

MA 510-06-1

# UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA



**Faculté des Sciences**

Département de mathématiques

Mémoire présenté par :

∞ SAOUDI SOUMIA

∞ GOUDJILI SOUMIA

En vue d'obtenir le diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique.

**Filière :** Mathématiques.

**Option :** Recherche Opérationnelle.

**Sujet :**

Etude de noyaux et noyaux par chemins  
monochromatiques dans les graphes  
orientés

Devant le jury composé de :

N.IKHLEF ESCHOUF

Maitre assistant, U.de Médéa

Président

A.RAMOUL

Maitre assistante, U de Blida

Examinatrice

Z.ZEMIR

Maitre de conférence, U de Blida

Examinatrice

M.BLIDIA

Professeur, U.de Blida

Promoteur

MA-510-06-1

Blida, Juin 2011

## *Dédicace*

*Avec une énorme joie je dédie ce petit travail aux plus chères personnes de ma vie :*

*A la femme qui a rempli ma vie d'affection et d'encouragements à vous chère mère FAIZA.*

*A mon adoré papa MOHAMED, l'homme à qui je dois ma réussite, mon succès et mon bonheur.*

*A mon très chère mère MOHAMED.*

*A mes oncles, mes tantes : NACERA, DALILA, AICHA et ZHOR.*

*A mes cousins et cousines.*

*A mon binôme et chère amie SOUMIA ainsi que toute sa famille.*

*A mes très chères amies : CHAIMA, IHSSANE, FARIDA et SOUAD.*

*A ceux que j'aime et sont chère à mon cœur.*

*Saoudi Soumia*

## *Dédicace*

*Je tiens à dédier ce travail à ma très chère et précieuse mère YAMENA pour son soutien durant toutes mes études et pour sa persévérance de m'avoir encouragé pour finir ce travail malgré les événements.*

*A mes sœurs SIHEM et SALIHA et à toute ma famille.*

*A tous mes amis de lycée YASMIN, HONAIDA et ZINEB et à tous mes collègues au département de mathématiques de l'université de BLIDA.*

*A mon binôme et chère amis SOUMIA ainsi que toute sa famille.*

*A toute personne qui me connaît de près ou de loin.*

*Goudjili Soumia*

## *Remerciements*

*Tout d'abord nous remercions Dieu pour nous avoir guidé vers le bon chemin de la lumière et du savoir, pour nous avoir donné du courage et de la volonté afin de pouvoir réaliser ce mémoire.*

*Nous tenons à remercier notre promoteur monsieur Mostafa Blidia pour sa disponibilité, son aide, sa compréhension.*

*Nous tenons également à remercier les membres de jury pour avoir eu l'obligeance d'accepter et d'apprécier notre travail.*

*Nous saisissons aussi cette opportunité pour exprimer notre remerciement et notre gratitude à M<sup>elle</sup> Ramoul Amina et à tous ceux qui nous avons aidé de près ou de loin durant la préparation de ce mémoire.*

## ملخص

في هذا البحث، ونحن بطبيعة الحال نعيد النظر في مسألة وجود نواة في الرسوم البيانية الموجهة.

في البداية، نقدم النتائج الرئيسية التي تؤدي إلى تحديد نواة في الرسم البياني في حين تحسين توجهه .

وفي الخطوة الموالية، ندرس مشكلة وجود نواة في الرسوم البيانية الموجهة من دون دارات، ونحن نطور خوارزمية متعددة الحدود، ونعطي بعض الأمثلة الملموسة للتطبيق.

في النهاية، نعتمد مفهوم النواة عن طريق المسارات أحادية اللون في الرسم البياني الموجه  $m$ -ملون.

## RESUME

Dans ce mémoire, nous avons naturellement reconsidéré la question d'existence d'un noyau dans les graphes orientés.

Dans un premier temps, nous citons les résultats essentiels qui conduisent à la détermination du noyau dans un graphe orienté tout en les améliorant.

Dans un second temps, nous considérons le problème d'existence de noyau dans les graphes orientés sans circuits dont nous établirons un algorithme polynomial, et nous donnons quelques exemples d'application concrets.

A la fin ; nous considérons le concept de noyau par chemins monochromatiques dans un graphe orienté  $m$ -coloré.

## ABSTRACT

In this thesis, we naturally have reconsidered the question of existence of a kernel in directed graphs.

Initially, we quote the main results that lead to the determination of the kernel in a directed graph while improving them.

In a second step, we consider the problem of existence of the kernel in directed graphs without circuits, we develop a polynomial algorithm, and we give some examples of concrete application.

At the end, we consider the kernel concept by monochromatic paths in  $m$ -colored digraph.

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Graphe orienté D.....	04
<b>Figure 2.1</b> : Graphe orienté sans noyau.....	10
<b>Figure 2.2</b> : Graphe orienté avec deux noyaux $\{a, c\}$ et $\{b, d\}$ .....	10
<b>Figure 2.3</b> : Graphe orienté avec un unique noyau $\{c\}$ .....	10
<b>Figure 2.4</b> : Un digraphe avec deux fonctions de <i>Grundy</i> .....	12
<b>Figure 2.5</b> : Un graphe orienté qui n'admet pas une fonction de <i>Grundy</i> .....	12
<b>Figure 2.6</b> : un digraphe qui admet un noyau mais n'admet pas de fonction de <i>Grundy</i> .....	13
<b>Figure 2.7</b> : Graphe correspondant à un jeu de 12 allumettes.....	24
<b>Figure 2.8</b> : Le noyau du graphe associé au jeu de <i>Nim</i> .....	26
<b>Figure 2.9</b> : La représentation graphique du problème.....	27
<b>Figure 3.1</b> : Un digraphe 3-coloré.....	31
<b>Figure 3.2</b> : Le digraphe $C_3$ .....	31
<b>Figure 3.3</b> : La fermeture par chemins monochromatiques .....	32
<b>Figure 3.4</b> : digraphe 2-coloré.....	34
<b>Figure 3.5</b> : La fermeture par chemins monochromatiques .....	34
<b>Figure 3.6</b> : Le chemin monochromatique de $x_3$ à $x_1$ .....	36
<b>Figure 3.7</b> : le digraphe $G_5$ .....	36
<b>Figure 3.8</b> : le tournoi $G_6$ .....	37
<b>Figure 3.9</b> : un tournoi $G_4$ .....	38
<b>Figure 3.10</b> : Le tournoi T.....	39



## Table de matières

• Dédicaces.	
• Remerciements.	
• Résumé.	
• Introduction générale.....	01
• Chapitre 1 : Notions préliminaires de la théorie des graphes et complexité algorithmique.	
A. Notions et définitions.....	03
1. Graphes et graphes orientés.....	03
2. Sous graphe, graphe partiel.....	04
3. Chaines et Chemins.....	04
4. Graphes spéciaux.....	05
5. Puits et Sources.....	06
6. Connexité et forte connexité.....	06
7. Ensemble stable, ensemble absorbant.....	07
B. Complexité algorithmique : .....	07
a. Problèmes faciles et problèmes difficiles.....	07
b. Problèmes NP-complets.....	08
• Chapitre 2 : Etude théorique et algorithmique de recherche de noyau	
2.1-Introduction.....	09
2.2-Définitions.....	09
2.3-Propriétés du noyau.....	11
2.4-Fonction de Grundy.....	11
2.5-Etude des noyaux dans certains graphes orientés.....	13
a-Graphes orientés sans circuits et graphes orientés tels que tout circuit possède un arc symétrique.....	13
b - Graphes orientés sans circuits impairs, graphes orientés tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques et graphes orientés tels que tout circuit impair est symétrique.....	16
c-Travaux élaborés par H.Galeana Sánchez et V.Neumann Lara et conjecture de P.Duchet.....	18
2.6-Exemples d'applications.....	21
2.7-Etude Algorithmique de recherche du noyau dans un graphe orienté.....	27

- Chapitre 3 : Etude théorique de recherche du noyau par chemins monochromatiques.

3.1-Introduction.....	30
3.2-Définitions.....	30
3.3-Etude d'existence d'un noyau par chemins monochromatiques.....	33
3.4-Représentation matricielle d'un digraphe $m$ -coloré.....	38
3.5-Recherche des chemins monochromatiques.....	39
3.6-Fermeture par chemins monochromatiques.....	40
3.7- Détermination du noyau par chemins monochromatiques.....	41

## Introduction générale

Le terme « *Recherche Opérationnelle* » est une littérale de « *Operational Research* », terme employé pour la première fois en Angleterre par *Sir Robert Watson-Watt* pour désigner la recherche scientifique du rendement optimum d'une opération militaire pendant la seconde guerre mondiale.

La recherche opérationnelle (*R.O*) est la discipline des méthodes scientifiques utilisables pour faciliter la prise de décisions face à des problématiques.

Grace à elle, les décideurs peuvent analyser et mieux comprendre des situations complexes ou de grande dimension, aux itérations nombreuses et donc, faire des choix pertinents en toute connaissance de cause. Elle participe à l'aide à la décision.

La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie des jeux, les fils d'attentes sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

Le mot « *graphe* » est introduit par l'Anglais *J.J.Sylvester* en 1822. Un graphe est donné classiquement par la donnée d'un ensemble de points appelés sommets et un ensemble de liaisons entre ces sommets appelés arcs dans le cas de graphes orientés et arêtes si le graphe n'est pas orienté.

La théorie des graphes est apparue d'abord comme curiosité mathématique avec le problème des ponts de Königsberg, quand *Euler* (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) qui est arrosée par la rivière de Pregel, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du XXe siècle, grâce aux travaux de *König*, de *Kuratowski* de *Cayley* et plus récemment, de *Berge*, d'*Erdős* et de *Harary*.

La théorie des graphes est un outil puissant de modélisation et résolution de problèmes concrets. Elle offre aussi un intérêt pédagogique certain. En effet, les définitions sont simples et de véritables problèmes de recherche peuvent être posés sous forme de « jeux mathématiques » dont la formulation ludique peut recouvrir de grandes difficultés.

En 1944, *Von-Neumann* et *O. Morgenstern* introduisent pour la première fois la notion de « noyau » d'un graphe comme une solution d'un jeu coopératif à  $n$  joueurs, pour le graphe orienté dans les sommets représentent les résultats possibles des décisions et les arcs les préférences efficaces. En effet, ils ont démontré qu'un graphe orienté sans circuits admet un noyau.

Le noyau est un ensemble de sommets non reliés entre eux, ou tout sommet extérieur à ce sous ensemble est absorbé par au moins un sommet de celui-ci.

Le fait qu'un graphe orienté ne possède pas toujours un noyau a amené beaucoup d'auteurs à s'intéresser à l'existence de noyaux dans un graphe orienté donné. Plusieurs travaux ont été réalisés notamment par *C. Berge*, *M. Blidia*, *P. Duchet*, *H. Jacob*, *H. Meyniel*, *F. Maffray*, *V. Neumann Lara* et *H. Galeana Sánchez*.

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

Nous introduisons dans le premier chapitre les définitions de base ainsi les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. A la fin du chapitre nous parlerons de la complexité algorithmique.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du concept de noyau dans les graphes orientés en améliorant certaines preuves et nous ferons à la fin du chapitre une étude algorithmique du théorème du *J.V. Neumann* et *O. Morgenstern* (tout digraphe sans circuit admet un noyau unique) qui sera par la suite programmée.

Dans le troisième chapitre nous parlerons de la notion du noyau par chemins monochromatiques dans un graphe orienté  $m$ -coloré.

Nous avons fait une étude complète sur cette théorie qu'on résumera dans ce mémoire.

# CHAPITRE 1

## NOTIONS PRELIMINAIRES DE LA THEORIE DES GRAPHS ET COMPLEXITE ALGORITHMIQUE

### 1.1-Introduction :

Dans ce chapitre on introduit les définitions ainsi <sup>que</sup> les notations usuelles du domaine de la théorie des graphes. Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, on reporte le lecteur au livre de *C. Berge* [1].

### A- Notions et définitions :

#### 1-Graphes et graphes orientés :

Un graphe  $G$  est un schéma constitué par deux ensembles finis : un ensemble de points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  noté  $X$ , et un ensemble de flèches  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$  reliant chacune, deux de ceux-ci, noté  $E$ . Les points sont appelés les sommets du graphe, et les flèches les arêtes du graphe.

Le nombre d'arcs qui va d'un sommet  $x_i$  à un sommet  $x_j$  ne peut jamais excéder un entier  $p$ , on dira qu'on a un  $p$ -graphe.

- Dans un graphe orienté  $D$ , si toutes les arêtes sont orientées, on les appellera arcs, et l'ensemble des arcs sera noté  $U$ .
- Un arc de  $D$ , orienté du sommet  $x$  vers le sommet  $y$ , sera noté  $(x, y)$ , l'arc symétrique qui lui correspond, s'il existe est noté  $(y, x)$ .

Si l'arc  $(y, x)$  n'existe pas nous dirons que  $(x, y)$  est antisymétrique. Et pour un arc  $(x, y)$  de  $D$  on dira que  $x$  est l'extrémité initiale de l'arc  $(x, y)$  et que  $y$  est son extrémité finale.

Si l'arc  $(x, y)$  existe dans  $U$ , les sommets  $x$  et  $y$  sont dits adjacents,  $y$  est dit successeur de  $x$ , et  $x$  est dit prédécesseur de  $y$ .

On note par  $\Gamma^+(x) = \{y \in X / (x, y) \in U\}$ , l'ensemble des successeurs de  $x$  et  $\Gamma^-(x) = \{y \in X / (y, x) \in U\}$ , l'ensemble des prédécesseurs de  $x$ .

Les sommets voisins de  $x$ , sont les sommets de  $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

Un sommet est dit terminal s'il n'a aucun successeur.

**Exemple 1:**

Soit  $D=(X, U)$  un graphe orienté d'ordre 6, tels que :

$X=\{a, b, c, d, e, f\}$  et  $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ .

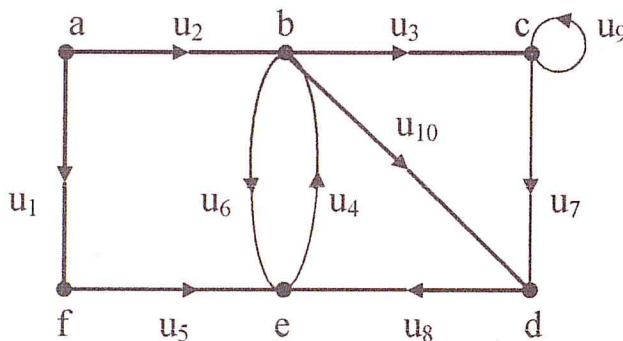


Figure 1.1 : Graphe orienté D

**2-Sous-graphe, graphe partiel :**

Sous-graphe de  $G$  engendré par  $A \subset X$ , c'est le graphe  $G_A$  dont les sommets sont les points de  $A$ , et dont les arcs sont les arcs de  $G$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ .

Graphe partiel de  $G$  engendré par  $V \subset U$ , c'est le graphe  $G_p = (X, V)$  dont les sommets sont les points de  $X$ , et dont les arcs sont ceux de  $V$ .

Le sous-graphe partiel de  $G_{sp}$  est un sous-graphe du graphe partiel de  $G$ .

**3-Chaines et chemins :**

Une chaine est la donnée d'une suite de sommets  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  telle que  $(x_i, x_{i+1})$  pour  $i=0, \dots, p-1$  soit une arête de  $E$ .

Un cycle est une chaine fermée.

Une corde dans un cycle  $(x_0, x_1, \dots, x_p, x_0)$  est une arête  $(x_i, x_j)$  qui n'appartient pas à l'ensemble des arêtes du cycle où  $x_i \neq x_j$ .  $\lambda$   
*avec*

Une corde courte dans un cycle est de la forme  $(x_i, x_{i+2})$ .

Un pôle est l'extrémité terminale d'une corde.

Un chemin du graphe  $D=(X, U)$  est défini par une suite de sommets deux à deux disjoints  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$  telle que l'extrémité terminale de l'arc  $(x_{i-1}, x_i)$  coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc  $(x_i, x_{i+1})$  pour  $i=1, \dots, p-1$ .

Un circuit est un chemin fermé.

Le nombre d'arcs (respectivement d'arêtes) d'un chemin (respectivement chaîne)  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$  est la longueur du chemin (respectivement chaîne).

#### 4-graphes spéciaux :

Un 1-graphe orienté  $G=(X, U)$  est symétrique si tous ses arcs sont symétriques.

Dans un graphe orienté symétrique, tous les sommets sont reliés dans les deux directions. On pourra donc considérer au lieu d'un arc  $(x, y)$  une arête  $[x, y]$  qui existe si  $x$  et  $y$  sont adjacents.

Un 1-graphe orienté est antisymétrique si  $(x, y) \in U$  alors  $(y, x) \notin U$ .

$\forall x \in X, \forall y \in X.$

Un graphe  $G=(X, U)$  sera appelé un graphe simple s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- ❖  $G=(X, U)$  n'a pas de boucles.
- ❖ Dans  $G=(X, U)$ , entre deux sommets quelconques, il n'ya jamais plus d'une arête les reliant c'est-à-dire le graphe est sans arête multiple.

Un 1-graphe orienté est complet si seulement si on a  $(x, y) \notin U$  alors  $(y, x) \in U$ .

$\forall x \in X, \forall y \in X.$

Un 1-graphe orienté est transitif si  $(x, y) \in U, (y, z) \in U$  alors  $(x, z) \in U$ .

$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X.$

Une clique est un graphe orienté symétrique complet.

Un tournoi est un graphe orienté antisymétrique complet.

Un graphe est dit biparti s'il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe et ses sommets peuvent-être répartis en deux sous-ensembles stables.

### **5-Puits et Sources :**

Un puit est un sommet qui est successeur de tous ses voisins, c'est-à-dire qui reçoit tout sommet qui lui est adjacent.

Une source est un sommet qui est prédécesseur de tout sommet qui lui est adjacent.

### **6-Connexité et forte connexité :**

Pour un graphe non orienté la relation  $x\mathcal{R}y$  définie par : « il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$  » est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes du graphe.

Un graphe est dit connexe s'il contient une seule composante connexe.

Pour un graphe orienté, la relation  $x\mathcal{R}y$  définie par : « il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$  » est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes fortement connexes.

On appelle une composante fortement connexe de  $D$  tout sous-graphe induit par une classe d'équivalence.

Un graphe est dit fortement connexe s'il est réduit à une seule composante fortement connexe.

A tout graphe orienté  $D=(X, U)$  on associe un 1-graphe sans boucles  $D_r=(V_r, E_r)$  appelé graphe réduit de  $G$  et défini comme suit :

Les sommets de  $V_r$  sont les composantes fortement connexes et deux sommets  $C_i$  et  $C_j$  sont reliées par un arc de  $C_i$  vers  $C_j$  si et seulement s'il existe au moins un arc d'extrémité initial d'un sommet de  $C_i$  et d'extrémité terminale d'un sommet de  $C_j$ .

Le graphe  $D_r$  est sans circuit.

### **7-Ensemble stable, Ensemble absorbant :**

Soit  $D=(X, U)$  un 1-graphe orienté sans boucles.

Un stable  $S$  dans  $D$  est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliées deux à deux. Autrement dit,  $S$  est un sous-ensemble de  $X$  tel que  $\Gamma(S) \cap S = \emptyset$ .



$S$  est un stable maximal si et seulement si  $\nexists S' \supset S$  tel que  $S'$  est stable.

Un absorbant  $A$  dans  $D$  est un sous-ensemble de sommets  $A \subset X$  tel que  $\Gamma(A) \cup A = X$ . Autrement dit, tout sommet  $x \notin A$ , possède au moins un successeur dans  $A$ .

$A$  est un absorbant minimal si et seulement si  $\nexists A' \subset A$  tel que  $A'$  est absorbant.

## **B-complexité des algorithmes :**

### **a) Problèmes faciles et problèmes difficiles :**

Les problèmes des graphes se rattachent à la grande classe des problèmes d'optimisation combinatoire.

Un problème d'optimisation combinatoire est un problème qui consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble de solutions réalisables.

Tout problème pouvant être résolu par un algorithme déterministe dont le temps d'exécution est borné par un polynôme (qui est fonction du nombre de données) est dit polynomial, on dit qu'il s'agit d'un problème facile.

Un algorithme de résolution d'un problème ( $\mathcal{P}$ ) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires (la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles, ...) transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème ( $\mathcal{P}$ ) en une chaîne de caractères représentant ses résultats.

Les problèmes pouvant se résoudre par un algorithme polynomial (on dit aussi efficace), appartiennent à une classe notée par  $P$ .

Un problème sera dit difficile si on ne connaît pas d'algorithme déterministe polynomial qui le résout (cela ne veut pas dire qu'un tel algorithme n'existe pas).

Les chercheurs se sont intéressés aux problèmes dont les algorithmes les résolvant ont un temps d'exécution qui croît en exponentiel, par conséquent ils ont introduit la classe des problèmes NP.

### **a.1-Définitions :**

Un problème est dit appartenir à « la classe  $P$  » s'il existe un algorithme polynomial qui le résout, « la classe NP » ( problèmes non déterministes

polynomiaux) comporte les problèmes pouvant être résolus en temps polynomial non déterministe qui serait la donnée d'une combinaison d'instruction pouvant être exécutées en parallèle (algorithme pouvant se trouver dans plusieurs états à la fois, chose qui ne peut être réelle), contrairement à un algorithme déterministe qui exécute une seule instruction à la fois puis fait un retour pour exécuter le reste des instructions.

Un algorithme non déterministe est un algorithme qui comporte des instructions de choix, si le bon choix est effectué, le temps de calcul est polynomial. Par contre, si on énumère tous les choix possibles, l'algorithme non déterministe se transforme en un algorithme déterministe nécessitant un temps de calcul exponentiel.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que  $P \subseteq NP$ . Mais la classe  $NP$  contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution.

Cependant, la conjecture proposée par Cook ;  $P = NP$  reste sans preuve.

Un problème ( $\mathcal{P}$ ) est dit NP-dur si tout problème ( $Q$ ) de NP lui est faiblement réductible ( i.e : il existe une fonction  $g$  calculable en un temps polynomial tel que pour toute solution  $x$  de ( $\mathcal{P}$ ) ,  $y=g(x)$  est solution de ( $Q$ ) ).

On note par  $(\mathcal{P}) < (Q)$  : le problème ( $\mathcal{P}$ ) est faiblement réductible au problème( $Q$ ) .

On dit qu'un problème ( $P_1$ ) se réduit en temps polynomial à un problème ( $P_2$ ), s'il existe un algorithme de résolution de ( $P_1$ ) est polynomial lorsque la résolution de ( $P_2$ ) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

### **b-Problèmes NP-complets :**

Un problème  $P$  est dit NP- complet si  $P$  est à la fois NP- dur et NP. Les problèmes NP- complets sont les problèmes difficiles de NP . Si nous arrivons à résoudre un problème quelconque de la classe des problèmes NP-complets en un temps polynomial.



## CHAPITRE 2

# ETUDE THEORIQUE ET ALGORITHMIQUE DE RECHERCHE DE NOYAUX

### 2.1-Introduction :

Dans la première partie de ce chapitre, on donne la définition et les théorèmes d'existence de noyaux dans les graphes orientés et dans la deuxième partie, on propose un algorithme de la recherche de ce concept dans un graphe sans circuits.

### 2.2-Définitions :

A partir du concept de « Solution » d'un jeu à  $n$  joueurs dû à *J. Neumann* et *O. Morgenstern* ; *C. Berge* a introduit la notion de *noyau* et l'a reliée à la fonction de *Grundy*.

- ❖ Dans un graphe orienté  $D=(X, U)$  un noyau est un ensemble  $N$  de sommets de  $X$  qui est stable et absorbant (i.e :  $N \cap \Gamma^-(N)=\emptyset$  et  $N \cup \Gamma^-(N)=X$ ).
- ❖ Un graphe orienté est noyau parfait si et seulement si tout sous graphe admet un noyau.
  - $\emptyset$  n'est pas un *noyau*.
  - Dans un graphe orienté, le noyau n'existe pas toujours.
  - Dans un graphe orienté, le noyau s'il existe n'est pas nécessairement unique.

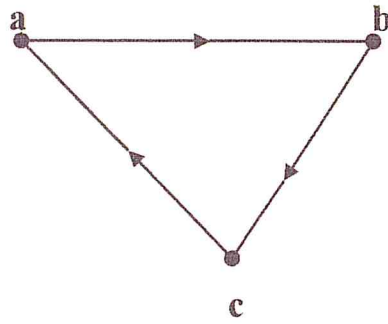


Figure 2.1: Graphe orienté sans noyau

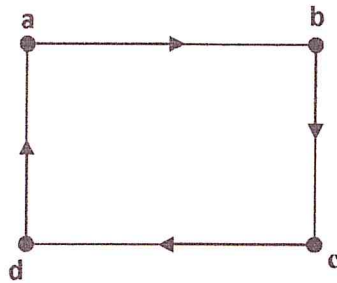


Figure 2.2 : Graphe orienté avec deux noyaux  $\{a, c\}$  et  $\{b, d\}$

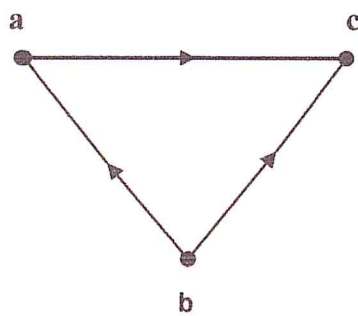


Figure 2.3 : Graphe orienté avec un unique noyau  $\{c\}$

### 2.3-Propriétés du noyau :

A partir de la constatation qu'un noyau dans un digraphe n'existe pas toujours, une question qui se pose d'une manière naturelle : "Quelles sont les propriétés structurelles d'un digraphe qui implique l'existence d'un noyau ?".

#### Théorème 1:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $N \subset X(D)$  soit un noyau d'un digraphe  $D=(V, U)$  est que sa fonction caractéristique  $\varphi_N(y)$  vérifie :

$$x \in X ; \varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) \text{ avec } \varphi_N(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{si } x \notin N \end{cases}$$

Si  $\Gamma^+(x) = \emptyset$ , on posera par convention  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$ .

### 2.4-Fonction de Grundy :

Le concept de fonction de *Grundy* a été introduit par *P.M. Grundy* ; en 1939, pour des digraphes sans circuits, puis étendu en 1956, par *C.Berge* et *M.P. Schutzenberger* aux digraphes quelconques.

Considérons un 1-graphe orienté, sans boucles  $D=(X, U)$ .

Par définition, une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{N}$  est dite une fonction de *Grundy*, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- (1)  $g(x) = k > 0$  , entraîne que, pour tout  $j < k$  il existe un  $y \in \Gamma^+(x)$  avec  $g(y) = j$ .
- (2)  $g(x) = k$ , entraîne que tout  $y \in \Gamma^+(x)$  vérifie  $g(y) \neq k$ .

- Une fonction de *Grundy* n'existe pas toujours.
- Un digraphe peut admettre plusieurs fonctions de *Grundy*.

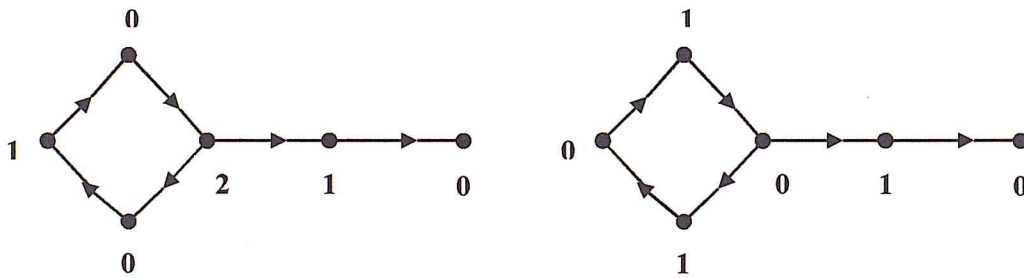


Figure 2.4 : Un digraphe avec deux fonctions de *Grundy*

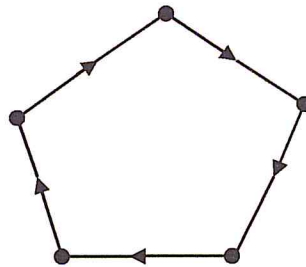


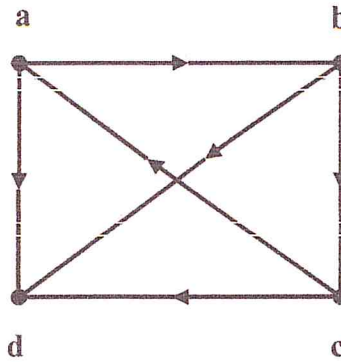
Figure 2.5 : Un graphe orienté qui n'admet pas une fonction de *Grundy*

**Proposition :** ([1]) Si un digraphe  $D$  admet une fonction de *Grundy*  $g$ , alors  $D$  a un noyau. En effet, l'ensemble  $S = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$  est un noyau de  $D$ , puisque l'on a simultanément :

$$(1) x \in S \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) > 0 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S = \emptyset.$$

$$(2) x \notin S \Rightarrow g(x) \neq 0 \Rightarrow \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) = 0 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie, on peut vérifier que le digraphe de la figure 2.6 admet  $\{d\}$  comme noyau, mais il n'admet pas de fonction de *Grundy*.



**Figure 2.6 :** un digraphe qui admet un noyau mais n'admet pas de fonction de *Grundy*

**Théorème 2 :** ([1])

Si un graphe orienté  $D$  est un noyau-parfait alors  $D$  admet une fonction de *Grundy*.

**Corollaire :**

Un digraphe symétrique admet une fonction de *Grundy*.

Un digraphe transitif admet une fonction de *Grundy*.

Un digraphe sans circuits de longueur impairs admet une fonction de *Grundy*.

**2.5-Etude des noyaux dans certains graphes orientés :**

Vu que dans un graphe orienté un noyau n'existe pas toujours, une question se pose de manière naturelle : quelles conditions doit vérifier un graphe donné pour qu'il y ait un noyau?. Tout au long de ce chapitre on essayera de donner quelques éléments de réponse à cette question.

On appellera digraphe un graphe orienté, emprunté au mot anglais « *directed graph* ».

**a. Graphes orientés sans circuits et graphes orientés tels que tout circuit possède un arc symétrique :**

**Proposition 1 :** ([1])

Soit  $D$  un digraphe simple, si  $S$  est un noyau alors  $S$  est aussi un stable maximal et un absorbant minimal (par rapport à l'inclusion).

**Preuve :**

Considérons  $S$  un noyau du digraphe  $D$  et  $a \notin S$  alors  $\{a\} \cup S$  ne peut être un ensemble stable car  $a$  est absorbé par  $S$ , donc  $S$  est un stable maximal.

Si  $b \in S$ ,  $S - \{b\}$  ne peut être absorbant car il n'absorbe pas  $b$ , donc  $S$  est un absorbant minimal.

**Proposition 2 :** ([1])

$D$  est un digraphe formé d'arcs symétriques, alors  $D$  admet un noyau. De plus  $S$  est un noyau si et seulement si  $S$  est un stable maximal.

**Preuve :**

Si  $S$  est un stable maximal il est aussi absorbant automatiquement (vu que tout arc est symétrique) et donc  $S$  est noyau. Inversement, si  $S$  est un noyau, il est stable maximal (sinon  $S$  ne serait pas absorbant).

**Proposition 3 :** ([1])

Si  $D$  est un digraphe transitif, tout ensemble absorbant minimal est de cardinalité  $\beta(D)$  (i.e : nombre minimum de sommets du digraphe qui absorbent tous les sommets). En outre un ensemble  $S$  est noyau si et seulement si il est absorbant minimal.

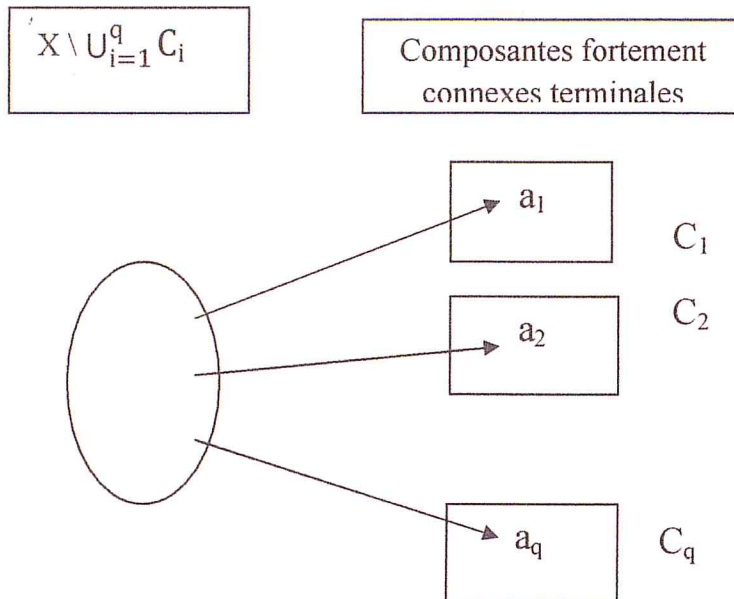
**Preuve :**

Nous considérons les composantes fortement connexes terminales de  $D$ , qu'on notera par  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , ceux sont des sous ensembles complets et symétriques à cause de la transitivité dans le digraphe  $D$ .

a/ Si  $A$  est un ensemble absorbant minimal arbitraire, il contient un élément dans chacune des composantes terminales. Donc tout ensemble absorbant minimal contient le même nombre de sommets qui est égal au nombre de composantes fortement connexes terminales.

b/ Si  $S$  est un noyau,  $S$  est aussi un absorbant minimal. Inversement, tout ensemble absorbant dans un digraphe transitif est un stable, puisque il n'y a aucun arc qui sort des composantes fortement connexes terminales. (Voir la figure ci dessous)





**Théorème 1 :** ([2])

Tout digraphe sans circuit admet un noyau unique.

**Preuve :**

On construit les sous ensembles de sommets suivants :

$$X(0) = \{x \in X / \Gamma^+(x) = \emptyset\}$$

$$X(1) = \{x \in X - X(0) / \Gamma^+(x) \subset X(0)\}$$

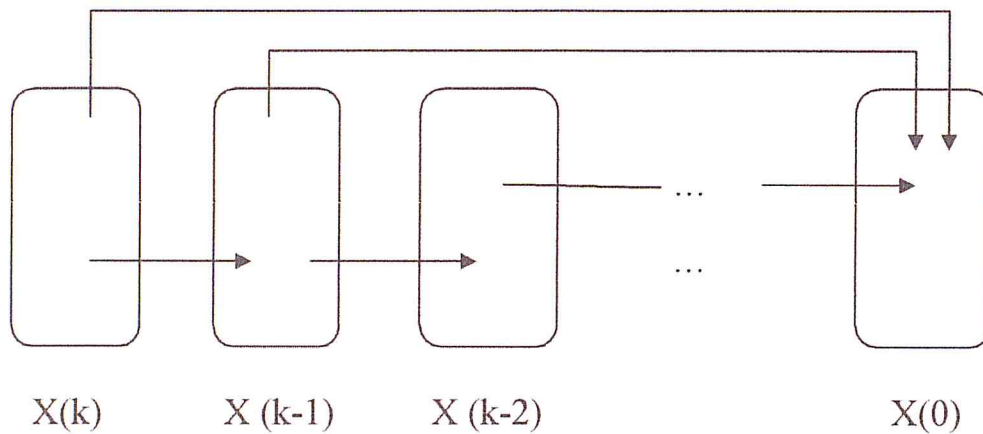
⋮

On définira ainsi

$$X(k) = \{x \in X - X(0) \cup X(1) \cup \dots \cup X(k-1) / \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1) \cup \dots \cup X(k-1)\}$$

Ce procédé est appelé la mise en ordre des sommets du digraphe. On termine ainsi jusqu'à épuisement de tous les sommets. Puis on forme le noyau à partir de cette construction, de manière unique et de proche en proche. On prend dans le noyau N les sommets de X(0), on remarque que X(0) est non vide car le digraphe est non vide, de plus X(0) est stable car  $\Gamma^+(x)$  pour  $x \in X(0)$  est vide, puis on supprime les sommets appartenant à X(0) et leurs prédécesseurs, et dans le digraphe restant on refait la même procédure, on complète ainsi le noyau N d'une manière unique et jusqu'à épuisement de tout les sommets.

Le sous ensemble N est un noyau du digraphe et il est unique par construction.  
 (Voir la figure ci dessous)



**Théorème 2** : ([3])

Un digraphe tel que tout circuit possède un arc symétrique admet un noyau.

**Preuve** :

Dans D, nous considérons tous les sommets non adjacents et nous les relient par des arcs symétriques, nous obtenons une clique, ainsi nous mettons en évidence un sommet puits noté  $x_1$  (sinon, il existerait un circuit sans arc symétrique ce qui contredirait l'hypothèse du théorème).

Puis dans le sous digraphe  $D - \{x_1 \cup \Gamma^-(x_1)\}$ , nous refaisons la même opération jusqu'à épuisement de tous les sommets, et le noyau N serait donné par l'union de ces puits.

**b/Graphes orientés sans circuits impairs, graphes orientés tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques et graphes orientés tels que tout circuit impair est symétrique :**

**Théorème 3** : ([4])

Un digraphe sans circuit de longueur impair admet un noyau (non nécessairement unique).

**Preuve** :

La preuve se fait par induction sur les sommets.

Décomposons le digraphe en composantes fortement connexes puis on montre les énoncés suivants :

(a) Toute composante fortement connexe  $C_j$ , admet un noyau  $N_j$  ;

(b) On considère les composantes fortement connexes terminales  $C_j$  ; et leurs noyaux  $N_j$  pour  $j=1, \dots, k$ , dans le sous digraphe engendré par les sommets de  $X - [\cup \{C_j \cup \Gamma^-(N_j) / j=1, \dots, k\}]$ , il existe un noyau par hypothèse d'induction qu'on notera  $N$  et puis on montre que  $N \cup \{\cup(N_j / j=1, \dots, k)\}$  est un noyau du digraphe.

**a-** On montre à présent que chacune des composantes fortement connexes admet un noyau. Pour cela on partitionne les sommets de  $C_j$ , en deux classes, on choisit un sommet quelconque  $x$  de  $C_j$  ; puis nous formons la classe  $C_j'$  des sommets atteints à partir de  $x$  par des chemins pairs et la classe  $C_j''$  des sommets atteints à partir de  $x$  par des chemins impairs, cette partition est toujours possible, sinon il existerait dans  $C_j$  ; un sommet  $y$  atteint à la fois, à partir de  $x$  par un chemin pair et un chemin impair, ceci formerait avec l'un ou l'autre des chemins de  $x$  à  $y$ , un circuit impair, ce qui contredirait l'hypothèse du théorème. Cette partition fait de la composante fortement connexe  $C_j$  un digraphe biparti dont  $C_j'$  et  $C_j''$  sont des noyaux, en effet un arc dans  $C_j'$  ne peut exister car sinon on aurait un circuit impair. De même pour la classe  $C_j''$  ce qui vérifie la stabilité. De plus la forte connexité du digraphe donne l'absorption de l'un et de l'autre.

**b-** Entre un sommet de  $N_j$  et un sommet  $N_j'$  il ne peut exister un arc vu que les composantes fortement connexes  $C_j$  et  $C_j'$  sont des composantes terminales. De même entre un sommet de  $N$  et un sommet de  $N_j$  par construction. L'absorption de tous les sommets découle d'une simple vérification.

#### **Théorème 4 : ([3])**

Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques admet un noyau.

#### **Preuve :**

Dans  $D$  nous enlevons tous les arcs symétriques. On décompose le digraphe en composantes fortement connexes, puis on le met en ordre.

On montre les propriétés suivantes :

**a/** Toute composante fortement connexe  $C_j$  est bipartite et donc admet un noyau  $N_j$ .

**b/** On considère les composantes fortement connexes terminales  $C_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) et par induction, dans le digraphe engendré par  $X - \{\cup(N_j \cup \Gamma^-(N_j) / j=1, \dots, k)\}$ ,  $N$  est un noyau et donc  $N \cup [\cup(N_j \cup \Gamma^-(N_j) / j=1, \dots, k)]$  du graphe tout entier.

En effet,

a/ On choisit  $x_0$  dans la composante fortement connexe  $C_j$  et on partitionne ses sommets en deux parties, l'une  $C_j'$  formée de sommets atteints par des chemins pairs à partir de  $x_0$ ,  $x_0$  en fait partie, et l'autre  $C_j''$  formée des sommets atteints à partir de  $x_0$  par des chemins impairs et nous montrons que cette composante est bipartite dans le digraphe  $D$  entier (après avoir remis les arcs symétriques).

$C_j'$  est un stable car deux sommets de  $C_j'$  ne peuvent être reliés, autrement on aura un circuit impair admettant au plus un arc symétrique ce qui contredit les hypothèses du théorème, de plus  $C_j'$  est un absorbant à cause de la forte connexité du graphe  $D$ , de même pour  $C_j''$ . Cette décomposition est donc possible,  $C_j'$  et  $C_j''$  sont des noyaux. Considérons  $N_j$  un noyau de  $C_j$ .

b/ Entre un sommet de  $N_{j_1}$  et un sommet de  $N_{j_2}$  il n'y a pas d'arcs car  $C_{j_1}$  et  $C_{j_2}$  sont des composantes terminales. Entre un sommet de  $N_j$  et un sommet de  $N$  il n'y a pas d'arcs car  $C_j$  est terminale. L'absorption de tous les sommets de  $D-N \cup \{U(N_j / j=1, \dots, k)\}$  est vérifiée à cause de la forte connexité du digraphe  $D$ .

Alors  $N \cup \{U(N_j / j=1, \dots, k)\}$  est un noyau du graphe  $D$ .

**c/Travaux élaborés par H. Galeana Sanchez et V. Neumann Lara et conjecture de P.Duchet:**

**Théorème 5 :** ([5])

Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux pôles consécutifs est noyau parfait.

**Méthode constructive :** ([6])

Cette méthode est inspirée des travaux de construction de noyau, élaborée par *P. Duchet, H. Jacob* et *H. Meyniel* et mise en œuvre par *M. Blidia*, elle a permis de montrer beaucoup de théorèmes. Elle consiste à construire un noyau dans un digraphe  $D$  vérifiant certaines conditions.

A partir du noyau  $N'$  du digraphe  $D-x_0$ , où  $x_0$  est un sommet quelconque de  $D$ , on détermine un noyau  $N$  du digraphe  $D$ .

On construit ainsi les sous graphes suivants :

$$B_0 = \Gamma^+(x_0) \cap [V - (x_0 \cup \Gamma^-(x_0))]$$

$$N_0 = \Gamma^+(B_0) \cap N'$$

$$B_1 = \Gamma^+(N_0) \cap [V - (x_0 \cup \Gamma^-(x_0) \cup \Gamma^-(N_0) \cup B_0)]$$

$$N_1 = \Gamma^+(B_1) \cap (N - N_0)$$

⋮

$$B_k = \Gamma^+(N_{k-1}) \cap [V - (x_0 \cup \Gamma^-(x_0) \cup \{\cup (\Gamma^-(N_i) \cup B_i), i = 0, 1, \dots, k - 1\})]$$

$$N_k = \Gamma^+(B_k) \cap [N - (\cup N_i, i = 0, 1, \dots, k - 1)]$$

$k$ , est le plus petit indice tel que  $B_{k+1} = \emptyset$ . (Voir figure 2.6)

Nous utilisons cette construction pour montrer le théorème 5 :

Nous montrons que :

$N = \{x_0\} \cup \{\cup N_i, i = 0, 1, \dots, k - 1\} \cup N''$  est le noyau de  $D$ , où  $N''$  est le noyau de  $D [V - (\{x_0\} \cup \Gamma^-(x_0) \cup \{\cup (N_i \cup \Gamma^-(N_i) ; i=0, 1, \dots, k)\})]$ .

Il est à remarquer que :

1°/  $x_0$  n'a pas de successeur dans  $N'$  ; sinon  $N'$  serait le noyau de  $D$ .

2°/  $B_0$  n'est pas vide, sinon on cherche le noyau  $N''$  dans  $D [V - \{x_0 \cup \Gamma^-(x_0)\}]$  et  $N = N'' \cup \{x_0\}$  serait le noyau de  $D$ .

3°/  $N$  est un absorbant par construction, en effet tout sommet est absorbé soit par  $x_0$ , soit par  $(\cup N_i), i=0, 1, \dots, k$ , sinon par  $N''$ .

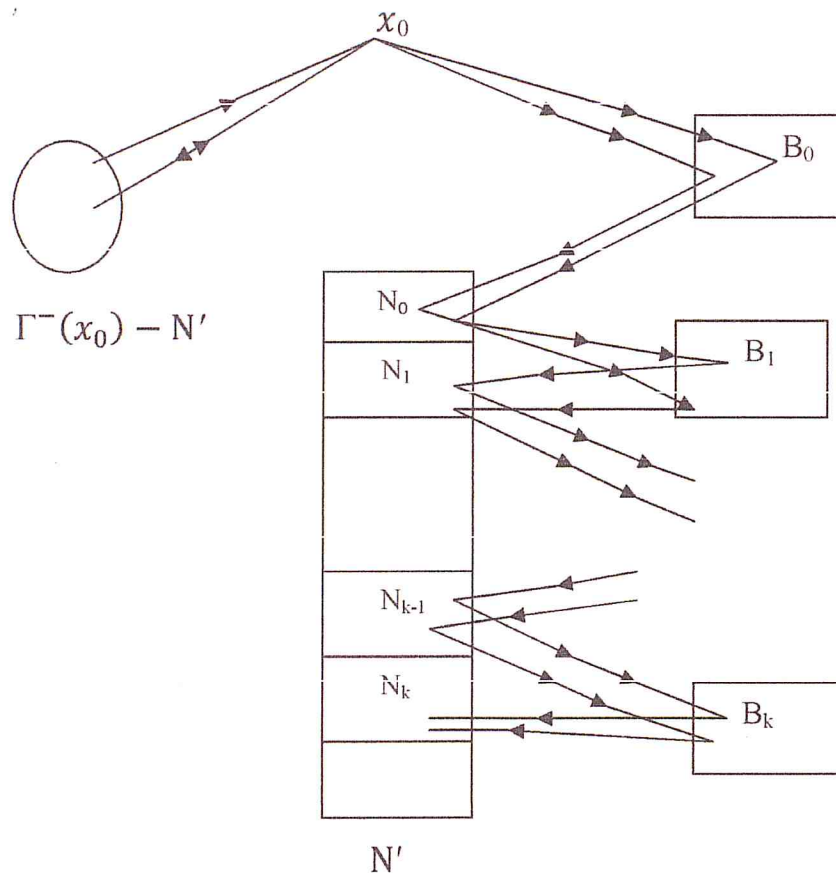
4°/ Par définition, les  $N_i$  et  $N''$  sont des stables.

5°/  $x_0$  ne peut être relié à  $N''$ , puisque les seuls sommets adjacents à  $x_0$  sont ceux de  $\Gamma^-(x_0)$  ou alors ceux de  $B_0$ . Ces derniers ne sont pas inclus dans

$D [V - (\{x_0\} \cup \Gamma^-(x_0) \cup \{\cup (N_i \cup \Gamma^-(N_i) ; i=0, 1, \dots, k)\})]$ .

6°/ Aucun sommet de  $N_i$  n'est relié à un sommet de  $N''$ .

Pour la démonstration du théorème 5, il reste à montrer que  $x_0$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i, i=0, 1, \dots, k$ .



**Preuve du théorème 5 :**

En effet  $x_0$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i$  ;  $i=0,1,\dots, k$  ; pour cela nous considérons les hypothèses imposées par *G. Sánchez* pour démontrer le résultat.

Nous raisonnons par induction sur les sommets de  $N_i$  .

Soit  $x'_0$  un sommet de  $N_0$ ,  $x'_0$  ne peut être relié à  $x_0$  sinon nous créons un circuit de longueur trois avec au plus un arc symétrique, donc sans qu'il y est deux pôles consécutifs. Supposons que  $x_0$  n'est relié à aucun des sommets des  $N_i$  ;  $i=0,\dots,k-1$  et montrons qu'il ne peut être relié aux sommets de  $N_k$ .

Supposons au contraire qu'il existe un sommet  $x'_k$  de  $N_k$  tel que  $x'_k$  soit relié à  $x_0$ , d'après la construction, il existe un chemin de  $x_0$  à  $x'_k$  empruntant alternativement les sommets de  $B_i$  et les sommets de  $N_i$ . Ainsi en rajoutant l'arc  $(x'_k, x_0)$  on obtient un circuit impair  $C=(x_0, b_0, x'_0, b_1, x'_1, \dots, x'_{k-1}, b_k, x'_k, x_0)$  avec  $x'_i$  dans  $N_i$  . Par définition des  $N_i$  et des  $B_i$  dans  $C$  il ne peut y avoir d'arcs qui ont pour extrémités terminales  $\{x_0, x'_0, x'_1, \dots, x'_{k-1}, x'_k\}$  autres que ceux du circuit  $C$ . Dès lors, on ne peut jamais avoir deux arcs de la formes  $(v_i, v_k)$  et  $(v_j, v_{k+1})$  où  $i \neq k-1$  et  $j \neq k$  d'où la contradiction avec les hypothèses du théorème.

## Conjecture de P.Duchet : ([8])

Si tout circuit impair d'un digraphe  $D$  possède deux cordes courtes, alors est noyau parfait.

Puis il a affirmé cette conjecture dans le cas où tout circuit impair possède deux cordes courtes croisés.

### 2.6-Exemples d'applications:

#### ❖ Jeux de Nim : ([15 ])

##### 1-Un peu de théorie des jeux :

Avant de préciser la stratégie des jeux de *Nim*, il convient d'aborder plus généralement la théorie des jeux. Vaste domaine de recherche à la frontière de l'économie et des mathématiques, la recherche opérationnelle envisage les problèmes d'aide à la décision par une approche mathématique. La théorie des jeux peut être vue comme l'une de ses branches, qui s'attache plus particulièrement à définir des algorithmes de calcul des solutions, de recherche de stratégie.

Un jeu se joue à plusieurs, au minimum deux adversaires. Ce qu'étudie la théorie des jeux, ce sont les choix de chaque joueur et les conséquences de ces choix sur l'ensemble du jeu.

##### 2-Histoire du jeu :

Les origines des jeux de *Nim* remontent très loin dans le temps, si bien qu'il est impossible d'indiquer avec certitude leur provenance. Ils sont signalés en Chine sous le nom de *fan-tan* et connus en Afrique sous le nom de *tiouk-tiouk*. Leur nom actuel nous vient de l'allemand *nim* qui signifie prends !, et leur a été donné par le mathématicien anglais *Charles Leonard Bouton* en 1901.

##### 3-La Stratégie gagnante :

Afin de montrer à quoi correspond la stratégie gagnante d'un jeu de *Nim*, nous allons prendre l'exemple du « jeu des allumettes », dont la règle est simple. Au départ il y a  $n$  allumettes, chaque joueur prend à tour de rôle 1, 2 ou 3 allumettes, et le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Celui qui laisse une seule allumette a donc gagné.

## 5-Exemple de jeu de Nim :

Dans tous les jeux, le nombre de situations possibles est fini. Par exemple, dans le jeu des allumettes avec  $n = 12$ , il existe 12 situations : il reste 12, 11, 10... ou 1 allumette. Il existe donc une stratégie gagnante pour chaque jeu, basée sur la connaissance de ces situations. Dans le cas des allumettes, la stratégie dépend du nombre d'allumettes restantes. Les schémas suivants expliquent comment gagner à chaque coup.

Imaginons que je joue contre vous, si la situation 1 est la suivante et que c'est à vous de jouer :



Vous prenez la dernière allumette et vous avez perdu.

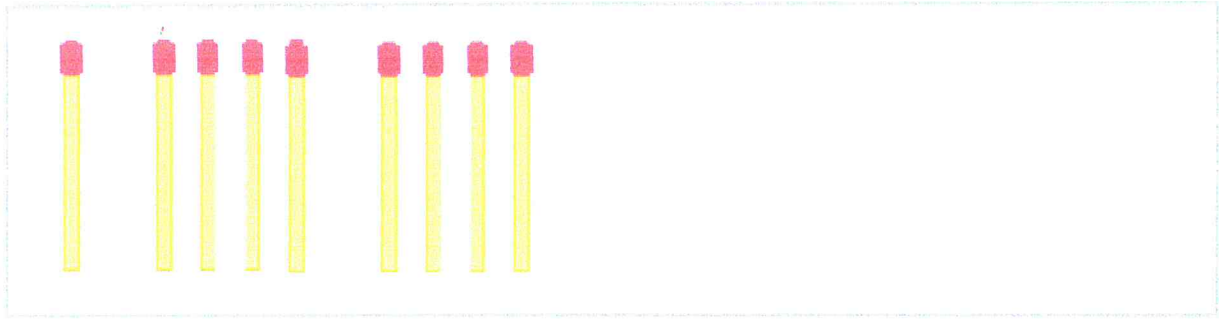
Si nous sommes maintenant dans cette situation 2 et que c'est encore à vous de jouer :



Vous perdez, car je vais toujours vous ramener dans la situation 1 : si vous prenez 1 allumette, j'en prends 3; si vous prenez 2 allumettes, j'en prends 2; si vous prenez 3 allumettes, j'en prends 1.

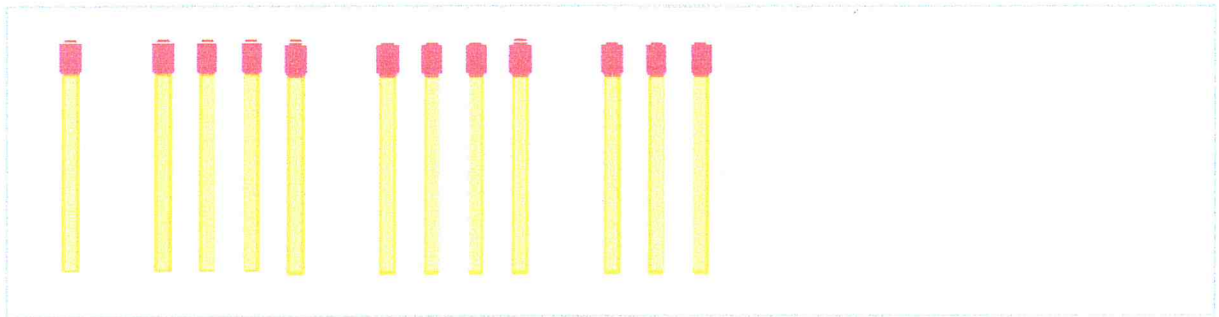
Maintenant, si nous sommes dans cette situation 3 avec encore 4 allumettes de plus et que c'est encore à vous de jouer :





Vous perdez encore, car je vais vous ramener de la même manière que précédemment dans la situation 2, et dans cette situation vous perdez.

Il est possible de continuer comme ça en ajoutant autant de fois que l'on veut 4 allumettes. Ainsi, par exemple, dans un jeu d'allumettes avec  $n = 12$  :



C'est le joueur qui commence qui gagne, à condition de connaître la stratégie gagnante. Ici, il faut que le premier joueur prenne 3 allumettes pour être sûr de gagner.

Dans les jeux de *Nim*, quelle que soit la stratégie gagnante utilisée, elle peut être implémentée dans un ordinateur. Les algorithmes qui représentent une stratégie gagnante utilisent la théorie des graphes et plus particulièrement la définition du noyau d'un graphe.

#### **4-Graphe associé à ce jeu:**

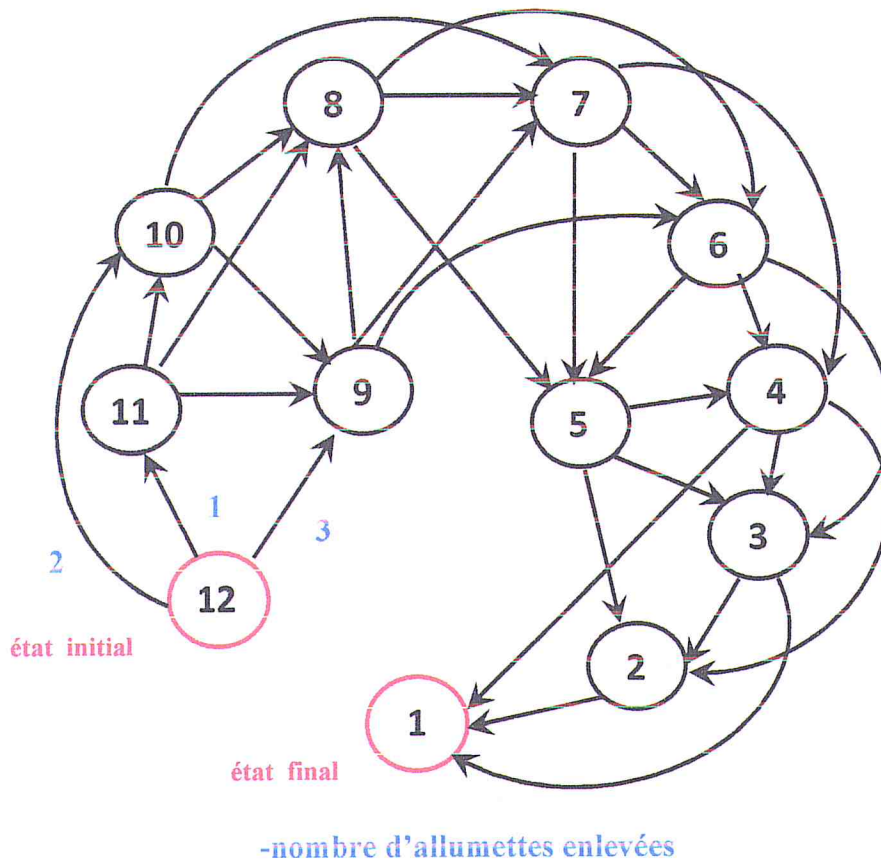
Dans la grande majorité des cas, l'ensemble des situations, même s'il est très grand, est fini. Il est alors possible de constituer un graphe de leur enchaînement, traduisant l'ensemble des coups possibles à jouer.

Dans le graphe associé à un jeu de *Nim*, les sommets représentent les situations et les arcs sortant d'un sommet et entrant dans un autre représentent les coups qui font passer d'une situation à une autre.

Partant d'une situation initiale, représentée dans le graphe par un sommet sans arc

entrant, le jeu évolue vers une situation finale représentée par un sommet sans arc sortant, un « puits » dans le langage de la théorie des graphes.

Dans l'exemple du jeu des allumettes, chaque sommet est renseigné par le nombre d'allumettes qui restent dans cette situation et chaque arc est renseigné par le nombre d'allumettes retirées lors du coup correspondant. Voici par exemple le graphe correspondant à un jeu de 12 allumettes.



**Figure 2.7 :** Graphe correspondant à un jeu de 12 allumettes

L'état initial porte le nombre d'allumettes présentés en début de partie, donc ici 12. De ce sommet partent trois arcs, selon que le joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes. Les 3 sommets suivants possibles sont donc étiquetés respectivement 11, 10 et 9. Dans la situation terminale, il reste une seule allumette (elle est étiquetée 1). Le joueur qui arrive dans cette situation a gagné, puisqu'il ne laisse pas d'autre choix à son adversaire que de prendre la dernière allumette.

Le jeu ne peut évoluer que dans un sens, puisqu'on retire des allumettes et qu'on n'en ajoute jamais. Le graphe d'enchaînement des situations a donc la

particularité d'être sans circuit, c'est-à-dire qu'il est impossible en suivant les arcs de partir d'un sommet et d'y revenir.

Pour chaque jeu de *Nim*, un tel graphe sans circuit peut être dessiné suivant les principes énoncés.

### **6-L'importance du noyau du graphe :**

Le problème à résoudre est maintenant le suivant : comment assurer à un joueur que ce sera lui qui arrivera dans le sommet étiqueté 1, situation finale et gagnante ?

La solution repose sur la notion de noyau d'un graphe. Un noyau est un sous-ensemble de sommets particuliers : quel que soit le sommet du graphe, il existe toujours un arc qui relie ce sommet à un sommet du noyau (on dit que le noyau est un ensemble absorbant) et il n'existe pas d'arc reliant deux sommets du noyau entre eux (on dit que le noyau est un ensemble stable). Selon les graphes, il existe ou non un ou plusieurs noyaux. Dans le cas d'un graphe sans circuit, il existe toujours un noyau unique. Dans notre exemple des 12 allumettes, il est assez facile de vérifier que le noyau du graphe est l'ensemble des sommets 1, 5 et 9.

C'est ce noyau qui va déterminer la stratégie gagnante : si le joueur se trouve dans une situation telle que le sommet correspondant est dans le noyau, il sera gagnant. En effet, l'autre joueur, dont c'est le tour de jouer, sera obligé de sortir du noyau (en raison de la stabilité) et notre joueur pourra toujours revenir dans le noyau (qui est absorbant) au coup d'après. Étant donné que la situation gagnante, le sommet 1, est dans le noyau, notre joueur est assuré de pouvoir l'atteindre, à condition bien sûr qu'il ait la possibilité de se placer dans le noyau. Ce qui lui est garanti s'il joue en premier, et que le sommet correspondant au nombre initial d'allumettes n'est pas dans le noyau. Il est en effet facile de voir que, partant du sommet initial, le joueur qui joue en premier peut toujours entrer dans le noyau, puisque celui-ci est absorbant. Sur notre exemple, il lui suffit d'enlever 3 allumettes, ce qui fait passer du sommet 12 au sommet 9, qui appartient au noyau.

### **7-Détermination du noyau :**

La détermination du noyau du graphe associé au jeu fournit donc la stratégie gagnante : il s'agit de jouer en premier et de retirer à chaque coup le nombre d'allumettes qui fait entrer dans le noyau, et terminer ainsi par le « puits » du graphe, qui est à l'intérieur du noyau : la situation où il ne reste qu'une allumette.

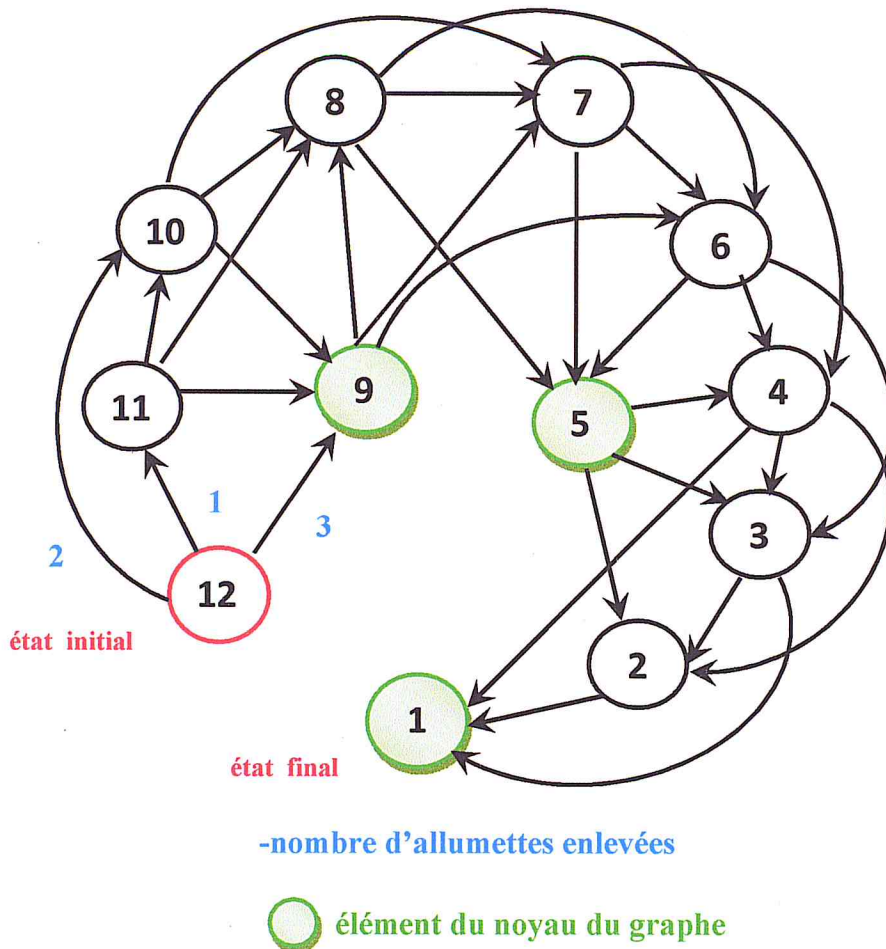
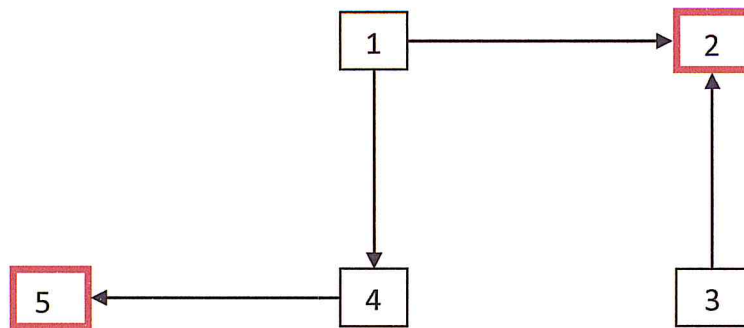


Figure 2.8 : Le noyau du graphe associé au jeu de *Nim*

❖ **Problème de décisions : ([7])**

Cet exemple est concret.

Un gouvernement ayant décidé de répartir trois milliards de Dinars en vue de diminuer la mortalité sur les routes, on propose cinq initiatives : augmentation du nombre de gendarmes, construction d'autoroutes, mise en place des signaux lumineux à tous les carrefours, récompenses aux meilleurs conducteurs et la gratuité des transports publics. Il charge un groupe pour recueillir les préférences du public et ce groupe parvient à établir le digraphe suivant où les cinq sommets représentent les cinq initiatives dans l'ordre repris ci-dessous où un arc  $(x_i, x_j)$  existe s'il est certain que la population préfère l'initiative  $x_j$  à l'initiative  $x_i$ .



**Figure 2.9 :** La représentation graphique du problème

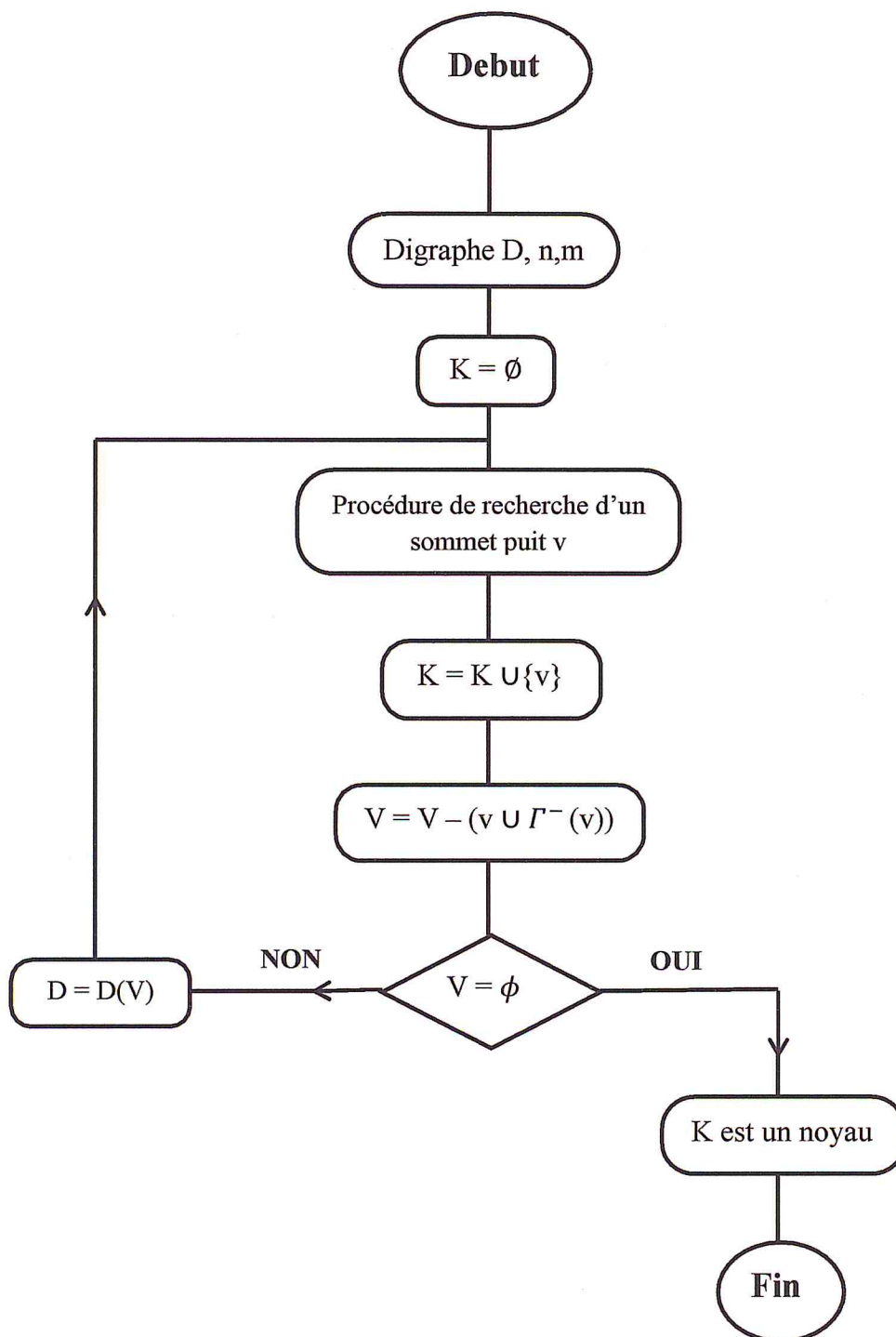
L'ensemble qui contient les sommets 2,5, constitue le digraphe, l'ensemble qui ne contient pas les mauvaises actions, ce qui justifie l'omission des initiatives 1, 3, 4. Le décideur peut consacrer un budget de 1.5 milliards de Dinars à chacune des initiatives 2 et 5 (si bien sur, il n'arrive pas à trancher entre les deux initiatives).

### **2.7 - Etude algorithmique :**

En général, le problème de la recherche d'un noyau dans un digraphe quelconque est un problème NP-complet. On donne dans ce qui suit un algorithme polynomial de recherche de noyau dans un digraphe sans circuit.

Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les graphes orientés sans circuit :

Organigramme :



**Algorithme :**

Donnée :  $D = (V, A)$  graphe orienté sans circuit ;  $|A| = m$  et  $|V| = n$ .

Résultat :  $K$  noyau de  $D$ .

Début

$K := \emptyset$

Répéter

- Soit  $x_1$ , un sommet puits de  $D$
- $K := x_1 \cup K$
- $V := V - (\{x_1\} \cup \Gamma^-(\{x_1\}))$
- $D := D[V]$

Jusqu'à  $V = \emptyset$

Fin.

La boucle répéter jusqu'à est effectuée au plus  $n$  fois et la procédure de recherche d'un puits est de complexité au plus  $O(n)$ , donc le temps d'exécution est en  $O(n^2)$ .

**N.B :** Voir programme informatique qui traduit ce cas de recherche de noyau en annexe, (écrit en langage **Java**).

## CHAPITRE 3

# ETUDE THÉORIQUE DE RECHERCHE DE NOYAUX PAR CHEMIN MONOCHROMATIQUE

### 3.1-Introduction :

Dans ce chapitre, on va étudier la recherche de noyaux par chemin monochromatique. Au début, on définit quelques notations, ensuite on cite quelques théorèmes d'existence.

### 3.2-Définitions :

#### 2.1-Digraphe $m$ -coloré :

Un digraphe  $D=(X, U)$  où  $X$  est l'ensemble de sommets et  $U$  est l'ensemble des arcs, est dit  $m$ -coloré si ses arcs sont colorés avec  $m$  couleurs.

Un chemin dans un digraphe  $m$ -coloré est dit monochromatique si ses arcs ont la même couleur.

Un circuit dans un digraphe  $m$ -coloré est dit quasi-monochromatique si tous ses arcs, à l'exception d'au plus un, ont la même couleur.

On note par  $C_3$  un circuit de longueur trois dont les arcs sont colorés avec trois couleurs distinctes.

$T_3$  est un tournoi transitif d'ordre trois, dont les arcs sont colorés avec trois couleurs distinctes.

#### 2.2-Noyau par chemins monochromatiques :

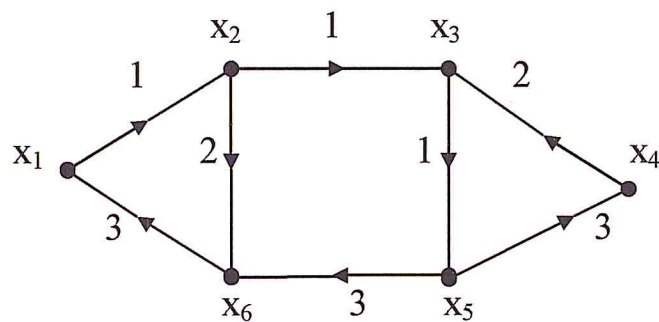
Un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré  $D=(X, U)$  est un sous-ensemble  $N \subseteq X$  qui satisfait les deux conditions suivantes :



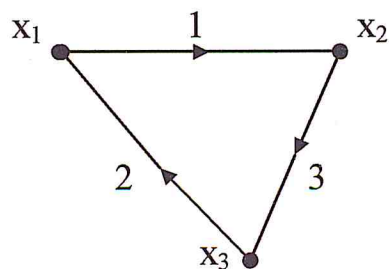
- 1) Il n'existe pas dans  $D$  un chemin monochromatique reliant  $x$  et  $y$ .  
 $\forall x, y \in N$ .
- 2) Il existe dans  $D$  un chemin monochromatique de  $x$  vers un sommet de  $N$ .  $\forall x \in X \setminus N$ .

**Exemple 3.1 :**

Le digraphe de la figure 3.1 est un digraphe d'ordre 6, 3-coloré et il admet  $\{x_3, x_6\}$  comme noyau par chemins monochromatiques, mais le digraphe de la figure 3.2 qui est un circuit  $C_3$  n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.



**Figure 3.1 :** Un digraphe 3-coloré



**Figure 3.2 :** Le digraphe  $C_3$

**Remarque :**

La notion de noyau par chemins monochromatiques dans un digraphes  $m$ -coloré est plus générale que celle du noyau dans un digraphe ; en effet si les arcs d'un digraphe  $D$  sont colorés distinctement alors le noyau par chemins monochromatiques est exactement le noyau dans  $D$ .

### 2.3-Fermeture par chemins monochromatiques :

On appelle fermeture par chemins monochromatiques d'un digraphe  $m$ -coloré  $D=(X, U)$ , le digraphe  $m$ -coloré noté  $C(D)$  où l'ensemble des sommets

$X(C(D)) = X$  et l'ensemble des arcs est défini comme suivant :

$$U(C(D)) = U \cup \bigcup_{i=1}^m \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \text{ coloré avec la couleur } i \text{ / il existe dans } D, \\ \text{un chemin monochromatique de couleur } i \text{ reliant les} \\ \text{sommets } u \text{ et } v. \end{array} \right\}$$

#### Exemple 3.2 :

La figure suivante montre la fermeture par chemins monochromatiques du digraphe de la figure 3.1

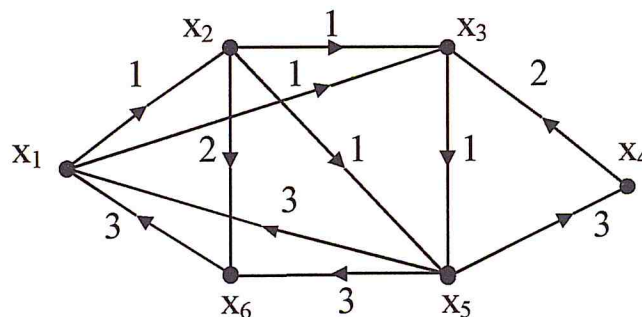


Figure 3.3 : La fermeture par chemins monochromatiques

Notons que pour tout digraphe  $D$ ,  $C(C(D)) \cong C(D)$ .

#### Remarque :

Chercher un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré revient à chercher un noyau dans la fermeture par chemins monochromatiques de  $D$ ,  $C(D)$ .

Il est clair que  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques si et seulement si  $C(D)$  a un noyau.

### **3.3- Etude d'existence d'un noyau par chemins monochromatiques :**

L'existence d'un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré, a été étudiée par plusieurs auteurs suivant les valeurs de  $m$  (nombre de couleurs attribuées aux arcs).

#### **3.1- Digraphe 1-coloré :**

Notons d'abord que pour  $m = 1$ , c'est-à-dire si un digraphe  $D$  dont les arcs sont colorés avec la même couleur alors la fermeture par chemins monochromatiques  $C(D)$  est un digraphe transitif qui admet un noyau et donc  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques.

#### **3.2-Digraphe 2- coloré :**

Dans [7], *Sands, Sauer* et *R. Woodrow* ont étudié le cas où  $m = 2$ .

#### **Théorème 1 :** ([9])

Tout digraphe 2- coloré a un noyau par chemins monochromatiques.

En particulier, ils ont prouvé le même résultat si le digraphe est un tournoi.

#### **Corollaire 1 :** ([9])

Soit  $T$  un tournoi dont les arcs sont colorés avec 2 couleurs alors il existe un sommet  $v$  de  $T$  tel que pour sommet  $x$  autre que  $v$  de  $T$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  vers  $v$  ( $\{v\}$  est un noyau par chemins monochromatiques de  $T$ ).

#### **Exemple 3.4 :**

Le digraphe de la figure suivante est un digraphe d'ordre 5, 2-coloré admet  $\{x_3\}$  comme noyau par chemins monochromatiques.

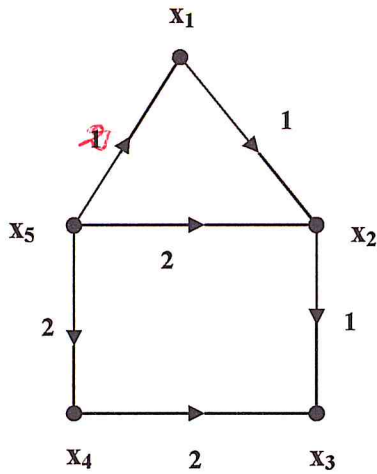


Figure 3.4 : digraphe 2-coloré

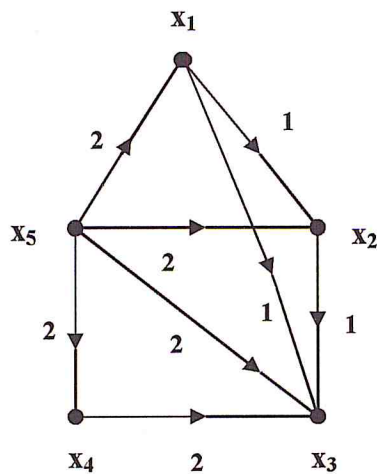


Figure 3.5 : La fermeture par chemins monochromatiques

Dans le même article [9], *Sands, Sauer* et *Woodrow* ont posé le problème suivant :

**Conjecture :**

« Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique ( $T$  ne contient pas  $C_3$ ) ; est-il vrai que  $T$  contient un sommet  $v$  tel que pour tout sommet  $x$  de  $T$  autre que  $v$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  à  $v$  ?

*Shen Minggang* a montré dans [8] l'existence d'un noyau par chemins monochromatiques dans un tournoi  $m$ -coloré (en ajoutant des conditions sur le tournoi).

**Théorème2:** ([10])

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout 3- circuit est quasi-monochromatique et tout tournoi transitif d'ordre 3 est quasi-monochromatique ( $T$  ne contient pas  $C_3$  et  $T_3$ ) alors  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques.

Nous donnons une autre preuve à ce théorème qui est différente à celle donnée par *Shen Minggang* dans [8], en utilisant le théorème 2(chapitre 2).

**Preuve :** ([11])

Il suffit de montrer que le digraphe  $C(T)$  (la fermeture par chemins monochromatiques) est tel que tout circuit possède un arc symétrique donc  $C(T)$  est noyau-parfait, d'où  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques. On peut supposer que  $T$  est fortement connexe sinon par induction on a ce qu'il faut. Comme  $T$  est fortement connexe, alors il existe tous les circuits de longueur  $k$  de  $k = 3$  jusqu'à  $n$  ces circuits sont aussi dans  $C(T)$ . Montrons que tout circuit de  $C(T)$  admet un arc symétrique. Pour le circuit de longueur 3 ceci est vrai car il est quasi-monochromatique. Supposons que tout circuit de longueur  $k \leq n-1$  admet un arc symétrique et montrons que ça reste vrai pour un circuit de longueur  $n$ . Soit  $C_n$  un circuit de longueur  $n$  ce circuit est un circuit de  $T$ . Il existe deux arcs consécutifs de  $C_n$  ayant deux couleurs différentes sinon tous les arcs de  $C_n$  seront de même couleur et donc  $C_n$  a au moins un arc symétrique par la fermeture par chemins monochromatiques. Soient  $(x_1, x_2)$  et  $(x_2, x_3)$  deux arcs ayant deux couleurs distinctes. Sans perte de généralité, on suppose que la couleur de  $(x_1, x_2)$  est 1 et la couleur de  $(x_2, x_3)$  est 2. Si  $(x_3, x_1)$  existe alors  $(x_1, x_2, x_3, x_1)$  est un circuit de longueur 3 donc il admet un arc symétrique qui est  $(x_1, x_2)$  ou bien  $(x_2, x_3)$  d'où  $C_n$  admet un arc symétrique. Sinon  $(x_1, x_3)$  existe.

Alors  $(x_1, x_2, x_4, \dots, x_1)$  est un circuit de longueur  $n-1$  donc il admet un arc symétrique qui est forcément  $(x_1, x_3)$  sinon c'est fini. Donc il existe un chemin monochromatique de  $x_3$  vers  $x_1$  de couleur  $b$ . Il est facile de voir que  $b \neq 1$  et  $b \neq 2$  sinon on aura un chemin monochromatique de couleur 1 de  $x_3$  vers  $x_2$  donc  $(x_2, x_3)$  est un arc symétrique, ou bien un chemin monochromatique de couleur 2 de  $x_2$  vers  $x_1$  donc  $(x_1, x_2)$  est un arc symétrique, dans les deux cas  $C_n$  possède un arc symétrique. Alors on peut supposer que  $b=3$ . Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$  un plus court chemin monochromatique reliant  $x_3$  à  $x_1$  de couleur 3 ; avec  $u_1 = x_3$  et  $u_t = x_1$  (voir la figure 3.4).

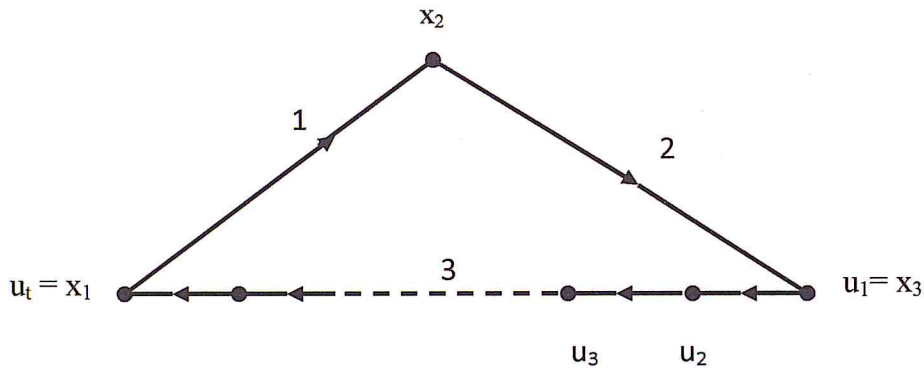


Figure 3.6 : Le chemin monochromatique de  $x_3$  à  $x_1$

Considérons la couleur de l'arête entre  $x_2$  et  $u_i$  pour  $1 < i < t$ . Elle ne peut pas être 3, sinon on aura l'arc  $(x_1, x_2)$  ou  $(x_2, x_3)$  est un arc symétrique. Il est facile de voir que les arêtes  $[x_2, u_i]$  et  $[x_2, u_{i+1}]$  sont colorées avec deux couleurs différentes. Alors  $x_2 u_i u_{i+1}$  est un triangle avec trois couleurs différentes, contradiction. Alors  $C_n$  possède un arc symétrique.

*Shen Minggang* a montré aussi que cette situation est la meilleur possible pour  $m \geq 5$ , en effet il a exhibé pour  $m \geq 5$  un tournoi  $m$ -coloré  $T$  tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique et  $T$  n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.

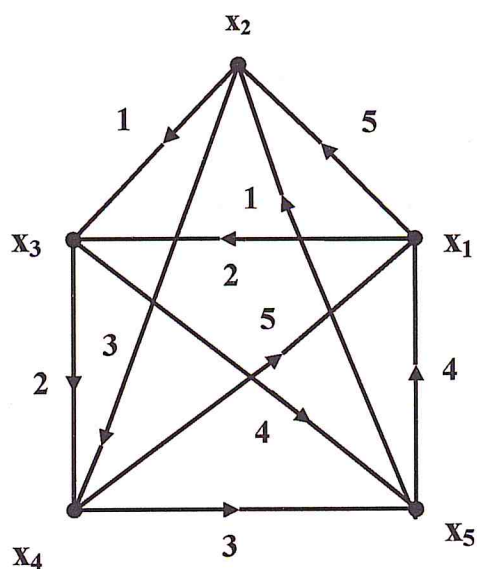


Figure 3.7: le digraphe  $G_5$

Le digraphe  $G_5$  (figure 3.5) est un digraphe 5- coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique, et pourtant il n'a pas de noyau par chemins monochromatiques ; ce digraphe est le contre exemple donné par *Shen Minggang* dans [10].

Pour  $m = 4$  (Si  $T$  est un tournoi 4- coloré qui ne contient pas  $C_3$  alors  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques) ce problème a été résolu par *H. Galeana-Sánchez* et *R. Rojas-Monroy* [10] en fournissant le contre exemple suivant :

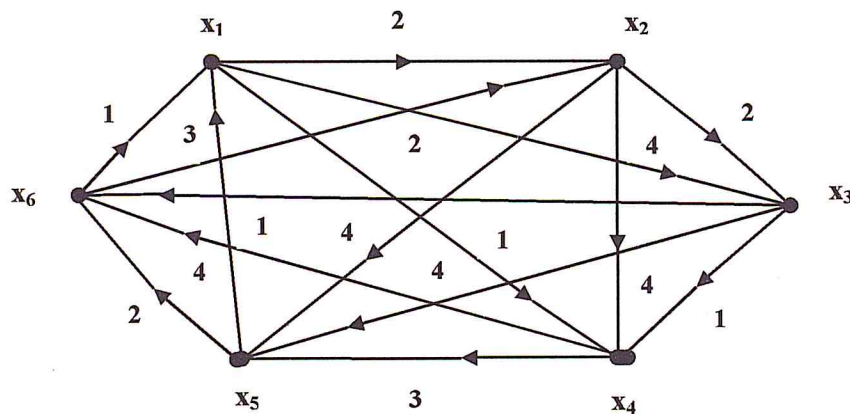


Figure 3.8: le tournoi  $G_6$

Le tournoi  $G_6$  dans la figure 3.6 est un tournoi 4- coloré d'ordre 6, ne contient pas  $C_3$  et il ne contient pas aussi un sommet  $v$  tel que pour tout sommet  $x$  de  $G_6$  autre que  $v$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  à  $v$ .

Donc la question de *Sands*, *Sauer* et *Woodrow* reste ouverte dans le cas ou  $m=3$ .

*H. Galeana Sánchez* a donné des conditions suffisantes pour qu'un tournoi  $m$ -coloré admette un noyau par chemins monochromatiques.

**Théorème 3** : ([13])

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors  $C(T)$  est noyau-parfait et donc  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques.

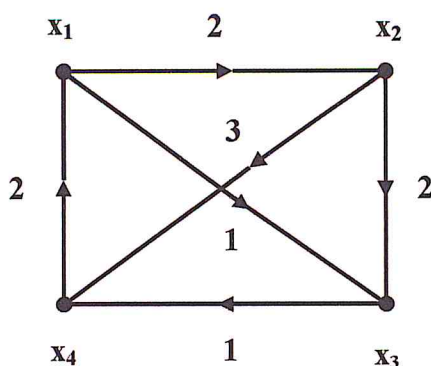


Figure 3.9: un tournoi  $G_4$

Le tournoi  $G_4$  de la Figure 3.7 est un tournoi d'ordre 4 vérifiant les conditions du théorème 3, il contient un  $T_3$  et il admet  $\{x_3\}$  comme un noyau. Par chemins monochromatiques.

**Théorème 4 :** ([13])

Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout 3-circuit est monochromatique alors  $C(T)$  est noyau-parfait.

Dans [12], *H.Galeana-Sánchez* a montré le même résultat du théorème 3 pour un tournoi  $m$ -coloré en lui supprimant un arc.

**Théorème 5 :** ([14])

Soit  $D$  un digraphe  $m$ -coloré obtenu à partir de la suppression d'un arc d'un certain tournoi  $T_n$  (ie :  $D \cong T_n - (x, y)$ ). Si tout circuit contenu dans  $D$  de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques.

**3.4 Représentation matricielle d'un digraphe  $m$ -coloré :**

Soit un digraphe  $m$ -coloré  $D = (V, U)$  contenant  $n$  sommets.

Soit  $A$  la matrice associée au digraphe  $D$ . Chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du digraphe. Ainsi chaque élément de la matrice indique la relation qui existe entre deux sommets.

$$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \{k\} & \text{si } (x_i, x_j) \in U \text{ et } (x_i, x_j) \text{ est coloré avec la couleur } k \\ \emptyset & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$



**Exemple :**

Soit un tournoi  $T = (V, U)$  d'ordre 4 ; 3-coloré

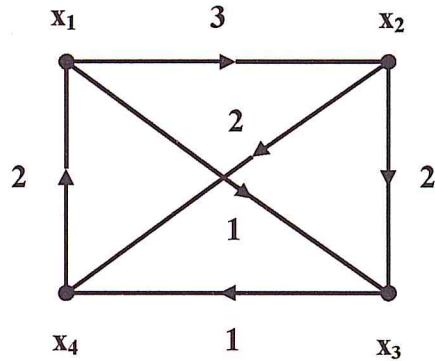


Figure 3.10 : Le tournoi T

La matrice associée à T est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \emptyset & \{3\} & \{1\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{2\} & \{2\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{2\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

**3.5 -Recherche des chemins monochromatiques :**

La recherche de chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré  $D = (V, U)$  s'effectue à partir de la matrice A associée au digraphe D.

Pour rechercher les chemins monochromatiques de longueur p, on utilise le produit matriciel tel qu'il est défini en algèbre linéaire et on calcule  $A^p$  ; en effet :

$$A^2 = A \times A \qquad A^2 = (a_{ij}^{(2)}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n$$

⋮

$$A^p = A^{p-1} \times A \qquad A^p = (a_{ij}^{(p)}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n$$

$k \in a_{ij}^{(p)}$  alors il existe au moins un chemin monochromatique de longueur p dont les arcs sont colorés avec la couleur k reliant le sommet  $x_i$  au sommet  $x_j$ .

### Remarque :

Les opérations sont logiques :  $(\cdot) \Rightarrow$  arcs adjacents colorés avec la même couleur (ET logique),  $(+)$   $\Rightarrow$  chemins monochromatiques en parallèle (OU logique).

### Exemple 3.10 :

On cherche les chemins monochromatiques de longueur 2 du tournoi T (voir figure 3.8)

$$A^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{2\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

Donc il y a au moins deux chemins monochromatiques : un relie  $x_2$  à  $x_1$  coloré avec la couleur 3 et l'autre reliant  $x_4$  à  $x_3$  dont la couleur est 3.

### 3.6 Fermeture par chemins monochromatiques :

Soit  $D = (V, U)$  un digraphe  $m$ -coloré d'ordre  $n$ . La matrice de la fermeture par chemins monochromatiques du digraphe  $D$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  ; notée  $F$  définie comme suit :

$$F = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n . \quad A \text{ est la matrice associée au digraphe } D.$$

$$F = (f_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n.$$

$f_{ij}$  indique l'existence des chemins monochromatiques de longueur  $\leq n$  dans le digraphe  $D$  de sommet  $x_i$  vers le sommet  $x_j$ .

Si  $f_{ij} = \emptyset$  alors il n'existe aucun chemin monochromatique de sommet  $x_i$  vers le sommet  $x_j$  dans le digraphe  $D$ .

### Exemple 3.11 :

La matrice de la fermeture par chemins monochromatiques du tournoi T (voir la figure 3.8) est :

$$F = \begin{pmatrix} \emptyset & \{3\} & \{1\} & \{1\} \\ \{2\} & \emptyset & \{2\} & \{2\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{2\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

### **3.7- Détermination du noyau par chemins monochromatiques :**

Le noyau par chemins monochromatiques (s'il existe) dans un tournoi  $m$ -coloré est constitué d'un seul sommet, car un tournoi est un digraphe complet et antisymétrique.

Si la matrice de la fermeture par chemins monochromatiques d'un tournoi  $m$ -coloré contient une colonne  $C_i$  dont tous les éléments à l'exception de la diagonale sont différents de  $\emptyset$ , alors le sommet  $x_i$  qui correspond à cette colonne devait être le noyau par chemins monochromatiques de ce tournoi, en effet pour tout sommet  $x_j$  autre que  $x_i$  il existe un chemin monochromatique de ce sommet vers  $x_i$ .

#### **Exemple 3.12 :**

Pour le même tournoi  $T$  (voir la figure 3.8), à partir de sa matrice de la fermeture par chemins monochromatiques  $F$ , le sous-ensemble  $N = \{x_4\}$  est son noyau par chemins monochromatiques.

## CONCLUSION

Le problème d'existence de noyaux dans les graphes orientés est un problème difficile en générale puisqu'il est connu qu'il est NP-complet.

Nous avons dans ce mémoire étudié l'existence de noyau dans les graphes orientés, et on a fourni un algorithme polynomial pour la recherche d'un noyau dans un digraphe sans circuit.

En suite, nous nous sommes intéressés à l'étude du concept de noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré.

Beaucoup de problèmes restent ouverts dans ce domaine et peuvent être étudiés antérieurement tels que la conjecture de *P.Duchet*, la conjecture de *Sands*, *Sauer* et *Woodrow*.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C.Berge. « Graphes et Hypergraphes », 2<sup>ième</sup> ed. Dunod, Paris, 1973.
- [2] J.V.Neumann ; O.Morgenstern, « Theory of games and economic behavior », Princeton University Press, Princeton N.J., 1944.
- [3] P.Duchet, « Représentation : Noyaux en théorie des graphes et hypergraphes », Thèse d'état, Université de Paris VI, 1979.
- [4] M.Richardson, « Solutions of irreflexive relation », Ann.of Math., 58, pp.573-580, 1953.
- [5] H.Galeana Sánchez and V.Neumann-Lara, « On kernels and semi-kernels of digraphs», Disc.Maths, 48, pp.67-76, 1984.
- [6] M.Blidia, « Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes », Thèse d'Université .Paris 6. 1984.
- [7] F.Droesbeke; M.Hllin; CL.Lefevre, «Les graphes par exemple», Ellipses (87)
- [8] P.Duchet, « A sufficient condition for a graph to be kernel perfect », J.of Graph Theory 11, pp. 81-86, 1987.
- [9] B.Sands ; N.Sauer ; R.woodrow, « On Monochromatic Paths in Edges-Colored Digraphs », Journal of Combinatorial Theory, Series B33,1982, pp.271-275.
- [10] Shen Minggang, « On Monochromatic Paths in  $m$ -colored Tournements», Journal of Combinatorial Theory, Series B45, 1986, pp.108-111.
- [11] A.Ramoul, « Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes orientés », Thèse de Magistère, Université de Blida, 2008.
- [12] H.Galeana Sánchez, R.Rojas-Monroy, « Note A counterexample to a conjecture on edge-colored tournaments », Disc Math.282, 2004, pp.275-276.
- [13] H.Galeana Sánchez, « On Monochromatic Paths and Monochromatic Cycles in Edge Colored Tournaments », Disc Math.156, 1996, pp.103-112.
- [14] H.Galeana Sánchez, « Kernels in edge-colored digraphs », Disc Math.184, 1998, pp.87-99.
- [15] <http://interstices.info/nim>