$  a exactement deux composantes. De plus, puisque  $xy$  n'est pas un isthme, un sommet de  $x$  et  $y$ , disons  $x$ , a des voisins dans les deux composantes  $C_1$  et  $C_2$ . Si  $C_1$  est d'ordre deux, alors évidemment  $k = 2$ ,  $\delta(G) = 3$  et donc  $\{x, y\}$  2-domine  $V(C_1)$ , ce qui implique que  $V(G) - (V(C_1) \cup \{x'_2\})$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de taille  $n - 3$ , une contradiction. Par conséquent, on peut supposer que  $|V(C_1)| \geq 3$ . Soit maintenant  $z$  un sommet de  $G'_1$  différent de  $x$  et  $y$ . Rappelons que  $x'_1$  n'appartient pas à  $G'_1$ . Maintenant, si  $G'_1 - \{z\}$  est connexe, alors  $V(G) - \{z, x'_1, x'_2\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$ , une contradiction. Par conséquent,  $G'_1 - \{z\}$  n'est pas connexe, et donc  $z$  est un point d'articulation de  $G'_1$ . Il est clair que chaque composante de  $G'_1 - \{z\}$  est non triviale, et

l'une d'elles contient les deux sommets  $x$  et  $y$ . Dans ce cas, soit  $z'$  un sommet quelconque de la composante, disons  $C^*$ , qui ne contient pas  $x$  et  $y$  et pour laquelle  $C^* - \{z'\}$  est connexe. Notons que si  $z'$  est l'unique voisin de  $z$  dans  $C^*$ , alors on peut trouver un autre sommet  $z''$  tel que  $C^* - \{z''\}$  est connexe. Dans ce cas, on peut supposer que  $z'$  n'est pas l'unique voisin de  $z$  dans  $C^*$ . Il est clair que nous avons maintenant  $V(G) - \{z', x'_1, x'_2\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$ , d'où la contradiction. Ce qui achève la preuve du Lemme 3.4.  $\square$

**Lemme 3.5** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soient  $k \geq 2$  un entier, et  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  et degré minimum  $\delta(G) = k + 1$ . Si  $D$  est un  $\gamma_k^c(G)$ -ensemble de taille  $n - 2$  tel que le sous graphe induit par  $N(V - D)$  est connexe, alors pour tout sommet  $x \in D$ ,  $N(x) \cap (V - D) \neq \emptyset$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  et de degré minimum  $\delta(G) = k + 1$  pour un entier  $k \geq 2$ . Soit  $D$  un  $\gamma_k^c(G)$ -ensemble avec  $|D| = n - 2$ ,  $A = N(V - D)$  et  $B = D - A$ . Supposons que  $G[A]$  est connexe et  $B \neq \emptyset$ . S'il existe un sommet  $x \in B$  tel que  $G[D - \{x\}]$  est connexe, alors  $D - \{x\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  plus petit que  $D$ , une contradiction. Par conséquent, chaque sommet de  $B$  est un point d'articulation dans  $G[D]$ . Il s'ensuit que certains sommets de  $B$ , disons  $y$ , n'ont pas de voisins dans  $A$ , sinon  $G[D - \{y\}]$  est connexe, ce qui contredit le fait que  $y$  est un point d'articulation dans  $G[D]$ . Ainsi,  $N(y) \cap A = \emptyset$ . Maintenant, il est clair que certaines composantes de  $G[D - \{y\}]$  contiennent tout  $A$ . Soit  $C$  une composante de  $G[D - \{y\}]$  ne contenant pas  $A$ . Ainsi, chaque sommet de  $C$  appartient à  $B$ , c'est-à-dire n'a pas de voisins dans  $V - D$ . Notons que  $C$  est non triviale. Soit  $y'$  un sommet de  $C$  tel que  $C - \{y'\}$  est connexe. Dans le cas où  $y'$  est l'unique voisin de  $y$  dans  $C$ , alors  $C$  a un autre sommet  $y''$  tel que  $C - \{y''\}$  est connexe. Dans ce cas, nous considérons  $y''$  au lieu de  $y'$ . Par conséquent, nous pouvons supposer que  $y$  a un voisin dans  $C$  autre que  $y'$ . Il en résulte que  $D - \{y'\}$  est un ensemble  $k$ -dominant connexe de  $G$  plus petit que  $D$ , une contradiction. Donc  $B = \emptyset$  et nous obtenons le résultat désiré.  $\square$

### 3.1.1 Graphes connexes cubiques tels que $\gamma_2^c(G) = n - 2$

Dans cette partie, nous donnons une caractérisation complète des graphes connexes cubiques  $G$  tel que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$ . Il est bien connu qu'un graphe cubique contient un isthme si et seulement si il contient un point d'articulation.

**Théorème 3.6** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soit  $G$  un graphe connexe cubique d'ordre  $n$ . Alors  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  si et seulement si  $G = K_4, K_{3,3}$  ou  $G$  est le graphe complémentaire de  $C_6$ .*

*Preuve.* Il est facile de vérifier que si  $G = K_4, K_{3,3}$  ou  $G$  est le graphe complémentaire de  $C_6$ , alors  $\gamma_2^c(G) = n - 2$ .

Inversement, soit  $G$  un graphe cubique connexe tel que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$ . D'abord, nous supposons que  $G$  a un sommet  $x$  dont le voisinage, disons  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , est un ensemble indépendant. Par le Lemme 3.4,  $V(G) - \{x, x_1\} = V'$  est un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble. Soit  $A = \{x_2, x_3\}$  et  $B = N(x_1) - \{x\} = \{y_1, y_2\}$ . Il est clair que  $A \cap B = \emptyset$  puisque  $N(x)$  est indépendant. Soit  $V'' = V' - (A \cup B)$ . Nous allons montrer que  $V'' = \emptyset$ . Supposons au contraire que  $V'' \neq \emptyset$  et soit  $z$  un sommet quelconque de  $V''$ . Alors  $z$  est un point d'articulation dans  $G[V']$ , sinon  $V(G) - \{x, x_1, z\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , contradiction. Notons que chaque composante de  $G[V' - \{z\}]$  contient au moins un sommet de  $A \cup B$ , sinon  $z$  est un point d'articulation dans  $G$ , ce qui implique que  $G$  a un isthme, contradiction avec le Lemme 3.3. Considérons les deux cas suivants.

**Cas 1.**  $G[V' - \{z\}]$  contient trois composantes connexes  $C_1, C_2$  et  $C_3$ . Il est clair que chaque  $C_i$  est non triviale et  $z$  a exactement un voisin dans chaque composante  $C_i$ . De plus, puisque chaque composante contient au moins un sommet de  $A \cup B$ , on peut supposer, sans perte de généralité, que  $y_1 \in V(C_1)$ ,  $x_2 \in V(C_2)$  et  $x_3, y_2 \in V(C_3)$ . Maintenant, soit  $a \in V(C_1)$  tel que  $a = y_1$  si  $y_1 z \notin E(G)$  et  $a \in N(y_1) - \{z, x_1\}$  sinon. Nous observons que  $C_1 - \{a\}$  est connexe, sinon  $a$  est un point d'articulation dans  $C_1$  et donc dans  $G$ , contradiction. Similairement, soit  $b \in V(C_2)$  tel que  $b = x_2$  si  $x_2 z \notin E(G)$  et  $b = N(x_2) - \{z, x_1\}$  sinon. Alors  $C_2 - \{b\}$  est aussi connexe. En outre, soit  $c \in V(C_3)$  tel que  $cz \notin E(G)$  et  $C_3 - \{c\}$  est connexe. Il est évident maintenant que  $\{a, b, c\}$  est un

ensemble indépendant dont la suppression ne déconnecte pas  $G$ , ce qui contredit le Lemme 3.2.

**Cas 2.**  $G[V' - \{z\}]$  contient deux composantes connexe  $C_1$  et  $C_2$ . Il est clair que chaque  $C_i$  est non triviale. Aussi, supposons, sans perte de généralité, que  $|N(z) \cap C_1| = 1$ . Soit  $w$  un sommet de  $C_1$  tel que  $C_1 - \{w\}$  est connexe. Notons que  $C_1$  contient au moins deux de ces sommets  $w$ , l'un d'eux n'est pas adjacent à  $z$ . Nous examinons maintenant les situations suivantes selon que  $C_1$  contient un, deux ou trois sommets de  $A \cup B$ .

- a)  $|(A \cup B) \cap V(C_1)| = 1$ . Sans perte de généralité, soit  $\{x_2\} \subset V(C_1)$ . Ici nous supposons seulement que  $w$  soit différent de  $x_2$ . Nous observons que le sous graphe induit par  $V(G) - \{z, w\}$  est connexe. Maintenant, puisque  $x$  a un voisin dans  $C_2$ , Nous obtenons que  $V(G) - \{z, w, x_1\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ .
- b)  $|V(C_1) \cap A| = 1$  et  $|V(C_1) \cap B| = 1$ . Sans perte de généralité, soit  $\{x_2, y_2\} \subset V(C_1)$ . Supposons que  $wz \notin E(G)$  et soit  $w' \in V(C_2)$  tel que  $C_2 - \{w'\}$  est connexe. Alors  $V(G) - \{w, w', z\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ .
- c)  $A \subset V(C_1)$  et  $B \subset V(C_2)$ . Supposons que  $wz \notin E(G)$  et soit  $w' \in V(C_2)$  tel que  $C_2 - \{w'\}$  est connexe. Il est clair que  $V(G) - \{w, w', x\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ .
- d)  $|(A \cup B) \cap V(C_1)| = 3$ . Sans perte de généralité, supposons que  $\{x_3, y_1, y_2\} \subset V(C_1)$  et soit  $x'_2 \in N(x_2) \cap V(C_2)$ . Alors selon le Lemme 3.4,  $V(G) - \{x_2, x'_2\}$  est un  $\gamma_c^2(G)$ -ensemble. Egalement, nous observons que  $z$  est adjacent à au plus un sommet de  $x_2$  et  $x'_2$ , sinon  $x'_2$  deviendra un point d'articulation dans  $C_2$  et donc dans  $G$ , ce qui est exclu. Maintenant, il est évident que  $V(G) - \{x_2, x'_2, x_1\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ .

Il est clair que chacune des situations précédentes conduit à une contradiction. Par conséquent, nous concluons que  $V'' = \emptyset$ , ce qui implique que  $G$  est isomorphe à  $K_{3,3}$ .

A partir de maintenant, on peut supposer que le voisinage de tout sommet de  $G$  contient au moins deux sommets adjacents, et donc  $G$  est un graphe sans griffes. Soit  $x$  un sommet

de  $G$  avec  $N_G(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $x_1x_2 \in E(G)$ . Par le Lemme 3.4,  $V(G) - \{x, x_3\} = V'$  est un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble. Soit  $V'' = V' - N_G(\{x, x_3\})$ . Nous allons montrer que  $V'' = \emptyset$ . Supposons au contraire que  $V'' \neq \emptyset$  et soit  $z$  un sommet quelconque de  $V''$ . Alors  $z$  est un point d'articulation dans  $G[V']$ , sinon  $V(G) - \{x, x_3, z\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , contradiction. Notons que puisque  $V'' \neq \emptyset$ , nous avons  $N_G(\{x, x_3\}) \neq \{x_1, x_2\}$ . Egalement, tous les voisins de  $x_1$  et  $x_3$  dans  $V'$  n'appartiennent pas à la même composante de  $G[V' - \{z\}]$ , sinon  $z$  serait un point d'articulation dans  $G$ . D'autre part, puisque  $G$  est sans griffes,  $G[V' - \{z\}]$  contient exactement deux composantes connexes  $C_1$  et  $C_2$ . Sans perte de généralité, let  $|N(z) \cap C_1| = 1$ . Nous considérons les deux cas suivants:

- e)  $N_G(x_3) \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$ . Soit  $N_G(x_3) = \{x, y_1, y_2\}$ . Alors  $y_1y_2 \in E(G)$  puisque  $G$  est sans griffes. Supposons que  $\{x_1, x_2\} \subset V(C_1)$ , et soit  $w$  un sommet de  $C_1$  tel que  $C_1 - \{w\}$  est connexe et  $wz \notin E(G)$ . Soit aussi  $w' \in V(C_2)$  tel que  $C_2 - \{w'\}$  est connexe. Alors  $V(G) - \{w, w', x\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , d'où la contradiction.
- f)  $N_G(x_3) \cap \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$ . Puisque  $V'' \neq \emptyset$ , alors nous avons  $|N(x_3) \cap \{x_1, x_2\}| = 1$ . Soit  $x_3x_2 \in E(G)$  et  $N_G(x_3) = \{x, x_2, y\}$ . Supposons que  $y$  appartient à la composante  $C_i$ , où  $i = 1$  ou  $2$ . Il s'ensuit que  $\{x_1, x_2\} \subset V(C_{3-i})$ . Notons que si  $y \in V(C_1)$ , alors  $yz \notin E(G)$ , sinon  $y$  serait un point d'articulation dans  $C_1$  et donc dans  $G$ . Soit maintenant  $w'$  un sommet de la composante qui contient  $y$  tel que  $w'z \in E(G)$  et  $w' \neq y$ . Donc d'après le Lemme 3.4,  $V(G) - \{w', z\}$  est un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble et par conséquent  $V(G) - \{w', z, x\}$  est un ensemble 2-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , d'où la contradiction.

D'après ce qui a précédé, on conclut que  $V'' = \emptyset$ . Maintenant, puisque  $G$  est d'ordre pair alors  $n = 4$  ou  $n = 6$  et par conséquent  $G$  est isomorphe à  $K_4$  ou à  $\overline{C}_6$  respectivement.  $\square$

### 3.1.2 Graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que $\gamma_3^c(G) = n - 2$

En vertu du Lemme 3.1, il n'existe pas de graphes connexes 4-réguliers sans griffes vérifiant la relation  $\gamma_2^c(G) = n - 2$ , pour cela on s'intéressera au paramètre  $\gamma_3^c(G)$ .

Comme le titre l'indique, dans cette partie nous considérons les graphes connexes 4-réguliers sans griffes, où nous donnons une caractérisation de tels graphes  $G$  avec  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ .

**Théorème 3.7** (Attalah et Chellali [90], 2013). *Soit  $G$  un graphe connexe 4-régulier sans griffes d'ordre  $n$ . Alors  $\gamma_3^c(G) = n - 2$  si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $K_5$  ou  $K_{2,2,2}$ .*

*Preuve.* Il est facile de voir que si  $G \in \{K_5, K_{2,2,2}\}$  alors  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . Pour démontrer la condition nécessaire, soit  $G$  un graphe connexe, 4-régulier sans griffes d'ordre  $n$  vérifiant  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . Supposons d'abord que  $G$  contient un sommet dont le voisinage ouvert induit un sous-graphe non connexe. Soit  $x$  un tel sommet avec  $N_G(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Alors d'après le Lemme 3.4,  $V' = V(G) - \{x, x_4\}$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble. Soit  $V'' = V' - N_G(\{x, x_4\})$ . Nous allons démontrer que  $V'' = \emptyset$ . Supposons le contraire,  $V'' \neq \emptyset$  et soit  $z$  un sommet quelconque de  $V''$ . Il est clair que  $z$  est un point d'articulation dans  $G[V']$ , sinon  $V(G) - \{x, x_4, z\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de taille inférieure à  $(n - 2)$ , contradiction. Aussi, puisque  $G$  est sans griffes, la suppression de  $z$  dans  $G[V']$  fournit deux composantes connexes non triviales, disons  $C_1$  et  $C_2$ . Observons que le sous graphes induit par  $N_G(\{x, x_4\})$  n'est pas connexe sinon par le Lemme 3.5,  $z$  serait adjacent à  $x$  ou à  $x_4$ , ce qui est impossible. Si tous les sommets de  $N_G(\{x, x_4\})$  appartiennent à la même composante dans  $G[V' - \{z\}]$ , disons  $C_1$ , alors soit  $t$  un sommet de  $C_2$  tel que  $C_2 - \{t\}$  est connexe. Notons que si  $z$  a un unique voisin dans  $C_2$ , alors  $t$  est choisi de telle sorte que  $tz \notin E(G)$ . Il est clair maintenant que  $V(G) - \{x, x_4, t\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , d'où la contradiction. Par conséquent, chacune de  $C_1$  et  $C_2$  contient au moins un sommet de  $N_G(\{x, x_4\})$ . Puisque  $G$  est sans griffes, nous distinguons deux cas selon que  $G[N(x)] = K_3 \cup K_1$  ou  $K_2 \cup K_2$ .

**Cas 1.**  $G[N(x)] = K_3 \cup K_1$ . Il y a deux situations selon que  $x_4$  appartient à  $K_3$  ou non. Alors supposons que  $\{x_1, x_2, x_3\}$  induit un  $K_3$ . Dans ce cas, soit  $N_G(x_4) = \{x, y_1, y_2, y_3\}$ . Alors  $\{y_1, y_2, y_3\}$  induit un  $K_3$ , puisque  $G$  est sans griffes. Sans perte de généralité, on

peut supposer que  $\{x_1, x_2, x_3\} \subset V(C_1)$  et par conséquent  $\{y_1, y_2, y_3\} \subset V(C_2)$ . Soit maintenant  $w \in V(C_1)$  et  $w' \in V(C_2)$  tel que  $C_1 - \{w\}$  et  $C_2 - \{w'\}$  est connexe. Notons que si  $z$  a un unique voisin dans  $C_1$ , alors  $w$  est choisi tel que  $wz \notin E(G)$ . Similairement pour  $w'$  dans  $C_2$ . Alors  $V(G) - \{w, w', x\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , contradiction.

Maintenant, supposons que  $K_3 = \{x_2, x_3, x_4\}$  et soit  $y_1$  le quatrième voisin de  $x_4$ . Puisque  $x_2x_3 \in E(G)$ , on peut supposer que  $\{x_2, x_3\} \subset V(C_1)$  et donc  $C_2$  contient au moins un sommet de  $x_1$  et  $y_1$ .

a)  $\{x_1, y_1\} \subset V(C_2)$ . Supposons que  $z$  a au moins deux voisins dans  $C_1$ . Alors  $zx_1 \notin E(G)$  sinon le voisinage fermé de  $x_1$  induit une griffe. Similairement  $zy_1 \notin E(G)$ . Dans ce cas, soit  $w'$  un voisin quelconque de  $z$  dans  $C_2$ . Par le Lemme 3.4,  $V(G) - \{z, w'\}$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble et alors  $V(G) - \{z, w', x\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , d'où la contradiction. Supposons maintenant que  $z$  a exactement un voisin dans  $C_1$ . Il est clair que le voisinage de  $z$  dans  $C_2$  induit une clique  $K_3$ . Soit  $w'$  un sommet quelconque de  $C_2$  adjacent à  $z$  et soit  $w$  un sommet de  $C_1$  tel que  $wz \notin E(G)$  et  $C_1 - \{w\}$  est connexe. En utilisant le Lemme 3.4, il est clair que  $V(G) - \{z, w', w\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de taille inférieure à  $(n - 2)$ , contradiction.

b) Maintenant, supposons que  $y_1 \in V(C_2)$  et  $x_1 \in V(C_1)$ . Notons que si  $z$  a un unique voisin dans  $C_2$ , alors un tel sommet est différent de  $y_1$ , sinon le voisinage fermé de  $y$  induit une griffe. Alors on peut supposer que  $z$  a un voisin dans  $C_2$ , disons  $w$  tel que  $w \neq y_1$ . D'après le Lemme 3.4,  $V(G) - \{z, w\}$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble et par conséquent  $V(G) - \{z, w, x\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de taille inférieure à  $(n - 2)$ , contradiction. Le cas restant  $y_1 \in V(C_1)$  and  $x_1 \in V(C_2)$  peut être vu en utilisant un argument similaire à celui utilisé pour la situation précédente.

**Cas 2.**  $G[N(x)] = K_2 \cup K_2$ . Sans perte de généralité, soit  $x_1x_2 \in E(G)$  et  $x_3x_4 \in E(G)$ . Aussi, soient  $y_1, y_2$  le troisième et le quatrième voisin de  $x_4$ . Il s'ensuit que  $y_1y_2 \in E(G)$  sinon  $\{x, x_4, y_1, y_2\}$  induit une griffe. Egalement, sans perte de généralité, on peut supposer que  $\{x_1, x_2\} \subset V(C_1)$ . Considérons les situations suivantes.

- c)  $\{y_1, y_2\} \subset V(C_2)$ . Il est clair que  $x_3$  appartient soit à  $C_1$  ou  $C_2$  et alors laissez-nous choisir la composante qui contient exactement deux sommets de  $N_G(\{x, x_4\})$ . Notons qu'une telle composante contient au moins quatre sommets. Soit maintenant  $w$  un voisin de  $z$  dans la composante sélectionnée. En vertu du Lemme 3.4,  $V(G) - \{z, w\} = S$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble. Maintenant, si  $C_1$  est la composante sélectionnée, alors  $x_3$  est dans  $C_2$  et donc  $S - \{x_4\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ . Si  $C_2$  est la composante sélectionnée, alors  $x_3$  est dans  $C_1$  et donc  $S - \{x\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ . Dans chaque cas, nous avons une contradiction.
- d)  $\{y_1, y_2\} \subset V(C_1)$ . Il s'ensuit que  $x_3$  appartient à  $C_2$ . Notons que  $z$  a un unique voisin dans  $C_2$ , alors un tel sommet est différent de  $x_3$ , sinon le voisinage fermé de  $x_3$  induit une griffe. Donc on peut supposer que  $z$  a un voisin dans  $C_2$ , disons  $w$ , tel que  $w \neq x_3$ . Le Lemme 3.4 implique que  $V(G) - \{z, w\}$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble et par conséquent  $V(G) - \{z, w, x_4\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , d'où la contradiction.

Selon les cas précédents, nous concluons que  $V'' = \emptyset$ . En utilisant le fait que  $G[N(x)]$  n'est pas connexe et par isomorphisme, on peut voir que le seul graphe 4-régulier sans griffes est le graphe avec 8 sommets  $x, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$  tel que chacun de  $\{x_2, x_3, x_4\}$  et  $\{y_1, y_2, y_3\}$  induit une clique  $K_3$ ,  $x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3$  et  $x_4y_i \in E(G)$  pour tout  $i$ . Mais alors  $V(G) - \{y_1, y_2, x\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de cardinal  $(n - 3)$ , contradiction.

A partir de maintenant, on peut supposer que le sous graphe induit par le voisinage de chaque sommet est connexe. Soit  $x$  un sommet quelconque de  $G$  avec  $N_G(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Rappelons que par le Lemme 3.4,  $V' = V(G) - \{x, x_4\}$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble. Il est clair que l'ensemble  $V'' = V' - N_G(\{x, x_4\})$  est vide sinon tout sommet de  $V''$  sera un point d'articulation dans  $G[V']$ , ce qui contredit le fait que le voisinage ouvert de chaque sommet induit un sous graphe connexe. Aussi,  $G[N(x)]$  contient une chaîne  $P_4$  (pas nécessairement induite), disons  $x_1-x_2-x_3-x_4$ . Soit  $\{y_1, y_2\} = N(x_4) - (\{x, x_3\})$ . Supposons que  $y_1, y_2 \notin N(x)$ . Puisque  $G$  est sans griffes,  $y_1y_2 \in E(G)$ . D'autre part, le



fait que  $G[N(x_4)]$  est connexe implique qu'un sommet parmi  $y_1$  et  $y_2$  est adjacent à  $x_3$ , disons  $y_1x_3 \in E(G)$ . Par suite  $x_1y_1, x_1y_2$  et  $x_2y_2 \in E(G)$ . Mais alors  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  est un ensemble 3-dominant connexe de  $G$  de taille inférieure à  $(n - 2)$ , contradiction. Ainsi, au moins un de  $y_1$  et  $y_2$  appartient à  $N(x)$ , disons  $y_2$ . Si  $y_2 = x_2$ , alors il est facile de voir que  $G$  n'est pas 4-régulier. Ainsi,  $y_2 = x_1$ , et donc  $N(y_1) = N(x)$ . Par conséquent,  $G = K_{2,2,2}$ . Finalement si  $y_1, y_2 \in N(x)$ , alors  $G = K_5$ .  $\square$

### 3.2 Propriétés des graphes connexes tels que $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$

Comme il a été déjà mentionné dans le chapitre deux, Volkmann [14] a établi la borne  $\gamma_2^c(G) \geq \gamma(G) + 1$  pour tout graphe connexe  $G$  en posant par la suite le problème de caractériser tous les graphes pour lesquels cette borne est atteinte. Dans ce qui suit, nous donnons quelques propriétés sur les graphes connexes  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Ensuite, nous fournissons une caractérisation complète des graphes connexes  $G$  tels que  $\delta(G) = 1$ , les graphes connexes de maille au moins 5 et ainsi les graphes sans griffes tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .

Rappelons que  $\kappa_{\max}(G)$  désigne le nombre maximum de composantes de  $G - u$  parmi tous les sommets  $u \in V$ .

**Lemme 3.8.** *Si  $G$  est un graphe connexe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  alors*

- a)  $G$  n'a pas de points d'articulation.
- b) Si  $\delta(G) \geq 2$ , alors  $G$  n'a pas d'isthmes.

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Supposons que  $G$  a un point d'articulation, disons  $x$  et soit  $p$  le nombre de composantes de  $G - \{x\}$ . Il est clair que  $2 \leq p \leq \kappa_{\max}(G)$ . Selon le Théorème 2.35,  $\gamma_c(G) + 1 \geq \gamma(G) + 1 = \gamma_2^c(G) \geq \gamma_c(G) + \kappa_{\max}(G) \geq \gamma_c(G) + p$  ce qui donne  $p \leq 1$ , d'où la contradiction. Par conséquent,  $G$  ne contient pas de points d'articulation.

Supposons maintenant que  $\delta(G) \geq 2$  et que  $G$  contient un isthme  $xy$ . Soit  $G_x$  et  $G_y$  les composantes résultant de la suppression de  $xy$ , où  $x \in V(G_x)$  et  $y \in V(G_y)$ . Puisque  $\delta(G) \geq 2$ , chacune des composantes contient au moins deux sommets. Alors  $x$  et  $y$  sont tous les deux des points d'articulations dans  $G$ . ce qui contredit l'assertion a).  $\square$

Une conséquence immédiate du Lemme 3.8 est la suivante:

**Proposition 3.9.** *Soit  $G$  un graphe connexe bloc-cactus d'ordre  $n \geq 2$ . Alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  si et seulement si  $G = K_n$  ou  $G = C_4$ .*

Preuve. Il est simple de vérifier que si  $G \in \{K_n, C_4\}$ , alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .

Inversement, soit  $G$  un graphe connexe bloc-cactus tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Par le Lemme 3.8,  $G$  n'a pas de points d'articulation et donc  $G$  est un graphe complet ou un cycle. Maintenant, si  $G$  est un cycle, alors par le Théorème 2.1 et le fait que  $\gamma_2^c(C_n) = n - 1$ , on a  $n - 1 = \gamma_2^c(C_n) = \gamma(C_n) + 1 \leq \frac{n}{2} + 1$  et donc  $n \leq 4$ . Nous déduisons que  $G = C_3 = K_3$  ou  $G = C_4$ .  $\square$

**Proposition 3.10.** *Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Si  $D$  est un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble de taille au moins trois, alors*

$$\gamma_c(G) = \gamma(G) = \gamma_t(G)$$

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe et  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble tel que  $|D| = \gamma(G) + 1 \geq 3$ . Soit  $x \in D$  tel que  $D - \{x\}$  est connexe. Alors, puisque tout sommet de  $V(G) - D$  a deux voisins dans  $D$ , nous déduisons que  $D - \{x\}$  est un ensemble dominant connexe, ce qui implique que

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_c(G) \leq |D - \{x\}| = |D| - 1 = \gamma(G)$$

d'où

$$\gamma_c(G) = \gamma(G) = \gamma_t(G)$$

$\square$

Notons que la réciproque de la Proposition 3.10 est fausse. Pour voir, considérons la couronne de la chaîne  $P_3$ .

**Lemme 3.11.** *Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  alors pour toute paire de sommets  $x, y$  dans tout  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble  $D$ , une des assertions suivantes est satisfaite:*

- a) *un des  $x$  et  $y$  est une feuille dans  $\langle D \rangle$  et l'autre est une feuille ou bien un support adjacent à celui-ci dans  $\langle D \rangle$ .*
- b) *Il existe un sommet  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x, y\}$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Soit  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble et  $x, y$  une paire de sommets dans  $D$ . Puisque  $D$  est un ensemble 2-dominant connexe,  $D - \{x\} = D'$  est un ensemble dominant minimum. Si  $y$  est isolé dans  $\langle D' \rangle$  (Par le Théorème 2.2), alors  $y$  est une feuille dans  $\langle D \rangle$  et clairement  $x$  est un voisin à  $y$ . Si  $|D'| = 1$  alors  $x$  est aussi une feuille dans  $\langle D \rangle$ . Supposons que  $|D'| \geq 2$ . Dans ce cas,  $x$  est un sommet support de  $y$  dans  $\langle D \rangle$ . Supposons maintenant que  $y$  n'est pas isolé dans  $\langle D' \rangle$ . Alors  $y$  doit avoir un voisin privé dans  $V(G) - D'$  (Par le Théorème 2.2). Si  $w = x$  alors  $x$  est une feuille dans  $D$  ayant  $y$  comme un sommet support. Supposons  $w \neq x$ , puisque  $D$  2-domine  $G$ ,  $N(w) \cap D = \{x, y\}$ .  $\square$

Pour donner d'autres propriétés pour les graphes vérifiant  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ , il faut caractériser d'abord les graphes connexes de degré minimum égal à un tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .

**Théorème 3.12.** *Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $\delta(G) = 1$ . Alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  si et seulement si  $G = P_2$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) = 1$  tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Soit  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble de  $G$ . Puisque  $\delta(G) = 1$ , alors  $D$  contient toutes les feuilles de  $G$  et leurs voisins. Soit  $x$  une feuille dans  $G$  et  $y$  son voisin. D'abord, supposons que  $|D| \geq 3$  et soit  $z \neq x$  un voisin quelconque de  $y$  dans  $D$ . Alors en appliquant le Lemme 3.11 au couple  $x, z$ , nous déduisons qu'il existe un sommet  $w$  dans  $V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x, z\}$ , ce qui contredit le fait que  $x$  est une feuille. Par conséquent,  $|D| = 2$ . Puisque  $D$  2-domine tout  $V(G) - D$  et  $x$  est une feuille alors  $V(G) - D = \emptyset$ , ce qui entraîne que  $G = P_2$ .

L'inverse est évident.  $\square$

Le Théorème 3.12 nous conduit à déduire qu'il n'existe pas d'arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 3$  tel que  $\gamma_2^c(T) = \gamma(T) + 1$ . Alors, en vertu du Théorème 2.31 nous aurons le corollaire suivant

**Corollaire 3.13.** *Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$ . Alors*

$$\gamma_2^c(T) \geq \gamma(T) + 2.$$

En conséquence du Théorème 3.12, nous considérerons dans la suite des graphes de degré minimum d'au moins deux.

**Lemme 3.14.** *Soit  $G$  un graphe connexe de degré minimum au moins deux tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Si  $D$  est un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble dont le sous-graphe induit ne contient pas de feuilles alors  $G$  contient au moins  $|D|$  triangles.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe de degré minimum au moins deux tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Supposons que  $\delta(\langle D \rangle) \geq 2$ . Alors toute paire de sommets dans  $D$  satisfait uniquement l'assertion (b) du Lemme 3.11. Puisque  $\delta(\langle D \rangle) \geq 2$ , alors  $\langle D \rangle$  contient au moins  $|D|$  arêtes et par conséquent toute paire de sommets adjacents de  $D$  appartient à un triangle.  $\square$

**Lemme 3.15.** *Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) \geq 2$  tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Si  $D$  est un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble contenant un sommet  $u$  n'ayant pas de voisins dans  $(V(G) - D)$  alors*

- a)  $\gamma(G) = i(G) = \gamma_2(G)$ .
- b) *Le sous graphe induit par  $D$  est isomorphe à l'étoile  $K_{1,|D|-1}$  centrée en  $u$  où tout sommet de  $G$  appartient à un cycle induit de longueur 4.*
- c) *Si  $|D| \geq 4$ , alors pour toute paire de sommets  $x, y$  dans  $D$  différent de  $u$ , il existe deux sommets non adjacents  $w, w' \in V(G) - D$  tels que  $N(w) \cap D = N(w') \cap D = \{x, y\}$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) \geq 2$  et  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Soit  $u \in D$  un sommet n'ayant pas de voisins dans  $V(G) - D$ . Il s'ensuit que  $|D| \geq 3$  et  $D - \{u\} = D'$  est un  $\gamma(G)$ -ensemble. Si un sommet  $x \in D'$  a un voisin privé dans  $V(G) - D'$ , alors un tel voisin privé est adjacent à  $u$  pour être 2-dominé par  $D$ , ce qui contredit le fait que  $u$  n'a pas de voisin dans  $V(G) - D$ . Alors tout sommet de  $D'$  n'a pas de voisin privé dans  $V(G) - D'$ . Par le Théorème 2.2,  $D'$  est indépendant. Puisque  $\delta(G) \geq 2$ , tout sommet de  $V(G) - D'$  est 2-dominé par  $D'$ . Alors  $i(G) \leq |D'| = \gamma(G)$  et  $\gamma_2(G) \leq |D'| = \gamma(G)$ . Il s'ensuit que  $\gamma(G) = i(G) = \gamma_2(G)$ . Puisque  $D'$  est indépendant et  $D$  est connexe, alors  $u$  est adjacent à tous les sommets de  $D'$ . Par conséquent,  $\langle D \rangle$  est une étoile  $K_{1,|D|-1}$  centrée en  $u$ . De plus, le Lemme 3.11-(b) implique que pour toute paire de feuilles  $x, y$  il existe  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x, y\}$ , ce qui implique que  $x, y, u, w$  induisent un cycle  $C_4$ .

Prouvons maintenant *c*). Supposons que  $|D| \geq 4$  et soient  $x, y$  deux feuilles quelconques de  $\langle D \rangle$ . Par le Lemme 3.11-b) il existe  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x, y\}$ . Pour éviter que  $(D - \{x, y, u\}) \cup \{w\}$  soit un ensemble dominant de taille  $\gamma_2^c(G) - 2$ , il doit exister un  $w' \neq w$  dans  $V(G) - D$  avec  $ww' \notin E(G)$  tel que  $N(w') \cap D = \{x, y\}$ .  $\square$

Une conséquence immédiate du Lemme 3.15 est le corollaire suivant:

**Corollaire 3.16.** *Si  $G$  est un graphe connexe sans  $C_4$  avec un degré minimum au moins deux tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ . Alors tout sommet d'un ensemble 2-dominant connexe minimum  $D$  a un voisin dans  $V(G) - D$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe sans  $C_4$  et  $\delta(G) \geq 2$ . Soit  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble de taille  $\gamma(G) + 1$ . Supposons que  $D$  contient un sommet  $u$  n'ayant pas de voisin dans  $V(G) - D$ . Par le Lemme 3.15, tout sommet dans  $G$  appartient à un cycle induit de longueur 4, contradiction avec le choix de  $G$ . Alors tout sommet dans  $D$  a un voisin dans  $V(G) - D$ .  $\square$

### 3.2.1 Quelques familles de graphes $G$ tels que $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$

Par le résultat suivant, nous caractérisons les graphes connexes d'une maille au moins 5 tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .

**Théorème 3.17.** *Soit  $G$  un graphe connexe d'une maille au moins 5. Alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  si et seulement si  $G = P_2$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $g(G) \geq 5$ . Supposons que  $\delta(G) = 1$ , alors par le Théorème 3.12,  $G = P_2$ . Rappelons que  $g(P_2) = \infty > 5$ . Par conséquent, supposons que  $\delta(G) \geq 2$  et soit  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble de taille  $\gamma(G) + 1$ . Si  $\delta(\langle D \rangle) \geq 2$  alors par le Lemme 3.14,  $G$  contient un triangle, contradiction avec le fait que  $g(G) \geq 5$ . Alors  $\delta(\langle D \rangle) = 1$ . Il est clair que  $|D| \geq 3$ . Sinon  $G$  a un triangle. Soit  $x$  une feuille dans  $\langle D \rangle$  et  $y$  son voisin dans  $\langle D \rangle$ . Soit  $z$  un voisin quelconque de  $y$  dans  $D$  différent de  $x$ . Un tel sommet  $z$  existe car  $D$  est connexe. Si  $z$  n'est pas une feuille dans  $\langle D \rangle$  alors par le Lemme 3.11-b), il existe un sommet  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{y, z\}$  et donc  $y, z, w$  induisent un triangle, qui est une contradiction. Donc chaque voisin de  $y$  est une

feuille dans  $\langle D \rangle$ . Ce qui entraîne que  $\langle D \rangle$  est une étoile  $K_{1,|D|-1}$  centrée en  $y$ . Puisque tout sommet de  $V(G) - D$  a deux voisins dans  $D$  et  $G$  est sans triangles, alors  $y$  n'a pas de voisins dans  $V(G) - D$ . Mais pour tout couple de feuilles de  $D$ , il existe un sommet dans  $V(G) - D$  ayant comme voisinage ce couple. Ce qui induit un cycle  $C_4$ , d'où la contradiction avec  $g(G) \geq 5$ .  $\square$

Considérons maintenant les graphes connexes sans griffes tels que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .

**Lemme 3.18.** *Soit  $G$  un graphe connexe sans griffes. Si  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  alors*

$$\gamma(G) \leq 2.$$

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe connexe sans griffes et  $D$  un  $\gamma_2^c(G)$ -ensemble de taille  $\gamma(G) + 1$ . Soit  $x$  un sommet dans  $D$  tel que  $D - \{x\} = D'$  est connexe. Puisque  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  et chaque sommet de  $V(G) - D$  est 2-dominé par  $D$ , alors  $D'$  est un ensemble dominant minimum. Selon le Théorème 2.3, soit  $x_w \in V(G) - D'$  le voisin privé d'un sommet  $w \in D'$ . Il est clair que puisque  $D$  est un ensemble 2-dominant,  $xx_w \in E(G)$ .

Supposons que  $|D| \geq 4$ , nous allons montrer que  $\langle D \rangle$  est complet. Supposons d'abord que  $\langle D' \rangle$  n'est pas un graphe complet. Soit  $y$  un sommet de  $D'$  ayant au moins un non-voisin dans  $D'$ . Soit  $A = N(y) \cap D'$  et  $B = D' - (A \cup \{y\})$ . Il est clair que  $A$  et  $B$  tous les deux ne sont pas vides. Puisque  $D'$  est connexe, alors il existe au moins une arête joignant un sommet de  $A$ , disons  $z$ , à un sommet de  $B$ , disons  $t$ . Si  $z'$  est le voisin privé de  $z$  dans  $V(G) - D'$  alors il est clair que  $z, z', t$  et  $y$  induisent une griffe, d'où la contradiction. En utilisant le fait que dans tout graphe connexe non trivial  $G$ , il existe deux sommets tels que la suppression de chacun d'eux de  $G$  ne déconnecte pas le graphe résultant. Par conséquent, en choisissant un autre sommet  $x'$  différent de  $x$ , nous obtenons que  $\langle D - \{x'\} \rangle$  est aussi complet et donc  $\langle D \rangle$  est complet.

Puisque la suppression de deux sommets quelconques de  $D$  ne donne pas un ensemble dominant de  $G$ , alors selon le Lemme 3.11, pour toute paire de sommets  $u, v$  de  $D$  il existe un sommet  $x_{uv} \in V(G) - D$ , tel que  $N(x_{uv}) \cap D = \{u, v\}$ . Pour un sommet  $y \in D$ , soit  $X_y$  l'ensemble de tous les sommets  $x_{ya} \in V(G) - D$ , où  $a$  est un sommet quelconque de  $D - \{y\}$ , puisque  $|D| \geq 4$ ,  $|X_y| \geq |D| - 1 \geq 3$ . Nous prétendons que  $\langle X_y \rangle$  est complet.

Supposons le contraire,  $\langle X_y \rangle$  n'est pas complet et soit  $x_{xb} \in X_y$  tel que  $x_{ya}x_{yb} \notin E(\langle X_y \rangle)$ . Puisque  $|D| \geq 4$ , soit  $c \in D - \{y, a, b\}$ . Il est clair que  $y, x_{ya}, x_{yb}, c$  induisent une griffe, d'où la contradiction. Il s'ensuit que  $\langle X_y \rangle$  est complet.

Maintenant, soient  $a, b, c, d$  quatre sommets quelconques de  $D$ , et soient  $x_{bd}, x_{bc}, x_{cd}$  leurs sommets correspondants dans  $V(G) - D$ . Comme vu ci-dessus, toute paire de ces sommets induit un graphe complet  $K_2$ , ce qui conduit à avoir aussi un graphe complet induit par  $x_{bd}, x_{bc}, x_{cd}$ . Soit  $D'' = (D - \{b, c, d\}) \cup x_{bc}$  (rappelons que  $\langle D \rangle$  est aussi un graphe complet). Si  $D''$  domine  $G$ , alors  $\gamma(G) \leq 2$ , contradiction avec  $|D| \geq 4$ . Par conséquent,  $D''$  ne domine pas  $G$ . Donc il existe un sommet  $z$  dans  $V(G) - D$  tel que  $N(z) \cap D = \{b, c, d\}$  et  $zx_{bc} \notin E(G)$ , par symétrie  $zx_{bd}, zx_{cd} \notin E(G)$ . Mais alors  $b, a, x_{bc}$  et  $z$  induisent une griffe, d'où la contradiction. Nous concluons que  $|D| < 4$ , donc  $\gamma_2^c(G) \in \{2, 3\}$ . Par conséquent,  $\gamma(G) \leq 2$ .  $\square$

Avant d'énoncer le prochain résultat, définissons la famille  $\Omega$  des graphes connexes sans griffes  $G$  tels que  $2 \leq \gamma_2^c(G) \leq 3$ .

Notons que si  $G \in \Omega$ , alors ou bien  $\gamma_2^c(G) = 2$  et dans ce cas par le Théorème 2.31, on a  $\gamma(G) = 1$  ou bien  $\gamma_2^c(G) = 3$  et dans ce cas, par le Théorème 2.31,  $1 \leq \gamma(G) \leq 2$ .

Soit  $\mathcal{H}$  la famille des graphes  $H$  qui sont ou bien connexes sans griffes tels que  $\gamma(H) = \alpha(H) = 2$  ou bien formés de deux cliques.

Soit  $\mathcal{F} \subset \Omega$  la famille des graphes tels que  $\gamma_2^c(G) = 3$  et  $\gamma(G) = 1$ .

**Proposition 3.19.** *Tout graphe  $G \in \mathcal{F}$  est obtenu d'un graphe  $H \in \mathcal{H}$  en ajoutant un sommet  $x$  adjacent à tout sommet de  $H$ .*

Preuve. Soit  $G \in \mathcal{F}$ . Puisque  $\gamma(G) = 1$ , soit  $x$  un sommet dominant de  $G$ . Soit  $H$  le sous graphe induit par  $V(G) - \{x\}$ .

Supposons d'abord que  $H$  n'est pas connexe. Il est clair que  $H$  est formé d'exactly deux composantes connexes  $C_1$  et  $C_2$  car  $G$  est sans griffes. Si  $C_1$  n'est pas complet, alors soient  $u$  et  $v$  deux sommets non adjacents de  $C_1$ . Alors  $x, u, v$  et un sommet quelconque de  $C_2$  induisent une griffe. D'où  $C_1$  et  $C_2$  sont complets.



Supposons maintenant que  $H$  est connexe. Le fait que  $\gamma_2^c(G) = 3$  on aura  $\gamma(H) \geq 2$ . Par ailleurs, puisque  $G$  est sans griffes, alors  $\alpha(H) \leq 2$ . D'où  $2 \geq \alpha(H) \geq \gamma(H) \geq 2$  et donc  $\gamma(H) = \alpha(H) = 2$ . Par conséquent,  $H \in \mathcal{H}$  et le résultat désiré est obtenu.  $\square$

**Théorème 3.20.** *Soit  $G$  un graphe connexe sans griffes. Alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  si et seulement si  $G \in \Omega - \mathcal{F}$ .*

Preuve. Si  $G$  est un graphe connexe sans griffes tel que  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ , alors d'après le Lemme 3.18, on a  $2 \leq \gamma_2^c(G) \leq 3$ . Puisque  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ , si  $\gamma_2^c(G) = 2$  alors  $\gamma(G) = 1$ . En outre, si  $\gamma_2^c(G) = 3$  alors  $\gamma(G) = 2$ . Ce qui implique que  $G \in \Omega - \mathcal{F}$ .

Inversement, il est facile de voir que si  $G \in \Omega - \mathcal{F}$  alors  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ .  $\square$

### 3.3 Propriétés des graphes connexes tels que $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$

Parmi les problèmes ouverts proposés par Volkmann [14], on trouve celui de la caractérisation des graphes connexes  $G$  tels que  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ . Similairement à ce que nous avons déjà fait, nous nous intéressons dans cette section à certaines propriétés de tels graphes. En particulier, nous donnons une caractérisation complète quand  $\delta(G) = 1$  ou  $G$  est un graphe connexe maximal sans triangles.

**Lemme 3.21.** *Soit  $G$  un graphe connexe. Si  $D$  est un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble de taille  $\gamma(G) + 2$  alors pour tout triplet de sommets  $x, y, z \in D$ , l'une des ces conditions est satisfaite:*

- a)  $z$  est une feuille dans  $\langle D \rangle$  adjacente à  $x$  ou  $y$ .
- b)  $x, y, z$  induisent un  $P_3$  ou  $C_3$ .
- c)  $\deg_{\langle D \rangle}(z) \geq 2$ , et  $x$  ou  $y$ , disons  $y$  vérifie  $\deg_{\langle D \rangle}(y) \in \{1, 2\}$  et  $N_{\langle D \rangle}(y) \subseteq \{x, z\}$ .
- d) Il existe un sommet  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x, y, z\}$ .

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe tel que  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  et  $D$  un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble. Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $D$  tels que  $D - \{x, y\} = D'$  est un  $\gamma(G)$ -ensemble. Puisque  $\gamma_3^c(G) \geq 3$ , il est clair qu'un tel ensemble existe. Donc d'après le Théorème 2.2, chaque sommet  $z \in D'$  est isolé ou a un voisin privé dans  $V(G) - D'$ . Si la première situation se produit, alors  $z$  est adjacent à au moins l'un de  $x$  et  $y$ . Il est clair que  $\deg_{\langle D \rangle}(z) = 1$  et donc  $z$  est une feuille dans  $\langle D \rangle$  dont le support est  $x$  ou  $y$  et la condition (a) se réalise. Sinon  $\deg_{\langle D \rangle}(z) = 2$  et donc  $x, y, z$  induisent un  $P_3$  ou  $C_3$  et (b) se concrétise. Supposons maintenant que  $z$  a un voisin privé  $w$  dans  $V(G) - D'$ . Si  $w \in \{x, y\}$ , disons  $y$ , alors  $y$  ne peut être adjacent qu'à  $x$  ou  $z$  dans  $D$ , ce qui donne (c). Si  $w \notin \{x, y\}$ , alors  $w$  est le voisin privé de  $z$  dans  $V(G) - D'$  et comme  $D$  est un ensemble 3-dominant, alors  $w$  est 3-dominé par  $\{x, y, z\}$ , i.e.  $N(w) \cap D = \{x, y, z\}$ , et finalement on a (d). Ce qui achève la démonstration.  $\square$

### 3.3.1 Quelques familles de graphes $G$ tels que $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$

Nous allons initier cette partie par une caractérisation des graphes connexes de degré minimum un tels que  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ .

Soit  $L(G)$  l'ensemble des feuilles dans  $G$  et  $D$  un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble. Il est clair que  $L \subset D$ . Nous observons que si  $G$  est un graphe connexe avec  $\delta(G) = 1$  tel que  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ , alors  $G$  doit contenir au plus deux feuilles, sinon  $D - L$  est un ensemble dominant de cardinal au plus  $\gamma_3^c(G) - 2$ .

Soit  $G'$  le graphe formé d'une chaîne  $P_4$  et un graphe quelconque  $H$  tel que trois sommets consécutifs de la chaîne  $P_4$  avec  $H$  forment un joint  $H + P_3$ .

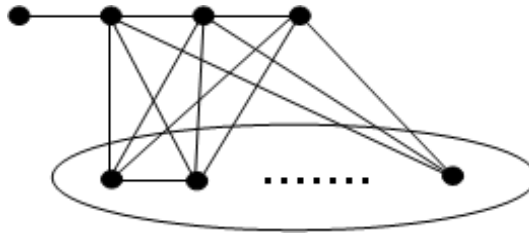


Figure 3.1. Le graphe  $G'$ .

**Théorème 3.22.** *Si  $G$  est un graphe tel que  $\delta(G) = 1$ , alors  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  si et seulement si  $G = P_3$ ,  $G = P_4$  ou  $G = G'$  le graphe illustré dans la Figure 3.1*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) = 1$  et  $D$  un  $\gamma_3^c(G)$ -ensemble de taille  $\gamma(G) + 2$ . Soit  $x$  une feuille dans  $G$  et  $t$  son support. Il est clair que  $x, t \in D$ . Soit  $y$  un sommet quelconque de  $D$  différent de  $t$  tel que  $D - \{x, y\} = D'$  est un  $\gamma(G)$ -ensemble. Comme  $\deg_G(x) = 1$ , donc la condition (d) du Lemme 3.21 est exclue pour tout triplet contenant  $x$ . Aussi, puisque  $x$  est une feuille dans  $G$ , alors tout sommet dans  $V(G) - D'$  différent de  $x$  a au moins deux voisins dans  $D'$  pour être 3-dominé par  $D$ . Soit  $w \in V(G) - D'$  tel que  $w \neq x$  et soient  $w_1, w_2$  ses voisins dans  $D'$ . Si  $w_1 w_2 \in E(G)$ , alors  $D - \{x, y, w_1\}$  ou  $D - \{x, y, w_2\}$  est un ensemble dominant de cardinal inférieur à  $\gamma_3^c(G) - 2$ , contradiction. Par conséquent,  $D'$  est un ensemble indépendant. Ce qui implique que tout sommet dans  $D' - \{t\}$  est une feuille dans  $\langle D' \rangle$  dont  $y$  est le support. Supposons que

$|D'| \geq 3$  et soient  $y', y''$  deux voisins de  $y$  différents de  $t$ . Alors  $D - \{x, y', y''\}$  est un ensemble dominant de cardinal inférieur à  $\gamma_3^c(G) - 2$ , contradiction. Par conséquent,  $|D'| \leq 2$  et donc  $|D| \leq 4$ . Si  $|D| = 4$ , alors  $D$  induit une chaîne  $P_4 = x-t-y-y'$ . Si  $V(G) - D = \emptyset$ , alors  $G = P_4$ . Si  $V(G) - D \neq \emptyset$ , alors tout sommet de  $V(G) - D$  est adjacent à tout  $D - \{x\}$  et peut avoir d'éventuels voisins dans  $V(G) - D$ , donc  $G = G'$ . Si  $|D| = 3$ , alors  $G = P_3$ .

Pour l'inverse, il est facile de voir que si  $G \in \{P_3, P_4, G'\}$ , alors  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ .  $\square$

Avant d'énoncer le prochain résultat, rappelons qu'un graphe  $G$  sans triangles est dit maximal si pour toute arête  $e \in \overline{G}$ , le graphe  $G + e$  contient un triangle.

$G''$  est un graphe formé de deux ensembles  $X, Y$  tels que

- $\langle X \rangle = S_{1,2}$ .
- $\langle Y \rangle$  est un stable de cardinal au moins trois, où deux sommets de  $Y$  sont adjacents uniquement aux feuilles de  $S_{1,2}$  et au moins un sommet de  $Y$  est adjacent au support de degré deux et les feuilles de l'autre support.

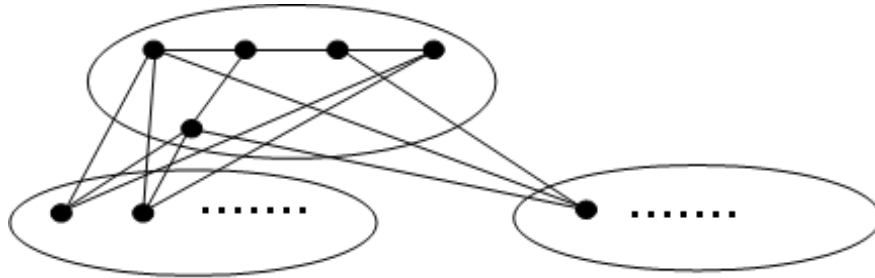


Figure 3.2. Le graphe  $G''$ .

**Théorème 3.23.** *Si  $G$  est un graphe connexe sans triangles maximal. Alors  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$  si et seulement si  $G = P_3$ ,  $G = C_4$  ou  $G = G''$  le graphe illustré dans la Figure 3.2.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe sans triangles maximal et  $D$  un ensemble 3-dominant connexe de taille  $\gamma(G) + 2$ . Si  $\delta(G) = 1$ , alors en vertu du Théorème 3.22,  $G = P_3$ . Soit  $\delta(G) \geq 2$ . Supposons que  $x, y$  sont deux sommets dans  $D$  tels que  $D - \{x, y\} = D'$  est un

$\gamma(G)$ -ensemble. Soit  $z$  un voisin de  $x$  dans  $\langle D' \rangle$ . D'après le Théorème 2.2 [21], si  $z$  a un voisin privé dans  $V(G) - D'$ , alors un tel sommet doit être adjacent à  $x$  et donc on a un triangle. Alors  $z$  est isolé dans  $D'$ . Par conséquent, tous les voisins de  $x$  dans  $\langle D' \rangle$  sont isolés dans  $D'$ . Similairement, puisque  $\delta(G) \geq 2$ , tous les voisins de  $y$  dans  $\langle D' \rangle$  sont isolés dans  $D'$ . La connexité de  $D$  implique que  $D = N[x] \cup N[y]$ . Alors  $D'$  est un ensemble indépendant ne contenant que les voisins de  $x$  et  $y$ . Deux cas se produisent:

**Cas 1.**  $(N(x) \cap N(y)) \cap D' = \emptyset$ . Soient  $L_x, L_y$  les ensembles des feuilles de  $x$  et  $y$  dans  $\langle D \rangle$  respectivement. Puisque  $D$  est connexe, alors  $xy \in E(G)$ . Dans ce cas,  $\langle D \rangle$  est une étoile double de sommets supports  $x$  et  $y$ . Si  $|D| = 4$ , alors  $\langle D \rangle = P_4$  et puisque  $G$  est sans triangles,  $V(G) - D = \emptyset$ . Il s'ensuit que  $G = P_4$  mais  $G$  n'est pas maximal. Par conséquent,  $|D| \geq 5$ . Alors  $\langle D \rangle$  contient au moins trois feuilles. Supposons d'abord que  $x$  et  $y$  aient chacun au moins deux feuilles dans  $\langle D \rangle$ . Soit  $x_i \in L_x$  et  $y_j \in L_y$  pour  $i = 1, \dots, |L_x|$ ,  $j = 1, \dots, |L_y|$ . Selon le Lemme 3.21-(d), il existe un sommet  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x_1, x_2, y_1\}$ . Notons qu'aucun sommet de  $V(G) - D$  n'est adjacent à tous les  $x_1, x, y, y_1$  car  $G$  est sans triangles. Mais dans ce cas,  $(D - \{x_1, x, y, y_1\}) \cup \{w\}$  est un ensemble dominant de taille  $\gamma_3^c(G) - 3$ , contradiction. Par conséquent, l'un des sommets  $x$  ou  $y$  doit être support d'exactly une seule feuille dans  $\langle D \rangle$ , disons  $y$ . Ce qui implique que  $x$  n'a pas de voisins dans  $V(G) - D$  sinon on a triangle. Si  $|D| \geq 6$ , choisissons n'importe quelles trois feuilles de  $x$  dans  $\langle D \rangle$  et soit  $w'$  leur voisin privé dans  $V(G) - D$ . Alors  $G + w'y_1$  est sans triangles, contradiction avec le fait que  $G$  est maximal. Par conséquent,  $|D| = 5$  ce qui entraîne que  $\langle D \rangle = S_{2,1}$ . Par ailleurs, pour éviter que  $(D - \{x_1, x_2, x, y_1\}) \cup \{w\}$  soit un ensemble dominant de taille  $\gamma_3^c(G) - 3$ , il doit y exister deux sommets  $w_1, w_2$  tels que  $N(w_1) \cap D = N(w_2) \cap D = \{x_1, x_2, y_1\}$  avec  $w_1w_2 \notin E(G)$  (car  $G$  est sans triangles). Aussi, pour éviter que  $(D - \{x_1, x_2, y\})$  soit un ensemble dominant de taille  $\gamma_3^c(G) - 3$ , il doit exister un sommet  $w_3 \in V(G) - D$  tel que  $N(w_3) \cap D = \{x_1, x_2, y\}$ . Il s'ensuit que  $G = G''$ .

**Cas 2.**  $(N(x) \cap N(y)) \cap D' \neq \emptyset$ . Alors  $xy \notin E(G)$  sinon  $G$  contient un triangle. De plus, il est important de noter qu'aucun sommet de  $V(G) - D$  n'est adjacent à la fois à  $x$  et  $y$ , sinon avec un troisième voisin de  $N(x) \cup N(y)$  un triangle est formé. Soit  $C = (N(x) \cap N(y)) \cap D$ . Supposons d'abord que ni  $x$  ni  $y$  n'est support dans  $\langle D \rangle$ . Donc

$N(x) = N(y) = C$ . Remarquons qu'aucun sommet de  $V(G) - D$  n'est adjacent ni à  $x$  ni à  $y$  sinon on aura un triangle. Si  $|C| \geq 3$ , alors  $D - \{x\}$  est un ensemble 3-dominant connexe, i.e.  $\gamma_3^c(G) \leq \gamma_3^c(G) - 1$ , ce qui est impossible. Il s'ensuit que  $|C| \leq 2$ . Par conséquent,  $G = C_4$  (si  $|C| = 2$ ) ou  $G = P_3$  (si  $|C| = 1$ ).

Supposons maintenant, sans perte de généralité, que  $x$  est un sommet support. Soit  $x_1$  une feuille quelconque de  $x$  dans  $\langle D \rangle$ . Dans ce cas, Montrons que  $x$  a exactement deux feuilles dans  $\langle D \rangle$ . Supposons que  $x_1$  est l'unique feuille de  $x$  dans  $\langle D \rangle$ . Ainsi, étant donné qu'aucun sommet de  $V(G) - D$  n'est adjacent à la fois à  $x_1$  et  $y$  (sinon  $G$  contiendra un triangle), il s'ensuit que  $G + x_1y$  est sans triangles, contradiction. Maintenant, supposons que  $x_1, x_2, x_3$  sont trois feuilles de  $x$  dans  $\langle D \rangle$ . Alors par le Lemme 3.21-(d), il existe un sommet  $w \in V(G) - D$  tel que  $N(w) \cap D = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Mais le graphe  $G + wy$  est sans triangles, contradiction. Par conséquent,  $x$  a exactement deux feuilles dans  $\langle D \rangle$ , disons  $x_1, x_2$ .

Maintenant, supposons que  $|C| \geq 2$  et soient  $z, z' \in C$ . Par le Lemme 3.21-(d), il existe un sommet  $w' \in V(G) - D$  tel que  $N(w') \cap D = \{x_1, z, z'\}$ . Notons qu'aucun sommet de  $V(G) - D$  n'est adjacent aux trois sommets de  $\{x, y, z, z'\}$ . Maintenant, si  $\deg_{\langle D \rangle}(y) \geq 3$ , alors  $(D - \{x, y, z, z'\}) \cup \{w'\}$  est un ensemble dominant de taille inférieure à  $\gamma_3^c(G) - 2$ , qui est une contradiction. D'où  $\deg_{\langle D \rangle}(y) = 2$  et  $C = \{z, z'\}$ . Encore une fois par le Lemme 3.21-(d), il existe un sommet  $w_1 \in V(G) - D$  tel que  $N(w_1) \cap D = \{x_1, x_2, z\}$ . Mais le graphe  $G + w_1z'$  est sans triangles, contradiction aussi. Par conséquent,  $|C| = 1$ . Si  $y$  est une feuille dans  $\langle D \rangle$ , alors  $\langle D \rangle = S_{2,1}$  et ceci a été déjà discuté dans le **Cas 1** puisque  $z$  peut jouer le même rôle que  $y$ .

Supposons donc que  $y$  est un sommet support dans  $\langle D \rangle$ . Dans ce cas,  $y$  doit avoir exactement deux feuilles dans  $\langle D \rangle$ , disons  $y_1, y_2$ , analogiquement à  $x$ . Alors  $|D| = 7$ . Par le Lemme 3.21-(d), il existe un sommet  $w'' \in V(G) - D$  tel que  $N(w'') \cap D = \{x_1, x_2, y_1\}$ . Mais le graphe  $G + w''y_2$  est sans triangles, contradiction.

Pour l'inverse, il est facile de voir que si  $G \in \{C_4, P_3, G'''\}$ , alors  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ .  $\square$

## CHAPITRE 4

# GRAPHES 2-DOMINATION POINT-STABLES ET POINT-CRITIQUES

De nombreuses études ont été effectuées sur certains invariants de graphes lorsqu'une arête est ajoutée, supprimée ou contractée, et il en est de même pour la suppression d'un sommet. En 2006, Burton et Sumner [33] ont initié l'étude des graphes domination point-critiques, i.e les graphes pour lesquels le nombre de domination diminue suite à la contraction (ou l'identification de deux sommets adjacents) d'une arête quelconque. Ce même concept fait l'objet de notre étude pour une variation de domination dans les graphes, appelée 2-domination introduite par Fink et Jacobson [10].

Le présent chapitre est consacré à l'étude de l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de 2-domination d'un graphe, en particulier, lorsque ce nombre diminue ou reste inchangé. Ce chapitre se compose de trois sections. Dans la première, nous présentons quelques propriétés des graphes 2-domination point-stables où nous donnons une caractérisation de certains graphes  $\gamma_2$ -point-stables dont les graphes complets, les graphes bipartis complets, les cycles et les chaînes. La deuxième section fournit une caractérisation de tous les arbres qui sont 2-domination point-stables. Une caractérisation de tous les arbres qui sont 2-domination point-critiques fait l'objet de la troisième section.

La plus grande partie des résultats qui sont présentés dans ce chapitre a été élaborée en collaboration avec M. Chellali et fait l'objet d'un article publié dans "Asian-European Journal of Mathematics".

## 4.1 Quelques résultats préliminaires

**Observation 4.1** ([91]). *Toutes les feuilles de  $G$  sont dans tout ensemble 2-dominant de  $G$ .*

Rappelons que la contraction d'une arête  $uv$  forme un nouveau sommet, désigné par  $\overline{uv}$ , dont le voisinage ouvert est  $(N(u) \cup N(v)) - \{u, v\}$ . Le graphe obtenu sera désigné par  $G_{uv}$ .

Notre premier résultat montre que la contraction d'une arête quelconque d'un graphe  $G$  peut diminuer le nombre de 2-domination de  $G$  d'au plus un. Cependant, il peut augmenter en fonction des degrés des sommets contractés.

**Proposition 4.2** ([91]). *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 2$ . Alors pour toute paire de sommets adjacents  $u$  et  $v$  on a*

$$\gamma_2(G) - 1 \leq \gamma_2(G_{uv}) \leq \gamma_2(G) + \min(d_G(u) - 1, d_G(v) - 1).$$

Preuve. Il est clair que le résultat est valable pour  $n = 2$ . Nous supposons donc que  $n \geq 3$ , et soient  $u, v$  deux sommets adjacents de  $G$ .

Pour prouver la borne inférieure, soit  $D$  un  $\gamma_2(G_{uv})$ -ensemble. Si  $\overline{uv} \in D$ , alors  $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{u, v\}$  est un ensemble 2-dominant de  $G$ , et donc  $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(G_{uv}) + 1$ . Maintenant, si  $\overline{uv} \notin D$ , alors ou bien  $D \cup \{v\}$  ou  $D \cup \{u\}$  est un ensemble 2-dominant de  $G$ , et donc  $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(G_{uv}) + 1$ .

Maintenant, pour prouver la borne supérieure, soit  $D$  un  $\gamma_2(G)$ -ensemble. Supposons d'abord que  $u, v \notin D$ . Alors  $D$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{uv}$ , et donc  $\gamma_2(G_{uv}) \leq |D| = \gamma_2(G)$ . Supposons maintenant, sans perte de généralité, que  $u \in D$  et  $v \notin D$ . Alors  $(D - \{u\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{uv}$ , et donc  $\gamma_2(G_{uv}) \leq \gamma_2(G)$ . Finalement, supposons que  $u, v \in D$ , et soit  $A$  l'ensemble des voisins communs de  $u$  et  $v$  dans  $V(G) - D$ . Alors  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\} \cup A$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{uv}$ , ce qui implique que  $\gamma_2(G_{uv}) \leq \gamma_2(G) - 1 + |A|$ . Maintenant, comme  $|A| \leq \min(d_G(u) - 1, d_G(v) - 1)$ , alors la borne désirée est satisfaite.  $\square$



Il est à noter que l'ensemble  $A$  défini dans la preuve de la Proposition 4.2 est vide lorsque  $G$  est un graphe sans triangles. Le corollaire suivant est donc immédiat.

**Corollaire 4.3** ([91]). *Soit  $G$  un graphe connexe sans triangles non trivial. Alors pour toute paire de sommets adjacents  $u$  et  $v$  de  $G$ ,*

$$\gamma_2(G) - 1 \leq \gamma_2(G_{uv}) \leq \gamma_2(G).$$

Une arête  $e \in E(G)$  est une arête stable si  $\gamma_2(G_e) = \gamma_2(G)$ , et elle est *critique* si  $\gamma_2(G_e) = \gamma_2(G) - 1$ .

**Définition 4.4.** *Un graphe  $G$  est appelé  $\gamma_2$ -point-stable si  $\gamma_2(G_e) = \gamma_2(G)$  pour toute arête  $e \in E(G)$ , autrement dit toute arête de  $G$  est stable.*

**Définition 4.5.** *Un graphe  $G$  est appelé  $\gamma_2$ -point-critique si  $\gamma_2(G_e) = \gamma_2(G) - 1$  pour toute arête  $e \in E(G)$ , autrement dit toute arête de  $G$  est critique.*

## 4.2 Graphes $\gamma_2$ -point-stables

Nous commençons par présenter quelques propriétés des graphes  $\gamma_2$ -point-stables.

**Proposition 4.6** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Il n'existe pas de caractérisation de sous-graphe induit interdit des graphes  $\gamma_2$ -point-stables.*

Preuve. Etant donné un graphe  $H$ , pour tout  $v \in V(H)$  ajouter deux nouveaux sommets  $v'$  et  $v''$  et deux nouvelles arêtes  $vv'$  et  $vv''$  pour obtenir un graphe  $G$ . Il est facile de voir que la contraction de n'importe quelle arête de  $G$  ne change pas le nombre de 2-dominance de  $G$ , c'est-à-dire,  $G$  est un graphe  $\gamma_2$ -point-stable. Puisque  $H$  est un sous-graphe induit de  $G$ , nous concluons qu'il n'existe pas de caractérisation de sous-graphe interdit des graphes  $\gamma_2$ -point-stables.  $\square$

Rappelons qu'un ensemble  $D \subseteq V$  est *indépendant* si ses sommets sont non adjacents deux à deux.

**Proposition 4.7** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_2$ -point-stable sans triangles. Alors tout  $\gamma_2(G)$ -ensemble est indépendant.*

Preuve. Supposons le contraire,  $D$  est un  $\gamma_2(G)$ -ensemble non indépendant. Soit  $u, v$  deux sommets adjacent dans  $D$ . Comme  $G$  est sans triangles,  $u$  et  $v$  n'ont pas de voisins communs dans  $V(G) - D$ . Alors  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{uv}$ , et donc  $\gamma_2(G_{uv}) \leq \gamma_2(G) - 1$ , une contradiction.  $\square$

En vertu de l'Observation 4.1 et la Proposition 4.7, nous obtenons le corollaire suivant.

**Corollaire 4.8** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_2$ -point-stable, alors tout  $\gamma_2(G)$ -ensemble ne contient pas de sommets supports de  $G$ .*

**Proposition 4.9** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_2$ -point-stable, alors tout sommet support de  $G$  est adjacent à au plus deux voisins feuilles.*

Preuve. Soit  $D$  un  $\gamma_2(G)$ -ensemble, et supposons que  $G$  a un sommet support  $v$  ayant au moins trois voisins feuilles. Soit  $u \in L_v$ . Par l'Observation 4.1 et la Proposition 4.7,  $L_v \subset D$  et  $v \notin D$ . Mais  $D - \{u\}$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{vu}$ , une contradiction.  $\square$

**Proposition 4.10** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_2$ -point-stable sans sommets isolés. Alors pour tout sommet  $u$  de  $V(G)$ ,*

$$\gamma_2(G - u) \geq \gamma_2(G).$$

Preuve. Soit  $u$  un sommet de  $V$  et  $v$  un voisin de  $u$ . Supposons que  $\gamma_2(G - u) < \gamma_2(G)$ , et soit  $D$  un  $\gamma_2(G - u)$ -ensemble. Si  $v \in D$ , alors il est clair que  $D$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{uv}$ , et donc  $\gamma_2(G_{uv}) \leq \gamma_2(G - u) < \gamma_2(G)$ , ce qui contredit le fait que  $G$  est  $\gamma_2$ -point-stable. Par conséquent,  $v \in V - D$ . Puisque  $v$  est deux fois dominé par  $D$ , alors  $D$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{uv}$ , ce qui mène aussi à une contradiction. Nous déduisons que  $\gamma_2(G - u) \geq \gamma_2(G)$  pour tout  $u \in V$ .  $\square$

Nous clôturons cette section en donnant une caractérisation de certains graphes  $\gamma_2$ -point-stables dont les graphes complets, les graphes bipartis complets, les cycles et les chaînes. Puisque  $\gamma_2(K_n) = 2$  pour tout  $n \geq 2$ , ce qui suit est direct.

**Observation 4.11** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Un graphe complet  $K_n$  est  $\gamma_2$ -point-stable si et seulement si  $n \geq 3$ .*

Il est connu [10] que  $\gamma_2(P_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$  et  $\gamma_2(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ . Puisque la contraction d'une arête dans une chaîne ou un cycle donne une chaîne ou un cycle, respectivement, les résultats suivants sont immédiats

**Observation 4.12** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Une chaîne  $P_n$  est  $\gamma_2$ -point-stable si et seulement si  $n \geq 3$  et  $n$  est impair.*

**Observation 4.13** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Un cycle  $C_n$  est  $\gamma_2$ -point-stable si et seulement si  $n = 3$  ou  $n$  est pair.*

**Proposition 4.14** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $G$  un graphe complet biparti d'ordre  $n$ . Alors  $G$  est  $\gamma_2$ -point-stable si et seulement si  $G = K_{2,n-2}$  pour tout  $n \geq 3$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe complet biparti  $\gamma_2$ -point-stable de bipartition  $A$  et  $B$  où  $|A| \leq |B|$ . D'après la Proposition 4.7, nous avons ou bien  $D \cap A = \emptyset$  ou  $D \cap B = \emptyset$  pour tout  $\gamma_2(G)$ -ensemble  $D$ . Il s'ensuit que  $|A| \leq 3$ , sinon deux sommets quelconques de  $A$  avec deux sommets quelconques de  $B$  forment un  $\gamma_2(G)$ -ensemble qui n'est pas indépendant. Maintenant, supposons que  $|A| = 3$ , et soit  $x \in A$  et  $y \in B$ . Notons que  $A$  est un  $\gamma_2(G)$ -ensemble. Alors  $A - \{x\}$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{xy}$ , ce qui contredit le fait que  $G$  est  $\gamma_2$ -point-stable. Par conséquent,  $|A| \leq 2$ . Si  $|A| = 1$ , alors  $G$  est une étoile et il est clair que  $\gamma_2(G) = \gamma_2(G_e)$  pour toute  $e \in E(G)$  si et seulement si  $|B| = 2$ , c'est-à-dire  $G = K_{1,2}$ . Par ailleurs, si  $|A| = 2$ , alors  $G = K_{2,n-2}$ .

L'inverse est simple à voir. □

### 4.3 Arbres $\gamma_2$ -point-stables

Pour la suite, nous aurons besoin des observations suivantes.

**Observation 4.15** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $T$  l'arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial  $T'$  et une étoile  $K_{1,p}$  ( $p \geq 2$ ) centrée en  $v$  en ajoutant une arête  $vw$  à un sommet  $w$  de  $T'$ . Alors*

$$\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p.$$

Preuve. Tout  $\gamma_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $T$  en ajoutant  $L(v)$ , et donc  $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + p$ . D'un autre côté, soit  $D$  un  $\gamma_2(T)$ -ensemble. Alors par l'Observation 4.1,  $L_v \subset D$ . De plus, sans perte de généralité, nous avons  $v \notin D$  (sinon remplacer  $v$  par  $w$  dans  $D$ ). Alors  $D - L_v$  2-domine  $T'$  et donc  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - p$ . D'où  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p$ .  $\square$

**Observation 4.16** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $T$  l'arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial  $T'$  et  $k$  chaînes  $P_2 : x_i y_i$  en ajoutant des arêtes  $x_i w$  à un sommet  $w$  de  $T'$  appartenant à un  $\gamma_2(T')$ -ensemble. Alors*

$$\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + k.$$

Preuve. Si  $D'$  est un  $\gamma_2(T')$ -ensemble contenant  $w$ , alors  $D' \cup \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T$ , et donc  $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + k$ . Maintenant, soit  $D$  un  $\gamma_2(T)$ -ensemble. Alors tout  $y_i \in D$  (par l'Observation 4.1). Si  $x_i \in D$  pour un certain  $i$ , alors la minimalité de  $D$  implique que  $w \notin D$ , et nous pouvons remplacer  $x_i$  par  $w$  dans  $D$ . Ainsi, nous pouvons supposer que  $D$  contient  $x_i$ . Il s'en suit que  $w \in D$ , et alors  $D \cap V(T')$  2-domine  $T'$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - k$  et nous avons l'égalité.  $\square$

Notons par  $\mathcal{H}$  la famille de tous les arbres  $T$  obtenus à partir de  $p$  étoiles subdivisées et de  $q$  chaînes  $P_3$ , où  $p + q \geq 2$ , en ajoutant un nouveau sommet  $x$  attaché à une feuille de chaque chaîne  $P_3$  et aux sommets centres des étoiles subdivisées. Si  $H$  est un arbre de  $\mathcal{H}$  enraciné à son sommet centre  $x$ , alors soit  $L_H$  l'ensemble des feuilles de  $H$ ,  $S_H$  l'ensemble des sommets supports de  $H$  et  $C_x = N_H(x)$ .

**Observation 4.17** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $T$  l'arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial  $T'$  et un arbre  $H \in \mathcal{H}$  enraciné en  $x$  en ajoutant une arête  $xw$  à un sommet  $w$  de  $T'$ . Alors*

$$\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + |L_H| + |C_x|.$$

Preuve. Puisque tout  $\gamma_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $T$  en ajoutant  $L_H \cup C_x$ , alors  $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + |L_H| + |C_x|$ . D'un autre côté, soit  $D$  un  $\gamma_2(T)$ -ensemble. Alors d'après l'Observation 4.1,  $L_H \subset D$ , et  $C_x \subset D$  pour 2-dominer  $S_H$ . Par ailleurs, si  $x \in D$ , alors  $x$  peut être remplacé par  $w$  dans  $D$ . Nous

pouvons donc supposer que  $x \notin D$ , et alors  $D \cap V(T')$  2-domine  $T'$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - (|L_H| + |C_x|)$ , et nous obtenons l'égalité.  $\square$

Dans le but de caractériser les arbres  $\gamma_2$ -point-stables, nous définissons la famille  $\mathcal{F}$  de tous les arbres  $T$  pouvant être obtenus par une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) d'arbres, où  $T_1 = P_3$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu de manière récursive à partir de  $T_i$  par l'une des opérations suivantes:

- **Opération  $\mathcal{F}_1$**  : Attacher une chaîne  $P_3 : yxz$  en joignant  $x$  à un sommet  $w$  de  $T_i$  n'appartenant à aucun  $\gamma_2(T_i)$ -ensemble.
- **Opération  $\mathcal{F}_2$**  : Attacher  $k$  chaînes  $P_2 : x_i y_i$  en joignant chaque  $x_i$  à une feuille  $w$  de  $T_i$ .
- **Opération  $\mathcal{F}_3$**  : Attacher un arbre  $H \in \mathcal{H}$  enraciné en  $x$  en joignant  $x$  à un sommet  $w$  de  $T_i$ .

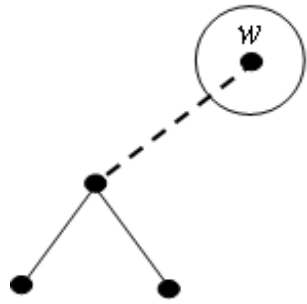


Figure 4.1. Opération  $\mathcal{F}_1$ .

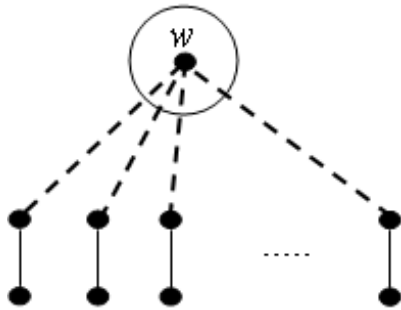
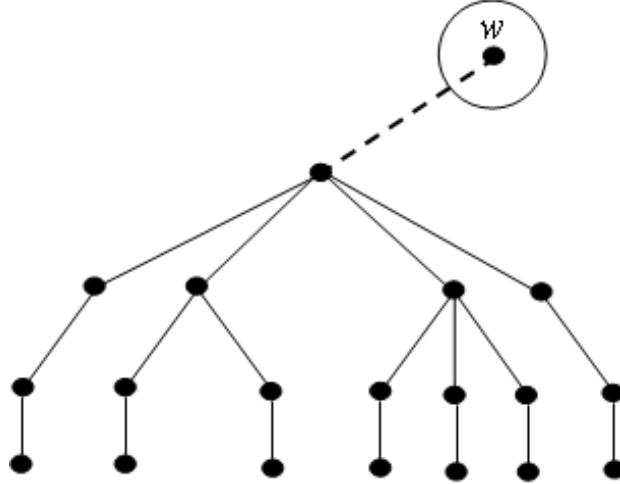


Figure 4.2. Opération  $\mathcal{F}_2$ .

Figure 4.3. Opération  $\mathcal{F}_3$ .

Dans ce qui suit, nous prouverons:

**Théorème 4.18** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Un arbre  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable si et seulement si  $T \in \mathcal{F}$ .*

Nous allons utiliser les propositions suivantes.

**Proposition 4.19** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $T \in \mathcal{F}$ , alors  $T$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable.*

*Preuve.* Soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{F}$ . Alors  $T$  peut être obtenu par séquence  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) d'arbres, où  $T_1 = P_3$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu de manière récursive à partir de  $T_i$  par l'une des trois opérations définies ci-dessus. Nous utiliserons une induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire  $T$ . Il est clair que la propriété est vraie si  $j = 1$ . Ceci établit le cas de base.

Supposons maintenant que  $j \geq 2$  et que le résultat est valable pour tous les arbres  $T \in \mathcal{F}$  pouvant être construits à partir d'une séquence de longueur au plus  $j - 1$ , et soit  $T' = T_{j-1}$ . Par induction,  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable. Soit  $T$  un arbre obtenu de  $T'$  en utilisant l'une des opérations  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , et  $\mathcal{F}_3$ . Nous considérons chaque cas séparément.

**Cas 1.**  $T$  est obtenu d'un arbre  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{F}_1$ . Par l'Observation 4.15,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 2$ . Nous allons montrer que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable. Soit  $uv$  une arête de  $E(T)$ .

Supposons d'abord que  $uv \in E(T')$ . Puisque  $T_{uv}$  est un arbre, alors par l'Observation 4.15, nous avons  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + 2$ . Également, comme  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + 2 = \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ .

Supposons maintenant que  $uv = xw$ . Soit  $D'$  un  $\gamma_2(T')$ -ensemble. Rappelons que par construction,  $w$  n'appartient à aucun  $\gamma_2(T')$ -ensemble, et donc  $w \notin D'$ . Alors  $D' \cup \{y, z\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T_{xw}$ , ce qui implique que  $\gamma_2(T_{xw}) \leq \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ . Supposons maintenant que  $\gamma_2(T_{xw}) < \gamma_2(T)$  et soit  $S$  un  $\gamma_2(T_{xw})$ -ensemble. Alors  $y, z \in S$  (par l'Observation 4.1). Si  $\overline{xw} \in S$ , alors  $S' = \{w\} \cup S - \{y, z, \overline{xw}\}$  2-domine  $T'$ , impliquant que  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T_{xw}) - 2 < \gamma_2(T) - 2 = \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. Par conséquent,  $\overline{xw} \notin S$ . Il s'ensuit que  $S - \{y, z\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T' - w$ . Puisque  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable, par la Proposition 4.10,  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T' - w) \leq |S| - 2 = \gamma_2(T_{xw}) - 2$ , et donc  $\gamma_2(T_{xw}) \geq \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ , ce qui contredit notre hypothèse que  $\gamma_2(T_{xw}) < \gamma_2(T)$ . Alors  $\gamma_2(T_{xw}) = \gamma_2(T)$ .

Finalement, supposons que  $uv \in \{xy, xz\}$ . Sans perte de généralité, supposons que  $uv = xy$ . Il est clair que tout  $\gamma_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $T_{xy}$  en ajoutant  $z$  et  $\overline{xy}$ , et donc  $\gamma_2(T_{xy}) \leq \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ . Pour prouver l'égalité, supposons que l'inégalité est stricte, i.e.  $\gamma_2(T_{xy}) < \gamma_2(T)$ . Soit  $S$  un  $\gamma_2(T_{xy})$ -ensemble. Alors  $z \in S$ . Si  $\overline{xy} \notin S$ , alors  $w \in S$  et donc  $S - \{z\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T'$ . D'où  $\gamma_2(T') \leq |S| - 1 < \gamma_2(T) - 1$ , et donc  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - 2$ . En utilisant le fait que  $\gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ , nous déduisons que  $S - \{z\}$  est un  $\gamma_2(T')$ -ensemble contenant  $w$ , ce qui contredit la construction. D'où  $\overline{xy} \in S$ . La minimalité de  $S$  implique que  $w \notin S$ , et alors  $S - \{z, \overline{xy}\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T' - w$ . Sachant que  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable, alors par la Proposition 4.10,  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T' - w) \leq |S| - 2 = \gamma_2(T_{xy}) - 2$ , et donc  $\gamma_2(T_{xw}) \geq \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ , ce qui contredit notre hypothèse que  $\gamma_2(T_{xw}) < \gamma_2(T)$ . D'où  $\gamma_2(T_{xw}) = \gamma_2(T)$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T_e) = \gamma_2(T)$  pour toute arête  $e \in E(T)$  et donc  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable.

**Cas 2.**  $T$  est obtenu d'un arbre  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{F}_2$ . Par l'Observation 4.16,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + k$ . Dans la suite, nous allons démontrer que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable. Soit  $uv$  une arête de  $E(T)$ , et soit  $s$  le sommet support adjacent à  $u$  dans  $T'$ .

Supposons d'abord que  $uv \in E(T')$ . Si  $w \notin \{u, v\}$ , alors  $w$  est une feuille dans  $T'_{uv}$  et donc par l'Observation 4.16,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + k$ . Puisque  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable, Nous obtenons que  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + k = \gamma_2(T') + k = \gamma_2(T)$ . Maintenant, supposons que  $w \in \{u, v\}$ , i.e.  $uv = ws$ . Soit  $D'$  un  $\gamma_2(T')$ -ensemble. Comme  $w \in D'$ ,  $s \notin D'$  (par la Proposition 4.7), et  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable, nous avons  $D^* = (D - \{w\}) \cup \{\overline{ws}\}$  est un  $\gamma_2(T'_{ws})$ -ensemble contenant  $\overline{ws}$ . D'où par l'Observation 4.16,  $\gamma_2(T_{ws}) = \gamma_2(T'_{ws}) + k$ . Maintenant, puisque  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable, nous obtenons que  $\gamma_2(T_{ws}) = \gamma_2(T'_{ws}) + k = \gamma_2(T') + k = \gamma_2(T)$ .

En second lieu, supposons que  $uv$  est une arête de la forme  $wx_i$ , disons  $wx_1$ . Soit  $D'$  un  $\gamma_2(T')$ -ensemble. Puisque  $w \in D'$ ,  $(D' - \{w\}) \cup \{\overline{wx_1}, y_1, \dots, y_k\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T_{wx_1}$ , et donc  $\gamma_2(T_{wx_1}) \leq |D'| + k = \gamma_2(T') + k$  (puisque  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable). Maintenant, supposons que  $\gamma_2(T_{wx_1}) < \gamma_2(T') + k$  et soit  $S$  un  $\gamma_2(T_{wx_1})$ -ensemble. Il est clair que  $y_i \in S$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Si  $k \geq 2$ , alors  $\overline{wx_1} \in S$  pour 2-dominer tous les  $x_i$  pour  $i \geq 2$ . Mais alors  $S' = \{w\} \cup S - \{\overline{wx_1}, y_1, \dots, y_k\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T'$  impliquant que  $\gamma_2(T') \leq (|S| + 1) - k - 1 = \gamma_2(T_{wx_1}) - k < \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. D'où  $k = 1$ . Si  $\overline{wx_1} \in S$ , alors nous pouvons le remplacer par  $s$  dans  $S$ . Donc, nous pouvons supposer que  $\overline{wx_1} \notin S$  (pour 2-dominer  $\overline{wx_1}$ ). D'où  $s \in S$ , ce qui implique que  $S - \{y_1\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T' - w$ . Puisque  $T'$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable, alors par la Proposition 4.10,  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T' - w) \leq |S| - 1 = \gamma_2(T_{wx_1}) - 1 < (\gamma_2(T') + 1) - 1 = \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. Nous déduisons que  $\gamma_2(T_{wx_1}) = \gamma_2(T') + k = \gamma_2(T)$ .

Finalement, supposons, sans perte de généralité, que  $uv = x_1y_1$ . D'après le Corollaire 4.3,  $\gamma_2(T_{x_1y_1}) \leq \gamma_2(T)$ . Supposons que l'inégalité est stricte  $\gamma_2(T_{x_1y_1}) < \gamma_2(T)$  et soit  $S$  un  $\gamma_2(T_{x_1y_1})$ -ensemble. Alors  $\{\overline{x_1y_1}, y_2, \dots, y_k\} \subset S$ . Si  $w \in S$ , alors  $S - \{\overline{x_1y_1}, y_2, \dots, y_k\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T'$ , et donc  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T_{x_1y_1}) - k < \gamma_2(T) - k = \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. D'où  $w \notin S$ . Si  $k \geq 2$ , alors tous les  $x_i$  pour  $i \in \{2, \dots, k\}$  appartiennent à  $S$  mais  $S' = \{w\} \cup S - \{x_2, \dots, x_k\}$  serait soit un ensemble 2-dominant de  $T_{x_1y_1}$  plus petit que  $S$  (où  $k \geq 3$ ) ou bien un  $\gamma_2(T_{x_1y_1})$ -ensemble contenant  $w$  (déjà vu ci-dessus). Alors nous déduisons que  $k = 1$ , et donc  $S - \{\overline{x_1y_1}\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T' - w$ . En utilisant le fait que  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 1$ , nous obtenons  $\gamma_2(T' - w) \leq \gamma_2(T_{x_1y_1}) - 1 <$



$\gamma_2(T) - 1 = (\gamma_2(T') + 1) - 1 = \gamma_2(T')$ , ce qui contredit la Proposition 4.10. D'où  $\gamma_2(T_{x_1y_1}) = \gamma_2(T)$ . Par Conséquent,  $\gamma_2(T_e) = \gamma_2(T)$  pour toute  $e \in E(T)$  et donc  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable.

**Cas 3.**  $T$  est obtenu d'un arbre  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{F}_3$ . Par l'Observation 4.17,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + |L_H| + |C_x|$ . Dans ce qui suit, nous allons démontrer que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable. Soit  $uv$  une arête de  $E(T)$ .

Supposons d'abord que  $uv \in E(T')$ . D'après l'Observation 4.17,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + |L_H| + |C_x|$ . Puisque  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-stable,  $\gamma_2(T'_{uv}) = \gamma_2(T') + |L_x| + |C_x| = \gamma_2(T)$ .

Supposons maintenant que  $uv = xw$ . Par le Corollaire 4.3,  $\gamma_2(T_{xw}) \leq \gamma_2(T)$ . Supposons que l'inégalité est stricte  $\gamma_2(T_{xw}) < \gamma_2(T)$  et soit  $D$  un  $\gamma_2(T_{xw})$ -ensemble. Par l'Observation 4.1,  $L_H \subset D$  et  $C_x \subset D$  (pour 2-dominer  $S_H$ ). Si  $\overline{xw} \in D$ , alors  $\{w\} \cup D - (L_H \cup C_x \cup \{\overline{xw}\})$  est un ensemble 2-dominant de  $T'$ , et donc  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T_{xw}) + 1 - (|L_H| + |C_x| + 1) < \gamma_2(T) - (|L_H| + |C_x|) = \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. D'où  $\overline{xw} \notin D$ . Mais alors  $D - (L_H \cup C_x)$  est un ensemble 2-dominant de  $T' - w$ . Ainsi,  $\gamma_2(T' - w) \leq \gamma_2(T_{xw}) - (|L_H| + |C_x|) < \gamma_2(T) - (|L_H| + |C_x|) = \gamma_2(T')$ , ce qui contredit la Proposition 4.10. Par Conséquent,  $\gamma_2(T_{xw}) = \gamma_2(T)$ .

Finalement supposons que  $uv \in E(H)$ . Par le Corollaire 4.3, nous avons  $\gamma_2(T_{uv}) \leq \gamma_2(T)$ . Supposons que  $\gamma_2(T_{uv}) < \gamma_2(T)$  et soit  $D$  un  $\gamma_2(T_{uv})$ -ensemble. Nous considérons que deux situations, selon que l'arête  $uv$  est incidente à  $x$  ou non.

Supposons d'abord que  $uv = xc_i$  pour certains  $c_i \in C_x$ . Soit  $C'_x = (C_x - \{c_i\}) \cup \{\overline{xc_i}\}$ . On peut facilement voir que  $L_x \cup C'_x \subset D$ . Si  $D \cap V(T')$  2-domine  $V(T')$ , alors  $\gamma_2(T') \leq |D| - |L_H \cup C'_x| = \gamma_2(T_{uv}) - (|L_H| + |C'_x|) < \gamma_2(T) - (|L_H| + |C'_x|) = \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. D'où  $D \cap V(T')$  ne 2-domine pas  $V(T')$ , et donc il 2-domine  $T' - w$ , d'où  $\gamma_2(T' - w) \leq |D| - |L_H \cup C'_x| = \gamma_2(T_{uv}) - (|L_H| + |C'_x|) = \gamma_2(T')$ . Mais l'inégalité  $\gamma_2(T' - w) < \gamma_2(T')$  contredit la Proposition 4.10. Par conséquent,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T)$ .

Pour la suite, nous pouvons supposer que  $uv$  n'est pas incidente à  $x$ . Supposons que  $uv$  est une arête appartenant à une étoile subdivisée dans  $H - x$  centrée à  $c_1$ , avec les sommets supports  $y_1, y_2, \dots, y_k$  et les feuilles  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , où  $k \geq 2$ . Sans perte de généralité, soit  $uv = y_1l_1$  (le cas  $uv = c_1y_1$  est similaire). Il est facile de voir que  $(L_H - \{l_1\}) \cup \{\overline{y_1l_1}\} \subset D$

et  $C_x \subset D$ . Puisque  $|C_x| \geq 2$ , nous pouvons supposer que  $x \notin D$ . D'où  $D \cap V(T')$  est un ensemble 2-dominant de  $T'$ , impliquant que  $\gamma_2(T') \leq |D| - (|L_H| + |C_x|) < \gamma_2(T')$ , ce qui est impossible. Par conséquent,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T)$ . Finalement supposons que  $uv$  est une arête d'une certaine chaîne  $P_3 : c_i y_i l_i$  dans  $H - x$ . comme les arêtes  $c_i y_i$  et  $y_i l_i$  jouent le même rôle, nous pouvons supposer que  $uv = c_i y_i$ . Soit  $C'_x = C_x - \{c_i\}$ . Il est clair que  $L_H \cup C'_x \subset D$ . Par ailleurs,  $x \in D$  pour 2-dominer le sommet  $\overline{c_i y_i}$ . Il est clair que si  $D \cap V(T')$  2-domine  $V(T')$ , alors nous devrions obtenir  $\gamma_2(T') < \gamma_2(T')$  et si  $D \cap V(T')$  2-domine  $V(T' - w)$ , alors nous devrions avoir  $\gamma_2(T' - w) < \gamma_2(T')$ . Les deux situations donnent lieu à une contraction. D'où  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T)$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T_e) = \gamma_2(T)$  pour toute  $e \in E(T)$  et donc  $T$  est  $\gamma_2$ -point-stable.  $\square$

**Proposition 4.20** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $T$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable, alors  $T \in \mathcal{F}$ .*

Preuve. Nous allons utiliser une induction sur l'ordre  $n$  de  $T$ , avec  $n \geq 3$ . Il est clair que si  $n = 3$ , alors  $T$  est la chaîne  $P_3$  qui appartient à  $\mathcal{F}$ . Supposons que tout arbre  $\gamma_2$ -point-stable  $T'$  d'ordre  $n'$ , avec  $3 \leq n' < n$ , est dans  $\mathcal{F}$ . Soit  $T$  un arbre  $\gamma_2$ -point-stable d'ordre  $n$ . Puisque  $P_3$  est l'unique arbre  $\gamma_2$ -point-stable de diamètre deux, supposons que  $T$  a un diamètre au moins trois. Si  $\text{diam}(T) = 3$ , alors  $T$  est la double étoile  $S_{p,q}$  et par le Corollaire 4.8 et la Proposition 4.9, nous devons avoir  $p = q = 2$ . Dans ce cas,  $S_{2,2} \in \mathcal{F}$  parce qu'elle est obtenue à partir de  $T_1 = P_3$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{F}_1$ . Nous pouvons donc supposer que  $T$  a un diamètre au moins quatre.

Soit  $\text{diam}(T) = d$  et soit  $P = x_0 x_1 \dots x_d$  une chaîne diamétrale dans  $T$  choisie telle que le degré de  $x_{d-1}$  est si large que possible. Enracinons  $T$  à  $x_0$ . Il est clair que  $x_0$  et  $x_d$  sont des feuilles. D'autre part, comme  $x_{d-1}$  est un sommet support, alors la Proposition 4.9 implique que  $2 \leq d_T(x_{d-1}) \leq 3$ . Notons par  $T_z$  le sous-arbre induit par un sommet  $z$  et ses descendants dans l'arbre enraciné  $T$ .

Supposons que  $d_T(x_{d-1}) = 3$ . Il est clair que  $T_{x_{d-1}}$  est une chaîne  $P_3$  centrée à  $x_{d-1}$  avec  $x_d$  et  $x'_d$  ses feuilles. Soit  $T' = T - T_{x_{d-1}}$ . Par l'Observation 4.15,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 2$ . Rappelons que  $x_d$  et  $x'_d$  appartiennent à tout  $\gamma_2(T)$ -ensemble. Si  $x_{d-2}$  appartient à un certain  $\gamma_2(T')$ -ensemble  $X$ , alors  $X \cup \{x'_d\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T_{x_d x_{d-1}}$  de

cardinal  $\gamma_2(T) - 1$ , ce qui contredit le fait que  $T$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-stable. D'où  $x_{d-2}$  n'appartient à aucun  $\gamma_2(T')$ -ensemble. De plus, si  $T'$  n'est pas  $\gamma_2$ -point-stable, alors il existe une arête  $uv \in E(T')$  telle que  $\gamma_2(T'_{uv}) < \gamma_2(T')$ . Dans ce cas, tout  $\gamma_2(T'_{uv})$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $T_{uv}$  en ajoutant  $x_d$  et  $x'_d$ , et ainsi  $\gamma_2(T_{uv}) \leq \gamma_2(T'_{uv}) + 2 < \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T)$ , une contradiction. D'où  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-stable, et par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{F}$ . Il s'ensuit que  $T \in \mathcal{F}$  parce qu'il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{F}_1$ . A partir de maintenant, nous supposons que  $d_T(x_{d-1}) = 2$ . Observons que  $x_{d-2}$  est différent d'un sommet support, sinon il y a un  $\gamma_2(T)$ -ensemble contenant  $x_{d-2}$  (pour 2-dominer  $x_{d-1}$ ) et toutes ses feuilles, ce qui contredit la Proposition 4.7. Nous déduisons que si  $d_T(x_{d-2}) \geq 3$ , alors tout fils de  $x_{d-2}$  est un sommet support de degré deux, c'est-à-dire que  $T_{x_{d-2}}$  est une étoile subdivisée. Soit  $D$  un  $\gamma_2(T)$ -ensemble. Par l'Observation 4.1, toutes les feuilles de  $T_{x_{d-2}}$  appartiennent à  $D$ . De plus, la Proposition 4.7 implique que  $D$  ne contient pas des fils de  $x_{d-2}$ , et donc  $x_{d-2} \in D$ . La Proposition 4.7 implique aussi que  $x_{d-3} \notin D$ . Il s'ensuit que  $|N(x_{d-3}) \cap D| \geq 2$ . Si  $d_T(x_{d-3}) \geq 3$ , alors en utilisant le fait que  $x_{d-3} \notin D$ , tout sommet support dans  $T_{x_{d-2}}$  à distance deux de  $x_{d-3}$  a degré deux (comme il joue le même rôle comme  $x_{d-1}$ ), et tout sommet support est adjacent à au plus deux feuilles, nous pouvons facilement voir que chaque sous-arbre enraciné vers un fils  $y$  de  $x_{d-3}$  est soit une étoile subdivisée centrée à  $y$ , ou bien une chaîne  $P_3$  soit centrée à  $y$  ou bien ayant  $y$  comme une feuille. S'il y'a une chaîne  $P_3$  centrée à  $y$ , alors soit  $T' = T - T_y$ . Un tel cas est analogue à celui déjà traité. Par conséquent, en utilisant le même argument, nous verrons que  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-stable, et  $T' \in \mathcal{F}$  (par induction sur  $T'$ ). Par conséquent,  $T \in \mathcal{F}$  car il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{F}_1$ . Nous pouvons donc supposer que chaque sous-arbre dont la racine est  $y$  est soit une étoile subdivisée centrée à  $y$ , ou bien une chaîne  $P_3$  ayant  $y$  comme feuille. Nous distinguons entre deux cas.

**Cas 1.**  $d_T(x_{d-3}) \geq 3$ . Alors  $T'' = T_{x_{d-3}}$  est un arbre de  $\mathcal{H}$  avec  $x_{d-3}$  son sommet centre. Soit  $T' = T - T''$ . Par l'Observation 4.17,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + |L_{T''}| + |C_{x_{d-3}}|$ . Pour démontrer que  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-stable, soit  $uv$  une arête de  $E(T')$ , et supposons que  $\gamma_2(T'_{uv}) < \gamma_2(T')$ . Par l'Observation 4.17,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + |L_{T''}| + |C_{x_{d-3}}|$ . D'où  $\gamma_2(T_{uv}) < \gamma_2(T') + |L_{T''}| + |C_{x_{d-3}}| = \gamma_2(T)$ , une contradiction. Par conséquent,  $T'$  est

$\gamma_2$ -point-stable, et par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{F}$ . Il en résulte que  $T \in \mathcal{F}$  car il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{F}_3$ .

**Cas 2.**  $d_T(x_{d-3}) = 2$ . Puisque  $x_{d-2} \in D$  et  $x_{d-3} \notin D$ ,  $x_{d-4} \in D$ . Soit  $T'$  l'arbre obtenu à partir de  $T$  en éliminant tous les sommets de  $T_{x_{d-2}}$  sauf  $x_{d-2}$ . Soit  $k = d_T(x_{d-2}) - 1$ . Il est clair que,  $k \geq 1$ . Par l'Observation 3.12,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + k$ . Soit  $uv$  une arête de  $E(T')$ . Nous observons que, quelle que soit l'arête contractée, nous aurons soit  $x_{d-2}$  ou bien  $\overline{x_{d-2}x_{d-3}}$  comme une feuille dans  $T'_{uv}$  et donc elle appartient à tout  $\gamma_2(T'_{uv})$ -ensemble. Alors par l'Observation 3.12,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + k$ . Il s'ensuit que  $\gamma_2(T') + k = \gamma_2(T) = \gamma_2(T_{uv}) + k$ , et donc  $\gamma_2(T') = \gamma_2(T_{uv})$ , c'est-à-dire que  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-stable. Par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{F}$ . Par conséquent,  $T \in \mathcal{F}$  car il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{F}_2$ .  $\square$

Selon les Propositions 4.19 et 4.20, nous avons prouvé le Théorème 4.18.

#### 4.4 Arbres $\gamma_2$ -point-critiques

Notre objectif dans cette section est de caractériser tous les arbres  $\gamma_2$ -point-critiques. Nous commençons par les résultats suivants.

**Proposition 4.21** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $u$  est une feuille dans un graphe  $\gamma_2$ -point-critique  $G$ , alors*

$$\gamma_2(G - u) = \gamma_2(G) - 1$$

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe  $\gamma_2$ -point-critique et  $u$  une feuille dans  $G$ . Il est clair que le résultat est valable si  $G$  est d'ordre  $n = 2$ . Puisque une chaîne  $P_3$  n'est pas  $\gamma_2$ -point-critique, nous pouvons supposer que  $n \geq 4$ . Comme tout  $\gamma_2(G - u)$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $G$  en ajoutant  $u$ , nous obtenons  $\gamma_2(G) \leq \gamma_2(G - u) + 1$ . Soit  $v$  un sommet support adjacent à  $u$ , et soit  $D$  un  $\gamma_2(G_{uv})$ -ensemble. Si  $\overline{uv} \in D$ , alors  $D^* = \{v\} \cup D - \{\overline{uv}\}$ , et si  $\overline{uv} \notin D$ , alors soit  $D^* = D$ . Il est clair que  $|D^*| = |D|$  et  $D^*$  2-domine  $G - u$ , et donc  $\gamma_2(G - u) \leq \gamma_2(G_{uv})$ . Maintenant, puisque  $G$  est  $\gamma_2$ -point-critique, il s'ensuit que  $\gamma_2(G - u) \leq \gamma_2(G_{uv}) = \gamma_2(G) - 1$ , D'où le résultat.  $\square$

L'observation suivante est utile pour la suite.

**Observation 4.22** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Soit  $T$  l'arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial  $T'$  et  $p$  nouveaux sommets  $x_1, x_2, \dots, x_p$  en ajoutant des arêtes  $x_i w$  à un sommet  $w$  de degré deux appartenant à une chaîne pendante de longueur 2 dans  $T'$ . Alors*

$$\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p.$$

Preuve. Puisque chaque  $\gamma_2(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $G$  en ajoutant  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ,  $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + p$ . Maintenant, soit  $D$  un  $\gamma_2(T)$ -ensemble et  $wvz$  la chaîne pendante de longueur 2 dans  $T'$ . Alors  $\{z, x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset D$  et  $w \in D$  pour 2-dominer  $v$ . Par conséquent,  $D \cap V(T')$  2-domine  $T'$  et donc  $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - p$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{T}$  la famille de tous les arbres  $T$  obtenus par une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) d'arbres, où  $T_1 = K_{1,t}$  et  $t \neq 2$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu de manière récursive à partir de  $T_i$  par l'une des opérations suivantes..

- **Opération  $\mathcal{T}_1$** : Attacher une étoile  $K_{1,p}$  ( $p \geq 2$ ) centrée à  $x$  en joignant  $x$  à un sommet  $w$  de  $T_i$  vérifiant  $\gamma_2(T_i - w) = \gamma_2(T_i) - 1$ .
- **Opération  $\mathcal{T}_2$** : Attacher une chaîne  $P_2 : xy$  en joignant  $y$  à une feuille  $w$  de  $T_i$  dont le sommet support appartient à un  $\gamma_2(T_i)$ -ensemble.
- **Opération  $\mathcal{T}_3$** : Attacher  $p \geq 1$  nouveaux sommets en les joignant à un sommet  $w$  de degré deux dans  $T_i$  et appartenant à une chaîne pendante de longueur 2.

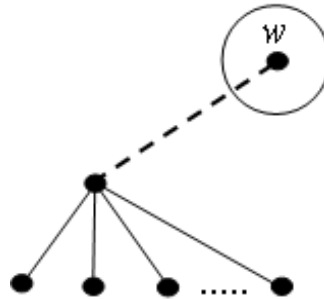
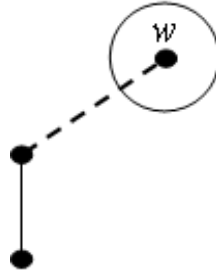
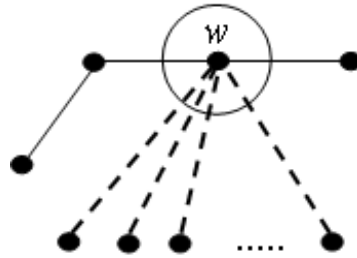
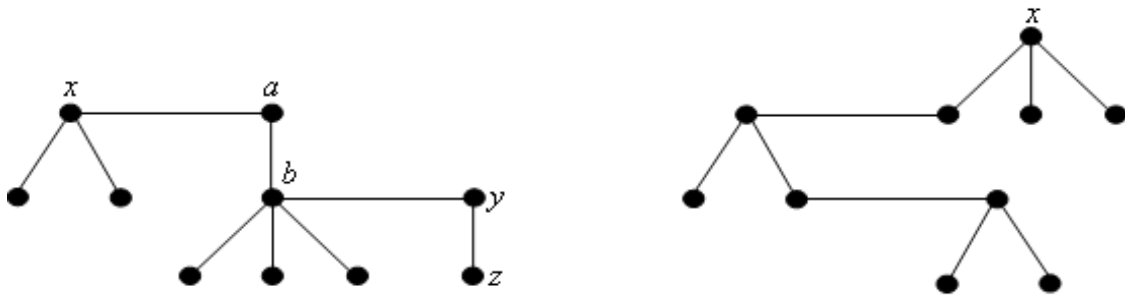


Figure 4.4. Opération  $\mathcal{T}_1$ .

Figure 4.5. Opération  $\mathcal{T}_2$ .Figure 4.6. Opération  $\mathcal{T}_3$ .

La Figure 4.7 présente un exemple de deux arbres construits comme suit. L'arbre à gauche est obtenu à partir de l'arbre  $T_1 : ab$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{T}_1$  (ajouter une étoile  $K_{1,2}$  centrée à  $x$ ), Opération  $\mathcal{T}_2$  (ajouter une chaîne  $P_2 : yz$ ), puis l'Opération  $\mathcal{T}_3$  (ajouter trois sommets attachés au sommet  $b$ ). L'arbre à droite est obtenu à partir de l'arbre  $T_1 = K_{1,3}$  de centre  $x$  en utilisant deux fois l'Opération  $\mathcal{T}_1$ .

Figure 4.7. Exemples d'arbres appartenant à  $\mathcal{T}$ .

Dans la suite, nous allons caractériser les arbres  $\gamma_2$ -point-critiques.

**Théorème 4.23** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Un arbre non trivial  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique si et seulement si  $T \in \mathcal{T}$ .*

Nous utiliserons les propositions suivantes.

**Proposition 4.24** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $T \in \mathcal{T}$ , alors  $T$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-critique.*

Preuve. Soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{T}$ . Alors  $T$  peut être obtenu par une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) d'arbres, où  $T_1 = K_{1,t}$  et  $t \neq 2$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu de manière récursive à partir de  $T_i$  par l'une des opérations définies ci-dessus. Nous utiliserons une induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire  $T$ . La propriété est clairement vraie si  $j = 1$ . Ceci établit le cas de base.

Supposons maintenant que  $j \geq 2$  et que le résultat est valable pour tous les arbres  $T \in \mathcal{T}$  pouvant être construits à partir d'une séquence de longueur au plus  $j - 1$ , et soit  $T' = T_{j-1}$ . Par l'hypothèse inductive,  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique. Soit  $T$  un arbre obtenu de  $T'$  en utilisant une des opérations  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$ , et  $\mathcal{T}_3$ . Considérons chaque cas séparément.

**Cas 1.**  $T$  est obtenu de  $T'$  en utilisant l'opération  $\mathcal{T}_1$ . Par l'Observation 4.15,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p$ . Nous allons démontrer que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique. Soit  $uv$  une arête de  $E(T)$  et soient  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , avec  $p \geq 2$ , les voisins feuilles de  $x$ .

Supposons d'abord que  $uv \in E(T')$ . Puisque  $T_{uv}$  est un arbre, l'Observation 4.15 implique que  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + p$ . Maintenant, puisque  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique, nous obtenons  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + p = \gamma_2(T') - 1 + p = \gamma_2(T) - 1$ .

Pour la suite, supposons que  $uv$  est une arête incidente à  $x$ . Soit  $D'$  un  $\gamma_2(T' - w)$ -ensemble, et rappelons que par construction le sommet  $w$  satisfait  $\gamma_2(T' - w) = \gamma_2(T') - 1$ . Si  $uv = xw$ , alors  $D' \cup L_x$  est un ensemble 2-dominant de  $T_{xw}$ , et donc  $\gamma_2(T_{xw}) \leq \gamma_2(T' - w) + p = \gamma_2(T') - 1 + p = \gamma_2(T) - 1$ . L'égalité  $\gamma_2(T_{xw}) = \gamma_2(T) - 1$  découle du Corollaire 4.3. Puisque toutes les arêtes pendantes incidentes à  $x$  jouent le même rôle, nous pouvons prendre  $uv = xx_1$ . Si  $p \geq 3$ , alors, il est clair que  $\gamma_2(T_{xx_1}) \leq \gamma_2(T') + p - 1 = \gamma_2(T) - 1$ , et l'égalité découle du Corollaire 4.3. Par conséquent, supposons que  $p = 2$ . Il est clair que  $D' \cup \{x_1, w\}$  2-domine  $T_{xx_1}$ . D'où  $\gamma_2(T_{xx_1}) \leq \gamma_2(T' - w) + 2 = \gamma_2(T') - 1 + 2 =$

$\gamma_2(T) - 1$ , et l'égalité découle du Corollaire 4.3. Par conséquent,  $\gamma_2(T_e) = \gamma_2(T) - 1$  pour toute arête  $e \in E(T)$  et donc  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique.

**Cas 2.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'opération  $\mathcal{T}_2$ . Par l'Observation 3.12,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 1$ . Pour démontrer que  $T$  est un arbre  $\gamma_2$ -point-critique, soit  $uv$  une arête de  $E(T)$ . Soit  $s$  le sommet support adjacent à  $w$  dans  $T'$ .

Supposons d'abord que  $uv \in E(T')$ . Il est à noter que puisque  $s$  appartient à un  $\gamma_2(T')$ -ensemble et  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique,  $w$  ou  $\overline{ws}$  est dans un  $\gamma_2(T'_{uv})$ -ensemble. Par conséquent, selon l'Observation 3.12, nous avons  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + 1$ , et donc  $\gamma_2(T_{uv}) = (\gamma_2(T') - 1) + 1 = \gamma_2(T) - 1$ . En particulier, lorsque  $uv = ws$ , nous avons  $\gamma_2(T_{ws}) = \gamma_2(T) - 1$ . Maintenant, il reste à voir le cas  $uv \in \{xy, yw\}$ . Observons que si  $uv \in \{xy, yw\}$ , alors  $T_{uv}$  est isomorphe à  $T_{ws}$ , et donc  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T) - 1$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T_e) = \gamma_2(T) - 1$  pour toute arête  $e \in E(T)$  et donc  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique.

**Cas 3.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'opération  $\mathcal{T}_3$ . Par l'Observation 4.22,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p$ . Pour démontrer que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique, soit  $uv$  une arête de  $E(T)$ . Soit  $wxx_1$  la chaîne pendante de longueur 2 dans  $T'$  pour à laquelle les sommets  $w_1, w_2, \dots, w_p$  sont attachés à  $w$ .

Supposons d'abord que  $uv \in E(T')$ . Tout  $\gamma_2(T'_{uv})$ -ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de  $T_{uv}$  en ajoutant  $w_1, \dots, w_p$  et donc  $\gamma_2(T_{uv}) \leq \gamma_2(T'_{uv}) + p$ . Maintenant, comme  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique, il s'ensuit que  $\gamma_2(T_{uv}) \leq \gamma_2(T') - 1 + p$  et donc  $\gamma_2(T_{uv}) \leq \gamma_2(T) - 1$ . L'égalité découle du Corollaire 4.3.

Finalement, supposons sans perte de généralité que,  $uv = ww_1$ . Selon l'Observation 4.22,  $\gamma_2(T_{ww_1}) = \gamma_2(T') + (p - 1) = \gamma_2(T) - 1$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T_e) = \gamma_2(T) - 1$  pour toute arête  $e \in E(T)$  et donc  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique.  $\square$

**Proposition 4.25** (Attalah et Chellali [91], 2019). *Si  $T$  est un arbre non trivial  $\gamma_2$ -point-critique, alors  $T \in \mathcal{T}$ .*

*Preuve.* Nous utilisons une induction sur l'ordre  $n$  de  $T$ . Si  $n = 2$ , alors  $T$  est une chaîne  $P_2$  appartenant à  $\mathcal{T}$ . Puisque la chaîne  $P_3$  n'est pas  $\gamma_2$ -point-critique, posons  $n \geq 4$ , et supposons que tout arbre  $\gamma_2$ -point-critique  $T'$  d'ordre  $2 \leq n' < n$  est dans  $\mathcal{T}$ . Soit  $T$  un arbre  $\gamma_2$ -point-critique d'ordre  $n$ . Si  $\text{diam}(T) = 2$ , alors  $T$  est une étoile  $K_{1,p}$ , avec  $p \geq 3$ ,



appartenant à  $\mathcal{T}$ . Par conséquent, nous pouvons supposer que  $\text{diam}(T) \geq 3$ . Soit  $D$  un  $\gamma_2(T)$ -ensemble.

Soit  $\text{diam}(T) = d$  et  $P : x_0x_1\dots x_d$  une chaîne diamétrale dans  $T$ . Enracinons  $T$  à  $x_0$ .  $x_0$  et  $x_d$  sont des feuilles et  $d_T(x_{d-1}) \geq 2$ .

Supposons que  $d_T(x_{d-1}) \geq 3$  et soit  $p$  le nombre des feuilles dans  $T_{x_{d-1}}$ , c'est à dire  $p = d_T(x_{d-1}) - 1$ . Soit  $T' = T - T_{x_{d-1}}$ , et rappelons que  $L_{x_{d-1}} \subset D$ . Selon l'Observation 4.15,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p$ . Après, nous allons démontrer que  $\gamma_2(T' - x_{d-2}) \leq \gamma_2(T') - 1$ . Supposons le contraire, que  $\gamma_2(T' - x_{d-2}) \geq \gamma_2(T')$  et considérons l'arbre  $T_{x_{d-1}x_{d-2}}$ . Si  $D^*$  est un  $\gamma_2(T_{x_{d-1}x_{d-2}})$ -ensemble, alors, il est clair que  $D^* - L_{x_{d-1}}$  est un ensemble 2-dominant de  $T' - x_{d-2}$ , et donc

$$\begin{aligned} \gamma_2(T') &\leq \gamma_2(T' - x_{d-2}) \leq |D^*| - |L_{x_{d-1}}| \\ &= \gamma_2(T_{x_{d-1}x_{d-2}}) - p = \gamma_2(T) - 1 - p = \gamma_2(T') - 1, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. D'où  $\gamma_2(T' - x_{d-2}) \leq \gamma_2(T') - 1$ . D'un autre côté, si  $T'$  n'est pas  $\gamma_2$ -point-critique, alors il existe une arête  $uv \in E(T')$  tel que  $\gamma_2(T'_{uv}) = \gamma_2(T')$ . Par l'Observation 4.15,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + p = \gamma_2(T') + p = \gamma_2(T)$ , ce qui contredit le fait que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique. D'où  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique, et par induction sur  $T'$ , nous avons  $T' \in \mathcal{T}$ . Il s'ensuit que  $T \in \mathcal{T}$  parce qu'il est obtenu de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{T}_1$ . A partir de maintenant, on suppose que  $d_T(x_{d-1}) = 2$ .

**Cas 1.**  $d_T(x_{d-2}) \geq 3$ . Selon ce qui a été fait précédemment, on peut supposer que chaque fils de  $x_{d-2}$  est différent d'une feuille ou d'un sommet support de degré deux. Supposons que  $x_{d-2}$  a un fils  $z$  de degré deux tel que  $z \neq x_{d-1}$ , et soit  $z'$  le voisin feuille de  $z$ . Soit  $D^*$  un  $\gamma_2(T_{x_{d-1}x_d})$ -ensemble. Il est clair que les sommets  $z', \overline{x_d x_{d-1}}, x_{d-2} \in D^*$ . D'où  $\{x_d\} \cup D^* - \{\overline{x_d x_{d-1}}\}$  2-domine  $T$  et donc  $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T_{x_{d-1}x_d}) = \gamma_2(T) - 1$ , ce qui est impossible. Par conséquent,  $x_{d-2}$  n'a pas de fils de degré deux à part  $x_{d-1}$ . Soit  $T'$  l'arbre obtenu en éliminant toutes les feuilles de  $x_{d-2}$  et soit  $p = |L_{x_{d-2}}| = d_T(x_{d-2}) - 2$ . Notons que  $p \geq 1$  puisque  $d_T(x_{d-2}) \geq 3$ . Aussi,  $d_{T'}(x_{d-2}) = 2$  et  $x_{d-2}$  appartient à une chaîne pendante de longueur 2 dans  $T'$ , à savoir  $x_{d-2}x_{d-1}x_d$ . Par l'Observation 4.22,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p$ . Si  $\text{diam}(T') = 3$ , alors  $T' = P_4$  et  $T$  est une double étoile  $S_{1,p+1}$  appartenant à  $\mathcal{T}$  car il est obtenu de  $T_1 = P_2$  en utilisant l'opération  $\mathcal{T}_1$ . Par conséquent,

supposons que  $\text{diam}(T') \geq 4$ .

Pour démontrer que  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique, soit  $uv$  une arête de  $E(T')$ . Si  $uv \notin \{x_{d-2}x_{d-1}, x_{d-1}x_d\}$ , alors il est clair qu'il existe un  $\gamma_2(T_{uv})$ -ensemble  $S$  contenant  $L_{x_{d-2}}$ ,  $x_d$ ,  $x_{d-2}$  (ou  $\overline{x_{d-2}x_{d-3}}$  si  $uv = x_{d-2}x_{d-3}$ ) et donc  $S - L_{x_{d-2}}$  2-domine  $T'_{uv}$ . Donc  $\gamma_2(T'_{uv}) \leq \gamma_2(T_{uv}) - p$ . Sachant que  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique, nous avons  $\gamma_2(T'_{uv}) \leq \gamma_2(T) - 1 - p = \gamma_2(T') - 1$ . Supposons maintenant que  $uv \in \{x_{d-2}x_{d-1}, x_{d-1}x_d\}$ . Nous devons d'abord montrer que  $x_{d-2}$  et  $x_{d-3}$  tous les deux appartiennent à un  $\gamma_2(T)$ -ensemble. Effectivement, considérons l'arbre  $T_{x_{d-2}x_{d-3}}$ , et soit  $D$  un  $\gamma_2(T_{x_{d-2}x_{d-3}})$ -ensemble. Alors  $L_{x_{d-2}} \cup \{x_d, \overline{x_{d-2}x_{d-3}}\} \subset D$  et  $|D| = \gamma_2(T) - 1$ , puisque  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique. Il en résulte que  $D^* = \{x_{d-2}, x_{d-3}\} \cup D - \{\overline{x_{d-2}x_{d-3}}\}$  est un  $\gamma_2(T)$ -ensemble contenant  $x_{d-2}$  et  $x_{d-3}$ . Maintenant, puisque  $T'_{x_d x_{d-1}}$  et  $T'_{x_{d-1} x_{d-2}}$  sont isomorphes, considérons donc  $uv = x_{d-1}x_{d-2}$ . Il est clair que  $D^* - \{x_{d-2}\} \cup L_{x_{d-2}}$  est un ensemble 2-dominant de  $T'_{x_{d-1}x_{d-2}}$  de cardinal  $\gamma_2(T) - 1 - p = \gamma_2(T') - 1$ . Par conséquent,  $\gamma_2(T'_e) = \gamma_2(T') - 1$  pour toute arête  $e \in E(T')$  et donc  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique. Par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{T}$ . Par conséquent,  $T \in \mathcal{T}$  car il est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{T}_3$ .

**Cas 2.**  $d_T(x_{d-2}) = 2$ . Soit  $T' = T - T_{x_{d-1}}$ . Notons que  $x_{d-2}$  est une feuille de  $T'$ , et donc par l'Observation 3.12,  $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 1$ . Si  $D'$  est un  $\gamma_2(T_{x_d x_{d-1}})$ -ensemble, alors il est clair que  $x_{d-3}, \overline{x_d x_{d-1}} \in D'$  (pour 2-dominer  $x_{d-2}$ ) et donc  $D'' = \{x_{d-2}\} \cup D' - \{\overline{x_d x_{d-1}}\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T'$ . D'où  $|D''| = |D'| = \gamma_2(T_{x_d x_{d-1}}) = \gamma_2(T) - 1$ , i.e.  $D''$  est  $\gamma_2(T')$ -ensemble contenant les deux sommets  $x_{d-3}$  et  $x_{d-2}$ . Maintenant, pour montrer que  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique, soit  $uv$  une arête de  $E(T')$ . Si  $uv = x_{d-2}x_{d-3}$ , alors  $\{\overline{x_{d-2}x_{d-3}}\} \cup D'' - \{x_{d-2}, x_{d-3}\}$  est un ensemble 2-dominant de  $T'_{uv}$  et donc  $\gamma_2(T'_{uv}) \leq |D''| - 1 = \gamma_2(T') - 1$ . Si  $uv \neq x_{d-2}x_{d-3}$ , alors  $x_{d-2}$  est dans tout  $\gamma_2(T'_{uv})$ -ensemble, et par l'Observation 3.12,  $\gamma_2(T_{uv}) = \gamma_2(T'_{uv}) + 1$ . Puisque  $T$  est  $\gamma_2$ -point-critique, nous obtenons  $\gamma_2(T) - 1 = \gamma_2(T') + 1 - 1 = \gamma_2(T'_{uv}) + 1$ , et donc  $\gamma_2(T') = \gamma_2(T'_{uv}) + 1$ , i.e.  $T'$  est  $\gamma_2$ -point-critique. Par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{T}$ . Par conséquent,  $T \in \mathcal{T}$  car il est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{T}_2$ .  $\square$

Selon les Propositions 4.24 et 4.25, nous avons prouvé le Théorème 4.23.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'étude de la  $k$ -domination a été le but de notre thèse. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur quelques problèmes ouverts proposés par Volkmann dans [14, 45]. Puis, nous nous sommes orientés vers l'étude de la criticité et la stabilité d'un graphe et ce par rapport à un type de domination assez étudié ces dernières années qui est la 2-dominance.

Nous nous sommes intéressés en premier à l'état de l'art en faisant le tour de ce qui a été fait par d'autres auteurs dans le concept de la  $k$ -domination et la  $k$ -domination connexe en citant les problèmes ouverts d'où nous nous sommes inspiré pour réaliser ce travail. Aussi, par souci de mettre entre les mains du lecteur un manuscrit qui donne une idée assez générale sur ce qui se fait dans le domaine de criticité et de stabilité, nous avons essayé de donner une bibliographie assez riche de ces notions même pour d'autres paramètres de domination.

Concernant le premier objectif, nous avons caractérisé des graphes vérifiant des égalités qui existent dans la littérature sous forme de problèmes ouverts. Nous avons donné quelques propriétés des graphes connexes  $G$  d'ordre  $n$  tels que  $\gamma_k^c(G) = n - 2$ . Ensuite, nous avons fourni une caractérisation complète des graphes connexes cubiques  $G$  tels que  $\gamma_2^c(G) = n - 2$  et les graphes connexes 4-réguliers sans griffes tels que  $\gamma_3^c(G) = n - 2$ . D'autre part, nous avons traité le problème de la caractérisation des graphes connexes vérifiant  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$  en donnant quelques propriétés. Par ailleurs, nous avons caractérisé des graphes pour lesquels  $\delta(G) = 1$ , ou qui sont de maille d'au moins 5, ainsi que les graphes sans griffes. Aussi, nous avons présenté quelques propriétés pour les graphes connexes  $G$  vérifiant  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ . La caractérisation de quelques familles de graphes à savoir: les graphes connexes tels que  $\delta(G) = 1$  et les graphes sans triangles maximaux a été faite. Les résultats que nous avons obtenus pour ce premier contexte ont été présentés dans le chapitre 3.

Du point de vue théorique, la criticité et la stabilité par rapport à un paramètre de domination est un problème important puisqu'elle permet de mieux connaître les propriétés

structurelles des graphes considérés. Dans ce but, l'étude de l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de 2-domination d'un graphe, en particulier lorsque ce nombre change ou reste inchangé a fait le second objet de cette thèse. Nos contributions dans l'étude des graphes critiques et stables par rapport à la 2-domination a concerné les graphes  $\gamma_2$ -point-stables et  $\gamma_2$ -point-critiques. En effet, nous avons établi des conditions nécessaires pour les graphes  $\gamma_2$ -point-stables dans le cas général. Ainsi qu'une caractérisation de quelques graphes  $\gamma_2$ -point-stables à savoir: les graphes complets, les chaînes, les cycles, les graphes bipartis et les arbres . Finalement, nous avons caractérisé tous les arbres qui sont  $\gamma_2$ -point-critiques. Les résultats que nous avons obtenus pour ce concept ont été présentés dans le chapitre 4.

Comme perspectives, nous citons les problèmes suivants:

- Les problèmes ouverts proposés par Volkmann (Problème 2.32) [14, 45]. Soit  $k \geq 2$  un entier. Caractériser d'autres graphes connexes  $G$  avec une des propriétés suivantes.
  1.  $\gamma_2^c(G) = \gamma(G) + 1$ ,
  2.  $\gamma_2^c(G) = \gamma_c(G) + 1$ ,
  3.  $\gamma_3^c(G) = \gamma(G) + 2$ ,
  4.  $\gamma_3^c(G) = \gamma_c(G) + 2$ ,
- Etendre l'étude des graphes  $\gamma_2$ -point-stables et  $\gamma_2$ -point critiques pour les classes cactus ou block graphes.....
- La caractérisation des graphes id- $\gamma_2$ -stables i.e. les graphes dont l'identification de deux sommets non adjacents ne change pas le nombre de 2-domination.
- La caractérisation des graphes id- $\gamma_2$ -critiques i.e. les graphes dont l'identification de deux sommets non adjacents change le nombre de 2-domination.
- L'étude de la relation entre ces différentes classes (interaction) analogiquement aux travaux de Haynes et Henning [17].

## RÉFÉRENCES

- [1] G. Alexanderson, "Euler and Königsberg's bridges: a historical view", *Bulletin of the American Mathematical Society* 43 (4) (2006) 567–573.
- [2] L. Euler, "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis", *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 8 (1741) 128–140.
- [3] A.L. Cauchy, "Recherche sur les polyèdres-premier mémoire", *Journal de l'école Polytechnique* 9, Cahier 16 (1813) 66–86.
- [4] S.A.J. L'Huillier, "Mémoire sur la polyèdrométrie", *Annales de Mathématiques* 3 (1861) 169–189.
- [5] P.R. Cromwell, "Polyhedra", Cambridge University Press, (1999) 189-190.
- [6] C. Rajendran, "Caturanga movements described in Rudrata's Kavyalankara", Working-Papers "Indian Views", Förderkreis Schach-Geschichtsforschung e.V., (2001).
- [7] G. Martin, "The arab role in the development of Chess Online", (2009).
- [8] C. Berge, "Graphes", Gauthier-Villars, Paris (1983).
- [9] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, "Towards a theory of domination graphs", *Networks* 7 (1977) 247–261.
- [10] J.F. Fink and M.S. Jacobson, " $n$ -domination in graphs", *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, Wiley, New York (1985) 283–300.
- [11] J.F. Fink and M.S. Jacobson, "On  $n$ -domination in graphs,  $n$ -dependence and forbidden subgraphs", *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, Wiley, New York (1985) 301–311.
- [12] H.B. Walikar and B.D. Acharya, "Domination critical graphs", *Nat. Acad. Sci. Lett.* 2 (1979) 70–72.

- [13] D.P. Sumner and P. Blitch, "Domination critical graphs", *J. Combin. Theory Ser. B* 34 (1983) 65–76.
- [14] L. Volkmann, "Connected  $p$ -domination in graphs", *Util. Math.* 79 (2009) 81–90.
- [15] R. Diestel, "Graph Theory", Springer-Verlag New York 1997, 2000.
- [16] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, "Introduction", *Discrete Mathematics* 86 (1990) 3–9.
- [17] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Decker, Inc. New York, 1998.
- [18] C.F. de Jaenisch, "Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs", Petrograde (1862).
- [19] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley, "Combinatorial problems on chessboards: A brief survey in Graph Theory", *Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, 1995, pp. 507–528.
- [20] C. Berge, "Théorie des graphes et ses applications", Dunod, Paris (1958).
- [21] O. Ore, "Theory of graphs", Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.(1962).
- [22] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, "Domination in Graphs: Advanced Topics", Marcel Dekker, New York (1998).
- [23] L. Kelleher and M. Cozzens, "Dominating Sets in Social Network Graphs", *Mathematical Social Sciences* 16(3) (1988) 267–279.
- [24] W. Goddard and M.A. Henning, "Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results", *Discrete Mathematics* 313 (2013) 839–854.
- [25] E.J. Cockayne, R.M. Dawes and S.T. Hedetniemi, "Total domination in graphs". *Net-works* 10 (1980) 211–219.

- [26] M.A. Henning and A. Yeo, "Hypergraphs with large transversal number and with edge sizes at least three". *J. Graph Theory* 59 (2008) 326–348.
- [27] M.A. Henning, "A survey of selected recent results on total domination in graphs", *Discrete Math*, 309 (2009) 32–63.
- [28] E.J. Cockayne, P.A. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, "Roman domination in graphs", *Discrete Mathematics* 278 (2004) 11–22.
- [29] F. Harary and T.W. Haynes, "Double domination in graphs", *Ars Combin.* 55 (2000) 201–213.
- [30] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C. Suffel, "Domination alteration sets in graphs", *Discrete Mathematics* 47 (1983) 153–161.
- [31] R.C. Brigham, P.Z. Chinn and R.D. Dutton, "Vertex domination-critical graphs", *Networks* 18 (1988) 173–179.
- [32] R.D. Dutton and R.C. Brigham, "An extremal problem for edge domination in insensitive graphs", *Discrete Appl. Math.* 20 (1988) 113–125.
- [33] T. Burton and D.P. Sumner, "Domination dot-critical graphs", *Discrete Mathematics* 306 (2006) 11–18.
- [34] C. Payan and N.H. Xuong, "Domination-balanced graphs", *J. Graph Theory.* 6 (1982) 23–32.
- [35] B. Randerath and L.Volkman, "Characterization of graphs with equal domination and matching number", *Util. Math.* 55 (1999) 65–72.
- [36] E.J. Cockayne, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, B. Xu and S. Zhou, "Extremal graphs for inequalities involving domination parameters", *Discrete Math.* 216 (2000) 1–10.
- [37] B. Bollobás and E.J. Cockayne, "Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance", *J. Graph Theory* 3 (1979) 241–249.

- [38] B. Reed, "Paths, stars and the number three", *Combin. Probab. Comput.* 5(3) (1996) 277–295.
- [39] A. Hellwig and L. Volkmann, "Some upper bounds for the domination number", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 57 (2006) 187–209.
- [40] W. McCuaig and B. Shepherd, "Domination in graphs with minimum degree two", *J. Graph Theory* 13(6) (1989) 749–762.
- [41] M. Sohn and X. Yuan, "Domination in graphs of minimum degree four", *The China-Japan Joint Conference on Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory* (2005).
- [42] H. Xing, L. Sun, and X. Chen, "Domination in graphs of minimum degree five", *Graphs Combin.* 22(1) (2006) 127–143.
- [43] O. Favaron, "On a conjecture of Fink and Jacobson concerning  $k$ -domination and  $k$ -dependence", *J. Combin. Theory series B* 39(1) (1981) 101–102.
- [44] A. Bouchou, M. Blidia and M. Chellali, "Relations between the Roman  $k$ -domination and roman domination numbers in graphs", *Discrete Mathematics. Algorithms and Application* 6 N°.3 (2014) 1450045 (11 pages)
- [45] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, " $k$ -Domination and  $k$ -independence in graphs: a survey", *Graphs and Combinatorics* 28 (2012) 1–55.
- [46] E.J. Cockayne, B. Gamble and Shepherd, "An upper bound for the  $k$ -domination number of a graph", *J. Graph theory* 9 (1985) 533–543.
- [47] Y. Caro and Y. Roditty, "A note on the  $k$ -domination number of a graph", *Internat. J. Math. Math. Sci* 13 (1990) 205–206.
- [48] C. Stracke and L. Volkmann, "A new domination conception", *J. Graph theory* 17 (1993) 315–323.
- [49] B. Chen and S. Zhou, "Upper bounds for  $f$ -domination number of graphs", *Discrete Math* 185 (1998) 239–243.



- [50] O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, "On  $k$ -domination and minimum degree in graphs", *J. Graph Theory* 57 (2008) 33–40.
- [51] L. Volkmann, "Some remarks on lower bounds on the  $p$ -domination number in trees", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 61 (2007) 159–167.
- [52] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, "On the  $p$ -domination, the total domination and the connected domination numbers of graphs", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 73 (2010) 65–75 .
- [53] A. Hansberg, "On the  $k$ -domination number, the domination number and the cycle of length four", *Util. Math.* 98 (2015) 65–76.
- [54] A. Hansberg and L. Volkmann, "Characterization of block graphs with equal 2-domination number and domination number plus one", *Discuss. Math. Graph Theory* 27 (2007) 93–103.
- [55] A. Hansberg and L. Volkmann, "Characterization of unicyclic graphs with equal 2-domination number and domination number plus one", *Util. Math.* 77 (2008) 265–276.
- [56] A. Hansberg and L. Volkmann, "On graphs with equal domination and 2-domination numbers", *Discrete Math.* 308 (2008) 2277–2281.
- [57] A. Hansberg, B. Randerath and L. Volkmann, "Claw-Free Graphs with Equal 2-Domination and Domination Numbers", *Filomat* 30 (10) (2016) 2795–2801.
- [58] A. Hansberg, "Bounds on the connected  $k$ -domination number", *Discrete Appl. Math.* 158(14) (2010) 1506–1510.
- [59] E. Wojcicka, "Hamiltonian properties of domination-critical graphs", *J. Graph Theory* 14 (1990) 205–215.
- [60] D.P. Sumner, "Critical concepts in domination", *Discrete Math.* 86 (1990) 33–46.
- [61] O. Favaron, D. Sumner and E. Wojcicka, "The diameter of domination  $k$ -critical graphs", *J. Graph Theory* 18 (1994) 723–734.

- [62] O. Favaron, F. Tian and L. Zhang, "Independence and hamiltonicity in 3-domination-critical graphs", *J. Graph Theory* 25 (1997) 173–184.
- [63] D.P. Sumner and E. Wojcicka, "Graphs critical with respect to the domination number", Dans: T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998, (Chapitre 16).
- [64] E. Flandrin, F. Tian, B. Wei and L. Zhang, "Some properties of 3-domination-critical graphs", *Discrete Math.* 205 (1999) 65–76.
- [65] Y. Chen, F. Tian, and B. Wei, "The 3-domination-critical graphs with toughness one", *Util. Math.* 61 (2002) 239–253.
- [66] R.C. Brigham, P.Z. Chinn and R.D. Dutton, "A study of vertex domination critical graphs", *Tech. Report M-2*, Department of Mathematics, University of Central Florida (1984).
- [67] R.C. Brigham, P.Z. Chinn and R.D. Dutton, "Vertex domination-critical graphs", *Networks* 18 (1988) 173–179.
- [68] J. Fulman, "Domination in vertex and edge critical graphs", *Manuscript*, Department of Mathematics, Harvard University (1994).
- [69] J. Fulman, D. Hanson, and G. MacGillivray, "Vertex domination-critical graphs", *Networks* 25 (1995) 41–43.
- [70] J. Carrington, F. Harary, and T.W. Haynes, "Changing and unchanging the domination number of a graph", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 9 (1991) 57–63.
- [71] R.D. Dutton and R.C. Brigham, "An extremal problem for edge domination in insensitive graphs", *Discrete Appl. Math.* 20 (1988) 113–125.
- [72] T.W. Haynes and M.A. Henning, "Changing and unchanging domination: a classification", *Discrete Math.* 272 (2003) 65–79.
- [73] V. Samodivkin, "Changing and unchanging of the domination number of a graph", *Discrete Math.* 308 (2008) 5015–5025.

- [74] Z. Chengye, Y. Yuansheng and S. Linlin, "Domination dot-critical graphs with no critical vertices", *Discrete Mathematics* 308 (2008) 3241–3248.
- [75] T.W. Haynes and D.W. Thacker, "Double Domination Edge Critical Graphs", *Utilitas Mathematica* 78 (2009) 139–149.
- [76] D.W. Thacker, "Double Domination Edge Critical Graphs", master thesis, East Tennessee State University, (2006).
- [77] H. Wang and E. Shan, "Some matching properties in  $4-\gamma_{\times 2}$ -edge-critical graphs", *computers and mathematics with applications* 59 (2010) 694–699.
- [78] H. Wang and L. Kang, "Matching properties in double domination edge critical graphs", *Discrete mathematics, algorithms and applications*. 2 (2010) 151–160.
- [79] M. Chellali and T.W. Haynes, "Double domination stable graphs upon edge removal", *Australasian Journal of comb.* 47 (2010) 1571–64.
- [80] S. Khelifi, M. Chellali, M. Blidia and F. Maffray, "Double domination edge removal critical graphs", *Australasian Journal of Combinatorics* 48 (2010) 285–299.
- [81] S. Khelifi and M. Chellali, "Double domination critical and stable graphs upon vertex removal", *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 32 (2012) 643–657.
- [82] H. Boukhalfa and I. Zahra, "Memoire de Master: Graphes domination double point stables", *Université blida-1- Saad Dahleb.* (2012).
- [83] S. Rickett and T.W. Haynes, "Total domination dot stable graphs", *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 1053–1057.
- [84] M. Chellali and N. Jafari Rad, "On (fully) total domination dot-stable graphs", *The Bulletin of the ICA* 66 (2012) 109–120.
- [85] M. Chellali, F. Maffray and K. Tablennehas, "Connected domination dot-critical graphs", *Contributions to Discrete Mathematics* 5 (2010) 11–25.

- [86] M. Chellali, " $k$ -domination stable graphs upon edge removal", *Ars Combinatoria* 119 (2015) 13-21.
- [87] M. Chellali and N. Jafari Rad, "Roman domination stable graphs upon edge addition", *Utilitas Mathematicae* 96 (2015) 165–178.
- [88] A. Hansberg, N. Jafari Rad, and L. Volkmann, "Vertex and edge critical Roman domination in graphs", *Utilitas Math.* 92 (2013) 73–88.
- [89] N. Jafari Rad, "Critical concept for 2-rainbow domination in graphs", *Australasian Journal of Combinatorics* 51 (2011) 49–60.
- [90] **K. Attalah** and M. Chellali, "On connected  $k$ -domination in graphs", *Australasian Journal of Combinatorics* 55 (2013) 289–297.
- [91] **K. Attalah** and M. Chellali, "2-domination dot-stable and dot-critical graphs", *Asian-European Journal of Mathematics* Vol.21, N° 5 (2021)–2150010 (14 pages).