

UNIVERSITE DE BLIDA 1
Faculté des Sciences
Département de Physique

THESE DE DOCTORAT LMD
Spécialité : Physique Théorique

**LA THEORIE ETENDUE DE LA GRAVITE : LA GRAVITE $f(R)$ ET SES
REPERCUSSIONS SUR LES ETOILES COMPACTES CHARGEES**

Par

Houda MANSOUR

Devant le jury composé de :

Prof. R. KHELIFI	Université de Blida 1	Président
Prof. S. KOUADIK	Université Yahia Fares, Médéa	Examineur
Prof. S. BOUKRAA	Université de Blida 1	Examineur
Dr. N. BOUAYED	Université de Blida 1	Examineur
Dr. B. SI LAKHAL	Ecole Nationale Polytechnique	Directrice de thèse
Dr. A. YANALLAH	Université de Blida 1	Invité

Blida, Décembre 2018

RESUME

En physique théorique, la gravité $f(R)$ est une théorie de la gravité qui modifie la relativité générale en remplaçant le scalaire de Ricci par une fonction générale de ce scalaire. Le fait que la relativité générale soit modifiée peut fournir une explication possible de l'expansion accélérée de l'Univers qui ne nécessite pas l'introduction de l'énergie sombre. Nous allons étudier, dans cette thèse, les étoiles compactes chargées électriquement, comme application, dans le cadre de la gravité $f(R)$ et voir les répercussions cosmologiques sur cette généralisation particulière à la relativité générale.

Mots-clés : La relativité générale, la gravité $f(R)$, les étoiles compactes chargées, l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

ABSTRACT

In theoretical physics, the gravity $f(R)$ is a theory of gravity that modifies general relativity by replacing the Ricci scalar with a general function of this scalar.

The fact that general relativity is modified may provide a possible explanation for the accelerated expansion of the Universe that does not require the introduction of dark energy.

We will study, in this thesis, electrically charged compact stars, as an application, in the context of $f(R)$ gravity and see the cosmological repercussions on this particular generalization to general relativity.

Key words : General relativity, $f(R)$ gravity, charged compact stars, Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation.

DÉDICACES

Je dédie ce travail à mon père qui m'a accompagné et soutenu durant ces années, ma mère qui m'a vraiment encouragé pour terminer ce travail, mon frère Wahid et mes sœurs Sara, Mouchira, Abir et Manar. Je les remercie pour leurs encouragements durant toute la période d'élaboration de ce travail.

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu le tout puissant pour m'avoir donné toute cette force et ce courage pour faire aboutir ce travail.

Je tiens à remercier ma directrice de thèse Dr. B. SI LAKHAL pour m'avoir soutenue et encouragée tout au long de mes recherches et pour m'avoir inspirée et guidée durant le cheminement de ce travail. Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans sa détermination à mener à bien ce projet.

J'ai le plaisir de remercier aussi Dr. A. YANALLAH pour sa collaboration. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance, pour son aide immense, son soutien, ses remarques et toutes les connaissances qu'il m'a transmises.

Mes remerciements vont aussi à Dr. N. BOUAYED, responsable de l'équipe de *Phénoménologie en Physique des Hautes Énergies et Cosmologie* du *Laboratoire Physique Appliquée et Fondamentale (FUNDAPL)*, pour les séminaires internes organisés régulièrement qui m'ont permis d'exposer mon travail et de le perfectionner en recevant les remarques et orientations de la part de tous les membres de l'équipe.

Je remercie Prof R. KHELIFI d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance. Je remercie également Prof. S. KOUADIK et Prof. S. BOUKRAA ainsi que Dr. N. BOUAYED d'avoir lu le manuscrit et d'avoir accepté de faire partie du jury d'examen de ma thèse.

Table des matières

INTRODUCTION	5
1 RAPPELS SUR LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE	6
1.1 Introduction	6
1.2 La relativité générale	6
1.2.1 Le principe d'équivalence d'Einstein	8
1.2.2 Géodésique	8
1.2.3 La limite Newtonienne	9
1.3 Les équations d'Einstein	11
1.3.1 La métrique de Schwarzschild	14
1.4 Le modèle standard cosmologique	15
1.4.1 Le Principe Cosmologique	15
1.4.2 Le modèle de Friedmann-Robertson-Walker	16
1.4.3 Les dominances d'univers par le rayonnement et la matière	17
2 LES THÉORIES ÉTENDUE DE LA GRAVITÉ $f(R)$	19
2.1 Introduction	19
2.2 Les trois types de la gravité $f(R)$	20
2.2.1 La gravité $f(R)$ selon le formalisme de la métrique	20
2.2.2 La gravité $f(R)$ à la Palatini	26
2.2.3 La gravité $f(R)$ à la métrique-affine	27
2.3 Critères pour la viabilité de la théorie de la gravité $f(R)$	28
2.3.1 Dynamique cosmologique correcte	28
2.3.2 Absence de fantômes	29

2.3.3	Stabilité	29
2.3.4	Limites Newtonienne et Post-Newtonienne correctes	29
2.3.5	Problème de Cauchy	33
3	LES ÉTOILES COMPACTES	34
3.1	Introduction	34
3.2	Équilibre hydrostatique	34
3.2.1	Description d'une étoile en symétrie sphérique	35
3.2.2	L'équation de Poisson	36
3.2.3	L'équation de Lane-Emden	38
3.2.4	Les équations des champs	39
3.2.5	Les équations d'équilibre	40
3.2.6	La solution de Reissner-Nordström	42
3.2.7	Les composantes d'un tenseur de Faraday-Maxwell	44
3.3	L'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)	49
3.4	L'équation d'état	50
3.4.1	L'équation d'état d'un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique global	51
3.4.2	Équation d'état de Van der Waals	51
3.4.3	Équation d'état du viriel	52
3.4.4	L'équation d'état polytropique	52
4	STRUCTURES STELLAIRES CHARGÉES	54
4.1	Introduction	54
4.2	La limite de Buchdahl	54
4.3	La limite de Chandrasekhar	56
4.4	La limite d'Oppenheimer-Volkoff	59
4.5	L'équilibre hydrostatique d'une étoile chargée	60
4.5.1	Description d'une étoile en symétrie sphérique	60
4.5.2	Couplage à la matière	61
4.5.3	Les équations de champ dans la gravité $f(R)$	62
4.6	Les équations d'équilibre dans la théorie étendue de la gravité	65

5	RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION	66
5.1	Les équations de TOV dans la théorie étendue de la gravité	66
5.2	Les conditions aux limites	67
5.3	Les conditions de jonction ou raccordement	69
5.4	Équations relativistes a-dimensionnelles polytropiques	69
5.5	Relation Masse-Rayon pour une étoile chargée	71
5.6	Simulation	72
5.7	Les résultats	73
5.8	Discussion	80
	CONCLUSION	86
	APPENDICE A	87
	APPENDICE B	90
	APPENDICE C	96

Table des figures

3.1	L'équilibre hydrostatique à l'intérieur d'une étoile.	35
5.1	Le rayon des sphères résultantes en fonction de la masse pour $\gamma = 1.5$, pour quelques valeurs de la fraction de charge α . Nous considérons les densités d'énergie centrale dans l'intervalle $[10^{13}, 10^{20}] kg/m^3$	71
5.2	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour différentes valeurs du paramètre de perturbation β (incluant le cas de RG). Nous avons considéré ici le cas où $\gamma = 5/4$ respectivement pour a) $\alpha = 0.001$ et b) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$. a1) et b1) représentent respectivement le grossissement de a) et b) de leurs coins supérieurs droits. Il est clair que ces figures montrent une transition de comportement du secteur RG vers le secteur de gravité $f(R)$	73
5.3	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour différentes valeurs du paramètre de perturbation β pour $\gamma = 4/3$, pour a) $\alpha = 0.001$ et b) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	74
5.4	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$ et pour $\gamma = 1.25$, pour $\alpha = 0.001$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	74

5.5	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 1.25$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	75
5.6	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 1.25$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	76
5.7	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$ et pour $\gamma = 4/3$, pour $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	77
5.8	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	78
5.9	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	79
5.10	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0.5$, et respectivement pour deux valeurs de la fraction de charge a) $\alpha = 0.001$ et b) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$	80

5.11	Le diagramme masse-rayon d'une sphère polytropique non chargée pour différentes valeurs du paramètre de perturbation β et pour $\gamma = 4/3$. Notez que le cas RG est affiché dans le coin inférieur gauche de la figure qui confirme le comportement de transition. La densité d'énergie centrale ρ_c est dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$	81
5.12	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique non chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0$ pour $\gamma = 1.25$, pour a) $\alpha = 0.001$, b) $\alpha = 0.006$, c) $\alpha = 0.001$ et d) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$	82
5.13	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique non chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0$ pour $\gamma = 4/3$, pour a) $\alpha = 0.001$, b) $\alpha = 0.006$, c) $\alpha = 0.001$ et d) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$	83
5.14	Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique non chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0$ pour $\gamma = 5/3$, pour $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$	84

INTRODUCTION

La relativité générale est largement acceptée comme théorie fondamentale pour décrire les propriétés géométriques de l'espace-temps. Dans un espace-temps homogène et isotrope, les équations du champ d'Einstein donnent naissance aux équations de Friedmann qui décrivent l'évolution de l'univers. En fait, la cosmologie standard du big-bang basée sur les époques dominées par le rayonnement et la matière peut être bien décrite dans le cadre de la relativité générale.

La théorie de la relativité générale a été testée avec succès à travers diverses expériences et observations astrophysiques. Elle a également servi de base à de nombreux modèles cosmologiques, comme le Big Bang, qui est maintenant accepté comme la théorie décrivant le mieux le début de l'Univers depuis une singularité espace-temps. Néanmoins, cette théorie n'arrive pas à expliquer entre autres l'accélération de l'expansion de l'univers, ce qui a mener à penser à des extensions pour cette théorie.

Au cours de la dernière décennie, les théories $f(R)$ ont été largement étudiées comme l'une des modifications les plus simples à la relativité générale.

Modifier la relativité générale d'Einstein n'est pas une chose nouvelle, la première personne qui a suggéré une version légèrement différente de la relativité générale était Einstein lui-même. Au moment où Lemaitre et Friedmann trouvaient des solutions exactes des équations d'Einstein prévoyant un univers en expansion, la plupart des physiciens, y compris Einstein, croyaient en un univers statique. Alors Einstein a modifié l'action initiale de sa théorie, y compris la fameuse constante cosmologique Λ afin d'éviter l'expansion prévue. Cependant, avec le temps, il y avait de plus en plus d'indications que changer l'action de la relativité générale aurait ses avantages.

Les théories étendues de la gravité peuvent être considérées comme un nouveau paradigme pour remédier aux défauts de la relativité générale aux échelles infrarouge et

ultraviolette. C'est une approche qui en préservant les résultats indiscutablement positifs de la théorie d'Einstein, vise à résoudre les problèmes conceptuels et expérimentaux récemment apparus dans les domaines de l'astrophysique, de la cosmologie et de la physique des hautes énergies. En particulier, l'objectif est d'englober, dans un schéma cohérent, des problèmes tels que l'inflation, l'énergie noire, la matière noire, la structure à grande échelle et tout d'abord, de donner au moins une description efficace de la gravité quantique.

En raison des problèmes du modèle cosmologique standard et de l'absence d'une théorie de la gravitation quantique définitive, des théories de la gravité ont été proposées tout en gardant les résultats positifs de la relativité générale. Ce sont des théories étendues de la gravité (ETG), qui sont basés sur des corrections et des élargissements de la théorie d'Einstein.

La première motivation importante est venue de la recherche d'une théorie unifiée de toutes les forces fondamentales. L'une des étapes vers une théorie ultime consiste à quantifier la gravité, dans le même contexte de champs quantiques que pour le reste des interactions, l'un des principaux problèmes étant la non-renormalisabilité de la relativité générale.

Une autre motivation à cette extension, est que des observations récentes montrent que l'univers s'accroît à un rythme accéléré, un fait que la relativité générale ne prédit pas. Pour attaquer ce problème deux manières générales ont été prises : introduire un nouveau type d'énergie ou bien modifier la théorie de la gravitation.

Dans ce travail, nous passons en revue les applications des théories $f(R)$ à la cosmologie et à la gravité, telle que les étoiles compactes (les étoiles à neutrons, les naines blanches, les trous noirs... etc.).

La forme de la fonction $f(R)$ n'est pas spécifiée, mais elle est contrainte de garder les résultats positifs de la relativité générale aux échelles du système solaire. De plus, pour préserver les autres résultats corrects de la relativité générale, des critères de viabilité des théories étendues de la gravité doivent être appliqués, tels que une dynamique cosmologique correcte, la stabilité, l'absence de champs fantômes, les limites newtonienne et post-newtonienne soit correctes, le problème de Cauchy soit bien posé et la compatibilité des perturbations cosmologiques avec le rayonnement de fond cosmologique micro-ondes et des structures à grande échelle.

Notre travail est divisé en deux parties, La première partie a fait l'objet d'une communication à Khenchela [1] qui explique la modification des équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff dans la théorie étendue de la gravité au cas des étoiles compactes chargées et la deuxième partie a été couronnée par une publication internationale de renommée [2] qui montre l'effet de gravité $f(R)$ sur les étoiles compactes chargées par rapport à la relativité générale.

En 1924, Rosseland [3] a étudié la possibilité qu'une étoile auto-gravitante, dans la théorie d'Eddington (où l'étoile est modelée comme une boule chaude de gaz ionisé chaud), pourrait contenir une charge nette (voir aussi la référence [4]). Dans de telles étoiles, les électrons, qui sont de masses légères par rapport aux autres constituants peuvent s'échapper de la surface de l'étoile, laissant ainsi un excédent de charges. Cependant, dû à l'établissement d'un champ électrique dans l'étoile, d'autres électrons sont stoppés de s'échapper de la surface. Un équilibre est alors vite atteint créant ainsi une étoile chargée d'environ $100C$ par masse solaire [5].

De plus, pour les étoiles très compactes, le champ électrique induit peut être sensiblement plus élevé que dans le cas du soleil.

Les densités pour les étoiles à neutrons exigent l'utilisation de la relativité générale. Pour cette raison, les rayons et les masses de ces étoiles sont calculés en utilisant les équations de TOV qui incorporent la relativité générale.

La généralisation de l'équation de TOV pour une étoile chargée a été proposée en 1971 par Bekenstein, qui a également souligné de nombreux arguments contre la stabilité de ces étoiles [6].

En général l'objet compact désigne un astre de haute compacité et non pas nécessairement de haute densité. Une étoile à neutrons, un trou noir et une naine blanche sont des objets compacts. Des quantités importantes dans l'étude des objets compacts sont la limite de Chandrasekhar, la limite de Buchdahl et la limite d'Oppenheimer-Volkoff (OV).

L'identification d'un objet compact comme un trou noir nécessite non seulement une estimation observationnelle précise de sa masse, mais aussi la connaissance de la masse gravitationnelle maximale d'une étoile à neutrons pour la stabilité contre son effondrement. Ce qui fournit des informations significatives sur le mécanisme responsable de la formation des étoiles à neutrons et les effets possibles de l'histoire évolutive de leurs

progénitures sur leurs masses.

Les étoiles à neutrons font partie des manifestations les plus denses d'objets massifs dans l'univers. Ils sont des laboratoires d'astrophysique idéaux pour tester les théories de la physique de la matière dense et établir des liens entre la physique nucléaire, la physique des particules et l'astrophysique.

La solution la plus connue et la plus classique de l'équation de champ d'Einstein pour les objets statique et non-rotation sont la métrique de Schwarzschild pour la charge $Q = 0$ qui décrivait le champ gravitationnel autour d'un point tel que la masse M et aussi qui est la première solution statique et à symétrie sphérique est devenue disponible et d'autre solution est la métrique de Reissner-Nordstrom pour la charge $Q \neq 0$. Ces deux solutions découvertes autour de 1916-1918 décrivent bien le comportement du champ gravitationnel de tout corps céleste massif et de grande taille comme les planètes, les étoiles, les galaxies et d'autres objets astrophysiques [7].

Nous étudions, en particulier, les étoiles compactes chargées électriquement dans le cadre de cette théorie. Nous supposons que la densité de charge est proportionnelle à la densité d'énergie. L'équation d'état polytropique est choisie pour décrire l'état du fluide parfait chargé. Notre objectif est de trouver la limite de masse Oppenheimer Volkoff (OV) pour les étoiles compactes chargées. Une étude numérique détaillée est effectuée. Nous montrons la dépendance du diagramme masse-rayon des sphères sur les valeurs du paramètre perturbatif β , de l'exposant polytropique γ et de la fraction de charge α . Nos résultats sont comparés avec ceux trouvés dans la littérature dans le cas de l'application de la relativité générale.

Cette thèse est organisée comme suit : des rappels sur la relativité générale sont donnés dans le premier chapitre. On introduit ensuite brièvement quelques propriétés de la gravité $f(R)$ dans le deuxième chapitre. Les équations de base en relativité générale sont nécessaires pour le but de notre travail, à savoir les équations d'Einstein-Maxwell pour une sphère chargée en cas de symétrie sphérique statique. Pour obtenir un système complet des équations, on définit une équation d'état polytropique (relation reliant la pression à la densité d'énergie) et un profil de densité de charge (On adopte la proportionnalité entre densité de charge et densité d'énergie).

Le troisième chapitre est consacré à l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

étendue au cas des étoiles compactes chargées. On écrit cette équation dans le cas de la relativité générale puis on la redéfinit dans le cas de la théorie de la gravité $f(R)$.

On rappelle aussi les limites de masse importantes pour l'étude des étoiles compactes chargées et on écrit explicitement l'ensemble des équations des étoiles compactes chargées dans le quatrième chapitre.

Ensuite, une étude numérique détaillée des étoiles compactes chargées est faite. Avec la forme choisie pour la fonction $f(R)$, on étudie la dépendance du rapport du rayon à la masse en fonction du paramètre β , pour certaines valeurs fixes de l'exposant polytropique γ et de faibles valeurs de la fraction de charge α et ensuite on déduit la limite OV. Puis on discute nos résultats obtenus dans le cinquième chapitre. Enfin, nous concluons.

Chapitre 1

RAPPELS SUR LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons commencer par revoir la théorie de la relativité générale qui a été élaborée entre 1907 et 1915 par Albert Einstein et son principe d'équivalence qui s'appelle le principe d'équivalence d'Einstein. Ensuite, nous présenterons les équations d'Einstein qui résument la gravitation à une déformation de l'espace-temps en présence de la matière. Puis, on va résoudre ces équations dans le cas stationnaire, c'est-à-dire la solution de Schwarzschild, (métrique à symétrie sphérique). Cette solution a été découverte par l'astrophysicien allemand K. Schwarzschild en décembre 1915. C'est la première solution exacte des équations d'Einstein comprenant une masse appliquée sur une grande échelle pour l'étude des étoiles (un corps isolé neutre à symétrie sphérique on utilise la Métrique de Schwarzschild et un corps isolé chargé à symétrie sphérique on utilise la Métrique de Reissner-Nordstrom). Enfin, on rappelle le modèle standard cosmologique [8, 9].

1.2 La relativité générale

Einstein a proposé sa théorie de la relativité restreinte qui repose sur les deux postulats suivants [10] :

1. Les phénomènes de la nature se déroulent suivant les mêmes lois dans tous les référentiels inertiels, par rapport à tous ces référentiels inertiels, dans le vide et dans toutes les directions,
2. la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels.

La relativité restreinte a de nombreux résultats, comme la dilatation du temps et la contraction des longueurs. Malgré ses résultats positifs, la relativité restreinte ne s'applique qu'aux espaces plats (l'univers de Minkowski).

L'apparition de la relativité générale est le résultat de l'échec de tous les efforts qui ont tenté de réformer la théorie de la gravité de Newton, ainsi que le désir philosophique d'Einstein de supprimer l'espace absolu de la physique classique de Newton.

Einstein a suggéré que les équations des lois de la physique ne doivent pas reposer sur un système de coordonnées donné. Cette propriété ne peut être obtenue que par utilisation du calcul tensoriel. La raison est que la formulation des équations de lois sous la forme tensorielle a la même forme et la même composition que dans tous les autres systèmes de coordonnées.

La relativité générale est une théorie relativiste de la gravitation, c'est-à-dire elle décrit l'influence sur le mouvement des astres en présence de la matière ou en général en présence de l'énergie, en tenant compte bien sûr des principes de la relativité restreinte. La relativité générale englobe et supprime la théorie de la gravitation universelle d'Isaac Newton qui représente la limite aux petites vitesses et aux champs gravitationnels faibles.

L'élaboration de la relativité générale marque le début de la cosmologie moderne, où il devient possible de décrire l'univers dans son ensemble comme un système physique et son évolution à grande échelle.

La relativité générale repose sur le postulat fondamental comme suit [11] : "Toutes les lois de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels, quel que soit leurs états de mouvement".

Notons qu' Einstein a proposé trois tests pour la relativité générale qui sont [11] :

1. L'avance du périhélie de Mercure,
2. la déviation des rayons lumineux et
3. le décalage de la lumière visible vers le rouge (le redshift gravitationnel).

1.2.1 Le principe d'équivalence d'Einstein

En mécanique classique, on considère une masse m soumise uniquement à un champ gravitationnel externe uniforme et constant g . Alors le principe fondamental de la dynamique de Newton appliqué dans un référentiel galiléen à cet objet, nous permet de prédire sa position x à un instant t [12] :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg. \quad (1.1)$$

Plaçons-nous dans le référentiel (non galiléen) de l'objet obtenu par la transformation de coordonnées suivante :

$$x' = x - \frac{1}{2}gt^2; \quad t' = t. \quad (1.2)$$

Alors dans ce référentiel, la force gravitationnelle est comme absorbée par le terme inertiel :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \Leftrightarrow m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0. \quad (1.3)$$

Le principe d'équivalence en relativité générale, postule qu'il n'y a pas lieu de distinguer localement un mouvement de chute libre dans un champ gravitationnel constant, d'un mouvement uniformément accéléré en l'absence de champ gravitationnel : la gravitation est (localement) équivalente au choix d'un référentiel accéléré pour l'observateur (accélération constante ou variable) par rapport à un référentiel inertiel. Elle n'est donc localement qu'un effet relativiste.

1.2.2 Géodésique

En géométrie, une géodésique désigne la généralisation d'une ligne droite sur une surface. En particulier, le chemin le plus court ou l'un des plus courts chemins, s'il en existe plusieurs entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique, est une géodésique. On considère une particule se déplaçant librement sous l'influence de la gravité. Du principe d'équivalence, il existe un système de coordonnées où une trajectoire rectiligne uniforme est décrite par l'équation de mouvement [13] :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (1.4)$$

où τ est le temps propre de la particule et $x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ est le quadri-vecteur position.

L'équation de la géodésique prend la forme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (1.5)$$

où $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ sont les symboles de Christoffel définis par :

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (1.6)$$

où $g_{\nu\lambda}$ est la métrique covariante, qui décrit la géométrie de l'espace-temps et le tenseur contravariant $g^{\mu\lambda}$ est son inverse.

1.2.3 La limite Newtonienne

La limite Newtonienne s'applique si ces trois conditions sont remplies [13, 14] :

1. La vitesse des particules est faible devant celle de la lumière,
2. le champ gravitationnel est faible et il est considéré comme une perturbation de l'espace de Minkowski et
3. le champ est statique (ne dépendant pas du temps).

Considérons le cas d'une particule qui se trouve dans un champ de gravitation faible et stationnaire (les $g_{\mu\nu}$ ne dépendant pas de $x^0 = ct$). Dans ce cas, on néglige $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ par rapport à $\frac{dx^0}{d\tau}$. L'équation (1.5) se réécrit alors comme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (1.7)$$

À partir de l'équation (1.6), on peut écrire :

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00}. \quad (1.8)$$

L'hypothèse du champ faible nous conduit à introduire l'approximation suivante :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (1.9)$$

$\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski et $h_{\mu\nu}$ la perturbation, de sorte qu'au premier ordre en les $h_{\mu\nu}$ et avec [15] :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}, \quad (1.10)$$

on a

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} h_{00}. \quad (1.11)$$

L'équation (1.7) peut donc s'écrire :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (1.12)$$

Dans le référentiel de Lorentz, les $\eta^{0\nu}$ sont tous nuls, sauf η^{00} , donc :

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{2} \partial_k h_{00}. \quad (1.13)$$

Or le champ est statique, donc $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ ce qui implique que $\frac{dt}{d\tau}$ est une constante et l'équation géodésique se simplifie :

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}. \quad (1.14)$$

En divisant les deux membres de l'équation par le carré de cette constante, il reste :

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}. \quad (1.15)$$

L'équation de Newton correspondante est :

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\nabla \Phi, \quad (1.16)$$

Φ étant le potentiel gravitationnel produit par un corps de masse M ; il est donné par :

$$\Phi(r) = \frac{GM}{r}, \quad (1.17)$$

avec G la constante gravitationnelle de Newton.

La comparaison des équations du mouvement fournit donc :

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} + \text{constante}. \quad (1.18)$$

Cette constante doit être choisie nulle si on veut que $h_{00} \rightarrow 0$ à l'infini. Dans ce cas :

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \quad (1.19)$$

On adopté la signature de la métrique $(-, +, +, +)$.

1.3 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont des équations aux dérivées partielles de la relativité générale. Ce sont des équations dynamiques qui décrivent comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Cette courbure de la géométrie autour d'une source de matière est alors interprétée comme le champ gravitationnel de cette source. Le mouvement des objets dans ce champ est décrit très précisément par l'équation de sa géodésique.

Les équations du champ d'Einstein sont généralement écrites de la manière suivante [14] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R la courbure scalaire, $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique, Λ la constante cosmologique, $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion et $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Le tenseur de courbure de Riemann est donné par :

$$R_{\nu\gamma\sigma}^{\mu} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\gamma}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}\Gamma_{\nu\gamma}^{\rho}. \quad (1.21)$$

Les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann :

$$R_{\nu\gamma\sigma}^{\mu} = -R_{\nu\sigma\gamma}^{\mu}.$$

$$R_{\nu\gamma\delta}^{\mu} + R_{\gamma\delta\nu}^{\mu} + R_{\delta\nu\gamma}^{\mu} = 0.$$

$$R_{\mu\nu\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\mu\nu}.$$

$$R_{\mu\nu\gamma\delta} = -R_{\nu\mu\gamma\delta}.$$

L'identité de Bianchi s'écrit comme suit :

$$\partial_{\varepsilon}R_{\mu\nu\gamma\delta} + \partial_{\gamma}R_{\mu\nu\gamma\varepsilon} + \partial_{\delta}R_{\mu\nu\varepsilon\gamma} = 0. \quad (1.22)$$

Le tenseur de Ricci est le tenseur de type $\binom{0}{2}$ obtenu par contraction du tenseur de Riemann. Ses composantes sont $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ et il est symétrique :

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (1.23)$$

La courbure scalaire est la trace du tenseur de Ricci :

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

Le tenseur d'Einstein est défini comme :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

Il est symétrique $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ et vérifie les identités de Bianchi contractées :

$$\nabla^{\nu}G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.24)$$

Le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ décrit le contenu en masse et énergie de l'espace-temps. En fait, il ne décrit que l'énergie et l'impulsion associées à la matière ou à toute autre forme de champ non gravitationnel, comme le champ électromagnétique. Pour un fluide

parfait en présence de gravitation, ce tenseur s'écrit sous la forme :

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu, \quad (1.25)$$

où p et ρ sont respectivement la pression et la densité d'énergie du fluide (mesurable par un observateur localement dans le référentiel du fluide) et $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ est la valeur locale du quadri-vecteur vitesse du fluide. Pour un fluide statique, la normalisation de la quadri-vitesse donne :

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1 \implies U^0 = (-g^{00})^{\frac{1}{2}}.$$

Le tenseur énergie-impulsion prend alors la forme simple :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho g^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg^{33} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Une conséquence importante de l'équation d'Einstein est la conservation locale de l'énergie et de l'impulsion. Ce résultat apparait en utilisant les identités de Bianchi contractées (1.24). Ce qui entraîne que :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.27)$$

qui exprime la conservation locale du tenseur énergie-impulsion.

Einstein a introduit la constante cosmologique Λ pour que ses équations décrivent un univers statique, c.à.d. un univers qui ne soit pas en expansion et instable. Cependant, Hubble a montré que notre univers n'est en fait pas statique mais en expansion (par les observations de galaxies distantes). En fait, les techniques astronomiques améliorées ont permis d'affirmer une valeur non nulle de Λ . L'existence d'une constante cosmologique est alors interprétée comme équivalente à l'existence d'une énergie du vide non nulle.

Si on considère $\Lambda = 0$ (ce qu'Einstein a fini par admettre mais qui est controversé au-

jourd'hui), il est possible d'écrire cette équation de manière plus compacte. On a :

$$G_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

La partie gauche de (1.28) représente la courbure de la matière telle qu'elle est déterminée par la métrique et l'expression de droite représente le contenu masse/énergie de l'espace-temps.

1.3.1 La métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est une solution de l'équation d'Einstein. Elle décrit la géométrie de l'espace-temps lorsqu'elle est déformée par le champ gravitationnel d'une masse sphérique, statique, sans rotation et non chargée, entourée de vide. Cette masse peut être une étoile.

Soit l'équation d'Einstein dans le vide :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (1.29)$$

La forme générale de la solution de l'équation d'Einstein dans le vide est :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega. \quad (1.30)$$

Le terme $r^2 d\Omega = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ n'est autre que la distance sur une sphère de rayon r dans un espace euclidien. Donc on peut dire que ds^2 définit la métrique stationnaire à symétrie sphérique où $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$. r est la coordonnée radiale, θ et φ sont les coordonnées polaires sphériques.

L'espace-temps décrit par la métrique de Schwarzschild est asymptotiquement plat; lorsque $r \rightarrow +\infty$, les composantes $g_{\alpha\beta}$ se réduisent aux composantes de la métrique de Minkowski exprimée en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.31)$$

Dans cette thèse, on adopte la terminologie suivante : les indices grecs vont de 0, 1, 2, 3 et les indices latins correspondent aux variables spatiales 1, 2, 3.

La solution (1.30) semble avoir une singularité en

$$r = R_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.32)$$

où R_S est le rayon de Schwarzschild.

1.4 Le modèle standard cosmologique

La cosmologie est l'étude de la structure, de l'origine et de l'évolution de l'Univers dans son ensemble à très grande échelle. Elle est principalement fondée sur la relativité générale.

Le modèle standard cosmologique est un modèle décrivant, de nos jours, le mieux le contenu de l'univers et les grandes étapes de son histoire.

L'univers a des propriétés identiques partout ; il fournit un moyen opérationnel de mesure et comparaison du temps appelé temps cosmique. Le modèle standard cosmologique s'appuie sur le principe cosmologique, la théorie de la relativité générale dans le cadre de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker.

1.4.1 Le Principe Cosmologique

Le modèle standard de l'univers se présente à partir d'une hypothèse : l'univers est homogène et isotrope à grande échelle. Ces deux faits apparents sont appelés les deux principes cosmologiques [14, 16, 17] :

- Il n'y a pas de point particulier dans l'univers ; les galaxies sont réparties uniformément dans l'espace à grande échelle. L'univers est dit homogène à grande échelle (le principe d'homogénéité).
- Il n'y a pas de direction spatiale particulière dans l'univers ; les galaxies sont réparties uniformément dans différentes directions angulaires à grande échelle. L'univers est dit isotrope (le principe d'isotropie).

Nous savons que ces deux principes ne sont pas vrais à petite échelle car il y a quelques inhomogénéités à petite échelle : présence de galaxies, de systèmes solaires et de planètes. Cependant, aux plus grandes échelles, l'univers est dit homogène et isotrope. Ce principe nous fournit les modèles cosmologiques les plus simples de l'évolution de l'univers ; les modèles d'univers homogènes et isotropes.

1.4.2 Le modèle de Friedmann-Robertson-Walker

Le principe cosmologique permet d'introduire une métrique découlant de la relativité générale adaptée aux conditions de symétrie que l'on choisit pour décrire l'univers, appelée la métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Ce modèle donne la forme générale de la métrique et puis établit les équations de Friedmann régissant la dynamique de l'Univers par application des équations d'Einstein.

La métrique de l'espace-temps peut s'écrire sans faire apparaître de termes croisés temporels et spatiaux. Nous pouvons donc écrire la métrique de FRW sous la forme [14] :

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (1.33)$$

La fonction $a(t)$ est appelée facteur d'échelle de l'univers et k est un paramètre constant qui ne peut prendre que trois valeurs $k = -1$, $+1$ ou 0 , chaque valeur va correspondre à un type d'univers :

Le $k = 0$ correspond à une courbure nulle et est appelé espace plat. Le modèle d'univers est plat.

Le $k = -1$ correspond à une courbure négative. Le modèle d'univers est ouvert. L'espace s'étend indéfiniment.

Enfin, pour $k = +1$, la courbure est positive. On obtient un espace à courbure positive ; il est généralement appelé modèle d'univers fermé.

1.4.3 Les dominances d'univers par le rayonnement et la matière

Les équations de champs d'Einstein avec $\Lambda = 0$ se transforment maintenant en [14, 15, 18] :

$$3\frac{\dot{a}^2 + c^2k}{a^2} = 8\pi G\rho. \quad (1.34)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + c^2k}{a^2} = \frac{8\pi Gp}{c^2}. \quad (1.35)$$

Ces équations s'appellent les équations de Friedmann.

A partir de ces deux équations (1.34) et (1.35), on trouve la relation suivante :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (1.36)$$

qui peut être écrite aussi comme :

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + \frac{p}{c^2} \frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (1.37)$$

L'équation (1.37) nous renseigne sur la conservation de la masse-énergie de l'univers. Les équations de Friedmann ne sont pas suffisantes pour résoudre le système d'équations contenant les trois inconnues a , p et ρ . Il manque l'équation d'état reliant la pression à la densité d'énergie. Pour un fluide parfait elle s'écrit, en général, comme :

$$p = w\rho, \quad (1.38)$$

où w est une constante indépendante du temps. L'équation (1.37) devient alors :

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + \frac{w\rho}{c^2} \frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (1.39)$$

Cette équation admet la solution :

$$\rho a^{3(w\frac{1}{c^2}+1)} = \rho_0, \quad (1.40)$$

où ρ_0 est la valeur actuelle de la densité d'énergie. Cette équation détermine l'évolution de la densité d'énergie liée à la variation du facteur d'échelle, en fonction des proportions

relatives de matière et de rayonnement.

Pour $w = 0$, l'univers est composé de matière seulement, et $\rho a^3 = \rho_0$. On dit que l'univers est dominé par la matière.

Pour $w = \frac{1}{3}$, l'univers est composé de rayonnement uniquement, et $\rho a^{\frac{1+3c^2}{c^2}} = \rho_0$. On dit que l'univers est dominé par le rayonnement.

A noter que w prend d'autres valeurs selon le modèle supposant l'existence d'autres formes d'énergie ou de matière (énergie noire, matière noire, quintessence, ..etc.)

Chapitre 2

LES THÉORIES ÉTENDUE DE LA GRAVITÉ $f(R)$

2.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la relativité générale est largement acceptée comme théorie fondamentale pour décrire les propriétés géométriques de l'espace-temps. Dans un espace-temps homogène et isotrope (en admettant le principe cosmologique), les équations d'Einstein donnent naissance aux équations de Friedmann qui décrivent l'évolution cosmologique de l'univers.

Des observations récentes montrent que l'univers se développe à un rythme accéléré. La relativité générale ne prédit pas cela. Pour attaquer ce problème, deux manières générales ont été prises : introduire un nouveau type d'énergie (comme la constante cosmologique Λ , interprétée comme une certaine forme d'énergie sombre) ou modifier la théorie de la gravitation (comme MOND : Modification Of Newtonian Dynamics) [15-19]. Dans ce chapitre, nous allons passer en revue la théorie de la gravité $f(R)$, une modification de la relativité générale qui, même si sa motivation initiale ne résolvait pas le problème de l'Univers en accélération [20-29], cependant, les premières théories de la gravité $f(R)$ étaient élaborées avant cette observation.

2.2 Les trois types de la gravité $f(R)$

La gravité $f(R)$ est simplement une généralisation de l'action d'Einstein-Hilbert [11] :

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

dont la densité lagrangienne est juste le scalaire de Ricci. La gravité $f(R)$ est donnée par une action dans laquelle le scalaire de Ricci R est remplacé par une fonction arbitraire $f(R)$ [11] :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (2.2)$$

Il existe trois versions de la gravité $f(R)$, selon le formalisme utilisé :

- 1) le principe variationnel appliqué à l'action pour obtenir les équations du champ. La manière standard est de faire varier l'action par rapport à la métrique, en donnant la métrique de gravité $f(R)$.
- 2) La deuxième façon est d'utiliser l'approche de Palatini, qui est de considérer la connexion indépendante de la métrique et de modifier l'action par rapport à la métrique et à la connexion (en même temps) qui donne la gravité $f(R)$ selon le formalisme de Palatini, en supposant bien sûr que l'action de la matière ne dépend pas de la connexion. Notons que ces deux méthodes conduisent aux mêmes équations de champ dans le cas de l'action d'Einstein-Hilbert habituelle, mais dans le contexte de la gravité $f(R)$, leurs équations respectives diffèrent.
- 3) La troisième version et la plus générale est la métrique-affine de la gravité $f(R)$, dans laquelle le formalisme de Palatini est utilisé mais en abandonnant l'hypothèse que l'action de la matière est indépendante de la connexion.

2.2.1 La gravité $f(R)$ selon le formalisme de la métrique

Pour obtenir les équations de champ de la gravité $f(R)$ nous devons varier l'action, par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ [12] :

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} (f(R) + \chi L_m) = S + S_m, \quad (2.3)$$

telle que L_m est le lagrangien de la matière.

Pour simplifier, nous considérons le cas spécial où $f(R) = \Sigma f_0 R^\alpha$, telles que f_0 et α sont des constantes et $f(R)$ est une fonction analytique de la courbure scalaire R . Le cas de la gravité d'Einstein correspond à $f_0 = 1$ et $\alpha = 1$.

On a posé :

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \\ S_m &= \int d^4x \sqrt{-g} \chi L_m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

On écrit la courbure scalaire R sous la forme :

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Variation de l'action $f(R)$ dans le formalisme de la métrique :

Du principe de l'action minimale, nous obtenons les équations de champ par la variation $\delta A = 0$:

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \left[\int d^4x \sqrt{-g} (f(R) + \chi L_m) \right] \\ &= \delta S + \delta S_m = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

telle que :

$$\delta S_m = \chi \int d^4x \sqrt{-g} (\delta L_m) + \chi \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) L_m. \quad (2.7)$$

Nous avons besoin de calculer la variation de $\sqrt{-g}$. Pour ce faire, nous utilisons l'identité $Tr(\ln M) = \ln(\det M)$ où M est une matrice inversible et $\ln M$ est définie par $e^{(\ln M)} = M$. La variation de cette identité et l'utilisation de la propriété cyclique de la trace :

$$Tr(M^{-1} \delta M) = \frac{1}{\det M} \delta(\det M), \quad (2.8)$$

à la métrique inverse $M = g^{\mu\nu}$ et $\det M = g^{-1} = \det g^{\mu\nu}$, nous donnent :

$$Tr(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) = g \delta(g^{-1}), \quad (2.9)$$

$$\delta(g^{-1}) = \frac{1}{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

On peut écrire $\delta\sqrt{-g}$ sous la forme :

$$\delta\sqrt{-g} = \delta((-g^{-1}))^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (-g^{-1})^{-\frac{3}{2}} \delta(-g^{-1}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

La variation de $f(R)$ est égale à :

$$\delta f(R) = \frac{\delta f}{\delta R} \delta R = \frac{\delta f}{\delta R} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \frac{\delta f}{\delta R} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \frac{\delta f}{\delta R} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}.$$

Donc, la variation de l'action comprend trois parties :

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left[\int d^4x \sqrt{-g} f(R) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta f}{\delta R} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta f}{\delta R} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) f(R). \end{aligned} \quad (2.11)$$

On pose :

$$F(R) = \frac{\delta f}{\delta R},$$

telle que :

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} F(R) R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}). \quad (2.12)$$

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} F(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

$$\delta S_3 = \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) f(R). \quad (2.14)$$

La forme désirée pour les trois termes de l'action est une quantité multipliée par $\delta g^{\mu\nu}$.

Pour obtenir le second terme de la même forme, nous devons varier le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}. \quad (2.15)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}. \quad (2.16)$$

Donc, le deuxième terme de la variation de l'action devient :

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) (\nabla_\lambda g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) (\nabla_\sigma g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \nabla_\sigma g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Nous pouvons maintenant insérer la variation de $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ en fonction de $\delta g^{\mu\nu}$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta})]. \tag{2.18}$$

$$\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = -\frac{1}{2} [g_{\mu\rho} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\rho}) + g_{\rho\lambda} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\rho}) - g_{\mu\beta} g_{\lambda\alpha} \nabla^\lambda (\delta g^{\alpha\beta})].$$

En utilisant (2.18), on a :

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} g_{\lambda\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + g^{\mu\nu} g_{\lambda\mu} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) \\
&\quad - g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) - g^{\mu\sigma} g_{\mu\rho} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\rho}) \\
&\quad - g^{\mu\sigma} g_{\rho\lambda} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\rho}) + g^{\mu\sigma} g_{\mu\beta} g_{\lambda\alpha} \nabla^\lambda (\delta g^{\alpha\beta})].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où :

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_\sigma^\mu. \tag{2.20}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma [\delta_\lambda^\nu \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + \delta_\lambda^\nu \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) \\
&\quad - \delta_\alpha^\nu g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) - \delta_\rho^\sigma \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\rho}) - g^{\mu\sigma} g_{\rho\lambda} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\rho}) + \delta_\beta^\sigma g_{\lambda\alpha} \nabla^\lambda (\delta g^{\alpha\beta})].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma [\nabla_\lambda (\delta g^{\lambda\sigma}) + \nabla_\mu (\delta g^{\nu\sigma}) - g_{\alpha\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\rho\lambda} \nabla^\sigma (\delta g^{\lambda\rho}) + \nabla_\alpha (\delta g^{\alpha\sigma})].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

En inter-changeant les indices $\nu \leftrightarrow \mu$ dans le deuxième terme de (2.22) et $\nu \leftrightarrow \lambda$ dans le quatrième terme de la même équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta S_2 = & -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma [\nabla_\lambda (\delta g^{\lambda\sigma}) + \nabla_\mu (\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\alpha\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) \\ & - \nabla_\lambda (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\rho\lambda} \nabla^\sigma (\delta g^{\lambda\rho}) + \nabla_\alpha (\delta g^{\alpha\sigma})]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta S_2 = & -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma [\nabla_\mu (\delta g^{\mu\sigma}) \\ & - g_{\alpha\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) - g_{\rho\lambda} \nabla^\sigma (\delta g^{\lambda\rho}) + \nabla_\alpha (\delta g^{\alpha\sigma})]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En inter-changeant les indices ($\alpha \leftrightarrow \mu, \beta \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \mu$) et ($\lambda \leftrightarrow \nu$), l'équation (2.24) devient :

$$\begin{aligned} \delta S_2 = & -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_\sigma [\nabla_\mu (\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\nu\mu}) + \nabla_\mu (\delta g^{\mu\sigma})] \\ = & - \int d^4x \sqrt{-g} F(R) [\nabla_\sigma \nabla_\mu (\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En inter-changeant les indices $\sigma \leftrightarrow \nu$ dans le premier terme de (2.25) : $\nabla_\sigma \nabla_\mu (\delta g^{\mu\sigma}) = \nabla_\nu \nabla_\mu (\delta g^{\mu\nu})$, cette équation devient :

$$\delta S_2 = - \int d^4x \sqrt{-g} F(R) [\nabla_\nu \nabla_\mu (\delta g^{\mu\nu}) - g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu})]. \quad (2.26)$$

L'opérateur de d'Alembert s'écrit :

$$\square = \nabla_\sigma \nabla^\sigma = \frac{\partial_\sigma (\sqrt{-g} g^{\sigma\beta} \partial_\beta)}{\sqrt{-g}}. \quad (2.27)$$

Donc, en performant deux intégrations par parties et en tenant compte du fait que la dérivée covariante de la métrique est nulle, l'équation (2.26) devient (après un détail de calcul omis) :

$$\delta S_2 = - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\nu \nabla_\mu F(R) - g_{\mu\nu} \square F(R)] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

La variation de l'action δS est :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\nu \nabla_\mu F(R) - g_{\mu\nu} \square F(R)] \delta g^{\mu\nu} \\ &+ \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) f(R), \end{aligned} \quad (2.29)$$

On remplace l'équation (2.10) dans l'équation (2.29) et on obtient l'équation suivante :

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(R) R_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

De plus, si on remplace l'équation (2.10) dans l'équation (2.7), on obtient l'équation suivante :

$$\delta S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \chi (\delta L_m) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \chi L_m \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Le tenseur énergie-impulsion est défini comme :

$$T_{\mu\nu} = \frac{-1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.32)$$

On remplace l'équation (2.10) dans l'équation (2.32) et on obtient :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_m - \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.33)$$

A partir de l'équation (2.33), on peut écrire :

$$\delta L_m = -T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_m \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

On remplace l'équation (2.34) dans l'équation (2.31) et on obtient une équation comme suit :

$$\delta S_m = - \int d^4x \sqrt{-g} \chi T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Donc la variation totale de l'action s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \delta A &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(R) R_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \chi T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

D'où :

$$F(R) R_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \chi T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.37)$$

Pour obtenir la trace multipliée par $g^{\mu\nu}$, on a :

$$g^{\mu\nu} F(R) R_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu F(R) + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square F(R) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} f(R) = \chi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

En utilisant le fait que $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$ et que $g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu = \nabla_\nu \nabla^\nu = \square$, on obtient finalement la trace :

$$F(R) R + 3\square F(R) - 2f(R) = \chi T. \quad (2.39)$$

Pour $f(R) = R$ et $F(R) = 1$, on vérifie aisément qu'on retrouve les équations de champ d'Einstein de la relativité générale.

2.2.2 La gravité $f(R)$ à la Palatini

Comme nous le disions dans le formalisme de Palatini, nous traitons la métrique $g_{\mu\nu}$ et la connexion de Levi-Civita $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ comme des variables indépendantes. Dans le cas de la relativité générale standard d'Einstein, les deux variations conduisent aux mêmes équations de champ. Mais dans le cas de la gravité $f(R)$, les termes de courbure supplémentaires fourniront deux équations distinctes. Donc, en variant l'action (2.3) par rapport à $g_{\mu\nu}$ [35, 36] :

$$S_{Palatini} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S^{matter}[g_{\mu\nu}, \psi^m], \quad (2.40)$$

où ψ^m sont les champs de matière. Les équations des champs correspondantes à l'action (2.40) sont [35, 36] :

$$F(R) R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} f(R) g^{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

où $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ est le tenseur de Ricci correspondant aux connexions $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$. Il est en général différent du tenseur de Ricci calculé en termes de connexions métriques $R_{\mu\nu}(g)$. La trace de (2.41) est :

$$F(R) R - 2f(R) = \chi T. \quad (2.42)$$

2.2.3 La gravité $f(R)$ à la métrique-affine

La métrique-affine de la gravité $f(R)$ est semblable à la gravité $f(R)$ à la Palatini, dans le sens où elle prend aussi comme variables indépendantes le tenseur métrique et la connection de Levi-Civita. Ce modèle de la gravité modifiée est encore tout à fait nouveau et les mathématiques qui lui sont associées nécessitent l'introduction de plusieurs concepts et définitions [37].

Dans la métrique affine de la gravité $f(R)$, l'action est [38] :

$$S_{affine} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S^{matter} [g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi^m]. \quad (2.43)$$

Les équations de champs correspondant à l'action (2.43) sont (voir [38]) :

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g^{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (2.44)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[-\nabla'_\lambda (\sqrt{-g} F(R) g^{\mu\nu}) + \nabla'_\sigma (\sqrt{-g} F(R) g^{\mu\sigma}) \delta_\lambda^\nu \right] \\ & + 2F(R) (g^{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \delta_\lambda^\nu + g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu) = \chi \Delta_\lambda^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

où

$$\Delta_\lambda^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}, \quad (2.46)$$

et ∇'_μ est la dérivée covariante par rapport à $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

Dans ce travail, nous avons choisi de travailler avec le premier formalisme. Nous allons examiner les corrections quadratiques appelées aussi la gravité R-carré ou le modèle de Starobinsky (le plus connu est $f(R) = R + \alpha R^2$) [39] comme suit :

$$f(R) = R + \frac{1}{2} \beta R^2, \quad (2.47)$$

à l'action de Hilbert-Einstein, parce qu'elle a montré des résultats cohérents pour certains phénomènes cosmologiques [40]. On pose $\beta = 2\alpha$ le paramètre des corrections quadra-

tiques du scalaire de Ricci, pour éviter toute confusion avec la fraction de charge qu'on a appelé α . Les conditions de stabilité sont [39] : $f'(R) > 0$ et $f''(R) > 0$ qui conduisent à $\beta > 0$. Avec notre fonction choisie $f(R)$ et suivant la référence [40], les équations de champ sont trouvées comme :

$$G_{\mu\nu} + \beta (R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/4 + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) R = -\chi T_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

2.3 Critères pour la viabilité de la théorie de la gravité

$f(R)$

Pour que la gravité $f(R)$ soit acceptable, il ne suffit pas seulement qu'elle remplisse le but pour lequel elle a été introduite dans le contexte cosmologique, mais il faut aussi passer les tests imposés par le système solaire et les expériences terrestres sur la gravité relativiste et elle doit satisfaire à certains critères minimaux de viabilité.

Donc, une théorie étendue de la gravité est acceptable si elle satisfait les critères suivants [35] :

1. Posséder la dynamique cosmologique correcte,
2. ne pas souffrir d'instabilités et fantômes,
3. avoir la limite Newtonienne et post-Newtonienne correctes,
4. donner lieu à des perturbations cosmologiques compatibles avec les données du fond de micro-ondes cosmique et sur les structures à grande échelle,
5. avoir un problème de Cauchy (autrement dit des conditions initiales et aux limites) bien posé.

Ces critères de viabilité sont examinés dans ce qui suit :

2.3.1 Dynamique cosmologique correcte

La théorie doit reproduire les data cosmologiques : accélération de l'expansion de l'univers, univers plat.

De l'avis de la plupart des cosmologistes, pour être acceptable, un modèle cosmologique doit présenter une inflation précoce (ou un moyen alternatif de résoudre l'horizon,

la platitude et un problème de monopoles avec un mécanisme pour générer des perturbations de densité), suivie d'une époque dominée par le rayonnement et une époque dominée par la matière, puis par l'époque accélérée actuelle pour laquelle les théories $f(R)$ ont été ressuscitées. Les transitions entre les époques consécutives doivent être lisses.

Dans le passé, des problèmes ont été signalés avec la sortie de l'époque du rayonnement dans certains modèles [36-40] , mais ils ont maintenant été résolus [41-46] .

2.3.2 Absence de fantômes

Qu'est-ce qu'un fantôme pour ces théories ? Un mode fantôme est un degré de liberté en propagation avec un terme cinétique dans l'action avec un signe opposé.

Les fantômes sont des états massifs de norme négative qui causent la violation d'unitarité et on les rencontrent souvent en essayant de généraliser la théorie de la gravité d'Einstein. Les fantômes apparaissent facilement dans les théories de gravité d'ordre supérieur. Les théories plus générales de la forme $f(R, R_{ab}R^{ab}, R_{abcd}R^{abcd}, \dots)$ contenant généralement des champs de fantômes, ont été étudiées dans [47-55] . La théorie de la gravité $f(R)$ est sans fantôme [52, 56, 57, 58, 59, 60, 61].

2.3.3 Stabilité

La stabilité des trous noirs sous perturbation linéarisée est considérée comme un problème important dans la physique des trous noirs. La stabilité a été étudiée dans [57-61] et la solution de la gravité $f(R)$ est stable d'après la référence [67]. Le cas de la relativité générale est exclu par l'hypothèse $f'' = 0$ [35], mais la stabilité bien connue dans ce cas permet d'étendre le critère de stabilité de la gravité de métrique $f(R)$ à $f'(R) > 0$ et $f''(R) > 0$.

2.3.4 Limites Newtonienne et Post-Newtonienne correctes

En fait, comme discuté par Capozziello et co [68] , nous traitons la limite Newtonienne et Post-Newtonienne de la gravité $f(R)$ en adoptant la symétrie sphérique. La solution

des équations de champ peut être obtenue en considérant la métrique :

$$ds^2 = g_{00}(x^0, r)d(x^0)^2 + g_{rr}(x^0, r)dr^2 - r^2d\Omega, \quad (2.49)$$

où $x^0 = ct = t$ et $d\Omega$ est l'élément angulaire.

Pour développer la limite Newtonienne, considérons que la métrique peut être écrite sous la forme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, où $h_{\mu\nu}$ est une petite perturbation ($h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$) et où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski normalisée. Les entrées de métrique peuvent être développées comme [68] :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{tt}(t, r) \simeq 1 + g_{tt}^{(2)}(t, r) + g_{tt}^{(4)}(t, r) \\ g_{rr}(t, r) \simeq -1 + g_{rr}^{(2)}(t, r) \\ g_{\theta\theta}(t, r) = -r^2 \\ g_{\varphi\varphi}(t, r) = -r^2 \sin^2\theta \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Le scalaire de Ricci devient :

$$R \sim R^{(2)}(t, r) + R^{(4)}(t, r) + \dots \quad (2.51)$$

La dérivée n-ième de la fonction de Ricci peut être développée comme suit :

$$f^n(R) \sim f^n(R^{(2)} + R^{(4)} + \dots) \sim f^n(0) + f^{n+1}(0)R^{(2)} + f^{n+1}(0)R^{(4)} + \frac{1}{2}f^{n+2}(0)(R^{(2)})^2 + \dots \quad (2.52)$$

Pour obtenir le résultat le plus général, nous ne fournissons aucune forme spécifique pour le lagrangien de $f(R)$. Nous supposons que le développement de Taylor de $f(R)$ par rapport à une certaine valeur $R = R_0 \simeq 0$ est :

$$f(R) = \sum_n \frac{f^n(R_0)}{n!} (R - R_0)^n \simeq f_0 + f_0' R + \frac{1}{2} f_0'' R^2 + \frac{1}{6} f_0''' R^3 + \dots, \quad (2.53)$$

où $f_0' = \frac{df}{dR}|_{R=0}$, $f_0'' = \frac{d^2f}{dR^2}|_{R=0}$ et $f_0''' = \frac{d^3f}{dR^3}|_{R=0}$.

On peut écrire l'équation (2.53) comme suit :

$$f(R) \simeq f_0 + f_1 R + f_2 R^2 + f_3 R^3 + \dots, \quad (2.54)$$

où $f_1 = f_0'$, $f_2 = \frac{1}{2}f_0''$ et $f_3 = \frac{1}{6}f_0'''$.

Pour obtenir l'approximation Post-Newtonienne, il faut insérer les expansions (2.50) et (2.53) dans les équations (2.37), (2.39) et étendre le système jusqu'aux ordres $O(0)$, $O(2)$ et $O(4)$. Cette approche fournit des résultats généraux et des théories spécifiques (analytiques) sont sélectionnées par les coefficients f_i dans l'équation (2.53).

De l'ordre le plus bas des équations de champ (2.37) c-à-d l'ordre $O(0)$, les équations de champ donnent la condition :

$$f(0) = f_0 = 0. \quad (2.55)$$

Dans l'approximation de l'ordre $O(2)$, le système d'équations (2.50) dans le vide se traduit par (voir [68]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 r R^{(2)} - 2f_1 g_{tt,r}^{(2)} + 8f_2 R_{,r}^{(2)} - f_1 r g_{tt,rr}^{(2)} + 4f_2 r R^{(2)} = 0 \\ f_1 r R^{(2)} - 2f_1 g_{rr,r}^{(2)} + 8f_2 R_{,r}^{(2)} - f_1 r g_{tt,rr}^{(2)} = 0 \\ 2f_1 g_{rr}^{(2)} - r \left[f_1 r R^{(2)} - f_1 g_{tt,r}^{(2)} - f_1 g_{rr,r}^{(2)} + 4f_2 R_{,r}^{(2)} + 4f_2 r R_{,rr}^{(2)} \right] = 0 \\ f_1 r R^{(2)} + 6f_2 \left[2R_{,r}^{(2)} + r R_{,rr}^{(2)} \right] = 0 \\ 2g_{rr}^{(2)} + r \left[2g_{tt,r}^{(2)} - r R^{(2)} + 2g_{rr,r}^{(2)} + r g_{tt,rr}^{(2)} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (2.56)$$

L'équation de trace (la quatrième dans le système (2.56)) fournit une équation différentielle par rapport au scalaire de Ricci qui permet de résoudre exactement le système (2.56) à l'ordre $O(2)$.

Finalement, on obtient la solution générale (voir [68, 69]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{tt}^{(2)} = \delta_0 - \frac{\delta_1(t)e^{-r\sqrt{-\xi}}}{3\xi r} + \frac{\delta_2(t)e^{r\sqrt{-\xi}}}{6(-\xi)^{3/2}r} \\ g_{rr}^{(2)} = \frac{\delta_1(t)[r\sqrt{-\xi} + 1]e^{-r\sqrt{-\xi}}}{3\xi r} - \frac{\delta_2(t)[\xi r + \sqrt{-\xi}]e^{r\sqrt{-\xi}}}{6\xi^2 r} \\ R^{(2)} = \frac{\delta_1(t)e^{-r\sqrt{-\xi}}}{r} - \frac{\delta_2(t)\sqrt{-\xi}e^{r\sqrt{-\xi}}}{2\xi r}, \end{array} \right. \quad (2.57)$$

où δ_0 est la constante d'intégration qui est sans dimension, tandis que les deux fonctions arbitraires de temps $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$ ont respectivement les dimensions de *longueur*⁻¹ et de *longueur*⁻². ξ a la dimension de *longueur*⁻², où $\xi = \frac{f_1}{6f_2}$, f_1 et f_2 sont les coefficients d'expansion obtenus par le développement de Taylor de $f(R)$ et Y est une constante

d'intégration arbitraire.

De plus, le coefficient f_1 doit être positif pour avoir une constante gravitationnelle définie positive.

Les fonctions de temps $\delta_i(t)$ ($i = 1; 2$) sont complètement arbitraires puisque le système d'équations différentielles (2.57) ne contient que des dérivées spatiales et peut être réglé à des valeurs constantes.

La constante d'intégration δ_0 peut être mise à zéro car elle représente une quantité additive non essentielle pour le potentiel.

Le premier terme de l'équation du système (2.57) qui donne la solution du second ordre en terme d'expansion métrique (voir (2.50)) est la limite newtonienne de la gravité $f(R)$. Ce terme coïncide avec le potentiel gravitationnel de Newton ; c'est le potentiel gravitationnel modifié pour la gravité $f(R)$:

$$g_{tt} = 1 + 2\Phi_{grav} = 1 + g_{tt}^{(2)}. \quad (2.58)$$

Le potentiel gravitationnel général de la gravité $f(R)$ est [68, 69] :

$$\Phi_{grav} = \frac{\delta_1(t)e^{-r\sqrt{-\xi}}}{3\xi r} + \frac{\delta_2(t)e^{r\sqrt{-\xi}}}{6(-\xi)^{3/2}r} \quad (2.59)$$

Ce résultat général signifie que le potentiel standard de Newton n'est atteint que dans le cas particulier $f(R) = R$, alors qu'il n'en est pas de même pour les modèles analytiques génériques $f(R)$.

En effet, la limite Newtonienne de la relativité générale ne peut pas être obtenue directement à partir de la solution (2.59) mais à partir des équations de champ (2.56).

Afin de dériver l'approximation Post-Newtonienne pour une fonction générique $f(R)$, il faut spécifier la fonction $f(R)$ dans les équations de champ (2.37), (2.39). En effet, une fois qu'une certaine fonction $f(R)$ est choisie, on obtiendra une approximation Post-Newtonienne particulière référée à un tel choix. En général, de telles théories permettent de retrouver les résultats de la relativité générale et la limite correcte et les conditions asymptotiques.

2.3.5 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour la gravité $f(R)$ peut être défini comme le problème de Cauchy pour la théorie O'Hanlon correspondante [65-67] .

Le résultat obtenu dans [73] est que le problème de Cauchy pour la gravité $f(R)$ à la métrique est bien formulé et est bien posé sous vide et avec des formes "raisonnables" de matière (des fluides parfaits, des champs scalaires, ou le champ de Maxwell), alors que pour la gravité $f(R)$ à la Palatini, le problème de Cauchy n'est pas bien formulé ni bien posé en raison de la présence de dérivées plus élevées des champs de matière dans les équations de champ et en fait qu'il est impossible d'éliminer [35].

Chapitre 3

LES ÉTOILES COMPACTES

3.1 Introduction

Ce chapitre fournit une brève description des étoiles compactes, c'est-à-dire les naines blanches, les étoiles à neutrons et les trous noirs sont considérés comme la dernière étape de l'évolution stellaire. L'histoire des étoiles à neutrons a commencé en 1934 par la prédiction géniale de Baade et Zwicky [74]. Ils ont proposé ce nouvel objet astrophysique pour expliquer leurs observations d'un phénomène des supernovae.

Nous explorons une classe de sphères compactes formées d'un fluide parfait régi par une équation d'état polytropique. La densité de charge est choisie pour être proportionnelle à la densité d'énergie. L'étude est généralement réalisée en résolvant l'équation de TOV qui décrit l'équilibre hydrostatique.

La structure des étoiles est essentiellement régie par trois lois simples, à savoir l'équilibre hydrostatique, le transport d'énergie et la production d'énergie. Dans ce chapitre, nous allons exprimer la loi de l'équilibre hydrostatique en termes mathématiques précis.

3.2 Équilibre hydrostatique

Une étoile a une forme sphérique stable, sa taille ne varie pas significativement. Elle est en équilibre hydrostatique et elle est en fait sujette à deux forces de sens opposés qui s'annulent. La force de gravité tend à contracter la matière présente à l'intérieur, la force de pression, due aux réactions thermonucléaires qui ont lieu en son centre, tend à la faire

dilater [75, 76].

Dans une étoile, la force de gravité vers l'intérieur est équilibrée par la force de pression vers l'extérieur. L'énergie est produite dans le noyau de l'étoile chaude, puis diffusée à l'extérieur à la surface de refroidissement.

3.2.1 Description d'une étoile en symétrie sphérique

Considérons un petit élément cylindrique de masse δm , situé entre le rayon r et le rayon $r + dr$ dans l'étoile et soit : $m = m(r)$ la masse intérieure à r (voir la figure 3.1).

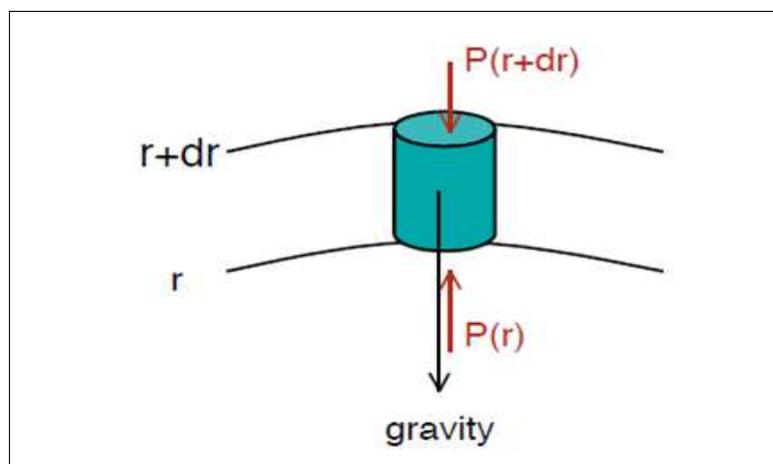


FIGURE 3.1 – L'équilibre hydrostatique à l'intérieur d'une étoile.

Alors la conservation de la masse implique que :

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (3.1)$$

$\rho(r)$ est la densité d'énergie, telle que l'élément de volume de cet élément est $dV = 4\pi r^2 dr$.

On pose $s = 4\pi r^2$. L'équation précédente devient alors :

$$\frac{dm(r)}{dr} = \rho(r)s. \quad (3.2)$$

C'est la première équation de la structure stellaire.

Les forces agissant sur l'élément sont :

Forces de gravité : L'équation suivante permet de calculer la force de gravité F_g s'exerçant sur un petit élément de matière situé à une distance r du centre :

$$F_g = -\frac{Gm\delta m}{r^2}, \quad (3.3)$$

telle que

$$\delta m = \rho s dr \quad (3.4)$$

Forces de pression : La force de pression est une force nette due à la différence de pression entre les faces supérieure et inférieure.

$$F_p = P(r)s - P(r + dr)s = P(r)s - [P(r) + \frac{dP}{dr}dr]s = -\frac{dP}{dr}sdr. \quad (3.5)$$

On a l'accélération qui égale à zéro partout si l'étoile est statique. On applique alors la deuxième loi de Newton

$$F_g + F_p = \delta m \ddot{r} = 0, \quad (3.6)$$

et on obtient la deuxième équation de la structure stellaire :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (3.7)$$

On a le potentiel gravitationnel $\Phi = \frac{Gm}{r} \rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}$. Donc l'équation précédente devient :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d\Phi}{dr}\rho. \quad (3.8)$$

C'est l'équation hydrostatique.

3.2.2 L'équation de Poisson

L'équation de Poisson est l'équation aux dérivées partielles du second ordre donnée comme suit [15] :

$$\Delta\Phi = H, \quad (3.9)$$

tel que Δ est l'opérateur laplacien et H est une fonction généralement donnée. En symétrie sphérique :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right). \quad (3.10)$$

En combinant les équations (3.2), (3.7) et (3.10), on a :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right] = -4\pi G\rho \quad (3.11)$$

C'est l'équation de Poisson.

L'approximation des champs faibles et des mouvements lents permet de retrouver l'équation de Poisson de la gravitation de Newton :

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G\rho, \quad (3.12)$$

où ρ est la masse volumique.

D'autre part, Il existe une relation polytropicque entre p et ρ qui est de la forme :

$$p = \omega\rho^\gamma, \quad (3.13)$$

où γ et ω sont des constantes. A partir des équations (3.8) et (3.13) on a :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \gamma\omega\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (3.14)$$

C'est l'équation polytropicque.

Pour $\gamma \neq 1$, on intègre l'équation (3.14) et on obtient :

$$\rho = A_n \Phi^n \quad (3.15)$$

telle que :

$$A_n = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma\omega} \right]^n$$

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

n c'est l'indice polytropique. On appelle γ l'exposant polytropique.

On remplace l'équation (3.11) dans l'équation (3.15) et on obtient l'équation différentielle du potentiel de gravitation :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = -4\pi r^2 G A_n \Phi^n. \quad (3.16)$$

3.2.3 L'équation de Lane-Emden

L'équation de Lane-Emden est nommée d'après les astrophysiciens Jonathan Homer Lane et Robert Emden. Cette équation décrit la structure d'une étoile, qui est à symétrie sphérique, en équilibre hydrostatique, dont l'équation d'état est celle d'un polytrope qui est soumis à l'influence de son champ gravitationnel. L'équation de Lane-Emden permet de déterminer la pression et la densité de l'étoile ainsi que les types de configuration (stable ou instable, d'extension finie ou infinie). On définit la variable adimensionnelle suivante [77] :

$$K(z) = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.17)$$

où l'indice c désigne le centre de l'étoile et $K(z)$ est appelée la fonction de Lane-Emden.

A partir de l'équation (3.17) on a :

$$\begin{aligned} \Phi &= K(z)\Phi_c \\ \rho &= K^n(z)\rho_c. \end{aligned} \quad (3.18)$$

On fait le changement de variable :

$$r = z\varepsilon. \quad (3.19)$$

Le rayon r est la coordonnée spatiale qui varie de $r = 0$ au centre à $r = \varepsilon$ à la surface de l'étoile. Par contre, la fonction de Lane-Emden varie de $K = 0$ au centre à $K = 1$ à la surface de l'étoile.

On remplace l'équation (3.14) dans l'équation (3.11) et on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\gamma r^2 \omega \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G \rho. \quad (3.20)$$

Après avoir défini la quantité $n = \frac{1}{\gamma-1}$, l'équation (3.20) devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \omega \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G \rho. \quad (3.21)$$

On remplace les équations (3.18) et (3.19) dans l'équation (3.21). Ce qui donne :

$$\left(\frac{\omega (n+1) \rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G \varepsilon^2} \right) \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dK}{dz} \right) + K^n = 0. \quad (3.22)$$

On pose :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\omega (n+1) \rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}}. \quad (3.23)$$

On peut alors écrire l'équation de Lane-Emden comme :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dK}{dz} \right) + K^n = 0. \quad (3.24)$$

Elle décrit l'équilibre hydrostatique des structures stellaires dans la théorie newtonienne.

Notez que dans la suite de ce chapitre, on travaillera en unités géométriques $G = c = 1$.

3.2.4 Les équations des champs

Dans les sphères compactes chargées, comme décrites par les équations d'Einstein-Maxwell avec la matière chargée électriquement, les équations de champ sont [77] :

$$G_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\mu. \quad (3.26)$$

$G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein défini dans le chapitre 1.

Le tenseur de Faraday-Maxwell est :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.27)$$

Le tenseur énergie-impulsion total est :

$$T_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

où $E_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion électromagnétique :

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu}^{\gamma} F_{\nu\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} \right), \quad (3.29)$$

et $M_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait :

$$M_{\mu\nu} = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Donc :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu}^{\gamma} F_{\nu\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} \right) + (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu}. \quad (3.31)$$

Pour un fluide chargé, le courant électromagnétique j^{μ} est donné en termes de densité de charge électrique ρ_e comme suit :

$$j^{\mu} = u_{\mu} \rho_e. \quad (3.32)$$

3.2.5 Les équations d'équilibre

L'élément de métrique pour un espace-temps à symétrie sphérique statique est de la forme :

$$dS^2 = -B(r) dt^2 + A(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.33)$$

Les potentiels $A(r)$ et $B(r)$ sont des fonctions de la coordonnée radiale r seulement. Les éléments non nuls de la métrique covariante sont :

$$g_{00} = -B(r), \quad g_{11} = A(r), \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.34)$$

et ceux de la métrique contravariante sont :

$$g^{00} = -\frac{1}{B(r)}, \quad g^{11} = \frac{1}{A(r)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.35)$$

On utilise la métrique covariante et la métrique contravariante pour déduire les composantes des symboles de Christoffel non nulles :

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} = \frac{1}{\sqrt{B(r)}} \frac{d\sqrt{B(r)}}{dr}.$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr}.$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr} = \frac{1}{\sqrt{A(r)}} \frac{d\sqrt{A(r)}}{dr}.$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}.$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2\theta}{A}.$$

On utilise la métrique covariante et la métrique contravariante ainsi que les symboles de Christoffel pour déduire les composantes du tenseur de Ricci non nulles :

$$R_{00} = -\frac{1}{2A(r)} \frac{d^2B(r)}{dr^2} + \frac{1}{4A(r)B(r)} \left(\frac{dB(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4A(r)^2} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dA(r)}{dr} - \frac{1}{rA(r)} \frac{dB(r)}{dr}. \quad (3.36)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2B(r)} \frac{d^2B(r)}{dr^2} - \frac{1}{4B(r)^2} \left(\frac{dB(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4B(r)A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dA(r)}{dr} - \frac{1}{rA(r)} \frac{dA(r)}{dr}. \quad (3.37)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2B(r)A(r)^2} \left(rA(r) \frac{dB(r)}{dr} - rB(r) \frac{dA(r)}{dr} - 2B(r) \left(\frac{dA(r)}{dr} \right)^2 + 2A(r)B(r) \right). \quad (3.38)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}. \quad (3.39)$$

On en déduit la courbure scalaire à partir des composantes non nulles du tenseur de Ricci :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}. \quad (3.40)$$

Donc :

$$R = \frac{1}{A(r)B(r)} \frac{d^2B(r)}{dr^2} - \frac{1}{2B(r)^2A(r)} \left(\frac{dB(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2B(r)A(r)^2} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{2}{rA(r)B(r)} \frac{dB(r)}{dr} - \frac{2}{rA(r)^2} \frac{dA(r)}{dr} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2A(r)}. \quad (3.41)$$

Les composantes du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ non nulles sont alors :

$$G_{00} = -\frac{B(r)}{r^2 A(r)^2} \left(\frac{dA(r)}{dr} r + A(r)^2 - A(r) \right). \quad (3.42)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{r^2 B(r)} \left(\frac{dB(r)}{dr} r - A(r) B(r) + B(r) \right). \quad (3.43)$$

$$G_{22} = -\frac{r}{4B(r)^2 A(r)^2} \left(-2 \frac{dA(r)}{dr} B(r)^2 + 2A(r) B(r) \frac{dB(r)}{dr} \right. \\ \left. + 2rA(r) B(r) \frac{d^2 B(r)}{dr^2} - rA(r) \left(\frac{dB(r)}{dr} \right)^2 - rB(r) \frac{dA(r)}{dr} \frac{dB(r)}{dr} \right). \quad (3.44)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta G_{22}. \quad (3.45)$$

Les équations de champ d'Einstein s'écrivent maintenant :

$$G_{\mu\nu} = -\chi (E_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}). \quad (3.46)$$

3.2.6 La solution de Reissner-Nordström

Les équations de Maxwell dans l'espace-temps courbe, lorsqu'elles sont écrites en termes du tenseur covariant $F_{\mu\nu}(x)$ antisymétrique, sont faciles à trouver en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées covariantes [78] :

- L'équation de Maxwell homogène reste la même :

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.47)$$

parce que les contributions des champs de connexion s'annulent en raison de l'antisymétrie complète sous permutations de α , β et γ .

Le tenseur de Faraday-Maxwell s'écrit en fonction du champ de potentiel vecteur A_μ comme :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.48)$$

- L'équation de Maxwell inhomogène est :

$$D_\mu F_\nu^\mu = g^{\alpha\beta} D_\alpha F_{\beta\nu} = -J_\nu. \quad (3.49)$$

où $J_\nu(x)$ est la charge électromagnétique et la distribution du courant.

L'équation (3.49) peut être réécrite comme :

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g} J^\nu. \quad (3.50)$$

Nous avons la loi de conservation :

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} J^\mu) = 0, \quad (3.51)$$

car le champ de Maxwell $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique dans ses deux indices.

- La distribution d'énergie-impulsion du champ de Maxwell est :

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - J^\alpha A_\alpha \right) g_{\mu\nu}. \quad (3.52)$$

La symétrie sphérique peut encore être utilisée comme point de départ pour la construction d'une solution des équations d'Einstein-Maxwell combinées pour les champs entourant une étoile avec la charge électrique Q et la masse m .

La métrique prend la forme (3.33). Le champ électrique statique est défini par

$$E_i(x) = F_{0i} = -F_{i0}, \quad E_r = E(r), \quad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad \vec{B} = 0.$$

La source J^μ de ce champ est non nulle à l'intérieur de l'étoile et nulle hors de l'étoile :

$$J^\mu = 0.$$

On a $g = -ABr^4 \sin^2\theta$ et $F^{0r} = -\frac{1}{AB} E(r)$. L'équation (3.50) devient :

$$\partial_r \left(\frac{E(r)r^2}{\sqrt{AB}} \right) = 0. \quad (3.53)$$

Et par conséquent :

$$E(r) = \frac{Q\sqrt{AB}}{4\pi r^2}. \quad (3.54)$$

On peut écrire $E_r = -\partial A_0$, telle que A_0 est le champ de potentiel scalaire.

L'équation (3.54) contribue à $T_{\mu\nu}$ [78] :

$$T_{00} = -\frac{E^2}{2B} = -\frac{AQ^2}{32\pi^2 r^4}, \quad T_{11} = \frac{E^2}{2A} = \frac{BQ^2}{32\pi^2 r^4}. \quad (3.55)$$

$$T_{22} = -\frac{E^2 r^2}{2AB} = -\frac{Q^2}{32\pi^2 r^4}, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta = -\frac{Q^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^4}. \quad (3.56)$$

On trouve :

$$T_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0; \quad R = 0. \quad (3.57)$$

Les équations de champ d'Einstein se lisent :

$$R_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}. \quad (3.58)$$

Ces équations (3.58) conduisent à la solution suivante :

$$A^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}; \quad B = A^{-1}. \quad (3.59)$$

C'est la solution Reissner-Nordstrom pour une étoile chargée à symétrie sphérique élaborée dans des travaux entre 1916 et 1918. Pour l'intérieur de l'étoile, on adopte la solution suivante :

$$\frac{1}{A(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}. \quad (3.60)$$

$$B(r) = \frac{1}{A(r)}. \quad (3.61)$$

3.2.7 Les composantes d'un tenseur de Faraday-Maxwell

$F^{tr}(r) = -F^{rt}(r)$ sont les seules composantes non nulles et les autres sont identiquement nulles, à cause de la symétrie sphérique.

$$F^{tr}(r) = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & 0 \\ F^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & 0 \\ -F^{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

La charge électrique totale :

La seule composante non nulle dans les équations de Maxwell $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\mu$ est donnée par :

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu F^{\mu\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu F^{\lambda\nu} = 4\pi j^\mu. \quad (3.63)$$

Les termes $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu F^{\lambda\nu} = 0$ parce qu'ils contiennent une mixture d'indices symétrique et antisymétrique. L'équation précédente devient alors :

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu F^{\mu\lambda} = 4\pi j^\mu. \quad (3.64)$$

Pour $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu F^{0\nu} &= 4\pi j^0 = \partial_\nu F^{0\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu F^{0\lambda} \\ &= \partial_1 F^{01} + \Gamma_{1\nu}^\nu F^{01} = \frac{dF^{01}}{dr} + \Gamma_{1\nu}^\nu F^{01}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

On calcule le terme $\Gamma_{1\nu}^\nu$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\nu}^\nu &= \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{B(r)}} \frac{d\sqrt{B(r)}}{dr} + \frac{1}{\sqrt{A(r)}} \frac{d\sqrt{A(r)}}{dr} + \frac{2}{r}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

On a :

$$j^0 = \rho_e \quad (3.67)$$

On remplace l'équation (3.66) et l'équation (3.67) dans l'équation (3.65) et on obtient :

$$\frac{dF^{01}}{dr} + \left(\frac{1}{\sqrt{B(r)}} \frac{d\sqrt{B(r)}}{dr} + \frac{1}{\sqrt{A(r)}} \frac{d\sqrt{A(r)}}{dr} + \frac{2}{r} \right) F^{01} = 4\pi\rho_e. \quad (3.68)$$

On multiplie l'équation précédente par $r^2\sqrt{A(r)B(r)}$ et on obtient :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2\sqrt{A(r)B(r)}F^{01} \right) = 4\pi r^2\sqrt{A(r)B(r)}\rho_e. \quad (3.69)$$

telle que :

$$q(r) = r^2\sqrt{A(r)B(r)}F^{01}. \quad (3.70)$$

En remplaçant l'équation (3.70) dans l'équation (3.69), on obtient :

$$\frac{dq(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_e \sqrt{A(r) B(r)}, \quad (3.71)$$

où $q(r)$ est la charge électrique totale à l'intérieur d'une sphère de rayon r , qui dépend de la coordonnée r seulement.

Le tenseur énergie-impulsion total peut s'écrire comme suit :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu}^{\gamma} F_{\nu\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} \right) + (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu}. \quad (3.72)$$

Pour $\mu = 0$ et $\nu = 0$ on obtient T_{00} :

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left(F_0^{\gamma} F_{0\gamma} - \frac{1}{4} g_{00} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} \right) + (\rho + p) u_0 u_0 + p g_{00}. \quad (3.73)$$

On calcule le terme $F_0^{\gamma} F_{0\gamma}$:

$$\begin{aligned} F_0^{\gamma} F_{0\gamma} &= F_0^1 F_{01} = (g_{00})^2 g_{11} (F^{01})^2 \\ &= B^2(r) A(r) (F^{01})^2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

A partir de l'équation (3.70) on a :

$$F^{01} = \frac{q(r)}{r^2 \sqrt{A(r) B(r)}}. \quad (3.75)$$

On remplace l'équation (3.75) dans l'équation (3.74) et on obtient :

$$F_0^{\gamma} F_{0\gamma} = B(r) \frac{q^2(r)}{r^4}. \quad (3.76)$$

On calcule le terme $F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta}$:

$$\begin{aligned} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} &= F_{0\beta} F^{0\beta} + F_{1\beta} F^{1\beta} = F_{01} F^{01} + F_{10} F^{10} \\ &= 2F_{01} F^{01} = 2g_{00} g_{11} (F^{01})^2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

On a : $F_{10} = -F_{01}$ et $F^{10} = -F^{01}$.

On remplace l'équation (3.75) dans l'équation (3.77) et on obtient :

$$F_{\gamma\beta}F^{\gamma\beta} = 2g_{00}g_{11}\frac{q^2(r)}{r^4A(r)B(r)}. \quad (3.78)$$

Dans le cas de la symétrie sphérique, on a :

$$F_{\gamma\beta}F^{\gamma\beta} = -2\frac{q^2(r)}{r^4}. \quad (3.79)$$

On a $u_0u_0 = g_{00}u^0u_0 = -g_{00} = B(r)$, l'équation (3.73) devient :

$$T_{00} = B(r)\left(\frac{1}{8\pi}\frac{q^2(r)}{r^4} + \rho\right). \quad (3.80)$$

On en déduit par l'équation précédente, que :

$$T^{00} = (g^{00})^2 T_{00} = \frac{1}{B(r)}\left(\frac{1}{8\pi}\frac{q^2(r)}{r^4} + \rho\right). \quad (3.81)$$

Pour $\mu = 1$ et $\nu = 1$, on obtient T_{11} :

$$T_{11} = \frac{1}{4\pi}\left(F_1^\gamma F_{1\gamma} - \frac{1}{4}g_{11}F_{\gamma\beta}F^{\gamma\beta}\right) + (\rho + p)u_1u_1 + pg_{11}. \quad (3.82)$$

On calcule le terme $F_1^\gamma F_{1\gamma}$:

$$F_1^\gamma F_{1\gamma} = F_1^0 F_{10} = (g_{11})^2 g_{00} (F^{01})^2 = -A(r)\frac{q^2(r)}{r^4}. \quad (3.83)$$

On a $u_1u_1 = 0$, l'équation (3.82) devient :

$$T_{11} = A(r)\left(p - \frac{1}{8\pi}\frac{q^2(r)}{r^4}\right). \quad (3.84)$$

On en déduit par l'équation précédente, que :

$$T^{11} = (g^{11})^2 T_{11} = \frac{1}{A(r)}\left(p - \frac{1}{8\pi}\frac{q^2(r)}{r^4}\right). \quad (3.85)$$

Pour $\mu = 2$ et $\nu = 2$, on obtient T_{22} :

$$T_{22} = \frac{1}{4\pi} \left(F_2^\gamma F_{2\gamma} - \frac{1}{4} g_{22} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} \right) + (\rho + p) u_2 u_2 + p g_{22}. \quad (3.86)$$

On a $u_2 u_2 = 0$ et $F_2^\gamma F_{2\gamma} = 0$, l'équation (3.86) devient :

$$T_{22} = r^2 \left(p + \frac{1}{8\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} \right). \quad (3.87)$$

On en déduit par l'équation précédente, que :

$$T^{22} = (g^{22})^2 T_{22} = \frac{1}{r^2} \left(p + \frac{1}{8\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} \right). \quad (3.88)$$

Pour $\mu = 3$ et $\nu = 3$, on obtient T_{33} :

$$T_{33} = \frac{1}{4\pi} \left(F_3^\gamma F_{3\gamma} - \frac{1}{4} g_{33} F_{\gamma\beta} F^{\gamma\beta} \right) + (\rho + p) u_3 u_3 + p g_{33}. \quad (3.89)$$

On a $u_3 u_3 = 0$ et $F_3^\gamma F_{3\gamma} = 0$, l'équation (3.89) devient :

$$T_{33} = r^2 \sin^2 \theta \left(p + \frac{1}{8\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} \right). \quad (3.90)$$

On en déduit par l'équation précédente, que :

$$T^{33} = (g^{33})^2 T_{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(p + \frac{1}{8\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} \right). \quad (3.91)$$

On peut calculer la trace du tenseur énergie-impulsion total :

$$\begin{aligned} T &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} T_{00} + g^{11} T_{11} + g^{22} T_{22} + g^{33} T_{33} \\ &= 3p - \rho. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Les composantes non nulles dans les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}$ sont : Pour $\mu = 0$ et $\nu = 0$ on obtient G_{00} :

$$G_{00} = -8\pi T_{00}. \quad (3.93)$$

On remplace l'équation (3.42) et l'équation (3.80) dans l'équation (3.93), on tire que :

$$\frac{d}{dr} (rA^{-1}(r)) = 1 - 8\pi r^2 \left(\rho + \frac{1}{8\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} \right). \quad (3.94)$$

Pour $\mu = 1$ et $\nu = 1$ on obtient G_{11} :

$$G_{11} = -8\pi T_{11}. \quad (3.95)$$

On remplace l'équation (3.43) et l'équation (3.84) dans l'équation (3.95) puis on obtient :

$$\frac{r}{A(r)B(r)} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{1}{A(r)} = 1 + 8\pi r^2 \left(p - \frac{1}{8\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} \right). \quad (3.96)$$

On remplace l'équation (3.60) dans l'équation (3.96), ce qui donne :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) + \frac{q(r)}{r} \frac{dq(r)}{dr}. \quad (3.97)$$

3.3 L'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

A partir de la conservation du tenseur $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ on peut écrire [19] :

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu} = \partial_\nu T^{\nu\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda T^{\mu\nu}. \quad (3.98)$$

Pour $\mu = 1$ et $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} \nabla_1 T^{11} &= \partial_1 T^{11} + \Gamma_{\lambda\nu}^1 T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda T^{1\nu} \\ &= \partial_1 T^{11} + \Gamma_{\lambda\nu}^1 T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda 1}^\lambda T^{11} \\ &= \frac{dT^{11}}{dr} + \Gamma_{\lambda\nu}^1 T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda 1}^\lambda T^{11} = 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

On calcule le terme $\Gamma_{\lambda\nu}^1 T^{\lambda\nu}$:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^1 T^{\lambda\nu} = \Gamma_{00}^1 T^{00} + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} + \Gamma_{33}^1 T^{33}. \quad (3.100)$$

et on calcule aussi le terme $\Gamma_{\lambda 1}^\lambda$:

$$\Gamma_{\lambda 1}^\lambda = \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3. \quad (3.101)$$

On remplace les équations (3.101), (3.100) et (3.85) dans l'équation (3.99). Ce qui donne :

$$\frac{dB(r)}{dr} = \frac{B(r)}{\rho(r) + p(r)} \left[\frac{q(r)}{2\pi r^4} \frac{dq(r)}{dr} - 2 \frac{dp(r)}{dr} \right]. \quad (3.102)$$

On remplace les équations (3.71) et (3.102) dans l'équation (3.96). Ce qui donne :

$$\frac{dp(r)}{dr} = -(\rho(r) + p(r)) \left[\frac{4\pi p(r) r + \frac{m(r)}{r^2} - \frac{q^2(r)}{r^3}}{1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}} \right] + \rho_e \left[\frac{\frac{q(r)}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}}} \right]. \quad (3.103)$$

C'est l'équation de TOV modifiée (avec charge) pour l'étude de l'équilibre d'un fluide électriquement chargé, dans le cadre de la relativité générale. Évidemment, dans la limite non relativiste, l'équation (3.103) se réduit à l'équation d'équilibre classique (3.7).

A l'étude de l'équilibre d'un fluide non chargé $q(r) = 0$, on obtient l'équation de TOV :

$$\frac{dp(r)}{dr} = -(\rho(r) + p(r)) \left[\frac{4\pi p(r) r + \frac{m(r)}{r^2}}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \right]. \quad (3.104)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (3.105)$$

3.4 L'équation d'état

L'équation d'état d'un système à l'équilibre thermodynamique est une relation entre différents paramètres physiques qui détermine son état. Les équations d'état sont généralement restreintes aux phénomènes physiques donnés. Un même corps peut avoir plusieurs équations d'état, comme son état magnétique ou son état thermodynamique. On donne quelques exemples des équations d'état

3.4.1 L'équation d'état d'un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique global

L'équation d'état d'un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique s'écrit :

$$PV = Nk_B T \quad (3.106)$$

telle que :

$$R = k_B N_A \quad (3.107)$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann et R est la constante des gaz parfaits. P est la pression en Pa , V est le volume du gaz en m^3 , T est la température de ce gaz en Kelvin et N_A est le nombre d'Avogadro.

Une expression équivalente de l'équation d'état est :

$$PV = nRT \quad (3.108)$$

où n représente le nombre de moles du gaz considéré.

3.4.2 Équation d'état de Van der Waals

L'équation d'état des gaz parfaits ne permet pas de rendre compte de certaines propriétés cruciales, parce que le fluide peut exister à l'état liquide et à l'état gazeux.

L'équation d'état de Van der Waals est l'équation d'état la plus simple, permettant d'expliquer l'existence de deux états différents pour le fluide. Elle s'écrit comme suit [79] :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT. \quad (3.109)$$

Dans cette équation, des corrections sont effectuées sur la pression et sur le volume à l'aide de deux coefficients a et b : b , appelé le covolume ou le volume moléculaire propre ; il est lié au rayon r des molécules :

$$b = \frac{4\pi}{3} N_A r^3. \quad (3.110)$$

Le terme $\frac{n^2 a}{V^2}$ correspond à une pression et le terme nb correspond au volume intrinsèque occupé par les N molécules du fluide considéré.

Les paramètres b et a dépendent donc de la nature du fluide considéré. Ils peuvent dans le cas général, être des fonctions plus ou moins compliquées des autres grandeurs thermodynamiques.

3.4.3 Équation d'état du viriel

L'équation du viriel est une équation d'état pour les gaz réels. Elle s'écrit sous forme d'un développement en série de $\frac{PV_m}{RT}$ en fonction des puissances de $\frac{1}{V_m}$ comme suit [80], [81] :

$$Z = \frac{PV_m}{RT} = 1 + \frac{B_1}{V_m} + \frac{B_2}{(V_m)^2} + \frac{B_3}{(V_m)^3} + \dots, \quad (3.111)$$

où Z est le facteur de compressibilité et V_m est le volume molaire.

Les valeurs des coefficients B_1, B_2, B_3, \dots étant choisies de façon que l'équation cadre avec les données expérimentales.

3.4.4 L'équation d'état polytropique

Un polytrophe est défini par le fait que son équation d'état ne dépend pas explicitement de sa température, souvent par relation adiabatique.

L'équation d'état polytropique s'écrit comme [82] :

$$p = \omega \rho^\gamma, \quad (3.112)$$

ω est une constante, ainsi que γ , qui est appelé exposant adiabatique, définie par :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (3.113)$$

alors que la quantité n est l'indice polytropique.

La densité de charge est proportionnelle à la densité d'énergie :

$$\rho_e(r) = \alpha \rho(r), \quad (3.114)$$

où α est une constante de la fraction de charge, qui est a-dimensionnelle dans les unités géométriques.

Le gaz obéissant à une équation d'état de cette forme est appelé le gaz polytropique. Des exemples de type de gaz polytropique sont donnés à partir de la valeur de γ [82] :

Pour $\gamma = 5/4$, le type de gaz polytropique est non relativiste, gaz complètement dégénéré.

Pour $\gamma = 4/3$, le type de gaz polytropique est relativiste, gaz complètement dégénéré.

Pour $\gamma = 1$, le type de gaz polytropique est un gaz isotherme.

Notons que, comme cité dans les références [77, 83], pour $n < 5$, l'étoile polytropique a un rayon fini, sa masse est compatible avec la régularité au centre et que la densité de l'étoile tend vers zéro à une certaine valeur de son rayon. Ceux-ci ont motivé le choix des deux valeurs $n = 3$ et $n = 4$ correspondant respectivement à $\gamma = 5/4$ et $\gamma = 4/3$ dans notre travail.

Chapitre 4

STRUCTURES STELLAIRES CHARGÉES

4.1 Introduction

En général, les théories alternatives de la gravité sont testées en étudiant la formation et l'évolution des étoiles. Dans ce contexte, nous visons à étudier les propriétés des étoiles compactes électriquement chargées dans le cadre de la gravité $f(R)$. En réalité, les étoiles compactes sont des objets bien étudiés dans la littérature [84]. Chandrasekhar a montré que les naines blanches sont des étoiles compactes dans lesquelles la dégénérescence quantique des électrons est responsable de leur stabilité. Ces étoiles sont froides et leur configuration deviennent plus compacte à mesure que les électrons deviennent de plus en plus relativistes et le rayon peut tendre presque vers zéro (quelques kilomètres pour certaines étoiles à neutrons).

4.2 La limite de Buchdahl

Le théorème de Buchdahl est l'inégalité que doit satisfaire la masse et le rayon d'un objet à symétrie sphérique, d'après les lois de la relativité générale, pour pouvoir adopter une configuration statique. Le théorème de Buchdahl est aussi désigné comme l'inégalité de Buchdahl et comme la limite de Buchdahl.

La limite de Buchdahl est une limite intéressante et importante dans la théorie des

étoiles compactes. Elle a été établie pour une sphère fluide parfaite de rayon R et de masse M . Cette limite est également modifiée lorsque la charge électrique est ajoutée aux particules de matière, pour les sphères chargées. L'analogie de la limite de Buchdahl a été travaillée en premier par Yu, Y.Q. et co [85].

En relativité générale, le rapport masse-rayon d'une étoile a une signification physique, en particulier pour un système isolé. Buchdahl a obtenu une valeur maximale du rapport masse-rayon d'une étoile statique à symétrie sphérique sous les hypothèses physiques suivantes [85-88] :

1. Il n'y a pas de trou noir.
2. La constitution de l'étoile est un fluide parfait.
3. La densité en tout point de l'étoile est une fonction (du rayon) positive et décroissante de manière monotone.
4. Une solution intérieure de l'étoile correspond parfaitement à une solution extérieure, c'est-à-dire la solution de Schwarzschild (conditions de raccordement).

A l'intérieur d'une étoile, une fonction de masse $m(r)$ peut être définie [90]. Buchdahl a dérivé des inégalités limitant le comportement de la masse pour les solutions avec un centre régulier (c.a.d. sans singularité) [91] :

$$m \geq \frac{4}{3}\pi r^3 \rho. \quad (4.1)$$

$$m \leq \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c. \quad (4.2)$$

$$0 \geq 9 \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^2 + \frac{4Gm}{c^2 r} (6\pi r^2 p - 1) + 4\pi r^2 p (4\pi r^2 p - 2), \quad (4.3)$$

où ρ_c est la densité d'énergie au centre de l'étoile [86, 92]. Alternativement, (4.3) peut être écrite comme :

$$\frac{Gm}{c^2 r} \leq \frac{2}{9} \left(1 - 6\pi r^2 p + \sqrt{1 + 6\pi r^2 p} \right). \quad (4.4)$$

Ces inégalités sont satisfaites par toutes les solutions régulières, mais sont des égalités seulement pour le fluide incompressible. Pour de tels modèles, (4.1) et (4.2) caractérisent les solutions régulières, tandis que (4.3) correspond à une certaine solution non régulière

avec une singularité de masse positive.

Un modèle de fluide parfait à symétrie sphérique statique, s'il doit s'appliquer à une étoile, doit avoir un rayon fini.

A la surface de l'étoile (de rayon donné), où la pression du fluide s'annule, la solution intérieure peut être raccordée à la solution statique de Schwarzschild (1.30).

Si (4.4) est évaluée à la surface de l'étoile, défini par $p = 0$, on obtient [86] :

$$\frac{2GM}{c^2 R} \preceq \frac{8}{9}. \quad (4.5)$$

Un objet qui ne vérifie pas cette relation s'effondre gravitationnellement.

4.3 La limite de Chandrasekhar

En 1931, Chandrasekhar a travaillé sur la masse maximale des naines blanches pour la compréhension de la nature et de la structure des étoiles compactes [93]. En utilisant une équation d'état relative à une étoile froide dans laquelle la dégénérescence de pression des électrons est la forme de pression la plus pertinente pour le maintien d'une naine blanche contre l'effondrement gravitationnel, une relation rayon-masse de ces étoiles a été déduite[94]. Il a trouvé que lorsque le rayon de l'étoile s'approchait de zéro, la masse allait à une valeur maximale de $1.4M_{\odot}$, où M_{\odot} est la masse du soleil [94]. C'est la limite de Chandrasekhar.

Nous avons utilisé l'équation de Lane-Emden dans l'équation (3.24) et la constante ε , définie dans l'équation (3.23) :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\omega(n+1)\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}}. \quad (4.6)$$

Pour $n = 3$, l'équation précédente devient :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\omega\rho_c^{-\frac{2}{3}}}{\pi G}} \Rightarrow \varepsilon^3 = \rho_c^{-1} \left(\frac{\omega}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.7)$$

La masse correspondant à cette configuration polytropique peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} M_3 &= \int \int \int \rho(r) d^3r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_{max}} \rho(r) \sin\theta dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^{z_{max}} \rho_c K^3(\varepsilon z)^2 \varepsilon dz \\ &= 4\pi \rho_c \varepsilon^3 \int_0^{z_{max}} \left[-\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dK}{dz} \right) \right] dz = 4\pi \rho_c \varepsilon^3 \left[-z^2 \frac{dK}{dz} \right]_0^{z_{max}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Rappelons que $r = z\varepsilon$ et

$$K(z) = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (4.9)$$

La pression en fonction de la densité est obtenue en combinant l'équation suivante [95]

$$p = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n^{4/3} = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{m_H \bar{\mu}_e} \right)^{4/3}, \quad (4.10)$$

où m_H est la masse de l'atome d'hydrogène et $\bar{\mu}_e$ est la masse moléculaire moyenne, définie comme :

$$\frac{1}{\bar{\mu}_e} = \sum_i \frac{m_H}{m_e} n_i^e = \sum_i \frac{m_H}{m_e} \frac{\rho_i^e}{\rho}. \quad (4.11)$$

On peut écrire [95] :

$$p = 1.25 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{4/3}. \quad (4.12)$$

Par identification avec l'équation $p = \omega \rho^{4/3}$, on trouve :

$$\omega = \frac{1.25 \times 10^{15}}{\bar{\mu}_e^{4/3}}. \quad (4.13)$$

L'équation (4.8) peut donc s'écrire :

$$M_3 = 4\pi \left(\frac{1.25 \times 10^{15}}{\bar{\mu}_e^{4/3}} \right)^{\frac{3}{2}} \left[-z^2 \frac{dK}{dz} \right]_0^{z_{max}}. \quad (4.14)$$

Le terme entre parenthèses peut être évalué numériquement [96] :

$$\left[-z^2 \frac{dK}{dz} \right]_0^{z_{max}} = 2.02. \quad (4.15)$$

Donc la masse totale est [95] :

$$M_3 = \frac{5.81}{\bar{\mu}_e} M_\odot. \quad (4.16)$$

Pour une étoile avec dégénérescence de la matière relativiste, il convient de définir la densité de la matière, due essentiellement aux ions, comme $\rho = m_H \mu_e n_e$. En considérant la contribution de l'hydrogène H , de l'hélium He et des éléments de masse atomique Z supérieure à 4, l'équation (4.11) devient [95] :

$$\frac{1}{\bar{\mu}_e} = \frac{\rho_H}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{He}}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\rho_Z}{\rho}. \quad (4.17)$$

La conservation de la masse impose que :

$$\frac{\rho_H}{\rho} + \frac{\rho_{He}}{\rho} + \frac{\rho_Z}{\rho} = 1 \Rightarrow \frac{\rho_Z}{\rho} = 1 - \frac{\rho_H}{\rho} - \frac{\rho_{He}}{\rho}. \quad (4.18)$$

On remplace l'équation (4.18) dans l'équation (4.17) et on obtient :

$$\bar{\mu}_e = \frac{2}{1 + \frac{\rho_H}{\rho}}. \quad (4.19)$$

Vers la fin de leur cycle de vie, les étoiles qui subissent une dégénérescence relativiste extrême de la matière sont très évoluées, c'est à dire la plus grande partie de leur combustible d'hydrogène a été brûlée. Donc [95] :

$$\frac{\rho_H}{\rho} \approx 0 \Rightarrow \bar{\mu}_e \approx 2. \quad (4.20)$$

Finalement, nous combinons ce résultat avec l'équation (4.16) pour obtenir la limite de masse de Chandrasekhar :

$$M_{ch} = 1.45 M_\odot. \quad (4.21)$$

En utilisant la gravitation newtonienne, Landau dans la référence [97], a trouvé que la limite de masse pour les naines blanches pouvait être écrite comme [94] :

$$M \sim \frac{M_{pl}^3}{m_n^2}, \quad (4.22)$$

où m_n est la masse de proton ou le neutron et M_{pl} est la masse de Planck :

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\hbar} \text{ (en unités géométriques).}$$

L'estimation numérique de la masse M de l'étoile, donne la masse limite de Chandrasekhar $M \sim 1M_{\odot}$ [94].

Les corps froids comme les naines blanches ne peuvent pas dépasser la masse limite de Chandrasekhar, mais les corps chauds comme les étoiles à neutrons encore soumis à des réactions nucléaires peuvent dépasser la limite de Chandrasekhar, parce qu'elles compensent leur compression gravitationnelle par la pression thermique et aussi ses pertes par rayonnement sont compensées par l'énergie produite par les réactions nucléaires. L'étoile à neutron qui dépasse la limite de Chandrasekhar s'effondre puisque la pression des électrons dégénérés relativistes n'est pas suffisante pour contrer la gravitation [98].

Par la suite, Oppenheimer et Volkoff [99] ont proposé une limite de $0.7M_{\odot}$ de l'étoile à neutrons en considérant un gaz neutronique complètement dégénéré. Cependant, cette approche est inappropriée en raison des forces nucléaires fortes attractives des neutrons et d'autres interactions fortes des hadrons lourds dans la matière dense.

4.4 La limite d'Oppenheimer-Volkoff

Le calcul d'une masse maximale exacte d'une étoile à neutrons dépend de notre connaissance de l'équation d'état de la matière neutronique jusqu'à des densités très élevées $\rho \sim 5 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ [100].

En 1939, Oppenheimer et Volkoff ont estimé la masse maximale théorique que peut avoir une étoile à neutrons d'environ $1.5M_{\odot}$ à $3M_{\odot}$ [101]. C'est la limite d'Oppenheimer-Volkoff qui joue un rôle central dans l'étude théorique des états finaux de l'évolution stellaire. Au delà de cette valeur, l'objet s'effondre en trou noir.

Il existe une limite ultime pour la pression, dans une étoile froide, qui compense les effets de sa gravitation. Dans un milieu de densité ρ et de pression p , cela impose que : $p \leq \rho c^2$. Le théorème du viriel [102] appliqué à un tel corps stipule que son énergie potentielle gravitationnelle doit être inférieure au triple de l'énergie de masse de l'étoile mais l'égalité marque l'effondrement [98].

La masse maximum d'un corps froid est la limite de masse de Landau-Oppenheimer-

Volkoff, donnée comme suit [98] :

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 3Mc^2. \quad (4.23)$$

Le rayon R d'un système de N fermions de masse μ est donné par la relation suivante :

$$R = \frac{N^{-1/3} \hbar^2}{2G\mu^3}. \quad (4.24)$$

la masse du système est égale à :

$$M = N\mu. \quad (4.25)$$

Pour des protons, la relation précédente conduit à [98] :

$$N_{LOV} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3/4} N_c, \quad (4.26)$$

où :

$$N_c = \left(\frac{\hbar c}{Gm_p^2}\right)^{3/2}, \quad (4.27)$$

correspondant à une masse d'environ $3.7M_\odot$.

La valeur limite d'Oppenheimer-Volkoff (OV) est à comparer avec la limite de Chandrasekhar pour les naines blanches.

4.5 L'équilibre hydrostatique d'une étoile chargée

4.5.1 Description d'une étoile en symétrie sphérique

On considère un petit élément cylindrique entre le rayon r et le rayon $r + dr$ dans l'étoile. Les forces agissant sur cet élément sont : la pression F_p , la force de gravité F_g et la force électrique F_c . On a :

$$F_p = -\frac{dP(r)}{dr} sdr. \quad (4.28)$$

$$F_g = -\frac{Gm(r)}{r^2} dm(r). \quad (4.29)$$

$$F_c = \frac{Q(r) dq(r)}{r^2}. \quad (4.30)$$

On applique la deuxième loi de Newton $\vec{F} = m \vec{a}$ sur le cylindre :

$$-\frac{dP(r)}{dr} drs - \frac{Gm(r)}{r^2} dm(r) + \frac{Q(r) dq(r)}{r^2} = 0, \quad (4.31)$$

où

$$dq(r) = q_0 \rho_c(r) drs, \quad (4.32)$$

et

$$dm(r) = \rho_c(r) drs. \quad (4.33)$$

On remplace les équations (4.32) et (4.33) dans (4.31), on obtient :

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho_c(r) + \frac{Q(r) q_0 \rho_c(r)}{r^2}. \quad (4.34)$$

C'est l'équation de l'équilibre hydrostatique d'une structure stellaire chargée. Comme :

$$\Phi = \frac{Gm(r)}{r}. \quad (4.35)$$

L'équation de l'équilibre hydrostatique d'une structure stellaire chargée peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{d\Phi(r)}{dr} \rho_c(r) + \frac{Q(r) q_0 \rho_c(r)}{r^2}, \quad (4.36)$$

4.5.2 Couplage à la matière

Le lagrangien qui couple les champs de matière, peut s'écrire comme [103, 104] :

$$L_{EM} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (4.37)$$

où j^μ est une fonction des champs de matière et

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu. \quad (4.38)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{\partial^2}{\partial x^\nu x_\mu} A^\nu - \frac{\partial^2}{\partial x^\nu x_\nu} A^\mu. \quad (4.39)$$

On impose la condition de jauge de Lorentz :

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (4.40)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\nu x_\nu} A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.41)$$

Donc, les équations du mouvement s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.42)$$

En d'autres termes, j^μ doit être un courant conservée.

4.5.3 Les équations de champ dans la gravité $f(R)$

La modification de l'action d'Einstein Hilbert devient :

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \chi (L_m + L_{EM})]. \quad (4.43)$$

Du principe d'action, nous obtenons les équations de champ par la variation :

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \left[\int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \chi (L_m + L_{EM})] \right] \\ &= \delta S + \delta S_m + \delta S_{EM} = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

On pose :

$$S_{EM} = \int d^4x \sqrt{-g} \chi L_{EM}. \quad (4.45)$$

A partir de la relation δS_{EM} on a :

$$\delta S_{EM} = \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) \chi L_{EM} + \int d^4x \sqrt{-g} \chi \delta L_{EM}. \quad (4.46)$$

On pose :

$$\delta S_{EM-1} = \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) \chi L_{EM}. \quad (4.47)$$

$$\delta S_{EM-2} = \int d^4x \sqrt{-g} \chi \delta L_{EM}. \quad (4.48)$$

Rappelons que :

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

On remplace les équations (4.37) et (4.49) dans l'équation (4.47), on obtient :

$$\delta S_{EM-1} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \chi \left(\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right), \quad (4.50)$$

On remplace les équations (4.37) dans l'équation (4.48), on obtient :

$$\delta S_{EM-2} = - \int d^4x \sqrt{-g} \chi \left[\frac{1}{4\pi} \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \delta (j^\mu A_\mu) \right]. \quad (4.51)$$

On a :

$$\delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = 2 \left(2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right). \quad (4.52)$$

L'équation (4.52) devient :

$$\delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{16\pi}{c} j^\mu \delta A_\mu. \quad (4.53)$$

Si on introduit les quadri-vecteurs $j^\mu = (j^0, \vec{j})$ et $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla} \right)$, on peut l'exprimer sous une forme covariante :

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.54)$$

On peut écrire :

$$\delta (j^\mu A_\mu) = j^\mu \delta A_\mu. \quad (4.55)$$

On remplace les équations (4.53) et (4.55) dans l'équation (4.51), on obtient :

$$\delta S_{EM-2} = - \int d^4x \sqrt{-g} \chi \left[-\frac{4}{c} + 1 \right] j^\mu \delta A_\mu. \quad (4.56)$$

Rappelons que :

$$F_{\gamma\beta}F^{\gamma\beta} = -2\frac{q^2(r)}{r^4}. \quad (4.57)$$

On remplace les équations (4.51), (4.57) et (4.50) dans l'équation (4.46), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta S_{EM} = & \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \chi \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{q^2(r)}{r^4} + \frac{1}{2} j^\mu A_\mu \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & - \int d^4x \sqrt{-g} \chi \left[-\frac{4}{c} + 1 \right] j^\mu \delta A_\mu. \end{aligned} \quad (4.58)$$

On peut écrire la variation de l'action δA , comme suit :

$$\begin{aligned} \delta A = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(R) R_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \chi T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \chi \left(-\frac{1}{4\pi} g_{\mu\nu} \frac{q^2(r)}{r^4} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} j^\mu A_\mu \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & - \int d^4x \sqrt{-g} \chi \left[-\frac{4}{c} + 1 \right] j^\mu \delta A_\mu. \end{aligned} \quad (4.59)$$

D'autre part :

$$\delta A_\mu = \delta(g_{\mu\nu} A^\nu) = A^\nu \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta A^\nu. \quad (4.60)$$

On a :

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu}. \quad (4.61)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} \quad (4.62)$$

et

$$\delta A^\nu = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu A^\sigma dx^\nu. \quad (4.63)$$

Du principe de l'action minimale, nous obtenons les équations de champ par la variation $\delta A = 0$.

4.6 Les équations d'équilibre dans la théorie étendue de la gravité

L'expression de la gravité $f(R)$ donne les équations qui étendent celles trouvées dans la relativité générale, comme dans la référence [82]. Ces équations, avec l'équation de Maxwell, peuvent être écrites explicitement comme :

$$\frac{dq}{dr} = \frac{4\pi\rho_e r^2}{\sqrt{a}}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{2aR'}{r} + aR'' + \frac{a'R'}{2} - \frac{R^2}{4} + \frac{aRB''}{2B} + \frac{a'RB'}{4B} - \frac{aRB'^2}{4B^2} + \frac{aRB'}{rB} \right) \beta + 1 - a - a'r \\ = 8\pi r^2 \rho_m + \frac{q^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{R^2}{4} - \frac{aRB''}{2B} - \frac{a'RB'}{4B} + \frac{aRB'^2}{4B^2} - \frac{aR'B}{2B} - \frac{a'R}{r} - \frac{2aR'}{r} \right) \beta - 1 + a + \frac{arB'}{B} \\ = 8\pi r^2 p - \frac{q^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{R^2}{4} - aR'' - \frac{a'R'}{2} - \frac{aR'B'}{2B} + \frac{R}{r^2} - \frac{a'R}{2r} - \frac{aRB'}{2rB} - \frac{aR'}{r} - \frac{aR}{r^2} \right) \beta + r \left(\frac{a'}{2} - \frac{aB'}{2B} \right) \\ + r^2 \left(\frac{aB''}{2B} + \frac{a'B'}{4B} - \frac{aB'^2}{4B^2} \right) = 8\pi r^2 p + \frac{q^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Notez que le symbole ' désigne une dérivée par rapport à r .

Chapitre 5

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION

5.1 Les équations de TOV dans la théorie étendue de la gravité

Ce travail a fait l'objet d'une communication à Khenchela [1].

On va retrouver les étapes de calcul du système d'équations apparu dans l'article de [82], (dans le cadre de RG), en fonction des variables sans dimension pour les besoins de notre calcul numérique (Voir l'appendice C). A noter que due à la complexité des équations dans le cadre de la gravité $f(R)$, les équations a-dimensionnelles dans notre travail ont été trouvées à l'aide du logiciel Maple 2016.

Par souci de simplicité, nous allons omettre d'écrire la dépendance radiale de toutes les fonctions de r .

A partir des identités de Bianchi : $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, il en résulte que [75, 82, 5, 86, 104] :

$$B' = \frac{qBq'}{2r^4\pi(p + \rho m)} - 2\frac{Bp'}{p + \rho m}. \quad (5.1)$$

La dérivée de l'équation ci-dessus est :

$$B'' = -\frac{B((4r^5\pi p'' - qrq'')(p + \rho) + q(\rho'r + rp' + 4p + 4\rho m)q' - 4r^5\pi p'(p' + \rho'))}{2r^5\pi(p + \rho)^2} \quad (5.2)$$

Nous substituons ces deux équations dans la première équation de la théorie de la gravité $f(R)$ et nous obtenons l'équation étendue de TOV dans la théorie de la gravité $f(R)$:

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{B((4r^5\pi p'' - qrq'')(p + \rho) + q(\rho'r + rp' + 4p + 4\rho)q' - 4r^5\pi p'(p' + \rho'))}{8r^3\pi(p + \rho)^2} AB \right. \\
& \left. -\frac{B^2(4p'r^4\pi - qq')^2 A}{32r^6\pi^2(p + \rho)^2} - \frac{rB^2(rA' - 4A)}{8(p + \rho)} \left(\frac{qq'}{2r^4\pi} - 2p' \right) - \frac{B^2}{2}(A^2 + rA' - A) \right] \\
& \left[-\frac{B((4r^5\pi p'' - qrq'')(p + \rho) + q(\rho'r + rp' + 4p + 4\rho)q' - 4r^5\pi p'(p' + \rho'))}{2r^3\pi(p + \rho)^2} AB\beta \right. \\
& \left. -\frac{AB^2(4p'r^4\pi - qq')^2 \beta}{8r^6\pi^2(p + \rho m)^2} - \frac{B^2\beta r(rA' + 4A)}{2(p + \rho)} \left(\frac{qq'}{2r^4\pi} - 2p' \right) \right. \\
& \left. + (-2r\beta A' + ((2r^2 + 2\beta)A - 2\beta)A) B^2 \right] = A^4 B^4 (8p\pi r^4 - q^2). \quad (5.3)
\end{aligned}$$

5.2 Les conditions aux limites

On a :

$$p(r) = \omega(\rho(r))^\gamma. \quad (5.4)$$

$$\rho_e(r) = \alpha\rho(r). \quad (5.5)$$

En utilisant les équations(5.4-5.5) avec les trois équations (4.65-4.67) dans la théorie étendue de la gravité et l'équation de Maxwell, nous avons un système de six équations à résoudre pour trouver les six variables inconnues : $q(r)$, $m(r)$, $B(r)$, $\rho(r)$, $\rho_e(r)$ et $p(r)$. De plus, pour obtenir un système approprié qu'on peut résoudre numériquement, nous adoptons le système d'équations suivant, déduit des équations (4.64-4.67) de manière à éliminer la dérivée seconde de R :

$$\frac{dq}{dr} = \frac{4\pi\alpha r^2}{\sqrt{a}} \left(\frac{p}{\omega} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (5.6)$$

$$m(r) = \frac{1}{2}(1 - a)r + \frac{1}{2}\frac{q^2}{r}, \quad (5.7)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}wp - \left(\frac{p}{\omega} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{w}{2} - \frac{\alpha q}{r^2\sqrt{a}} \right), \quad (5.8)$$

$$\frac{dR}{dr} = [2r^3\beta a(wr + 4)]^{-1} [4r^2(R\beta + 1)(wr + 1)a - \beta R^2 r^4 - 32\pi p r^4 - 4\beta R r^2 - 4r^2 + 4q^2], \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} = & [12ar^4(\beta R + 1)]^{-1} [-3\beta r^5 w R^2 - 2r^5 R w + 32\pi r^5 w \left(\frac{p}{\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 12\beta r^3 R w (a + 1) \\ & - 12ar^3 w + 12r w q^2 - 12w r^3 + 6\beta r^4 R^2 + 192\pi p r^4 + 128\pi r^4 \left(\frac{p}{\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 4r^4 R + 24q^2], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dr} = & - [6r^3 (wr + 4) (\beta R + 1)]^{-1} [32\pi r^4 (wr + 4) \left(\frac{p}{\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 6r^4 a (\beta R + 1) w^2 \\ & - 3r w \left(\beta r^4 R^2 + \frac{2}{3} r^2 R (r^2 - 6\beta a + 6\beta) - 4(ar^2 - r^2 + q^2) \right) \\ & - 6\beta r^4 R^2 - 8r^2 R (r^2 - 3\beta a + 3\beta) + 192\pi p r^4 + 24(ar^2 - r^2 + q^2)], \end{aligned} \quad (5.11)$$

où

$$w = d \ln B / dr.$$

Ici, il faut mentionner que β doit être différent de 0 dans l'équation (5.9) en conséquence des combinaisons de notre système d'équations différentielles.

Cependant, si nous voulons récupérer les résultats trouvés dans le cas de la relativité générale [82], nous devons recompiler le programme à partir de l'ensemble initial d'équations (4.65-4.67).

Les équations différentielles de structure stellaire sont intégrées numériquement du centre à la surface de l'étoile. Nous devons établir des conditions initiales et limites, donc nous mettons : $m(r = 0) = 0$, $q(r = 0) = 0$, $p(r = 0) = p_c$, $\rho(r = 0) = \rho_c$, $\rho_e(r = 0) = \rho_{ec}$.

Avant de procéder aux calculs numériques, notre ensemble des équations différentielles est transformé en une forme a-dimensionnelle (voir les équations 5.12- 5.18) et complété par les conditions aux limites pertinentes suivantes :

$$u(0) = 31.62, \theta(0) = 1, a(0) = 1, w(0) = 1, R(0) = 0.$$

Notez que la valeur initiale de $u(\epsilon)$ peut prendre n'importe quelle valeur arbitraire en raison de la forme de l'équation : $q(r) = (4\pi\rho_{cr})^{-1/2}\epsilon^2 u(\epsilon)$.

De plus, en raison des rigidités des équations et pour éviter les problèmes de singularité lors de l'intégration (en raison notamment des limites de la machine), les conditions initiales sont démarrées légèrement au-dessus du centre de la sphère.

Le rayon R_s de l'étoile compacte est atteint quand le programme numérique atteint la condition $p(R_s) = 0$, à la surface de l'étoile. La solution intérieure est connectée à la métrique extérieure de Reissner-Nordström, d'une manière lisse, par la condition aux limites

suivante :

$$a(R_s) = [A(R_s)]^{-1} = 1 - \frac{2M}{R_s} + \frac{Q^2}{R_s^2} = -B(R_s),$$

avec M étant la masse totale de l'étoile compacte et Q sa charge totale.

5.3 Les conditions de jonction ou raccordement

Les conditions de jonction pour les théories de la gravité $f(R)$, sont les conditions généralisées d'Israël [105, 106]. Ces conditions de jonction sont nécessaires pour construire des modèles globaux des étoiles, des galaxies ..etc. L'application des conditions de jonction est une question clé dans toute théorie gravitationnelle visant à décrire de manière satisfaisante, entre autres choses, des configurations stellaires ou des corps effondrés, où une région du vide entoure un corps fini en équilibre et aussi des couches de matières [106, 107].

Les étoiles relativistes dans les gravités modifiées ont été étudiées dans la littérature [108, 109, 110]. On a fait valoir que les étoiles relativistes compactes sont difficiles à exister en raison de la divergence de la courbure scalaire R à l'intérieur de l'étoile dans $f(R)$ [109]. Cependant, l'équation d'état réaliste dans le modèle d'énergie sombre de Starobinsky [39] a été construite dans [111, 112], dans lequel R ne diverge pas à l'intérieur de l'étoile, de sorte que les étoiles relativistes peuvent apparaître dans $f(R)$ [113].

L'étude géométrique pure est formulée dans [114], ce qui impose les conditions de jonction dans $f(R)$ [115, 116] comme conditions supplémentaires pour résoudre les équations de structure couplées et obtenir le résultat final indirectement, en profitant de l'équivalence conforme des théories de la gravité $f(R)$ avec la relativité générale couplée à un champ scalaire, est fait la généralisation les conditions de jonction d'Israël pour cette classe de théories par intégration directe des équations de champ.

5.4 Équations relativistes a-dimensionnelles polytropiques

Pour les calculs numériques, les équations relativistes polytropiques doivent être écrites sous forme a-dimensionnelle (voir les détails de calculs dans l'appendice C dans le cas relativité générale). Pour cela, nous présentons la charge, la masse, la pression, le rayon

de l'étoile en fonction de la coordonnée radiale a-dimensionnelle ϵ donnés par :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\epsilon}{\sqrt{4\pi\rho_c}}, & q(r) &= \frac{\epsilon^2 u(\epsilon)}{\sqrt{4\pi\rho_c}}, & m &= \frac{v(\epsilon)}{\sqrt{4\pi\rho_c}}, \\ p(r) &= \omega\rho_c^\gamma\theta(\epsilon), & R(r) &= 4\pi\rho_c R(\epsilon), & w(r) &= \sqrt{4\pi\rho_{cr}}w(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Avec ces paramétrisations, le système d'équations a-dimensionnelles est :

$$\frac{du}{d\epsilon} = \frac{\alpha\theta^{\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{a}} - \frac{2u}{\epsilon}, \quad (5.13)$$

$$v = \frac{\epsilon}{2}(\epsilon^2 u^2 - a + 1), \quad (5.14)$$

$$\frac{d\theta}{d\epsilon} = -\frac{w\theta}{2} - \frac{\rho_{cr}^{1-\gamma}\theta^{\frac{1}{\gamma}}w}{2\omega} + \frac{\alpha u\rho_{cr}^{1-\gamma}\theta^{\frac{1}{\gamma}}}{\omega\sqrt{a}}, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\epsilon} &= -[2\pi\epsilon\rho_{cr}\beta a(w\epsilon + 4)]^{-1} \times [2\epsilon^2\theta\rho_{cr}^{\gamma-1}\omega \\ &\quad - a(4\pi\rho_{cr}R\beta + 1)(w\epsilon + 1) + \beta\pi\rho_{cr}R^2\epsilon^2 + 4\pi\rho_{cr}\beta R - \epsilon^2 u^2 + 1], \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\epsilon} &= -[\epsilon(12\pi\rho_{cr}R\beta + 3)(w\epsilon + 4)]^{-1} [4\epsilon^2(\epsilon w + 4)\theta^{\frac{1}{\gamma}} + 24\epsilon^2\rho_{cr}^{\gamma-1}\omega\theta + 12a\epsilon^2 \times \\ &\quad \left(\pi\rho_{cr}R\beta + \frac{1}{4}\right)w^2 - 6\left(\beta R^2\epsilon^2\pi\rho_{cr} + \left(\frac{\epsilon^2}{6} - 4\beta\pi\rho_{cr}(a-1)\right)R - \epsilon^2 u^2 - a + 1\right)\epsilon w \\ &\quad - 12(\beta R^2\epsilon^2\pi\rho_{cr} - \epsilon^2 u^2 - a + 1)(48\beta\pi\rho_{cr}(a-1) - 4\epsilon^2)R], \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\epsilon} &= [24\left(\pi\rho_{cr}R\beta + \frac{1}{4}\right)\epsilon a]^{-1} [4\epsilon(w\epsilon + 4)\theta^{1/\gamma} + 24\rho_{cr}^{\gamma-1}\omega\theta\epsilon \\ &\quad - 6\left(\beta R^2\epsilon^2\pi\rho_{cr} + \left(4\beta\pi(a+1)\rho_{cr} + \frac{\epsilon^2}{6}\right)R - \epsilon^2 u^2 + a + 1\right)w \\ &\quad + 12\epsilon\rho_{cr}\left(\beta\pi\rho_{cr}R^2 + u^2 + \frac{R}{6}\right)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Les conditions aux limites de ces équations a-dimensionnelles sont au centre, pour $\epsilon = 0$, $u(0) = 31.62$, $v(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, $a(0) = 0$, $w(0) = 1$, $R(0) = 0$ et à la surface de l'étoile, pour une certaine valeur ϵ_s (correspondant au rayon de l'étoile R_s), la valeur de la pression normalisée θ s'annule : $\theta(\epsilon_s) = 0$. Mais, à des fins numériques, nous avons choisi une certaine petite valeur de la pression pour que le programme numérique s'arrête lorsque la pression devient négative ou inférieure à cette valeur choisie : $\theta(\epsilon_s) = 10^{-10}$.

5.5 Relation Masse-Rayon pour une étoile chargée

Nous présentons maintenant la structure des sphères chargées constituées des fluides polytropiques pour l'exposant polytropique γ et pour différentes valeurs de la fraction de charge α .

Dans le but de tester nos programmes numériques, nous avons pu vérifier tous les graphes donnés dans [82] et tracer de nouveaux graphes pour un exposant polytropique donné $\gamma = 1.5$, à l'aide du logiciel Maple 2016.

Dans la figure 5.1, on a tracé le rayon des sphères résultantes en fonction de la masse normalisée à la masse du Soleil M_{\odot} , pour $\gamma = 1.5$ et pour quelques valeurs de la fraction de charge. Les densités d'énergie centrales considérées se situent dans l'intervalle $[10^{13}, 10^{20}]Kg/m^3$, qui correspondent réellement à l'ordre de grandeur des étoiles compactes (à neutrons), cet intervalle est choisi pour pouvoir comparer l'effet de $f(R)$ par rapport aux résultats de la relativité générale. Nous obtenons les graphes suivants montrés dans la figure 5.1 ci-dessous. Nous pouvons voir clairement la limite de masse d'Oppenheimer-Volkoff dans ces figures.

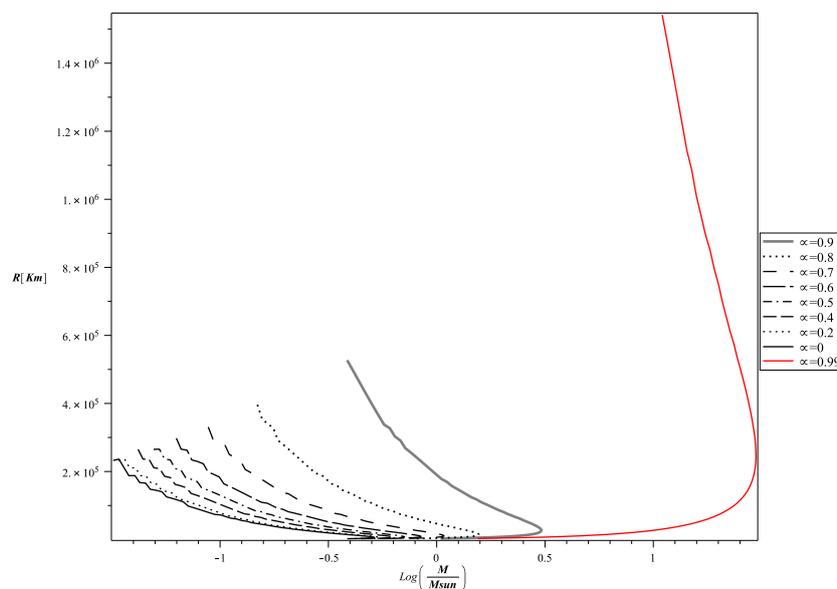


FIGURE 5.1 – Le rayon des sphères résultantes en fonction de la masse pour $\gamma = 1.5$, pour quelques valeurs de la fraction de charge α . Nous considérons les densités d'énergie centrale dans l'intervalle $[10^{13}, 10^{20}]kg/m^3$.

5.6 Simulation

En suivant la référence [82], nous restituons la valeur de la constante gravitationnelle à $G = 7.42611 \times 10^{-28} m/kg$, en gardant $c = 1$ pour obtenir des résultats dans des unités appropriées. Pour résoudre l'ensemble des équations différentielles, nous utilisons la méthode de Runge-Kutta du 4ème ordre et dans certains cas où on a rencontré des singularités, nous avons fait appel à la méthode Rosenbrock fournie par le logiciel Maple 2016.

Dans notre programme numérique, nous choisissons les énergies centrales dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$ pour une comparaison plus facile avec d'autres travaux dans la littérature liés à certains types des étoiles compactes, à savoir les naines blanches, les étoiles à neutrons et les trous noirs. De plus, les fractions de charge que nous considérons tout au long de ce travail correspondent à des charges si faibles de telle sorte que des effets spectroscopiques comme l'effet Stark ne sont pas décelables. Bien entendu, des fractions petites de charge α ne signifient pas nécessairement qu'on a de petites charges [117]. Cependant, des travaux ultérieurs montrent que pour voir un effet appréciable sur la phénoménologie des étoiles compactes, la charge électrique devrait être de l'ordre de $Q \approx 10^{20} C$. De plus, la restriction de la fraction de charge α , dans notre travail à de petites valeurs est justifiée comme suit :

1. Nous pensons que si des étoiles fortement chargées existent dans l'univers, alors l'effet de leurs champs sera observé au voisinage immédiat des étoiles.
2. La deuxième raison est purement technique en raison de l'apparition de problèmes de singularité lors de l'exécution de notre programme numérique pour les valeurs élevées de α .

Dans différents travaux liés aux étoiles compactes chargées, ces objets ne sont pas stables et s'effondrent en trous noirs chargés. Cependant nous pensons à ce que les petites charges n'affectent pas la stabilité de tels objets. En se référant toujours à [82], nous avons normalisé la constante polytropique ω de manière à ce qu'elle retourne une fonction de l'exposant polytropique $\gamma : \omega(\gamma) = 1.47518 \times 10^{-3} (1.78266 \times 10^{15})^{1-\gamma}$. La densité d'énergie normalisée est alors $\rho_0 = 1.78266 \times 10^{15} kg/m^3$ correspondant à une pression $p_0 = 2.62974 \times 10^{15} kg/m^3$.

5.7 Les résultats

Les figures 5.2.a et 5.2.b, donnent le rayon de la sphère chargée en fonction de sa masse M normalisée à la masse du Soleil M_\odot (en échelle logarithmique), pour une valeur fixe de l'exposant polytropique $\gamma = 5/4$ et respectivement pour deux valeurs de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.006$. Nous n'avons montré sur les figures que les valeurs de β qui montrent un effet visible sur les graphes par rapport à ceux en relativité générale.

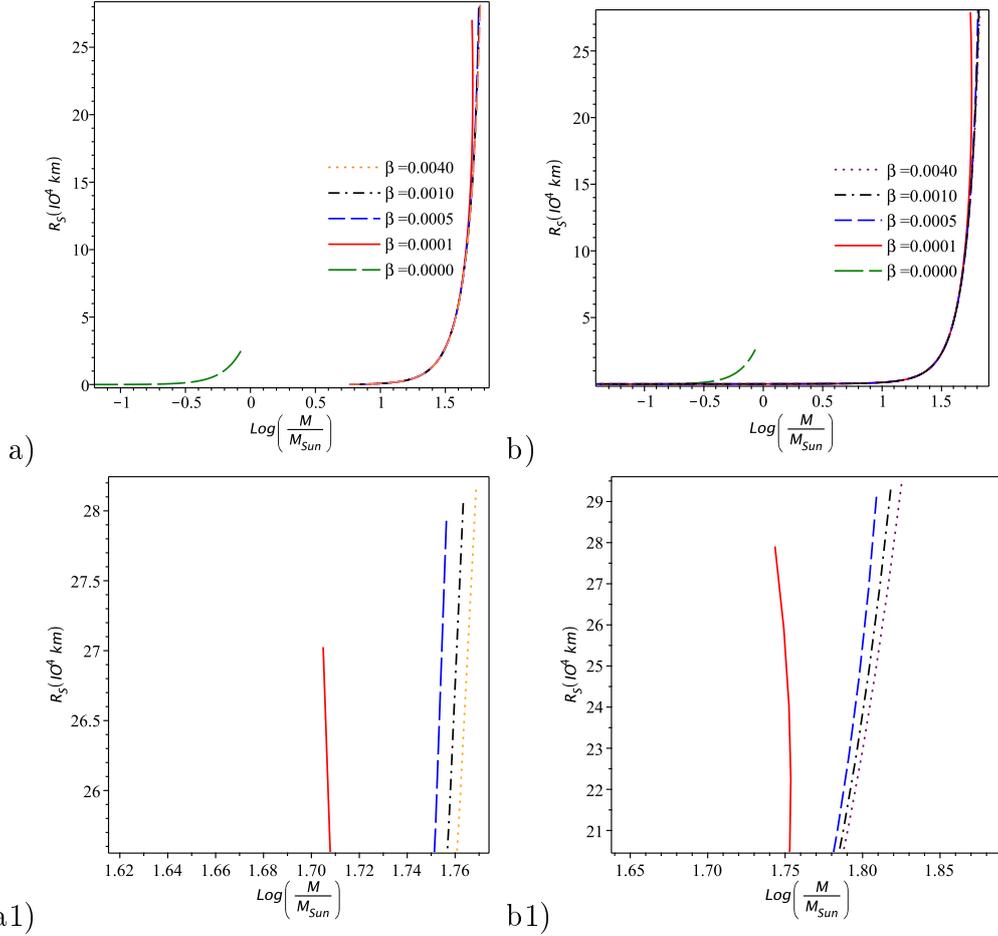


FIGURE 5.2 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour différentes valeurs du paramètre de perturbation β (incluant le cas de RG). Nous avons considéré ici le cas où $\gamma = 5/4$ respectivement pour a) $\alpha = 0.001$ et b) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$. a1) et b1) représentent respectivement le grossissement de a) et b) de leurs coins supérieurs droits. Il est clair que ces figures montrent une transition de comportement du secteur RG vers le secteur de gravité $f(R)$.

De même, les figures 5.3.a et 5.3.b montrent le rayon de la sphère chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_\odot pour $\gamma = 4/3$ fixe et respectivement pour deux valeurs de

la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.006$.

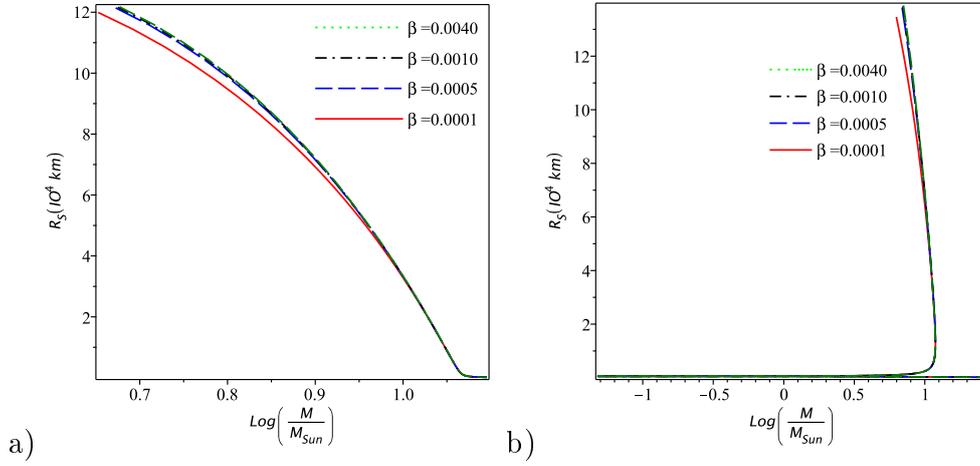


FIGURE 5.3 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour différentes valeurs du paramètre de perturbation β pour $\gamma = 4/3$, pour a) $\alpha = 0.001$ et b) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

La figure 5.4, donnent le rayon de la sphère chargée en fonction de sa masse M normalisée à la masse du Soleil M_{\odot} , pour une valeur fixe de l'exposant polytropique $\gamma = 1.25$ et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et la valeur de $\beta = 0.0001$.

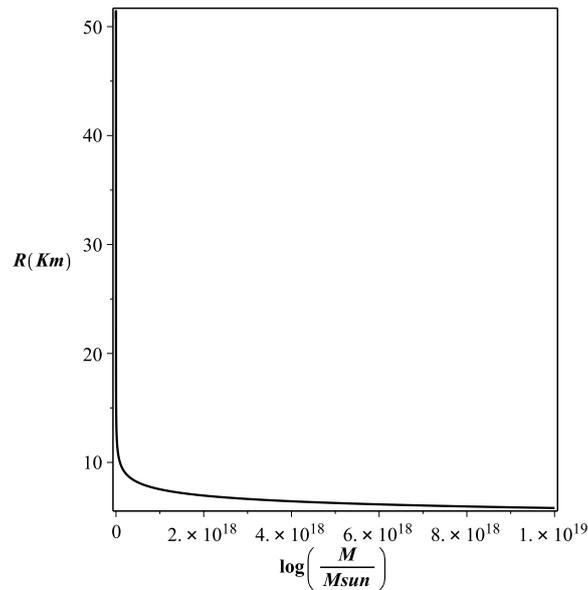


FIGURE 5.4 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$ et pour $\gamma = 1.25$, pour $\alpha = 0.001$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.5.a, 5.5.b, 5.5.c et 5.5.d montrent le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropicque chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 1.25$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$, $\beta = 0.0005$, $\beta = 0.001$ et $\beta = 0.004$.

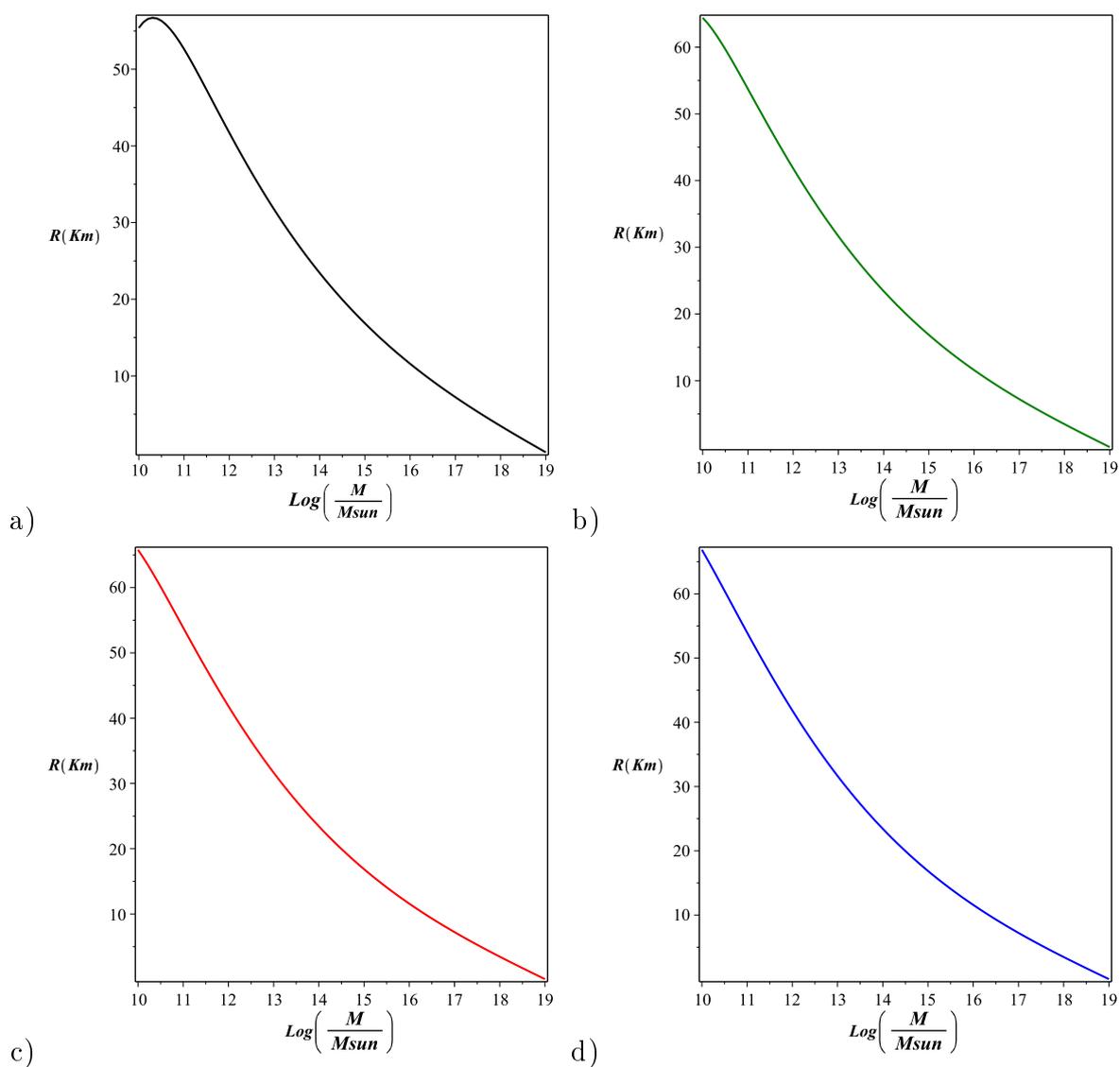


FIGURE 5.5 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropicque chargée pour $\gamma = 1.25$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.6.a, 5.6.b, 5.6.c et 5.6.d montrent le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropicque chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 1.25$ fixe

et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$, $\beta = 0.0005$, $\beta = 0.001$ et $\beta = 0.004$.

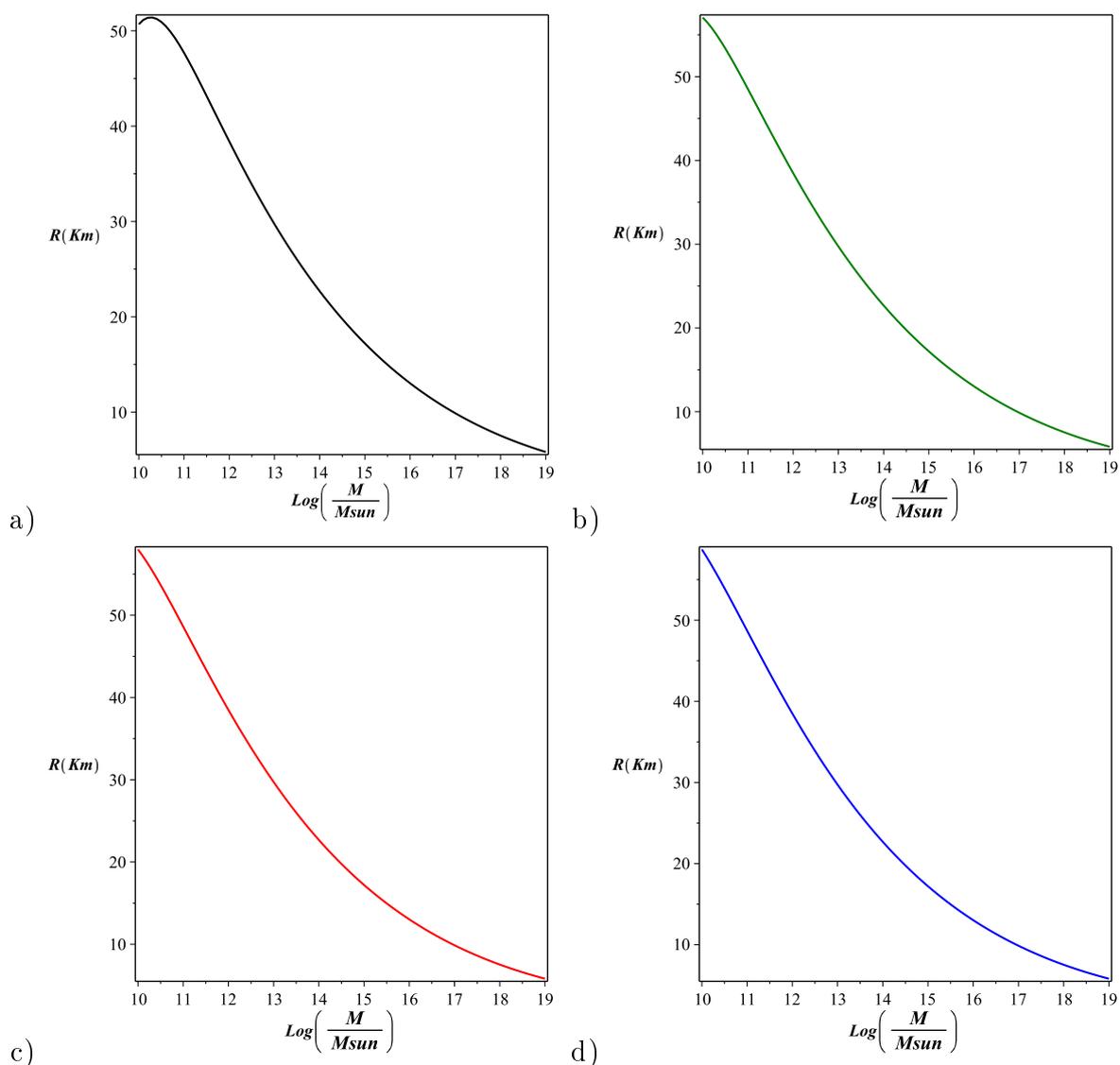


FIGURE 5.6 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 1.25$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.7, donnent le rayon de la sphère chargée en fonction de sa masse M normalisée à la masse du Soleil M_{\odot} , pour une valeur fixe de l'exposant polytropique $\gamma = 4/3$ et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et la valeur de $\beta = 0.0001$.

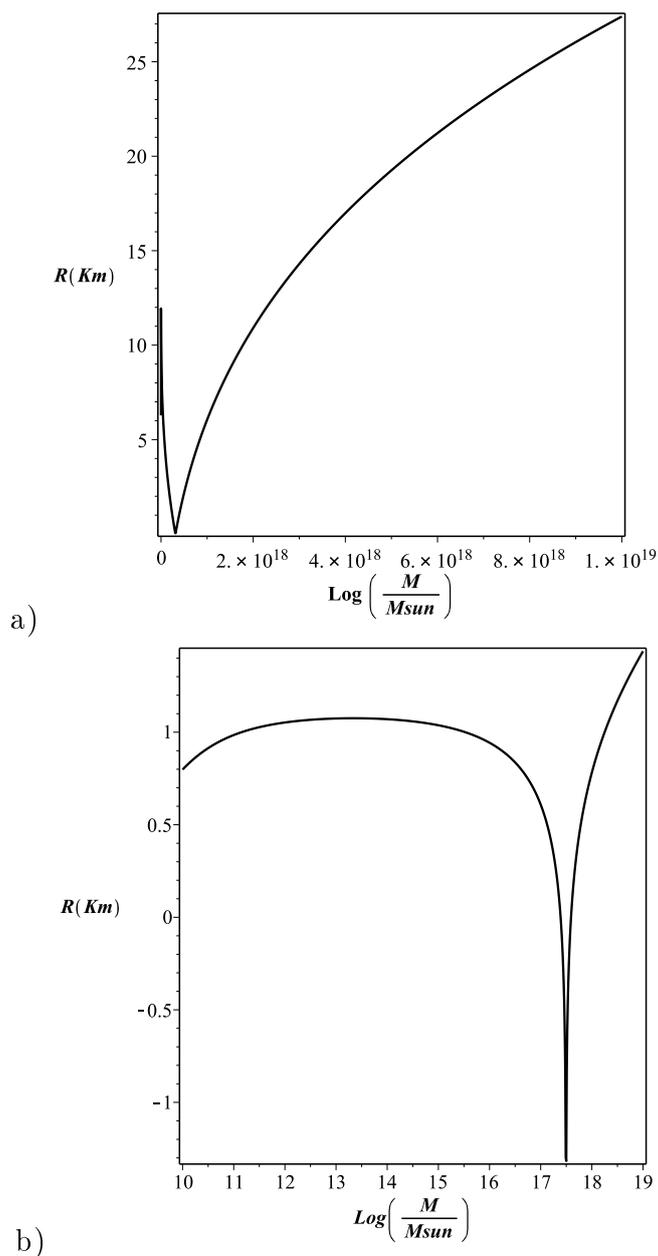


FIGURE 5.7 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$ et pour $\gamma = 4/3$, pour $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.8.a, 5.8.b, 5.8.c et 5.8.d montrent le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropique chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$, $\beta = 0.0005$, $\beta = 0.001$ et $\beta = 0.004$.

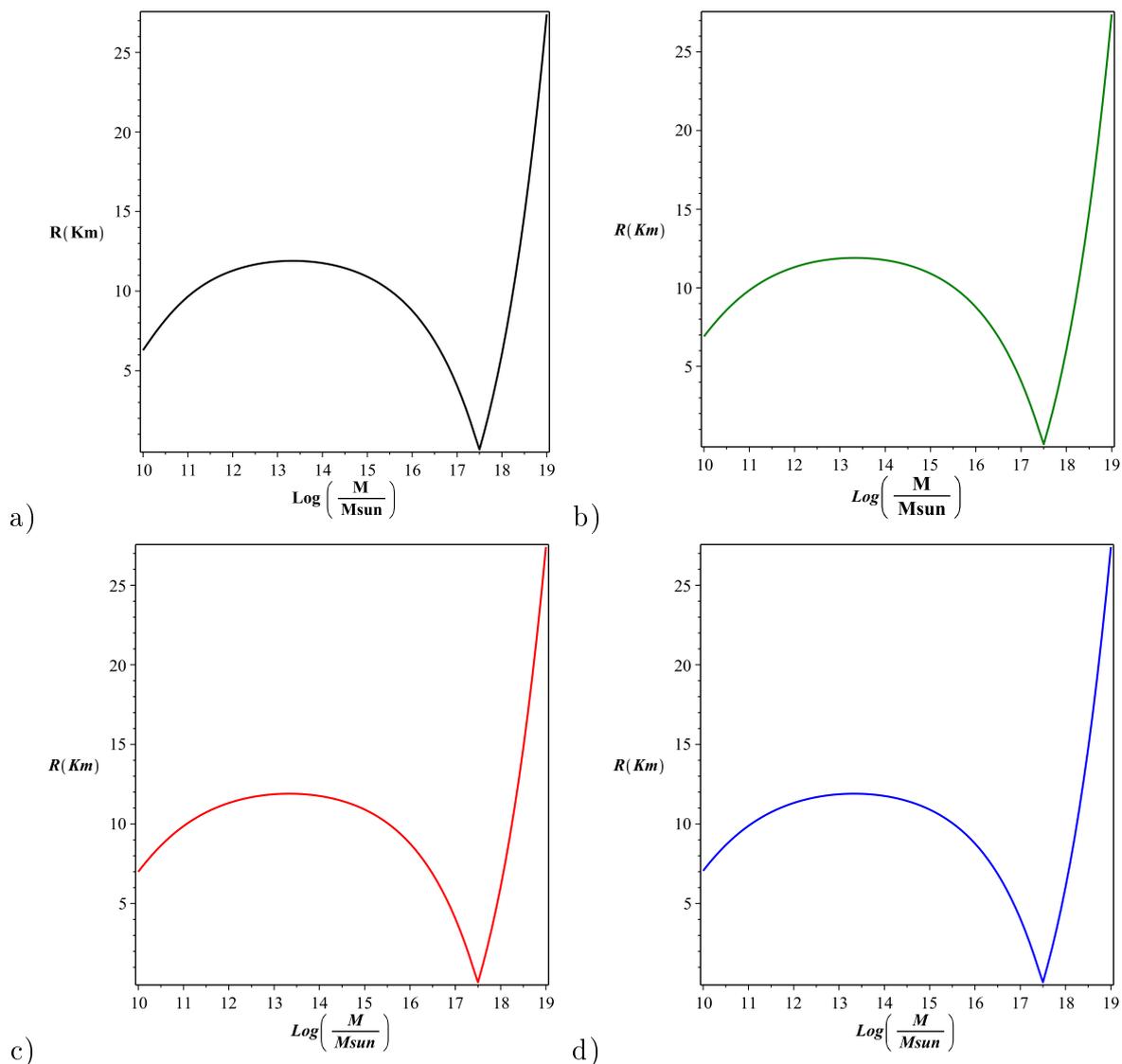


FIGURE 5.8 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.9.a, 5.9.b, 5.9.c et 5.9.d montrent le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropique chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation $\beta = 0.0001$, $\beta = 0.0005$, $\beta = 0.001$ et $\beta = 0.004$.

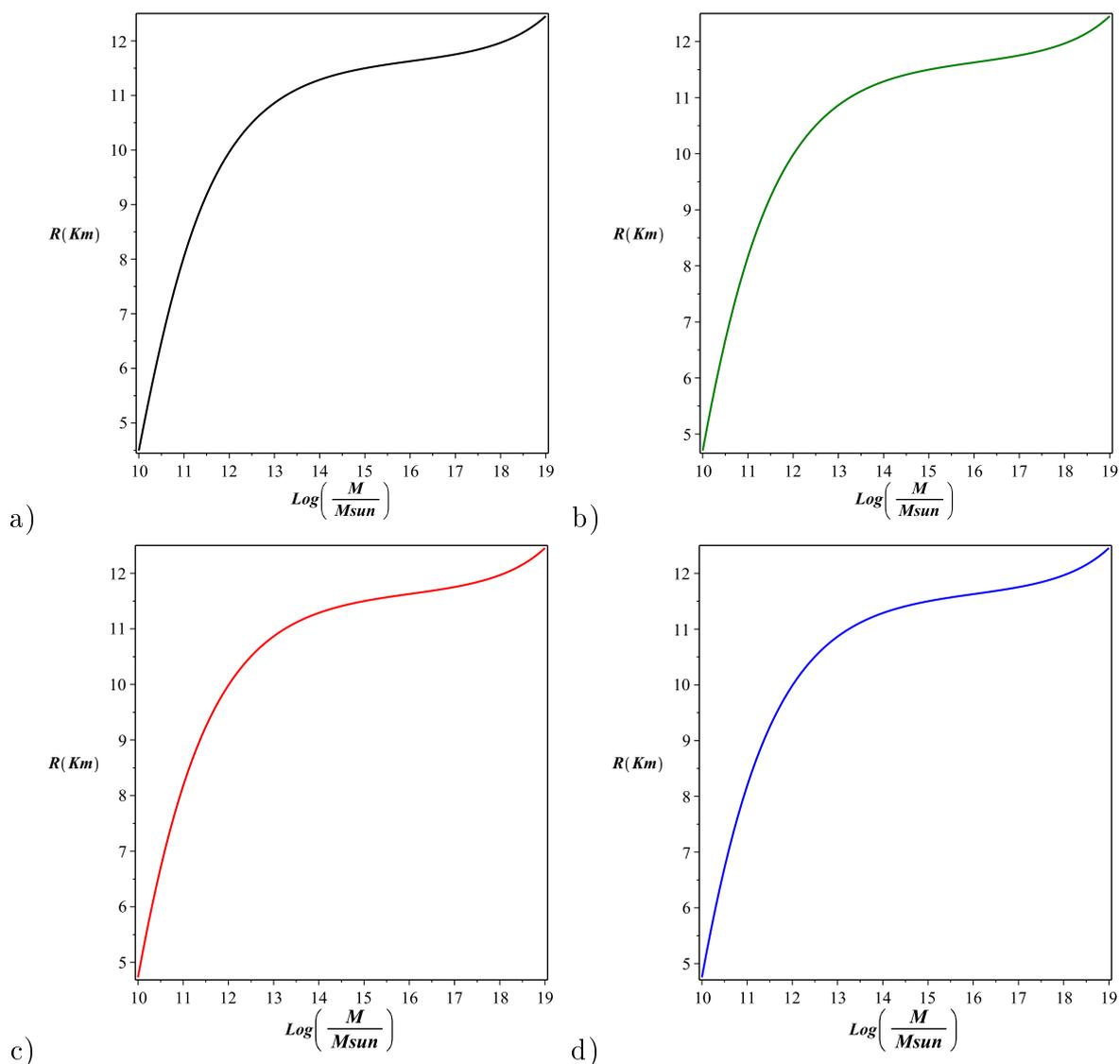


FIGURE 5.9 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et respectivement pour des valeurs du paramètre de perturbation a) $\beta = 0.0001$, b) $\beta = 0.0005$, c) $\beta = 0.001$ et d) $\beta = 0.004$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.10.a et 5.10.b montrent le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropique chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour du paramètre de perturbation $\beta = 0.5$, et respectivement pour deux valeurs de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.006$.

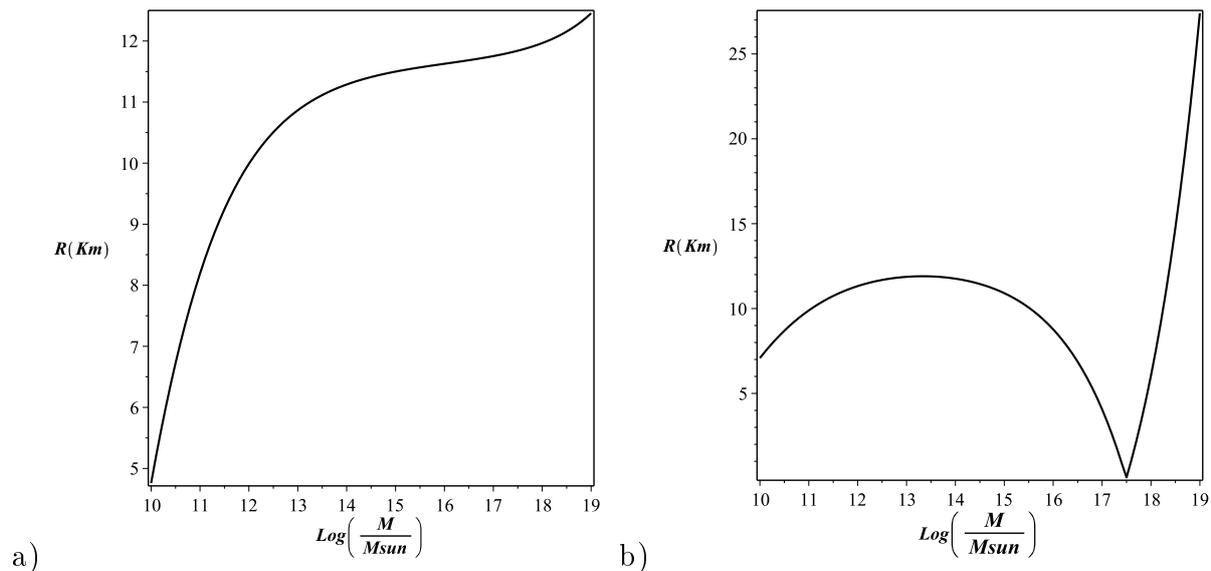


FIGURE 5.10 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique chargée pour $\gamma = 4/3$ fixe et pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0.5$, et respectivement pour deux valeurs de la fraction de charge a) $\alpha = 0.001$ et b) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

5.8 Discussion

Nous remarquons dans la figure 5.2.a, pour $\gamma = 5/4$, $\alpha = 0.001$ et pour plusieurs valeurs affichées de β , que la limite de masse de l'étoile est de 60 à 69 fois plus lourde que dans le cas de RG et que les rayons correspondants sont de 9 à 10 fois plus grands. A noter que ces résultats sont donnés dans [82] mais nous les avons reproduits en utilisant notre programme numérique. Considérons que dans la figure 5.2.b, lorsque α prend la valeur 0,006 mais γ et β conservent les mêmes valeurs que dans la figure 5.2.a, la limite de masse est de 69 à 79 fois plus lourde et le rayon correspondant est 10 à 11 fois plus grand par rapport aux résultats donnés en RG. Nous remarquons que le rapport rayon-masse est approximativement constant (sa valeur varie de 0,3 à 0,5). Ce rapport est la limite OV.

Nous remarquons, d'une part, que dans toutes les figures 5.11, par rapport au cas $\beta = 0$ correspondant le cas relativité générale, les masses et les rayons des sphères montrent une légère augmentation en fonction du paramètre de perturbation β . Deuxièmement, il y a un saut visible des masses et des rayons des étoiles lorsqu'on passe du secteur relativité générale au secteur de la gravité $f(R)$.

Les figures 5.3.a et 5.3.b montrent deux comportements différents des étoiles. Pour le même exposant polytropique $\gamma = 4/3$ et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.001$, le rayon de la sphère diminue de façon monotone d'une valeur de $12 \times 10^4 km$ (correspondant à une masse de $4,7M_\odot$) à $171km$ (correspondant à une masse de $12,32M_\odot$) allant des valeurs de densités faibles aux valeurs très denses. Mais pour $\alpha = 0.006$, nous voyons que la masse de la sphère chargée tombe soudainement à une petite valeur, un résultat complètement inattendu et qui nécessite une analyse spéciale. La limite OV varie de 0,015 pour la figure 2.a à 7.2 pour la figure 2.b.

De plus, dans toutes les 4 figures (5.2.a, 5.2.b, 5.3.a et 5.3.b), on voit que le rapport masse-rayon augmente avec l'exposant polytropique. La figure 5.11 montre le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropique non chargée. Nous remarquons un bon accord avec les résultats donnés dans [82] pour $\beta = 0$, en relativité générale. Les étoiles compactes non chargées ont été étudiées dans la littérature dans le cadre de la gravité $f(R)$ mais différentes équations d'état ont été utilisées [77, 118, 119, 120].

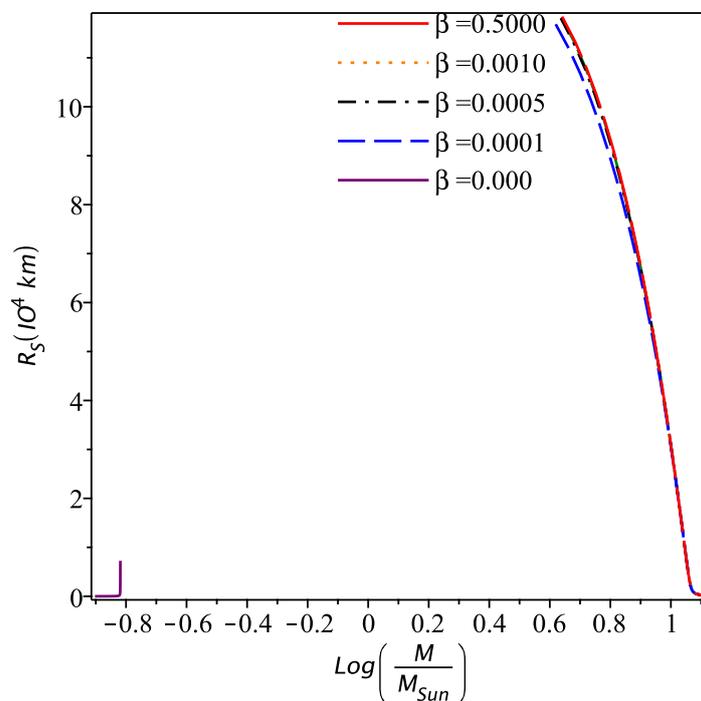


FIGURE 5.11 – Le diagramme masse-rayon d'une sphère polytropique non chargée pour différentes valeurs du paramètre de perturbation β et pour $\gamma = 4/3$. Notez que le cas RG est affiché dans le coin inférieur gauche de la figure qui confirme le comportement de transition. La densité d'énergie centrale ρ_c est dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] kg/m^3$.

Les figures 5.12.a et 5.12.b montre le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropic non chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 1.25$ fixe et respectivement pour deux valeurs de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.006$.

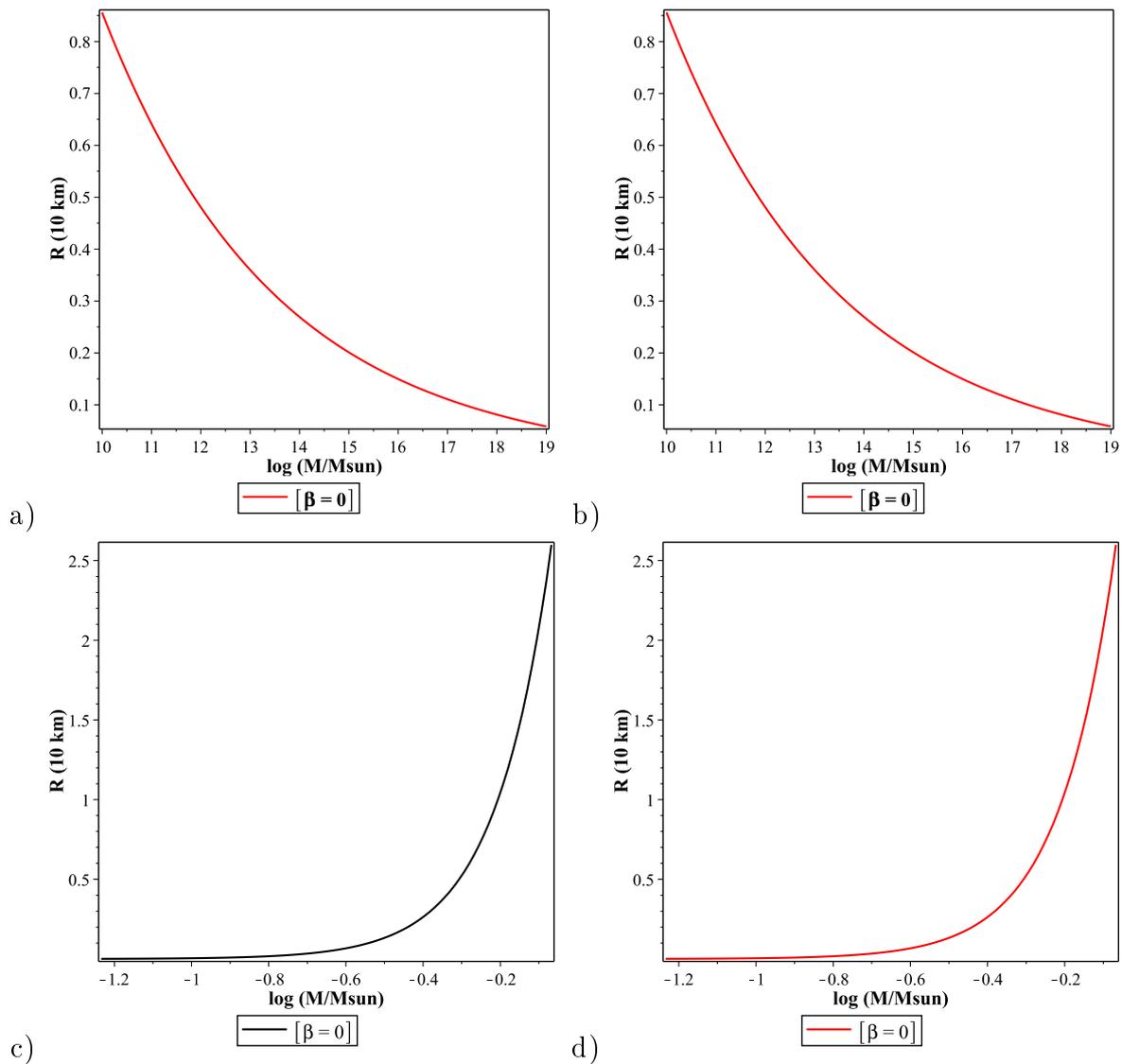


FIGURE 5.12 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropic non chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0$ pour $\gamma = 1.25$, pour a) $\alpha = 0.001$, b) $\alpha = 0.006$, c) $\alpha = 0.001$ et d) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

De même, les figures 5.13.a et 5.13.b montre le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropic non chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 4/3$ fixe et respectivement pour deux valeurs de la fraction de charge $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.006$.

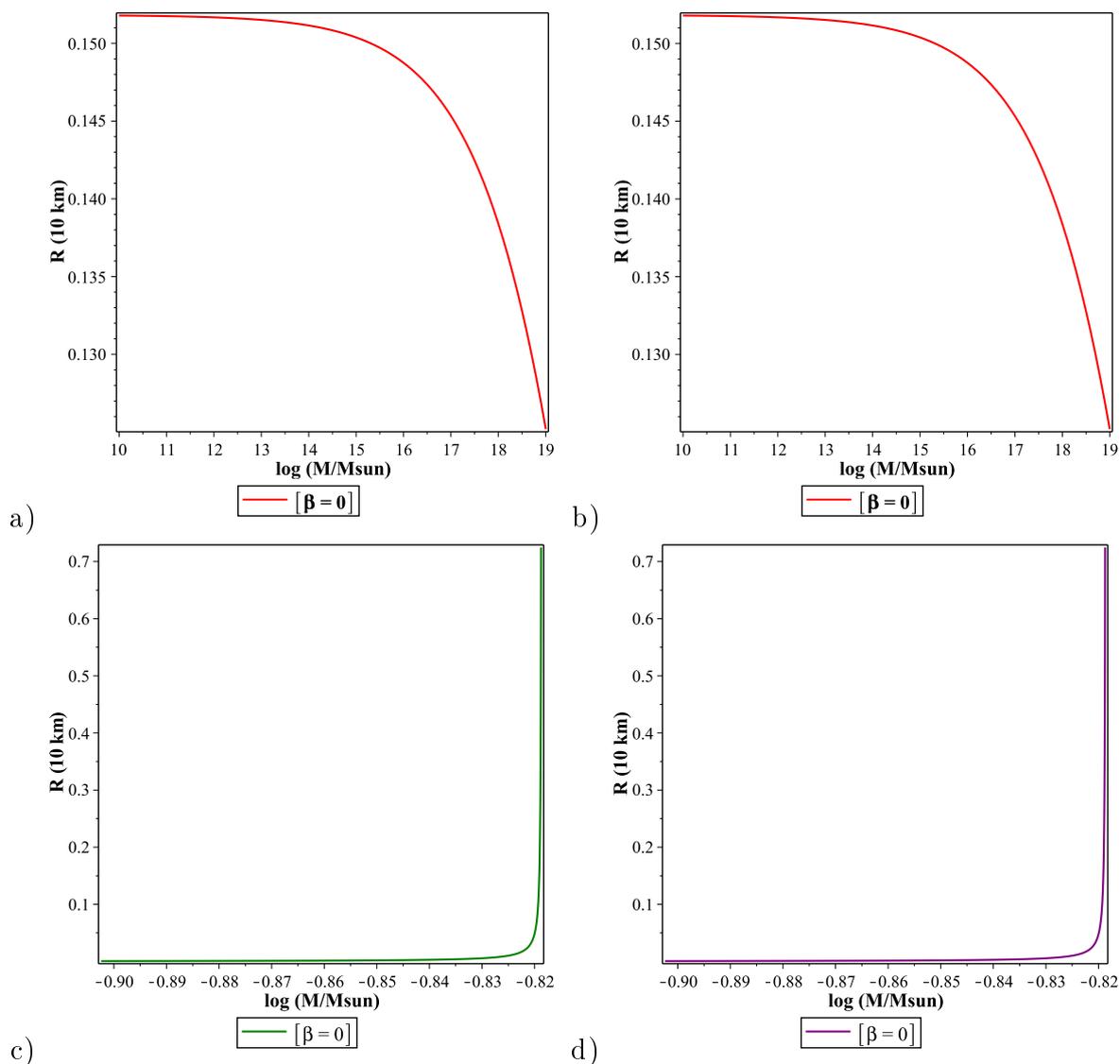


FIGURE 5.13 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique non chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0$ pour $\gamma = 4/3$, pour a) $\alpha = 0.001$, b) $\alpha = 0.006$, c) $\alpha = 0.001$ et d) $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

Les figures 5.14 montre le diagramme masse-rayon pour une sphère polytropique non chargée en fonction de sa masse normalisée M/M_{\odot} pour $\gamma = 5/3$ fixe et pour la valeur de la fraction de charge $\alpha = 0.006$.

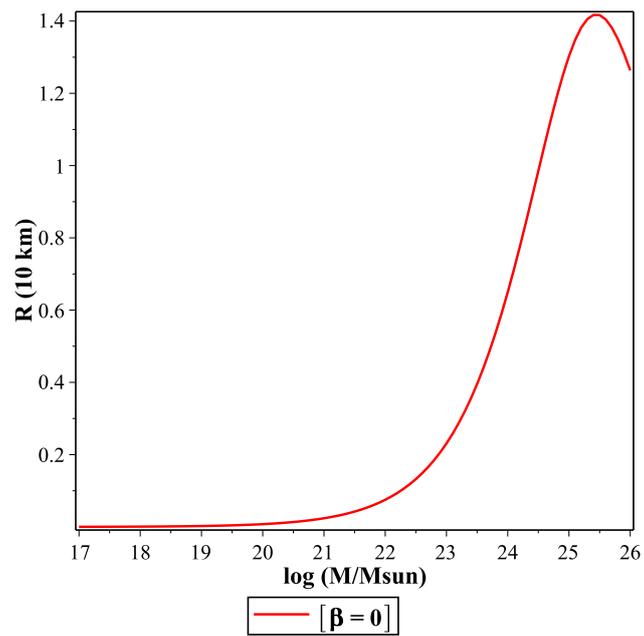


FIGURE 5.14 – Le diagramme masse-rayon de la sphère polytropique non chargée pour la valeur du paramètre de perturbation $\beta = 0$ pour $\gamma = 5/3$, pour $\alpha = 0.006$, en prenant la densité d'énergie centrale ρ_{cr} dans l'intervalle $[10^{10}, 10^{19}] \text{ kg/m}^3$.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons utilisé une des théories étendues de la gravité, à savoir la gravité $f(R)$ pour étendre l'étude de sphères polytropiques chargées électriquement dans le contexte de la théorie d'Einstein-Maxwell. Nous avons supposé que les sphères contiennent un fluide parfait chargé de distribution sphérique symétrique. On a admis que la densité de charge est proportionnelle à la densité d'énergie et le fluide parfait chargé est supposé obéir à une équation d'état polytropique.

Notre travail s'est porté sur l'étude de la dépendance du rapport rayon à masse des sphères compactes avec le paramètre de perturbation β , pour certaines valeurs fixes de la fraction de charge α et de l'exposant polytropique γ . Pour $n < 5$, comme dans les références [77, 83], l'étoile polytropique a un rayon fini, sa masse est compatible avec la régularité au centre et que la densité de l'étoile tend vers zéro à une certaine valeur de son rayon. Ceux-ci ont motivé le choix des deux valeurs $n = 3$ et $n = 4$ correspondant respectivement à $\gamma = 5/4$ et $\gamma = 4/3$ dans ce travail.

Une difficulté principale rencontrée dans ce travail est le manque de références liées à notre travail. Une raison est l'utilisation de différentes équations d'état dans l'étude des étoiles compactes qui donnent des résultats différents. De l'autre côté, nous avons peu d'informations concernant les données cosmologiques de l'évolution de ce genre d'objets stellaires.

Ceci montre l'originalité principale de ce travail et qu'il comble un manque de références liées à l'étude des étoiles chargées dans le cadre des théories étendues de la gravité, entre autres, les théories de la gravité $f(R)$ [2].

Nous avons trouvé que les plages de rapport rayon-masse est d'environ 0,3 à 0,5 dans le cas de $\gamma = 5/4$. Alors que pour $\gamma = 4/3$, il va de 0,015 à 7,2.

Une perspective de ce travail est de chercher 1) une limite OV étendue théoriquement

pour comparer nos résultats et 2) la limite de Buchdahl étendue dans la gravité $f(R)$ pour définir les conditions de stabilité de ces étoiles compactes chargées.

Il est également intéressant d'étudier des étoiles compactes chargées dans le cadre de la théorie étendue de la gravité en considérant d'autres équations d'état.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABRÉVIATIONS

g	: Un champ gravitationnel externe uniforme et constant.
τ	: Le temps propre de la particule.
x^μ	: Le quadri-vecteur position.
$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$: Les symboles de Christofel.
$g_{\nu\lambda}$: La métrique covariante, qui décrit la géométrie de l'espace-temps.
$g^{\mu\lambda}$: La métrique contravariante qui est l'inverse de $g_{\nu\lambda}$.
$\eta_{\mu\nu}$: La métrique de Minkowski.
$h_{\mu\nu}$: La perturbation de la métrique.
Φ	: Le potentiel gravitationnel produit par un corps de masse M .
G	: La constante gravitationnelle de Newton.
$R_{\mu\nu}$: Le tenseur de Ricci.
R	: La courbure scalaire.
Λ	: La constante cosmologique.
$T_{\mu\nu}$: Le tenseur énergie-impulsion.
χ	: La constant de couplage.
$R_{\nu\gamma\sigma}^\mu$: Le tenseur de courbure de Riemann.
$G_{\mu\nu}$: Le tenseur d'Einstein.
c	: La vitesse de la lumière dans le vide.
∇_μ	: La dérivée covariante.
∇^μ	: La dérivée contravariante.

p	: La pression du fluide.
ρ	: La densité d'énergie du fluide.
U^μ	: La valeur locale du quadri-vecteur vitesse du fluide.
R_S	: Le rayon de Schwarzschild.
$a(t)$: Le facteur d'échelle.
k	: Une constante.
w	: Une constante indépendante du temps.
ρ_0	: La valeur actuelle de la densité d'énergie.
A	: L'action.
δA	: La variation totale de l'action.
L_m	: Le lagrangien de la matière.
$f(R)$: Une fonction analytique de la courbure scalaire R .
\square	: L'opérateur de d'Alembert.
ψ^m	: Les champs de matière.
∇'_μ	: La dérivée covariante par rapport à $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.
β	: Le paramètre des corrections quadratiques du scalaire de Ricci.
α	: La fraction de charge.
$\delta_i(t)$: Les fonctions de temps.
f_i	: Les coefficients d'expansion obtenus par le développement de Taylor de $f(R)$.
Y	: Une constante d'intégration arbitraire.
F_p	: La force de pression.
F_g	: La force de gravité.
H	: Une fonction généralement donnée.
n	: L'indice polytropique.
γ	: L'exposant polytropique.
ρ_c	: La densité d'énergie centrale, c désigne l'indice du centre de l'étoile.
$K(z)$: La fonction de Lane-Emden.
$F_{\mu\nu}$: Le tenseur de Faraday-Maxwell.
$E_{\mu\nu}$: Le tenseur énergie-impulsion électromagnétique.

$M_{\mu\nu}$: Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait.
j^μ	: Le courant électromagnétique.
ρ_e	: La densité de charge électrique.
$A(r)$: La fonction de la coordonnée radiale r seulement.
$B(r)$: La fonction de la coordonnée radiale r seulement.
A_μ	: Le champ de potentiel vecteur.
$q(r)$: La charge électrique.
Q	: La charge électrique totale.
k_B	: La constante de Boltzmann.
N_A	: Le nombre d'Avogadro.
V	: Le volume du gaz.
T	: La température du gaz.
R	: La constante des gaz parfaits.
Z	: Le facteur de compressibilité.
V_m	: Le volume molaire.
b	: Le covolume ou le volume moléculaire propre.
M_\odot	: La masse du soleil.
R	: Une sphère fluide parfaite de rayon.
m_H	: La masse de l'atome d'hydrogène.
$\bar{\mu}_e$: La masse moléculaire moyenne.
m_n	: La masse de proton ou le neutron.
M_{pl}	: La masse de Planck.
F_c	: La force électrique.

APPENDICE B

Pour les calculs numériques, les équations relativistes polytropique doivent être écrites sous forme a-dimensionnelle. Pour cela, nous introduisons la coordonnée radiale a-dimensionnelle ε donnée par :

$$\varepsilon = r\sqrt{4\pi\rho_c}. \quad (5.19)$$

$$v(\varepsilon) = \sqrt{4\pi\rho_c}m(r). \quad (5.20)$$

$$u(\varepsilon) = \frac{\sqrt{4\pi\rho_c}}{\varepsilon^2}q(r). \quad (5.21)$$

$$\theta(\varepsilon) = \left(\frac{\rho(r)}{\rho_c}\right)^\gamma. \quad (5.22)$$

Vérifions que ces variables introduites sont bien sans dimension.

Analyse dimensionnelle :

Pour la constante g :

$$g = G\frac{M}{r^2} \rightarrow [G] = \frac{L^3}{MT^2}.$$

Pour la densité d'énergie :

$$[\rho] = \frac{\text{energie}}{\text{volume}} \rightarrow [\rho] = \frac{Nm}{m^3} = \frac{kgm^2}{m^3s^2} = \frac{M}{LT^2}.$$

$$\left[\frac{4\pi G\rho}{c^4}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m^3}{Kgs^4} \frac{Kg}{ms^2} \frac{s^4}{m^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{L}.$$

Donc, dans le système SI, la dimension de ε est :

$$\varepsilon = r\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{c^4}} \rightarrow [\varepsilon] = LL^{-1} = 1.$$

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \rightarrow \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] = ML^3T^{-2}C^{-2} \rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}C^{-1}.$$

$$\nu(\varepsilon) = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{c^4}} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\sqrt{G}}{c^2} \frac{q(r)}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \rightarrow [\nu(\varepsilon)] = \frac{1}{L} \frac{L^{3/2}}{M^{1/2}T} \frac{T^2}{L^2} M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}C^{-1}C = 1.$$

$$u(\varepsilon) = \frac{G}{c^2} m(r) \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{c^4}} \rightarrow [u(\varepsilon)] = \frac{L^3}{MT^2} \frac{T^2}{L^2} M \frac{1}{L} = 1.$$

Les facteurs de conversion, pour le rayon, la masse, la pression et la charge s'obtiennent comme suit :

On prend

$$\frac{G}{c^2} = 7.42611 \times 10^{-28} \frac{m}{kg}.$$

$$\left[\frac{\rho}{c^2} \right] = \frac{kg}{m^3}.$$

$$m(r) = \frac{1}{\frac{G}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi G}{c^2} \frac{\rho}{c^2}}} u(\varepsilon) = \frac{1}{7.42611 \times 10^{-28}} \frac{1}{\sqrt{4\pi 7.42611 \times 10^{-28} \frac{\rho}{c^2}}} u(\varepsilon).$$

$$q(r) = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \varepsilon^2 \nu(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi G}{c^2} \frac{\rho}{c^2}}} \frac{1}{\frac{\sqrt{G}}{c^2}}.$$

$$r = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi G}{c^2} \frac{\rho}{c^2}}} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{4\pi 7.42611 \times 10^{-28} \frac{\rho}{c^2}}}.$$

APPENDICE C

Dans cet appendice, on va retrouver les étapes de calcul du système d'équations apparu dans l'article de [82], (dans le cadre de RG), en fonction des variables sans dimension pour les besoins de notre calcul numérique. A noter que due à la complexité des équations dans le cadre de la gravité $f(R)$, les équations a-dimensionnelles dans notre travail ont été trouvées à l'aide du logiciel Maple 2016.

On a :

$$\frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\sqrt{4\pi\rho_c}}{\varepsilon^2} \frac{dq(r)}{d\varepsilon} - \frac{2\sqrt{4\pi\rho_c}}{\varepsilon^3} q(r). \quad (5.23)$$

$$\frac{dq(r)}{dr} = \frac{dq(r)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr}. \quad (5.24)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dr} = \sqrt{4\pi\rho_c}. \quad (5.25)$$

ρ_c est la densité centrale. On a :

$$\frac{dq(r)}{dr} = \frac{dq(r)}{d\varepsilon} \sqrt{4\pi\rho_c}. \quad (5.26)$$

D'autre part, on a :

$$\frac{dq(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_e \sqrt{A(r)}. \quad (5.27)$$

$$\rho_e = \alpha\rho. \quad (5.28)$$

ρ_e est la densité d'énergie électrique.

$$A(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}}. \quad (5.29)$$

On peut écrire :

$$\frac{m(r)}{r} = \frac{\sqrt{4\pi\rho_c} m(r)}{\sqrt{4\pi\rho_c} r} = \frac{v(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

$$\frac{q(r)}{r} = \frac{\sqrt{4\pi\rho_c} q(r)}{\sqrt{4\pi\rho_c} r} = \varepsilon u(\varepsilon).$$

$A(r)$ devient :

$$A(r) = \frac{1}{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}. \quad (5.30)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{dq(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \alpha \rho \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}}} \\ &= 4\pi r^2 \alpha \rho \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

En égalant l'équation (5.26) avec l'équation (5.31), on obtient :

$$4\pi r^2 \alpha \rho \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}} = \frac{dq(r)}{d\varepsilon} \sqrt{4\pi\rho_c}. \quad (5.32)$$

De l'équation (5.21) on a :

$$q(r) = u(\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{4\pi\rho_c}}. \quad (5.33)$$

La dérivée $q(r)$ par rapport ε est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{dq(r)}{d\varepsilon} = u(\varepsilon) \frac{2\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho_c}} + \frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{4\pi\rho_c}}. \quad (5.34)$$

On remplace l'équation (5.34) dans l'équation (5.32) et on obtient :

$$\frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\frac{2u(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\alpha 4\pi r^2 \rho}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \quad (5.35)$$

De l'équation (5.22) on a :

$$\rho(r) = \rho_c \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon). \quad (5.36)$$

On remplace l'équation (5.36) dans l'équation (5.35) pour obtenir :

$$\frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\frac{2u(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\alpha\theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon)}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \quad (5.37)$$

L'équation (5.20) donne :

$$m(r) = v(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_c}}. \quad (5.38)$$

la dérivée $m(r)$ par rapport ε est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{dm(r)}{d\varepsilon} = \frac{dv(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_c}}. \quad (5.39)$$

Et on a :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) + \frac{q(r)}{r} \frac{dq(r)}{dr}. \quad (5.40)$$

Où :

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{dm(r)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{dm(r)}{d\varepsilon} \sqrt{4\pi\rho_c} = \frac{dv(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (5.41)$$

On remplace l'équation (5.31) et l'équation (5.33) dans l'équation (5.40) et on obtient :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) + \frac{u(\varepsilon)}{r} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \frac{4\pi r^2 \alpha \rho(r)}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \quad (5.42)$$

On a $\rho = \rho_c \theta^{\frac{1}{\gamma}}$ et $\varepsilon = r\sqrt{4\pi\rho_c}$. L'équation précédente peut alors s'écrire comme :

$$\frac{dm(r)}{dr} = \varepsilon^2 \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon) + \frac{\alpha \varepsilon^2 u(\varepsilon) \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon)}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \quad (5.43)$$

Donc :

$$\frac{dv(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \varepsilon^2 \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon) + \frac{\alpha \varepsilon^2 u(\varepsilon) \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon)}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \quad (5.44)$$

De l'équation (5.22), on tire :

$$\rho^\gamma = \theta(\varepsilon) \rho_c^\gamma. \quad (5.45)$$

D'où :

$$p(r) = \omega \rho^\gamma = \omega \theta(\varepsilon) \rho_c^\gamma. \quad (5.46)$$

La dérivée $p(r)$ par rapport ε est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{dp(r)}{d\varepsilon} = \omega \frac{d\theta(\varepsilon)}{d\varepsilon} \rho_c^\gamma. \quad (5.47)$$

On a :

$$\frac{dp(r)}{dr} = \frac{dp(r)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{dp(r)}{d\varepsilon} \sqrt{4\pi\rho_c}. \quad (5.48)$$

On remplace l'équation (5.47) dans l'équation (5.48) :

$$\frac{dp(r)}{dr} = \omega \rho_c^\gamma \sqrt{4\pi\rho_c} \frac{d\theta(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (5.49)$$

On a :

$$\frac{dp(r)}{dr} = -(\rho(r) + p(r)) \left[\frac{4\pi p(r)r + \frac{m(r)}{r^2} - \frac{q^2(r)}{r^3}}{1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}} \right] + \rho_e \left[\frac{\frac{q(r)}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2(r)}{r^2}}} \right]. \quad (5.50)$$

L'équation (5.19) donne :

$$r = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho_c}}. \quad (5.51)$$

On remplace l'équation (5.36), (5.46), (5.38), (5.33), (5.51), (5.28) et l'équation (5.30) dans l'équation (5.50) et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dp(r)}{dr} = & -\left(\rho_c \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon) + \omega \theta(\varepsilon) \rho_c^\gamma\right) \left[\frac{4\pi\omega\theta(\varepsilon) \rho_c^\gamma \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho_c}} + \frac{4\pi\rho_c}{\varepsilon^2} \frac{v(\varepsilon)}{\sqrt{4\pi\rho_c}} - \varepsilon u^2(\varepsilon) \sqrt{4\pi\rho_c}}{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)} \right] \\ & + \frac{4\pi\alpha u(\varepsilon) \rho_c^2 \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon)}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Donc :

$$\frac{d\theta(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{\omega \rho_c^\gamma \sqrt{4\pi\rho_c}} \frac{dp(r)}{dr}. \quad (5.53)$$

On remplace l'équation (5.52) dans l'équation (5.53). On tire que :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= -\varepsilon \left(\theta(\varepsilon) + \omega^{-1} \rho_c^{1-\gamma} \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon) \right) \left[\frac{\omega \theta(\varepsilon) \rho_c^{1-\gamma} + \frac{v(\varepsilon)}{\varepsilon^3} - u^2(\varepsilon)}{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)} \right] \\ &+ \frac{\alpha \omega^{-1} \rho_c^{1-\gamma} \theta^{\frac{1}{\gamma}}(\varepsilon) u(\varepsilon)}{\sqrt{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

On a :

$$\frac{dB(r)}{dr} = \frac{dB(r)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{dB(r)}{d\varepsilon} \sqrt{4\pi\rho_c}. \quad (5.55)$$

Donc :

$$\frac{dB(r)}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \frac{dB(r)}{dr}. \quad (5.56)$$

Et on a :

$$\frac{dB(r)}{dr} = \frac{2B(r)}{\rho(r) + p(r)} \left[\frac{q(r)}{4\pi r^4} \frac{dq(r)}{dr} - \frac{dp(r)}{dr} \right]. \quad (5.57)$$

On remplace l'équation (5.31), (5.33), (5.36), (5.46), (5.51) et l'équation (5.52) dans l'équation (5.57) on obtient :

$$\frac{dB(r)}{dr} = 2\varepsilon B(r) \frac{4\pi\rho_c}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \left(\frac{\omega \theta(\varepsilon) \rho_c^{\gamma-1} + \frac{v(\varepsilon)}{\varepsilon^3} - u^2(\varepsilon)}{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)} \right). \quad (5.58)$$

Donc :

$$\frac{dB(r)}{d\varepsilon} = 2\varepsilon B(r) \left(\frac{\omega \theta(\varepsilon) \rho_c^{\gamma-1} + \frac{v(\varepsilon)}{\varepsilon^3} - u^2(\varepsilon)}{1 - \frac{2v(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon)} \right). \quad (5.59)$$

Bibliographie

- [1] Quatrième Conférence Algérienne d'Astronomie et d'Astrophysique, Université de Khenchela University, 27-29 Mars 2017.
- [2] Mansour, H., Si Lakhel, B., and Yanallah, A., *Weakly charged compact stars in $f(R)$ gravity*, JCAP 06-006, (2018).
- [3] Rosseland, S., *Electrical state of a star*, Mont. Not. Royal Astronomical Society, Vol.84, (1924).
- [4] Eddington, A.S., *Internal Constitution of the stars*, U. Cambridge Press, Cambridge, England, (1926).
- [5] Ray, S., Espindola, A.L., Malheiro, M., Lemos, J.P.S. and Zanchin, V.T., *Electrically charged compact stars and formation of charged black holes*, Phys. Rev. D 68 084004, (2003).
- [6] Bekenstein, J.D., *Hydrostatic Equilibrium and Gravitational Collapse of Relativistic Charged Fluid Balls*, Phys. Rev. D 4, 2185, (1971).
- [7] Nikouravan, B., Ibrahim, K.N. and Wan Abdullah, W.A.T., *Reissner-Nordstrom Solution for Non-Rotating Elliptical Charged Celestial Objects*, Adv. Studies Theor. Phys. Vol. 7, no. 24, 1231 - 1234, (2013).
- [8] Ryder, L., *Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge ,(2009).
- [9] Dirac, P. A. M., *General theory of relativity*, Princeton University Press, Princeton ,(1996).
- [10] Kenyon, I.R., *General relativity*, Oxford University Press, New York ,(1990).
- [11] Wald, R.M., *General Relativity*, U. Chicago Press, Chicago, (1984).

- [12] Carroll, S.M., *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley (Pearson Education), San Fransisco, (2004).
- [13] Grøn, Ø. and Næss, A., *Einstein's Theory : a Rigorous Introduction to General Relativity for the Mathematically Untrained*, Springer Science+Business Media, LLC, (2011).
- [14] Grøn, Ø. and Hervik, S., *Einstein's General Theory of Relativity : With Modern Applications in Cosmology*, Springer Science+Business Media, LLC, (2007).
- [15] Carroll, S.M., *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv :gr-qc/9712019v1 3 Dec 1997, (1997).
- [16] Narlikar, J.V., *An introduction to Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge , (2002).
- [17] Peacock, J. A., *Cosmological Physics*, U. Cambridge Press, (1999).
- [18] Schutz, B.F., *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, New York, (2009).
- [19] To Louise, Elizabeth, and Gabrielle, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York, Steven Weinberg ,(2008).
- [20] Capozziello, S. and Faraoni, V., *Beyond Einstein Gravity*, Fundamental Theories of Physics Vol. 170, Springer, Dordrecht, (2011).
- [21] Nojiri, S. and Odintsov, S.D., *Introduction to modified gravity and gravitational altrnative for energy*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4, 115, (2007).
- [22] Nojiri, S. and Odintsov, S.D., *Unified cosmic history in modified gravity : from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models*, arXiv :1011.0544v4 [gr-qc] 29 May 2011, (2011).
- [23] Capozziello, S. and Francaviglia, M., *Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications*, Gen.Rel. Grav. 40, 357, (2008).
- [24] Sotiriou, T.P. and Faraoni, V., *$f(R)$ theories of gravity*, Rev. Mod. Phys. 82, 451 , (2010).
- [25] Chakraborty, S., SenGupta, S., *Effective gravitational field equations on m-brane embedded in n-dimensional bulk of Einstein and $f(R)$ gravity*, Eur. Phys. J. C 75 :538, (2015).

- [26] Chakraborty, S., SenGupta, S., *Solving higher curvature gravity theories*, Eur. Phys. J. C 76 :552, (2016).
- [27] Chakraborty, S., SenGupta, S., *Spherically symmetric brane spacetime with bulk $f(R)$ gravity*, Eur. Phys. J. C 75 :11, (2015).
- [28] Astashenok, A.V., Capozziello, S. and Odintsova, S.D., *Extreme neutron stars from Extended Theories of Gravity*, JCAP 01,001, (2015).
- [29] Astashenok, A.V., Capozziello, S. and Odintsova, S.D., *Further stable neutron star models from $f(R)$ gravity*, arXiv :1309.1978v2 [gr-qc] 10 Dec 2013, (2013).
- [30] Astashenok, A.V., Capozziello, S. and Odintsova, S.D., *Magnetic neutron stars in $f(R)$ gravity*, Astrophys Space Sci 355 :2182, (2014).
- [31] Astashenok, A.V., Capozziello, S. and Odintsova, S.D., *Maximal neutron star mass and the resolution of the hyperon puzzle in modified gravity*, Phys. Rev. D 89, 103509, (2014).
- [32] Nojiri, S., Odintsov, S.D., *Unified cosmic history in modified gravity : From $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models*, Phys-Report 505 59–144, (2011).
- [33] Nojiri, S., Odintsov, S.D., Oikonomou, V.K., *Modified gravity theories on a nutshell : Inflation, bounce and late-time evolution*, Phys-Report 06-001, (2017).
- [34] Capozziello, S. and Faraoni, V., *Beyond Einstein Gravity*, FTPH. Vol. 170 Springer, Dordrecht, (2011).
- [35] Faraoni, V., *$f(R)$ gravity : successes and challenges*, arXiv :0810.2602v1 [gr-qc] 15 Oct 2008, (2008).
- [36] De Felice, A. and Tsujikawa, S., *$f(R)$ theories*. Living Rev. Rel. 13 :3, (2010).
- [37] Sotiriou, T.P. and Faraoni, V., *$f(R)$ theories of gravity*, Rev. Mod. Phys. 82, 451, (2010).
- [38] Sotiriou, T.P., *Modified action for gravity : theory and phenomenology*, arXiv :0710.4438v1 [gr-qc], (2007).
- [39] Starobinsky, A.A., *Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity*, JETP Lett. 86 157, (2007).

- [40] Capozziello, S. and De Laurentis, M., *Extended theories of gravity*, Phys. Rept. 509 167-321, (2011).
- [41] Amendola, L., Polarski, D., and Tsujikawa, S., *Are $f(R)$ Dark Energy Models Cosmologically Viable ?*, Phys. Rev. Lett. 98, 131302, (2007).
- [42] Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S.D., and Troisi, A., *Cosmological viability of $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase*, Phys. Lett. B. 639, 135-143, (2006).
- [43] Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., and Tsujikawa, S., *Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models*, Phys. Rev. D 75, 083504, (2007).
- [44] Nojiri, S. and Odintsova, S.D., *Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology : From a matter dominated epoch to a dark energy universe*, Phys.Rev. D 74, 086005, (2006).
- [45] Brookfield, A.W., van de Bruck, C., and Hall, L.M.H., *Viability of $f(R)$ theories with additional powers of curvature*, Phys. Rev. D 74,064028, (2006).
- [46] Capozziello, S., Cardone, V., and Troisi, A., *Reconciling dark energy models with $f(R)$ theories*, Phys. Rev. D 71, 043503, (2005).
- [47] Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S.D., and Troisi, A., *Cosmological viability of $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase*, Phys. Lett. B 639, 135, (2006).
- [48] Nojiri, S. and Odintsova, S.D., *Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology : From a matter dominated epoch to a dark energy universe*, Phys. Rev. D 74, 086005, (2006).
- [49] Nojiri, S. and Odintsov, S.D., *Modified gravity as an alternative for Λ CDM cosmology*, J. Phys. A 40, 6725, (2007).
- [50] Cruz-Dombriz, A. and Dobado, A., *$f(R)$ gravity without a cosmological constant*, Phys. Rev. D 74, 087501, (2006).
- [51] Fay, S., Nesseris, S., and Perivolaropoulos, L., *Can $f(R)$ modified gravity theories mimic a Λ CDM cosmology ?*, Phys. Rev. D 76, 063504, (2007).

- [52] Buchbinder, I.L., Odintsov, S.D., and Shapiro, I.L., *General relativity as the low-energy limit in higher derivative quantum gravity*, Class. Quantum Grav. 9 873, (1992).
- [53] Codello, A. and Percacci, R., *Fixed Points of Higher-Derivative Gravity*, Phys. Rev. Lett. 97,221301, (2006).
- [54] De Felice, A., *Are modified gravity models free of ghosts ?*, J. Phys. A : Math. Theor.40, 7061, (2007).
- [55] De Felice, A. and Hindmarsh, M., *Unsuccessful cosmology with modified gravity models*, JCAP 06, 028, (2007).
- [56] Stelle, K., *Classical gravity with higher derivatives*, Gen. Rel. Grav. 9, 353, (1978).
- [57] Stelle, K.S., *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D16, 953, (1977).
- [58] Strominger, A., *Positive-energy theorem for $R + R^2$ gravity*, Phys. Rev. D30, 2257, (1984).
- [59] Utiyama, R. and De Witt, B.S., *Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields*, J. Math. Phys. 3 608. (1962).
- [60] Vilkovisky, G.A., Class. Quant. Grav. 9, 895, (1992).
- [61] Ferraris, M., Francaviglia, M., and Magnano, G., *Do non-linear metric theories of gravitation really exist ?*, Class. Quantum Grav. 5 L95, (1988).
- [62] Dolgov, A.D. and Kawasaki, M., *Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion ?*, Phys. Lett. B 573, 1, (2003).
- [63] Faraoni, V., *Matter instability in modified gravity*, Phys. Rev. D 74, 104017, (2006).
- [64] Cognola, G. and Zerbini, S., *Homogeneous Cosmologies in Generalized Modified Gravity*, Int.J. Theor Phys. 47, 3186–3200, (2008).
- [65] Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S., Odintsov, S.D., and Zerbini, S., *One-loop $f(R)$ gravity in de Sitter universe*, JCAP 02-010, (2005).

- [66] Cognola, G., Gastaldi, M., and Zerbini, S., *On the Stability of a Class of Modified Gravitational Models*, Int. J. Theor. Phys. 47, 898-910, (2008).
- [67] Nojiri, S., Odintsov, S.D., Oikonomou, V.K., *Modified gravity theories on a nutshell : Inflation, bounce and late-time evolution*, Phys-Rept. 692, 1-104, (2017).
- [68] Capozziello, S., Stabile, A. and Troisi, A., *Newtonian limit of $f(R)$ gravit*, Phys. Rev. D 76, 104019, (2007).
- [69] Capozziello, S., Stabile, A. and Troisi, A., *A general solution in the Newtonian limit of $f(R)$ -gravity*, Modern Physics Letters A, Vol. 24, No. 9, 659-665, (2009).
- [70] Teyssandier, P. and Tourenç, Ph., *The Cauchy problem for the $R+R^2$ theories of gravity without torsion*, J. Math. Phys. 24, 2793, (1983).
- [71] O'Hanlon, J., *Intermediate-Range Gravity : A Generally Covariant Model*, Phys. Rev. Lett. 29, 137, (1972).
- [72] Fujii, Y., *Dilaton and Possible Non-Newtonian Gravity*, Nature Physical Science, vol 234, (1971).
- [73] Lanahan-Tremblay, N. and Faraoni, V., *The Cauchy problem of $f(R)$ gravity*, Class. Quantum Grav. 24, 5667, (2007).
- [74] Baade, W., Zwicky, F., *On super-novae*, Proc Natl Acad Sci USA 20(5) :254-259, (1934).
- [75] Ghezzi, C., *Relativistic structure, stability, and gravitational collapse of charged neutron stars*, Phys. Rev. D 72 104017, (2005).
- [76] Tolman, R.C., *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*, Phys.Rev. 55 364, (1939).
- [77] Capozziello, S., De Laurentis, M., Odintsov, S. D., and Stabile, A., *Hydrostatic equilibrium and stellar structure in $f(R)$ -gravity*, Phys. Rev. D 83 , 064004, (2011).
- [78] Hooft, G., *Introduction to th theory of black holes*, Lectures presented at Utrecht University, (2009).

- [79] Duclaux, J., *Théorie des gaz et équation d'état*. J. Phys. Radium, 5 (11), pp.331-337, (1924).
- [80] Canahan, N.F. and Starling, K.E., *Equation of State for N nonattracting Rigid Spheres*, J. Chem. Phys. 51,635, (1969).
- [81] Pitzer, K.S. and Curl Jr, R.F., *The Volumetric and Thermodynamic Properties of Fluids. 111. Empirical Equation for the Second Virial Coefficient*, J. Am. Chem. Soc. 79 (10), pp 2369–2370, (1957).
- [82] Arbanil, J.D.V., Lemos, J.P.S. and Zanchin, V.T., *Polytropic spheres with electric charge : compact stars, the Oppenheimer-Volkoff and Buchdahl limits, and quasiblack holes*, Phys. Rev. D 88 084023, (2013).
- [83] Fronsdal, C., *Reissner-Nordstrom and charged gas spheres*, Lett. Math. Phys. 82 255-273, (2007).
- [84] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, U. Chicago Press, Chicago, (1939).
- [85] Yu, Y.Q. and Liu, S.M., *Relativistic charged Balls*, Commun. Theor. Phys. 33, 571-576, (2000).
- [86] Buchdahl, H.A., *General Relativistic Fluid Spheres*, Phys. Rev. 116, 1027, (1959).
- [87] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, J.Wiley et Sons, Canada, (1972).
- [88] Wald, R.M., *General Relativity*, U. Chicago Press, Chicago and London, (1984).
- [89] Tsuchida, T., Kawamura, G. and Watanabe, K., *A Maximum Mass-to-Size Ratio in Scalar-Tensor Theories of Gravity*, Prog. Theor. Phys. Vol. 100, No.2, (1998).
- [90] Misner, C.W. and Sharp, D.H., *Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse*, Phys. Rev. 136, B571, (1964).
- [91] Nilsson, U.S., Uggla, C., *general relativistic stars : Polytropic equations of state*, Annals Phys. 286, 292-319, (2000).
- [92] Hartle, J.B., *Bounds on the mass and moment of inertia of non-rotating neutron stars*, Phys. Rept. 46 , 201, (1978).

- [93] Chandrasekhar, S., *The maximum mass of ideal white dwarfs*, Ap. J. 74-81, (1931).
- [94] Lemos, J.P.S., Lopes, F.J., Quinta, G. and Zanchin, V.T., *Compact stars with a small electric charge : the limiting radius to mass relation and the maximum mass for incompressible matter*, Eur. Phys. J. C 75 :76, (2015).
- [95] Terzic, B., PHYS 652 – Astrophysics, (2008).
- [96] Richard L. Bowers, Terry Deeming, *Astrophysics : Stars*, Jones and Bartlett Publishers, (1984).
- [97] Landau, L.V., *On the theory of stars*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion 1, 285, (1932).
- [98] Lehoucq, R., *la masse en astrophysique*, Fleurance, (2002).
- [99] Oppenheimer, J.R. and Volkoff, G., *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev. 55 374, (1939).
- [100] Kalogera, V. and Baym, G., *The Maximum Mass of a Neutron Star*, Ap. J. 470, L61, (1996).
- [101] Bombaci, I., *The maximum mass of a neutron star*, Astron. Astrophys. 305,871-877, (1996).
- [102] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, U. Chicago Press, Chicago, (1939).
- [103] Leinaas, J.M., *Classical Mechanics and Electrodynamics*, Lecture notes – PHYS 3120, (December 2009).
- [104] Utiyama, R., *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*, Phys. Rev. 101 1597, (1956).
- [105] Deruelle, N., Sasaki, M. and Sendouda, Y., *Junction Conditions in $f(R)$ Theories of Gravity*, Prog. Theor. Phys. 119 237-251, (2003).
- [106] Senovilla, J.M.M., *Junction conditions for $F(R)$ gravity and their consequences*, Phys. Rev. D 88, 064015, (2013).
- [107] de la Cruz-Dombriz, A., Dunsby, P.K.S. and Saez-Gomez, D., *Junction conditions in extended Teleparallel gravities*, JCPJ 12-048, (2014).

- [108] Santos, E., *Quantum vacuum effects as generalized $f(R)$ gravity : Application to stars*, Phys. Rev. D 81,064030, (2010).
- [109] Kobayashi, T. and Maeda, K.i., *Relativistic stars in $f(R)$ gravity, and absence thereof*, Phys. Rev. D 78,064019, (2008).
- [110] Hendi, S.H., Bordbar, G.H., Eslam Panah, B. and Panahiyan, S., *Neutron stars structure in the context of massive gravity*, arXiv :1701.01039[gr-qc], (2017).
- [111] Babichev, E. and Langlois, D., *Relativistic stars in $f(R)$ and scalar-tensor theories*, Phys. Rev. D 81, 124051, (2010).
- [112] Babichev, E. and Langlois, D., *Relativistic stars in $f(R)$ gravity*, Phys. Rev. D 80, 121501, (2009).
- [113] Feng, W.X., Geng, C.Q., Kao, W.F. and Luo, L.W., *Equation-of-state of neutron stars with junction conditions in the Starobinsky model*, Int. J. Mod. Phys. D Vol. 26-1750186, (2017).
- [114] Ganguly, A., Gannouji, R., Goswami, R. and Ray, S., *Neutron stars in the Starobinsky model*, Phys. Rev. D 89 064019, (2014).
- [115] Senovilla, J.M.M., *Junction conditions for $F(R)$ gravity and their consequences*, Phys. Rev. D 88 064015, (2013).
- [116] Deruelle, N., Sasaki, M. and Sendouda, Y., *Junction Conditions in $f(R)$ Theories of Gravity*, Prog. Theor. Phys. Vol. 119, No.2, (2008).
- [117] Siffert, B.B., de Mello, J.R. and Calvao, M.O., *Compact Charged Stars*, Braz. J. Phys. 37 2B. (2007).
- [118] Orellana, M., Garica, F., Teppa Pannia, F.A. and Romero, G.E., *Structure of neutron stars in R -squared gravity*, arXiv :1301.5189v1 [astro-ph.CO] 22 Jan 2013, (2013).
- [119] Rescoa, M.A., de la Cruz-Dombriz, A., Llanes-Estradaa, F.J. and Castrillo, V.Z., *On neutron stars in $f(R)$ theories : small radii, large masses and large energy emitted in a merger*, Phys.Dark Univ. 13 147-161, (2016).
- [120] Capozziello, S., De Laurentis, M., Odintsov, S.D. and Stabile, A., *Hydrostatic equilibrium and stellar structure in $f(R)$ -gravity*, Phys. Rev.D 83 064004, (2011).