

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Physique

**THESE PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU
DIPLOME DE DOCTORAT**

Spécialité : Physique

ETATS COHERENTS ET COMPRIMES POUR DES SYSTEMES PHYSIQUES
EXACTEMENT SOLUBLES. CAS DU POTENTIEL DE L'OSCILLATEUR
HARMONIQUE A 3D

Par

Amel MAZOUZ

Eps SOUKEHAL

Devant le jury composé de :

R. KHELIFI	Prof. Université Saad Dahlab Blida 1	Président
E. AILAM	Prof. Université Djilali Bounaama Khemis Miliana	Examineur
O. CHERBAL	Prof. USTHB	Examineur
M. HACHEMANE	Prof. USTHB	Examineur
M. BOUAYED	MCA. Université Saad Dahlab Blida 1	Encadreur
A. MAHIEDDINE	MCA Université Djilali Bounaama Khemis Miliana	Co- Encadreur

Blida, 2019

Remerciements

Je remercie Monsieur Bouayed Noureddine pour avoir accepté de continuer le travail entamé et mené par Feu Monsieur Bentaiba Mustapha et pour sa disponibilité à finaliser les procédures administratives nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Khelifi Rachid, Professeur à l'Université Saad Dahlab Blida1 pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements également à Monsieur Cherbal Omar, Professeur à L'USTHB, Monsieur Hachemane Mahmoud, Professeur à L'USTHB ainsi qu'à Monsieur Ailam El Hadj, Professeur à l'Université Bounaama Djilali, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Mahieddine Ali, MCA à l'Université Bounaama Djilali, Directeur du LESI, Laboratoires des systèmes intelligents et Co-encadreur. Cette thèse est le fruit de plusieurs années de collaboration avec lui. C'est à ces côtés que j'ai appris ce que rigueur et précision voulaient dire.

Je ne remercierai jamais assez Monsieur Jean Pierre Gazeau, Professeur émérite à l'Université Paris 7-Denis Diderot, pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire APC ainsi que pour ses conseils, ses encouragements et ses discussions scientifiques qui m'ont été d'une grande aide.

Enfin je remercie les membres du LESI de m'avoir accueilli avec bienveillance au sein de leur laboratoire.

Un grand merci à mes chers parents, mon mari et mes deux enfants pour leur soutien inconditionnel.

ملخص

يعالج هذا العمل بناء حالات متناسقة ومضغوطة للأنظمة الكمومية القابلة للحل بدقة. في هذا السياق، سنطوّر نهجين مختلفين يؤديان إلى حالتين متناسقتين من نوع Gazeau-Klauder و Klauder-Perelomov. سنستخدم أولاً طريقة تحليل الهاميلتوني التي تصف النظام الكمومي المدروس. والواقع، فمن المعروف أنه بالنسبة لأي نظام قابل للحل، فإن الهاميلتوني سيكتب على شكل جداء لمؤثري السلم. هاتاه المؤثرات تكون ضرورية لتوليد الحالات المتناسقة. تعتبر طريقة التحليل وميكانيكا الكم الفائقية التناظر عنصريين فعالين لإدخال مؤثرات إنشاء وهدم نظام كمومي قابل للحل بشكل دقيق.

هذان المؤثران ضروريان لتوليد الحالات المتناسقة. ودرسنا أيضاً التمثيلات التحليلية لفوك - بارقمان الموافقة لكل فئة من الحالات المتناسقة التي تم الحصول عليها. سنبين أن هذه الإنشاءات التحليلية تسمح بطريقة سهلة من الحصول على حالات مضغوطة لنظام كمي معين. هذه الحالات الأخيرة تقلل من علاقة الإرتياب لهايزنبرغ.

كتوضيح للنتائج المتحصل عليها في هذه المذكرة، درسنا نظام الهزاز التوافقي ذو ثلاث أبعاد.

لقد درسنا سلوك هذه الحالات فيما يتعلق بالموقع والحد الأدنى للإرتياب. وقد تم حساب التشتت والقيم المتوسطة بطريقة تحليلية. كما قمنا كذلك بحساب كثافة الاحتمال لإظهار تأثير الضغط في الحالات المضغوطة.

الكلمات المفتاحية (5): حالات متناسقة، حالات مضغوطة، علاقة الإرتياب لهايزنبرغ، تمثيل تحليلي لفوك - بارقمان، ميكانيكا الكم فائق التناظر.

Résumé

Ce travail traite de la construction des états cohérents et comprimés pour des systèmes quantiques exactement solubles. Dans ce sens, nous développons deux approches différentes conduisant aux états cohérents de type Gazeau-Klauder et Klauder-Perelomov.

Nous allons en premier lieu exploiter la méthode de factorisation de l'Hamiltonien décrivant le système quantique étudié. En effet, il est bien connu que pour tout système soluble, l'Hamiltonien s'écrit comme produit de deux opérateurs d'échelles. La méthode de factorisation et la mécanique quantique supersymétrique sont des ingrédients utiles pour introduire les opérateurs de création et d'annihilation d'un système quantique exactement soluble.

Ces opérateurs sont indispensables pour la génération des états cohérents. Nous avons également étudié les représentations analytiques de Fock-Bargmann correspondants à chaque classe d'états cohérents obtenue. Nous montrons que ces réalisations analytiques permettent d'obtenir de façon aisée les états comprimés pour un système quantique donné. Ces derniers états minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg.

En guise d'illustrations des résultats obtenus dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux systèmes quantiques plongés dans le potentiel de l'oscillateur harmonique à 3D.

Nous avons étudié le comportement de ces états en ce qui concerne la localisation et l'incertitude minimale. Le calcul de la dispersion et des valeurs moyennes a été effectué analytiquement. Nous avons également calculé la densité de probabilité afin de montrer l'effet de compression dans les états comprimés.

Mots-clefs : Etats cohérents, Etats comprimés, Relation d'incertitude de Heisenberg, Représentation analytique de Fock-Bargmann, Mécanique quantique supersymétrique

Abstract

This work deals with the construction of coherent and squeezed states for exactly soluble quantum systems. In this sense, we develop two different approaches leading to coherent Gazeau-Klauder and Klauder-Perelomov states.

We will first use the factorization method of the Hamiltonian describing the studied quantum system. Indeed, it is well known that for any soluble system, the Hamiltonian is written as a product of two ladder operators. The factorization method and supersymmetric quantum mechanics are useful ingredients for introducing the creation and annihilation operators of an exactly soluble quantum system.

These operators are essential to generate coherent states. We have also studied the Fock-Bargmann analytical representations corresponding to each class of coherent states obtained. We show that these analytical realizations make it possible to easily obtain squeezed states for a given quantum system. These latter states minimize the uncertainty relation of Heisenberg.

As illustrations of the results obtained in this thesis, we are interested in quantum systems plunged into the potential of the 3D harmonic oscillator. We studied the behaviour of these states with respect to location and minimum uncertainty. The calculation of the dispersion and the average values was done analytically. We also calculated the probability density to show the compression effect in the compressed states.

Keywords : Coherent states, Squeezed states, Heisenberg uncertainty relation, Fock-Bargmann representation, Supersymmetric quantum mechanics

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
1. LES SYSTEMES STANDARDS DES ETATS COHERENTS LIES AU GROUPE DE WEYL-HEISENBERG	5
1.1. Introduction.....	5
1.2. Le groupe de Weyl-Heisenberg et ses représentations.....	5
1.2.1. Le groupe de Weyl-Heisenberg.	5
1.2.2. Représentation du groupe de Weyl-Heisenberg	9
1.2.3. Réalisation concrète de la représentation $T^2(g)$	9
1.3. Etats Cohérents	10
1.4. Représentation de Fock-Bargmann	16
1.5. Conclusion	20
2. SYSTEMES QUANTIQUES ARBITRAIRES ETATS COHERENTS	21
2.1. Introduction.....	21
2.2. Systèmes quantiques arbitraires.....	21
2.2.1. Opérateurs de création et d’annihilation.....	21
2.3. Etats cohérents de Gazeau-Klauder.....	25
2.3.1. Etats propres de l’opérateur d’annihilation.....	25
2.3.2. La représentation de Fock-Bargmann.....	28
2.4. Etats cohérents de Klauder-Perelomov	30
2.5. Application	31
2.5.1. Le potentiel de Pöschl-Teller	31
2.6. Conclusion	38
3. DES ETATS COHERENTS GENERALISES AUX ETATS COMPRIMES GENERALISES	39
3.1. Introduction.....	39
3.2. Le groupe de Weyl-Heisenberg et ses représentations.....	39
3.2.1. Méthode de l’opérateur déplacement :	39
3.2.2. Méthode de l’opérateur d’annihilation :	39
3.2.3. Méthode d’incertitude minimale :	39
3.3. Les états comprimés de l’oscillateur harmonique :	40

3.3.1.	Méthode de l'opérateur de déplacement :	40
3.3.2.	Méthode des opérateurs échelles :	40
3.3.3.	Méthode d'incertitude minimale :	41
3.4.	Etats cohérents généralisés	41
3.4.1.	Méthode de l'opérateur de déplacement :	41
3.4.2.	Méthode des opérateurs échelles :	41
3.5.	Etats intelligents généralisés :	42
3.6.	Conclusion	46
4. ETATS COHERENTS ET COMPRIMES DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE 3D		
		47
4.1.	Introduction	47
4.2.	Définition des états cohérents et comprimés à 1D	47
4.3.	L'oscillateur harmonique à 3D	48
4.3.1.	Le modèle	48
4.3.2.	Résolution de l'équation de Schrödinger	49
4.3.3.	Valeurs moyennes et dispersions	51
4.3.4.	Etats cohérents indépendants du temps	52
4.3.5.	Etats comprimés indépendants du temps	53
4.3.6.	Etats cohérents dépendants du temps	55
4.3.7.	Etats comprimés dépendants du temps	57
4.3.8.	Densité de probabilité	59
4.4.	Conclusion	60
CONCLUSION GENERALE		
		62
RÉFÉRENCES		
		63
ANNEXE A. CONTRIBUTION A. MAZOUZ ET AL., MODERN PHYSICS LETTERS B, 2017		
		67
ANNEXE B. LES ETATS COHERENTS : LES BASES		
		78
B.1.	Définition de Schrödinger	78
B.2.	Représentation des états quantiques	78
B.2.1.	Représentation position	78
B.2.2.	Représentation impulsion	79
B.2.3.	Représentation de Fock ou Nombre	80
B.2.4.	Représentation analytique ou de Fock-Bargmann	81
B.2.5.	Les opérateurs dans la représentation Fock-Bargmann :	82
B.3.	Les états cohérents de Schrödinger	83
B.3.1.	Noyau de Bergmann comme état cohérent :	83

B.3.2.	Les états cohérents de Schrödinger dans les autres représentations : ..	84
B.3.3.	Les états de Glauber- Klauder- Sudarshan ou les états cohérents standard :	84
B.4.	Construction des états cohérents.....	84
B.4.1.	Définition 1	85
B.4.2.	Définition 2	85
B.4.3.	Définition 3	87

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 4.1 : Dispersion en $\hat{\mu}$ et en \hat{P}_μ et produit des dispersions en fonction du paramètre de compression γ	54
Figure 4.2 : Densité de probabilité $ \psi(1.2, 0, x, y, z, t) ^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ selon les trois axes.	56
Figure 4.3 : Densité de probabilité $ \psi(1.2, 0, R, t) ^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$	57
Figure 4.4 : Dispersion en $\hat{\mu}$ et en \hat{P}_μ et produit des dispersion pour $\gamma = 0$ et $\gamma = 0.2$...	57
Figure 4.5 : Densité de probabilité $ \psi(1.2, 0.2, x, y, z, t) ^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ selon les trois axes de compression.	58
Figure 4.6 : Densité de probabilité $ \psi(1.2, 0.2, R, t) ^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$	59
Figure 4.7 : Courbes de niveau des densités de probabilité $ \psi(\alpha, 0, x, y, z, 0) ^2$ (gauche), $ \psi(\alpha, 0.4, x, y, z, 0) ^2$ (centre) et $ \psi(\alpha, 0.8, x, y, z, 0) ^2$ (droite).....	59
Figure 4.8 : Comparaison des densités de probabilité.	60

INTRODUCTION GENERALE

Les termes des « états cohérents (EC) » et « états comprimés » ont été si communs ces derniers temps qu'ils peuvent être trouvés dans presque tous les articles de l'optique quantique moderne et de la théorie de l'information quantique. Les états cohérents, qui sont en quelque sorte les pierres angulaires de l'optique quantique moderne, ont été proposés immédiatement après la naissance de la mécanique quantique par Schrödinger [1] puis par Kennard [2] et Darwin [3] sous la forme de paquets d'ondes gaussiennes non étalées. Ces états ont été redécouverts plus tard en 1963 par Glauber [4] (sous la forme d'états propres de l'opérateur d'annihilation) qui les a exprimés dans une forme fascinante, qui est familière en tant qu'états cohérents aujourd'hui.

Au cours de la même année 1963 Klauder [5] a introduit un système d'états, similaire à celui de Glauber, dans l'objectif de sonder, en termes de valeurs moyennes, la relation entre systèmes quantiques et classiques. Notons que la contribution de Klauder s'inscrit, en fait, dans le même élan de l'idée ayant été déjà émise par Schrödinger en 1926 lorsqu'il a étudié les états associés à l'oscillateur harmonique quantique qui permettent aux valeurs moyennes des opérateurs impulsion et position de se rapprocher le plus possible de leurs homologues classiques [6]. L'apport qui mérite d'être souligné à propos de ces travaux de Klauder est qu'ils incarnent la possibilité de généraliser la notion d'EC [6-8] à différents domaines de la physique.

Aujourd'hui, on trouve des états cohérents dans diverses branches de la physique, y compris la physique mathématique [6-9], les ondelettes [10], la gravitation quantique [11], la cosmologie [12], la physique atomique et moléculaire [13]. Les états comprimés proviennent principalement des états cohérents et sont des états quantiques intriqués [14, 15], ingrédients fondamentaux de l'étude de la théorie de l'information quantique.

La généralisation des EC, au sens de leur extension à des domaines de la physique régis par un formalisme Hamiltonien autre que celui de l'oscillateur harmonique, a commencé à émerger à partir des années soixante-dix. Les premières tentatives ont été marquées par des inadéquations qui se traduisent par des résultats divergents [8, 11, 16]. L'approche de généralisation la plus adéquate a été établie par Perelomov [17] et Gilmore [8]. Ces deux auteurs ont, indépendamment l'un de l'autre, trouvé l'issue qui consiste à établir le lien entre la théorie des groupes et la construction des EC. A la lumière de cet apport, on s'aperçoit que les EC de Glauber sont eux-mêmes en rapport avec une *structure algébrique* qui est le *groupe de Weyl-Heisenberg* [4, 6].

Perelomov et Gilmore ont ainsi ouvert un horizon sans limites à l'extension et à la généralisation des EC. L'idée repose sur la détermination de l'algèbre de Lie qui est en rapport avec le groupe régissant les symétries du système étudié. Ensuite, on en déduit le groupe dynamique qui joue dans la construction des EC relatifs au système en question, un rôle similaire à celui du groupe de Weyl-Heisenberg dans le cas de la construction des EC correspondants à l'oscillateur harmonique

Ces généralisations ne sont pas stimulées uniquement pour répondre à des questions posées par les mathématiques (ou la physique mathématique), mais aussi pour des nécessités d'ordre physique [6, 7, 18]. En effet, dans plusieurs contextes, les EC constituent un outil à

la fois efficace et pertinent qui permet de déterminer les grandeurs physiques caractéristiques des systèmes étudiés.

Dans la littérature, il existe trois approches qui permettent la construction des états cohérents, que nous allons exposer dans ce qui va suivre.

La première est basée sur la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$, où les opérateurs de position X et de l'impulsion P sont donnés par :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+), \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a - a^+) \quad (1)$$

Les opérateurs a et a^+ sont appelés respectivement *opérateur d'annihilation* et *de création* des états quantiques de l'oscillateur harmonique. Ils satisfont à la relation de commutation suivante :

$$[a, a^+] = 1 \quad (2)$$

Les états cohérents selon cette définition sont définis comme ceux permettant d'avoir l'égalité $\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}$ tout en garantissant l'invariance de cette relation au cours du temps.

La seconde définition repose sur l'existence d'un opérateur unitaire « dit opérateur de déplacement » noté $D(z)$

$$D(z) = e^{za^+ - \bar{z}a} \quad (3)$$

et dont l'action sur l'état fondamental $|0\rangle$ « état du vide » génère les états cohérents $|z\rangle$.

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^+)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^+} |0\rangle \quad (4)$$

La troisième définition de ces états consiste à les définir comme des états propres de l'opérateur d'annihilation :

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad (5)$$

L'état résultant est donné par :

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (6)$$

Les trois définitions précitées sont équivalentes pour l'oscillateur harmonique.

La première définit les états cohérents, dits états d'incertitude minimale, comme ceux minimisant la relation d'incertitude de Heisenberg associée aux opérateurs canoniques. Cette dernière relation d'incertitude n'est qu'un cas particulier d'une relation plus générale dite

relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger associée à un ensemble d'opérateurs hermitiques arbitraires [19]. La minimisation de la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger a permis d'obtenir une autre classe d'états cohérents dits états intelligents [19, 20]. Récemment, la construction explicite des états intelligents pour les algèbres $SU(2)$, $SU(1, 1)$ a été développée par Trifonov [21].

La deuxième définition a été développée indépendamment par Klauder [5], Perelomov [17] et Gilmore [8]. Ces auteurs ont montré que les états cohérents sont intimement liés au groupe dynamique du système physique étudié. Cette propriété est issue du langage de la mécanique quantique qui associe à chaque système quantique un groupe dynamique. Pour le cas de l'oscillateur harmonique, le groupe dynamique associé est le groupe de Weyl-Heisenberg.

Il faut noter que les trois définitions s'appliquent également lorsqu'il s'agit de construire les états cohérents associés à d'autres algèbres. En effet, la troisième définition a été reprise par Barut et Girardello pour construire la famille d'états cohérents pour l'algèbre de Lie $SU(1,1)$ en exploitant sa série de représentations discrètes [8]. D'autres généralisations de cette définition ont été également utilisées pour obtenir des états cohérents pour des systèmes quantiques exactement solubles. Dans ce cas les états obtenus sont appelés états cohérents de Gazeau-Klauder [10-12].

Ces définitions montrent bien que les notions d'états cohérents et intelligents sont intimement liées à la structure de l'algèbre à laquelle ils seront évalués. Hormis le cas de l'oscillateur harmonique où les trois définitions (ou approches) coïncident, la construction des états cohérents et intelligents pour une algèbre conduit à des résultats différents selon l'approche adoptée

Les états cohérents jouissent d'un ensemble de propriétés remarquables qui ont un intérêt aussi bien physique que mathématiques à savoir :

- La continuité.
- La résolution de l'identité.
- La stabilité temporelle.
- L'action à l'identité.

Les deux premières propriétés sont standard tandis que les deux dernières dépendent de la nature du système physique étudié.

Dans cette présente thèse, nous nous intéressons à la construction des états cohérents et comprimés de systèmes physiques exactement solubles, pour cela, notre travail va s'articuler autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre traite principalement de la relation entre le système des états cohérents et le groupe de Weyl-Heisenberg, groupe dynamique associé à l'oscillateur harmonique. Les propriétés de base de ce système sont dérivées par des méthodes théoriques du groupe.

Le second chapitre est consacré à la construction des états cohérents pour les systèmes quantiques exactement solubles. Nous allons en premier lieu exploiter la méthode de factorisation [22, 23] de l'Hamiltonien décrivant le système quantique étudié. La méthode de factorisation et la mécanique quantique supersymétrique sont des ingrédients utiles pour introduire les opérateurs de création et d'annihilation d'un système quantique exactement

soluble. Ces opérateurs vont nous permettre par la suite de donner les expressions des états cohérents pour les systèmes quantiques en question. Après la présentation de l'algorithme permettant d'obtenir les états cohérents pour tout système quantique exactement soluble, deux classes d'états cohérents seront introduites. La première correspond aux états de type Gazeau-Klauder et qui sont définis comme des états qui diagonalisent l'opérateur d'annihilation du système. La seconde est obtenue par l'action d'un opérateur déplacement (définis en termes des opérateurs de création et d'annihilation) sur l'état fondamental du système. Nous construisons également l'espace de Fock-Bargmann associé à chaque classe d'états cohérents.

Dans le troisième chapitre, nous allons montrer la méthode pour obtenir les états intelligents (les états comprimés étant un cas particulier où c'est la relation d'incertitude de Heisenberg qui est vérifiée), donner des exemples et les relier au concept des états cohérents généralisés.

Enfin, dans le dernier chapitre nous allons construire les états cohérents et comprimés de l'oscillateur à 3D isotrope. Nous allons montrer qu'ils minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg. Nous étudierons le comportement de ces états en ce qui concerne la localisation et l'incertitude minimale. Les calculs de la dispersion et des valeurs moyennes seront effectués analytiquement. Nous allons également calculer la densité de probabilité afin de montrer l'effet de compression dans les états comprimés.

Dans la conclusion, nous commenterons nos résultats et nous énumérerons les perspectives qu'ils peuvent avoir.

1. LES SYSTEMES STANDARDS DES ETATS COHERENTS LIES AU GROUPE DE WEYL-HEISENBERG

1.1. Introduction.

Le présent chapitre traite principalement de la relation entre le système des états cohérents et le groupe de Weyl-Heisenberg. Les propriétés de base de ce système sont dérivées par des méthodes théoriques du groupe [17].

1.2. Le groupe de Weyl-Heisenberg et ses représentations.

1.2.1. Le groupe de Weyl-Heisenberg.

Les opérateurs les plus simples utilisés pour décrire un système quantique avec un degré de liberté sont les opérateurs de coordonnée q et l'opérateur quantité de mouvement p . Ils agissent dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} et satisfont les relations de commutations de Heisenberg.

$$[q, p] = i\hbar\hat{I}, \quad [q, \hat{I}] = [p, \hat{I}] = 0 \quad (1.1)$$

Ici \hat{I} est l'opérateur identité, \hbar la constante de Planck réduite et les crochets le commutateur $[A, B] \equiv AB - BA$.

La structure des relations de commutations canoniques (1.1) est décrite par un groupe appelé groupe de Weyl-Heisenberg [24]. Les propriétés les plus simples de ce groupe sont traitées dans cette section. Pour les aspects mathématiques les plus subtils de ce groupe voir la référence [25].

L'introduction d'une autre paire d'opérateurs est parfois plus appropriée, ces opérateurs sont : l'opérateur d'annihilation a et son conjugué, l'opérateur de création a^+ , définis comme :

$$a = \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}}, \quad a^+ = \frac{q - ip}{\sqrt{2\hbar}} \quad (1.2)$$

Qui obéissent aux règles de commutation

$$[a, a^+] = \hat{I}, \quad [a, \hat{I}] = [a^+, \hat{I}] = 0 \quad (1.3)$$

Les relations (1.2) et (1.3) signifient que les opérateurs q, p, \hat{I} (respectivement a, a^+, \hat{I}) sont des générateurs d'une algèbre de Lie, que l'on notera \mathcal{W}_1 . C'est l'algèbre le Weyl-Heisenberg.

Introduisons de nouvelles quantités

$$e_1 = i(\hbar)^{-1/2} p, \quad e_2 = i(\hbar)^{-1/2} q, \quad e_3 = i\hat{I}, \quad (1.4)$$

Et en les considérant comme des éléments d'une algèbre de Lie abstraite, pas seulement, comme des opérateurs dans un espace de Hilbert, on aura la définition suivante :

L'algèbre de Weyl-Heisenberg \mathscr{W}_1 est une véritable algèbre de Lie tridimensionnelle donnée par les relations de commutation de base

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0 \quad (1.5)$$

En général, les éléments de l'algèbre \mathscr{W}_1 sont écrits comme :

$$x = (s; x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + s e_3 \quad (1.6)$$

ou bien

$$x = is\hat{I} + \frac{i}{\hbar}(Pq - Qp) = is\hat{I} + (\alpha a^+ - \bar{\alpha} a) \quad (1.7)$$

où s, x_1 et x_2 sont des nombres réels,

$$x_1 = -(\hbar)^{-1/2} Q, \quad x_2 = (\hbar)^{-1/2} P \\ \alpha = (2\hbar)^{-1/2} (Q + iP) = 2^{-1/2} (-x_1 + ix_2), \quad \bar{\alpha} = (2\hbar)^{-1/2} (Q - iP)$$

Le commutateur des éléments $x = (s; x_1, x_2)$ et $y = (t; y_1, y_2)$ est donné par

$$[x, y] = B(x, y) e_3, \quad B(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (1.8)$$

Notons que $B(x, y)$ est la forme symplectique standard sur le plan (x_1, x_2) .

La construction du groupe de Lie correspondant à l'algèbre de Lie se fait par exponentiation :

$$\exp(x) = \exp(is\hat{I}) D(\alpha), \quad D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \bar{\alpha} a) \quad (1.9)$$

Afin de trouver la loi de multiplication des opérateurs $D(\alpha)$ nous utilisons l'identité (une identité équivalente a été prouvée par Weyl [24])

$$\exp A \exp B = \exp \left\{ \frac{1}{2} [A, B] \right\} \exp(A + B) \quad (1.10)$$

Qui est vérifiée si

$$[A, [A, B]] = 0, \quad [B, [A, B]] = 0 \quad (1.11)$$

Considérons la preuve simple de l'identité (1.10), proposée par *Glauber* [26]. Nous construisons un opérateur fonction

$$F(t) = \exp(tA)\exp(tB)\exp(-t(A+B)) \quad (1.12)$$

Qui satisfait

$$\frac{dF}{dt} = \exp(tA)[A, \exp(tB)]\exp(-t(A+B)) = t[A, B]F(t) \quad (1.13)$$

En intégrant cette équation jusqu'à $t = 1$, on obtient (1.10)

Enfin, en substituant $A = \alpha a^+ - \bar{\alpha} a$, $B = \beta a^+ - \bar{\beta} a$ dans (1.10) on obtient la loi de multiplication

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp(i \operatorname{Im}\{\alpha\bar{\beta}\})D(\alpha + \beta) \quad (1.14)$$

La formule correspondant au le produit de plusieurs opérateurs $D(\alpha)$ est

$$D(\alpha_n)D(\alpha_{n-1})\cdots D(\alpha_1) = \exp(i\delta)D(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1) \quad (1.15)$$

Où

$$\delta = \operatorname{Im}\left\{\sum_{j>k} \alpha_j \bar{\alpha}_k\right\} \quad (1.16)$$

La phase $\delta = \operatorname{Im}\{\alpha\bar{\beta}\}$ dans (1.14) a une signification simple. En réalité,

$$\delta = \operatorname{Im}\{\alpha\bar{\beta}\} = 2A(0, \beta, \alpha + \beta) \quad (1.17)$$

où $A(\alpha, \beta, \gamma)$ est l'aire du triangle dont les sommets sont aux points α, β, γ . A est positive si le cycle $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha$ est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. L'angle de phase de (1.15) peut être interprété de manière similaire.

Rappelons la relation $\alpha = (2\hbar)^{-1/2}(Q + iP)$ et écrivons l'expression de δ sous la forme

$$\delta = \frac{1}{\hbar} \int_{\Gamma} P dQ \quad (1.18)$$

où l'intégration est le long de la frontière du polygone avec les sommets aux points $0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \cdots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, δ est juste proportionnel à la zone du polygone sur le plan des phases.

Une conséquence de (1.14) est

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp\left(2i \operatorname{Im}\{\alpha\bar{\beta}\}\right)D(\beta)D(\alpha) \quad (1.19)$$

En fait, c'est une forme intégrale des relations de commutation de Heisenberg. *Weyl* [24] a écrit une relation équivalente quoique sous une forme quelque peu différente

$$\exp\left(\frac{iQp}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{iPq}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{iPQ}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{iPq}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{iQp}{\hbar}\right) \quad (1.20)$$

L'avantage de la forme (1.19) comparée à (1.3) est que contrairement à p et q , qui sont des opérateurs non bornés dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , les opérateurs $D(\alpha)$ sont bornés, leurs domaines de définition est l'espace entier \mathcal{H} [17].

Une autre conséquence de (1.14) est que les opérateurs $\exp(it)D(\alpha)$ forment une représentation du groupe avec des éléments fixés par trois nombres réels $g = (t; x_1; x_2)$, ou par un nombre réel t et un nombre complexe α , $g = (t; \alpha)$. Ce groupe s'appellera *le groupe de Weyl-Heisenberg*, noté W_1 . Il n'est pas difficile de voir que la loi de multiplication dans W_1 est

$$\begin{aligned} (s; x_1, x_2)(t; y_1, y_2) &= (s+t+B(x, y); x_1+y_1, x_2+y_2) \\ B(x, y) &= x_1y_2 - y_1x_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Notons que le groupe W_1 appartient à la classe des groupes dits nilpotents ; un exemple typique et pertinent pour cette classe est le groupe des matrices triangulaires supérieures (inférieures) avec des unités sur la diagonale principale.

Dans le cas considéré, $W_1 = \{g\}$, où

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Ces matrices forment la représentation non unitaire de dimension finie du groupe W_1 .

Les générateurs correspondants à l'algèbre de Lie e_1, e_2, e_3 sont représentés respectivement par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

1.2.2. Représentation du groupe de Weyl-Heisenberg

Le premier problème à considérer est la description de toutes les représentations unitaires irréductibles de W_1 . Notons tout d'abord que les éléments $(s, 0)$ forment le centre de W_1 , c'est-à-dire, l'ensemble des éléments qui commutent avec chaque élément de W_1 . Dans ce cas, pour toute représentation irréductible unitaire $T(g)$ du groupe W_1 , les opérateurs $T((s, 0))$ forment une représentation unitaire du sous-groupe $\{(s, 0)\}$, qui est déterminée par un nombre réel λ :

$$T^\lambda((s; 0)) = \exp(i\lambda s) \hat{I} \quad (1.24)$$

Ce problème a été résolu par *Stone* [27] et *Von Neumann* [28], le résultat est le théorème suivant :

Théorème :

Pour une valeur fixée de $\lambda (\lambda \neq 0)$, deux représentations irréductibles unitaires du groupe W_1 sont unitairement équivalentes.

En d'autres termes, pour deux systèmes d'opérateurs quelconque $\{D(\alpha)\}$ et $\{\tilde{D}(\alpha)\}$, satisfaisant (1.19), il existe un opérateur unitaire U tel que

$$\tilde{D}(\alpha) = U^+ D(\alpha) U \quad (1.25)$$

C'est également valable pour les paires \tilde{a}^+, \tilde{a} et a^+, a satisfaisant les relations de commutations (1.3) :

$$\tilde{a}^+ = u^+ a^+ u, \quad \tilde{a} = u^+ a u \quad (1.26)$$

Cependant, puisque les opérateurs a et a^+ sont non bornés, cette affirmation n'est valable que si certaines conditions supplémentaires sur le domaine des opérateurs \tilde{a}^+, \tilde{a} et a^+, a sont satisfaites [25].

Ainsi, une représentation unitaire irréductible de dimension infinie du groupe W_1 est fixée par un seul nombre réel $\lambda : T(g) = T^\lambda(g), \lambda \neq 0$

1.2.3. Réalisation concrète de la représentation $T^\lambda(g)$

Pour rappel les opérateurs q, p et a^+, a agissent dans l'espace de Hilbert. Les vecteurs appartenant à cet espace sont désignés par la notation de Dirac $|\psi\rangle$. Le produit scalaire des vecteurs $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$ est linéaire en $|\psi\rangle$ et anti-linéaire en $|\varphi\rangle$. L'opérateur de projection sur $|\psi\rangle$ s'écrit $|\psi\rangle\langle\psi|$. L'état ψ est décrit par une classe des vecteurs qui diffèrent de $|\psi\rangle$ par un facteur numérique.

On sait qu'il existe ce qu'on appelle un vecteur de vide $|0\rangle$ dans \mathcal{H} , c'est-à-dire un vecteur normalisé annihilé par l'opérateur a :

$$a|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (1.27)$$

L'action de l'opérateur de création a^+ génère un ensemble de vecteurs normalisés à partir du vide

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^+)^n |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Les vecteurs $\{|n\rangle\}$ forment une base dans \mathcal{H} , l'action de ces opérateurs est donnée par

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a^+a|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.29)$$

Parfois, il convient d'utiliser des représentations fonctionnelles concrètes de l'espace de Hilbert \mathcal{H} ou, en utilisant la terminologie physique des représentations définies. Dans le cas de la représentation dite de « position » ou « coordonnée » le vecteur $|\psi\rangle$ est représenté par une fonction de coordonnée $\langle q|\psi\rangle = \psi(q)$, qui est de carré-sommable

$$\int |\psi(q)|^2 dq < \infty \quad (1.30)$$

Pour plus de détails sur les représentations voir l'annexe B

1.3. États Cohérents

Cette section traite des systèmes d'états liés au groupe Weyl-Heisenberg W_1 , les systèmes d'états cohérents généralisés. Le système standard d'états cohérents est un cas particulier mais très important.

Soit $T(g)$ une représentation irréductible unitaire de W_1 (décrite dans la section précédente) et $|\psi_0\rangle$ un vecteur fixe dans l'espace de représentation \mathcal{H} . Il n'est pas difficile de voir que l'état correspondant au vecteur $|\psi_0\rangle$ n'est stable que sous l'action des opérateurs $T((s,0))$ (Rappelons qu'un état est représenté par un ensemble de vecteurs $e^{i\varphi}|\psi\rangle$, différents du vecteur $|\psi\rangle$ par un facteur de phase seulement, $|\exp(i\varphi)| = 1$). En d'autres termes, le sous-groupe d'isotropie H pour un état arbitraire $|\psi_0\rangle$ contient seulement les éléments de la forme $(s,0)$

Appliquons maintenant l'opérateur de la présentation $T(g) = T((t, \alpha)) = \exp(it)D(\alpha)$ à $|\psi_0\rangle$. Le résultat est un ensemble d'états $\{|\alpha\rangle\}$ [17].

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|\psi_0\rangle \quad (1.31)$$

Où α est un nombre complexe. De plus, puisque le sous-groupe d'isotropie de l'état $|\psi_0\rangle$ est $H = \{h\}$, $h = (t, 0)$, les différents α correspondent à des états différents. Le système $\{|\alpha\rangle\}$ est juste un système d'états cohérents généralisés du type $\{T(g), |\psi_0\rangle\}$. Le cas des états cohérents standards est un cas particulier et très important qui est déterminé par le choix du vecteur vide $|0\rangle$ comme vecteur de départ $|\psi_0\rangle$.

Les états cohérents généralisés ont un certain nombre de propriétés remarquables qu'on va citer ci-dessous.

Notons tout d'abord, que du fait que la représentation $T(g)$ soit irréductible, le système est complet, cependant les états ne sont généralement pas orthogonaux entre eux :

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\psi_0|D^+(\beta)D(\alpha)|\psi_0\rangle = \exp(i \operatorname{Im}\{\alpha\bar{\beta}\})\langle\psi_0|D(\alpha-\beta)|\psi_0\rangle \quad (1.32)$$

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = |\langle\psi_0|D(\alpha-\beta)|\psi_0\rangle|^2 = \rho(\alpha-\beta) \quad (1.33)$$

La fonction $\rho(\alpha)$ ne peut être égale à zéro.

L'opérateur $D(\alpha)$ transforme n'importe quel état cohérent en un autre état cohérent,

$$D(\alpha)|\beta\rangle = \exp(i \operatorname{Im}\{\alpha\bar{\beta}\})|\alpha+\beta\rangle \quad (1.34)$$

La relation (1.34) détermine l'action du groupe W_1 sur le plan α

$$(s; \beta)\alpha = \alpha + \beta \quad (1.35)$$

De cette équation, on voit que le facteur du groupe W_1 / H est le groupe de translation sur le plan α . Par conséquent, la métrique invariante dans le plan α est écrite comme

$$ds^2 = |d\alpha|^2 \quad (1.36)$$

La mesure invariante correspondante dans le plan α est :

$$d\mu(\alpha) = Cd^2\alpha = Cd\alpha_1 d\alpha_2, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad (1.37)$$

où C est une constante.

Passons maintenant à la résolution de l'identité. Soit $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ l'opérateur de projection sur l'état $|\alpha\rangle$. Considérons l'opérateur

$$\hat{A} = \int d\mu(\beta)|\beta\rangle\langle\beta| \quad (1.38)$$

Il est facile de voir que \hat{A} commute avec $D(\alpha)$. Donc, vu le lemme de Schur, cet opérateur est l'opérateur d'identité multiplié par un nombre,

$$\hat{A} = d^{-1} \cdot \hat{I} \quad (1.39)$$

Afin de trouver la constante d , on calcule la moyenne de l'opérateur sur un état cohérent $|\alpha\rangle$

$$d^{-1} = \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle = \int |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 d\mu(\beta) = \int \rho(\beta) d\mu(\beta) \quad (1.40)$$

Pour un opérateur borné \hat{A} , la constante d est non nulle, alors le facteur C dans (1.37) peut être choisi de sorte que $d = 1$. Il en résulte la « résolution de l'identité » :

$$\int d\mu(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{I} \quad (1.41)$$

Une conséquence immédiate de la résolution de l'identité (1.37) est la dépendance linéaire des états cohérents.

$$\int d\mu(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha | \beta \rangle = |\beta\rangle \quad (1.42)$$

En utilisant la relation (1.41) il est facile d'avoir :

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha) \psi(\alpha) |\alpha\rangle \quad (1.43)$$

où $\psi(\alpha)$ est donnée par

$$\psi(\alpha) = \langle \alpha | \psi \rangle \quad (1.44)$$

La fonction $\psi(\alpha)$ détermine complètement l'état $|\psi\rangle$, on l'appelle le symbole de l'état $|\psi\rangle$, et donne la norme de $|\psi\rangle$:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int |\psi(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) \quad (1.45)$$

Jusqu'à présent, le vecteur $|\psi_0\rangle$, à l'origine de la construction du système des états cohérents généralisés, était considéré comme un élément arbitraire de l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Comment pourrait-on utiliser ce fait pour que les états cohérents soient aussi proches que possible des états classiques ?

Dans cette situation, il est naturel d'utiliser la relation d'incertitude de Heisenberg pour déterminer le critère de « rapprochement » ou de « proximité » entre les états classiques et quantiques.

$$\Delta = \Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2 \quad (1.46)$$

Ici

$$(\Delta q)^2 = \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^2 \rangle, \quad (\Delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle \quad (1.47)$$

$\langle \hat{q} \rangle$ est la valeur moyenne de l'opérateur \hat{q} sur l'état considéré $|\psi\rangle$: $\langle \hat{q} \rangle = \langle \psi | \hat{q} | \psi \rangle$.

Tout d'abord, montrons que pour tous les états du système $\{|\alpha\rangle\}$ les dispersions Δq et Δp sont indépendantes de α . Pour cela, utilisons l'identité

$$D^+(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad (1.48)$$

Qui est facilement prouvée, en développant l'opérateur $D(\alpha)$ en puissance de l'opérateur $\alpha a^+ - \bar{\alpha} a$ et en utilisant les règles de commutations (1.3).

De (1.48) on obtient à la fois :

$$\begin{aligned} \langle \alpha | q | \alpha \rangle &= \langle \psi_0 | q | \psi_0 \rangle + (2\hbar)^{1/2} \alpha_1 \\ \langle \alpha | p | \alpha \rangle &= \langle \psi_0 | p | \psi_0 \rangle + (2\hbar)^{1/2} \alpha_2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

Alors

$$(\Delta q)_\alpha^2 = (\Delta q)_0^2, \quad (\Delta p)_\alpha^2 = (\Delta p)_0^2 \quad (1.50)$$

Ce qui prouve notre assertion.

Une autre conséquence, est que parmi les états cohérents il y a toujours un état pour lequel $\langle \hat{q} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$. Il est facile de voir que cette propriété est spécifique à l'état :

$$|-\alpha_0\rangle = D(-\alpha_0) |\psi_0\rangle \quad (1.51)$$

où $\alpha_0 = \langle \psi_0 | a | \psi_0 \rangle$. Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\langle \psi_0 | \hat{q} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{p} | \psi_0 \rangle = 0$.

Trouvons maintenant tous les états avec $\langle \hat{q} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$, minimisant la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta q \cdot \Delta p = \hbar/2 \quad (1.52)$$

Considérons l'inégalité

$$\langle A^+ A \rangle \geq 0, \quad A = \frac{\lambda q + ip}{\sqrt{2\lambda\hbar}}, \quad \lambda > 0 \quad (1.53)$$

où

$$\lambda^2 (\Delta q)^2 - \lambda \hbar + (\Delta p)^2 \geq 0 \quad (1.54)$$

Il n'est pas difficile de voir que remplir cette inégalité pour tout λ est équivalent à la relation de Heisenberg et que (1.52) ne peut être vérifiée que pour certaines valeurs positives de λ

$$A|\psi_0\rangle = \left(\frac{\lambda \hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\lambda\hbar}} \right) |\psi_0\rangle = 0 \quad (1.55)$$

Plus précisément, un tel état est le vide $|0\rangle$ (pour $\lambda = 1$).

Notons que les opérateurs A et A^+ satisfont la relation de commutation

$$[A, A^+] = \hat{I} \quad (1.56)$$

Ils peuvent être considérés alors comme une nouvelle paire d'opérateurs « annihilation-crédation », ils sont obtenus à partir des opérateurs originaux via une transformation canonique linéaire.

$$A = ua + va^+, \quad A^+ = \bar{u}a^+ + \bar{v}a, \quad |u|^2 - |v|^2 = 1 \quad (1.57)$$

Il est à noter que ce type de représentation constitue le groupe $SU(1,1)$, groupe des transformations linéaires de l'espace complexe bidimensionnel qui laisse la forme $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 1$ invariante.

Les états $\{|\alpha\rangle\}$, $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ forment le système des états cohérents standards. Evidemment, toutes les formules de cette section sont valables pour ce système. Cependant, pour ce cas particulier, il existe également un certain nombre de formule qui ne sont pas applicables au cas général.

Par exemple, il est facile de voir que l'état $|\alpha\rangle$ est annihilé par l'opérateur

$$D(\alpha) a D^+(\alpha) \quad (1.58)$$

Ce fait est équivalent à :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.59)$$

Ainsi, l'état cohérent standard est un état propre de l'opérateur d'annihilation, tandis que tout nombre complexe α peut être une valeur propre. Il n'est pas difficile de montrer que l'opérateur a^+ n'a pas de vecteurs propres dans \mathcal{H} .

Ci-dessous, quelques relations utiles pour les états $|\alpha\rangle$ sont présentées.

Tout d'abord, les expressions suivantes pour l'opérateur $D(\alpha)$ peuvent être dérivées de l'identité (1.10) :

$$D(\alpha) = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\exp(\alpha a^+)\exp(-\bar{\alpha}a) \quad (1.60)$$

$$D(\alpha) = \exp\left(|\alpha|^2/2\right)\exp(-\bar{\alpha}a)\exp(\alpha a^+) \quad (1.61)$$

L'équation (1.60) est la forme dite normale, ou forme de Wick pour l'opérateur $D(\alpha)$. Dans cette représentation, tous les opérateurs de création a^+ dans l'expression se trouvent à gauche de l'opérateur d'annihilation a ; Respectivement, l'équation (1.61) est la forme anti-normal ou anti-Wick de l'opérateur $D(\alpha)$.

Il en découle les relations suivantes qui sont très utiles :

$$a^+D(\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)D(\alpha), \quad D(\alpha)a^+ = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)D(\alpha) \quad (1.62)$$

$$aD(\alpha) = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} - \frac{\alpha}{2}\right)D(\alpha), \quad D(\alpha)a = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} + \frac{\alpha}{2}\right)D(\alpha) \quad (1.63)$$

Une autre conséquence de l'équation (1.60) est

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\exp(\alpha a^+)|0\rangle \quad (1.64)$$

Qui peut être réécrite sous la forme de Glauber,

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \quad (1.65)$$

Les expressions explicites ci-dessous sont également données pour les états cohérents dans les représentations de coordonnées et de moment

$$\langle q|\alpha\rangle = (\pi\hbar)^{-1/4}\exp\left[i(2/\hbar)^{1/2}\alpha_2q\right]\exp\left(-\frac{[q-(2\hbar)^{1/2}\alpha_1]^2}{2\hbar}\right) \quad (1.66)$$

$$\langle p|\alpha\rangle = (\pi\hbar)^{-1/4}\exp\left[-i(2/\hbar)^{1/2}\alpha_1p\right]\exp\left(-\frac{[p-(2\hbar)^{1/2}\alpha_2]^2}{2\hbar}\right) \quad (1.67)$$

De plus, il résulte immédiatement de l'équation (1.65) que

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \bar{\alpha}\beta\right) \quad (1.68)$$

$$\rho(\alpha) = |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2), \quad |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2) \quad (1.69)$$

Notons que la fonction $\rho(\alpha)$ n'est pas nulle partout, de sorte que deux états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux. Cette propriété concerne également les systèmes d'états cohérents généralisés ayant des sous-algèbres d'isotropie maximale.

Il n'est pas difficile d'obtenir maintenant la constante C dans (1.37), c'est π^{-1} , de sorte que la mesure est donnée par :

$$d\mu(\alpha) = \pi^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad (1.70)$$

Notons aussi la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg pour le système d'états cohérents ; pour ces systèmes nous avons $\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}$.

1.4. Représentation de Fock-Bargmann

Cette représentation permet de trouver des solutions plus simples pour un certain nombre de problèmes, en exploitant la théorie des fonctions entières analytiques.

Une telle représentation peut être liée à tout système d'état cohérent, ayant un sous-groupe d'isotropie maximale. Ici nous considérons seulement le cas des états cohérents habituels $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$, $|0\rangle$ est le vecteur d'état du vide, $a|0\rangle = 0$.

Soit $|\psi\rangle$ un vecteur arbitraire normalisé dans \mathcal{H} comme indiqué dans la section précédente, l'état $|\psi\rangle$ est complètement déterminé par son symbole $\langle \alpha | \psi \rangle$

Soit

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad \langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1 \quad (1.71)$$

D'après (1.65),

$$\langle \alpha | \psi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \psi(\bar{\alpha}) \quad (1.72)$$

où

$$\psi(z) = \sum_n c_n u_n(z), \quad u_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad (1.73)$$

La série (1.73) converge uniformément dans n'importe quel domaine compact du plan z à cause de la condition $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$, alors $\psi(z)$ est une fonction analytique entière dans le plan complexe de z , et

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \int \exp(-|z|^2) |\psi(z)|^2 d\mu(z) < \infty \quad (1.74)$$

Le produit scalaire de deux fonctions $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$, satisfaisant la condition (1.74), est défini par :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int \exp(-|z|^2) \bar{\psi}_1(z) \psi_2(z) d\mu(z) \quad (1.75)$$

Bargmann [29] a montré que cet espace fonctionnel est en fait un espace de Hilbert.

Ainsi, nous sommes conduits à une représentation concrète de l'espace de Hilbert comme un espace de fonctions analytiques entières $\psi(z)$ satisfaisant la condition (1.74).

A l'origine, cette représentation a été introduite par Fock [30] en 1928, sous une forme quelque peu différente mais équivalente, Fock a proposé les opérateurs suivants satisfaisants les relations de commutation de Heisenberg (1.3)

$$a \rightarrow d/dz, \quad a^+ \rightarrow z \quad (1.76)$$

En analogie à ceux introduits par Schrödinger, $\hat{p} = -i\hbar d/dq$, $\hat{q} = q$.

Cette représentation sera nommée représentation de *Fock-Bargmann* et son espace désigné par \mathcal{F} . Le produit scalaire dans cet espace est donné par (1.75). Une conséquence à l'inégalité de Schwarz

$$\langle \alpha | \psi \rangle \leq \|\alpha\| \|\psi\| \quad (1.77)$$

est

$$|\psi(\bar{\alpha})| \leq \|\alpha\| \|\psi\| \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \quad (1.78)$$

Pour tout $\psi(z) \in \mathcal{F}$.

Comme mentionné dans (1.76), dans la représentation de Fock-Bargmann, l'opérateur a^+ est la multiplication par z , tandis que l'opérateur a est la différentiation par rapport à z , on voit facilement que a^+ est le conjugué de a pour le produit scalaire donné en (1.75). Il est à remarquer que la forme du produit scalaire peut être dérivée de l'exigence que les opérateurs a et a^+ soient conjugués.

Notons quelques propriétés de cette représentation.

La base orthonormée dans \mathcal{F} a une forme beaucoup plus simple que dans la représentation coordonnée,

$$|n\rangle \rightarrow \langle z | n \rangle = u_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad (1.79)$$

La représentation correspondante de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ est :

$$\langle z|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha z\right) \quad (1.80)$$

Le rôle de la fonction δ dans l'espace \mathcal{F} est joué par

$$\delta(z, z') = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \bar{u}_n(z') = \exp(z\bar{z}') \quad (1.81)$$

En fait, il est facile de voir cela pour n'importe quelle fonction analytique $f(z)$ dans \mathcal{F} ,

$$f(z) = \int \delta(z, z') \exp(-|z'|^2) f(z') d\mu(z') \quad (1.82)$$

Considérons maintenant l'espace L_2 , l'espace de toutes les fonctions (pas nécessairement analytiques) satisfaisant la condition

$$\|f\|^2 = \int |f(z, z')|^2 \exp(-|z|^2) d\mu(z) < \infty \quad (1.83)$$

Bien sûr,

$$\hat{f}(z) = \int \exp(z\bar{z}' - |z'|^2) f(z', \bar{z}') d\mu(z') \quad (1.84)$$

Représente la projection de l'espace L_2 sur $\mathcal{F} : L_2 \rightarrow \mathcal{F}$. Notons également, que les états $|\psi\rangle$ et $|\alpha\rangle$ sont orthogonaux, alors $\psi(\tilde{\alpha}) = 0$.

Finalement, la relation entre la représentation coordonnée habituelle et la représentation de Fock-Bargmann est donnée par le produit $\langle z|q\rangle$, satisfaisant

$$a\langle z|q\rangle = z\langle z|q\rangle \quad (1.85)$$

où a est un opérateur agissant dans l'espace q . Explicitement, cette équation est :

$$\left[\hbar \frac{d}{dq} + q - (2\hbar)^{1/2} z \right] \langle z|q\rangle = 0 \quad (1.86)$$

Qui donne

$$\langle z|q\rangle = c(z) \exp\left[-\frac{1}{2\hbar} q^2 + (2/\hbar)^{1/2} zq\right] \quad (1.87)$$

En particulier, la fonction $\varphi_0(q) = (\pi\hbar)^{-1/4} \cdot \exp(-q^2 / 2\hbar)$ correspond à $f_0(z) = 1$, par conséquent

$$[c(z)]^{-1} = (\pi\hbar) \int \exp\left[-\frac{q^2}{\hbar} + (2/\hbar)^{1/2} zq\right] dq = (\pi\hbar)^{1/4} \exp(z^2/2) \quad (1.88)$$

Ainsi le produit

$$K(z, q) = \langle z|q \rangle = (\pi\hbar)^{1/4} \exp\left[-\frac{z^2}{2} + (2/\hbar)^{1/2} zq - \frac{q^2}{2\hbar}\right] \quad (1.89)$$

Et les formules produisant cette relation sont :

$$f(z) = \int K(z, q) \varphi(q) dq \quad (1.90)$$

$$\varphi(q) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|z| < r} \overline{K(z, q)} f(z) \exp(-|z|^2) d\mu(z) \quad (1.91)$$

$$K(z, q) = \sum \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n(q) = (\pi\hbar)^{-1/4} \sum \frac{z^n}{\sqrt{n!}} H_n((\hbar)^{-1/2} q) \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (1.92)$$

La comparaison de cette dernière expression avec (1.89) donne la fonction génératrice pour les polynômes d'Hermite

$$\exp(-z^2 + 2zq) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(q) \quad (1.93)$$

En particulier, une représentation intégrale des polynômes d'Hermite est obtenue à partir de (1.91)

$$H_n(q) = \frac{2^{n/2}}{\pi} \int \exp\left[-\frac{z^2}{2} + \sqrt{2}zq - |z|^2\right] \bar{z}^2 d^2z \quad (1.94)$$

$$d^2z = dx dy, \quad z = x + iy$$

En conclusion, on présente les formules décrivant l'action des opérateurs $D(\alpha)$ en représentation coordonnée

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Pq - Qp)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}PQ\right) \exp\left(i\frac{Pq}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{Qp}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$D(\alpha)\psi(q) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}PQ\right) \exp\left(i\frac{Pq}{\hbar}\right) \psi(q - Q) \quad (1.96)$$

Et en représentation *Fock-Bargmann*

$$D(\alpha) f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha z) f(z - \bar{\alpha}) \quad (1.97)$$

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi la relation entre le système des états cohérents standards et le groupe de Weyl-Heisenberg, groupe dynamique associé à l'oscillateur harmonique, où les propriétés de base de ce système ont été dérivées par les méthodes théoriques du groupe.

2. SYSTEMES QUANTIQUES ARBITRAIRES ETATS COHERENTS

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder la construction des états cohérents pour les systèmes quantiques exactement solubles. Ces systèmes consistent en des systèmes quantiques pour lesquels l'équation de Schrödinger peut être transformée en équation de forme hypergéométrique [22]. Nous allons en premier lieu exploiter la méthode de factorisation [28, 31-33] de l'Hamiltonien décrivant le système quantique étudié. En effet, il est bien connu que pour tout système soluble, l'Hamiltonien s'écrit comme produit de deux opérateurs d'échelles. La méthode de factorisation et la mécanique quantique supersymétrique sont des ingrédients utiles pour introduire les opérateurs de création et d'annihilation d'un système quantique exactement soluble. Ces opérateurs vont nous permettre par la suite de donner les expressions des états cohérents pour les systèmes quantiques en question. Nous allons présenter, l'algorithme permettant d'obtenir les états cohérents pour tout système quantique exactement soluble. Deux classes d'états cohérents seront introduites. La première correspond aux états de type Gazeau-Klauder et qui sont définis comme des états qui diagonalisent l'opérateur d'annihilation du système. La seconde est obtenue par l'action d'un opérateur déplacement (défini en termes des opérateurs de création et d'annihilation) sur l'état fondamental du système. Nous construisons également l'espace de Fock-Bargmann. Pour illustrer le formalisme général que nous avons développé, nous traitons le cas où une particule quantique évolue dans un potentiel de type Pöschl-Teller.

2.2. Systèmes quantiques arbitraires

2.2.1. Opérateurs de création et d'annihilation

Soit un système quantique décrit par un Hamiltonien H ayant un spectre discret borné inférieurement tel que $H \geq 0$. La base d'état propres $|\psi_n\rangle$ associée à H est supposée non dégénérée et vérifiant les relations de fermeture et d'orthogonalité suivantes :

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = I \quad (2.1)$$

Ces états satisfont les équations aux valeurs propres :

$$H|\psi_n\rangle = e_n|\psi_n\rangle \quad (2.2)$$

où les valeurs propres e_n représentent les énergies du systèmes et sont supposées positives telles que $e_{n+1} > e_n$. L'énergie de l'état minimal est supposée nulle $e_0 = 0$.

Pour un tel système, l'état fondamental $\psi_0(x)$ ainsi que le potentiel $V(x)$ dans lequel est plongé le système sont reliés par la relation :

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \quad (2.3)$$

En effet, cette dernière équation peut être déduite à partir de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour l'état fondamentale $\psi_0(x)$:

$$H\psi_0(x) = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi_0(x) = 0 \quad (2.4)$$

Le Hamiltonien H peut être écrit sous la forme factorisée suivante :

$$H = A^+ A \quad (2.5)$$

où les opérateurs A^+ et A sont donnés par :

$$A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + W(x) \right), \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + W(x) \right), \quad (2.6)$$

avec $W(x)$ le superpotentiel qui satisfait l'équation de Riccati suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} (W^2(x) - W'(x)), \quad (2.7)$$

Il est aisé de voir, à partir des équations (2.3) et (2.6), que le superpotentiel $W(x)$ peut s'exprimer en termes de la fonction d'onde de l'état fondamental comme suit :

$$W(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad (2.8)$$

De plus le commutateur des opérateurs A^+ et A est donné en fonction du superpotentiel $W(x)$:

$$[A, A^+] = W'(x) \quad (2.9)$$

Cette expression généralise celle de l'oscillateur harmonique où $W(x) = x$. Les opérateurs A^+ et A ne représentent pas les opérateurs de création et d'annihilation associés à l'Hamiltonien H du système. Pour déterminer les opérateurs de création et d'annihilation pour le système en question, nous introduisons l'opérateur $H_+ = AA^+$ obtenu à partir de l'Hamiltonien $H = H_- = A^+A$ en inversant l'ordre des opérateurs A et A^+ . L'opérateur H_+ ainsi introduit est un Hamiltonien qui correspond à un nouveau potentiel $V_+(x)$.

$$H_+ = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x) \quad \text{avec} \quad V_+(x) = \frac{1}{2} (W^2(x) + W'(x)) \quad (2.10)$$

Notons que les potentiels $V_-(x) = V(x)$ et $V_+(x)$ sont des partenaires supersymétriques et les Hamiltoniens $H_- \equiv H$ et H_+ sont isospectraux [34, 35] (H_+ est aussi exactement soluble).

En effet, l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien H_- prend la forme :

$$H_- |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (2.11)$$

Ce qui implique :

$$H_+ (A |\psi_n\rangle) = E_n (A |\psi_n\rangle) \quad (2.12)$$

De façon similaire, l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien H_+ s'écrit sous forme :

$$H_+ |\theta_n\rangle = e_n |\theta_n\rangle \quad (2.13)$$

qui conduit à :

$$H_- (A^+ |\theta_n\rangle) = e_n (A^+ |\theta_n\rangle) \quad (2.14)$$

Il s'ensuit que les Hamiltoniens H_- et H_+ sont isospectraux.

A partir de ces dernières équations et en exploitant le fait que $E_0 = 0$, il est clair que les énergies ainsi que les états propres des Hamiltoniens H_- et H_+ sont reliés par :

$$e_n = E_{n+1}$$

$$A |\psi_{n+1}\rangle = \sqrt{E_{n+1}} e^{i(E_{n+1}-E_n)\alpha} |\theta_n\rangle \quad (2.15)$$

$$A^+ |\theta_n\rangle = \sqrt{e_n} e^{-i(E_{n+1}-E_n)\alpha} |\psi_{n+1}\rangle \quad (2.16)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons que les états propres $|\psi_{n+1}\rangle$ ($|\theta_n\rangle$) de l'Hamiltonien H_- (H_+) sont normalisés, ainsi que les états propres $|\theta_n\rangle$ (respectivement de $|\psi_{n+1}\rangle$) dans les équations (2.15) et (2.16) sont normés. De plus, les opérateurs A (A^+) transforment un état propre de H_- (respectivement de H_+) en un état propre de H_+ (respectivement de H_-) avec la même valeur propre. Ainsi, les opérateurs A et A^+ permettent de passer des états $|\psi_n\rangle$ aux états $|\theta_n\rangle$ et ne peuvent pas être considérés comme opérateurs de création et d'annihilation pour l'opérateur $H \equiv H_-$. Pour définir les opérateurs d'échelles pour le système quantique décrit

par l'Hamiltonien H , nous considérons la transformation unitaire U ($UU^+ = U^+U = I$) permettant le passage de la base $\{|\psi_n\rangle\}$ à $\{|\theta_n\rangle\}$ comme suit :

$$|\theta_n\rangle = U|\psi_n\rangle \quad (2.17)$$

La forme explicite de l'opérateur U dans la base $\{|\psi_n\rangle\}$, est donnée par :

$$U = \sum_{n,m} U_{nm} |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \quad (2.18)$$

où les coefficients U_{nm} sont donnés par le produit scalaire $\langle \psi_n | \theta_m \rangle$

$$U_{nm} = \langle \psi_n | \theta_m \rangle = \int \psi_n^*(x) \theta_m(x) dx \quad (2.19)$$

Notons que dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'opérateur U n'est rien d'autre que l'opérateur identité.

En utilisant l'opérateur unitaire U , introduit ci-dessus, les opérateurs de création et d'annihilation de l'Hamiltonien H s'écrivent comme :

$$a^+ = A^+U, \quad a = U^+A \quad (2.20)$$

Leurs actions sur les états $\{|\psi_n\rangle\}$ sont données par :

$$a^+ |\psi_n\rangle = \sqrt{E_{n+1}} e^{-i(E_{n+1}-E_n)\alpha} |\psi_{n+1}\rangle \quad (2.21)$$

$$a |\psi_n\rangle = \sqrt{E_n} e^{i(E_n-E_{n-1})\alpha} |\psi_{n-1}\rangle \quad (2.22)$$

On vérifie facilement que $H = a^+a = A^+A$ et que les états $|\psi_n\rangle$ se construisent à partir de l'état fondamental et par application successive de l'opérateur de création a^+ :

$$|\psi_n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{E(n)}} e^{iE_n\alpha} |\psi_0\rangle, \quad n > 0 \quad (2.23)$$

où la quantité $E(n)$ représente le produit des énergies E_i :

$$E(n) = E_1 E_2 \cdots E_n \quad (2.24)$$

avec $E(0) = 1$.

Le facteur exponentiel contenu dans l'action des opérateurs de création a^+ et d'annihilation a , équations (2.21) et (2.22), produit seulement un facteur de phase. La

présence de ce facteur assure la stabilité temporelle des états cohérents généralisés qui seront construit ultérieurement.

Partons des équations (2.21) et (2.22), l'action du commutateur $[a, a^+]$ sur les états $|\psi_n\rangle$ est donnée par :

$$[a, a^+]|\psi_n\rangle = (E_{n+1} - E_n)|\psi_n\rangle \quad (2.25)$$

L'opérateur nombre N opère sur les états $|\psi_n\rangle$ comme suit :

$$N|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle \quad (2.26)$$

Pour un système quantique exactement soluble, l'opérateur N est en général différent du produit a^+a ($a^+a = H$). Nous vérifions de plus qu'il satisfait aux relations suivantes :

$$aN = (N+1)a, \quad a^+(N+1) = Na^+ \quad (2.27)$$

Nous introduisons l'opérateur $G(N)$ hermitien défini par :

$$[a, a^+] = G(N) \quad (2.28)$$

Et dont l'action sur la base $|\psi_n\rangle$ est :

$$G(N)|\psi_n\rangle = (E_{n+1} - E_n)|\psi_n\rangle \quad (2.29)$$

Ayant défini les opérateurs de création et d'annihilation pour les systèmes quantiques unidimensionnels exactement solubles, nous allons présenter, dans ce qui va suivre, l'algorithme permettant la construction de leurs états cohérents et intelligents généralisés.

2.3. États cohérents de Gazeau-Klauder

2.3.1. États propres de l'opérateur d'annihilation

Les états cohérents de Gazeau-Klauder, pour un système quantique arbitraire, sont des états propres de l'opérateur d'annihilation correspondant à ce système.

En effet, pour un système quantique décrit par le Hamiltonien H ($= A^+A = a^+a$), les états cohérents de Gazeau-Klauder $|z, \alpha\rangle$ sont labellisés par deux nombres complexes ($z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) où α est le paramètre qui apparaît dans les équations (2.21) et (2.22), et sont solutions de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$a|z, \alpha\rangle = z|z, \alpha\rangle \quad (2.30)$$

Pour obtenir la forme explicite de ces états, nous les décomposons en termes de la base $\{|\psi_n\rangle\}$ comme suit :

$$|z, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |\psi_n\rangle \quad (2.31)$$

où les coefficients a_n sont obtenus en utilisant l'équation (2.22). Ils sont donnés par l'expression suivante :

$$a_n = \frac{z^n}{\sqrt{Z(n)}} e^{-iE_n \alpha} a_0 \quad (2.32)$$

Après substitution, les états cohérents $|z, \alpha\rangle$ prennent la forme :

$$|z, \alpha\rangle = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{E(n)}} e^{-iE_n \alpha} |\psi_n\rangle \quad (2.33)$$

Pour que les états $|z, \alpha\rangle$ soient normalisés à l'unité, la constante de normalisation a_0 doit prendre la valeur :

$$|a_0|^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} \quad (2.34)$$

Les états cohérents de Gazeau-Klauder obtenus, possèdent les propriétés suivantes :

- 1) La continuité pour $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. i. e. pour $(z, \alpha) \rightarrow (z', \alpha')$ nous obtenons $\| |z, \alpha\rangle - |z', \alpha'\rangle \| \rightarrow 0$.
- 2) La stabilité temporelle qui se traduit par l'équation :

$$e^{iHt} |z, \alpha\rangle = |z, \alpha + t\rangle \quad (2.35)$$

et qui est garantie par la présence du facteur de phase dans la définition des actions des opérateurs a et a^+ équations (2.21) et (2.22).

- 3) La résolution de l'identité s'écrit :

$$\int |z, \alpha\rangle \langle z, \alpha| d\mu(z) = I_{\mathcal{H}} \quad (2.36)$$

où l'intégrale est étendue sur le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| < \mathcal{R}\}$, où \mathcal{R} est le rayon de convergence donné par :

$$\mathcal{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E(n)} \quad (2.37)$$

et $d\mu(z)$ désigne la mesure d'intégration. Cette dernière est déterminée en supposant qu'elle dépend uniquement de $|z|$ (condition qui traduit l'isotropie de la mesure). Nous obtenons :

$$d\mu(z) = [a_0]^{-2} h(r^2) r dr d\varphi, \quad z = r e^{i\varphi} \quad (2.38)$$

La résolution de l'identité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I_{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \left[\frac{\pi}{E(n)} \int_0^{\mathcal{R}^2} h(u) u^n du \right] \quad (2.39)$$

Cette dernière équation est satisfaite si :

$$\int_0^{\mathcal{R}^2} h(u) u^n du = \frac{E(n)}{\pi} \quad (2.40)$$

Il est donc clair, d'après l'équation ci-dessus, que la résolution de l'identité est équivalente à la détermination de la fonction $h(u)$ doit être solution de (2.40). Pour $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, la fonction $h(u)$ est la transformée inverse de Mellin [36] de la fonction complexe $\pi^{-1}E(s-1)$:

$$h(u) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(s-1) u^{-s} ds, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

Le calcul explicite de la fonction $h(u)$ exige la connaissance du spectre du système quantique en question.

- 4) L'action à l'identité qui se traduit par l'équation suivante donnant la valeur moyenne de l'Hamiltonien H dans les états $|z, \alpha\rangle$

$$\langle z, \alpha | H | z, \alpha \rangle = |z|^2 \quad (2.42)$$

Cette propriété est caractéristique des états cohérents de Gazeau-Klauder qui sont des états propres de l'opérateur d'annihilation.

- 5) Finalement, les états cohérents $|z, \alpha\rangle$ peuvent être générés par l'action d'un opérateur $U(z)$ sur l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ [37, 38] :

$$|z, \alpha\rangle = U(z) |\psi_0\rangle = a_0 \exp\left(z \frac{N}{g(N)} a^+\right) |\psi_0\rangle \quad (2.43)$$

où $g(N) \equiv H = a^+ a$.

L'opérateur $U(z)$ n'est pas unitaire et ne peut pas être interprété comme opérateur de déplacement au sens de Perelomov.

En connexion avec les travaux de Gazeau et Klauder [9, 39], un commentaire peut être fait à ce niveau. En effet, les états cohérents (2.33) satisfont toutes les exigences à savoir (continuité, stabilité temporelle, la résolution de l'identité, action à l'identité) données dans leur approche de construction.

2.3.2. La représentation de Fock-Bargmann

La représentation de Fock-Bargmann est un outil mathématique utilisé fréquemment pour résoudre les équations aux valeurs propres qui permettent de générer les états intelligents. Cette représentation s'appuie sur l'exploitation de la théorie des fonction entières analytiques.

En exploitant le travail pionnier du cas de l'oscillateur harmonique dû à Bargmann [29], nous explicitons la représentation analytique de Fock-Bargmann pour un système quantique arbitraire. Pour ce faire, nous rappelons d'abord la représentation de Fock-Bargmann pour le cas de l'oscillateur harmonique :

Soit \mathcal{X} l'espace des fonctions analytiques $f(x)$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f|h \rangle = \int \overline{f(z)} h(z) e^{-|z|^2} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2\pi i} \quad \forall f, h \in \mathcal{X} \quad (2.44)$$

où le domaine d'intégration s'étend à tout le plan complexe. De façon générale, une fonction analytique quelconque $f(z)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des

fonction $\varphi_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Ces fonctions satisfont :

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \int \overline{\varphi_n(z)} \varphi_m(z) e^{-|z|^2} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2\pi i} = \delta_{nm} \quad (2.45)$$

Dans cette représentation, les opérateurs de création et d'annihilation agissent sur l'espace des fonctions analytiques \mathcal{X} comme suit :

$$\langle z | a^+ | f \rangle = z f(z), \quad \langle z | a | f \rangle = \frac{d}{dz} f(z) \quad (2.46)$$

En utilisant les actions de a^+ et a sur l'espace \mathcal{X} , il est simple de vérifier :

$$\begin{aligned} a^+ \varphi_n(z) &= \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}(z) \\ a \varphi_n(z) &= \sqrt{n} \varphi_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pour un système quantique arbitraire, nous définissons l'espace de Fock-Bargmann comme étant l'espace des fonctions holomorphes muni d'un produit scalaire défini comme suit :

$$\langle f | g \rangle = \int \overline{f(z)} g(z) d\mu(z) \quad (2.48)$$

où $d\mu(z)$ est la mesure définie auparavant (voir équations (2.38) et (2.40)). Soit $|f\rangle$ un état quantique arbitraire du système considéré :

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n |\psi_n\rangle, \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2 < \infty \quad (2.49)$$

Dans la représentation de Fock-Bargmann, tout état $|f\rangle$ est représenté par une fonction complexe dont la forme est :

$$f(z) \equiv \langle \bar{z}, \alpha | f \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{E(n)}} e^{iE_n \alpha} f_n \quad (2.50)$$

En particulier, au vecteur propre $|\psi_n\rangle$ on associe le monôme :

$$\langle \bar{z}, \alpha | \psi_n \rangle = \frac{z^n}{\sqrt{E(n)}} e^{iE_n \alpha} \quad (2.51)$$

Dans la représentation de Fock-Bargmann, l'opérateur d'annihilation est représenté par :

$$a = z^{-1} g \left(z \frac{d}{dz} \right) \quad (2.52)$$

tandis que l'opérateur de création a^+ opère comme opérateur de multiplication par z :

$$a^+ = z \quad (2.53)$$

L'action différentielle de l'opérateur nombre est définie par :

$$N = z \frac{d}{dz} \quad (2.54)$$

Notons que dans le cas où :

$$g \left(z \frac{d}{dz} \right) = z \frac{d}{dz} \quad \text{i.e.} \quad g(N) = N \quad (2.55)$$

Nous obtenons la représentation de Fock-Bargmann de l'oscillateur harmonique (2.46). Entre autre, il est clair que la réalisation différentielle définie ici devient opérationnelle si on dispose de la forme de l'opérateur $g(N)$ en fonction de l'opérateur nombre N . Nous allons exploiter cette représentation lors de l'examen du cas du potentiel de Pöschl-Teller:

2.4. États cohérents de Klauder-Perelomov

Les états cohérents de Klauder-Perelomov, pour un système quantique arbitraire, sont définis par l'action d'un opérateur déplacement unitaire agissant sur l'état fondamental [38] :

$$|\zeta, \alpha\rangle = \exp(\zeta a^+ - \bar{\zeta} a) |\psi_0\rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad (2.56)$$

Le développement de l'action de l'opérateur de déplacement, $D(\zeta) = \exp(\zeta a^+ - \bar{\zeta} a)$, sur l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ du système quantique, et en utilisant l'action (2.21) et (2.22) des opérateurs d'annihilation et de création sur l'espace de Hilbert $\{|\psi_n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$, les états cohérents $|\zeta, \alpha\rangle$ s'écrivent [38] :

$$|\zeta, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{\sqrt{F_n(|\zeta|)}} e^{-iE_n \alpha} |\psi_n\rangle \quad (2.57)$$

où les quantités $F_n(|\zeta|)$ vérifient la relation :

$$F_n(|\zeta|) E(n) (c_n(|\zeta|))^2 = 1 \quad (2.58)$$

avec $c_n(|\zeta|)$ des coefficients exprimés en terme des énergies du système par :

$$c_n(|\zeta|) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-|\zeta|^2)^j}{(n+2j)!} \left(\sum_{i_1=1}^{n+1} E_{i_1} \sum_{i_2=1}^{i_1+1} E_{i_2} \cdots \sum_{i_j=1}^{i_{j-1}+1} E_{i_j} \right) \quad (2.59)$$

En posant :

$$\pi(n+1, j) = \sum_{i_1=1}^{n+1} E_{i_1} \sum_{i_2=1}^{i_1+1} E_{i_2} \cdots \sum_{i_j=1}^{i_{j-1}+1} E_{i_j}, \quad \text{avec} \quad \pi(n+1, 0) = 1 \quad (2.60)$$

on peut vérifier aisément que les quantités $\pi(n, j)$ satisfont l'équation de récurrence suivante :

$$\pi(n+1, j) - \pi(n, j) = E_{n+1} \pi(n+2, j-1) \quad (2.61)$$

Cette dernière relation permet d'établir que les coefficients $c_n(|\zeta| = r)$ satisfont l'équation différentielle :

$$\frac{dc_n(r)}{dr} = \frac{1}{r} c_{n-1}(r) - \frac{n}{r} c_n(r) - E_{n+1} c_{n+1}(r) r \quad (2.62)$$

L'obtention de la forme explicite des états cohérents $|\zeta, \alpha\rangle$ passe par la résolution de l'équation différentielle ci-dessus. En effet, la solution de cette équation pour un système quantique arbitraire n'est pas, en général, une tâche aisée. Cependant, sa solution pour des cas particuliers sera donnée ultérieurement. Ici, comme une illustration de nos résultats nous donnons les états cohérents de Klauder-Perelomov pour l'oscillateur harmonique et ce en utilisant les considérations introduites ci-dessus. Dans ce cas, nous montrons que les états cohérents (équation (2.57)) conduisent à ceux de l'oscillateur harmonique. En effet, pour l'oscillateur harmonique on a : $E_n = n$ et $E(n) = n!$.

Pour résoudre l'équation (3.62), on pose :

$$c_n(r) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m r^m \quad (2.63)$$

Par substitution de l'expression ci-dessous dans l'équation (2.62), les coefficients a_m prennent la forme :

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \quad (2.64)$$

où $a_0 = 1$ car $c_0(r=0) = 1$. Finalement, nous avons :

$$F_n(|\zeta|) = n! \exp(|\zeta|^2) \quad (2.65)$$

est la forme des états cohérents de Klauder-Perelomov devient :

$$|\zeta, \alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\alpha n} |n\rangle \quad (2.66)$$

Nous retrouvons les états cohérents de l'oscillateur harmonique habituel.

2.5. Application

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer l'algorithme présenté dans les paragraphes précédents pour construire les états cohérents généralisés [38]:

- i. De Gazeau-Klauder,
- ii. De Klauder-Perelomov,

Nous mettons l'accent sur le potentiel Pöschl-Teller qui a un spectre non-dégénéré et infini.

2.5.1. Le potentiel de Pöschl-Teller

Nous commençons par donner le spectre d'une particule évoluant dans un potentiel de Pöschl-Teller ainsi que ses états propres [40, 41]. En effet, ce système est décrit par le Hamiltonien :

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\kappa, \kappa'}(x) \quad (2.67)$$

où $V_{\kappa, \kappa'}(x)$ est le potentiel de Pöschl-Teller :

$$V_{\kappa, \kappa'}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4a^2} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\left(\frac{x}{2a}\right)} + \frac{\kappa'(\kappa'-1)}{\cos^2\left(\frac{x}{2a}\right)} \right] - \frac{(\kappa+\kappa')^2}{4a^2} & 0 < x < \pi a \\ \infty & x \leq 0, \quad x \geq \pi a \end{cases} \quad (2.68)$$

pour $\kappa > 1$ et $\kappa' > 1$. Dans le cas limite où $\kappa = \kappa' = 1$, le spectre du système coïncide avec celui d'un système quantique plongé dans un puit de potentiel infini.

Le Hamiltonien H peut être écrit sous la forme factorisée suivante :

$$H = A_{\kappa, \kappa'}^+ A_{\kappa, \kappa'} \quad (2.69)$$

où les opérateurs $A_{\kappa, \kappa'}$ et $A_{\kappa, \kappa'}^+$ sont définis par :

$$A_{\kappa, \kappa'}^+ = \frac{d}{dx} + W_{\kappa, \kappa'}(x) \quad A_{\kappa, \kappa'} = -\frac{d}{dx} + W_{\kappa, \kappa'}(x) \quad (2.70)$$

en terme des superpotentiels $W_{\kappa, \kappa'}(x)$

$$W_{\kappa, \kappa'}(x) = \frac{1}{2a} \left[\kappa \cot g\left(\frac{x}{2a}\right) - \kappa' \tan g\left(\frac{x}{2a}\right) \right] \quad (2.71)$$

Les états propres du système sont donnés par :

$$\psi_n(x) = [c_n(\kappa, \kappa')]^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{x}{2a} \right)^{\kappa'} \left(\sin \frac{x}{2a} \right)^{\kappa} P_n^{\left(\kappa-\frac{1}{2}, \kappa'-\frac{1}{2}\right)} \left(\cos \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (2.72)$$

où les constantes de normalisation $c_n(\kappa, \kappa')$ sont [42]:

$$c_n(\kappa, \kappa') = a \frac{\Gamma\left(n + \kappa + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \kappa' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n + \kappa + \kappa') \Gamma(2n + \kappa + \kappa')} \quad (2.73)$$

et les quantités $P_n^{(\alpha, \beta)}$ représentent les polynômes de Jacobi.

Le spectre du Hamiltonien H est :

$$H|\psi_n\rangle = n(n + \kappa + \kappa')|\psi_n\rangle \quad (2.74)$$

Les opérateurs d'annihilation et de création se construisent en adoptant la méthode générale décrite précédemment. En effet, notons H par H_- et $V_{\kappa,\kappa'}(x)$ par $V_{\kappa,\kappa'}^-(x)$.

Le Hamiltonien $H_+ = A_{\kappa,\kappa'} A_{\kappa,\kappa'}^+$ (Hamiltonien partenaire supersymétrique de $H \equiv H_-$) est donné par l'expression suivante :

$$H_+ = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\kappa,\kappa'}^+(x) \quad (2.75)$$

qui décrit un système quantique soumis au potentiel :

$$V_{\kappa,\kappa'}^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{8a^2} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\left(\frac{x}{2a}\right)} + \frac{\kappa'(\kappa'-1)}{\cos^2\left(\frac{x}{2a}\right)} \right] - \frac{(\kappa+\kappa')^2}{8a^2} & 0 < x < \pi a \\ 0 & x \leq 0, \quad x \geq \pi a \end{cases} \quad (2.76)$$

Les états propres de H_+ s'expriment ainsi :

$$\theta_n(x) = [c_n(\kappa+1, \kappa'+1)]^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{x}{2a} \right)^{\kappa'+1} \left(\sin \frac{x}{2a} \right)^{\kappa+1} \times P_n^{\left(\kappa+\frac{1}{2}, \kappa'+\frac{1}{2}\right)} \left(\cos \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (2.77)$$

où les constantes $c_n(\kappa, \kappa')$ sont définies par (2.73).

Les valeurs propres de H_+ sont : $e_n = (n+1)(n+\kappa+\kappa'+1)$.

En utilisant les opérateurs $A_{\kappa,\kappa'}$ et $A_{\kappa,\kappa'}^+$ est la transformation unitaire U permettant la connexion des états $\psi_n(x)$ et $\theta_n(x)$, nous définissons les opérateurs de création et d'annihilation par :

$$a_{\kappa,\kappa'}^+ = A_{\kappa,\kappa'}^+ U \quad \text{et} \quad a_{\kappa,\kappa'} = U^+ A_{\kappa,\kappa'} \quad (2.78)$$

Ces opérateurs agissent respectivement sur les états $|\psi_n\rangle$ comme suit :

$$\begin{aligned} a_{\kappa,\kappa'}^+ |\psi_n\rangle &= \sqrt{(n+1)(n+1+\kappa+\kappa')} e^{-i\alpha(2n+1+\kappa+\kappa')} |\psi_{n+1}\rangle \\ a_{\kappa,\kappa'} |\psi_n\rangle &= \sqrt{n(n+\kappa+\kappa')} e^{i\alpha(2n-1+\kappa+\kappa')} |\psi_{n-1}\rangle \end{aligned} \quad (2.79)$$

et satisfont la relation de commutation suivante :

$$[a_{\kappa,\kappa'}, a_{\kappa,\kappa'}^+] = G_{\kappa,\kappa'}(N) \quad (2.80)$$

Dans ce cas, l'opérateur $G_{\kappa, \kappa'}(N)$ prend la forme :

$$G_{\kappa, \kappa'}(N) \equiv G(N) = 2N + (1 + \kappa + \kappa') \quad (2.81)$$

Notons de plus que $N \neq a_{\kappa, \kappa'}^+ a_{\kappa, \kappa'} = H$.

2.5.1.1. États cohérents de Gazeau-Klauder

En utilisant les résultats de la section 2.3, les états cohérents de Gazeau-Klauder (états propres de l'opérateur d'annihilation $a_{\kappa, \kappa'}$) prennent la forme suivante :

$$|Z, \alpha\rangle = \mathcal{N}(|z|) \sum \frac{z^n e^{-i\alpha n(n+\kappa+\kappa')}}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\kappa+\kappa'+1)}} |\psi_n\rangle \quad (2.82)$$

avec $\mathcal{N}(|z|)$ représente la constante de normalisation. Elle s'écrit en termes des fonctions de Bessel modifiées de première espèce $I_{\kappa+\kappa'}(2|z|)$ comme :

$$[\mathcal{N}(|z|)]^2 = \frac{|z|^{\kappa+\kappa'}}{I_{\kappa+\kappa'}(2|z|)} \quad (2.83)$$

La résolution de l'identité est telle que :

$$\int |z, \alpha\rangle \langle z, \alpha| d\mu(z) = I_{\mathcal{H}} \quad (2.84)$$

où la mesure est obtenue grâce à la transformation de Melin inverse [35]. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$d\mu(z) = \frac{2}{\pi} I_{\kappa+\kappa'}(2r) K_{\frac{\kappa+\kappa'}{2}}(2r) r dr d\phi, \quad z = r e^{i\phi} \quad (2.85)$$

Les états ainsi construits (états de Gazeau-Klauder) forment une famille surcomplète d'états cohérents vérifiant la résolution de l'identité (2.84) où la mesure d'intégration est définie dans (2.85).

La représentation analytique relative à ces états peut être déduite comme suit. Nous associons à un état quelconque $|f\rangle$ du système une fonction analytique dont l'expression est :

$$\begin{aligned} f(z, \alpha) &= \sqrt{\frac{I_{\kappa+\kappa'}(2|z|)}{|z|^{\kappa+\kappa'}}} \langle \bar{z}, \alpha | f \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \psi_n | f \rangle \frac{z^n e^{i\alpha n(n+\kappa+\kappa')}}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\kappa+\kappa'+1)}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

En particulier, les fonctions analytiques correspondant aux vecteurs propres $|\psi_n\rangle$ sont :

$$\mathcal{F}_n(z, \alpha) = \frac{z^n e^{i\alpha n(n+\kappa+\kappa')}}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\kappa+\kappa'+1)}} \quad (2.87)$$

En utilisant la représentation de Fock-Bargmann introduite précédemment, les opérateurs de création et d'annihilation sont réalisés, pour un système quantique soumis au potentiel Pöschl-Teller par :

$$a_{\kappa, \kappa'}^+ = z, \quad a_{\kappa, \kappa'} = z \frac{d^2}{dz^2} + (\kappa + \kappa' + 1) \frac{d}{dz} \quad (2.88)$$

L'opérateur $G_{\kappa, \kappa'}(N)$ agit sur les fonction $\mathcal{F}_n(z, \alpha)$ comme :

$$G = 2z \frac{d}{dz} + (\kappa + \kappa' + 1) \quad (2.89)$$

Il est facile de vérifier qu'on a :

$$a_{\kappa, \kappa'}^+ \mathcal{F}_n(z, \alpha) = \sqrt{(n+1)(n+1+\kappa+\kappa')} e^{-i\alpha(2n+1+\kappa+\kappa')} \mathcal{F}_{n+1}(z, \alpha) \quad (2.90)$$

$$a_{\kappa, \kappa'} \mathcal{F}_n(z, \alpha) = \sqrt{n(n+\kappa+\kappa')} e^{i\alpha(2n-1+\kappa+\kappa')} \mathcal{F}_{n-1}(z, \alpha) \quad (2.91)$$

$$G_{\kappa, \kappa'}(N) \mathcal{F}_n(z, \alpha) = (2n+1+\kappa+\kappa') \mathcal{F}_n(z, \alpha) \quad (2.92)$$

2.5.1.2. États cohérents de Klauder-Perelomov

Dans la section 2.4, nous avons défini les états cohérents de type Klauder-Perelomov pour un système quantique arbitraire de spectre infini, non dégénéré en donnant l'expression générale permettant de les obtenir sous forme d'une série infinie (équation (2.57)). Comme illustration, nous avons traité le cas de l'oscillateur harmonique. Dans cette partie, nous construisons ces états (états cohérents de Klauder-Perelomov) pour un système soumis à l'action du potentiel Pöschl-Teller. La construction de ces états est explicitée en détails dans [42].

En effet, pour déterminer explicitement ces états, nous avons à résoudre l'équation différentielle (2.62) pour les énergies $E_n = n(n+\kappa+\kappa')$ correspondantes au spectre de Pöschl-Teller. Dans ce cas, les solutions sont données par :

$$c_n(r) = \frac{1}{n! r^n} \beta_{m, n + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)}^{-\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)} (\cosh(2r)) \quad (2.93)$$

où les fonctions de Jacobi $\beta_{i,j}^k$ satisfont l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dr} \beta_{m,n-l}^l (\cosh(2r)) = n \beta_{m,n-l}^l (\cosh(2r)) - (n-2l) \beta_{m,n+1-l}^l (\cosh(2r)) \quad (2.94)$$

avec $l = -\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)$ et m est un paramètre libre qui sera fixé par la suite.

L'équation différentielle (2.94) admet plusieurs solutions. Cependant, une solution admissible est obtenue en notant que $D(z=0) = 1$. En utilisant la définition de la fonction de Jacobi [43]. La solution unique, compatible avec la condition $D(z=0) = 1$, est :

$$c_n(r) = \frac{1}{n! r^n} \beta_{\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1), \frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1), n + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)}^{\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)} (\cosh(2r)) \quad (2.95)$$

Les coefficients $c_n(r)$ se réécrivent aussi comme :

$$c_n(r) = \frac{1}{n!} (\cosh(2r))^{-(\kappa + \kappa' + 1)} \left(\frac{\tanh r}{r} \right)^n \quad (2.96)$$

Il en résulte que les états cohérents de Klauder-Perelomov prennent la forme suivante :

$$|z, \alpha\rangle = (1 - \tanh^2 |z|)^{\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z \tanh |z|}{|z|} \right)^n \times \left[\frac{\Gamma(n + \kappa + \kappa' + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(\kappa + \kappa' + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha n(n + \kappa + \kappa')} |\psi_n\rangle \quad (2.97)$$

Finalement, en posant $\zeta = \frac{z \tanh |z|}{|z|}$, nous obtenons :

$$|\zeta, \alpha\rangle \equiv (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^n \left[\frac{\Gamma(n + \kappa + \kappa' + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(\kappa + \kappa' + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times e^{-i\alpha n(n + \kappa + \kappa')} |\psi_n\rangle \quad (2.98)$$

Nous notons que le nombre complexe ζ appartient au disque unité, i. e. $\zeta \in D = \{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$.

Les états cohérents obtenus sont stables au cours du temps. En effet :

$$e^{-iHt} |\zeta, \alpha\rangle = |\zeta, \alpha + t\rangle \quad (2.99)$$

Leur résolution de l'identité est exprimée comme suit :

$$\int |\zeta, \alpha\rangle \langle \zeta, \alpha| d\mu(\zeta) = I_{\mathcal{H}} \quad (2.100)$$

où la mesure prend la forme :

$$d\mu(\zeta) = \frac{\kappa + \kappa'}{\pi} \frac{d^2\zeta}{(1 - |\zeta|^2)^2} \quad (2.101)$$

Les états cohérents $|\zeta, \alpha\rangle$ sont normés ($\langle \zeta, \alpha | \zeta, \alpha \rangle = 1$), mais non orthogonaux.

En vertu de la relation de surcomplétude (la résolution de l'identité) (2.100), tout état cohérent $|\zeta', \alpha'\rangle$ s'exprime en fonction des états cohérents $|\zeta, \alpha\rangle$ comme :

$$|\zeta', \alpha'\rangle = \int |\zeta, \alpha\rangle \langle \zeta, \alpha | \zeta', \alpha' \rangle d\mu(\zeta) \quad (2.102)$$

Le noyau $\langle \zeta, \alpha | \zeta', \alpha' \rangle$ assurant le passage entre les états $|\zeta', \alpha'\rangle$ et $|\zeta, \alpha\rangle$ peut être évalué facilement en utilisant l'équation (2.98). En effet, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \alpha | \zeta', \alpha' \rangle &= \sqrt{(1 - |\zeta|^2)^{(\kappa + \kappa' + 1)} (1 - |\zeta'|^2)^{(\kappa + \kappa' + 1)}} \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\zeta}^n \zeta'^n \times \\ &\quad \left[\frac{\Gamma(n + \kappa + \kappa' + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\kappa + \kappa' + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-i(\alpha' - \alpha)n(n + \kappa + \kappa')} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Pour un état quelconque noté $|f\rangle$ élément de l'espace Hilbert \mathcal{H} :

$$|f\rangle = \int (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}(\kappa + \kappa' + 1)} f(\bar{\zeta}, \alpha) |\zeta, \alpha\rangle d\mu(\zeta) \quad (2.104)$$

On associe une fonction analytique $f(\bar{\zeta}, \alpha)$ définie par :

$$f(\bar{\zeta}, \alpha) = (1 - |\zeta|^2)^{(\kappa + \kappa' + 1)} \langle \bar{\zeta}, \alpha | f \rangle \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^n \left[\frac{\Gamma(n + \kappa + \kappa' + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\kappa + \kappa' + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times e^{i\alpha n(n + \kappa + \kappa')} \langle \psi_n | f \rangle \quad (2.105)$$

Cette fonction détermine de façon complète l'état $|f\rangle \in \mathcal{H}$. Les états $|\psi_n\rangle$ sont représentés par la fonction $\mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha)$:

$$\mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha) = \zeta^n \left[\frac{\Gamma(n + \kappa + \kappa' + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\kappa + \kappa' + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha n(n + \kappa + \kappa')} \quad (2.106)$$

Les opérateurs de création $a_{\kappa,\kappa'}^+$, d'annihilation $a_{\kappa,\kappa'}$ et $G_{\kappa,\kappa'}(N)$ opèrent sur l'espace de Hilbert des fonctions analytiques comme opérateurs différentiels du premier ordre :

$$a_{\kappa,\kappa'}^+ = \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} + (\kappa + \kappa' + 1)\zeta, \quad a_{\kappa,\kappa'} = \frac{d}{d\zeta} \quad (2.107)$$

$$G_{\kappa+\kappa'}(N) \equiv G = 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + (\kappa + \kappa' + 1)$$

On peut vérifier facilement que :

$$a_{\kappa,\kappa'}^+ \mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha) = \sqrt{(n+1)(n+1+\kappa+\kappa')} e^{-i\alpha(2n+1+\kappa+\kappa')} \mathcal{F}'_{n+1}(\zeta, \alpha) \quad (2.108)$$

$$a_{\kappa,\kappa'} \mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha) = \sqrt{n(n+\kappa+\kappa')} e^{i\alpha(2n-1+\kappa+\kappa')} \mathcal{F}'_{n-1}(\zeta, \alpha) \quad (2.109)$$

$$G_{\kappa,\kappa'}(N) \mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha) = (2n+1+\kappa+\kappa') \mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha) \quad (2.110)$$

Il est nécessaire de souligner que les représentations analytiques des états cohérents de Gazeau-Klauder et celles de Klauder-Perelomov sont reliées par une transformation de type Laplace [30, 36] :

$$\mathcal{F}'_n(\zeta, \alpha) = \frac{\zeta^{-(\kappa+\kappa'+1)}}{\sqrt{\Gamma(\kappa+\kappa'+1)}} \int_0^{+\infty} z^{\kappa+\kappa'} \mathcal{F}_n(z, \alpha) e^{\frac{z}{\zeta}} dz \quad (2.111)$$

Cette relation traduit que la fonction $\mathcal{F}'_n\left(\frac{1}{\zeta}, \alpha\right)$ est la transformée de Laplace de $z^{\kappa+\kappa'} \mathcal{F}_n(z, \alpha)$.

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la construction des états cohérents de deux types :

Le premier étant celui de Gazeau-Klauder, où les états cohérents sont définis comme les états propres de l'opérateur d'annihilation correspondant au système étudié, le second type est celui de Klauder-Perelomov, où ils sont définis par l'action d'un opérateur déplacement unitaire agissant sur l'état fondamental.

Afin d'illustrer notre travail sur la construction des états cohérents, nous avons traité le cas d'un système plongé dans le potentiel de Pöschl-Teller.

3. DES ETATS COHERENTS GENERALISES AUX ETATS COMPRIMES GENERALISES

3.1. Introduction

Comme nous le savons maintenant, Glauber, Klauder et Sudarshan ont produit des travaux fondamentaux sur les états cohérents de l'oscillateur harmonique [5, 44-46]. Il y a trois définitions classiques de ces états cohérents, celle de l'opérateur de déplacement, de l'opérateur d'annihilation et de la relation d'incertitude minimale. Aujourd'hui, Ces états interviennent dans de nombreux domaines de la physique théorique et expérimentale.

Des généralisations de ces états sont apparues dans deux domaines, le premier fut ce qu'on a appelé « les états à deux photons » [47], états qui furent redécouvert sous plusieurs appellations. En 1979, ils ont été appelés « états comprimés ». Ces dernières décennies, ces états sont devenus de plus en plus intéressants [48, 49], cela est particulièrement vrai dans les domaines de l'optique quantique [48] et la détection des ondes gravitationnelles [50]. Les états comprimés de l'oscillateur harmonique peuvent être définis de façons équivalente aux trois définitions des états cohérents à travers des généralisations appropriées de celles-ci.

La deuxième généralisation, concerne les systèmes d'oscillateurs non-harmoniques [6, 45].

3.2. Le groupe de Weyl-Heisenberg et ses représentations.

Commençons par revoir les états cohérents de l'oscillateur harmonique. Comme nous le savons, on peut les obtenir de trois façons distinctes mais équivalentes.

3.2.1. Méthode de l'opérateur déplacement :

Ils peuvent être obtenus en appliquant l'opérateur de déplacement unitaire sur l'état du fondamental [5, 45]

$$|\alpha\rangle \equiv D(\alpha)|0\rangle = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a]|0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.1)$$

3.2.2. Méthode de l'opérateur d'annihilation :

Ils peuvent être définis aussi comme les états propres de l'opérateur d'annihilation a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.2)$$

Résultat qui provient de l'équation (3.1), si

$$0 = D(\alpha)a|0\rangle = (a - \alpha)D(\alpha)a|0\rangle = (a - \alpha)|\alpha\rangle \quad (3.3)$$

3.2.3. Méthode d'incertitude minimale :

Pour l'oscillateur harmonique, ceux sont les états qui minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg

$$[x, p] = i, \quad (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (3.4)$$

En terme de fonction d'onde ($\hbar = \omega = m = 1$), on aura :

$$\psi_{cs}(x) = [\pi]^{-1/4} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2} + ip_0 x \right] \quad (3.5)$$

3.3. Les états comprimés de l'oscillateur harmonique :

Les trois précédentes définitions, donnent également d'une manière équivalente, les états comprimés pour l'oscillateur harmonique.

3.3.1. Méthode de l'opérateur de déplacement :

On applique à la suite de l'opérateur compression $S(z)$, un deuxième opérateur déplacement, l'opérateur de $D(\alpha)$

$$D(\alpha)S(z)|0\rangle = |(\alpha, z)\rangle, \quad S(z) = \exp[zK_+ - z^*K_-] \quad (3.6)$$

où K_+ , K_- et K_0 forment entre eux une algèbre $SU(1,1)$:

$$K_+ = \frac{1}{2}a^+a^+, \quad K_- = \frac{1}{2}aa, \quad K_0 = \frac{1}{2}\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \quad (3.7)$$

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_+, K_-] = -2K_0 \quad (3.8)$$

Changer l'ordre des opérateurs $D(\alpha)$ et $S(z)$ équivaut à un changement de paramètres :

$$D(\alpha)S(z) = S(z)D(\gamma), \quad \gamma = \alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r \quad (3.9)$$

où $z = re^{i\theta}$.

3.3.2. Méthode des opérateurs échelles :

Pour l'oscillateur harmonique, cette méthode découle de l'opérateur de déplacement. En combinant la transformation de Bogoliubov [51],

$$S^{-1}aS = (\cosh r)a + e^{i\theta}(\sinh r)a^+ \quad (3.10)$$

avec l'équation (3.9), on aura

$$\left[(\cosh r)a - e^{i\theta}(\sinh r)a^+ \right] |(\alpha, z)\rangle = \gamma |(\alpha, z)\rangle \quad (3.11)$$

On remarque que pour les états comprimés, on a besoin des deux opérateurs échelles a et a^+ contrairement aux états cohérents où on a besoin que de l'opérateur d'annihilation.

3.3.3. Méthode d'incertitude minimale :

De ce point de vue, le passage des états cohérents aux états comprimés est intuitivement simple. Ces états minimisent la relation d'incertitude, sans la restriction supplémentaire que l'état fondamental soit un membre de l'ensemble. Autrement dit, il s'agit d'un ensemble d'états, qui sont des gaussiennes de toutes les largeurs :

$$\psi_{ss}(x) = [\pi s^2]^{-1/4} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2} + ip_0 x \right] \quad (3.12)$$

Ces états comprimés sont équivalents à ceux obtenus à partir des autres formulations. Cela peut être vérifié en combinant les équations (3.11) et (3.12) avec les relations

$$x = \frac{(a+a^+)}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{(a-a^+)}{i\sqrt{2}} \quad (3.13)$$

Avec les relations suivantes entre les paramètres

$$z = r e^{i\theta}, \quad r = \ln s \quad (3.14)$$

3.4. États cohérents généralisés

Quand on considère des états cohérents pour des systèmes généraux, on trouve que ces états issus des trois méthodes ne sont pas, en général, équivalents, bien qu'ils puissent l'être dans des cas particuliers [52].

3.4.1. Méthode de l'opérateur de déplacement :

La généralisation de cette méthode à des groupes de Lie arbitraires a une longue histoire [6, 45, 53, 54]. On applique simplement l'opérateur de déplacement, qui est l'exponentiation unitaire de l'algèbre des facteurs, à un état extrémal. Soit T une représentation irréductible unitaire du groupe G sur un espace de Hilbert et soit $|\psi_0\rangle$ un vecteur fixe dans l'espace. Soit G_0 le groupe de stabilité; c'est à dire.

$$T(G_0)|\psi_0\rangle = e^{i\theta(G_0)}|\psi_0\rangle \quad (3.15)$$

Alors

$$|\psi_g\rangle = T(G/G_0)|\psi_0\rangle \quad (3.16)$$

Sont les états cohérents.

3.4.2. Méthode des opérateurs échelles :

La généralisation aux groupes de Lie arbitraires est simple et a été largement étudiée [6, 7]. On obtient les états propres de l'opérateur d'annihilation généralisé (en supposant qu'il y a un état extrémal plus bas) :

$$A_- |\delta\rangle = \delta |\delta\rangle \quad (3.17)$$

3.5. États intelligents généralisés :

Les états intelligents généralisés sont obtenus en minimisant la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger [55, 56].

En utilisant les opérateurs de création a^+ et d'annihilation a associés à un système quantique arbitraire, nous définissons les opérateurs hermitiens suivants [57] :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a) \quad (3.18)$$

Qui satisfont la relation de commutation :

$$[X, P] = iG(N) \equiv iG \quad (3.19)$$

L'opérateur $G(N)$, défini par (2.29), n'est pas nécessairement un opérateur proportionnel à l'opérateur unité (Pour un système quantique arbitraire). Il est bien connu que pour deux opérateurs hermitiens X et P satisfaisant à la relation de commutation non-canonique (3.19), les variances $(\Delta X)^2$ et $(\Delta P)^2$ obéissent à la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger

$$(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 \geq \frac{1}{4} (\langle G \rangle^2 + \langle F \rangle^2) \quad (3.20)$$

où l'opérateur F est défini en termes de l'anticommutateur des opérateurs hermétiques $\tilde{X} = X - \langle X \rangle$ et $\tilde{P} = P - \langle P \rangle$ par :

$$F = \{ \tilde{X}, \tilde{P} \} \quad (3.21)$$

Cet opérateur s'exprime aussi en fonction des opérateurs de création a^+ et d'annihilation a comme suit

$$F = i \left[(2a - \langle a \rangle) \langle a \rangle + (-2a^+ + \langle a^+ \rangle) \langle a^+ \rangle - a^2 + a^{+2} \right] \quad (3.22)$$

Dans le cas où il y a corrélation entre les opérateurs X and P , i. e. $\langle F \rangle \neq 0$, la relation (3.20) est une généralisation de la fameuse relation d'incertitude de Heisenberg :

$$(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 \geq \frac{1}{4} \langle G \rangle^2 \quad (3.23)$$

La forme spéciale de l'équation (3.23) est identique à la forme générale (3.20) dans le cas où les opérateur X et P sont non corrélés, i. e., $\langle F \rangle = 0$. Les états intelligents généralisés

sont obtenus par minimisation de la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger [16, 56]. En effet, nous avons une égalité dans (3.20) pour des états qui satisfont l'équation aux valeurs propres [37, 38, 42, 57-59] :

$$(X + i\lambda P)|\psi\rangle = z\sqrt{2}|\psi\rangle, \quad \lambda, z \in \mathbb{C} \quad (3.24)$$

Comme conséquence immédiate, nous avons les relations suivantes :

$$(\Delta X)^2 = |\lambda|\Delta, \quad (\Delta P)^2 = \frac{1}{|\lambda|}\Delta \quad (3.25)$$

avec Δ une quantité définie en termes des valeurs moyennes des opérateurs G et F par :

$$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\langle G \rangle^2 + \langle F \rangle^2} \quad (3.26)$$

Notons que les valeurs moyennes des opérateurs $\langle G \rangle$ et $\langle F \rangle$, dans les états qui satisfont l'équation aux valeurs propres (3.24), peuvent être exprimées en fonction des variances de la manière suivante :

$$\langle G \rangle = 2\operatorname{Re}(\lambda)\langle \Delta P \rangle^2, \quad \langle F \rangle = 2\operatorname{Im}(\lambda)\langle \Delta P \rangle^2 \quad (3.27)$$

Il est évident, à partir de (3.25), que si $|\lambda| = 1$ nous obtenons :

$$(\Delta X)^2 = (\Delta P)^2 \quad (3.28)$$

Les états obéissant à l'équation (3.28) avec $|\lambda| = 1$ sont des états cohérents généralisés, tandis que pour $|\lambda| \neq 1$, ces états sont appelés les états comprimés généralisés [37].

En utilisant l'équation (3.24), on peut obtenir des relations générales pour les dispersions des opérateurs hermitiques X et P dans les états qui minimisent la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger (3.20). En effet, nous obtenons les relations suivantes [58, 60, 61]

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{Re}(\lambda)\langle G \rangle + \operatorname{Im}(\lambda)\langle F \rangle) \quad (3.29)$$

$$(\Delta P)^2 = \frac{1}{2|\lambda|^2}(\operatorname{Re}(\lambda)\langle G \rangle + \operatorname{Im}(\lambda)\langle F \rangle) \quad (3.30)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda)\langle G \rangle = \operatorname{Re}(\lambda)\langle F \rangle \quad (3.31)$$

Dans le but de donner une classification complète des états intelligents généralisés pour un système quantique arbitraire, nous cherchons les solutions de l'équation aux valeurs propres (3.24). Cette classification a été entreprise dans les travaux [37, 38, 42, 57, 59] en traitant des exemples particuliers. Les états minimisant la relation d'incertitude de

Robertson-Schrödinger s'expriment comme une combinaison linéaire des états propres du système :

$$|\psi\rangle \equiv |z, \lambda, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n |\psi_n\rangle, \quad d_n \equiv d_n(z, \alpha, \lambda) \quad (3.32)$$

Pour le cas où $\lambda \neq -1$, les coefficients d_n sont donnés par l'expression suivante [38]:

$$d_n = d_0 \frac{(2z)^n}{(1+\lambda)^n \sqrt{E(n)}} \left[\sum_{h=0(1)\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \frac{(1-\lambda^2)^h}{(2z)^{2h}} \Delta(n, h) \right] e^{-i\alpha E_n} \quad (3.33)$$

Où le symbole $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$ et la fonction $\Delta(n, h)$ est définie par :

$$\Delta(n, h) = \sum_{j_1=1}^{n-(2h-1)} E_{j_1} \left[\sum_{j_2=j_1+2}^{n-(2h-3)} E_{j_2} \cdots \left[\cdots \left[\sum_{j_h=j_{h-1}+2}^{n-1} E_{j_h} \right] \right] \cdots \right] \quad (3.34)$$

Notons que le cas $\lambda = -1$, ne présente pas d'intérêt spécial car il conduit à une solution non normalisable.

Les états $|z, \lambda, \alpha\rangle$ peuvent s'écrire comme le résultat de l'action d'un opérateur $U(\lambda, z)$ sur l'état fondamental $|\psi_0\rangle$:

$$|z, \lambda, \alpha\rangle = U(\lambda, z) |\psi_0\rangle \quad (3.35)$$

$$U(\lambda, z) = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2z}{\lambda+1} \right) \frac{a^+}{g(N)} + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right) \frac{1}{g(N)} (a^+)^2 \right)^n \quad (3.36)$$

Notons que les états $|z, \lambda, \alpha\rangle$ sont stables au cours du temps. Comme une première illustration de cette construction, nous pouvons générer les états intelligents généralisés de l'oscillateur harmonique ($g(N) = N$) à une constante de normalisation près :

$$|z, \lambda, \alpha\rangle = \exp \left[\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right) \frac{(a^+)^2}{2} \right] \exp \left[\left(\frac{2z}{\lambda+1} \right) a^+ \right] |0\rangle \quad (3.37)$$

Avec $|0\rangle$ étant l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

Dans le cas $\lambda = 1$, les coefficients d_n sont donnés par :

$$d_n = d_0 \frac{z^n}{\sqrt{E(N)}} e^{-i\alpha E_n} \quad (3.38)$$

et les états cohérents $|z, \lambda = 1, \alpha\rangle$ (3.37) coïncident avec ceux de Gazeau-Klauder $|z, \alpha\rangle$ donnés par l'équation (2.33). Le facteur de normalisation d_0 est donné par l'équation (2.34). Les états $|z, \lambda = 1, \alpha\rangle \equiv |z, \alpha\rangle$ minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg (3.23) et sont des états propres de l'opérateur d'annihilation a . Nous obtenons pour ces états :

$$(\Delta X)^2 = (\Delta P)^2 = \frac{1}{2} \langle G \rangle \quad (3.39)$$

où

$$\langle G \rangle = d_0^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} E_{n+1} - |z|^2 \quad \text{et} \quad \langle F \rangle = 0 \quad (3.40)$$

L'équation ci-dessus traduit l'absence de corrélation entre les opérateurs hermitiens X et P . Pour l'oscillateur harmonique, il est facile de voir que : $\langle G \rangle = 1$ et $(\Delta X)^2 = (\Delta P)^2 = 1/2$.

Comme il a été déjà mentionné, les états cohérents minimisant la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger correspondent au cas $|\lambda| = 1$. Le cas $\lambda = 1$ correspond aux états cohérents de Gazeau-Klauder. Le cas $\lambda = -1$ est exclu de notre construction car il conduit à des solutions non physiques.

En posant $\lambda = e^{i\theta}$ ($\theta \neq k\pi$; $k \in \mathbb{N}$), les états $|z, \lambda, \alpha\rangle$ sont cohérents et le calcul des dispersions $(\Delta X)^2$ et $(\Delta P)^2$ donne :

$$(\Delta X)^2 = (\Delta P)^2 = \frac{1}{2|\cos \theta|} \langle G \rangle \quad (3.41)$$

La valeur moyenne de l'opérateur F est non nulle (cette dernière est nulle seulement pour les états cohérents de Gazeau-Klauder, i. e., $\lambda = 1$) et prend la forme suivante :

$$\langle F \rangle = \text{tg} \theta \langle G \rangle \quad (3.42)$$

A partir de cette dernière équation, nous concluons que la présence de la corrélation ($\langle F \rangle \neq 0$) n'empêche pas le système d'être préparé dans des états cohérents. Ce résultat est vrai pour tout système quantique arbitraire exactement soluble. Les propriétés des états $|z, \lambda, \alpha\rangle$ sont sensiblement liées aux propriétés spectrales du commutateur $[a, a^+] = G(N)$.

3.6. Conclusion

Après avoir introduit les états intelligents généralisés comme ceux minimisant la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger, nous avons montré que celle-ci mène à une expression généralisant les états cohérents associés à un système quantique arbitraire. Les états cohérents de Gazeau-Klauder obtenus pour $\lambda = 1$ (Etats propres de l'opérateur d'annihilation) constituent un cas particulier d'une classe d'états cohérents obtenus pour $(|\lambda| = 1)$.

4. ETATS COHERENTS ET COMPRIMES DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE 3D

4.1. Introduction.

Nous allons montrer que les états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique à 3D minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg [62]. Pour cela nous allons exploiter la méthode de factorisation de l'Hamiltonien décrivant le système quantique étudié. En effet, il est bien connu que pour tout système soluble l'Hamiltonien s'écrit comme le produit de deux opérateurs échelles.

4.2. Définition des états cohérents et comprimés à 1D

Les états cohérents définis initialement pour l'oscillateur harmonique, sont par définition des états propres de l'opérateur d'annihilation a , ces états ont une grande importance physique, car ce sont des états qui se rapprochent le plus des états classiques.

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad (4.1)$$

La variable complexe continue z est appelée le paramètre de cohérence.

Pour le potentiel de l'oscillateur harmonique, une généralisation des états précédents est connue, ils sont appelés états comprimés, car en plus de dépendre du paramètre z , ils dépendent d'un paramètre de compression γ qui aura pour effet de réduire la dispersion sur une observable au prix d'augmenter celle de l'autre, tout en maintenant minimale la relation d'incertitude de Heisenberg. On peut montrer également que les états comprimés (pour un système avec un spectre d'énergie discret infini) sont les états propres de l'opérateur $a + \gamma a^\dagger$ [15]

On aura alors :

$$(a + \gamma a^\dagger)|\psi(z, \gamma)\rangle = z|\psi(z, \gamma)\rangle \quad (4.2)$$

Avec a et a^\dagger les opérateurs échelles pour l'oscillateur harmonique et agissent comme suit :

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases} \quad (4.3)$$

Les solutions de (4.2) peuvent être exprimées comme une superposition des états propres $|n\rangle$ comme suit :

$$|\psi(z, \gamma, x; t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4.4)$$

où N est le facteur de normalisation

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{n!} \quad (4.5)$$

Pour l'oscillateur harmonique on trouve l'expression de $Z(z, \gamma, n)$:

$$Z_{OH}(z, \gamma, n) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right) \quad (4.6)$$

où $H\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right)$ sont les polynômes d'Hermite avec z et γ des complexes.

Dans le cas des états cohérents on obtient :

$$Z_{OH}(z, \gamma, n) = z^n \quad (4.7)$$

Dans un état comprimé pur :

$$\begin{cases} Z_{OH}(0, \gamma, 2n) = \frac{(2n)!}{n!} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n \\ Z_{OH}(0, \gamma, 2n+1) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

4.3. L'oscillateur harmonique à 3D

4.3.1. Le modèle

Soit l'oscillateur harmonique représenté par l'Hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \\ &= \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

On peut supposer, sans perte de généralité que $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_z^2 = \omega^2$.

On aura alors :

$$H = H_x + H_y + H_z \quad (4.10)$$

Avec :

$$\begin{cases} H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \\ H_z = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \end{cases} \quad (4.11)$$

4.3.2. Résolution de l'équation de Schrödinger

H_x , H_y et H_z sont le prolongement dans ξ_r d'opérateurs agissant dans ξ_x , ξ_y et ξ_z respectivement avec $\xi_r = \xi_x \otimes \xi_y \otimes \xi_z$. Ils constituent respectivement des E.C.O.C. (ensemble complet d'observables qui commutent) dans ξ_x , ξ_y et ξ_z mais ne le sont pas dans ξ_r .

Par contre, comme ils commutent entre eux et que chacun d'eux commute avec leur somme H , l'ensemble $\{H, H_x, H_y, H_z\}$ constitue un E.C.O.C. dans ξ_r , on peut donc résoudre l'équation aux vecteurs propres en cherchant les vecteurs propres de H qui sont également vecteurs propres de H_x , H_y et H_z .

Comme on connaît les valeurs et les vecteurs propres de l'oscillateur harmonique à 1D, on a pour les trois Hamiltoniens

$$\begin{cases} H_x |\varphi_{n_x}\rangle = E_{n_x} |\varphi_{n_x}\rangle = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega |\varphi_{n_x}\rangle \\ H_y |\varphi_{n_y}\rangle = E_{n_y} |\varphi_{n_y}\rangle = \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega |\varphi_{n_y}\rangle \\ H_z |\varphi_{n_z}\rangle = E_{n_z} |\varphi_{n_z}\rangle = \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega |\varphi_{n_z}\rangle \end{cases} \quad (4.12)$$

Où $|\varphi_{n_x}\rangle$, $|\varphi_{n_y}\rangle$ et $|\varphi_{n_z}\rangle$ appartiennent respectivement à ξ_x , ξ_y , ξ_z et n_x , n_y , n_z sont des entiers positifs ou nuls.

D'après les propriétés des produits tensoriels d'espace d'état, on déduit que les états propres communs à H , H_x , H_y et H_z sont les états produits qu'on note :

$$|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle = |\varphi_{n_x}\rangle \otimes |\varphi_{n_y}\rangle \otimes |\varphi_{n_z}\rangle \quad (4.13)$$

Et que les valeurs propres de H sont les sommes des valeurs propres de H_x , H_y et H_z , soit :

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y, n_z} &= E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} \\ &= \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \end{aligned} \quad (4.14)$$

Où $n = n_x + n_y + n_z$.

Afin de trouver les états propres $|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle$, introduisons les trois couples d'opérateurs création et annihilation relatifs aux trois oscillateurs harmoniques à 1D.

$$\begin{cases} a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_x \\ a_x^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_x \\ a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{y} + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_y \\ a_y^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{y} - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_y \\ a_z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{z} + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_z \\ a_z^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{z} - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_z \end{cases} \quad (4.15)$$

Ils obéissent aux règles de commutation suivantes :

$$[a_x, a_x^+] = [a_y, a_y^+] = [a_z, a_z^+] = 1 \quad (4.16)$$

Les vecteurs propres en termes de ces opérateurs seront :

$$\begin{cases} |\varphi_{n_x}\rangle = \frac{(a_x^+)^{n_x}}{\sqrt{n_x!}} |\varphi_{0x}\rangle \\ |\varphi_{n_y}\rangle = \frac{(a_y^+)^{n_y}}{\sqrt{n_y!}} |\varphi_{0y}\rangle \\ |\varphi_{n_z}\rangle = \frac{(a_z^+)^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} |\varphi_{0z}\rangle \end{cases} \quad (4.17)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_x |\varphi_{0x}\rangle = 0 \\ a_y |\varphi_{0y}\rangle = 0 \\ a_z |\varphi_{0z}\rangle = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

De sorte que l'état $|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle$ de l'oscillateur harmonique à 3D s'écrit dans ξ_r :

$$|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} (a_x^+)^{n_x} (a_y^+)^{n_y} (a_z^+)^{n_z} |\varphi_{0x}\rangle |\varphi_{0y}\rangle |\varphi_{0z}\rangle \quad (4.19)$$

On notera $|\varphi_{000}\rangle = |\varphi_{0x}\rangle |\varphi_{0y}\rangle |\varphi_{0z}\rangle$ avec :

$$a_x |\varphi_{000}\rangle = a_y |\varphi_{000}\rangle = a_z |\varphi_{000}\rangle = 0 \quad (4.20)$$

L'état $|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle$ s'écrit en définitif :

$$|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} (a_x^+)^{n_x} (a_y^+)^{n_y} (a_z^+)^{n_z} |\varphi_{000}\rangle \quad (4.21)$$

Et la fonction d'onde qui lui est associée :

$$\phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \langle r | \varphi_{n_x, n_y, n_z} \rangle = \langle x | \varphi_{n_x} \rangle \langle y | \varphi_{n_y} \rangle \langle z | \varphi_{n_z} \rangle \quad (4.22)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = & \frac{1}{\sqrt{2^{n_x+n_y+n_z} n_x! n_y! n_z!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{3}{4}} H\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) H\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y\right) \times \\ & H\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}z\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}(x^2+y^2+z^2)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.3.3. Valeurs moyennes et dispersions

Considérons la valeur moyenne d'une observable W dans les états comprimés :

$$\langle W \rangle(\alpha, \gamma; t) = \langle \psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) | W | \psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) \rangle \quad (4.24)$$

Où l'évolution temporelle de ces états est donnée par :

$$\psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} e^{-i\frac{E_{n_x, n_y, n_z}}{\hbar}t} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \quad (4.25)$$

Avec :

$$\begin{cases} Z_1 = Z(\alpha, \gamma, n_x) \\ Z_2 = Z(\alpha, \gamma, n_y) \\ Z_3 = Z(\alpha, \gamma, n_z) \end{cases} \quad (4.26)$$

Alors :

$$\langle W \rangle(\alpha, \gamma; t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 Z_1 Z_2 Z_3}{\sqrt{n_x!} \sqrt{n_y!} \sqrt{n_z!} \sqrt{k_x!} \sqrt{k_y!} \sqrt{k_z!}} e^{-i\omega(k-n)t} \langle \phi_n | W | \phi_k \rangle \quad (4.27)$$

Où nous avons utilisé le fait que pour l'oscillateur harmonique à 3D le spectre d'énergie est $\hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$.

A partir de ces valeurs moyennes on pourra alors calculer la dispersion d'une observable :

$$(\Delta W)^2 = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2 \quad (4.28)$$

Ce qui nous intéresse ici, ce sont les moyennes de $x, y, z, p_x, p_y, p_z, x^2, y^2, z^2, p_x^2, p_y^2, p_z^2$.

On remarque que dans la formule (4.27) tout est connu exceptées les valeurs moyennes de ces quantités, mais dans les états propres de l'énergie $\langle \phi_n | W | \phi_k \rangle$. Pour cela, utilisons les relations qui lient les positions et les impulsions aux opérateurs échelle qui leur correspondent :

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_\nu^+ + a_\nu) \\ p_\nu &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a_\nu^+ - a_\nu) \end{aligned} \quad \text{avec } \nu = x, y, z \quad (4.29)$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \phi_n | \nu | \phi_k \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{k_\nu + 1} \delta_{n_\nu, k_\nu + 1} + \sqrt{k_\nu} \delta_{n_\nu, k_\nu - 1}) \\ \langle \phi_n | p_\nu | \phi_k \rangle &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\sqrt{k_\nu + 1} \delta_{n_\nu, k_\nu + 1} - \sqrt{k_\nu} \delta_{n_\nu, k_\nu - 1}) \\ \langle \phi_n | \nu^2 | \phi_k \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\sqrt{(k_\nu + 1)(k_\nu + 2)} \delta_{n_\nu, k_\nu + 2} + (2k_\nu + 1) \delta_{n_\nu, k_\nu} + \sqrt{k_\nu(k_\nu - 1)} \delta_{n_\nu, k_\nu - 2} \right) \\ \langle \phi_n | p_\nu^2 | \phi_k \rangle &= -\frac{m\omega\hbar}{2} \left(\sqrt{(k_\nu + 1)(k_\nu + 2)} \delta_{n_\nu, k_\nu + 2} - (2k_\nu + 1) \delta_{n_\nu, k_\nu} - \sqrt{k_\nu(k_\nu - 1)} \delta_{n_\nu, k_\nu - 2} \right) \end{aligned} \right. \quad (4.30)$$

4.3.4. Etats cohérents indépendants du temps

D'après les équations (4.27) et (4.30) on peut facilement calculer toutes les valeurs moyennes ainsi que les dispersions.

On obtient :

$$\begin{cases} \langle \nu \rangle (\alpha, 0, 0) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \Re(\alpha) \\ \langle p_\nu \rangle (\alpha, 0, 0) = \sqrt{2m\omega\hbar} \Im(\alpha) \\ \langle \nu^2 \rangle (\alpha, 0, 0) = \frac{\hbar}{2m\omega} (4\Re^2(\alpha) + 1) \\ \langle p_\nu^2 \rangle (\alpha, 0, 0) = \frac{m\omega\hbar}{2} (4\Im^2(\alpha) + 1) \end{cases} \quad (4.31)$$

De là, on peut déduire les dispersions en ν et p_ν :

$$\begin{cases} (\Delta\nu)^2 (\alpha, 0, 0) = \frac{\hbar}{2m\omega} \\ (\Delta p_\nu)^2 (\alpha, 0, 0) = \frac{m\omega\hbar}{2} \end{cases} \quad (4.32)$$

Ce qui minimise bien la relation d'incertitude de Heisenberg puisque le produit de chaque paire de dispersion est minimal :

$$\Delta(\alpha, 0, 0) = (\Delta\nu)^2 (\alpha, 0, 0) (\Delta p_\nu)^2 (\alpha, 0, 0) = \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.33)$$

4.3.5. Etats comprimés indépendants du temps

Afin de mieux mettre en évidence les propriétés des états comprimés, il est utile d'introduire de nouveaux opérateurs $\hat{\mu}$ et \hat{P}_μ proportionnels à ν et p_ν .

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \nu \\ \hat{P}_\mu = \sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}} p_\nu \end{cases} \quad (4.34)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} a_\mu = \frac{1}{2} (\hat{\mu} + i\hat{P}_\mu) \\ a_\mu^+ = \frac{1}{2} (\hat{\mu} - i\hat{P}_\mu) \end{cases} \quad (4.35)$$

Si on retourne aux états cohérents, les dispersions $(\Delta\hat{\mu})^2$ et $(\Delta\hat{P}_\mu)^2$ deviennent maintenant chacune égale à 1 indépendamment de la valeur de α et donc leur produit aussi.

En introduisant l'opérateur $A_\mu = a_\mu + \gamma a_\mu^+$ de telle sorte que $A_\mu |\psi(\alpha, \gamma)\rangle = \alpha |\psi(\alpha, \gamma)\rangle$ on pourra calculer alors les dispersions des états comprimés plus aisément.

En exprimant les opérateurs $\hat{\mu}$ et \hat{P}_μ en fonction de A_μ et A_μ^+ de la sorte :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{A_\mu + A_\mu^+}{1 + \gamma} \\ \hat{P}_\mu = -i \frac{A_\mu - A_\mu^+}{1 - \gamma} \end{cases} \quad (4.36)$$

Nous obtenons ainsi les valeurs moyennes :

$$\begin{cases} \langle \hat{\mu} \rangle = \frac{2\Re(\alpha)}{1 + \gamma} \\ \langle \hat{P}_\mu \rangle = \frac{2\Im(\alpha)}{1 - \gamma} \\ \langle \hat{\mu}^2 \rangle = \frac{2}{(1 + \gamma)^2} (|\alpha|^2 + \Re(\alpha^2)) + \frac{1 - \gamma^2}{(1 + \gamma)^2} \\ \langle \hat{P}_\mu^2 \rangle = \frac{2}{(1 - \gamma)^2} (|\alpha|^2 - \Re(\alpha^2)) + \frac{1 - \gamma^2}{(1 - \gamma)^2} \end{cases} \quad (4.37)$$

Il est facile de calculer alors les dispersions :

$$\begin{cases} (\Delta \hat{\mu})^2(\alpha, \gamma, 0) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \\ (\Delta \hat{P}_\mu)^2(\alpha, \gamma, 0) = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \end{cases} \quad (4.38)$$

On voit bien que les dispersions se ramènent à 1 pour $\gamma = 0$.

On remarque que quelle que soit la valeur de γ , le produit des dispersions est bien égal à 1, ce qui montre que les états comprimés conservent bien la propriété de quasi-classicité. Par contre, si les dispersions sont prises séparément, on constate qu'elles ne sont plus constantes en γ , c'est pour cette raison qu'on parle d'états comprimés. La compression aura pour effet d'augmenter la dispersion de l'un des opérateurs au détriment de devoir diminuer celle de l'autre comme le montre la Figure 4.1.

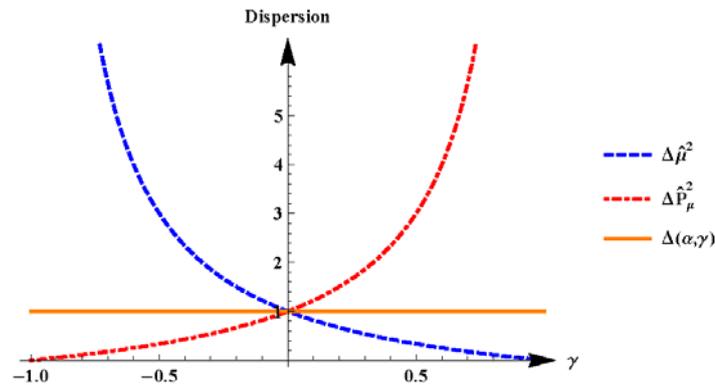


Figure 4.1 : Dispersion en $\hat{\mu}$ et en \hat{P}_μ et produit des dispersions en fonction du paramètre de compression γ .

Par ailleurs, plus la compression est grande et plus les dispersions en $\hat{\mu}$ et \hat{P}_μ sont différentes l'une de l'autre.

Il devient plus clair maintenant pour quelles raisons les états comprimés sont très intéressants et si présents dans le domaine de la physique. Tout en maintenant la relation d'incertitude de Heisenberg minimale, ils nous donnent une certaine liberté sur la connaissance précise de la position de la particule par exemple.

On remarque que les dispersions ne dépendent pas de α , qu'en est-il si l'on tenait compte du temps.

Pour ce faire, nous allons refaire la même procédure précédente mais en tenant compte du temps afin de voir si les propriétés sont toujours vraies à un temps différent de zéro.

4.3.6. Etats cohérents dépendants du temps

Pour se faire nous allons utiliser les relations :

$$\begin{cases} \langle a | \alpha(t) \rangle = \alpha e^{-i\omega t} | \alpha(t) \rangle \\ \langle \alpha(t) | a^\dagger = \langle \alpha(t) | \alpha^* e^{i\omega t} \end{cases} \quad (4.39)$$

Ce qui nous permet de trouver les valeurs moyennes suivantes :

$$\begin{cases} \langle \hat{\mu} \rangle = 2 \operatorname{Re}(\alpha) \cos \omega t + 2 \operatorname{Im}(\alpha) \sin \omega t \\ \langle \hat{P}_\mu \rangle = 2 \operatorname{Im}(\alpha) \cos \omega t - 2 \operatorname{Re}(\alpha) \sin \omega t \\ \langle \hat{\mu}^2 \rangle = 2 \left(\operatorname{Re}(\alpha^2) \cos 2\omega t + \operatorname{Im}(\alpha^2) \sin 2\omega t \right) + 2|\alpha|^2 + 1 \\ \langle \hat{P}_\mu^2 \rangle = -2 \operatorname{Re}(\alpha^2) \cos 2\omega t - 2 \operatorname{Im}(\alpha^2) \sin 2\omega t + 2|\alpha|^2 + 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Ce qui donne pour les dispersions :

$$\begin{cases} \langle \Delta \hat{\mu}^2 \rangle = 1 \\ \langle \Delta \hat{P}_\mu^2 \rangle = 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

On voit bien que les dispersions prises séparément ou bien leur produit restent constantes en α ainsi que du temps (Figure 4.2 et Figure 4.3)

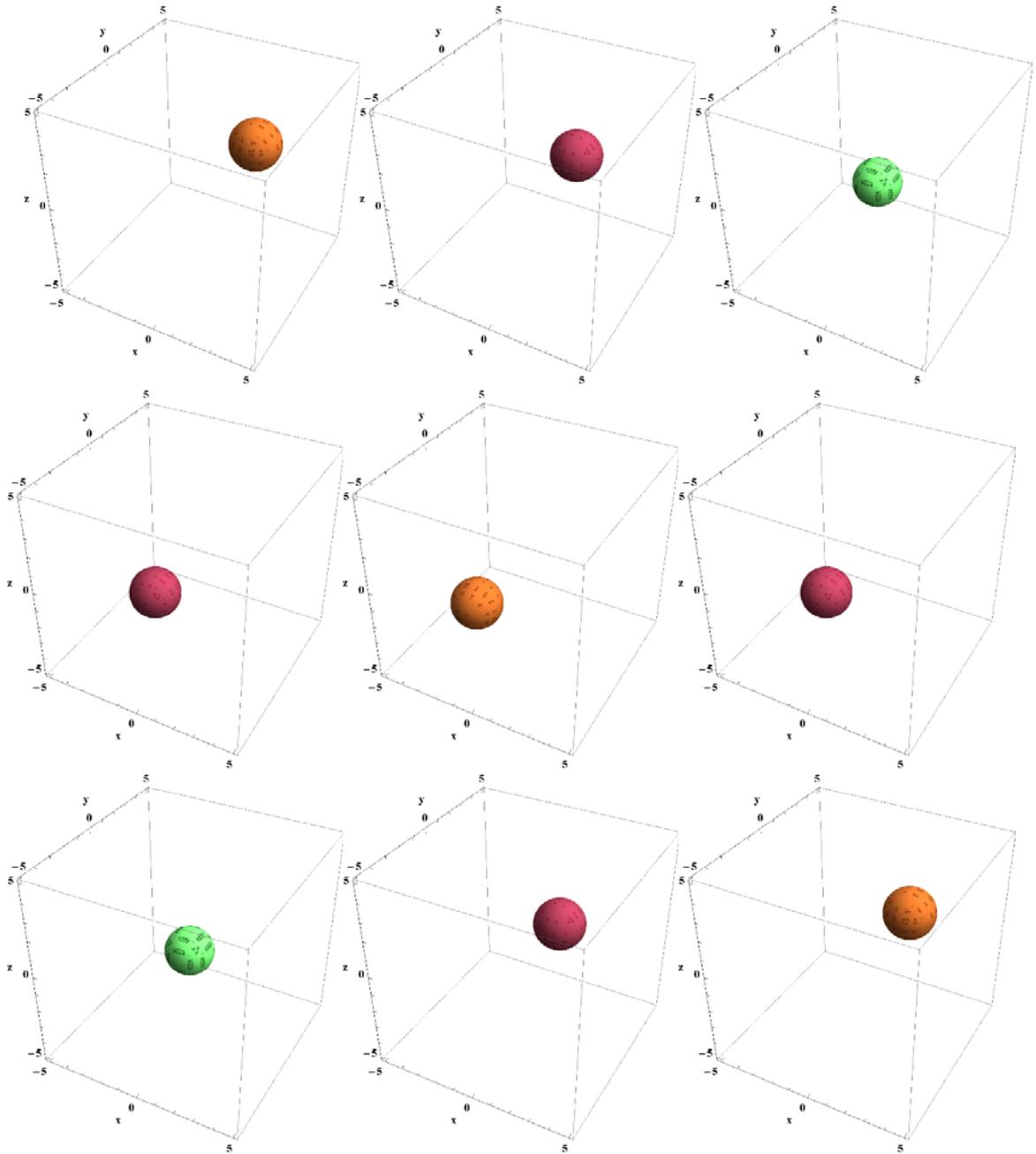


Figure 4.2 : Densité de probabilité $|\psi(1,2,0,x,y,z,t)|^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ selon les trois axes.

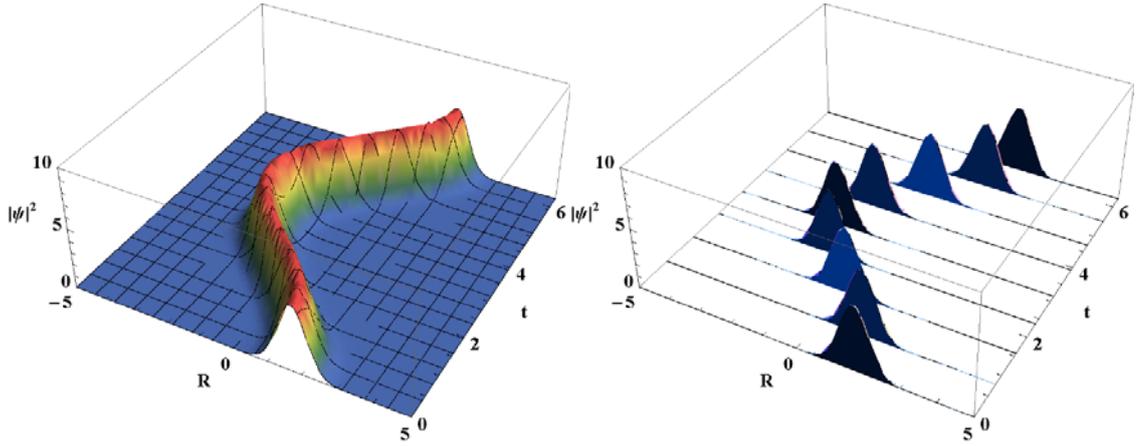


Figure 4.3 : Densité de probabilité $|\psi(1.2, 0, R, t)|^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$.

4.3.7. Etats comprimés dépendants du temps

En ce qui concerne les états comprimés, les dispersions en $\hat{\mu}$ et en \hat{P}_μ dépendent du temps t . En effet :

$$\begin{cases} (\Delta\hat{\mu})^2(\alpha, \gamma, t) = A(\alpha, \gamma)e^{-2i\omega t} + \bar{A}(\alpha, \gamma)e^{2i\omega t} + B(\alpha, \gamma) \\ (\Delta\hat{P}_\mu)^2(\alpha, \gamma, t) = -A(\alpha, \gamma)e^{-2i\omega t} - \bar{A}(\alpha, \gamma)e^{2i\omega t} + B(\alpha, \gamma) \end{cases} \quad (4.42)$$

Ce qui donne le produit des dispersions suivant :

$$\Delta(\alpha, \gamma, t) = -A^2(\alpha, \gamma)e^{-4i\omega t} - \bar{A}^2(\alpha, \gamma)e^{4i\omega t} + B^2(\alpha, \gamma) - 2|A(\alpha, \gamma)|^2 \quad (4.43)$$

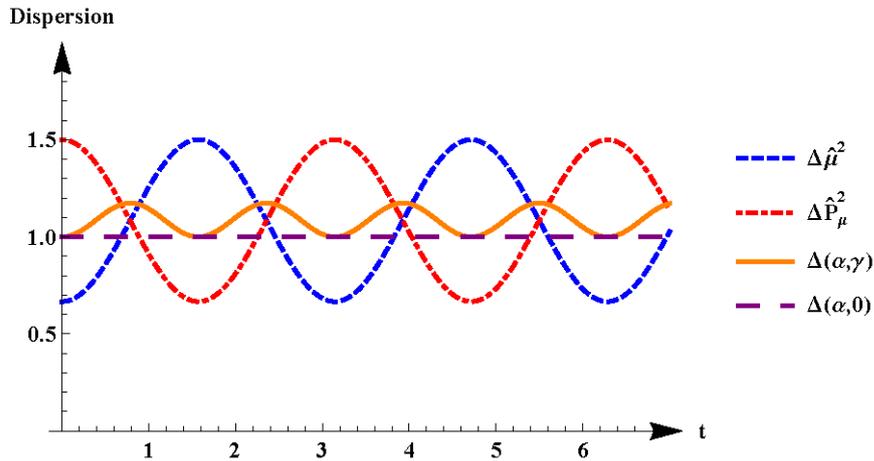


Figure 4.4 : Dispersion en $\hat{\mu}$ et en \hat{P}_μ et produit des dispersion pour $\gamma = 0$ et $\gamma = 0.2$.

Comme le montre la Figure 4.4, les dispersions des états comprimés oscillent dans le temps. Selon le temps observé, l'effet de la compression ne s'applique pas forcément à la même observable. On effet, à l'instant $t = 0$, la dispersion en $\hat{\mu}$ est inférieure à celle de \hat{P}_μ .

ce qui implique une meilleure localisation en $\hat{\mu}$. A l'instant $t = \frac{\pi}{2}$ c'est l'inverse, on aura une meilleure localisation en \hat{P}_μ , et donc un étalement de la densité de probabilité en $\hat{\mu}$, ce que montre les figures suivantes :

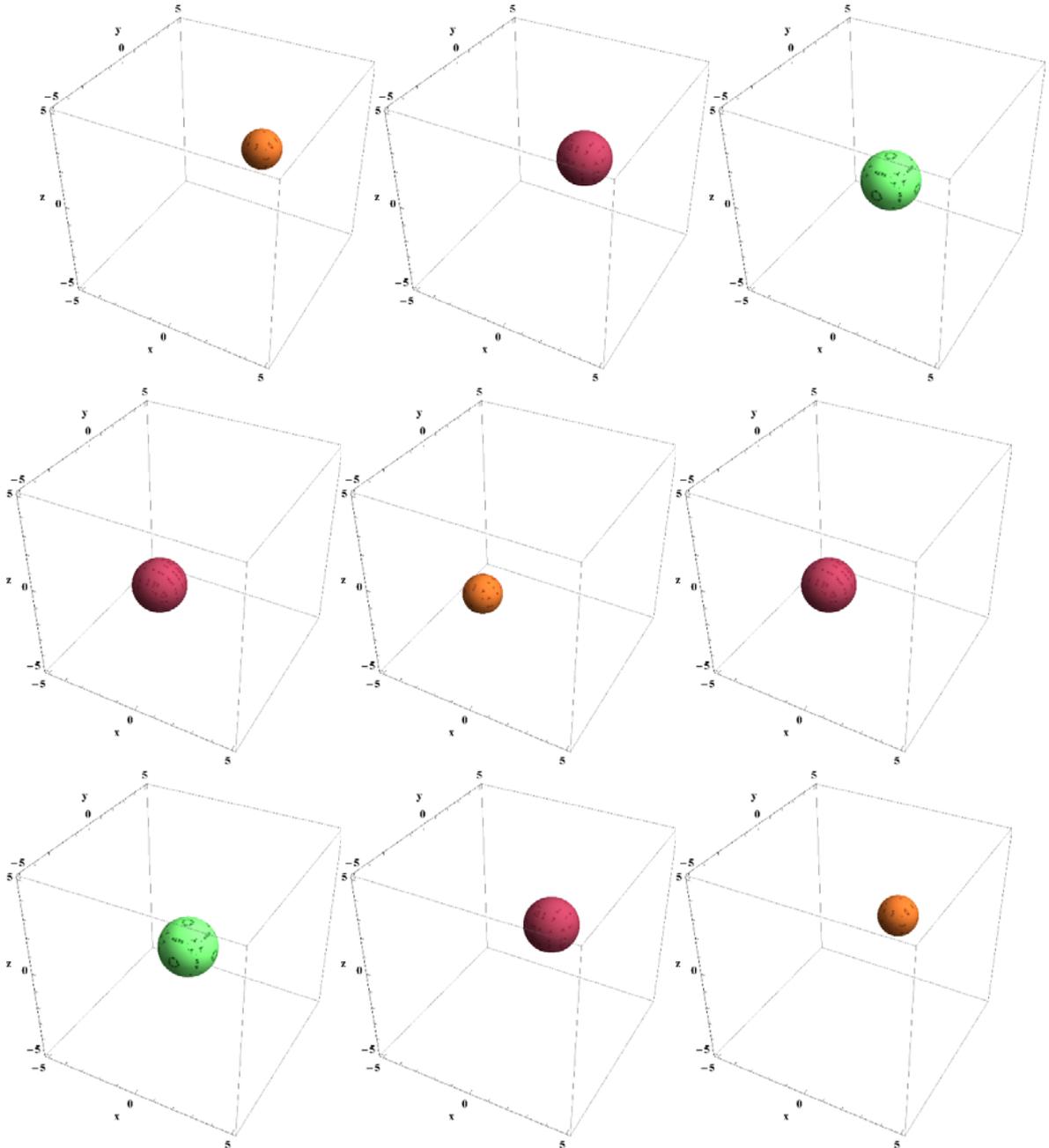


Figure 4.5 : Densité de probabilité $|\psi(1.2, 0.2, x, y, z, t)|^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ selon les trois axes de compression.

Afin de mieux visualiser le mouvement sinusoïdal de la densité de probabilité des états comprimés, nous avons tracé, dans la Figure 4.6, celle-ci en fonction de R .

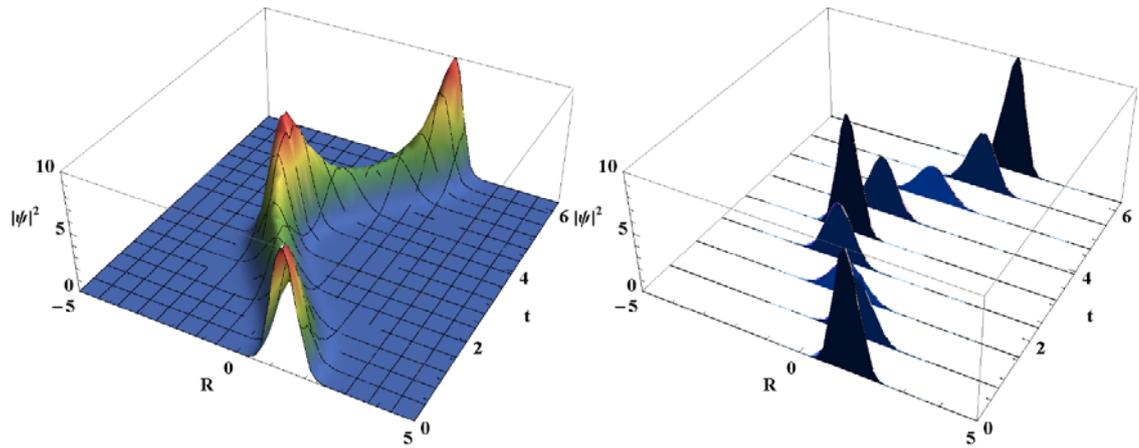


Figure 4.6 : Densité de probabilité $|\psi(1.2, 0.2, R, t)|^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$.

4.3.8. Densité de probabilité

Afin de mieux visualiser l'effet de compression dans les états comprimés, nous allons tracer leur densité de probabilité. Il est à noter que le paramètre de compression γ a été choisi de telle sorte que ce soit la dispersion sur la position qui diminue. Sur la Figure 4.7, nous avons tracé la densité de probabilité des états comprimés à $t = 0$ avec $\gamma = 0, 0.4$ et enfin 0.8 . On observe que pour un γ donné, la densité de probabilité ne change pas de forme en fonction de α , par contre elle translate en μ . Cela concorde avec les résultats précédents qui indiquaient que pour un γ donné, la dispersion est constante en α . Changer α modifie donc la valeur moyenne de la position (et de l'impulsion), mais pas celle de la dispersion.

Sur la Figure 4.8, on voit qu'en rajoutant la compression, la densité de probabilité s'amincit et devient plus haute, ce qui est normal puisque la compression a pour effet de diminuer la dispersion sur la position.

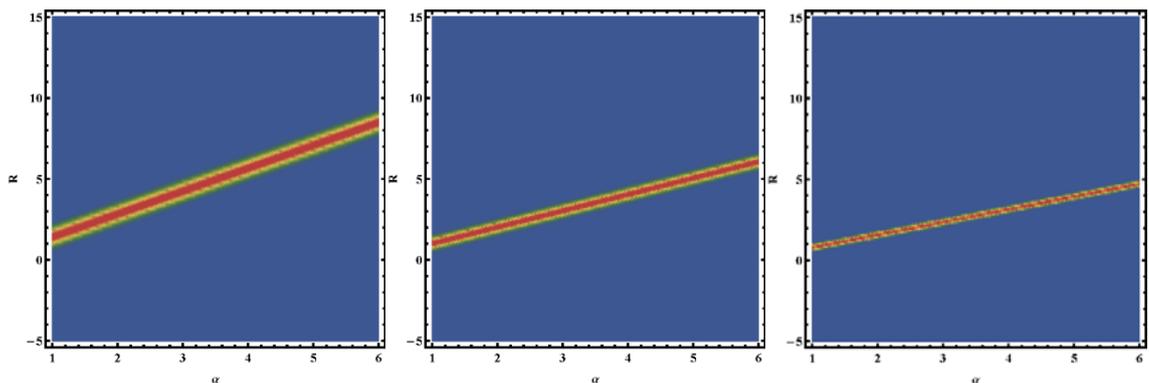


Figure 4.7 : Courbes de niveau des densités de probabilité $|\psi(\alpha, 0, x, y, z, 0)|^2$ (gauche), $|\psi(\alpha, 0.4, x, y, z, 0)|^2$ (centre) et $|\psi(\alpha, 0.8, x, y, z, 0)|^2$ (droite).

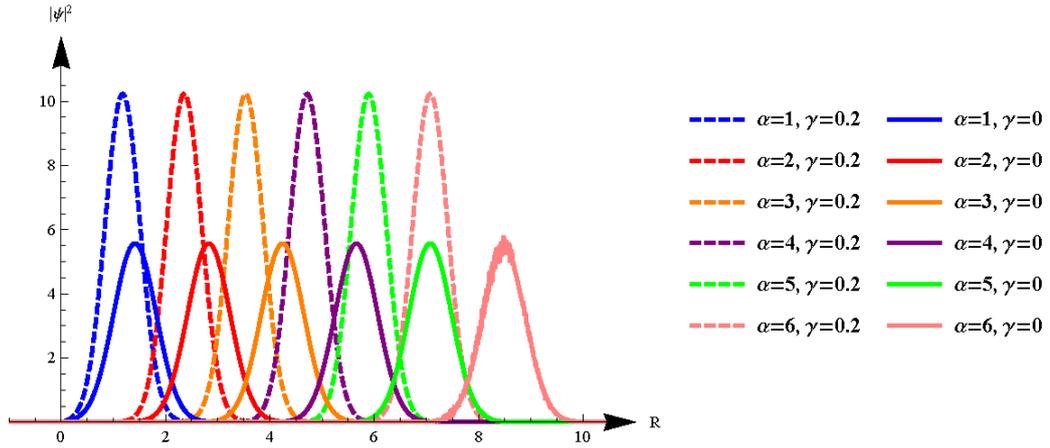


Figure 4.8 : Comparaison des densités de probabilité.

Que se passe-t-il au fil du temps ?

Dans le cas des états cohérents, ils demeurent cohérents pour tout t , sauf que le paramètre de cohérence change.

En effet :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, 0, x, y, z; t) &= \frac{1}{\sqrt{N(\alpha)}} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} e^{-i(n+\frac{3}{2})\omega t} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \\ &= e^{-\frac{i3\omega t}{2}} \psi(\alpha e^{-i\omega t}, 0, x, y, z; t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Et donc

$$|\psi(\alpha, 0, x, y, z; t)|^2 = |\psi(\alpha e^{-i\omega t}, 0, x, y, z; t)|^2 \quad (4.45)$$

On voit bien que l'état cohérent $\psi(\alpha, 0, x, y, z; t)$ reste un état cohérent, mais avec un paramètre de cohérence qui vaut $\alpha e^{-i\omega t}$. Cela rejoint ce qu'on avait observé au niveau du produit des dispersions, soit qu'il demeure minimal en tout temps.

Pour les états comprimés, le même phénomène est observé, mais le paramètre de compression change également pour passer de γ à $\gamma e^{-2i\omega t}$.

En effet :

$$|\psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t)|^2 = |\psi(\alpha e^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t}, x, y, z; 0)|^2 \quad (4.46)$$

Ainsi, un état comprimé demeure lui aussi un état comprimé au fil du temps.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les états cohérents et comprimés d'un système quantique avec un spectre d'énergie discret et fini décrit par l'oscillateur harmonique à 3D.

Ces états sont des états propres d'une combinaison linéaire d'opérateurs échelles et sont caractérisés par deux paramètres continus α et γ .

Nous avons étudié le comportement de ces états en ce qui concerne la localisation et l'incertitude minimale. Le calcul de la dispersion et des valeurs moyennes a été effectué analytiquement. Nous avons également calculé la densité de probabilité afin de montrer l'effet de compression dans les états comprimés.

CONCLUSION GENERALE

Cette thèse est consacrée à l'étude de la notion des états cohérents pour des systèmes quantiques exactement solubles. Ces états quantiques sont analogues aux états classiques de par leurs propriétés, ce qui permet d'établir le lien entre la mécanique quantique et classique.

Nous avons exploité la méthode de factorisation afin de mieux trouver les expressions des états cohérents pour ces systèmes, nous avons également présenté deux classes d'états cohérents connues sous l'appellation « Etats cohérents de Gazeau-Klauder » et « Etats cohérents de Klauder-Perelomov ». Par la suite, nous avons construit l'espace de Fock-Bargmann associé à chaque classe.

Enfin, la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg a permis l'introduction d'une autre classe des états cohérents connus sous l'appellation d'états comprimés.

Nous nous sommes intéressés tout particulièrement au potentiel de l'oscillateur harmonique à 3D, nous avons construit ses états cohérents ainsi que comprimés où nous avons montré qu'ils minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg. Nous avons étudié leurs comportements en ce qui concerne la localisation et l'incertitude minimale. Enfin, nous avons calculé la dispersion, les valeurs moyennes ainsi que la densité de probabilité (calculs fait analytiquement). L'étude de la densité de probabilité montre bien l'effet de compression des états comprimés.

Comme perspectives à ce travail, nous comptons compliquer nos calculs en traitant le cas de l'oscillateur harmonique anisotrope à 3D, et essayer de générer de l'intrication quantique avec des potentiels autres que celui de l'oscillateur harmonique à 1D. Ce qui permettrait d'ouvrir de nouveaux horizons pour les expérimentateurs surtout dans le domaine de l'informatique quantique.

RÉFÉRENCES

- [1]. E. Schrödinger, "*Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik*", *Naturwissenschaften*, **14**(28), (1926), p. 664-666.
- [2]. E.H. Kennard, "*Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen*", *Zeitschrift für Physik*, **44**(4-5), (1927), p. 326-352.
- [3]. C.G. Darwin, "*Free motion in the wave mechanics*", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **117**(776), (1927), p. 258-293.
- [4]. R.J. Glauber, "*Coherent and incoherent states of the radiation field*", *Physical Review*, **131**(6), (1963), p. 2766.
- [5]. J.R. Klauder, "*Continuous-Representation Theory. I. Postulates of Continuous-Representation Theory*", *Journal of Mathematical Physics*, **4**(8), (1963), p. 1055-1058.
- [6]. A. Barut and L. Girardello, "*New “coherent” states associated with non-compact groups*", *Communications in Mathematical Physics*, **21**(1), (1971), p. 41-55.
- [7]. A.M. Perelomov, "*Coherent states for arbitrary Lie group*", *Communications in Mathematical Physics*, **26**(3), (1972), p. 222-236.
- [8]. R. Gilmore, "*Geometry of symmetrized states*", *Annals of Physics*, **74**(2), (1972), p. 391-463.
- [9]. J.P. Gazeau and J.R. Klauder, "*Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**(1), (1999), p. 123.
- [10]. S.T. Ali, J.P. Antoine and J.P. Gazeau, "*Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*", Springer New York, (2012).
- [11]. B. Bahr and T. Thiemann, "*Gauge-invariant coherent states for loop quantum gravity: II. Non-Abelian gauge groups*", *Classical and quantum gravity*, **26**(4), (2009), p. 045012.
- [12]. S.W. Hawking, "*Quantum coherence down the wormhole*", *Physics Letters B*, **195**(3), (1987), p. 337-343.
- [13]. J.-P. Gazeau, "*Coherent states in quantum physics*", Wiley, (2009).
- [14]. M. Kim, W. Son, V. Bužek and P. Knight, "*Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement*", *Physical Review A*, **65**(3), (2002), p. 032323.
- [15]. A. Hertz, V. Hussin and H. Eleuch, "*Beam splitter and entanglement created with the squeezed coherent states of the Morse potential*", *arXiv preprint arXiv:1305.2100*, (2013).
- [16]. V. Dodonov, E. Kurmyshev and V. Man'ko, "*Generalized uncertainty relation and correlated coherent states*", *Physics Letters A*, **79**(2-3), (1980), p. 150-152.
- [17]. A. Perelomov, "*Generalized coherent states and their applications*", Springer Science & Business Media, (2012).

- [18]. C. Gerry and P. Knight, "*Introductory quantum optics*", Cambridge university press, (2005).
- [19]. V. Dodonov, "*Nonclassical states in quantum optics: squeezed review of the first 75 years*", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **4**(1), (2002), p. R1.
- [20]. B.C. Sanders, "*Review of entangled coherent states*", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**(24), (2012), p. 244002.
- [21]. D. Trifonov, "*Generalized intelligent states and squeezing*", *Journal of Mathematical Physics*, **35**(5), (1994), p. 2297-2308.
- [22]. E. Schrödinger, "*Further studies on solving eigenvalue problems by factorization*", in *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, : JSTOR, (1940).
- [23]. L. Infeld and T. Hull, "*The factorization method*", *Reviews of modern Physics*, **23**(1), (1951), p. 21.
- [24]. H. Weyl, "*Gruppentheorie und Quantenmechanik Hirzel, Leipzig, 1928; translated by HP Robertson*", *The theory of groups and quantum mechanics*, Hirzel, Leipzig, (1931), 91.
- [25]. P. Cartier, "*Algebraic groups and discontinuous subgroups*", in *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, (1966), p. 361-383.
- [26]. R.J. Glauber, "*Some notes on multiple-boson processes*", *Physical Review*, **84**(3), (1951), p. 395.
- [27]. M.H. Stone, "*Linear transformations in Hilbert space III. Operational methods and group theory*", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **16**(2), (1930), p. 172-175.
- [28]. J.v. Neumann, "*Die eindeutigkeit der Schrödingerschen operatoren*", *Mathematische Annalen*, **104**(1), (1931), p. 570-578.
- [29]. V. Bargmann, "*On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform Part I*", *Communications on pure and applied mathematics*, **14**(3), (1961), p. 187-214.
- [30]. V. Fock, "*Verallgemeinerung und lösung der diracschen statistischen gleichung*", *Zeitschrift für Physik*, **49**(5-6), (1928), p. 339-357.
- [31]. B. Mielnik, "*Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum*", *Journal of mathematical physics*, **25**(12), (1984), p. 3387-3389.
- [32]. D.J. Fernández, "*New hydrogen-like potentials*", *letters in mathematical physics*, **8**(4), (1984), p. 337-343.
- [33]. C. Sukumar, "*Supersymmetry, potentials with bound states at arbitrary energies and multi-soliton configurations*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **19**(12), (1986), p. 2297.
- [34]. V. Hussin and L. Nieto, "*Coherent states for isospectral oscillator Hamiltonians*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **27**(10), (1994), p. 3547.
- [35]. C. Fernandez, L.M. Nieto and O. Rosas-Ortiz, "*Distorted Heisenberg algebra and coherent states for isospectral oscillator Hamiltonians*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **28**(9), (1995), p. 2693.

- [36]. H. Bateman, "*Tables of integral transforms*", Vol. 1, A. Erdelyi ed, McGraw-Hill, New York, (1954).
- [37]. A. El Kinani and M. Daoud, "*Generalized intelligent states for an arbitrary quantum system*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**(26), (2001), p. 5373.
- [38]. A. El Kinani and M. Daoud, "*Generalized coherent and intelligent states for exact solvable quantum systems*", *Journal of Mathematical Physics*, **43**(2), (2002), p. 714-733.
- [39]. J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, P. Monceau, J. Klauder and K. Penson, "*Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl–Teller potentials*", *Journal of Mathematical Physics*, **42**(6), (2001), p. 2349-2387.
- [40]. G. Pöschl and E. Teller, "*Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators*", *Zeitschrift für Physik*, **83**(3-4), (1933), p. 143-151.
- [41]. C. Daskaloyannis, "*Generalized deformed oscillator corresponding to the modified Poschl-Teller energy spectrum*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **25**(8), (1992), p. 2261.
- [42]. A. El Kinani and M. Daoud, "*Coherent states à la Klauder–Perelomov for the Pöschl–Teller potentials*", *Physics Letters A*, **283**(5-6), (2001), p. 291-299.
- [43]. T. Santhanam, "*Generalized coherent states*", in *Symmetries in Science*, Springer, (1980), p. 337-364.
- [44]. R.J. Glauber, "*The quantum theory of optical coherence*", *Physical Review*, **130**(6), (1963), p. 2529.
- [45]. J.R. Klauder, "*Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics*", *Journal of Mathematical Physics*, **4**(8), (1963), p. 1058-1073.
- [46]. E. Sudarshan, "*Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*", *Physical Review Letters*, **10**(7), (1963), p. 277.
- [47]. H.P. Yuen, "*Two-photon coherent states of the radiation field*", *Physical Review A*, **13**(6), (1976), p. 2226-2243.
- [48]. D. Han, Y. Kim and W. Zachary, "*Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations*", in *NASA Conference Publication 3135*, Washington D. C., (1992).
- [49]. M.M. Nieto, "*Frontiers of Nonequilibrium Statistical Mechanics*", Proc. NATO Advanced Study Institute (Plenum, New York, 1984), (1986).
- [50]. C.M. Caves, K.S. Thorne, R.W.P. Drever, V.D. Sandberg and M. Zimmermann, "*On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle*", *Reviews of Modern Physics*, **52**(2), (1980), p. 341-392.
- [51]. N. Bogoliubov, "*N. Bogoliubov, J. Phys.(Moscow) 11, 292 (1947)*", *J. Phys.(Moscow)*, **11**, (1947), p. 292.
- [52]. M.M. Nieto, "*Generalized squeezed states from generalized coherent states*", in *Coherent States: Past, Present, and Future*, World Scientific, (1994), p. 381-391.
- [53]. J.R. Klauder and B.-S. Skagerstam, "*Coherent states : applications in physics and mathematical physics*", World scientific, Singapore, (1985).

- [54]. W.-M. Zhang and R. Gilmore, "*Coherent states: theory and some applications*", *Reviews of Modern Physics*, **62**(4), (1990), p. 867.
- [55]. E. Schrödinger, "*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*", Vol. 14, Physikalisch-mathematische Klasse, Springer, Berlin, (1930), 296.
- [56]. H. Robertson, "*An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation*", *Physical Review*, **46**(9), (1934), p. 794.
- [57]. A.E. Kinani and M. Daoud, "*Generalized intelligent states for nonlinear oscillators*", *International Journal of Modern Physics B*, **15**(18), (2001), p. 2465-2483.
- [58]. C. Brif and Y. Ben-Aryeh, "*SU (1, 1) intelligent states: analytic representation in the unit disk*", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **27**(24), (1994), p. 8185.
- [59]. A. El Kinani and M. Daoud, "*Coherent and generalized intelligent states for infinite square well potential and nonlinear oscillators*", *International Journal of Modern Physics B*, **16**(26), (2002), p. 3915-3937.
- [60]. V. Hussin, "*Generalized minimum uncertainty relation and a new class of super-squeezed states*", in *Proc. 6th Int. Conf. on Squeezed States and uncertainty relation (Naples. 1999)*, (1999).
- [61]. D. Trifonov, "*Coherent states and uncertainty relations*", *Physics Letters A*, **48**(3), (1974), p. 165-166.
- [62]. A. Mazouz, M. Bentaiba and A. Mahieddine, "*Coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator*", *Modern Physics Letters B*, **31**(03), (2017), p. 1750019.

ANNEXE A. Contribution A. Mazouz et al., Modern Physics Letters B, 2017

Modern Physics Letters B
Vol. 31, No. 3 (2017) 1750019 (11 pages)
© World Scientific Publishing Company
DOI: 10.1142/S0217984917500191



Coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator

Amel Mazouz^{*,†}, Mustapha Bentaiba^{*} and Ali Mahieddine^{†,‡}

^{*}*LPTHIRM, Department of Physics,
Blida 1 University, Algeria*

[†]*Energy and Smart Systems Laboratory,
Djillali Bounaama University – Khemis Miliana, Algeria*

[‡]*mahieddine.ali@gmail.com*

Received 14 November 2016

Revised 8 December 2016

Accepted 15 December 2016

Published 3 February 2017

A three-dimensional harmonic oscillator is studied in the context of generalized coherent states. We construct its squeezed states as eigenstates of linear combination of ladder operators which are associated to the generalized Heisenberg algebra. We study the probability density to show the compression effect on the squeezed states. Our analysis reveals that squeezed states give us some freedom on the precise knowledge of position of the particle while maintaining the Heisenberg uncertainty relation minimum, squeezed states remains squeezed states over time.

Keywords: Squeezed state; coherent state; harmonic oscillator; entangled states; Heisenberg uncertainty relation.

1. Introduction

Coherent and squeezed states are known to be an important concept in physics. The coherent states (CS) were introduced by Schrödinger in 1926¹ while the squeezed coherent states (SCS) were introduced by Kennard in 1927.² The last ones were forgotten until recently, when they became more popular and received a lot of attention from physicists and mathematicians.^{3–6}

Squeezed coherent states are very useful in physics due to their property to be quasi-classical, i.e. they minimize the Heisenberg uncertainty relation. The study of SCS for systems admitting an infinite discrete spectrum, obtained as a generalization of CS, has recently been the center of much attention.^{7–14} In the particular field of quantum optics, the study of SCS comes into its own. It is known that

[‡]Corresponding author.

A. Mazouz, M. Bentaiba & A. Mahieddine

they generate entanglement, which is one of the fundamental cornerstones for the quantum information processing. It is this phenomenon that gives to the quantum information all its strength. A lot of research contributions have been done in the last decades in order to create entangled states that will be used in future quantum computer.^{15–19}

Hence, the aim of this paper is to construct the coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator. This paper is organized as follows. In Sec. 2, a few concepts of coherent and squeezed states of the harmonic oscillator are reviewed. Section 3 is devoted to the construction of coherent and squeezed states of the 3D harmonic oscillator as eigenstates of linear combination of ladder operators which are associated to the generalized Heisenberg algebra. The results obtained are linked with the observations made on probability densities and uncertainty relations of those states. Concluding remarks are summarized in the last section.

2. Definition of Coherent and Squeezed States

Coherent states, initially defined for the harmonic oscillator, are the eigenstates of the annihilation operator a . They have great physical significance because they are closest to the classical states.

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1)$$

Continuous complex variable α is called the coherence parameter.

For the harmonic oscillator potential, a generalization of previous states is known and are called squeezed states. In addition to depend on the parameter α , they depend also on a compression parameter γ which reduce the dispersion of an observable, increase it on the other and maintain the minimum uncertainty relation of Heisenberg.

It can be shown that squeezed states (for a system with an infinite discrete energy spectrum) are the eigenstates of the operator $a + \gamma a^\dagger$.⁵

We have

$$(a + \gamma a^\dagger)|\psi(\alpha, \gamma)\rangle = \alpha|\psi(\alpha, \gamma)\rangle, \quad (2)$$

where a and a^\dagger are the ladder operators acting on energy eigenstates as

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{cases} \quad (3)$$

The solutions of (2) can be expressed as a superposition of the eigenstates $|n\rangle$ as follows:

$$|\psi(\alpha, \gamma, x; t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(\alpha, \gamma, n)}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4)$$

where \mathcal{N} is a normalization factor.

$$\mathcal{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Z(\alpha, \gamma, n)|^2}{n!}. \quad (5)$$

Coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator

For the harmonic oscillator, we find the expression of $Z(\alpha, \gamma, n)$ ¹¹:

$$Z_{OH}(\alpha, \gamma, n) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma}}\right) \quad (6)$$

With $|\gamma| < 1$, where $\mathcal{H}(n, \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma}})$ are the Hermite polynomials which take values in \mathbb{C} . These polynomials have interesting properties in terms of orthogonality, measure and resolution of the identity.^{11,19}

In the case of CS, we obtain

$$Z_{OH}(\alpha, 0, n) = \alpha^n. \quad (7)$$

3. The 3D Harmonic Oscillator

3.1. The model

The harmonic oscillator is represented by the following Hamiltonian:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \\ &= \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \end{aligned} \quad (8)$$

we can assume without loss of generality that $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_z^2 = \omega^2$.

We have

$$H = H_x + H_y + H_z \quad (9)$$

and that the eigenvalues of H are the sum of eigenvalues of H_x , H_y and H_z

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y, n_z} &= E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} \\ &= \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega, \end{aligned} \quad (10)$$

where $n = n_x + n_y + n_z$.

To find the eigenstates $|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle$, we introduce the three couples of creation and annihilation operators for the three harmonic oscillators 1D.

$$\begin{cases} a_\nu = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\nu} + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_\nu \\ a_\nu^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{\nu} - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}_\nu, \end{cases} \quad \text{with } \nu = x, y, z. \quad (11)$$

They obey to the following commutation rules:

$$[a_\nu, a_\nu^\dagger] = 1. \quad (12)$$

The eigenvectors in terms of these operators will be

$$|\varphi_{n_\nu}\rangle = \frac{(a_\nu^\dagger)^{n_\nu}}{\sqrt{n_\nu!}} |\varphi_{0\nu}\rangle. \quad (13)$$

A. Mazouz, M. Bentaiba & A. Mahieddine

With

$$a_\nu |\varphi_{0\nu}\rangle = 0. \quad (14)$$

Note that $|\varphi_{000}\rangle = |\varphi_{0x}\rangle |\varphi_{0y}\rangle |\varphi_{0z}\rangle$ with:

$$a_\nu |\varphi_{000}\rangle = 0. \quad (15)$$

The state $|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle$

$$|\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} (a_x^\dagger)^{n_x} (a_y^\dagger)^{n_y} (a_z^\dagger)^{n_z} |\varphi_{000}\rangle \quad (16)$$

and the wave function associated:

$$\phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \langle r | \varphi_{n_x, n_y, n_z} \rangle = \langle x | \varphi_{n_x} \rangle \langle y | \varphi_{n_y} \rangle \langle z | \varphi_{n_z} \rangle, \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2^{n_x+n_y+n_z} n_x! n_y! n_z!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\times \mathcal{H} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \mathcal{H} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right) \mathcal{H} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} z \right) \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} (x^2 + y^2 + z^2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

3.2. Mean values and dispersions

Generally, we define the mean value of an observable W in squeezed states as

$$\langle W \rangle(\alpha, \gamma; t) = \langle \psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) | W | \psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) \rangle, \quad (19)$$

where the temporal evolution of these states is given by

$$\psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} e^{-i \frac{E_{n_x, n_y, n_z}}{\hbar} t} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \quad (20)$$

with

$$\begin{cases} Z_1 = Z(\alpha, \gamma, n_x), \\ Z_2 = Z(\alpha, \gamma, n_y), \\ Z_3 = Z(\alpha, \gamma, n_z). \end{cases} \quad (21)$$

So

$$\langle W \rangle(\alpha, \gamma; t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 Z_1 Z_2 Z_3}{\sqrt{n!} \sqrt{k!}} e^{-i\omega(k-n)t} \langle \phi_n | W | \phi_k \rangle, \quad (22)$$

where we used the fact that for the 3D harmonic oscillator the energy spectrum is $\hbar\omega(n + \frac{3}{2})$ for $n = 0, 1, 2, \dots$

From these mean values, we could then calculate the dispersion of an observable defined as

$$(\Delta W)^2 = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2. \quad (23)$$

what interest us, are the average of $x, y, z, p_x, p_y, p_z, x^2, y^2, z^2, p_x^2, p_y^2$ and p_z^2 .

Coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator

It is noted that in formula (23) everything is known except the average values of these quantities. For this, we use the relationships between positions and pulses to ladder operators as

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_\nu^\dagger + a_\nu) \\ p_\nu &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_\nu^\dagger - a_\nu) \end{aligned} \quad \text{with } \nu = x, y, z. \quad (24)$$

We obtain

$$\begin{cases} \langle \varphi_n | \nu | \varphi_k \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{k+1}\delta_{n,k+1} + \sqrt{k}\delta_{n,k-1}), \\ \langle \varphi_n | p_\nu | \varphi_k \rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\sqrt{k+1}\delta_{n,k+1} - \sqrt{k}\delta_{n,k-1}), \\ \langle \varphi_n | \nu^2 | \varphi_k \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(\sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{n,k+2} + (2k+1)\delta_{n,k} + \sqrt{k(k-1)}\delta_{n,k-2}), \\ \langle \varphi_n | p_\nu^2 | \varphi_k \rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}(\sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{n,k+2} - (2k+1)\delta_{n,k} - \sqrt{k(k-1)}\delta_{n,k-2}). \end{cases} \quad (25)$$

3.3. Coherent states independent of time

From Eqs. (23) and (26), we can easily calculate all mean values and dispersions. We obtain

$$\begin{cases} \langle \nu \rangle(\alpha, 0, 0) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \Re(\alpha), \\ \langle p_\nu \rangle(\alpha, 0, 0) = \sqrt{2m\omega\hbar} \Im(\alpha), \\ \langle \nu^2 \rangle(\alpha, 0, 0) = 4 \Re^2(\alpha) + 1, \\ \langle p_\nu^2 \rangle(\alpha, 0, 0) = \frac{m\omega\hbar}{2}(4\Im^2(\alpha) + 1). \end{cases} \quad (26)$$

Hence, the dispersions can be deduced in ν and p_ν :

$$\begin{cases} (\Delta\nu)^2(\alpha, 0, 0) = \frac{\hbar}{2m\omega}, \\ (\Delta p_\nu)^2(\alpha, 0, 0) = \frac{m\omega\hbar}{2}. \end{cases} \quad (27)$$

This minimizes the Heisenberg uncertainty relation since the product of each pair of dispersion is minimal

$$\Delta(\alpha, 0, 0) = (\Delta\nu)^2(\alpha, 0, 0)(\Delta p_\nu)^2(\alpha, 0, 0) = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (28)$$

A. Mazouz, M. Bentaiba & A. Mahieddine

3.4. Squeezed states independent of time

To better highlight the properties of compressed states, it is useful to introduce new operators $\hat{\mu}$ and \hat{P}_μ proportional to ν and p_ν .

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\nu, \\ \hat{P}_\mu = \sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}p_\nu, \end{cases} \quad (29)$$

which give

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + i\hat{P}_\mu), \\ a^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{\mu} - i\hat{P}_\mu). \end{cases} \quad (30)$$

Returning to the CS, dispersions $(\Delta\hat{\mu})^2$ and $(\Delta\hat{P}_\mu)^2$ are now becoming each equal to 1 regardless of the value of α and thus their product also.

Introducing the operator $A = a + \gamma a^\dagger$ so that $A|\psi(\alpha, \gamma)\rangle = \alpha|\psi(\alpha, \gamma)\rangle$, we can then calculate the dispersions of compressed states more easily.

By expressing the $\hat{\mu}$ and \hat{P}_μ operators according to A and A^\dagger , thus

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{A + A^\dagger}{1 + \gamma}, \\ \hat{P}_\mu = -i\frac{A - A^\dagger}{1 - \gamma}. \end{cases} \quad (31)$$

We obtain the mean values

$$\begin{cases} \langle \hat{\mu} \rangle = \frac{2\Re(\alpha)}{1 + \gamma}, \\ \langle \hat{P}_\mu \rangle = \frac{2\Im(\alpha)}{1 - \gamma}, \\ \langle \hat{\mu}^2 \rangle = \frac{2}{(1 + \gamma)^2}(|\alpha|^2 + \Re(\alpha^2)) + \frac{1 - \gamma^2}{(1 + \gamma)^2}, \\ \langle \hat{P}_\mu^2 \rangle = \frac{2}{(1 - \gamma)^2}(|\alpha|^2 - \Re(\alpha^2)) + \frac{1 - \gamma^2}{(1 - \gamma)^2}. \end{cases} \quad (32)$$

Then, it is easy to calculate the dispersions

$$\begin{cases} (\Delta\hat{\mu})^2(\alpha, \gamma, 0) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \\ (\Delta\hat{P}_\mu)^2(\alpha, \gamma, 0) = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}. \end{cases} \quad (33)$$

It can be seen that the dispersions are reduced to 1 for $\gamma = 0$.

We note that whatever the value of γ , the product of dispersions is equal to 1, which shows that squeezed states still minimize the Heisenberg uncertainty relation.

Coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator

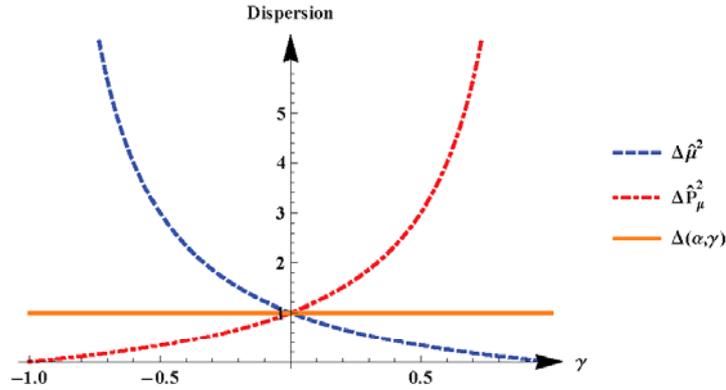


Fig. 1. (Color online) Dispersion in $\hat{\mu}$ and in \hat{P}_μ and produces dispersion as a function of the compression parameter γ .

On the other hand, if the dispersions are taken separately, we find that they are no constant in γ , this is why we speak of squeezed states. The compression effectively increases the dispersion of one of the operators and decrease the other as shown in Fig. 1.

Moreover, more the compression is great more the dispersions on $\hat{\mu}$ and \hat{P}_μ are different from each other.

It becomes clearer now why squeezed states are very interesting and so present in physics. While maintaining the Heisenberg uncertainty relation minimum, they give us some freedom on the precise knowledge of the position of the particle for example.

Note that the dispersions are independent of α , what about if we take into account the time?

To do this, we follow the same previous procedure but taking into account the time and verify if the properties are always true in a different time zero.

3.5. Coherent states dependent of time

We have:

$$\begin{cases} a|\alpha(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t}|\alpha(t)\rangle, \\ \langle \alpha(t)|a^\dagger = \langle \alpha(t)|\alpha^* e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (34)$$

This allows us to find the following mean values:

$$\begin{cases} \langle \hat{\mu} \rangle = 2 \operatorname{Re}(\alpha) \cos \omega t + 2 \operatorname{Im}(\alpha) \sin \omega t, \\ \langle \hat{P}_\mu \rangle = 2 \operatorname{Im}(\alpha) \cos \omega t - 2 \operatorname{Re}(\alpha) \sin \omega t, \\ \langle \hat{\mu}^2 \rangle = 2(\operatorname{Re}(\alpha^2) \cos 2\omega t + \operatorname{Im}(\alpha^2) \sin 2\omega t) + 2|\alpha|^2 + 1, \\ \langle \hat{P}_\mu^2 \rangle = -2 \operatorname{Re}(\alpha^2) \cos 2\omega t - 2 \operatorname{Im}(\alpha^2) \sin 2\omega t + 2|\alpha|^2 + 1, \end{cases} \quad (35)$$

A. Mazouz, M. Bentaiba & A. Mahieddine

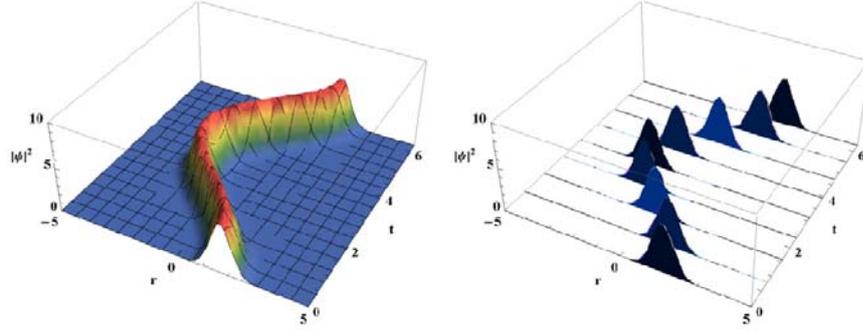


Fig. 2. (Color online) Probability density $|\psi(1.2, 0, x, t)|^2$ for $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$.

which gives for dispersions

$$\begin{cases} \langle \Delta \hat{\mu}^2 \rangle = 1, \\ \langle \Delta \hat{P}_\mu^2 \rangle = 1. \end{cases} \quad (36)$$

We see that dispersions taken separately or their product remains constant in α as well as time, as shown in Fig. 2.

3.6. Squeezed states dependent of time

Regarding the squeezed states, the dispersions in $\hat{\mu}$ and \hat{P}_μ are time-dependent. Indeed:

$$\begin{cases} (\Delta \hat{\mu})^2(\alpha, \gamma, t) = A(\alpha, \gamma)e^{-2i\omega t} + \bar{A}(\alpha, \gamma)e^{2i\omega t} + B(\alpha, \gamma), \\ (\Delta \hat{P}_\mu)^2(\alpha, \gamma, t) = -A(\alpha, \gamma)e^{-2i\omega t} - \bar{A}(\alpha, \gamma)e^{2i\omega t} + B(\alpha, \gamma), \end{cases} \quad (37)$$

which gives the product of the following dispersions:

$$\Delta(\alpha, \gamma, t) = -A^2(\alpha, \gamma)e^{-4i\omega t} - \bar{A}^2(\alpha, \gamma)e^{4i\omega t} + B^2(\alpha, \gamma) - 2|A(\alpha, \gamma)|^2. \quad (38)$$

As shown in Fig. 3, the dispersions of squeezed states oscillate over time. According to the observed time, the effect of the compression does not necessarily apply to the same observable. In fact, at time $t = 0$, the dispersion on $\hat{\mu}$ is lower than \hat{P}_μ implying a better localization in $\hat{\mu}$. At time $t = \pi/2$ it is the opposite, we will have a better location in \hat{P}_μ , and therefore a spreading of the probability density in $\hat{\mu}$. To better visualize the sinusoidal motion of the probability density of the squeezed states, we plotted, in Fig. 4, the latter according to r .

3.7. Probability density

To better visualization of the compression effect in the squeezed states, we plot their probability density. It should be noted that the compression parameter γ was chosen so that either the dispersion on the position decreases. In Fig. 5, we plotted the probability density of squeezed states at $t = 0$ with $\gamma = 0$, $\gamma = 0.4$ and $\gamma = 0.8$.

Coherent and squeezed states for the 3D harmonic oscillator

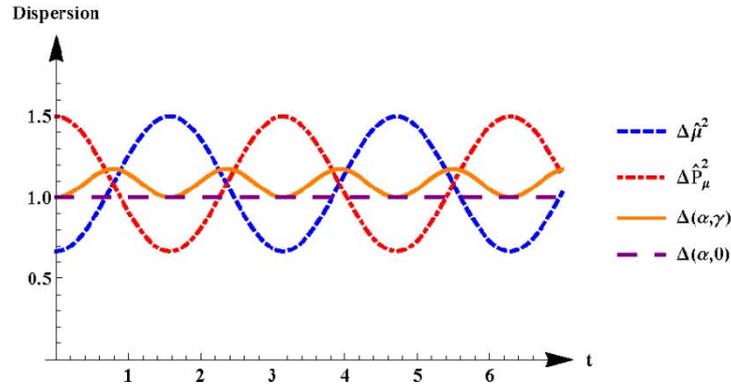


Fig. 3. (Color online) Dispersion in $\hat{\mu}$, \hat{P}_μ and the product of dispersion for $\gamma = 0$ and $\gamma = 0.2$.

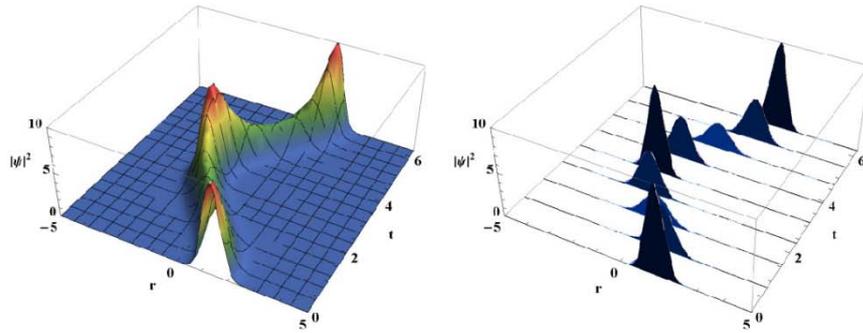


Fig. 4. (Color online) Probability density $|\psi(1.2, 0.2, x, t)|^2$ for $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$.

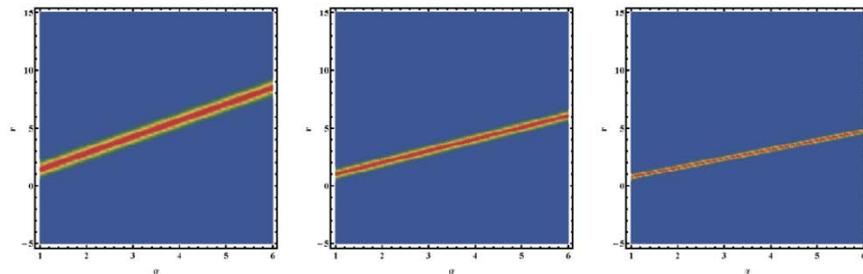


Fig. 5. (Color online) Contours of probability densities $|\psi(\alpha, 0, x, 0)|^2$ (left), $|\psi(\alpha, 0.4, x, 0)|^2$ (center) and $|\psi(\alpha, 0.8, x, 0)|^2$ (right).

It is observed that for a given γ , the probability density does not change shape depending on α but translate on μ . This agrees with previous results which showed that for a given γ , the dispersion is constant in α . Change α modifies the mean value of the position (and pulse) but not of the dispersion.

A. Mazouz, M. Bentaiba & A. Mahieddine

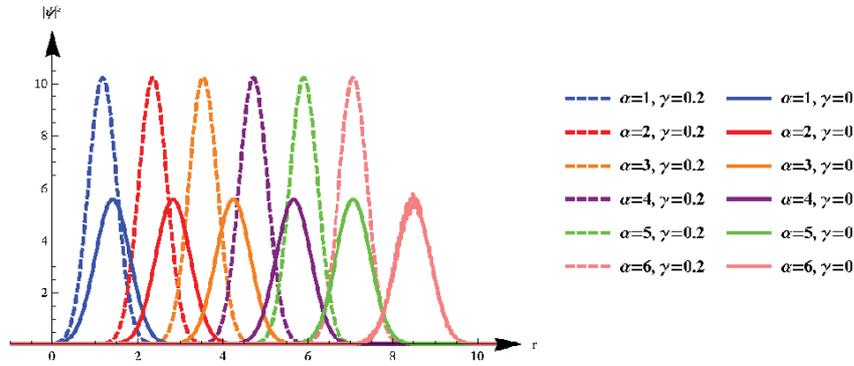


Fig. 6. (Color online) Comparison of the probability densities.

In Fig. 6, we see that by adding compression, the probability density becomes thinner and higher, which is normal since the compression has the effect of reducing the dispersion of the position.

Now, what is going on over time? In CS, they remain consistent for all t , but the coherence parameter changes.

Indeed,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, 0, x, y, z; t) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(\alpha)}} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n_x} \alpha^{n_y} \alpha^{n_z}}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} e^{-i(n+\frac{3}{2})\omega t} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{N}(\alpha e^{-i\omega t})}{\mathcal{N}(\alpha)}} e^{-\frac{i3\omega t}{2}} \psi(\alpha e^{-i\omega t}, 0, x, y, z; 0) \\ &= e^{-\frac{i3\omega t}{2}} \psi(\alpha e^{-i\omega t}, 0, x, y, z; 0) \end{aligned} \quad (39)$$

and so

$$|\psi(\alpha, 0, x, y, z; t)|^2 = |\psi(\alpha e^{-i\omega t}, 0, x, y, z; 0)|^2. \quad (40)$$

It is clear that the coherent state remains a coherent state but with a coherence value equivalent to $\alpha e^{-i\omega t}$. It joined what was observed at the product of dispersions, whether it remains minimal at all times.

For squeezed states, the same phenomenon is observed, the compression setting change from γ to $\gamma e^{-2i\omega t}$.

Indeed,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(\alpha, \gamma)}} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} e^{-i(n+\frac{3}{2})\omega t} \phi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \\ &= e^{-\frac{i3\omega t}{2}} \psi(\alpha e^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t}, x, y, z; 0) \end{aligned} \quad (41)$$

and so

$$|\psi(\alpha, \gamma, x, y, z; t)|^2 = |\psi(\alpha e^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t}, x, y, z; 0)|^2. \quad (42)$$

So a squeezed state remains a squeezed state over time

4. Conclusion

In this paper, we have introduced coherent and squeezed states of a quantum system with a finite discrete energy spectrum described by the 3D harmonic oscillator in the context of generalized them. These states are almost eigenstates of linear combination of ladder operators and are characterized by two continuous parameters α and γ .

We have investigated the behavior of these states regarding localization and minimum uncertainty. The calculation of the dispersion and mean values has been performed analytically. We have also computed the probability density in order to show the compression effect in the squeezed states.

References

1. E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **14**(28) (1926) 664.
2. E. H. Kennard, *Z. Phys.* **44**(4) (1927) 326.
3. J. R. Klauder, *Ann. Phys.* **11**(2) (1960) 123.
4. R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**(6) (1963) 2529.
5. M. M. Nieto, arXiv:quant-ph/9708012v1.
6. J.-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics* (Wiley-VCH, New York, 2009).
7. D. Liwei *et al.*, *Europhys. Lett.* **112**(3) (2015) 34003.
8. M. Hillery, *Phys. Rev. A* **36**(8) (1987) 3796.
9. J. A. Bergou *et al.*, *Phys. Rev. A* **43**(1) (1991) 515.
10. H.-C. Fu and R. Sasaki, *Phys. Rev. A* **53**(6) (1996) 3836.
11. S. L. Braunstein and R. I. McLachlan, *Phys. Rev. A* **35**(4) (1987) 1659.
12. M. N. Alvarez and V. Hussin, *J. Math. Phys.* **43**(5) (2002) 2063.
13. C. M. A. Dantas *et al.*, *Braz. J. Phys.* **28** (1998) 462.
14. A. H. E. Kinani and M. Daoud, *Int. J. Mod. Phys. B* **15**(18) (2001) 2465.
15. G. Vidal and R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 032314.
16. I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
17. A. Hertz *et al.*, arXiv:1305.2100.
18. A. I. Lvovsky, *Squeezed Light Photonics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 2015), pp. 121–163.
19. F. H. Szafraniec, *Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998).

ANNEXE B. Les états cohérents : Les bases

B.1. Définition de Schrödinger

Les états cohérents, tels qu'ils ont été trouvés par Schrödinger, sont désignés par $|z\rangle$ dans la représentation de Dirac, où $z = |z|e^{i\varphi}$ est un paramètre complexe. Ce sont des états pour lesquels les valeurs moyennes sont les solutions sinusoïdales classiques d'un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de fréquence ω .

$$\langle z | \mathbf{X}(t) | z \rangle = 2l_c |z| \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{B.1})$$

Les différents symboles qui sont impliqués dans cette définition sont les suivants :

- La longueur caractéristique $l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$
- L'espace de Hilbert \mathcal{H} des états quantiques pour un objet qui serait classiquement considéré comme une particule ponctuelle de masse m , se déplaçant sur la droite réelle, et soumis à un potentiel harmonique à constante $k = m\omega^2$
- $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$ est le Hamiltonien
- Les opérateurs «position» X et «moment» P sont auto-adjoints dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} des états quantiques.
- Leur règle de commutation est canonique, c'est-à-dire :

$$[X, P] = i\hbar I_d \quad (\text{B.2})$$

L'évolution temporelle de l'opérateur de position est définie comme suit :

$$X(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} X e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (\text{B.3})$$

Dans la suite, nous présentons les différentes manières de construire ces états spécifiques et leurs propriétés fondamentales.

B.2. Représentation des états quantiques

Le formalisme de la mécanique quantique permet différentes représentations des états quantiques : « position », « impulsion » ou « moment », « énergie » ou « nombre » ou représentation de Fock, et « espace de phase » ou « analytique » ou représentation de Fock-Bargmann.

B.2.1. Représentation position

L'approche originelle de Schrödinger a été réalisée dans la représentation de position. L'opérateur X est un opérateur de multiplication agissant dans l'espace \mathcal{H} des fonctions d'onde $\psi(x, t)$ comme suit :

$$X\psi(x,t) = x\psi(x,t), \quad P\psi(x,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) \quad (\text{B.4})$$

L'évolution temporelle de la fonction d'onde est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$H\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) \quad (\text{B.5})$$

Ou de manière équivalente $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \psi(x,t_0)$

Les solutions stationnaires sont $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi(x)$, où les valeurs propres d'énergie sont réparties d'une manière égale sur la droite positive, $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Pour chaque valeur propre correspond un état propre normalisé ψ_n , $H\psi_n = E_n\psi_n$.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi l_c^2} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}} e^{-\frac{x^2}{4l_c^2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}l_c}\right), \quad (\text{B.6})$$

$$\|\psi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

Ici, H_n , désigne le polynôme d'Hermite de degré n , avec n nœuds. Les fonctions $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$:

$$\delta_{mn} = \langle \psi_m | \psi_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_m(x)} \psi_n(x) dx, \quad (\text{B.7})$$

$$\forall \psi \in \mathcal{H}, \quad \psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \psi_n, \quad c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle \quad (\text{B.8})$$

Notons que la longueur caractéristique est l'écart type de la position dans l'état fondamental, $n = 0$, $l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \sqrt{\langle \psi_0 | x^2 | \psi_0 \rangle}$.

B.2.2. Représentation impulsion

Dans la représentation des impulsions, c'est au tour de l'opérateur P d'être considéré comme l'opérateur de multiplication agissant dans l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$:

$$P\hat{\psi}(p,t) = p\hat{\psi}(p,t), \quad X\hat{\psi}(p,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \hat{\psi}(p,t) \quad (\text{B.9})$$

La fonction $\hat{\psi}(p,t)$, est la transformée de Fourier de $\psi(x,t)$ à temps fixe t

$$\widehat{\psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x,t) dx, \quad (\text{B.10})$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px} \widehat{\psi}(p,t) dp \quad (\text{B.11})$$

où

$$\widehat{\psi}_n(p) = \sqrt{\frac{1}{2\pi p_c^2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{p^2}{4l_c^2}} H_n\left(\frac{p}{\sqrt{2} p_c}\right), \quad (\text{B.12})$$

Où l'impulsion caractéristique $p_c = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$ est l'écart-type de l'opérateur de l'impulsion dans l'état fondamental.

B.2.3. Représentation de Fock ou Nombre

L'espace \mathcal{H} des états est considéré ici d'une manière plus abstraite où les kets $|\psi_n\rangle$, vont être remplacés par $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. C'est le modèle de tous les espaces séparables de Hilbert à savoir, l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des carrées sommables.

Les Opérateurs X et P seront exprimés maintenant à l'aide de deux opérateurs, l'opérateur d'annihilation a et son adjoint a^+ , l'opérateur de création, définis par :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega X + iP), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega X - iP) \quad (\text{B.13})$$

Ces relations s'inversent en :

$$X = l_c (a + a^+), \quad P = ip_c (a^+ - a) \quad (\text{B.14})$$

Les opérateurs a et a^+ agissent sur les états propres de l'oscillateur harmonique $|n\rangle$ de la sorte :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \quad (\text{B.15})$$

En plus, en appliquant n fois l'opérateur a^+ à l'état $|0\rangle$, dit état du vide, nous engendrons l'état $|n\rangle$ donné par :

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (\text{B.16})$$

Les vecteurs $|n\rangle$ obéissent aux relations d'orthonormalité et de complétude suivantes :

$$\begin{aligned} \langle n | n' \rangle &= \delta_{nn'} \\ \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Par ailleurs, le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega (a^+ a + a a^+) = \hbar \omega (N + \frac{1}{2}), \quad (\text{B.18})$$

où $N = a^+ a$ est l'opérateur « nombre », qui est diagonal dans la base $\{|n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$, avec un spectre $\mathbb{N} : N |n\rangle = n |n\rangle$.

B.2.4. Représentation analytique ou de Fock-Bargmann

La représentation de Fock-Bargmann est un outil mathématique utilisé fréquemment pour résoudre les équations aux valeurs propres. Cette représentation s'appuie sur l'exploitation de la théorie des fonctions entières analytiques.

A partir de la représentation position, appliquons la transformation intégrale

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \kappa(x, z) \psi(x) dx \quad (\text{B.19})$$

Où $\psi \in H$. Dans (B.19), z est un élément du plan complexe \mathbb{C} avec une dimension physique de la racine carrée d'une action, et le noyau de l'intégrale est défini comme la fonction génératrice des Polynômes d'Hermite :

$$\kappa(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{n!}} \left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}} \right)^n \quad (\text{B.20})$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi l_c^2}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(\frac{z^2}{2} - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x \right) \right) \right]$$

Vu la transformation (B.19), la transformée l'état propre $\psi_n(x)$ est simplement proportionnelle à la nième puissance de z :

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \int_{\mathbb{R}} \kappa(x, z) \psi_n(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}} \right)^n \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

La transformation inverse de (B.19) est donnée comme suit :

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{C}} \overline{\kappa(x, z)} f(z) \mu_s(dz). \quad (\text{B.22})$$

Ici, $\mu_s(dz)$ est la mesure gaussienne dans le plan :

$$\mu_s(dz) = \frac{1}{\pi \hbar} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} dx dy = \frac{i}{2\pi \hbar} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} dz \wedge d\bar{z}, \quad (\text{B.23})$$

Avec $z = x + iy$. La transformation (B.19) trace l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace \mathcal{F} des fonctions entières analytiques de carré sommable :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n \quad \text{Converge absolument pour tout } z \in \mathbb{C},$$

C'est-à-dire que son rayon de convergence est infini, et

$$\|f\|_F^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \mu_s(dz) < \infty. \quad (\text{B.24})$$

L'espace \mathcal{F} est connu sous le nom de l'espace de Fock-Bargmann. Il est muni du produit scalaire

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_{\mathbb{C}} \overline{f_1(z)} f_2(z) \mu_s(dz) = \hbar \sum_{n=0}^{+\infty} n! \overline{\alpha_{1n}} \alpha_{2n} \quad (\text{B.25})$$

De (1.21) une base orthonormée de \mathcal{F} est immédiatement trouvée :

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}} \right)^n \quad (\text{B.26})$$

B.2.5. Les opérateurs dans la représentation Fock-Bargmann :

L'opérateur d'annihilation a est représenté comme une dérivation, alors que son adjoint comme opérateur de multiplication.

$$af(z) = \sqrt{\hbar} \frac{d}{dz} f(z), \quad a^+ f(z) = \frac{z}{\sqrt{\hbar}} f(z). \quad (\text{B.27})$$

En conséquence, l'opérateur nombre N deviendra une dilatation, $N = z \frac{d}{dz}$, et le Hamiltonien un opérateur différentiel de premier ordre :

$$H = \hbar \omega \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.28})$$

La position et l'impulsion auront alors la forme quasi-symétrique :

$$Q = l_c \left(\sqrt{\hbar} \frac{d}{dz} + \frac{z}{\sqrt{\hbar}} \right), \quad P = -ip_c \left(\sqrt{\hbar} \frac{d}{dz} - \frac{z}{\sqrt{\hbar}} \right). \quad (\text{B.29})$$

B.3. Les états cohérents de Schrödinger

Equipé des bases de la mécanique quantique présentées dans la section précédente, nous sommes dans la possibilité de décrire les états cohérents dans (B.1). Notons tout d'abord que dans la représentation position (comme en représentation impulsion), l'état du fondamental :

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi l_c^2}} e^{-\frac{x^2}{4l_c^2}}, \quad (\text{B.30})$$

est une gaussienne centrée à l'origine. Posons-nous la question suivante : Quels états quantiques pourraient garder ce genre de gaussienne dans d'autres points sur le plan des réels ?

$$|\psi_{(q)}(x)|^2 \propto e^{-\text{const.}(x-q)^2}, \quad q \in \mathbb{R} \quad (\text{B.31})$$

Dans notre cadre, la question revient à trouver les coefficients b_n tels que :

$$|\psi_{(q)}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n |n\rangle. \quad (\text{B.32})$$

La réponse sera immédiate après avoir jeté un coup d'œil au noyau de Bergmann $\kappa(x, z)$.

B.3.1. Noyau de Bergmann comme état cohérent :

Simplifions tout d'abord notre notation en posant : $\hbar = m = \omega = 1$, ce qui implique $l_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = p_c$.

Considérons la relation (B.20) du noyau $\kappa(x, z)$

$$\kappa(x, z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp \left[\left(\frac{z^2}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x - z \right)^2 \right) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x), \quad (\text{B.33})$$

où nous avons noté $\psi_n = \overline{\psi_n}$. Posons $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq)$ et adoptons la notation :

$$\kappa(x, z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{\frac{|x|^2}{2}} \overbrace{e^{ixp} e^{-i\frac{qp}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-q)^2}}^{\text{phase}} \equiv \langle \delta_x |_s z \rangle \equiv \langle \delta_x |_s q, p \rangle. \quad (\text{B.34})$$

Ce sont des états cohérents de Schrödinger dans la représentation position (l'indice « s » pour « Schrödinger »).

Dans la représentation de Fock , ils seront notés :

$${}_s |z\rangle = {}_s |q, p\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{B.35})$$

Nous avons obtenu une famille d'état continu en tous point du plan complexe, et les éléments de l'espace de Hilbert avec une base orthonormée de l'ensemble des kets $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

B.3.2. Les états cohérents de Schrödinger dans les autres représentations :

Dans la représentation impulsion, avec la variable k , les états cohérents ${}_s |z\rangle \equiv {}_s |q, p\rangle$ sont des gaussiennes centrées dans k .

$$\langle \delta_k | {}_s z \rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \overbrace{e^{-ixk} e^{-i\frac{qp}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k-p)^2}}^{\text{phase}}. \quad (\text{B.36})$$

Dans celle de Fock-Bargmann avec a variable $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ik) \in \mathbb{C}$, ils s'écrivent :

$$\langle \xi_k | {}_s z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle \xi | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \frac{\bar{\xi}^n}{\sqrt{n!}} = e^{z\bar{\xi}} = e^{\frac{1}{2}(xq - kp)} e^{\frac{i}{2}(xp - qk)}. \quad (\text{B.37})$$

Notons que les états cohérents de Schrödinger ne sont pas normalisables.

B.3.3. Les états de Glauber- Klauder- Sudarshan ou les états cohérents standard :

Compte tenu de la dernière remarque sur la normalisation des états cohérents, nous nous tournons vers les états cohérents normalisés ou standard, ceux introduits pas Glauber[4], Klauder [5]et Sudarshan [46]. Ils sont obtenus à partir des états cohérents de Schrödinger en incluant dans l'expression de ces derniers, le facteur gaussien $e^{-\frac{|z|^2}{2}}$. Ils seront notés :

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{B.38})$$

Par conséquent, le chevauchement entre deux états suit une loi gaussienne modulée par un facteur de phase « Symplectique » :

$$\langle \xi | z \rangle = e^{i(\xi \wedge z)} e^{-\frac{|z - \xi|^2}{2}}. \quad (\text{B.39})$$

B.4. Construction des états cohérents.

Dans la littérature, il existe trois approches qui permettent la construction des états cohérents, que nous allons exposer dans ce qui va suivre. Simplifions tout d'abord notre notation en posant : $\hbar = m = \omega = 1$.

B.4.1. Définition 1

Cette définition est basée sur la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2}$ où les opérateurs de position X et de l'impulsion P sont donnés par :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+), \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - a^+) \quad (\text{B.40})$$

Les opérateurs a et a^+ satisfont à la relation de commutation suivante :

$$[a, a^+] = 1 \quad (\text{B.41})$$

Les états cohérents selon cette définition sont défini comme ceux permettant d'avoir l'égalité $\Delta X \Delta P = \frac{1}{2}$ tout en garantissant l'invariance de cette relation au cours du temps.

B.4.2. Définition 2

La seconde définition de ces états consiste à les définir comme des états propres de l'opérateur d'annihilation :

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad (\text{B.42})$$

Commençons pas écrire ces états $|z\rangle$ comme une superposition des états propre de l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique :

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n |n\rangle \quad (\text{B.43})$$

On obtient alors :

$$a|z\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n a|n\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle \quad (\text{B.44})$$

Comme les vecteurs $|n\rangle$ sont linéairement indépendants, les deux expressions doivent être identiques terme à terme, ce qui implique :

$$C_{n+1} = \frac{z}{\sqrt{n+1}} C_n \quad (\text{B.45})$$

A partir de cette relation de récurrence, il est aisé d'exprimer C_n en fonction de z et C_0 :

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{z}{\sqrt{n}} C_{n-1} \\
&= \frac{z}{\sqrt{n}} \frac{z}{\sqrt{n-1}} C_{n-2} \\
&= \dots \\
&= \frac{z^n}{\sqrt{n!}} C_0
\end{aligned} \tag{B.46}$$

Par conséquent, suivant (B.43),

$$|z\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{B.47}$$

Nous choisissons C_0 de façon à ce que

$$\langle z|z\rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^n}{n!} = |C_0|^2 e^{|z|^2} \tag{B.48}$$

On aura :

$$|C_0|^2 e^{|z|^2} = 1 \quad \rightarrow \quad C_0 = e^{i\theta} e^{-|z|^2/2} \tag{B.49}$$

Les fonctions d'onde étant toujours définies à un coefficient $e^{i\theta}$ près, qui ne change rien à la physique du problème, nous pouvons donc choisir $e^{i\theta} = 1$. Les états cohérents satisfont donc :

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{B.50}$$

Ces états sont les états introduits séparément par Glauber [4], Klauder [5], Sudarshan [46], connus sous le nom d'*états cohérents standard*.

Lemme 1.1. Les états cohérents dans (1.32) sont non orthogonaux.

Preuve. Nous avons par (1.40) et son adjoint que

$$\langle z_1|z_2\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\bar{z}_1)^n (z_2)^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle \tag{B.51}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z}_1 z_2)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) + \bar{z}_1 z_2} \tag{B.52}$$

Si les états $|z_1\rangle$ et $|z_2\rangle$ étaient orthogonaux, alors $\langle z_1|z_2\rangle$ serait nul quand z_1 est différent de z_2 . Or il vient ici

$$|\langle z_1|z_2\rangle|^2 = e^{-|z_1-z_2|^2} \neq 0 \quad (\text{B.53})$$

B.4.3. Définition 3

La dernière définition repose sur l'existence d'un opérateur unitaire « dit opérateur de déplacement » noté $D(z)$ et dont l'action sur l'état de référence $|0\rangle$ « état du vide » génère les états cohérents $|z\rangle$.

En effet, moyennant la relation (B.50) et le fait que $a|0\rangle$ est nul, nous avons :

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^\dagger} |0\rangle \quad (\text{B.54})$$

Grâce aux relations (B.15), (B.31), (B.41), et la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^{A+B} = e^A e^B e^C, C = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([\![A, [A, B]]\!] - [\![B, [B, A]]\!]) + \dots \quad (\text{B.55})$$

Alors,

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle \quad (\text{B.56})$$

Où $D(z) = e^{za^\dagger - \bar{z}a}$ est dit *opérateur de déplacement*.