

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité: Mathématiques

Thème :

CONTRIBUTION A L'ETUDE

DE LA K-DOMINATION, DE LA DOMINATION ROMAINE ET
DE LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE DANS LES DIGRAPHERS

Par

Lyes OULDRABAH

Devant le jury composé de :

N. OUKID	Maître de Conférences, U. de Blida1.	Présidente
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida1,	Directeur de Thèse
M. ABBAS	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
A. BERRACHEDI	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
M. CHELLALI,	Professeur, U. de Blida 1.	Examineur
N. IKHLEF-ESCHOUF	Maître de Conférences, U. de Médéa	Examineur

Blida, 15 octobre 2019

RÉSUMÉ

L'étude de cette thèse comprend trois parties:

Dans la première partie, de ce travail nous définissons une autre extension naturelle de la k -domination dans les graphes définie par Fink et Jacobson (1985), que nous appelons la k -domination dans les digraphes définie comme suit. Un sous-ensemble S de sommets d'un digraphe $D = (V, A)$ est un ensemble k -dominant si $|N^-(u) \cap S| \geq k$ pour chaque sommet u dans $V - S$. Le nombre de k -domination de D , noté $\gamma_k(D)$, est la cardinalité minimale d'un ensemble k -dominant dans D . Un $\gamma_k(D)$ -ensemble est un ensemble k -dominant de D avec une cardinalité $\gamma_k(D)$. Ce nouveau concept est une extension du concept de domination dans les digraphes donné par Lee (1994). Aussi nous présentons quelques bornes inférieures et supérieures pour $\gamma_k(D)$. En particulier $\gamma_k(D) \leq \frac{2kn}{2k+1}$ qui est une borne qui généralise $\gamma(D) \leq \frac{2n}{3}$ définie par Lee. En plus, nous caractérisons les digraphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la domination romaine dans les digraphes, notamment la borne supérieure $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$ donné par Kamaraj et Jakkammal en 2011 et la borne supérieure de type Nordhaus-Gaddum $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3$ donné par Chen, Hao et Xie en 2019. Dans cette partie nous caractérisons quelques classes spéciales de graphes orientés, satisfaisant $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. Aussi, nous caractérisons les digraphes D d'ordre $n \geq 1$ satisfaisant $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3$. Puis, nous prouvons que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est *Co-NP*-complet.

Dans la troisième partie de cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la domination romaine double dans les digraphes, notamment la borne supérieure $\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \Delta^+(D)) + 1$ et la borne supérieure de type Nordhaus-Gaddum $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3$ donné par Hao, Chen et Volkmann en 2019. Dans cette partie, nous caractérisons quelques classes spéciales de graphes orientés satisfaisant $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$. Aussi, nous caractérisons les digraphes D d'ordre $n \geq 1$ satisfaisant $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3$ est atteinte.

ABSTRACT

The study of this thesis is divided into three parts:

In the first part, we define another extension of k -domination in graphs given by Fink and Jacobson (1985), which we call it the k -in-domination or simply the k -domination in digraphs defined as follows. A subset S of vertices in a digraph $D = (V, A)$ is a k -dominating set if $|N^-(u) \cap S| \geq k$ for every vertex u in $V - S$. The k -domination number of D , denoted by $\gamma_k(D)$, is the minimum cardinality of a k -dominating set in D . A $\gamma_k(D)$ -set is a k -dominating set of D with cardinality $\gamma_k(D)$. This new concept is also an extension of the concept of domination in digraph given by Lee. And we will present some lower and upper bounds for $\gamma_k(D)$. Also, we will characterize digraphs achieving these bounds. In particular $\gamma_k(D) \leq \frac{2kn}{2k+1}$, it is the generalized bound $\gamma(D) \leq \frac{2n}{3}$ given by Lee (1994). The special case $k = 1$ mostly leads to well known classical results.

In the second part of this thesis, we characterize some special classes of oriented graphs, namely out-regular oriented graphs and tournaments satisfying $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. Moreover, we characterize digraphs D for which the equality $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3$ holds. Finally, we prove that the problem of deciding whether an oriented graph D $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ is $CO - NP$ -complete. In the third part of this thesis, we will give the exact values of the double Roman domination number for directed paths and directed cycles. Also, we give a descriptive characterization of k -out-regular digraphs with $1 \leq k \leq n - 1$ and tournaments, satisfying $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$. Moreover, we give a descriptive characterization of digraphs D of order $n \geq 4$ for which the equality of Nordhaus-Gaddum type $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3$ holds.

ملخص

في هذه الأطروحة ، نهتم أساساً بدراسة وسائط الهيمنة في الرسوم البيانية الموجهة والتي تنقسم إلى ثلاثة أجزاء

في الجزء الأول ، سنعطي امتداداً آخر لـ k -هيمنة في الرسوم البيانية (الغير موجهة) التي قدمها كلا من Fink و Jacobson والتي نسميها أيضاً k -هيمنة في الرسوم البيانية الموجهة والمعرفة على النحو التالي. لتكن S مجموعة فرعية من الرؤوس أو القمم الرسم الباني الموجه $D = (V, A)$. نسمي المجموعة S بمجموعة k -هيمنة على D إذا تحقق $|N^-(u) \cap S| \geq k$ من أجل كل رأس u في $V-S$. العدد k -هيمنة لـ D ، والذي يشار إليه بـ $\gamma_k(D)$ ، هو الحد الأدنى لأصل مجموعة k -هيمنة. نسمي $\gamma_k(D)$ -مجموعة ، المجموعة k -هيمنة على D التي أصلها $\gamma_k(D)$. هذا المفهوم الجديد هو امتداد لمفهوم الهيمنة في الرسم البياني الموجه الذي قدمه Lee. سنقدم أيضاً في هذا الجزء بعض الحدود الدنيا والعليا لـ $\gamma_k(D)$ ، وعلى وجه الخصوص $\gamma_k(D) \leq ((2kn) / (2k + 1))$ ، وهو الحد المعمم لـ $\gamma(D) \leq ((2n) / 3)$ الذي قدمه Lee ، وفي الأخير سوف نميز الرسومات البيانية الموجهة التي تحقق هذه الحدود. الحالة الخاصة $k = 1$ تؤدي عموماً إلى نتائج كلاسيكية معروفة.

في الجزء الثاني من هذه الأطروحة ، سنتطرق إلى مفهوم الهيمنة الرومانية في الرسوم البيانية الموجهة حيث سنقوم بشكل خاص بتمييز الفئات الخاصة من الرسوم البيانية الموجهة ، مثل الرسوم البيانية الموجهة بانتظام نحو الخارج والدورات والأشجار الموجهة والتي تحقق $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. علاوة على ذلك ، فإننا نميز الرسومات البيانية الموجهة D التي تحقق فيها مساواة Nordhaus-Gaddum ، $\gamma_R(D) + \gamma_R(\bar{D}) = n + 3$ ، وأخيراً ، نثبت أن مشكلة تحديد ما إذا كان الرسم البياني الموجه D يحقق $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ هي - CO NP كاملة.

في الجزء الثالث والأخير من هذه الأطروحة ، سنبدأ بإعطاء القيم الحقيقية سنتطرق إلى نوع آخر من الهيمنة الرومانية والتي تسمى الهيمنة الرومانية المزدوجة للبيانات الموجهة سنقوم بتمييز الفئات الخاصة من الرسوم البيانية الموجهة ، مثل الرسوم البيانية بانتظام نحو الخارج والدورات والأشجار الموجهة أيضاً ، سنعطي وصفاً للرسوم البيانية التي تحقق المساواة $\gamma_R(D) = 2(n - \Delta^+(D) + 1)$ علاوة على ذلك ، فإننا نميز الرسومات البيانية D التي تحقق فيها مساواة Nordhaus-Gaddum ، $\gamma_R(D) + \gamma_R(\bar{D}) = n + 3$.

REMERCEMENTS

Tout d'abord, je voudrais exprimer mes vifs remerciements et ma profonde reconnaissance à mon encadreur, Monsieur Mostafa Blidia, Professeur à l'Université de Blida 1, d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, ses encouragements depuis l'encadrement de mon Magister jusqu'à la réalisation de cette thèse de Doctorat. Ce fut un réel plaisir de travailler avec lui, et de découvrir le plaisir et la fierté d'obtenir mon premier résultat, publier mon premier article, présenter mes résultats devant des experts mondiaux et finalement découvrir le travail de chercheur.

Je voudrais bien évidemment remercier très sincèrement, Madame Oukid Nadia, Maître de conférence à l'Université de Blida 1, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier mes rapporteurs de thèse, les professeurs: Monsieur Abbas Moncef, Professeur à l'USTHB d'Alger, Monsieur Berrachedi Abdelhafid, Professeur à l'USTHB d'Alger', Monsieur Chellali Mustapha, Professeur à l'Université de Blida 1, ainsi que Monsieur Ikhlef-Eschouf Noureddine, Maître de conférence à l'Université de Médéa qui m'ont aidé à perfectionner ce manuscrit et qui m'ont honoré en acceptant d'être des membres de ce jury et examinateurs de ma thèse.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes amis et à ma famille qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

A tous merci, Lyes Ouldrabah.

A la mémoire de mon père.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

REMERCEMENTS

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION	10
CHAPITRE 1. DÉFINITIONS DE BASE ET NOTATIONS	13
1.1. Définitions et notations utilisées dans les digraphes	13
1.1.1. Digraphe, sommet, arc	13
1.1.2. Digraphe symétrique, digraphe asymétrique	15
1.1.3. Graphe orienté, Tournoi	15
1.1.4. Sous-digraphe, digraphe partiel	15
1.1.5. Complément d'un digraphe	15
1.1.6. Isomorphisme	16
1.1.7. Graphe sous-jacent (ou graphe associé)	16
1.1.8. Voisinage	17
1.1.9. Degré	17
1.1.10. Digraphe k -int-régulier, digraphe k -ext-régulier	18
1.1.11. Digraphe vide, digraphe complet	18
1.1.12. Digraphe <i>biparti</i> , digraphe complet <i>biparti</i>	19
1.1.13. Etoile orientée	19
1.1.14. <i>Chaîne orientée</i> , chemin, <i>cycle orienté</i> , circuit	20
1.1.15. Digraphe connexe, fortement connexe	20

1.1.16. Arbre orienté	20
CHAPITRE 2. ÉTAT DE L'ART	21
2.1. Introduction	21
2.2. La k -domination dans les graphes	25
2.3. Les fonctions de domination romaines	28
2.3.1. Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les graphes	30
2.3.2. Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les digraphes	32
2.4. Les fonctions de domination romaines doubles	32
2.4.1. Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les graphes	33
2.4.2. Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les digraphes	35
CHAPITRE 3. LA k-DOMINATION DANS LES DIGRAPHERS	36
3.1. Introduction	36
3.2. Bornes inférieures sur γ_k et les digraphes extrémaux	36
3.2.1. Digraphes avec $\gamma_k(D) = k$	37
3.2.2. Digraphes avec $\gamma_k(D) = n - \frac{m}{k}$	37
3.2.3. Digraphes avec $\gamma_k(D) = \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$	38
3.3. Bornes supérieures sur γ_k et les digraphes extrémaux	39
3.3.1. Digraphes avec $\gamma_k(D) = n - 1$	40
3.3.2. Digraphes avec $\gamma_k(D) = \frac{2k}{2k+1}n$	41
CHAPITRE 4. LA DOMINATION ROMAINE DANS LES DIGRAPHERS	44
4.1. Introduction	44
4.2. Graphes orientés ext-réguliers et tournois avec $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$	47
4.3. Arbre orienté \vec{T} avec $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$	50

4.4. Egalité de Nordhaus-Gaddum	58
4.5. \mathcal{NP} -Complétude avec $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$	62
CHAPITRE 5. LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE DANS LES DIGRAPHERS . . .	65
5.1. Introduction	65
5.2. Valeurs exactes de $\gamma_{dR}(\vec{P}_n)$ et $\gamma_{dR}(\vec{C}_n)$	66
5.3. Lemmes structurels	68
5.4. Arbres orientés avec $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$	69
5.5. Digraphes ext-réguliers avec $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$	74
5.6. Tournois avec $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$	76
5.7. Égalité de Nordhaus-Gaddum pour les Digraphes D avec $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3$	76
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	79

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1.	Un digraphe simple D	14
FIGURE 1.2.	Un digraphe D et son complémentaire \overline{D}	15
FIGURE 1.3.	Le graphe associé G au digraphe D	16
FIGURE 1.4.	$d_D^+(x) = N_D^+(x) = 5$ et $d_D^-(x) = N_D^-(x) = 3$	18
FIGURE 1.5.	Le digraphe complet symétrique $\overrightarrow{K_4^*}$ et le tournoi $\overrightarrow{T_7}$	19
FIGURE 1.6.	Une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,8}}$ d'ordre 9.	19
FIGURE 2.1.	Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$, $\alpha(G) = 4$	22
FIGURE 2.2.	Un exemple d'un digraphe D et son digraphe inverse D^*	23
FIGURE 2.3.	$\gamma_R(G) = 4$	30
FIGURE 2.4.	Un digraphe D avec $\gamma_R(D) = 5$	31
FIGURE 2.5.	Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G) = 6$	33
FIGURE 2.6.	Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D) = 7$	34
FIGURE 4.1.	Un arbre orienté avec $\gamma_R(D) < n - \Delta^+(D) + 1$	46
FIGURE 4.2.	Les tournois ext-réguliers T_3 , T_5 et RT_7	49
FIGURE 4.3.	(a) \overrightarrow{T} avec $z \notin X$. (b) \overrightarrow{T} avec $z \in X$	52
FIGURE 4.4.	Un exemple d'arbre orienté T qui appartient à \mathcal{F}_3 . Notez que R n'est pas vide et que l'ensemble Z doit être vide dans le cas où $ R = 1$	54
FIGURE 4.5.	Un digraphe 3-ext-régulier D et son complémentaire \overline{D}	60
FIGURE 4.6.	Le graphe orienté H_i	62
FIGURE 4.7.	Instnace $I = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$	63
FIGURE 5.1.	Digraphes avec $\Delta^+(\overrightarrow{T}) = 1$, $\Delta^-(\overrightarrow{T}) = 1$ et $\gamma_{dR}(D) = 2n - 1$	69
FIGURE 5.2.	Un exemple d'arbre orienté \overrightarrow{T} qui appartient à \mathcal{F}	72

INTRODUCTION

Historiquement, l'étude de la domination dans les graphes a été posé par Jaenisch [54] en 1862. Le problème est de trouver le nombre minimum des reines qui peuvent être placées sur un échiquier de sorte que chaque carré de l'échiquier est attaqué ou "dominé" par au moins l'une des reines. D'autres applications de la domination dans la théorie des graphes sont utilisées dans le domaine de la communication et la théorie des réseaux ainsi que le théorie du codage. De ce fait, l'étude de la domination dans les graphes a reçu beaucoup d'attention ces dernières années. La théorie de la domination dans les graphes a été formellement introduite par Berge [6] en 1958.

En 1962, Ore [58] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connu sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [22]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [35, 36] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années. En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson [31] ont introduit la k -domination dans les graphes qui est une généralisation de la domination dans les graphes.

En 1994, Lee [42] a introduit dans sa thèse de doctorat le concept de domination dans les digraphes, c'est une généralisation du concept de domination dans les graphes où chaque graphe ici est considéré comme étant un graphe associé (graphe sans orientations) à un digraphe symétrique. En 1998, Ghoshal, Lasker et Pillone, ont donné dans [33] quelques relations entre les paramètres de dominations et les invariants dans les digraphes. En 2002, Merz et D.J. Stewart [41] considèrent des relations de type Gallai.

Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous

ensembles S a au moins un voisin dans S . En 2004, Cockayne, Dreyer, S.M Hedetniemi, et S.T Hedetniemi ont introduit une nouvelle variante de la domination dans les graphes non orientés, appelée fonction de domination Romaine. En 2016, Beeler et al., ont introduit aussi une autre nouvelle variante, c'est la fonction dominante romaine double. En 2011, Kamaraaj et Jakkammal ont généralisé la définition de la fonction dominante romaine pour les digraphes, et certains résultats ont été donnés dans leur article notamment la borne supérieure pour $\gamma_R(D)$ à savoir $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$. En 2017, Guoliang Hao et al ont généralisé ainsi la nouvelle variante, la domination romaine double aux digraphes et ils ont donné la borne supérieure pour $\gamma_{dR}(D)$ à savoir $\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \Delta^+(D)) + 1$.

Dans cette thèse, on s'est intéressé à certains types de paramètres de domination dans les digraphes dans le but de trouver leurs valeurs exactes. Mais comme les valeurs exactes de ces paramètres sont difficiles à déterminer (problèmes *NP*-Complets), nous essayerons de trouver soit des bornes qui les encadrent le mieux possibles ou bien des relations entre ces paramètres qui nous fournissent des informations précises et supplémentaires sur ces paramètres. En effet on s'est intéressé principalement à l'étude de la k -domination dans les digraphes qui est bien évidemment une généralisation du concept de la k -domination dans les graphes en passant par deux types de généralisations: la généralisation naturelle de la domination dans les graphes à la domination dans les digraphes, puis la k -domination dans les digraphes. Aussi, on s'est intéressé à une autre variante de domination qui est la domination romaine dans les digraphes et qui généralise la domination romaine dans les graphes introduite par Cockayne et al. (2004) [17] et motivée par un article de Ian Steward dans *Scientific American*, intitulé "*Defend the Roman Empire!*" (1999) [72].

Le présent document est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Définitions de base et Notations

Dans ce chapitre, on rappelle toutes les définitions de base sur les digraphes nécessaires à la compréhension de cette thèse. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

Chapitre 2 : Etat de l'art

Dans ce chapitre, on aborde le thème de domination dans les graphes (non orientés)

et les digraphes en donnant un aperçu sur la k -domination, la domination romaine et la domination romaine double. On donne ainsi un recueil des principaux résultats existants.

Chapitre 3 : La k -domination dans les digraphes

On commence ce chapitre par présenter quelques bornes inférieures pour $\gamma_k(D)$ à savoir $\gamma_k(D) \geq k$ et $\gamma_k(D) \geq n - \frac{m}{k}$. Aussi, on donne une nouvelle borne inférieure pour le nombre de k -domination, $\gamma_k(D) \geq \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$ qui généralise la borne $\gamma(D) \geq \frac{n}{1 + \Delta^+(D)}$ fournie par Ghoshal et al. Ainsi on caractérise les digraphes atteignant ces bornes inférieures. Ensuite, on donne une nouvelle borne supérieure dans les digraphes pour le nombre de k -domination $\gamma_k(D)$ à savoir $\gamma_k(D) \leq \frac{2kn}{2k+1}$ qui généralise la borne $\gamma(D) \leq \frac{2n}{3}$ donnée par Lee en 1998. En plus, on caractérise les digraphes pour lesquels cette borne supérieure est atteinte.

Chapitre 4 : La domination Romaine dans les digraphes

Dans ce chapitre, nous étudions le concept de domination romaine dans les digraphes en donnant quelques digraphes extrémaux, à savoir les graphes orientés ext-réguliers, les tournois et les arbres orientés pour lesquels la borne supérieure de $\gamma_R(D)$ de la fonction dominante romaine $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$ est atteinte. Aussi, nous donnons les digraphes extrémaux D d'ordre $n \geq 1$ pour lesquels la borne $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3$ est atteinte. Enfin, nous prouvons que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est *Co-NP*-complet.

Chapitre 5 : La domination Romaine double dans les digraphes

Dans ce dernier chapitre, on étudie un autre type de domination romaine, c'est la domination romaine double dans les digraphes, nous commençons par donner des valeurs exactes du nombre de domination romaine double pour les chemins et les circuits. Aussi, nous caractérisons quelques classes spéciales de graphes orientés, à savoir les graphes orientés ext-réguliers, les tournois et les arbres orientés satisfaisants, $\gamma_{dR}(D) = 2n - 2\Delta^+(D) + 1$ et les digraphes D d'ordre $n \geq 1$ pour lesquels la borne $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3$ est atteinte.

Enfin on termine cette thèse par une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS DE BASE ET NOTATIONS

1.1 Définitions et notations utilisées dans les digraphes

1.1.1 Digraphe, sommet, arc

Un *digraphe* (ou graphe dirigé) $D = (V(D), A(D))$ est défini par l'ensemble fini non vide $V(D)$ (ou V) dont les éléments sont appelés *sommets*, et une partie $A(D)$ (ou A) des *paires ordonnées* $V \times V$ dont les éléments sont appelés *arcs* (ou arêtes orientées). L'ordre de D , noté par $n(D)$ (ou n) est la cardinalité de $V(D)$, $n(D) = |V(D)|$ et la taille de D noté par $m(D)$ (ou m) est la cardinalité de $A(D)$, $m(D) = |A(D)|$.

Nous utilisons les notations suivantes. Etant donné un digraphe $D = (V(D), A(D))$, considérons deux sommets distincts, disant x et y de D :

- $x \longrightarrow y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$;
- $x \not\rightarrow y$ signifie que $(x, y) \notin A(D)$;
- $x \mapsto y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$ et $(y, x) \notin A(D)$ et l'arc (x, y) est appelé *arc asymétrique*,
- $x \leftrightarrow y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$ et $(y, x) \in A(D)$, et l'arc (x, y) est appelé *arc symétrique*,
- $x \nleftrightarrow y$ signifie que $(x, y) \notin A(D)$ et $(y, x) \notin A(D)$ et que x et y ne sont pas *adjacents*,
- $x \longrightarrow x$ signifie que $(x, x) \in A(D)$ et l'arc $a = (x, x)$ est appelé *boucle*.

De même, étant données deux parties disjointes X et $Y \subset V$, et un élément $x \in V(D) \setminus Y$, nous utilisons aussi les notations suivantes:

- $x \longrightarrow Y$ signifie que $x \longrightarrow y$ pour tout $y \in Y$;
- $x \longmapsto Y$ signifie que $x \longmapsto y$ pour tout $y \in Y$;
- $Y \longrightarrow x$ signifie que $y \longrightarrow x$ pour tout $y \in Y$;
- $X \longrightarrow Y$ signifie que $x \longrightarrow Y$ pour tout $x \in X$;
- $X \longmapsto Y$ signifie que $x \longmapsto Y$ pour tout $x \in X$.

De plus, si $a = (x, y)$ est un arc de D , alors x et y sont alors appelés les "*extrémités*" de a . Ainsi,

- x est l' "*extrémité initiale*" de a ,
- y est l' "*extrémité terminale*" de a ,
- x est le "*prédécesseur*" de y ,
- y est le "*successeur*" de x .
- x et y sont reliés par a (ils sont *adjacents*).

Ainsi, deux arcs distincts $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ sont appelés arcs multiples si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$ (ont les mêmes extrémités initiales et finales). Un digraphe $D = (V, A)$ est dit digraphe simple s'il ne contient ni boucles ni arcs multiples. Tout au long de ce document, seuls les digraphes finis et simples sont pris en compte.

Exemple 1.1. Un digraphe simple D d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 11$ représenté par la Figure 1.1.

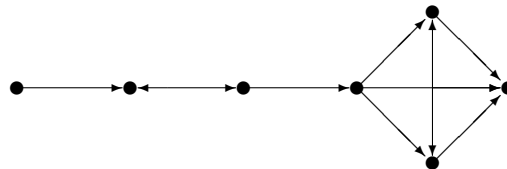


FIGURE 1.1. Un digraphe simple D .

1.1.2 Digraphe symétrique, digraphe asymétrique

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Alors D est appelé *digraphe symétrique* si tous ses arcs sont symétriques i.e., $\forall x, y \in V : (x, y) \in A \implies (y, x) \in A$, et est appelé *digraphe asymétrique* si tous ses arcs sont asymétriques i.e., $\forall x, y \in V : (x, y) \in A \implies (y, x) \notin A$.

1.1.3 Graphe orienté, Tournoi

Un *graphe orienté* est un digraphe asymétrique. Un tournoi $\vec{T}_n = (V; A)$ est un graphe orienté complet, i.e., est un digraphe tel que pour toute paire de sommets $x, y \in V$, on a $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$.

1.1.4 Sous-digraphe, digraphe partiel

Soit $D = (V, A)$ un digraphe simple. A chaque partie non vide $X \subseteq V$ est associé le *sous-digraphe* $D[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de D induit par X . Si $X = V$ et $B \subseteq A$, alors le digraphe $H = (V, B)$ est appelé *digraphe partiel* du digraphe D . Ainsi $D[V - X]$ est aussi noté $D - X$, et pour $x \in V$, $D - \{x\}$ est noté $D - x$.

1.1.5 Complément d'un digraphe

Le digraphe *complémentaire* d'un digraphe simple $D = (V, A)$ est un digraphe simple noté par $\bar{D} = (V, \bar{A})$ et tel que: $(u, v) \in \bar{A}$ si et seulement si $(u, v) \notin A; \forall u, v \in V$.

Exemple 1.2. La Figure 1.2 représente un digraphe D ainsi que son digraphe complémentaire \bar{D} .



FIGURE 1.2. Un digraphe D et son complémentaire \bar{D} .

1.1.6 Isomorphisme

Un *isomorphisme* f entre deux digraphes $D_1 = (V_1, A)$ et $D_2 = (V_2, A)$ est une bijection $f: V_1 \rightarrow V_2$ telle que $|V_1| = |V_2|$ et pour tout paire de sommets u, v de V_1 , (u, v) est un arc de D_1 si et seulement si $(f(u), f(v))$ est un arc de D_2 . Deux digraphes D_1 et D_2 sont dits *isomorphes* et on écrit $D_1 \cong D_2$ s'il existe un *isomorphisme* f entre eux.

1.1.7 Graphe sous-jacent (ou graphe associé)

Étant donné un digraphe simple $D = (V, A)$. Si on supprime l'*orientation* de ses arcs, on obtient un graphe non orienté $G = (V, E)$ telle que une arête $e = xy \in E$ reliant deux sommets x et y existe dans G si les deux sommets x et y sont adjacents dans D , i.e., au moins $(x, y) \in A$ ou $(y, x) \in A$ existe dans D (la disjonction "ou" n'est pas exclusive ici). De même un digraphe D peut être obtenu à partir d'un graphe simple G en assignant une direction (éventuellement les deux) à chaque arête de G . Nous disons que G est le graphe *sous-jacent* ou *associé* (*Underlying graph* en anglais) de D et que D est une orientation de G .

Remarque 1.3. *Le graphe G représenté par la Figure 1.3 est le graphe associé au digraphe D de la Figure 1.1. Comme le graphe G de cet exemple a 9 arêtes et chacune d'elles peut avoir 3 orientations possibles, alors le graphe G a 3^9 orientations possibles et D est l'une de ses orientations.*

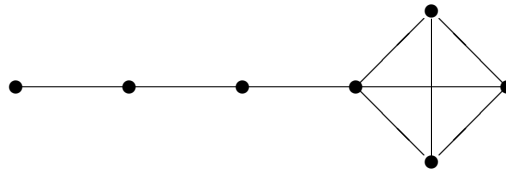


FIGURE 1.3. Le graphe associé G au digraphe D

Remarque 1.4. *Un graphe (non orienté) $G = (V, E)$ est considéré comme étant un graphe associé à un digraphe symétrique $D = (V, A)$ où toute arête de G est remplacée par un arc symétrique, on peut constater que tous les résultats de recherche obtenus sur*

les graphes (non orientés) G sont également considérés comme des résultats particuliers pour les digraphes et par conséquent on peut déduire que la notion de digraphes est plus générale que la notion de graphes (non orientés).

1.1.8 Voisinage

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et x un sommet de D et $S \subseteq V$. On désigne par $N_D^+(x)$ (respectivement, $N_D^-(x)$) l'ensemble des successeurs ou *voisinage extérieur* (respectivement, l'ensemble des prédécesseurs ou *voisinage intérieur*) du sommet x , c'est-à-dire $N_D^+(x) = \{y \in V - \{x\} : x \longrightarrow y\}$ (respectivement, $N_D^-(x) = \{y \in V - \{x\} : y \longrightarrow x\}$). Le voisinage extérieur (respectivement, intérieur) fermé du sommet x est l'ensemble, $N_D^+[x] = N_D^+(x) \cup \{x\}$ (respectivement, $N_D^-[x] = N_D^-(x) \cup \{x\}$). Le voisinage extérieur (respectivement, intérieur) de S est l'ensemble, $N_D^+(S) = \bigcup_{s \in S} N_D^+(s)$ (respectivement, $N_D^-(S) = \bigcup_{s \in S} N_D^-(s)$), de même $N_D^+[S] = \bigcup_{s \in S} N_D^+[s]$ et $N_D^-[S] = \bigcup_{s \in S} N_D^-[s]$. L'ensemble des voisins de x , est l'ensemble, $N_D(x) = N_D^+(x) \cup N_D^-(x)$. Le voisinage fermé de x est l'ensemble, $N_D[x] = N_D(x) \cup \{x\}$. L'ensembles des prédécesseurs (respectivement, successeurs) de x dans $D[S]$, est l'ensemble, $N_{D[S]}^-(x) = N_D^-(x) \cap S$ (respectivement, $N_{D[S]}^+(x) = N_D^+(x) \cap S$). Le *voisinage extérieur privé* de x par rapport à S noté par $opn[x, S]$ est l'ensemble, $opn[x, S] = N_D^+[x] - N_D^+[S - \{x\}]$.

1.1.9 Degré

Le demi-degré extérieur de x noté par $d_D^+(x)$, est le nombre d'arcs sortant de x , et on écrit $d_D^+(x) = |N_D^+(x)|$. Le demi-degré intérieur de x noté par $d_D^-(x)$, est le nombre d'arcs entrant dans x , et on écrit $d_D^-(x) = |N_D^-(x)|$.

Exemple 1.5. La Figure 1.4. représente un sommet x avec ses voisins $N_D^-(x)$ et $N_D^+(x)$.

On notera par $\Delta^+(D) = \max \{d_D^+(x), x \in V\}$ et $\Delta^-(D) = \max \{d_D^-(x), x \in V\}$, respectivement, le *degré maximum extérieur et intérieur* dans D . De même on notera par $\delta^+(D) = \min \{d_D^+(x), x \in V\}$ et $\delta^-(D) = \min \{d_D^-(x), x \in V\}$, respectivement, le *degré minimum extérieur et intérieur* dans D .

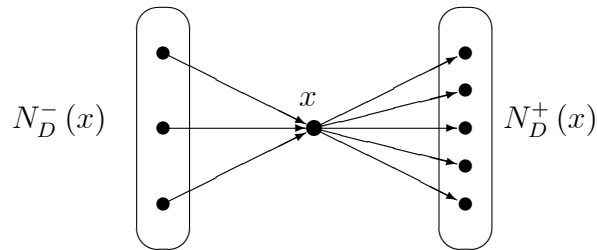


FIGURE 1.4. $d_D^+(x) = |N_D^+(x)| = 5$ et $d_D^-(x) = |N_D^-(x)| = 3$.

On a $|N_D(x)| = |N_D^+(x)| + |N_D^-(x)| - |N_D^+(x) \cap N_D^-(x)|$. Le degré total $d_D(x)$ du sommet x est défini par $d_D(x) = d_D^+(x) + d_D^-(x) \geq |N_D(x)|$. Si D est un graphe orienté alors, $d_D(x) = |N_D(x)|$. Ainsi, un sommet x de D est isolé lorsque $d_D(x) = 0$. Comme chaque arc a exactement un sommet d'arrivée (respectivement, un sommet de départ) on a $|A| = \sum_{x \in V} d_D^+(x)$ (respectivement, $|A| = \sum_{x \in V} d_D^-(x)$). On obtient donc les deux identités:

$$\sum_{x \in V} d_D^-(x) = \sum_{x \in V} d_D^+(x) \text{ et } \sum_{x \in V} d_D(x) = 2|A|.$$

Notation 1.6. *Tout au long de ce document, on doit garder les notations int-voisin et ext-voisin pour signifier respectivement le voisinage intérieur et le voisinage extérieur. Ainsi, int-degré et ext-degré pour dire respectivement le degré extérieur et degré intérieur.*

1.1.10 Digraphe k -int-régulier, digraphe k -ext-régulier

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $D = (V, A)$. Si pour tout sommet $v \in V$, $d_D^-(v) = k$ (resp., $d_D^+(v) = k$) alors D est appelé digraphe k -int-régulier (resp., k -ext-régulier).

1.1.11 Digraphe vide, digraphe complet

Etant donné un digraphe $D = (V, A)$. Si $\Delta^+(D) = 0$ alors D est dit *digraphe vide*. Tandis que si pour toute paire de sommets, disant, x et y de V avec $x \neq y$, $A \cap \{(x, y), (y, x)\} \neq \emptyset$, alors D est dit *digraphe complet* d'ordre n noté par \overrightarrow{K}_n .

Notation 1.7. *On note par \overrightarrow{K}_n^* le digraphe complet k -ext-régulier d'ordre n , avec $k + 1 \leq n \leq 2k + 1$. Si $n = k + 1$, alors $\overrightarrow{K}_{k+1}^*$ est le digraphe complet symétrique (ou digraphe*

($n - 1$)-ext-régulier), et si $n = 2k + 1$, alors $\overrightarrow{K_{2k+1}^*}$ est un tournoi k -ext-régulier \overrightarrow{T}_n d'ordre $n \geq 3$. Noter que le graphe complet K_n et le graphe associé à \overrightarrow{K}_n , \overrightarrow{T}_n et \overrightarrow{K}_n^* .

Exemple 1.8. Pour $k = 3$, nous voyons dans la Figure 1.5 le digraphe 3-ext-régulier \overrightarrow{K}_4^* d'ordre $n = k + 1 = 4$ et le tournoi 3-ext-régulier \overrightarrow{T}_7 d'ordre $n = 2k + 1 = 7$.

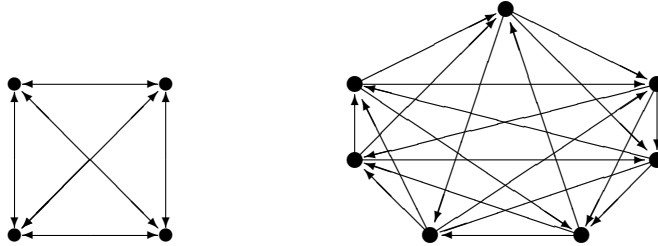


FIGURE 1.5. Le digraphe complet symétrique \overrightarrow{K}_4^* et le tournoi \overrightarrow{T}_7 .

1.1.12 Digraphe biparti, digraphe complet biparti

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et S un sous-ensemble de V . S est dit *stable* (ou *indépendant*) si ses sommets ne sont pas deux à deux adjacents. D est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles stables.

1.1.13 Etoile orientée

Une étoile orientée d'ordre n , est un *digraphe biparti complet* k -ext-semi régulier $\overrightarrow{K_{1,n-1}^*}$.

Exemple 1.9. Une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,8}}$ d'ordre 9 est représentée par la Figure 1.6.

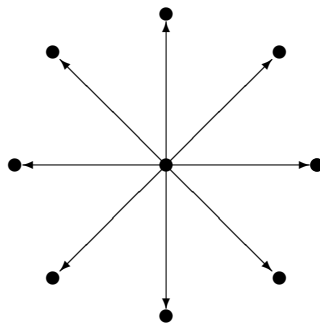


FIGURE 1.6. Une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,8}}$ d'ordre 9.

1.1.14 Chaîne orientée, chemin, cycle orienté, circuit

Une *chaîne orientée* $P_n = (V, A)$ d'ordre n , est une suite de sommets distincts x_1, x_2, \dots, x_n tels que pour tout $1 \leq i \leq n - 1, \{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_i)\} \cap A \neq \emptyset$. Un *cycle orienté* C_n est une chaîne orientée fermée $C_n = P_n \cup \{(x_1, x_n), (x_n, x_1)\}$. Un *chemin* $\vec{P}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'ordre n , est une suite de sommets reliés par des arcs consécutifs, i.e., $(x_i, x_{i+1}) \in A(\vec{P}_n)$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$. Un *circuit* $\vec{C}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ d'ordre n , est un chemin fermé ($\vec{C}_n = \vec{P}_n \cup (x_n, v_1)$). Noter que, le circuit \vec{C}_2 d'ordre 2, est un sous-digraphe induit par deux sommets reliés par un arc symétrique.

1.1.15 Digraphe connexe, fortement connexe

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. On définit sur V les relations d'équivalences \mathcal{C} et \mathcal{F} de la façon suivante.

Connexité. Pour tous $x, y \in V$, $x\mathcal{C}y$ si $x = y$ ou s'il existe une suite de sommets $x = x_1, x_2, \dots, x_k = y$ de D , telle que pour tout $i \in \{1, \dots, k - 1\}$; $A \cap \{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_i)\} \neq \emptyset$. Les classes d'équivalence de \mathcal{C} sont appelées les composantes connexes de D . Le nombre des composantes connexes de D est noté $c(D)$. Le digraphe D est connexe lorsque $c(D) = 1$. Un sommet x de D est isolé lorsque $\{x\}$ est une composante connexe de D .

Forte connexité. Pour tous $x, y \in V$, $x\mathcal{F}y$ si $x = y$ ou $x \neq y$ et il existe deux suites $x = x_0, \dots, x_m = y$ et $y = y_0, \dots, y_n = x$ d'éléments de V telles que pour tout $i \in \{0, \dots, m - 1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$ et pour tout $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, $(y_j, y_{j+1}) \in A$. Les classes d'équivalences de \mathcal{F} sont appelées les composantes fortement connexes de D .

1.1.16 Arbre orienté

Un *arbre orienté* $\vec{T} = (V, A)$ (*Directed tree* en anglais) est un graphe orienté connexe sans cycle orienté. Il contient exactement $(n - 1)$ arcs.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART

2.1 Introduction

Dominer des sommets d'un graphe c'est choisir un sous-ensemble de sommets tel que tout sommet qui se trouve à l'extérieure du graphe a au moins un voisin dans cet ensemble. Cet ensemble est appelé ensemble dominant. Cette notion de domination dans les graphes a été introduite par Berge (1958) [6] et puis par Ore (1962) [58]. Nous commençons cette section par donner la définition de la domination dans les graphes.

Définition 2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G , noté $\gamma(G)$, est appelé nombre de domination. Un $\gamma(G)$ -ensemble est un ensemble dominant de G de cardinalité $\gamma(G)$. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$ -ensembles.*

Une autre notion est apparue dans la théorie des graphes avant la notion de domination, c'est la notion d'indépendance (*stabilité*).

Définition 2.2. *Un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe G est appelé indépendant (ou stable) s'il n'existe pas deux sommets adjacents dans S . Un ensemble indépendant S est dit indépendant maximal si aucun indépendant de V ne le contient.*

Cette notion est reliée à celle de la domination par le fait qu'un stable maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant. Le nombre d'indépendance, $\alpha(G)$, est égal à la cardinalité maximale d'un ensemble maximal indépendant dans G . Un ensemble indépendant de cardinalité $\alpha(G)$ est appelé $\alpha(G)$ -ensemble.

Exemple 2.3. *Pour le graphe G de la Figure 2.1, on a $\gamma(G) = 2$ et $\alpha(G) = 4$. L'ensemble $\{x_1, x_2\}$ est un $\gamma(G)$ -ensemble et l'ensemble $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ est un $\alpha(G)$ -ensemble.*

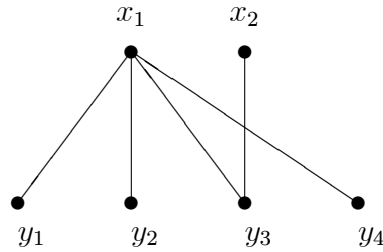


FIGURE 2.1. Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$, $\alpha(G) = 4$.

En 1975, Cockayne et al. [15] ont construit le premier algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination $\gamma(T)$ pour tout arbre T . Johnson (1975) [34] était le premier qui a montré que le problème de détermination du nombre $\gamma(G)$ pour un graphe arbitraire G est NP -complet. La domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi (1977) [22]. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP -Complet (Voir [12, 45, 47]). En outre, Dewdney (1981) [27], Chang et Nemhauser (1984) [55], Bertossi (1984) [13], indépendamment, ont montré que le problème reste NP -complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. Booth et Johnson (1982) [12] ont montré que le problème reste aussi NP -complet pour les graphes triangulés.

En 1994, Lee [42] a introduit, dans sa thèse de doctorat le concept de domination dans les digraphes, qui est une généralisation du concept de domination dans les graphes, où un graphe (non orienté) peut être vu comme un graphe sous-jacent d'un digraphe symétrique.

Définition 2.4. [42] Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé dominant dans D , s'il existe pour chaque sommet $v \in V - S$ un sommet $u \in S$ pour lequel $(u, v) \in A$. La cardinalité minimale d'un ensemble dominant dans D s'appelle le nombre de domination de D , noté $\gamma(D)$. Un $\gamma(D)$ -ensemble est un ensemble dominant de D de cardinalité $\gamma(D)$.

Définition 2.5. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé indépendant si $\Delta^+(D[S]) = 0$. Un ensemble indépendant est maximal s'il n'y a pas d'ensemble indépendant qui le contient. Le nombre d'indépendance, $\alpha(D)$, est égal à la cardinalité maximale d'un ensemble maximal

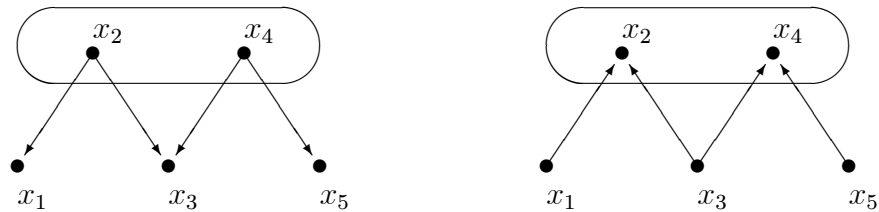
indépendant dans D . Un ensemble indépendant de cardinalité $\alpha(D)$ est appelé $\alpha(D)$ -ensemble.

Exemple 2.6. Pour le digraphe D représenté par la Figure 1.1, on a $\gamma(D) = \alpha(D) = 3$.

Définition 2.7. Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ dans un digraphe $D = (V, A)$ est appelé un ensemble absorbant si, à chaque sommet $v \in V - S$, il existe un sommet $u \in S$ tel que $(v, u) \in A$. C'est-à-dire, S est un ensemble dominant dans le digraphe inverse $D^* = (V, A^*)$, où $A^* = \{(u, v) : (v, u) \in A\}$.

Définition 2.8. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un noyau de D si S est indépendant et absorbant et S est une solution de D si S est indépendant et dominant.

Exemple 2.9. Dans la Figure 2.2, l'ensemble $S = \{x_2, x_4\}$ est une solution de D . Par contre, le même ensemble S forme un noyau dans le digraphe inverse D^* .



D
FIGURE 2.2. Un exemple d'un digraphe D et son digraphe inverse D^* .

La domination dans les graphes a été étudiée de manière approfondie et bien plus que les digraphes, environ 90% des articles sur la domination ne prennent en compte que les graphes. Quelques résultats connus sur la domination dans les digraphes donnés par Ghosal et al. (1998) [33], peuvent être trouvés aussi dans l'ouvrage de Teraza Haynes et al. (1998) [35, 36], mais la plupart de ces résultats sont consacrés à l'étude du concept des noyaux et de la domination dans les tournois. D'autre part, et pour diverses raisons, il y a eu relativement peu de recherches impliquant la domination dans les digraphes. La raison fondamentale est que les graphes (non orientés) forment une classe spéciale de digraphes (digraphes symétriques) et par conséquent tous les problèmes posés dans les digraphes sont des problèmes plus difficiles vu leur aspect combinatoire dans le domaine de la théorie des graphes contrairement aux problèmes posés dans les graphes (non orientés). Une autre

raison est que, dans un graphe G , tout ensemble maximal indépendant est également un ensemble dominant, et donc $\gamma(G) \leq \alpha(G)$. Cependant, cette inégalité n'est pas toujours vraie pour les digraphes, comme on peut le voir pour le circuit C_3 ; $\gamma(C_3) = 2 > 1 = \alpha(C_3)$. Donc, un ensemble S de sommets de V est une solution (dominant et stable) dans un digraphe D si et seulement si S est un noyau dans son dual digraphe D^* . Le problème de décision lié à l'existence d'une solution et d'un noyau dans un digraphe est connu pour être NP -complet, voir [29, 34].

Dans l'étude des paramètres de domination, les chercheurs s'intéressent souvent à déterminer les valeurs de ces paramètres soit de façon exacte, grâce à des relations directes en fonction de quelques invariants de base tels que l'ordre du graphe, degré maximum du graphe ...etc ou bien à trouver des algorithmes polynomiaux. Cependant, pour un graphe orienté quelconque, la détermination de la plupart de ces paramètres est un problème NP -complet. De ce fait, et en l'absence des valeurs exactes pour ces paramètres, on est contraint à chercher des bornes supérieures et inférieures qui encadrent le plus possibles ces paramètres. Évidemment, la borne qui sera atteinte sera acceptable et souvent il est difficile de l'améliorer.

Nous citons quelques bornes et formules de Gallai-type en fonction de quelques invariants dans les digraphes.

Théorème 2.10. [56] *Pour tout digraphe D avec n sommets, on a :*

$$\frac{n}{1 + \Delta^+(D)} \leq \gamma(D) \leq n - \Delta^+(D).$$

En 1994, Lee [42] a établi, dans la classe de digraphes fortement connexes, une borne supérieure pour le nombre de domination orienté $\gamma(D)$.

Théorème 2.11. [42] *Pour un digraphe D fortement connexe avec n sommets, on a*

$$\gamma(D) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

En 2002, Merz et Stewart [41] ont établi des bornes supérieures pour le paramètre $\gamma(D)$, à savoir $\gamma(D) + \Delta^+(D) \leq n$, ils ont donné aussi les classes des graphes orientés pour lesquelles la formule de Gallai-type $\gamma(D) + \Delta^+(D) = n$ est vérifiée.

Théorème 2.12. [41] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors $\gamma(D) + \Delta^+(D) \leq n$.*

Théorème 2.13. [41] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe de n sommets avec $\Delta^+(D) = 1$. Alors $\gamma(D) + \Delta^+(D) = n$ si et seulement si pour tout sommet x de V tel que $d_D^+(x) = 1$, $V - N_D^+[x]$ est un ensemble stable.*

En 2007, Volkman, et al. [65] ont publié un article sur la domination dans les digraphes. Dans cet article, ils ont défini et étudié pour la première fois la domination totale, la domination connexe où les nombres de domination totale et de domination connexe sont respectivement $\gamma_t(D)$ et $\gamma_c(D)$ et ils ont fournis les deux bornes suivantes $\gamma_t(D) + \Delta^+(D) \leq n$ et $\gamma_c(D) \leq 2\beta_1(D) - 1$ où $\beta_1(D)$ est la cardinalité d'un couplage maximum. (Un couplage (en anglais matching) d'un graphe G est un ensemble d'arêtes de ce graphe qui n'ont pas de sommets en commun. Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Si D une telle orientation de G , alors $\beta_1(D) = \beta_1(G)$).

Théorème 2.14. [65] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe avec $\delta^-(D) > 0$. Alors $\gamma_t(D) + \Delta^+(D) \leq n + 1$.*

Théorème 2.15. [65] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe connexe d'ordre n avec $\delta^-(D) > 0$. Si $\Delta^+(D) \leq n - 2$, alors $\gamma_t(D) + \Delta^+(D) \leq n$.*

Théorème 2.16. [65] *Pour tout graphe connexe G , il existe une orientation D telle que $\gamma_c(D) \leq 2\beta_1(D) - 1$.*

En 2010, Blidia et Ouldrabah [7], ont établi une nouvelle borne supérieure pour $\gamma(D)$.

Théorème 2.17. [7] *Pour tout digraphe D avec n sommets, on a: $\gamma(D) \leq n - \beta_1(D)$*

2.2 La k-domination dans les graphes

En 1985, Fink et Jacobson ont donné dans [31, 32] un autre type de généralisation du concept de domination dans les graphes. Dans leur article, ils ont défini le concept de k -domination dans les graphes comme suit. Étant donné un entier positif k et un graphe

$G = (V, E)$. Un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble k -dominant si chaque sommet dans $V(G) - S$ est adjacent à au moins k sommets de S . La cardinalité minimale d'un ensemble k -dominant de G est le nombre de k -domination de G , noté $\gamma_k(G)$. Lorsque $k = 1$, la 1-domination est la domination classique, $\gamma_1(G) = \gamma(G)$.

En 1989, Jacobson et Peters [39] ont montré que la détermination de $\gamma_k(G)$ pour un graphe arbitraire G est NP -complet et ont donné des algorithmes linéaires dans les arbres. En 1994, Bean et al. [9] ont montré que le problème reste NP -complet dans les graphes bipartis et les graphes triangulés pour la détermination de $\gamma_k(G)$. De ce fait, de nombreux chercheurs ont déterminé des bornes supérieures et inférieures efficaces en termes de calcul pour ce paramètre. Comme pour la domination, la k -domination a également fait l'objet de nombreuses études, pour les résultats sur la k -domination, nous renvoyons le lecteur au Survey de Chellali et al.(2012) [14].

Nous citons quelque bornes pour ce paramètre $\gamma_k(G)$ dans les graphes.

Théorème 2.18. [31] *Pour tout graphe G avec n sommets et m arêtes et pour tout entier positif $k \leq \Delta(G)$, on a :*

$$\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k} \quad \text{et} \quad \gamma_k(G) \geq \frac{kn}{\Delta + k}.$$

Théorème 2.19. [18] *Si G est un graphe d'ordre n , de degré minimum $\delta(G)$ et k un entier avec $k \leq \delta(G)$, alors on a :*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{k + 1}.$$

En 2017, Ramoul et Blidia [64] ont généralisé le concept de la k -domination dans les graphes non orientés à la k -ext-domination dans les digraphes. Dans leur document, ils ont donné la définition suivante de la k -ext-domination dans les digraphes.

Définition 2.20. *Soit $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif, un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé un ensemble k -ext-absorbant de D si $|N_D^+(u) \cap S| \geq k$, pour tout sommet $u \in V - S$. Et ils ont utilisé cette définition pour définir le concept de k -noyau.*

Dans notre thèse, on s'intéresse en premier lieu au paramètre $\gamma_k(D)$ dans les digraphes. On définit une nouvelle généralisation de la k -domination dans les digraphes, qu'on appelle la k -int-domination ou simplement la k -domination dans les digraphes définie comme suit:

Définition 2.21. Soient $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un k -dominant si tout sommet de $V - S$ a au moins k prédécesseurs dans S . Autrement dit un sous-ensemble S de sommets de V est un ensemble k -dominant si $|N_D^-(u) \cap S| \geq k$ pour tout sommet u de $V - S$.

Définition 2.22. Soient $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif. Un k -dominant, $S \subseteq V$ est minimal si pour tout sommet $x \in S$, $S - \{x\}$ n'est pas un k -dominant.

Définition 2.23. Soient D un digraphe et k un entier positif. Le nombre k -domination de D , noté $\gamma_k(D)$, est la cardinalité minimale d'un ensemble k -dominant. Un $\gamma_k(D)$ -ensemble de D est un ensemble k -dominant avec cardinalité $\gamma_k(D)$.

À notre connaissance, aucune étude n'a été faite pour ce paramètre de domination. Notons que ce nouveau concept (k -domination) est également une extension du concept de domination dans les digraphes donné par Lee [42].

Pour les graphes non orientés, Fink et Jacobson [31] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble k -dominant soit minimal.

Théorème 2.24. [31] Soit S un ensemble k -dominant d'un graphe G . Alors S est minimal si et seulement si pour tout sommet $v \in S$,

1. soit v a moins de k voisins dans S , ou bien
2. il existe un sommet $u \in N_G(v) \cap (V - S)$ tel que $|N_G(u) \cap S| = k$.

Comme nous l'avons déjà mentionné, on peut généraliser ce résultat pour n'importe quel digraphe D .

Théorème 2.25. Soit S un ensemble k -dominant d'un digraphe D . Alors S est minimal si et seulement si pour tout sommet $v \in S$,

1. v a moins k prédécesseurs dans S , ou
2. il existe un sommet $u \in N_D^+(v) \cap (V - S)$ tel que $|N_D^-(u) \cap S| = k$.

De ce qui précède, nous avons les propriétés générales suivantes. Pour un entier positif k , il est facile de voir que:

1. $\gamma_k(D) \geq k$ pour tout digraphe D ayant un degré maximum $\Delta^-(D) \geq k$, et que chaque sommet de degré au plus de $k - 1$ appartient à tout k -dominant ensemble de D .
2. Tout ensemble $(k + 1)$ -dominant est un ensemble k -dominant et donc $\gamma_k(D) \leq \gamma_{k+1}(D)$ ce qui donne la chaîne d'inégalités suivante:

$$\gamma(D) = \gamma_1(D) \leq \gamma_2(D) \leq \dots \leq \gamma_{\Delta^-(D)}(D) < \gamma_{\Delta^-(D)+1}(D) = n.$$

On en déduit alors le résultat suivant:

Observation 2.26. *Soit D un digraphe d'ordre n , $\gamma_k(D) \leq n$. Évidemment, $\gamma_k(D) = n$ si et seulement si $\Delta^-(D) \leq k - 1$. Donc, si D est un digraphe avec $\Delta^-(D) \geq k$, alors*

$$k \leq \gamma_k(D) \leq n - 1.$$

Dans le chapitre 3, on va présenter quelques bornes inférieures et supérieures pour $\gamma_k(D)$. Aussi, nous caractérisons les digraphes atteignant ces deux bornes. Le cas particulier $k = 1$ conduit généralement à des résultats classiques bien connus.

2.3 Les fonctions de domination romaines

L'étude initiale de la domination romaine était motivée par les stratégies de défense utilisées pour défendre l'empire romain sous le règne de l'empereur Constantin 1er, de 272 à 337 ap. Il décréta que pour toutes les villes de l'empire romain, une légion ou deux légions devaient être stationnées dans chaque ville, et si un lieu ne comportant aucune légion était attaqué, il devait alors se situer à proximité d'au moins une ville dans laquelle deux légions étaient stationnées, afin qu'une des deux légions puisse être envoyée pour défendre la ville attaquée. Cette partie de l'histoire de l'Empire romain a donné naissance au concept mathématique de domination romaine, défini et discuté à l'origine par un article de Steward dans Scientific American, intitulé "Defend the Roman Empire!" [72] en 1999, puis

développé par Cockayne et al. [17] en 2004, Il s'agissait donc de sécuriser toutes les villes de l'empire romain par un nombre minimum de légions. Ceci peut être modélisé comme suit:

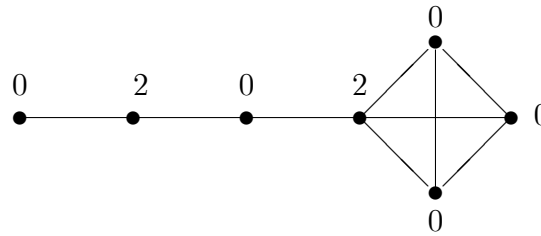
Soit $G = (V, E)$ un graphe dont un sommet de G représente une ville dans l'empire romain. Soit $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ une fonction. Une ville (sommet v) est considérée non-sécurisée si elle n'a aucune légion ($f(v) = 0$) et elle est sécurisée sinon ($f(v) \in \{1, 2\}$). Une ville non-sécurisée (sommet u) peut être sécurisée par l'envoi d'une légion d'une ville v voisine (sommet adjacent). Cependant, l'empereur Constantine, décréta que toute ville qui n'a pas de légion pour la sécuriser ($f(u) = 0$) doit être voisine à au moins une autre ville qui a deux légions ($f(v) = 2$). Si la 1^{ère} serait attaquée, alors la 2^{ème} pourrait déployer une légion pour la protéger sans qu'elle devient vulnérable elle même. De cette manière, l'empereur Constantine pouvait défendre tout l'empire romain. Vu que le maintien d'une légion à une ville coûte chère, alors l'objectif de l'empereur est de minimiser le nombre total de légions nécessaires pour protéger tout l'empire.

Définition 2.27. [17] Une fonction de domination romaine (RDF) sur un graphe G est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin dans V_2 . Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonnée de V induite par f , où $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$, pour $i = 0, 1, 2$. Notons qu'il existe un 1-1 correspondance entre la fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2) de V . On écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2)$. Le poids d'une FDR est la valeur

$$w(f) = f(V) = \sum_{u \in V} f(u) = |V_1| + 2|V_2|.$$

Le poids minimum de f est appelé le *nombre de domination romaine* de G , noté $\gamma_R(G)$, $\gamma_R(G) = \min \{w(f) : f \text{ est une FDR}\}$. Cockayne et al. [17] ont donné des relations entre le nombre de domination romaine et le nombre de domination d'un graphe G , $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$.

Exemple 2.28. La fonction de domination romaine $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ pour le graphe G donnée par la Figure 2.3, est de poids minimum $\gamma_R(G) = 4$.

FIGURE 2.3. $\gamma_R(G) = 4$.

Le concept de domination romaine dans les graphes est largement étudié dans la littérature, au moins 200 articles ont été publiés sur divers aspects de la domination romaine dans les graphes notamment: la domination romaine, la domination romaine indépendante et faible domination romaine, pour plus de détail voir ([16, 17, 30, 44, 51, 70, 71, 73, 74]).

2.3.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les graphes

Nous citons ici quelques résultats existant pour le paramètre $\gamma_R(G)$. Rappelons que la chaîne P_n d'ordre n est le graphe associé d'une chaîne orientée d'ordre n , idem pour le cycle C_n d'ordre n .

Proposition 2.29. [17] Si G est une chaîne P_n ou un cycle C_n , alors $\gamma_R(G) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Proposition 2.30. [16] Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, alors on a

$$\gamma_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1.$$

Il semble assez naturel de généraliser ce concept aux digraphes. A cet effet, nous nous sommes intéressés dans les deux derniers chapitres de cette thèse aux problèmes de la domination romaine et la domination romaine double dans les digraphes. Ce problème a été défini et étudié pour la première fois en 2011 par Kamaraj et Jakkammal [40] où ils ont étendu le concept de la domination romaine dans les graphes aux digraphes.

Définition 2.31. [40] Une fonction de domination romaine (FDR) sur un digraphe $D = (V, A)$ est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ telle que chaque sommet u pour lequel $f(u) = 0$ est un successeur de certains sommets v pour lequel $f(v) = 2$. Le poids d'une fonction dominante romaine est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum d'une fonction

de domination romaine sur un digraphe D est appelé le nombre de domination romaine de D , noté $\gamma_R(D)$. Soit (V_0, V_1, V_2) la partition ordonnée de V induite par f , où $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$, pour $i = 0, 1, 2$. Notons qu'il existe une correspondance 1-1 entre la fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2) de V . Ainsi, nous allons écrire $f = (V_0, V_1, V_2)$. Le poids de f est

$$f(V) = \sum_{v \in V} f(v) = |V_1| + 2|V_2|,$$

et on dit qu'une fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ est une γ_R -fonction s'il s'agit d'une FDR avec $f(V) = \gamma_R(D)$.

Exemple 2.32. La fonction de domination romaine $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ donnée par la Figure 2.4, est de poids 5.

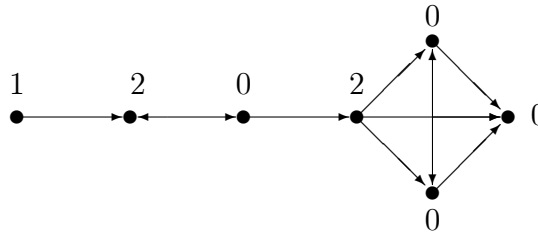


FIGURE 2.4. Un digraphe D avec $\gamma_R(D) = 5$.

Rappelons que dans les graphes, Dreyer [26] (dans le cadre de sa thèse de doctorat, 2000) a construit un algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination romaine pour tout arbre. En outre, en 2006, Schnupp [52] a montré que le problème de détermination du nombre $\gamma_R(G)$ pour un graphe arbitraire est NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis, graphes scindés ou graphes planaires. Par conséquent, vu que la classe des graphes est une sous classe des digraphes (digraphes symétriques), alors le problème de détermination de $\gamma_R(D)$ dans les digraphes reste NP-complet.

Il est à souligner qu'il y a très peu de travaux sur les paramètres de domination dans les digraphes, notamment le paramètre $\gamma_R(D)$. Kamaraj et Jakkammal [40] ont étendu l'idée de la domination romaine aux digraphes et certains résultats ont été donnés dans leur article [40], tels que la borne supérieure, $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$. Dans [21], Hao et Chen ont établi une borne supérieure pour l'inégalité de type Nordhaus - Gaddum

$\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3$. Dans ce document, nous caractérisons certaines classes de graphes orientés, à savoir graphes orientés et tournois satisfaisant $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. De plus, nous caractérisons les digraphes D pour lesquels l'égalité $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3$ est vraie. Finalement, nous montrons que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est *CO-NP*-complet.

2.3.2 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les digraphes

Les résultats suivants sont dûs à Kamaraj et Jakkammal [40].

Proposition 2.33. [40] *Si D est un digraphe d'ordre n , avec ext-degré maximum $\Delta^+(D)$, alors $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$.*

Proposition 2.34. [40] *Si D est un digraphe d'ordre n , alors $\gamma_R(D) < n$ si et seulement si $\Delta^+(D) \geq 2$.*

Proposition 2.35. [40] *Si T est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(T) = n$ si et seulement si $\Delta^+(T) = 1$.*

Chen, Hao and Xie [21] ont donné la relation de type Nordhaus-Gaddum suivante.

Théorème 2.36. [21] *Soit D un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3.$$

2.4 Les fonctions de domination romaines doubles

En 2016, Beeler et al. [10] ont initié l'étude des fonctions de domination romaines doubles pour les graphes, et ils ont défini ce nouveau concept comme suit:

Définition 2.37. [10] *Une fonction de domination romaine double (FDRD) d'un graphe G est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ telle que:*

1. si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins deux voisins dans V_2 ou un voisin dans V_3 .

2. si $f(v) = 1$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin dans $V_2 \cup V_3$.

Le poids d'une *FDRD* est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le *nombre de domination romaine double* de G , noté $\gamma_{dR}(G)$.

Exemple 2.38. La fonction de domination romaine double $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ donnée par la Figure 2.5, est de poids 6.

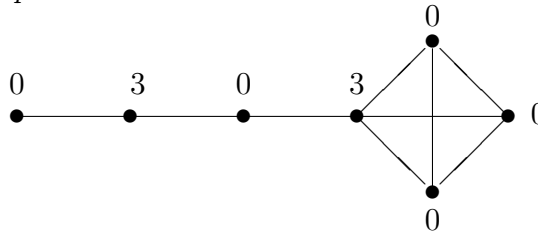


FIGURE 2.5. Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G) = 6$.

Dans [5], les auteurs ont montré que le problème de décision associé à γ_{dR} est *NP*-complet, même pour les graphes bipartis et triangulés. Ils ont également caractérisé les graphes pour les petites valeurs de γ_{dR} . Dans [69], les auteurs ont présenté un algorithme linéaire qui détermine la valeur de ce paramètre dans les arbres. De plus, ils ont donné une caractérisation des arbres T avec $2\gamma(T) + 1 = \gamma_{dR}(T)$ et $\gamma_{dR}(T) + 1 = 2\gamma_{dR}(T)$. Des résultats supplémentaires sur les graphes concernant la domination romaine double sont disponibles dans [1, 4, 2, 66, 67, 69].

2.4.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les graphes

Nous citons ici quelques résultats existant pour le paramètre $\gamma_{dR}(G)$.

Proposition 2.39. [10] Pour une fonction de domination romaine double de poids $\gamma_{dR}(G)$, aucun sommet n'a besoin d'avoir la valeur 1.

Proposition 2.40. [10] Pour tout graphe G , $\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G)$.

Corollaire 2.41. [10] Pour tout graphe G non trivial connexe, $\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G) < 2\gamma_R(G)$.

Théorème 2.42. [10] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{dR}(G) \leq 5n/4$.

Théorème 2.43. [75] Pour tout graphe G d'ordre n ,

$$\gamma_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1.$$

Dans la suite, on s'intéresse à la notion de la domination romaine double dans les digraphes. Rappelons que ce concept a été défini et introduit par Hao et al. [38].

Définition 2.44. [38] Une fonction de domination romaine double (FDRD) d'un digraphe D est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ telle que chaque sommet u pour lequel $f(u) = 0$ a un int-voisin (prédécesseur) v pour lequel $f(v) = 3$ ou au moins deux int-voisins assignés 2 sous f , tandis que si $f(u) = 1$, alors le sommet u doit avoir au moins un int-voisin assigné 2 ou 3. Soit (V_0, V_1, V_2, V_3) une partition ordonnée de V induite par f , où pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$. A noter qu'il existe un 1-1 correspondance entre la fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2, V_3) de V . On écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$. Le poids d'une FDRD est la valeur

$$w(f) = f(V) = \sum_{u \in V} f(u) = |V_1| + 2|V_2| + 3|V_3|.$$

Le poids minimum d'une FDRD d'un digraphe D est appelé le nombre de domination Romaine Double de D , et est noté $\gamma_{dR}(D)$. On dit que f est une $\gamma_{dR}(D)$ -fonction si f est une FDRD de D et $w(f) = \gamma_{dR}(D)$.

Exemple 2.45. Un digraphe D d'ordre $n = 7$ avec $\gamma_{dR}(D) = 7$ représenté par la Figure 2.6.

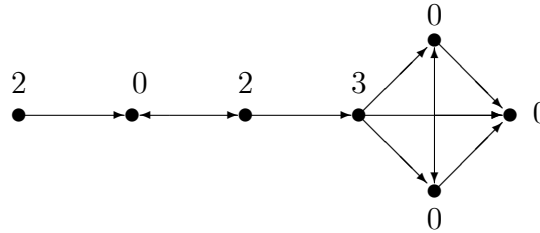


FIGURE 2.6. Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D) = 7$.

2.4.2 Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les digraphes

Nous donnons ici quelques résultats obtenus par Hao et al [21] et qui seront utiles dans le dernier chapitre de ce document.

Théorème 2.46. [21] *Si D est un digraphe d'ordre n . Alors $\gamma_{dR}(D) \leq 2n$ avec égalité si et seulement si $\Delta^+(D) = 0$.*

Proposition 2.47. [21] *Pour tout digraphe D , il existe une $\gamma_{dR}(D)$ -fonction telle que la valeur 1 ne doit pas être affectée à aucun sommet de D .*

Théorème 2.48. [21] *Pour tout digraphe D d'ordre n ,*

$$\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \Delta^+(D)) + 1. \quad (2.1)$$

Théorème 2.49. [21] *Pour tout digraphe D d'ordre $n \geq 4$,*

$$\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3. \quad (2.2)$$

CHAPITRE 3

LA k -DOMINATION DANS LES DIGRAPHES

3.1 Introduction

L'étude de ce chapitre est divisée en deux sections, dans la première section, nous donnons quelques bornes inférieures pour $\gamma_k(D)$. En particulier $\gamma_k(D) \geq \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$ qui est une généralisation de $\gamma(D) \geq \frac{n}{1 + \Delta^+(D)}$ donnée par Ghoshal et al. (1998) [33]. Aussi nous caractérisons les digraphes atteignant ces bornes. Dans la deuxième section, nous donnons quelques bornes supérieures. En particulier $\gamma_k(D) \leq \frac{2kn}{2k+1}$ qui est une généralisation de la borne de Lee [43] ($\gamma(D) \leq \frac{2n}{3}$). En plus, nous caractérisons les digraphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont publiés dans la revue (*Journal of Combinatorial Optimization*) [59].

3.2 Bornes inférieures sur γ_k et les digraphes extrémaux

Dans cette section, nous présentons des bornes inférieures sur le nombre de domination $\gamma_k(D)$. En outre, nous caractérisons les digraphes atteignant ces bornes. Le cas particulier $k = 1$ conduit le plus souvent à des résultats classiques connus. Nous rappelons le résultat suivant:

Observation 3.1. *Si D est un digraphe d'ordre n alors $\gamma_k(D) \leq n$, et $\gamma_k(D) = n$ si et seulement si $\Delta^-(D) \leq k - 1$.*

Donc, si D est un digraphe avec $\Delta^-(D) \geq k$, alors

$$k \leq \gamma_k(D) \leq n - 1. \tag{3.1}$$

Nous commençons par donner les digraphes extrémaux pour lesquels $\gamma_k(D) = k$.

3.2.1 Digraphes avec $\gamma_k(D) = k$

On note $\overrightarrow{K}_{p,q}^*$ le graphe biparti complet orienté avec une bipartition X et Y tels que $|X| = p$, $|Y| = q$ et $d_D^-(y) = p$ pour tout $y \in Y$.

Proposition 3.2. [59] *Soient $D = (V, A)$ un digraphe d'ordre n , $k \geq 1$ un entier positif et $\Delta^-(D) \geq k$. Alors, $\gamma_k(D) = k$ si et seulement si D contient $\overrightarrow{K}_{k,n-k}^*$ comme digraphe partiel.*

Preuve. Nécessité. Supposons que $\gamma_k(D) = k$ et que S soit un $\gamma_k(D)$ -ensemble de D , donc chaque sommet de $V - S$ a exactement k voisins dans S . Soient $X = S$, $Y = V - S$ et $A[X, Y] = \{(u, v) \in A : u \in X \text{ et } v \in Y\}$, il est clair que le digraphe partiel $(X \cup Y, A[X, Y])$ est un graphe orienté biparti complet $\overrightarrow{K}_{k,n-k}^*$ avec une bipartition X, Y et $|X| = |S| = k$, $|Y| = |V - S| = n - k$.

Suffisance. Si D contient $\overrightarrow{K}_{k,n-k}^*$ comme digraphe partiel, alors $\overrightarrow{K}_{k,n-k}^*$ a une bipartition X et Y telle que $|X| = k$, $|Y| = n - k$ et $d_D^-(y) = k$ pour chaque sommet $y \in Y$. Donc X est un ensemble k -dominant. De plus, $\gamma_k(D) \leq \gamma_k(\overrightarrow{K}_{k,n-k}^*) \leq |X| \leq k$, et puisque $\gamma_k(D) \geq k$, on obtient $\gamma_k(D) = k$. \square

Nous donnons maintenant une deuxième borne inférieure pour $\gamma_k(D)$ en fonction de n, m, k , ainsi les digraphes extrémaux pour lesquels cette borne est atteinte.

3.2.2 Digraphes avec $\gamma_k(D) = n - \frac{m}{k}$

Théorème 3.3. *Soient $D = (V, A)$ un digraphe ayant n sommets, m arcs et ext-degré maximum $\Delta^+(D) \geq k$ avec $n \geq 1$, $m \geq 0$, et $k \geq 1$ alors*

$$\gamma_k(D) \geq n - \frac{m}{k}$$

avec égalité si et seulement si D est un digraphe biparti k -int-semi-régulier.

Preuve. Soit S un $\gamma_k(D)$ -ensemble. Posons $X = S$ et $Y = V - S$. Le nombre $m(X, Y)$ d'arcs de X à Y satisfait:

$$m(X, Y) \geq k|Y|.$$

On peut déduire que le nombre m d'arcs dans D satisfait $m \geq m(X, Y) \geq k|Y| = k(n - \gamma_k(D))$. D'où $\gamma_k(D) \geq n - \frac{m}{k}$.

Si $\gamma_k(D) = n - \frac{m}{k}$, alors $m = k(n - \gamma_k(D)) = k|Y|$, et donc tous les arcs de D sont entre X et Y . D'où X et Y sont des ensembles indépendants et chaque sommet de Y a in-degré k , ce qui implique que D est un digraphe biparti k -int-semi-régulier.

Réciproquement, supposons que D est un digraphe biparti k -int-semi-régulier avec les parties X et Y tels que chaque sommet de Y a int-degré k . Alors X est un ensemble k -dominant dans D . Puisque $m = k|Y| = k(n - |X|)$, il s'ensuit que $|X| = n - \frac{m}{k}$. En utilisant le fait que $|X| \geq \gamma_k(D) \geq n - \frac{m}{k}$, on déduit l'égalité désirée. \square

3.2.3 Digraphes avec $\gamma_k(D) = \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$

Nous donnons maintenant une borne inférieure sur $\gamma_k(D)$ en fonction de n , k et $\Delta^+(D)$, qui généralise la borne $\gamma(D) \geq \frac{n}{1 + \Delta^+(D)}$ donnée par Ghoshal et al. [33], et qui aussi améliore la borne inférieure dans la chaîne d'inégalités en (3.1), quand $\Delta^+(D) < n - k$. Ainsi, nous donnons une caractérisation descriptive pour les digraphes atteignant cette borne.

Théorème 3.4. [59] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe de n sommets d'ext-degré maximum $\Delta^+(D) \geq k$. Alors*

$$\gamma_k(D) \geq \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$$

avec égalité si et seulement si $V = X \cup Y$, où X est indépendant, chaque sommet de X est d'ext-degré $\Delta^+(D)$ et chaque sommet de Y a exactement k int-voisins dans X .

Preuve. Nous montrons d'abord la borne inférieure. Soit S un $\gamma_k(D)$ -ensemble. Le nombre $m(S, V - S)$ d'arcs de S à $V - S$ vérifie $k|V - S| \leq m(S, V - S) \leq \Delta^+(D)|S|$. Donc $|S| \geq \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$, et la borne est prouvée.

Supposons maintenant que $\gamma_k(D) = \frac{kn}{\Delta^+(D)+k}$. Alors, nous avons l'égalité tout au long de la chaîne d'inégalité précédente. Il est clair que chaque sommet de S a $\Delta^+(D)$ ext-voisins dans $V - S$, et donc l'ensemble S est indépendant et chaque sommet de $V - S$ a exactement k int-voisins dans S .

Inversement, il est facile de voir que si D est l'un des digraphes décrits ci-dessus, alors chaque sommet de X a exactement $\Delta^+(D)$ ext-voisins dans Y et chaque sommet de Y a exactement k int-voisins dans X . Ainsi X est un ensemble k -dominant de D et $|V - X|k = |Y|k = m(X, Y) = \Delta^+(D)|X|$, et donc $\gamma_k(D) \leq |X| = \frac{kn}{\Delta^+(D)+k}$. L'égalité vient du fait que $\gamma_k(D) \geq \frac{kn}{\Delta^+(D)+k}$. \square

Corollaire 3.5. (Ghoshal et al.[33]) *Pour tout digraphe D de n sommets et d'ext-degré maximum $\Delta^+(D)$, $\gamma(D) \geq \frac{n}{1 + \Delta^+(D)}$.*

Pour $k = \Delta^-(D)$, nous avons le résultat suivant:

Corollaire 3.6. [59] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe d'ordre n avec ext-degré maximum $\Delta^+(D)$ et int-degré maximum $\Delta^-(D)$. Alors $\gamma_{\Delta^-(D)}(D) = \frac{\Delta^-(D)n}{\Delta^-(D) + \Delta^+(D)}$ si et seulement si D est un digraphe biparti avec $V = X \cup Y$, tel que chaque sommet de X a un ext-degré $\Delta^+(D)$ et chaque sommet de Y a un in-degré $\Delta^-(D)$.*

3.3 Bornes supérieures sur γ_k et les digraphes extrémaux

Dans cette section, nous considérons des bornes supérieures sur $\gamma_k(D)$. On note X_k l'ensemble des sommets ont int-degré au moins k , c'est-à-dire

$$X_k = \{x \in V : d_D^-(x) \geq k\} \quad \text{et} \quad Y_k = \{x \in V : d_D^-(x) = k\}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$. Rappelons qu'un digraphe complet d'ordre n est un digraphe dont son graphe associé est le graphe complet K_n . On commence cette section par ces deux observations :

Observation 3.7. [59] *Soit k un entier positif, et soit $T_n = (V, A)$ un tournoi k -int-régulier d'ordre n . Alors $n = 2k + 1$.*

Preuve. Soit $T_n = (V, A)$ un tournoi k -int-régulier d'ordre n . Alors,

$$kn = |A| = \sum_{v \in V} d_{T_n}^-(v) = \frac{n(n-1)}{2},$$

ce qui implique que $n = 2k + 1$. \square

Observation 3.8. [59] Soit k un entier positif, et soit $T_n = (V, A)$ un tournoi k -int-régulier d'ordre n . Alors $\gamma_k(T_n) = 2k$.

Nous donnons une caractérisation des digraphes D avec $\gamma_k(D) = n - 1$.

3.3.1 Digraphes avec $\gamma_k(D) = n - 1$

Théorème 3.9. [59] Soit $D = (V, A)$ un digraphe d'ordre n avec $\Delta^-(D) \geq k$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\gamma_k(D) = n - 1$ si et seulement si $|X_{k+1}| \leq 1$, $D[X_k]$ est un digraphe complet et si $X_{k+1} = \{y\}$ alors $y \rightarrow Y_k$.

Preuve. Si $|X_{k+1}| \geq 2$, alors X_{k+1} a deux sommets disant, x et y tels que $V - \{x, y\}$ est un ensemble k -dominant de D , une contradiction.

Supposons maintenant que le graphe associé de $D[X_k]$ ne soit pas un graphe complet. Cela signifie qu'il existe deux sommets de $D[X_k]$, disant x et y qui ne sont pas adjacents. Il est clair que $V - \{x, y\}$ est aussi un ensemble k -dominant de D , d'où on a une contradiction. Supposons enfin que $X_{k+1} = \{v\}$ et qu'il existe au moins un sommet u dans Y_k tel que $(v, u) \notin A$. Alors $V - \{u, v\}$ est un ensemble k -dominant de D , encore une fois nous obtenons une contradiction.

Pour la condition suffisante, supposons au contraire que $\gamma_k(D) \neq n - 1$. Soit S un γ_k -ensemble de D . Comme $\Delta^-(D) \geq k$, la borne supérieure dans la chaîne d'inégalités en (3.1) donne $\gamma_k(D) \leq n - 2$, ce qui implique que $V - S$ a au moins deux sommets, disant x, y . Si x et y sont dans Y_k , alors on obtient une contradiction avec le fait que $D[X_k]$ est un digraphe complet. Comme $|X_{k+1}| \leq 1$, on doit avoir $x \in Y_k$ et $y \in X_{k+1}$ ou $x \in X_{k+1}$ et $y \in Y_k$. Sans perte de généralité, supposons que $X_{k+1} = \{y\}$. Donc, $(y, x) \notin A$, ce qui donne une contradiction avec le fait que $y \Rightarrow Y_k$. \square

Corollaire 3.10. Soit D un digraphe r -in-régulier d'ordre $n \geq 2$ avec $r \geq k$. Alors, $\gamma_k(D) = n - 1$ si et seulement si D est un digraphe complet k -int-régulier.

Preuve. Si $\gamma_k(D) = n - 1$, alors d'après le Théorème 3.9, $r = k$ car $|X_{k+1}| \leq 1$. Donc, D est un digraphe complet k -int-régulier. L'inverse est évident puisque nous ne pouvons pas avoir un ensemble k -dominant, S avec $|S| \leq n - 2$. \square

Corollaire 3.11. *Soit D un graphe orienté d'ordre n avec $\delta^- \geq k$ et $k \geq 1$. Alors $\gamma_k(D) = n - 1$ si et seulement si D est un tournoi T_n k -int-régulier d'ordre $n = 2k + 1$.*

3.3.2 Digraphes avec $\gamma_k(D) = \frac{2k}{2k+1}n$

Dans cette sous-section, nous généralisons le résultat de Lee [43] en donnant une borne supérieure pour $\gamma_k(D)$ dans les digraphes D avec $\delta^-(D) \geq k$ à savoir, $\gamma_k(D) \leq \frac{2k}{2k+1}n$, puis nous donnerons une caractérisation descriptive pour lesquels cette borne est atteinte. Le théorème suivant donné par Caro [19] et Wei [68] pour les graphes simples sera utile pour notre résultat.

Théorème 3.12. [19, 68] *Si $G = (V, E)$ est un graphe d'ordre n , alors*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_G(v) + 1}. \quad (3.2)$$

avec égalité si et seulement si chaque composante connexe de G est un graphe complet.

Théorème 3.13. [59] *Soit D un digraphe d'ordre n avec $\delta^-(D) \geq k$ et $k \geq 1$ un entier positif. Alors,*

$$\gamma_k(D) \leq \frac{2k}{2k+1}n.$$

De plus la borne est atteinte si et seulement si D est l'union disjointe de copies de tournois k -int-réguliers d'ordre $2k + 1$.

Preuve. Soit D un digraphe d'ordre n avec $\delta^-(D) \geq k$, où k est un entier positif. Soit $H = (V, B)$ un digraphe partiel de D de degré minimum k défini comme suit: tant qu'il existe un sommet v dans V de int-degré au moins $k + 1$, nous supprimons un arc incident à v . Finalement, nous obtenons, $d_D^-(v) = k$ pour tout $v \in V(H)$ et par conséquent H est un digraphe k -int-régulier. Maintenant, soit $G = (V, E)$ le graphe associé de H . D'après le Théorème 3.12 et l'inégalité de Jensen on a:

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_G(v) + 1} \geq \frac{n^2}{\sum_{v \in V} (d_G(v) + 1)}. \quad (3.3)$$

Puisque $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$ et $|E| \leq |B| = kn$,

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{2|E| + n} \geq \frac{n^2}{2|B| + n} = \frac{n}{2k + 1}. \quad (3.4)$$

Soit I un $\alpha(H)$ -ensemble. Alors chaque sommet de I a k int-voisins dans $V - I$, et donc $V - I$ est un ensemble k -dominant de H . De plus, comme $\alpha(G) = \alpha(H)$, et puisque la suppression d'un arc ne diminue pas le nombre de k -domination de D , i.e., $\gamma_k(D) \leq \gamma_k(H)$.

Par conséquent

$$\gamma_k(D) \leq \gamma_k(H) \leq |V - I| = n - \alpha(G) \leq \frac{2kn}{2k+1}. \quad (3.5)$$

Maintenant supposons que D est formé par l'union disjointe de p copies de tournois k -int-réguliers T_r^i d'ordre $r = 2k + 1$ pour $i = 1, \dots, p$. Alors d'après les Observations 3.7 et 3.8, on a $n = (2k + 1)p$ et $\gamma_k(T_r^i) = r - 1 = 2k$ pour $i = 1, \dots, p$. Par conséquent,

$$\gamma_k(D) = p\gamma_k(T_{2k+1}) = 2kp = \frac{2kn}{2k+1}.$$

Pour la condition nécessaire, si $\gamma_k(D) = \frac{2k}{2k+1}n$, alors nous avons l'égalité dans (3.3), (3.4) et (3.5). En particulier,

$$|E| = |B| \text{ et } \alpha(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_G(v) + 1}. \quad (3.6)$$

La première égalité de (3.6) implique que H est un graphe orienté. D'après le Théorème 3.12 et la deuxième égalité de (3.6) implique que G a $\alpha(G) = \alpha$ composantes connexes, dont chacune est un graphe complet. Par conséquent, H est un graphe orienté k -int-régulier, et chaque composante de H , est un tournoi k -int-régulier T_r^j , pour $j = 1, \dots, \alpha$. D'après les Observations 3.7 et 3.8, on a $r = 2k + 1 \geq 3$ et $\gamma_k(T_{2k+1}^j) = 2k$, pour $j = 1, \dots, \alpha$, respectivement. Maintenant pour terminer la preuve du théorème 3.13, nous montrons que H est exactement D , i.e., $A = B$. Pour se faire, supposons au contraire que D a au moins un arc, disant, (y, x) tel que $(y, x) \in A$ et $(y, x) \notin B$. Sans perte de généralité, supposons que x est dans $V(T_{2k+1}^1)$ et y peut être dans $V(T_{2k+1}^1)$ ou non. Puisque T_{2k+1}^1 est un tournoi k -int-régulier d'ordre au moins trois, x a au moins un int-voisin, disant, $z \neq y$ dans $V(T_{2k+1}^1)$ (notons que dans le cas où $y \in V(T_{2k+1}^1)$, (y, x) est un arc symétrique de D). Ainsi, nous pouvons construire un ensemble k -dominant de D en prenant $V(T_{2k+1}^1) - \{x, z\}$ et $2k$ sommets de chaque T_{2k+1}^j pour $j = 2, \dots, \alpha$, parmi eux y . Puisque $n = (2k + 1)\alpha$, on a,

$$\gamma_k(D) \leq (2k - 1) + 2k(\alpha - 1) < \frac{2kn}{2k + 1},$$

d'où on a une contradiction avec le fait que $\gamma_k(D) = \frac{2k}{2k+1}n$, ce qui complète la preuve du Théorème 3.13. \square

Remarque 3.14. [59] Pour les graphes non orientés G d'ordre n avec $\delta(G) \geq k$ et k un entier positif, la borne, $\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{k+1}$ donné par Cockayne, Gambel et Shepherd dans [18], n'est vraie que si G est le graphe associé d'un digraphe symétrique D . Cependant, cette inégalité n'est pas vraie pour tout digraphe D avec $\delta^-(D) \geq k$. Considérons par exemple le tournoi k -int-régulier T_n d'ordre $n = 2k + 1$. On a: $\gamma_k(T_n) = 2k = \frac{2kn}{2k+1} > \frac{kn}{k+1}$.

Pour le cas $k = 1$, nous avons le résultat de Lee [43].

Corollaire 3.15. [43] Soit D un digraphe d'ordre n et d'int-degré minimum $\delta^-(D) \geq 1$. Alors,

$$\gamma(D) \leq \frac{2n}{3},$$

avec égalité si et seulement si D est l'union disjointe de copies de C_3 .

CHAPITRE 4

LA DOMINATION ROMAINE DANS LES DIGRAPHES

4.1 Introduction

Nous rappelons ici quelques résultats connus sur le paramètre de domination romaine $\gamma_R(D)$ dans les digraphes D et qui seront utiles dans la suite.

Proposition 4.1. [40] *Si D est un digraphe d'ordre n , avec ext-degré maximum $\Delta^+(D) \geq 1$, alors*

$$\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1 \quad (4.1)$$

Proposition 4.2. [53] *Si D est un digraphe d'ordre n , alors $\gamma_R(D) < n$ si et seulement si $\Delta^+(D) \geq 2$.*

Proposition 4.3. [53] *Si T est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(T) = n$ si et seulement si $\Delta^+(T) = 1$.*

Proposition 4.4. [21] *Si D est un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3 \quad (4.2)$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse principalement à la caractérisation descriptive de certaines classes de digraphes extrémaux à savoir les graphes orientés ext-réguliers, les tournois et les arbres orientés atteignant la borne supérieure en (4.1). Ensuite, nous donnons les digraphes extrémaux pour lesquels la borne supérieure de la relation de type Nordhaus- Gaddum, en (4.2) est atteinte. Enfin, nous prouvons que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est Co-*NP*-complet.

Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de deux articles, un article publié dans la revue (*Journal of Combinatorial Optimization*) [60], et l'autre article soumis dans la revue (*Electronic Journal of Graph Theory and Applications*) [63].

Notation 4.5. Soit D un digraphe, on note $X_{\Delta^+(D)}$ l'ensemble de tous les sommets de D ayant ext-degré maximum $\Delta^+(D) \geq 1$, c'est-à-dire $X_{\Delta^+(D)} = \{x \in V : d_D^+(x) = \Delta^+(D)\}$ et pour tout sommet $x \in X_{\Delta^+(D)}$, $\overline{N_D^+[x]} = V - N_D^+[x]$ et $Z_x = N_D^+(N_D^+(x)) \cap \overline{N_D^+[x]}$.

Nous commençons ce chapitre par donner les conditions nécessaires pour les digraphes D atteignant la borne supérieure en (4.1) et qui seront très importantes tout au long de ce chapitre.

Observation 4.6. [60] Soit D un digraphe d'ext-degré maximum $\Delta^+(D) \geq 1$, $x \in X_{\Delta^+(D)}$ et $y \in N_D^+(x)$. Si $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ alors

1. $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1$,
2. $\left| N_D^+(y) \cap \overline{N_D^+[x]} \right| \leq 2$,
3. $|Z_x| \leq 2\Delta^+(D) - 1$.

Preuve. Si $\gamma_R(D) = n$, alors $\Delta^+(D) = 1$, et les trois conditions nécessaires sont vérifiées. Si $\gamma_R(D) < n$, alors $\Delta^+(D) \geq 2$. Raisonnons par l'absurde et supposons au contraire que l'une de ces trois conditions n'est pas vérifiée:

1. Si la condition 1 n'est pas vérifiée. Donc il existe au moins un sommet z dans $\overline{N_D^+[x]}$ tel que $\left| N_D^+(z) \cap \overline{N_D^+[x]} \right| \geq 2$. La fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, où

$$V_1 = V - \left(N_D^+[x] \cup \left(N_D^+[z] \cap \overline{N_D^+[x]} \right) \right) \text{ et } V_2 = \{x, z\},$$

est une *FDR* de D avec $w(f) = |V_1| + 2|V_2| \leq n - \Delta^+(D)$, d'où on a une contradiction.

2. Si la condition 2 n'est pas vérifiée. Donc il existe au moins un sommet y dans $N_D^+(x)$ tel que $\left| N_D^+(y) \cap \overline{N_D^+[x]} \right| \geq 3$. La fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, où

$$V_1 = V - \left(N_D^+[x] \cup \left(N_D^+(y) \cap \overline{N_D^+[x]} \right) \right) \text{ et } V_2 = \{x, y\},$$

est une *FDR* de D , donc $w(f) = |V_1| + 2|V_2| \leq n - \Delta^+(D)$, d'où on a une contradiction.

3. Si la condition 3 n'est pas vérifiée. D'après la condition 2, il est évident que $|Z_x| \leq 2\Delta^+(D)$. Supposons que $|Z_x| = 2\Delta^+(D)$. La fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, où

$$V_1 = V - \left(N_D^+(x) \cup Z_x \right) \text{ et } V_2 = N_D^+(x),$$

est une *FRD* de D avec $w(f) = |V_1| + 2|V_2| = n - \Delta^+(D)$, d'où on a une contradiction. \square

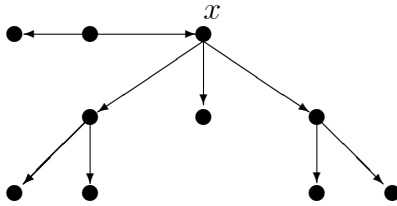


FIGURE 4.1. Un arbre orienté avec $\gamma_R(D) < n - \Delta^+(D) + 1$.

Nous notons que les trois conditions nécessaires données dans l'Observation 4.6 ne sont pas suffisantes comme le montre le graphe orienté D présenté dans la Figure 4.1. On a $\gamma_R(D) = 7 < n - \Delta^+(D) + 1 = 8$.

Observation 4.7. [60] Soit D un digraphe avec ext-degré minimum $\delta^+(D) \geq 2$. Si $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$, alors D est un digraphe connexe.

Preuve. Soit $x \in X_{\Delta^+(D)}$. Puisque $\delta^+(D) \geq 2$, il résulte de l'Observation 4.6 que chaque sommet de $\overline{N_D^+[x]}$ a au moins un ext-voisin dans $N_D^+[x]$ ce qui implique que D est un digraphe connexe. \square

Maintenant, pour $1 \leq \Delta^+(D) \leq 2$, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour les digraphes D atteignant la borne supérieure en (4.1).

Proposition 4.8. [60] Soit D un digraphe avec $1 \leq \Delta^+(D) \leq 2$. Alors $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ si et seulement si $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1$ pour chaque $x \in X_{\Delta^+(D)}$.

Preuve. Supposons que $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. Clairement, par l'Observation 4.6 que, $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1$ pour tout $x \in X_{\Delta^+(D)}$.

Inversement, si $\Delta^+(D) = 1$, alors par la Proposition 4.2, $\gamma_R(D) = n = n - \Delta^+(D) + 1$. Maintenant supposons que $\Delta^+(D) = 2$ et $\gamma_R(D) < n - \Delta^+(D) + 1$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(D)$ -fonction. Donc

$$|V_1| + 2|V_2| = \gamma_R(D) < n - \Delta^+(D) + 1 = |V_0| + |V_1| + |V_2| - 1.$$

ce qui donne, $|V_2| \leq |V_0| - 2$. Puisque V_2 domine V_0 , V_2 contient au moins deux sommets x, y tels que $|N_D^+(x) \cap V_0| = |N_D^+(y) \cap V_0| = 2$ et $N_D^+[x] \cap N_D^+[y] = \emptyset$, on conclut que $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) > 1$, d'où on a une contradiction. \square

4.2 Graphes orientés ext-réguliers et tournois

avec $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$

Dans la suite, nous donnerons la structure des graphes orientés k -ext-réguliers D et tournois satisfaisant $\gamma_R(D) = n - k + 1$, où $k \geq 1$.

En utilisant l'Observation 4.6, on peut déduire le résultat suivant qui est important pour la suite.

Proposition 4.9. [60] *Soit D un graphe orienté k -ext-régulier avec $\gamma_R(D) = n - k + 1$. Alors $1 \leq k \leq 3$.*

Preuve. Il est clair que $k \geq 1$, sinon $\gamma_R(D) = n + 1$. Maintenant, soit $x \in V$, par l'Observation 4.6, chaque sommet y de $N_D^+(x)$ a au plus deux ext-voisins dans $\overline{N_D^+[x]}$. Ceci implique que y a au moins $k - 2$ ext-voisins dans $N_D^+(x)$. Il est clair que le sous-graphe orienté induit par $N_D^+[x]$ a au plus $\frac{k(k+1)}{2}$ arcs. Alors

$$\frac{k(k+1)}{2} \geq \sum_{y \in N_D^+[x]} d_D^+(y) = d_D^+(x) + \sum_{y \in N_D^+(x)} d_D^+(y) \geq k + (k-2)k,$$

ce qui donne $k \leq 3$. □

Pour $k = 1$, on not par \mathcal{F}_1 la famille de tous les graphes orientés 1-ext-réguliers D d'ordre n , où chaque composante de D n'a qu'un seul circuit d'ordre au moins 3.

Pour $k = 2$, on note par \mathcal{F}_2 la famille de tous les graphes orientés 2-ext-réguliers D satisfaisant $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1$ pour tout $x \in V$.

Pour $k = 3$ dans les lemmes structuraux suivants, D sera un 3-ext-régulier avec $\gamma_R(D) = n - 2$, x un sommet quelconque de D , et on note par $Z_x = N_D^+(N_D^+(x)) \cap \overline{N_D^+[x]}$. Rappelons que le tournoi rotatif (*rotational tournament* en anglais) RT_7 a pour l'ensemble de sommets $V(RT_7) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et un arc $i \rightarrow j$ si $j - i \equiv 1, 2$ ou $4 \pmod{7}$ (voir la Figure 4.2).

Lemme 4.10. [60] $|N_D^-(y) \cap N_D^+[x]| \leq 2$, pour tout sommet y dans Z_x .

Preuve. Supposons au contraire qu'il existe $y \in Z_x$ tel que $|N_D^-(y) \cap N_D^+[x]| \geq 3$. Alors y a au plus un ext-voisin dans $N_D^+[x]$, cela signifie que le sommet y a au moins deux ext-voisins dans $\overline{N_D^+[x]}$, une contradiction avec l'Observation 4.6. □

Lemme 4.11. [60] $D [N_D^+(x)] \cong \vec{C}_3$.

Preuve. Il en suit de l'Observation 4.6, et le fait que D est un graphe orienté 3-ext-régulier, $|N_D^+(y) \cap Z_x| \leq 2$ et $|N_D^+(y) \cap N_D^+(x)| \leq 2$ pour tout sommet y dans $N_D^+(x)$, ce qui implique que $|N_D^+(y) \cap N_D^+(x)| = 1$ pour tout sommet y dans $N_D^+(x)$. Il est facile de voir que $D [N_D^+(x)]$ est un circuit d'ordre 3, i.e., $D [N_D^+(x)] \cong \vec{C}_3$. \square

Lemme 4.12. [60] $D [N_D^+[x] \cup Z_x] \cong RT_7$.

Preuve. Soit $N_D^+(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$. Vu du Lemme 4.11, on a $\langle N_D^+(x) \rangle$ est un circuit et $|N_D^+(y_i) \cap Z_x| = 2$ pour $1 \leq i \leq 3$, donc $|Z_x| \geq 2$. Si $|Z_x| = 2$, alors il est facile de voir que chaque sommet dans Z_x a exactement trois int-voisins dans $N_D^+(x)$, d'où on a une contradiction avec le Lemme 4.10, donc $|Z_x| \geq 3$. Maintenant, sans perte de généralité on peut supposer que $D [N_D^+(x)] = (y_1, y_2, y_3)$. Si $N_D^+(y_2) \cap N_D^+(y_1) = \emptyset$ alors y_2 a trois ext-voisins dans Z_{y_1} , et on a une contradiction avec l'Observation 4.6. Alors on doit avoir $|N_D^+(y_2) \cap N_D^+(y_1)| \geq 1$. De manière analogue au cas précédent, on obtient, $|N_D^+(y_2) \cap N_D^+(y_3)| \geq 1$ et $|N_D^+(y_3) \cap N_D^+(y_1)| \geq 1$. En utilisant le Lemme 4.10, on peut déduire que $|N_D^+(y_i) \cap N_D^+(y_j)| = 1$ pour $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$. Par conséquent il est facile de vérifier que $|Z_x| = 3$. Soit $Z_x = \{z_1, z_2, z_3\}$. Sans perte de généralité on peut supposer aussi que $N_D^+(y_1) = \{z_1, z_2\}$, $N_D^+(y_2) = \{z_2, z_3\}$ et $N_D^+(y_3) = \{z_1, z_3\}$. Ainsi, par l'Observation 4.6, on a $N_D^+(z_1) = \{x, y_2, w_1\}$, $N_D^+(z_2) = \{x, y_3, w_2\}$ et $N_D^+(z_3) = \{x, y_1, w_3\}$, où $w_1, w_2, w_3 \in \overline{N_D^+[x]}$. Pour finir cette preuve, on doit montrer que $D [Z_x] = (z_1, z_3, z_2)$. Tout d'abord, on doit montrer que $w_1 = z_3$ i.e., $z_1 \rightarrow z_3$. Pour ce faire, supposons au contraire que $w_1 \neq z_3$. Donc, $\{z_3, y_1\} \subseteq N_D^+(y_3)$ avec $\{z_3, y_1\} \subseteq \overline{N_D^+[z_1]}$, mais dans ce cas, on a $\Delta^+(D [\overline{N_D^+[z_1]}]) \geq 2$, ainsi on a une contradiction avec l'Observation 4.6. Donc $z_1 \rightarrow z_3$, et par le même argument, on peut déduire que $z_3 \rightarrow z_2$ et $z_2 \rightarrow z_1$, et ceci signifie que $D [Z_x]$ est un circuit d'ordre 3 avec $z_1 \rightarrow z_3 \rightarrow z_2 \rightarrow z_1$, i.e., $D [Z_x] = (z_1, z_3, z_2)$. Par conséquent $D [N_D^+[x] \cup Z_x] \cong RT_7$ (voir la Figure 4.2). \square

Lemme 4.13. [60] $\overline{N_D^+[x]} - Z_x = \emptyset$.

Preuve. Supposons, au contraire que $\overline{N_D^+[x]} - Z_x \neq \emptyset$. Soit $w \in \overline{N_D^+[x]} - Z_x$. D'après l'Observation 4.7, D est connexe, de plus puisque $d_D^+(w) = 3$, par l'Observation 4.6, w a

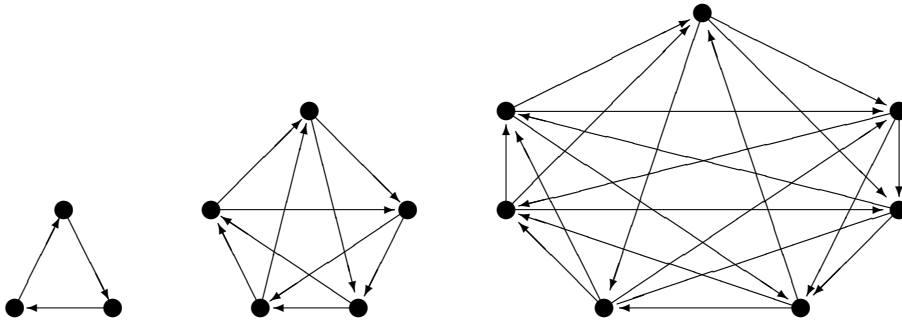


FIGURE 4.2. Les tournois ext-réguliers T_3 , T_5 et RT_7 .

au moins deux ext-voisins dans $N_D^+[x]$. Mais comme $D[N_D^+[x] \cup Z_x] \cong RT_7$, il est simple de vérifier qu'il existe un sommet u dans $N_D^+[x] \cup Z_x$ tel que w a au moins deux ext-voisins dans $\overline{N_D^+[u]}$, une contradiction avec l'Observation 4.6. \square

Maintenant, nous donnons une caractérisation descriptive pour les graphes orientés k -ext-réguliers avec $k \geq 1$ pour lesquels $\gamma_R(D) = n - k + 1$.

Théorème 4.14. [60] *Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté k -ext-régulier d'ordre n . Alors $\gamma_R(D) = n - k + 1$ si et seulement si $D \in \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ ou $D \cong RT_7$.*

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté k -ext-régulier d'ordre n et $k \geq 1$. Si $\gamma_R(D) = n - k + 1$, alors d'après la Proposition 4.9, $k \leq 3$. Pour $k = 1$, la Proposition 4.2, nous permet de vérifier facilement que $\gamma_R(D) = n$ si et seulement si $D \in \mathcal{F}_1$. Pour $k = 2$, d'après la Proposition 4.8, $\gamma_R(D) = n - 1$ si et seulement si $D \in \mathcal{F}_2$. Pour $k = 3$. D'après les deux Lemmes 4.12 et 4.13, on a $D \cong RT_7$. La condition suffisante est facile à vérifier. \square

On en conclut alors facilement le résultat suivant :

Corollaire 4.15. [60] *Soit T_n un tournoi k -ext-régulier d'ordre $n \geq 3$ et $k \geq 1$. Alors $\gamma_R(T_n) = n - k + 1$ si et seulement si $T_n \in \{T_3, T_5, RT_7\}$, (voir la Figure 4.2).*

Nous terminons cette section en donnant les conditions nécessaires et suffisantes sur les tournois T_n pour lesquels $\gamma_R(T_n) = n - \Delta^+(T_n) + 1$.

Théorème 4.16. [60] Soit T_n un tournoi d'ordre $n \geq 2$. Alors $\gamma_R(T_n) = n - \Delta^+(T_n) + 1$ si et seulement si $\Delta^+(T_n) \geq n - 3$, ou $\Delta^+(T_n) = n - 4$ et $N_{T_n}^+[u] \cup N_{T_n}^+[v] \neq V(T_n)$ pour tous les paires de sommets $u, v \in V$.

Preuve. Soit T_n un tournoi d'ordre $n \geq 2$ et $x \in X_{\Delta^+(T_n)}$. Supposons que $\gamma_R(T_n) = n - \Delta^+(T_n) + 1$. Comme $D \left[\overline{N_{T_n}^+[x]} \right]$ est un tournoi, et d'après l'Observation 4.6,

$$\Delta^+(D \left[\overline{N_{T_n}^+[x]} \right]) \leq 1,$$

on a

$$\frac{\left| \overline{N_{T_n}^+[x]} \right| \left(\left| \overline{N_{T_n}^+[x]} \right| - 1 \right)}{2} = \sum_{v \in \overline{N_{T_n}^+[x]}} d_{T_n}^+(v) \leq \left| \overline{N_{T_n}^+[x]} \right|,$$

ce qui implique que $\left| \overline{N_{T_n}^+[x]} \right| \leq 3$, et nous en déduisons $\Delta^+(T_n) \geq n - 4$. Pour $\Delta^+(T_n) = n - 4$, supposons au contraire qu'il existe deux sommets distincts disons $u, v \in V$ tels que $N_{T_n}^+[u] \cup N_{T_n}^+[v] = V$. Nous définissons la fonction $f = (V - \{u, v\}, \emptyset, \{u, v\})$. Il est clair que f est une FDR sur V , avec $w(f) = 4 < n - \Delta^+(T_n) + 1 = 5$, d'où on a une contradiction.

Inversement, si $\Delta^+(T_n) = n - 1, n - 2$ ou $n - 3$, alors il est facile de voir que $\gamma_R(T_n) = n - \Delta^+(T_n) + 1$. Maintenant, pour $\Delta^+(T_n) = n - 4$, nous supposons au contraire que $\gamma_R(T_n) < n - \Delta^+(T_n) + 1 = 5$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(T_n)$ -fonction avec V_1 de cardinalité minimum. Alors $|V_1| + 2|V_2| \leq 4$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $(|V_1|, |V_2|) \in \{(0, 1), (1, 1), (0, 2)\}$.

Si $(|V_1|, |V_2|) \in \{(0, 1), (1, 1)\}$, alors $\Delta^+(T_n) \geq n - 2$, on a une contradiction avec $\Delta^+(T_n) = n - 4$. Si $(|V_1|, |V_2|) = (0, 2)$. Alors T_n a deux sommets distincts disons u, v tels que $N_D^+[u] \cup N_D^+[v] = V$, on a une contradiction avec le fait que $N_{T_n}^+[u] \cup N_{T_n}^+[v] \neq V$ pour tous les paires de sommets $u, v \in V$. Donc $\gamma_R(T_n) = n - \Delta^+(T_n) + 1 = 5$. \square

4.3 Arbre orienté \vec{T} avec $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$

Dans cette section, nous donnons une caractérisation des arbres orientés \vec{T} satisfaisant $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$. Soit $\vec{T} = (V, A)$ un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$ et $X =$

$\left\{x \in V : d_{\vec{T}}^+(x) = 2\right\}$. Rappelons qu'un arbre orienté est un arbre sans arcs symétriques. On commence par donner quelques résultats existants pour les arbres orientés.

Observation 4.17. *Si \vec{T} est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(\vec{T}) = n$ si et seulement si $\Delta^+(\vec{T}) = 1$.*

Proposition 4.18. *Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$ avec ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 1$ et X un ensemble de sommets de ext-degré 2. Alors $\gamma_R(\vec{T}) = n - 1$ si et seulement si $\Delta^+(\vec{T}) = 2$, tel que si $|X| \geq 2$ alors $\left|N_{\vec{T}}^+[x] \cap N_{\vec{T}}^+[y]\right| = 1$ pour tout couple de sommets différents x, y dans X .*

Preuve. Soit \vec{T} un arbre d'ordre $n \geq 2$. Suppose que $\gamma_R(\vec{T}) = n - 1$, et supposons au contraire que $\Delta^+(\vec{T}) \neq 2$. D'après l'Observation 4.17, $\Delta^+(\vec{T}) \geq 3$ et d'après la Proposition 4.1, $\gamma_R(\vec{T}) \leq n - \Delta^+(\vec{T}) + 1 \leq n - 2 < n - 1$, d'où on a une contradiction. Donc $\Delta^+(\vec{T}) = 2$ et $|X| \geq 1$. Maintenant, supposons au contraire que $|X| \geq 2$ et il existe au moins deux sommets, disons x et y dans X_2 tels que $\left|N_{\vec{T}}^+[x] \cap N_{\vec{T}}^+[y]\right| \neq 1$. Puisque \vec{T} est un arbre orienté, $N_{\vec{T}}^+[x] \cap N_{\vec{T}}^+[y] = \emptyset$. La fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, où $V_1 = V - \left(N_{\vec{T}}^+[x] \cup N_{\vec{T}}^+[y]\right)$ et $V_2 = \{x, y\}$, est une FDR de \vec{T} , donc $\gamma_R(\vec{T}) \leq |V_1| + 2|V_2| = n - 2$, d'où on a une contradiction.

Inversement. Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$ avec ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) = 2$. Il est clair que si X contient un seul sommet x , alors la fonction $f = (V_0, V_1, V_2) = (N_{\vec{T}}^+(x), V - N_{\vec{T}}^+[x], \{x\})$ est une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction avec $\gamma_R(\vec{T}) = |V_1| + 2|V_2| = (n - 3) + 2 = n - 1$. Supposons maintenant que $|X| \geq 2$ et que $\left|N_{\vec{T}}^+[x] \cap N_{\vec{T}}^+[y]\right| = 1$, pour tout couple de sommets différents x, y dans X . Soit $z \in V$ tel que $N_{\vec{T}}^+[x] \cap N_{\vec{T}}^+[y] = \{z\}$, on distingue deux cas:

Case 1. $z \notin X$ (voir la Figure 4.3 type (a)). Soit $x \in X$, la fonction $f = (V_0, V_1, V_2) = (N_{\vec{T}}^+(x), V - N_{\vec{T}}^+[x], \{x\})$ est une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction avec $\gamma_R(\vec{T}) = |V_1| + 2|V_2| = n - 1$.

Case 2. $z \in X$ (voir la Figure 4.3 type (b)). Alors la fonction $f = (V_0, V_1, V_2) = (N_{\vec{T}}^+(z), V - N_{\vec{T}}^+[z], \{z\})$ est une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction avec $\gamma_R(\vec{T}) = |V_1| + 2|V_2| = n - 1$. \square

Pour les deux lemmes suivants, \vec{T} sera un arbre orienté d'ordre n satisfait $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$ et d'ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 3$.

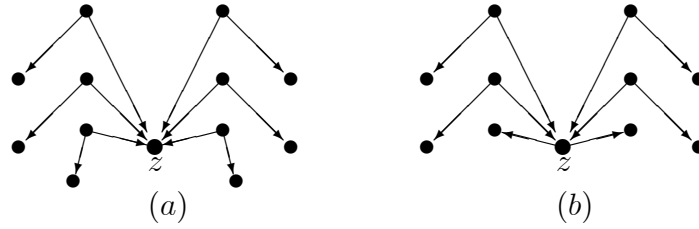


FIGURE 4.3. (a) \vec{T} avec $z \notin X$. (b) \vec{T} avec $z \in X$.

Lemme 4.19. [63] \vec{T} possède un seul sommet avec ext-degré au moins trois.

Preuve. Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre n et d'ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 3$. Supposons qu'il y ait deux sommets x et y dans \vec{T} avec un ext-degré d'au moins 3. Sans perte de généralité, on peut supposer que $d_{\vec{T}}^+(x) = \Delta^+(\vec{T})$. Si $y \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$ puisque \vec{T} est un arbre orienté, alors y a au moins deux ext-voisins qui sont dans $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$, c'est-à-dire $|N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]}| \geq 2$, on a une contradiction avec la condition 1 de l'Observation 4.6. Donc le sommet y doit être dans $N_{\vec{T}}^+(x)$. Mais dans ce cas, puisque T est un arbre orienté, y a au moins trois sommets extérieurs dans $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$, c'est-à-dire $|N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]}| \geq 3$, on a une contradiction avec la condition 2 de l'Observation 4.6. \square

On définit les sous-ensembles suivants:

$$\begin{aligned} Y &= \left\{ y \in N_{\vec{T}}^+(x) : d_{\vec{T}}^+(y) = 2 \right\}, \\ Z &= \left\{ z \in N_{\vec{T}}^-(x) : d_{\vec{T}}^+(z) = 2 \right\}, \\ U &= \left\{ u \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} - Z : d_{\vec{T}}^+(u) = 2 \right\} \\ W &= (N_{\vec{T}}^+(x) - Y) \cap N_{\vec{T}}^+(U), \\ R &= N_{\vec{T}}^+(x) - (Y \cup W). \end{aligned}$$

Il est clair que U , Y et Z forment une partition de l'ensemble X (voir l'arbre orienté \vec{T} dans la Figure 4.4).

Lemme 4.20. [63] $|R| \geq 1$, et en plus si $|R| = 1$ alors $Z = \emptyset$.

Preuve. Soit \vec{T} un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta(\vec{T}) + 1$, et x un sommet de \vec{T} satisfaisant $d_{\vec{T}}^+(x) = \Delta^+(\vec{T})$. D'après l'Observation 4.6, nous avons $d_{\vec{T}}^+(v) \leq 2$

pour chaque sommet v dans $\vec{T} - x$. Si $X = \emptyset$, alors $\Delta^+(D[\vec{T} - x]) \leq 1$, et la condition est vérifiée. Supposons maintenant que $X = Z \cup Y \cup U \neq \emptyset$. Comme $Y \cup W \subseteq N_{\vec{T}}^+(x)$ et \vec{T} est un arbre orienté, nous avons

$$\Delta^+(\vec{T}) = \left| N_{\vec{T}}^+(x) \right| = |Y| + |W| + |R|,$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| N_{\vec{T}}^+[U \cup Y] \right| &= \left| N_{\vec{T}}^+[U] \right| + \left| N_{\vec{T}}^+[Y] \right| - \left| N_{\vec{T}}^+(U) \cap Y \right| \\ &= 2|U| + |W| + 3|Y| \\ &= 2|Y| + 2|U| + \Delta^+(\vec{T}) - |R|. \end{aligned}$$

D'abord, nous montrons que $|R| \geq 1$. Supposons au contraire que $R = \emptyset$, alors

$$\Delta^+(\vec{T}) = \left| N_{\vec{T}}^+(x) \right| = |Y| + |W|.$$

La fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, où

$$V_1 = V(\vec{T}) - (N_{\vec{T}}^+[U \cup Y]) \text{ et } V_2 = U \cup Y$$

est une *FDR* de \vec{T} . Donc,

$$\begin{aligned} \gamma_R(\vec{T}) &\leq |V_1| + 2|V_2| \\ &= \left| V(\vec{T}) \right| - \left(2|Y| + 2|U| + \Delta^+(\vec{T}) \right) + 2(|U| + |Y|) \\ &= n - \Delta^+(\vec{T}), \text{ d'où on a une contradiction.} \end{aligned}$$

Maintenant, nous devons montrer que si $|R| = 1$ alors $Z = \emptyset$. Supposons au contraire que $|R| = 1$ et $Z \neq \emptyset$. Donc $\Delta^+(\vec{T}) = |Y| + |W| + 1$. La fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, où

$$V_1 = V - \left(N_{\vec{T}}^+[U \cup Y \cup \{z\}] \right) \text{ et } V_2 = U \cup Y \cup \{z\}$$

est un *RDF* de \vec{T} où $z \in Z$. Donc,

$$\begin{aligned} \gamma_R(T) &\leq |V_1| + 2|V_2| \\ &= \left| V - \left(N_{\vec{T}}^+[U \cup Y \cup \{z\}] \right) \right| + 2|U \cup Y \cup \{z\}| \\ &= |V| - \left(2|Y| + 2|U| + \Delta^+ - |R| + \left| N_{\vec{T}}^+[z] \right| \right) + 2(|U| + |Y| + |\{z\}|) \\ &= n - \Delta^+(\vec{T}), \text{ d'où on a une contradiction.} \end{aligned}$$

□

Dans la suite, nous fournissons une caractérisation des arbres \vec{T} d'ordre $n \geq 2$ pour lesquels $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$. Pour le faire, nous définissons les familles d'arbres suivantes. Rappelons que $X = \{x \in V : d_{\vec{T}}^+(x) = 2\}$.

- \mathcal{F}_1 est la famille de tous les arbres orientés \vec{T} avec $\Delta^+(\vec{T}) = 1$.
- \mathcal{F}_2 est la famille de tous les arbres orientés $\Delta^+(\vec{T}) = 2$, et \vec{T} a un sommet unique, disons z satisfait $X \subseteq N^-[z]$.
- \mathcal{F}_3 est la famille de tous les arbres orientés $\Delta^+(\vec{T}) \geq 3$ satisfaisant aux conditions suivantes:
 - (a) \vec{T} a un sommet x unique avec ext-degré au moins trois,
 - (b) $\Delta^+(D[\overline{N_{T_n}^+[x]}]) \leq 1$, et chaque sommet $y \in N_{\vec{T}}^+(x)$ satisfait $d_{\vec{T}}^+(y) \leq 2$,
 - (c) $|R| \geq 1$ et en plus si $|R| = 1$ alors $Z = \emptyset$.

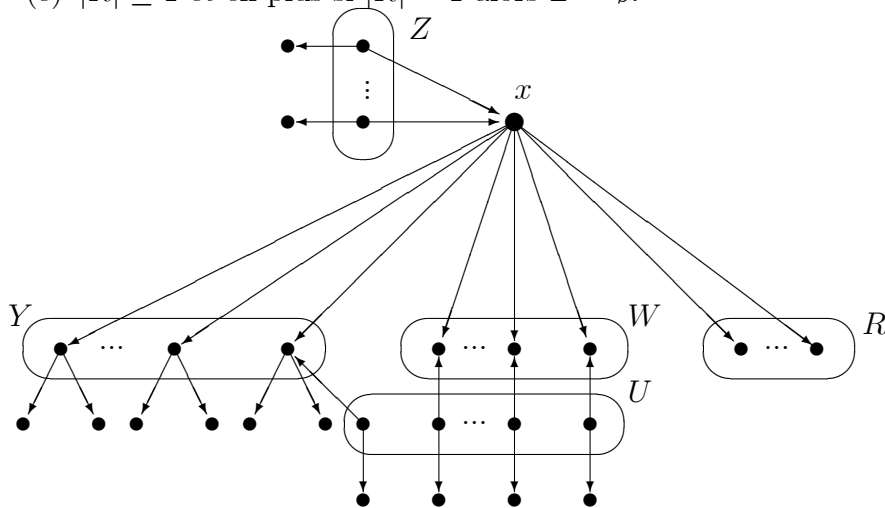


FIGURE 4.4. Un exemple d'arbre orienté T qui appartient à \mathcal{F}_3 . Notez que R n'est pas vide et que l'ensemble Z doit être vide dans le cas où $|R| = 1$.

On commence par donner le résultat suivant sur les digraphes qui sera utile dans cette section.

Proposition 4.21. [40] Soient $D = (V, A)$ un digraphe et $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(D)$ -fonction. Alors

- (a) si $v \in V_1$, alors $N_D^-(v) \cap V_2 = \emptyset$;
- (b) Soit $H = D[V_0 \cup V_2]$. Alors $v \in V_2$ avec $N_D^-(v) \cap V_2 \neq \emptyset$, a au moins deux ext-voisins privés par rapport à V_2 dans le sous-digraphe H .

Nous donnons maintenant notre résultat principal.

Théorème 4.22. [63] Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre $n \geq 1$ avec un ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 1$. Alors

$$\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1 \text{ si et seulement si } \vec{T} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3.$$

Preuve. Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre $n \geq 1$ avec un ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T})$. Si $\Delta^+(\vec{T}) = 1$ ou 2 , alors d'après l'Observation 4.7 et la Proposition 4.21 $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$ si et seulement si $\vec{T} \in \mathcal{F}_1$ ou $\vec{T} \in \mathcal{F}_2$, respectivement. supposons maintenant que $\Delta^+(\vec{T}) \geq 3$. D'après l'Observation 4.6, Lemme 4.19 et Lemme 4.20, $\vec{T} \in \mathcal{F}_3$.

Inversement. Supposons que $\vec{T} \in \mathcal{F}_3$, d'après la Condition (a) de la famille \mathcal{F}_3 , \vec{T} a un sommet unique, disons x avec $d_T^+(x) = \Delta^+(\vec{T})$ et $\Delta^+\left(D\left[\overline{N_T^+[x]} \cup R\right]\right) \leq 1$.

Nous allons d'abord montrer qu'il existe une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction f avec $f(x) = 2$. Supposons au contraire que chaque $\gamma_R(D)$ -fonction π , $\pi(x) \neq 2$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction. S'il existe un sommet v dans R tel que $f(v) = 0$, alors il existe un sommet $w \in \overline{N_T^+[x]}$ tel que $w \rightarrow v$ avec $f(w) = 2$, et la fonction

$$g = (V_0 - \{v\}, V_1 \cup \{w, v\}, V_2 - \{w\})$$

est une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction avec $g(v) = 1$. Et s'il existe un sommet v dans R tel que $f(v) = 2$, alors il existe un sommet $w \in \overline{N_T^+[x]}$ tel que $v \rightarrow w$ avec $f(w) = 0$ et la fonction

$$h = (V_0 - \{w\}, V_1 \cup \{w, v\}, V_2 - \{v\})$$

est une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction avec $h(v) = 1$. Par conséquent, on peut supposer sans perte de généralité que $f(v) = 1$ pour tout sommet v dans R . Puisque $\vec{T} \in \mathcal{F}_3$, on déduit de la condition (c) que $|R| \geq 1$. Puisque $f(x) \neq 2$, nous distinguons deux cas:

Case 1. $f(x) = 1$. Si $|R| = 1$, alors la fonction

$$f' = (V_0 \cup R, V_1 - (R \cup \{x\}), V_2 \cup \{x\})$$

est une γ_R -fonction avec $f'(x) = 2$, une contradiction avec le fait que chaque $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction π , $\pi(x) \neq 2$. Si $|R| \geq 2$, alors f' est une *FDR* avec $f'(V) < f(V)$, on a une contradiction avec le fait que f est $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction.

Case 2. $f(x) = 0$. Dans ce cas il existe un sommet $u \in N_{\vec{T}}^+(x)$, tel que $u \rightarrow x$ avec $f(u) = 2$, et comme $x \rightarrow v$ avec $f(v) = 1$, pour tout sommet v dans R . Nous avons trois possibilités:

Subcase 2.1. $|R| = 1$. Alors

$$f' = (V_0 \cup R - \{x\}, (V_1 - R) \cup \{u\}, (V_2 - \{u\}) \cup \{x\})$$

est une $\gamma_R(T)$ -fonction avec $f'(x) = 2$, d'où on a une contradiction.

Subcase 2.2. $|R| \geq 2$ et $Z = \emptyset$. Alors

$$f' = (V_0 \cup R - \{x\}, (V_1 - R) \cup \{u\}, (V_2 - \{u\}) \cup \{x\})$$

est une *FDR* avec $f'(V) < f(V)$, d'où on a une contradiction.

Subcase 2.3. $|R| \geq 2$ et $Z \neq \emptyset$. Pour le cas $u \notin Z$, comme pour le **Subcase 2.2**, on obtient une contradiction. Supposons maintenant que $u \in Z$. Si $|R| = 2$, alors

$$f' = ((V_0 - \{x\}) \cup R, V_1 - R, V_2 \cup \{x\})$$

est une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction avec $f'(x) = 2$, ainsi on a une contradiction avec le fait que chaque $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction π , $\pi(x) \neq 2$. Et si $|R| > 2$, alors f' est une *FDR* avec $f'(V) < f(V)$, encore une fois on a une contradiction avec f est $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction. Donc, il existe une $\gamma_R(\vec{T})$ -fonction $f(V) = (V_0, V_1, V_2)$ tel que V_2 contient x .

Maintenant, nous montrons que $\gamma_R(\vec{T}) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$. Supposons au contraire que

$$\gamma_R(\vec{T}) < n - \Delta^+(\vec{T}) + 1.$$

Nous avons,

$$|V_1| + 2|V_2| < n - \Delta^+(\vec{T}) + 1 = |V_0| + |V_1| + |V_2| - \Delta^+(\vec{T}) + 1.$$

Cela implique que,

$$|V_0| \geq |V_2| + \Delta^+(\vec{T}). \quad (4.3)$$

Il résulte de l'Item (a) de la Proposition 4.21, $N_{\vec{T}}^+(x) \cap V_1 = \emptyset$. Nous définissons les deux sous-ensembles suivants:

$$P = N_{\vec{T}}^+(x) \cap V_2 \text{ et } Q = N_{\vec{T}}^+(x) \cap V_0.$$

Soit $|P| = p$ et $|Q| = q$, donc $p + q = \Delta^+(\vec{T})$. Comme $V_0 \subseteq N_{\vec{T}}^+[V_2]$, il est clair que $|V_2| \geq 2$. De plus, chaque sommet de V_2 , a au moins un ext-voisin privé dans V_0 par rapport à V .

Supposons maintenant que $P = \emptyset$. Puisque $|V_2| \geq 2$ on peut déduire de (4.3) qu'il existe au moins deux sommets, disons u, v dans V_0 qui sont dominés par un autre sommet disons, x' dans V_2 autre que x . ie, $x \rightarrow u$, $x \rightarrow v$ et $x' \Rightarrow \{u, v\}$ ce qu'ils nous donnent $\Delta^+(D[\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}]) > 1$, d'où on a une contradiction avec la condition (b) de la famille \mathcal{F}_3 , et donc $P \neq \emptyset$. Nous voyons maintenant, d'une part, d'après l'Item (b) de la Proposition 4.21 que chaque sommet de P a au moins deux ext-voisins privés dans V_0 par rapport à V_2 , et, de l'autre part, d'après la Condition (b) de la famille \mathcal{F}_3 que chaque sommet de $N_{\vec{T}}^+(x)$ a au plus deux ext-voisins dans $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$, ce qui implique que $|N_{\vec{T}}^+(P) \cap V_0| = 2p$, puisque \vec{T} est un arbre orienté.

Maintenant, nous définissons les sous-ensembles suivants:

$$F = V_2 - (P \cup \{x\}) \text{ et } E = V_0 - \left(Q \cup \left(N_{\vec{T}}^+(P) \cap V_0 \right) \right). \quad (4.4)$$

Donc,

$$|E| = |V_0| - |Q| - |N_{\vec{T}}^+(P) \cap V_0| = |V_0| - q - 2p, \quad (4.5)$$

Il résulte de (4.3), (4.4) et (4.5) que

$$\begin{aligned}
|F| &= |V_2| - (p + 1) \\
&\leq |V_0| - \Delta^+(\vec{T}) - (p + 1) \\
&\leq |E| + q + 2p - \Delta^+(\vec{T}) - (p + 1) \\
&= |E| - 1 < |E|.
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $|F| < |E|$. Mais, puisque $V_0 \subseteq N_{\vec{T}}^+[V_2]$, donc $F \neq \emptyset$ et $E \subseteq N_{\vec{T}}^+[F]$, ce qui implique qu'il existe au moins un sommet w dans F qui satisfait $|N_{\vec{T}}^+(w) \cap E| \geq 2$, ce qu'il nous donne $\Delta^+(D \left[\overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right]) \geq 2$, d'où on a une contradiction avec la Condition (b) de la famille \mathcal{F}_3 . Par conséquent, $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(\vec{T}) + 1$. \square

4.4 Egalité de Nordhaus-Gaddum

Dans cette section, nous donnons une caractérisation descriptive des digraphes D vérifiant $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3$. Rappelons que le complément \overline{D} d'un digraphe D est le digraphe défini sur l'ensemble de sommets V , où $(u, v) \in \overline{A}$ si et seulement si $(u, v) \notin A$.

Proposition 4.23. [60] *Soit D un digraphe k -ext-régulier avec $1 \leq k \leq n - 2$. Si $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1$ et $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1$ pour tout $x \in V$, alors on a*

$$\gamma_R(D) = n - k + 1.$$

Preuve. Soit D un digraphe k -ext-régulier avec $1 \leq k \leq n - 2$ qui satisfait

$$\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1 \text{ et } \Delta^+(D \left[\overline{N_D^+[x]} \right]) \leq 1; \forall x \in V.$$

Si $k \in \{1, 2\}$, alors d'après la Proposition 4.8, $\gamma_R(D) = n - k + 1$. Supposons maintenant que $k \geq 3$ et $\gamma_R(D) < n - k + 1$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(D)$ -fonction. Donc,

$$|V_1| + 2|V_2| < n - k + 1 = |V_0| + |V_1| + |V_2| - k + 1.$$

D'où,

$$|V_0| \geq |V_2| + k. \tag{4.6}$$

Si $|V_2| = 0$, alors $|V_0| = 0$ et d'après l'inégalité (4.6), $k = 0$, on a une contradiction avec $k \geq 3$. De même, si $|V_2| = 1$ alors $|V_0| = k$ et d'après l'inégalité (4.6), $k \geq 1 + k$, d'où on a une contradiction. Supposons maintenant que $|V_2| \geq 2$. Soit $V_2 = \{x_1, \dots, x_p\}$, $p \geq 2$. Puisque f est une $\gamma_R(D)$ -fonction, tout sommet x_i dans V_2 a au moins un ext-voisin privé disons, b_i dans V_0 par rapport à V_2 , i.e., $|\text{opn}[x_i, V_2]| \geq 1$. Soit $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ où $b_i \in \text{opn}[x_i, V_2]$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et $C = V_0 - B$. Il résulte de l'inégalité (4.6) que

$$|C| = |V_0| - |B| = |V_0| - |V_2| \geq k. \quad (4.7)$$

D'après la proposition 4.21, $N_D^+(x_i) \cap V_1 = \emptyset$, pour $i \in \{1, \dots, p\}$. De plus, il est facile de vérifier que $N_D^+(x_i) \cap B = \{b_i\}$ et $|N_D^+(x_i) \cap C| \leq k - 1$. Par conséquent, il existe au moins un sommet, disons c_i dans C tel que $x_i \nrightarrow c_i$, pour $i \in \{1, \dots, p\}$ (peut être $v_i = v_j$ chaque fois que $i \neq j$). Par ailleurs, puisque chaque sommet de V_0 devrait être dominé par au moins un sommet V_2 . Alors, c_1 doit être dominé par un autre sommet, disons x_2 dans V_2 , c'est-à-dire, $x_1 \nrightarrow v_1$ et $x_2 \rightarrow v_1$. De même c_2 doit être aussi dominé par un autre sommet différent de x_2 , disons y (peut être $y = x_1$) dans V_2 , c'est-à-dire $x_2 \nrightarrow v_2$ et $y \rightarrow v_2$. On distingue trois cas relatifs aux arcs entre x_1 et x_2 dans D :

Case 1. $x_2 \leftrightarrow x_1$ ou $x_2 \mapsto x_1$. Comme $\{x_2, b_2, c_1\} \subseteq \overline{N_D^+[x_1]}$ avec $\{b_2, c_1\} \subseteq N_D^+(x_2)$, on a $\Delta^+(D[\overline{N_D^+[x_1]}]) \geq 2$, d'où on a une contradiction avec notre hypothèse.

Case 2. $x_2 \longleftrightarrow x_1$. Comme $\{x_1, b_2, c_1\} \subseteq \overline{N_D^+[x_2]}$ avec $\{b_2, c_1\} \subseteq N_D^+(x_1)$, on a $\Delta^+(D[\overline{N_D^+[x_2]}]) \geq 2$, aussi, on a une contradiction avec avec notre hypothèse.

Case 3. $x_1 \mapsto x_2$. Si $y = x_1$, alors $\{x_1, b_1, c_2\} \subseteq \overline{N_D^+[x_2]}$ avec $\{b_1, c_2\} \subseteq N_D^+(x_1)$, on a $\Delta^+(D[\overline{N_D^+[x_2]}]) \geq 2$, d'où on a une contradiction avec notre hypothèse. Donc, c_2 doit être dominé par un autre sommet de V_2 , disons x_3 i.e., $x_1 \nrightarrow v_2$, $x_2 \nrightarrow v_2$ et $x_3 \rightarrow v_2$. On considère deux sous-cas relatifs aux arcs entre x_3 et x_1 dans D :

SubCase 3.1. $x_3 \leftrightarrow x_1$, $x_3 \mapsto x_1$ ou $x_3 \longleftrightarrow x_1$. On a $\{b_3, c_2\} \subseteq N_D^+(x_3)$. Utilisant un argument similaire aux Case 1 et Case 2, respectivement, nous obtenons aussi une contradiction.

SubCase 3.2. $x_1 \mapsto x_3$. Si $x_2 \leftrightarrow x_3$ ou $x_2 \mapsto x_3$, alors $\{x_1, b_1, x_2\} \subseteq \overline{N_D^+[x_3]}$ avec $\{b_1, x_2\} \subseteq N_D^+(x_1)$. Aussi, si $x_3 \mapsto x_2$ alors $\{x_3, b_3, c_2\} \subseteq \overline{N_D^+[x_2]}$ avec $\{b_3, c_2\} \subseteq N_D^+(x_3)$. Et finalement, si $x_2 \longleftrightarrow x_3$ alors $\{x_2, b_3, c_2\} \subseteq \overline{N_D^+[x_3]}$ avec $\{b_3, c_2\} \subseteq N_D^+(x_2)$, et dans

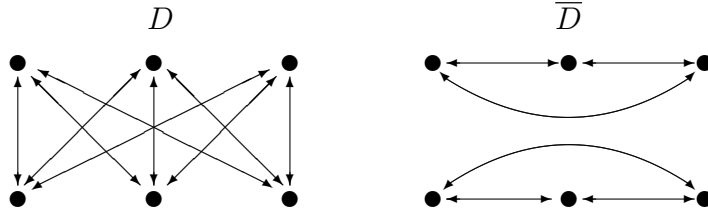


FIGURE 4.5. Un digraphe 3-ext-régulier D et son complémentaire \bar{D} .

tous les cas on obtient une contradiction avec avec notre hypothèse, et la preuve est terminée. \square

Nous notons que la condition suffisante donnée dans la proposition 4.23 n'est pas nécessaire comme on peut le voir dans le digraphe 3-ext régulier est donné à la Figure 4.5. On vérifie aisément que, ce digraphe satisfait $\gamma_R(D) = 4 = n - k + 1$, et $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+}[x] \right]) \geq 2$ pour tout $x \in V$.

Rappelons ici que le digraphe symétrique complet \overleftrightarrow{K}_n est un digraphe $(n - 1)$ -régulier d'ordre n , ainsi la relation de type Nordhaus-Gaddum donné par Hao et al. [21].

Proposition 4.24. [21] *Si D est un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_R(D) + \gamma_R(\bar{D}) \leq n + 3$$

Nous donnons maintenant une caractérisation descriptive pour les digraphes D d'ordre $n \geq 3$ pour lesquels $\gamma_R(D) + \gamma_R(\bar{D}) = n + 3$.

Théorème 4.25. [60] *Si D est un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$4 \leq \gamma_R(D) + \gamma_R(\bar{D}) \leq n + 3$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si chacun de D et \bar{D} a un sommet d'ext-degré $n - 1$ et la borne supérieure est atteinte si et seulement si D est un digraphe k -ext-régulier avec $1 \leq k \leq n - 2$, pour chaque sommet $x \in V$, $\Delta^+(D \left[\overline{N_D^+}[x] \right]) \leq 1$ et $\Delta^+(D \left[\overline{N_{\bar{D}}^+}[x] \right]) \leq 1$.

Preuve. Borne inférieure : quand D a au moins trois sommets, clairement que D et son complément \bar{D} satisfont $\gamma_R(D) \geq 2$ et $\gamma_R(\bar{D}) \geq 2$, donc $\gamma_R(D) + \gamma_R(\bar{D}) \geq 4$ et l'égalité

atteinte si et seulement si les deux digraphes D et \overline{D} doivent avoir un sommet d'ext-degré $n - 1$.

Pour la borne supérieure, d'après la Proposition 4.24, $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3$. Pour prouver l'égalité, nous commençons par la condition suffisante. Il est clair que si D est un digraphe k -ext-régulier alors \overline{D} est aussi un digraphe k' -ext-régulier avec $1 \leq k' \leq n - 2$ et $k + k' = n - 1$. Par la Proposition 4.23 on a

$$\gamma_R(D) = n - k + 1 \text{ and } \gamma_R(\overline{D}) = n - k' + 1,$$

ce qui implique que $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3$, et la condition suffisante est tenue.

Pour la condition nécessaire, soit D un digraphe de commande $n \geq 3$, et supposons que

$$\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3 \tag{4.8}$$

Il résulte de (4.8), Proposition 4.1 et $\Delta^+(\overline{D}) = n - \delta^+(D) - 1$ que

$$n + 3 = \gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n - (\Delta^+(D) - \delta^+(D)) + 3 \leq n + 3 \tag{4.9}$$

ce qui implique que $\Delta^+(D) = \delta^+(D) = k$, et donc D est k -ext-régulier et \overline{D} est aussi k' -ext-régulier avec $k + k' = n - 1$. De plus, on peut déduire de (4.9) que

$$\gamma_R(D) = n - k + 1 \text{ et } \gamma_R(\overline{D}) = n - k' + 1 \tag{4.10}$$

Maintenant si $k = 0$ ou $n - 1$, alors D ou \overline{D} est un \overrightarrow{K}_n , et donc $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 2$, on a une contradiction. Donc, $1 \leq k \leq n - 2$. De plus, il découle de (4.10) et la condition 1 de l'Observation 4.6 que, $\Delta^+(D \left[\overline{N}_D^+[x] \right]) \leq 1$ et $\Delta^+(\overline{D} \left[\overline{N}_{\overline{D}}^+[x] \right]) \leq 1$ pour tout $x \in V$. \square

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Corollaire 4.15 et du Théorème 4.25. Rappelons que si T_n est un tournoi k -ext-régulier alors \overline{T}_n est aussi un tournoi k' -ext-régulier avec $k + k' = n - 1$, ainsi $k' = k$. Noter que si $T_n \cong T_3, T_5$ ou RT_7 alors $\overline{T}_n \cong T_3, T_5$ ou RT_7 , respectivement.

Corollaire 4.26. [60] *Soit T_n un tournoi d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_R(T_n) + \gamma_R(\overline{T}_n) = n + 3$ si et seulement si $T_n \cong T_3, T_5$ ou RT_7 (revoir la Figure 4.2 dans la section 4.2 de ce chapitre).*

4.5 \mathcal{NP} -Complétude avec $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$

Dans cette section, nous considérons la complexité du problème de décider si “**oui**” ou “**non**” un digraphe orienté D satisfait $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$. Nous montrons que ce problème est $CO\text{-}\mathcal{NP}$ -complet en utilisant la **réduction** (i.e. une **transformation**) du problème de 3-satisfiabilité (3-SAT) au problème de décider si $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D)$ est \mathcal{NP} -complet. Noter que le problème 3-SAT est un problème \mathcal{NP} -complet [34].

FONCTION MINIMUM DE DOMINATION ROMAINE (FMDR)

INSTANCE: Un graphe orienté $D = (V, A)$.

QUESTION: Est-ce que D a une FMDR f avec $f(V) = n - \Delta^+(D) + 1$?

FONCTION DE DOMINATION ROMAINE (FDR)

INSTANCE: Un graphe orienté $D = (V, E)$.

QUESTION: Est-ce que D a une FDR f avec $f(V) \leq n - \Delta^+(D)$?

3-SATISFIABILITY (3-SAT)

INSTANCE: Un ensemble fini $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ et un ensemble $C = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ de la collection d'ensembles de 3 éléments de X , appelés clauses, telle que chaque clause $C_i = y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee y_{i,3}$, où chaque occurrence $y_{i,j}$ soit x_i ou \bar{x}_i (la négation de x_i).

QUESTION: Y a-t-il une instance (formule) $I = C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_q$ de 3-SAT, pour l'ensemble des clauses C , telle que D ait un FRD f avec $f(V) \leq k$ si et seulement si j'ai une assignation de vérité satisfiable ?

Nous notons par H_i le graphe orienté décrit dans la Figure 4.6.

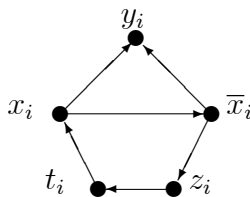


FIGURE 4.6. Le graphe orienté H_i .

Théorème 4.27. [60] *Le problème FDR est \mathcal{NP} -complet pour les graphes orientés.*

Preuve. Soit D un graphe orienté d'ordre n . Premièrement, nous devons montrer que $FDR \in NP$. En effet, il est facile de vérifier une instance 'oui' de FDR en temps polynomial, c'est-à-dire, pour un graphe orienté $D = (V, A)$, un entier positif k et une fonction arbitraire f avec $f(V) \leq k$, il est facile de vérifier en temps polynomial si f est un FDR . Deuxièmement, nous devons construire une réduction du problème NP -complet, 3-SAT bien connu au problème de FDR .

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ un ensemble de variables et $C = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ un ensemble de sous-ensembles de 3-éléments, appelés clauses, où chaque clause C_i contient trois occurrences distinctes d'une variable x_i ou \bar{x}_i (la négation de x_i). Étant donné une instance I de 3-SAT, pour l'ensemble des clauses C , nous construirons une instance $D(I)$ (c'est-à-dire un graphe orienté D correspondant à une instance I) telle que D a une FDR , f avec $f(V) \leq k$ si et seulement si I est satisfiable (i.e., j'ai une affectation de vérité satisfiable).

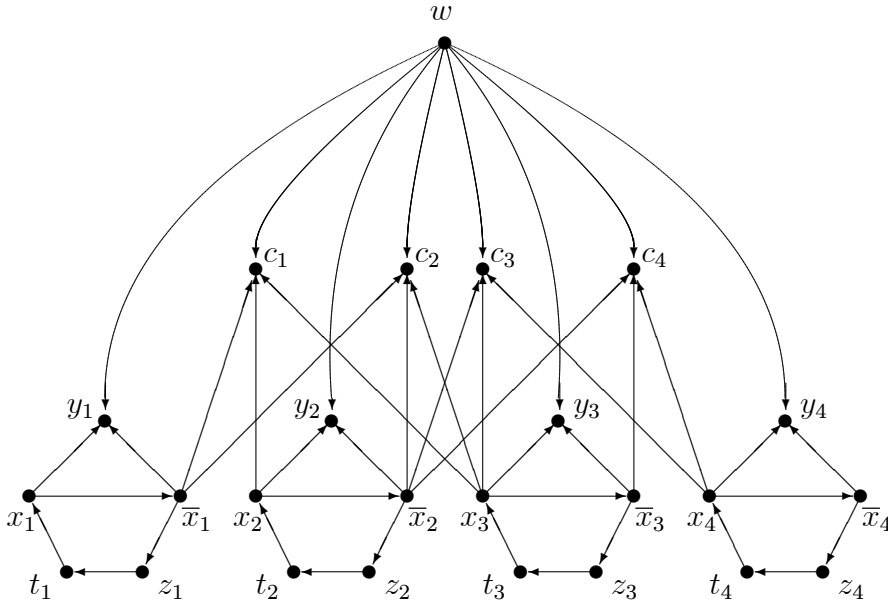


FIGURE 4.7. Instance $I = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$.

Pour chaque clause C_j , de C , nous créons un sommet de clause étiqueté c_j , et pour

chaque variable x_i dans X , nous construisons un graphe orienté étiqueté H_i décrit dans la Figure 4.6. De plus, pour chaque clause C_j , on ajoute trois arcs de trois littéraux dans la clause C_j au sommet c_j correspondant et nous ajoutons un autre sommet, disons w , et le relie par des arcs du sommet w à chaque sommet de y_i et c_j (Voir la Figure 4.7). Clairement $D(I)$ peut être construit à partir d'une instance de 3-SAT en temps polynomial. Nous devons montrer que I a une affectation de vérité satisfiable si et seulement si le graphe orienté $D(I)$ a un FDR , f avec $f(V) \leq k$, dans ce cas $k = 4p + 1$.

Supposons d'abord que j'ai une affectation de vérité satisfiable. On crée une fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ comme suit: si $I(x_i) = \text{Vrai}$, alors $x_i, z_i \in V_2$. Autrement dit, $\bar{x}_i, t_i \in V_2$. Ainsi, soit $f(w) = 1$ et tous les sommets restants sont en V_0 . Il est facile de voir que la fonction f est une FDR sur $D(I)$ du poids $f(V) = 4p + 1$.

Inversement, supposons que $D(I)$ a une FDR $f = (V_0, V_1, V_2)$ du poids $f(V) \leq 4p + 1$. Nous devons montrer que j'ai une affectation de vérité satisfiable. Comme $N_D^-(w) = \emptyset$ alors $f(w) \geq 1$, et il est facile de voir que pour chaque H_i , nous devons avoir $f(V(H_i)) \geq 4$, et donc $f(V) \geq 4p + 1$, ce qui signifie que $f(V(H_i)) = 4$ pour chaque i , $f(w) = 1$, et $f(c_j) = 0$ pour tout j . Donc, ou bien $f(x_i) = 2$, $f(\bar{x}_i) = f(y_i) = 0$ et $(f(z_i), f(t_i)) \in \{(2, 0), (1, 1)\}$, ou $f(\bar{x}_i) = 2$, $f(y_i) = f(z_i) = 0$ et $(f(x_i), f(t_i)) \in \{(0, 2), (1, 1)\}$. Puisque chaque sommet de clause doit être dominé par au moins un sommet de V_2 . Nous pouvons donc créer une affectation de vérité satisfiable comme suit: pour chaque variable x_i , assigner à x_i la valeur TRUE si $x_i \in V_2$, sinon assigner la valeur FALSE. Il est simple de voir que c'est une affectation de vérité satisfiable pour I . \square

Corollaire 4.28. [60] *Le problème FMDR est CO- \mathcal{NP} -complet pour les graphes orientés.*

CHAPITRE 5

LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE DANS LES DIGRAPHES

5.1 Introduction

Nous rappelons ici quelques résultats obtenus par Hao et al [38] et qui seront utiles dans la suite.

Théorème 5.1. [38] *Si D est un digraphe d'ordre n . Alors $\gamma_{dR}(D) \leq 2n$ avec égalité si et seulement si $\Delta^+(D) = \emptyset$.*

Proposition 5.2. [38] *Pour tout digraphe D , il existe une $\gamma_{dR}(D)$ -fonction telle que la valeur 1 ne soit pas affectée à aucun sommet de D .*

Théorème 5.3. [38] *Pour tout digraphe D d'ordre n ,*

$$\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \Delta^+(D)) + 1. \quad (5.1)$$

Théorème 5.4. [38] *Pour tout digraphe D d'ordre $n \geq 4$,*

$$\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3. \quad (5.2)$$

Dans ce chapitre on s'intéresse principalement à la caractérisation descriptive de quelques classes de digraphes pour lesquelles la borne supérieure (5.1) est atteinte. Nous commençons tout d'abord par établir des valeurs exactes de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n)$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C}_n)$, qui seront utiles dans les sections suivantes. Ensuite on caractérise certaines classes de digraphes, à savoir les digraphes ext-réguliers, les tournois et les arbres orientés atteignant cette borne supérieure en (5.1). En plus, on donne les digraphes extrémaux D d'ordre $n \geq 4$ pour lesquels la borne supérieure en (5.2) de Nordhaus-Gaddum est atteinte.

Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de deux articles, un article publié dans la revue " *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* " [61], et l'autre article soumis dans le journal " *Discret Applied Mathematics* " [62].

5.2 Valeurs exactes de $\gamma_{dR}(\vec{P}_n)$ et $\gamma_{dR}(\vec{C}_n)$

Lemme 5.5. [61] Pour tout nombre entier positif n , $\gamma_{dR}(\vec{P}_n) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.

Preuve. Soit $\vec{P}_n = (v_1, v_2 \dots v_n)$ un chemin d'ordre n . On définit la fonction $f : V(\vec{P}_n) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(v_{2i+1}) = 3$ pour $0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}$ et $f(v) = 0$ sinon si $n \equiv 0 \pmod{2}$. Par $f(v_n) = 2$, $f(v_{2i+1}) = 3$ pour $0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$ et $f(v) = 0$ sinon quand $n \equiv 1 \pmod{2}$. Il est facile de vérifier que si n est pair, alors f est une *FDRD* of \vec{P}_n de poids $w(f) = 3|V_3| = \frac{3n}{2}$ et si n est impair alors f est une *FDRD* de \vec{P}_n de poids $\frac{3n+1}{2}$. Alors $\gamma_{dR}(\vec{P}_n) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$. \square

Proposition 5.6. [61] Pour tout nombre entier positif n , $\gamma_{dR}(\vec{P}_n) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.

Preuve. Il découle du Lemme 5.5 que $\gamma_{dR}(\vec{P}_n) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n . La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $n \leq 4$. Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout chemin d'ordre n' inférieur à n , i.e., $\gamma_{dR}(\vec{P}_{n'}) \geq \lceil \frac{3n'}{2} \rceil$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une γ_{dR} -fonction de \vec{P}_n avec $V_1 = \emptyset$ (Voir la Proposition 5.2). Clairement $f(v_n) \neq 3$. Nous distinguons deux cas:

Case 1. $n \equiv 0 \pmod{2}$. Alors nous devons avoir $f(v_n) = 0$, sinon nous avons $f(v_n) = 2$, $f(v_{n-1}) = 0$ et $f(v_{n-2}) = 3$. Soit $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n - \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ d'ordre $n' = n - 3 \equiv 1 \pmod{2}$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\vec{P}_{n'}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\vec{P}_{n'}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \dots, n'$. Il est clair que g est une *FDRD* de $\vec{P}_{n'}$ de poids $w(f) - 5$. D'après le Lemme 5.5,

$$\frac{3n}{2} \geq \gamma_{dR}(\vec{P}_n) = w(f) = w(g) + 5 \geq \gamma_{dR}(\vec{P}_{n-3}) + 5 = \frac{3n+2}{2},$$

d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_n) = 0$ et $f(v_{n-1}) = 3$. Soit $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n - \{v_{n-1}, v_n\}$ d'ordre $n' = n - 2 \equiv 0 \pmod{2}$. Par l'hypothèse d'induction, $\gamma_{dR}(\vec{P}_{n'}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction $g : V(\vec{P}_{n'}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \dots, n'$. Il est clair que g est une *FDRD* of $\vec{P}_{n'}$ de poids $w(f) - 3$. Donc,

$$\gamma_{dR}(\vec{P}_n) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(\vec{P}_{n-2}) + 3 = \frac{3n}{2}.$$

Case 2. $n \equiv 1 \pmod{2}$. Comme $d^-(v_1) = 0$ alors $f(v_1) \in \{2, 3\}$. Nous considérons deux sous-cas

Case 2.1. $f(v_1) = 2$. Soit $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n - \{v_1\}$ d'ordre $n' = n - 1 \equiv 0 \pmod{2}$. Par l'hypothèse d'induction, $\gamma_{dR}(\vec{P}_{n'}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction $g : V(\vec{P}_{n'}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \dots, n'$. Il est clair que g est une *FDRD* of $\vec{P}_{n'}$ de poids $w(f) - 2$. Donc,

$$\gamma_{dR}(\vec{P}_n) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_{dR}(\vec{P}_{n-1}) + 2 = \frac{3n+1}{2}.$$

Case 2.2. $f(v_1) = 3$. Soit $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n - \{v_1, v_2\}$ d'ordre $n' = n - 2 \equiv 1 \pmod{2}$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\vec{P}_{n'}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\vec{P}_{n'}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \dots, n'$. Il est clair que g est une *FDRD* de $\vec{P}_{n'}$ de poids $w(f) - 3$. Donc,

$$\gamma_{dR}(\vec{P}_n) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(\vec{P}_{n-2}) + 3 = \frac{3n+1}{2}.$$

Par conséquent $\gamma_{dR}(\vec{P}_n) \geq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$. □

Proposition 5.7. [61] Pour tout nombre entier positif n , $\gamma_{dR}(\vec{C}_n) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.

Preuve. Soit \vec{C}_n un circuit de n sommets. Alors, $\vec{P}_n = \vec{C}_n - (x, y)$ où x et y sont deux sommets consécutifs de \vec{C}_n . Il est clair que $\gamma_{dR}(\vec{C}_n) \leq \gamma_{dR}(\vec{C}_n - (x, y)) = \gamma_{dR}(\vec{P}_n)$. D'après la Proposition 5.6,

$$\gamma_{dR}(\vec{C}_n) \leq \gamma_{dR}(\vec{P}_n) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil.$$

Montrons l'inégalité inverse. Soit f une γ_{dR} -fonction de \vec{C}_n avec $V_1 = \emptyset$. Il est clair que pour tout arc (x, y) de \vec{C}_n , nous avons $f(x) + f(y) \geq 2$. S'il existe un arc (u, v) de \vec{C}_n tel que $f(u) > 0$ et $f(v) > 0$, alors la fonction f est une *FDRD* de $\vec{P}_n = \vec{C}_n - (u, v)$. D'après la Proposition 5.6,

$$\gamma_{dR}(\vec{C}_n) = w(f) \geq \gamma_{dR}(\vec{P}_n) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil.$$

Si non, chaque arc (x, y) de \vec{C}_n vérifie $f(x).f(y) = 0$. Mais, comme f est une γ_{dR} -fonction de \vec{C}_n , nous devons avoir $f(x) + f(y) = 3$, ce qui signifie que tous les sommets de \vec{C}_n sont affectés alternativement par les valeurs 3 et 0. Il est clair dans ce cas que, n est pair et $\gamma_{dR}(\vec{C}_n) = 3|V_3| = 3\frac{n}{2}$, et la preuve est complète. □

5.3 Lemmes structurels

Pour les trois lemmes suivants, D sera un digraphe qui satisfait:

$$\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$$

et x un sommet avec ext-degré maximum $\Delta^+(D) \geq 1$.

Lemme 5.8. $\overline{N_D^+[x]}$ est un ensemble indépendant.

Preuve. Supposons au contraire que $\overline{N_D^+[x]}$ ne soit pas un ensemble indépendant. Donc, il existe au moins un sommet y dans $\overline{N_D^+[x]}$ tel que $|N_D^+(y) \cap \overline{N_D^+[x]}| \geq 1$. Alors, la fonction

$$f(v) = \begin{cases} 3 & \text{pour } v \in \{x, y\} \\ 2 & \text{pour } v \in \overline{N_D^+[x]} - (N_D^+[y] \cap \overline{N_D^+[x]}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une *FDRD* de D avec $w(f) \leq 2(n - \Delta^+(D))$, d'où on a une contradiction. \square

Lemme 5.9. $N_D^+(x)$ contient au moins un sommet sans int-voisins dans $\overline{N_D^+[x]}$.

Preuve. Supposons au contraire que $N_D^-(y) \cap \overline{N_D^+[x]} \neq \emptyset$ pour tout sommet y dans $N_D^+(x)$. Alors, la fonction

$$f(v) = \begin{cases} 2 & \text{pour } v \in V - N_D^+(x) \\ 0 & \text{pour } v \in N_D^+(x) \end{cases}$$

est une *FDRD* de D avec $w(f) = 2(n - \Delta^+(D))$, d'où on a une contradiction. \square

Lemme 5.10. Chaque sommet dans $N_D^+(x)$, a au plus un ext-voisin dans $\overline{N_D^+[x]}$.

Preuve. Supposons au contraire que $|N_D^+(y) \cap \overline{N_D^+[x]}| \geq 2$ pour tout sommet y dans $N_D^+(x)$. Alors, la fonction

$$f(v) = \begin{cases} 3 & \text{pour } v \in \{x, y\} \\ 2 & \text{pour } v \in \overline{N_D^+[x]} - (N_D^+[y] \cap \overline{N_D^+[x]}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une *FDRD* de D avec $w(f) \leq 2(n - \Delta^+(D))$, d'où on a une contradiction.

En utilisant les propositions 5.6 et 5.7, on peut facilement vérifier que les seuls chemins et circuits atteignant l'égalité dans la borne supérieure de (5.1) sont \vec{P}_2 , \vec{P}_3 et \vec{C}_3 . Pour les digraphes D avec $\Delta^+(D) = 1$ satisfont $\gamma_{dR}(T) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$ (voir la Figure 5.1), nous avons la proposition suivante. \square

Proposition 5.11. [61] *Soit D un digraphe avec ext-degré maximum $\Delta^+(D) = 1$. Alors $\gamma_{dR}(D) = 2n - 1$ si et seulement si $D \in \{\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{C}_2, \vec{C}_3\}$.*

Preuve. Soit D un digraphe, avec un maximum ext-degré $\Delta^+(D) = 1$, qui satisfait $\gamma_{dR}(D) = 2n - 1 = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$. Clairement que, $\Delta^-(D) \geq 1$. Supposons que $\Delta^-(D) \geq 2$. Soit y un sommet avec $d_D^-(y) = \Delta^-(D)$ et $x \in N_D^-(y)$. Par conséquent, $x \in X_{\Delta^+(D)}$ et $N_D^-(y) \cap \overline{N_D^+[x]} \neq \emptyset$, on a une contradiction avec le Lemme 5.9. Donc, $\Delta^-(D) = 1$ ce qui implique que D soit un chemin \vec{P}_n , soit un circuit \vec{C}_n . D'après les propositions 5.6 et 5.7, il est facile de vérifier que $D \in \{\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{C}_2, \vec{C}_3\}$. L'inverse est évident. \square

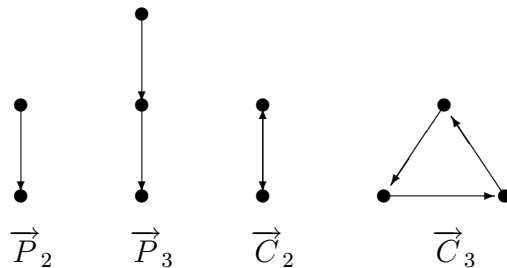


FIGURE 5.1. Digraphes avec $\Delta^+(\vec{T}) = 1$, $\Delta^-(\vec{T}) = 1$ et $\gamma_{dR}(D) = 2n - 1$.

5.4 Arbres orientés avec $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$

Dans cette sous-section, \vec{T} sera un arbre orienté avec $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$, et x un sommet d'ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$.

Lemme 5.12. [63] *\vec{T} possède un seul sommet avec ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un autre sommet $y \neq x$ avec $d_{\vec{T}}^+(y) = \Delta^+(\vec{T}) \geq 2$. Si y est dans $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$. Il résulte du Lemme 5.8 que $N_{\vec{T}}^+(y) \subseteq N_{\vec{T}}^+[x]$ et puisque $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$, on obtient un cycle dans l'arbre \vec{T} , d'où on a une contradiction. Donc y doit être dans $N_{\vec{T}}^+(x)$. Mais dans ce cas comme \vec{T} est un arbre et $d_{\vec{T}}^+(y) \geq 2$, y a au moins deux ext-voisins dans $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$, ce qui donne une contradiction avec le Lemme 5.9. \square

Soit \vec{T} un arbre orienté avec un sommet x d'ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$. On définit sur $N_{\vec{T}}^+(x)$ les sous-ensembles suivants:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left\{ y \in N_{\vec{T}}^+(x) : \left| N_{\vec{T}}^-(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 0 \text{ et } \left| N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 0 \right\}, \\ Y_2 &= \left\{ y \in N_{\vec{T}}^+(x) : \left| N_{\vec{T}}^-(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 0 \text{ et } \left| N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 1 \right\}, \\ Y_3 &= \left\{ y \in N_{\vec{T}}^+(x) : \left| N_{\vec{T}}^-(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 1 \text{ et } \left| N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 0 \right\}, \\ Y_4 &= \left\{ y \in N_{\vec{T}}^+(x) : \left| N_{\vec{T}}^-(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 1 \text{ et } \left| N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| = 1 \right\}, \\ Y_5 &= \left\{ y \in N_{\vec{T}}^+(x) : \left| N_{\vec{T}}^-(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| \geq 2 \right\}, \\ Z &= N_{\vec{T}}^-(x). \end{aligned}$$

Notez que Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 et Y_5 forment une partition de $N_{\vec{T}}^+(x)$. (voir la Figure 5.2.)

Lemme 5.13. [63] Pour $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$, \vec{T} satisfait à l'une des conditions suivantes:

1. $|Z| = 0$.
2. $|Z| = 1$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 2$.
3. $|Z| \geq 2$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 3$.

Preuve. Noter que d'après le Lemme 5.12, \vec{T} a un unique sommet disant, x avec ext-degré $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$. D'après les Lemmes 5.8, 5.9 et 5.10, on a successivement,

$$\Delta^+(\langle \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \rangle) = 0, |Y_1| + |Y_2| \geq 1 \text{ et } \left| N_{\vec{T}}^+(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| \leq 1, \forall y \in N_{\vec{T}}^+(x).$$

Si la condition 1 n'est pas vérifiée, alors $|Z| > 0$. Supposons tout d'abord que $|Z| = 1$. Si $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \leq 1$, alors $(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3 \cup Y_4|) = (0, 1, 0)$ car $|Y_1| + |Y_2| \geq 1$. Soit

$Z = \{z\}$, $Y_2 = \{y_2\}$ avec $N_{\vec{T}}^+(y_2) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{u\}$. La fonction

$$g(v) = \begin{cases} 3 & \text{pour } v \in \{y_2, z\} \\ 2 & \text{pour } v \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} - \{z, u\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une *FDRD* de \vec{T} avec $w(g) = 2(n - \Delta^+(\vec{T}))$, d'où on a une contradiction. Donc nous devons avoir $|Z| = 1$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 2$.

Supposons maintenant que $|Z| \geq 2$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \leq 2$. Il y a quatre possibilités selon les valeurs de $(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3 \cup Y_4|)$.

1. $(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3 \cup Y_4|) = (0, 1, 0)$. Soit $Y_2 = \{y_2\}$ avec $N_{\vec{T}}^+(y_2) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{u\}$. La fonction

$$g(v) = \begin{cases} 3 & \text{for } v = y_2 \\ 2 & \text{for } v \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} - \{u\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une *FDRD* de \vec{T} avec $w(g) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) - 1$, d'où on a une contradiction.

2. $(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3 \cup Y_4|) = (0, 1, 1)$. Soit $Y_2 = \{y_2\}$ avec $N_{\vec{T}}^+(y_2) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{u\}$, $Y_3 \cup Y_4 = \{y\}$ et $N_{\vec{T}}^-(y) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{v\}$. La fonction

$$g(v) = \begin{cases} 3 & \text{pour } v \in \{y_2, v\} \\ 2 & \text{pour } v \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} - \{u, v\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une *FDRD* de \vec{T} avec $w(g) = 2(n - \Delta^+(\vec{T}))$, d'où on a une contradiction.

3. $(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3 \cup Y_4|) = (0, 2, 0)$. Soit $Y_2 = \{y_1, y_2\}$, avec $N_{\vec{T}}^+(y_1) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{u_1\}$ et $N_{\vec{T}}^+(y_2) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{u_2\}$. La fonction

$$g(v) = \begin{cases} 3 & \text{pour } v \in \{y_1, y_2\} \\ 2 & \text{pour } v \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} - \{u_1, u_2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une *FDRD* de \vec{T} avec $w(g) = 2(n - \Delta^+(\vec{T}))$, une contradiction.

4. $(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3 \cup Y_4|) = (1, 0, 0)$. Soit $Y_1 = \{y_1\}$. La fonction

$$g(v) = \begin{cases} 2 & \text{pour } v \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \cup \{y_1\} \\ 0 & \text{pour } v \in N_{\vec{T}}^+[x] - \{y_1\} \end{cases}$$

est une *FDRD* de \vec{T} avec $w(g) = 2(n - \Delta^+(\vec{T}))$, d'où on a une contradiction. Donc nous devons avoir $|Z| \geq 2$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 3$. \square

Pour caractériser tous les arbres orientés \vec{T} d'ordre n avec $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$, nous définissons la famille suivante.

Soit \mathcal{F} la famille de tous les arbres orientés \vec{T} d'ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1. \vec{T} a un sommet unique avec ext-degré $\Delta^+(\vec{T})$,
2. $\overline{N_{\vec{T}}^+(x)}$ est un ensemble indépendant,
3. $N_{\vec{T}}^+(x)$ contient au moins un sommet sans int-voisins dans $\overline{N_{\vec{T}}^+(x)}$,
4. Chaque sommet dans $N_{\vec{T}}^+(x)$, a au plus un ext-voisin dans $\overline{N_{\vec{T}}^+(x)}$,
5. $|Z| = 0$ ou, $|Z| = 1$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 2$. ou, $|Z| \geq 2$ et $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 3$.

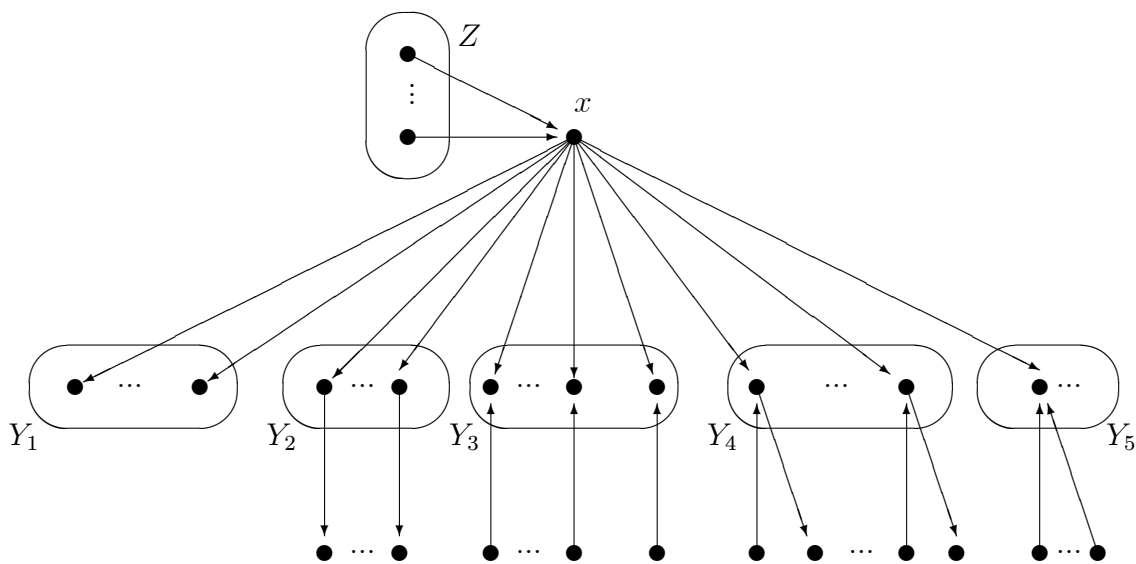


FIGURE 5.2. Un exemple d'arbre orienté \vec{T} qui appartient à \mathcal{F} .

Théorème 5.14. [63] Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre n avec d'ext-degré $\Delta^+(\vec{T}) \geq 1$. Alors $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$ si et seulement si $\vec{T} \in \{\vec{P}_2, \vec{P}_3\} \cup \mathcal{F}$.

Preuve. Soit \vec{T} un arbre orienté avec un ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 1$ qui satisfait $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$. Soit x un sommet d'ext-degré maximum $\Delta^+(\vec{T}) \geq 1$. Supposons que $\Delta^+ = 1$. Si $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \emptyset$ alors $\vec{T} = \vec{P}_2$, et si $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \neq \emptyset$ alors d'après les deux Lemmes 5.8 et 5.9, $\vec{T} = \vec{P}_3$. Donc, $\vec{T} \in \{\vec{P}_2, \vec{P}_3\}$. Supposons maintenant que $\Delta^+(\vec{T}) \geq 2$. Du Lemme 5.8 au Lemme 5.13, nous avons $\vec{T} \in \mathcal{F}$.

Inversement, si $\vec{T} \in \{\vec{P}_2, \vec{P}_3\}$, alors clairement que $\gamma_{dR}(\vec{T}) = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$. Supposons maintenant que $\vec{T} \in \mathcal{F}$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une γ_{dR} -fonction de \vec{T} avec $V_1 = \emptyset$ (Voir la Proposition 5.2). Nous distinguons trois cas par rapport à $f(x)$:

Case 1. $f(x) = 0$. Alors soit x a un int-voisin dans Z assigné la valeur 3 ou deux int-voisins dans Z assignés la valeur 2 sous f . Il est facile de voir que $f(v) = 2$, pour tout sommet v dans Y_1 , $f(N_{\vec{T}}^+[v]) = 3$ pour chaque sommet v dans Y_2 , $f(N_{\vec{T}}^-[v]) = 3$ pour chaque sommet v dans Y_3 . Concernant l'ensemble Y_4 , soit $v \in Y_4$ et $u, w \in \overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$ tels que $N^-(v) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{u\}$ $N^+(v) \cap \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} = \{w\}$. Il est claire que $N_{\vec{T}}^-[v] - \{x\} = \{u, v, w\}$. Comme f est une γ_{dR} -fonction de \vec{T} , alors $(f(u), f(v), f(w)) \in \{(2, 3, 0), (3, 0, 2)\}$. Par conséquent $f(N_{\vec{T}}^-[v] - \{x\}) = 5$ pour chaque sommet v dans Y_4 . Aussi, $f(v) = 0$ pour chaque sommet v dans Y_5 , et finalement $f(v) = 2$ pour chaque sommet v dans $N_{\vec{T}}^-(Y_5) - \{x\}$. Alors,

$$\begin{aligned} \gamma_{dR}(\vec{T}) &= f(V) \\ &= f(Z) + 2|Y_1| + 3|Y_2| + 3|Y_3| + 5|Y_4| + \\ &2 \left(\left| \overline{N_{\vec{T}}^+[x]} \right| - |Y_2| - |Y_3| - 2|Y_4| - |Z| \right) \\ &= 2 \left(n - \Delta^+(\vec{T}) \right) + (2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4|) - 2 + f(Z) - 2|Z|. \end{aligned}$$

Puisque $|Z| > 0$, nous avons deux possibilités en ce qui concerne $|Z|$:

Si $|Z| = 1$, alors il est facile de voir que $f(Z) = 3|Z| = 3$. D'après la Condition (5), on a $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 2$. Donc $\gamma_{dR}(\vec{T}) \geq 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$. L'égalité est obtenue du fait que $\gamma_{dR}(\vec{T}) \leq 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$.

Si $|Z| \geq 2$, alors il est facile de voir que $f(Z) = 2|Z|$. D'après la Condition (5), on a $2|Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| \geq 3$. Donc $\gamma_{dR}(\vec{T}) \geq 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$. Ainsi, l'égalité est obtenue du fait que $\gamma_{dR}(\vec{T}) \leq 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$.

Case 2. $f(x) = 2$. On a,

$$\begin{aligned}\gamma_{dR}(\vec{T}) &= f(V) \\ &= 2 + 2|Y_1| + 3|Y_2| + 2\left(\left|\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}\right| - |Y_2|\right) \\ &= 2 + 2|Y_1| + |Y_2| + 2\left(n - \Delta^+(\vec{T}) - 1\right) \\ &= 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 2|Y_1| + |Y_2|.\end{aligned}$$

D'après la Condition (4), $|Y_1| + |Y_2| \geq 1$, et comme $|Y_1| \geq 0$, on a $2|Y_1| + |Y_2| \geq |Y_1| + |Y_2| \geq 1$. Donc $\gamma_{dR}(\vec{T}) \geq 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$. L'égalité est obtenue du fait que $\gamma_{dR}(\vec{T}) \leq 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1$.

Case 3. $f(x) = 3$. Alors par la minimalité de f , $f(v) = 2$ pour chaque sommet v dans $\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}$ et $f(v) = 0$ pour chaque sommet v dans $N_{\vec{T}}^+(x)$. Donc,

$$\gamma_{dR}(\vec{T}) = f(V) = 3 + 2\left|\overline{N_{\vec{T}}^+[x]}\right| = 2(n - \Delta^+(\vec{T})) + 1.$$

□

Dans la suite nous fournissons une caractérisation de quelques classes de digraphes D à savoir les digraphes k -ext-réguliers avec $1 \leq k \leq n - 1$, et les tournois D satisfaisants $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$.

5.5 Digraphes ext-réguliers avec $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$

Nous donnons dans cette sous-section, une caractérisation descriptive des digraphes ext-réguliers vérifiant $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$.

Observation 5.15. [61] *Soit D un digraphe d'ordre n et d'ext-degré minimum $\delta^+(D) \geq 1$. Si $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$, alors D est connexe.*

Preuve. Soit $x \in X_{\Delta^+(D)}$. Puisque $\delta^+(D) \geq 1$, il résulte du Lemme 5.8 que pour tout sommet v dans $\overline{N_D^+[x]}$, l'ensemble $N_D^+(v)$ doit être dans $N_D^+[x]$ ce qui implique que D est connexe. □

Théorème 5.16. [61] *Soit D un digraphe k -ext-régulier avec $k \geq 1$. Alors*

$$\gamma_{dR}(D) = 2(n - k) + 1 \text{ si et seulement si } D \in \{K_{k+1}^*, K_{k+2}^*\}.$$

Preuve. Soit D un digraphe k -ext-régulier avec $\gamma_{dR}(D) = 2(n - k) + 1$ et soit $x \in V$. Notez que D est connexe (par Observation 5.15). Nous allons d'abord prouver que $|\overline{N_D^+[x]}| \leq 1$. Pour ce faire, supposons au contraire que $|\overline{N_D^+[x]}| \geq 2$. D'après le Lemme 5.8, chaque sommet z dans $\overline{N_D^+[x]}$ vérifie $N_D^+(z) \subseteq N_D^+[x]$. Maintenant, soit $z \in \overline{N_D^+[x]}$. Selon le Lemme 5.9 et le fait que D est un digraphe k -ext-régulier, on a $z \rightarrow x$ et il existe exactement un sommet y dans $N_D^+(x)$ tel que $z \rightarrow y$. Puisque $y \in \overline{N_D^+[z]} = V - N_D^+[z]$, on peut utiliser le même argument comme précédemment pour déduire que $N_D^+(y) \subseteq N_D^+[z]$ avec $y \rightarrow z$. Puisque $|\overline{N_D^+[x]}| \geq 2$, soient u et v deux sommets quelconques distincts dans $\overline{N_D^+[x]}$. Lemme 5.9 implique que $N_D^+(x)$ a exactement un sommet $y \notin N_D^+(u) \cup N_D^+(v)$, ce qui implique que $N_D^+(u) = N_D^+(v) = N_D^+[x] - \{y\}$. Donc $N_D^-(w) \cap \overline{N_D^+[u]} = \{v\} \neq \emptyset$ pour tout sommet $w \in N_D^+(u)$, ce qui conduit à nouveau à une contradiction avec le Lemme 5.9. Donc, $|\overline{N_D^+[x]}| \leq 1$, et cette condition nous permet de distinguer deux cas:

Case 1. $|\overline{N_D^+[x]}| = 0$. Comme D est un digraphe k -ext-régulier, tout sommet y dans $N_D^+(x)$ satisfait $N_D^+[y] = N_D^+[x]$, ce qui implique que D est un digraphe symétrique complet k -ext-régulier K_{k+1}^* d'ordre $k + 1$.

Case 2. $|\overline{N_D^+[x]}| = 1$. Dans ce cas D est un digraphe k -ext-régulier d'ordre $k + 2$. S'il existe deux sommets, disant u, v dans V tels que $u \leftrightarrow v$, et comme $n = k + 2$ et $d_D^+(u) = d_D^+(v) = k$, alors on obtient $N_D^+(u) = N_D^+(v)$, et donc tout sommet dans $N_D^+(u)$ a int-voisin dans $\overline{N^+[u]} = \{v\}$ ce qui contredit le Lemme 5.9. Par conséquent D est un digraphe complet k -ext-régulier K_{k+2}^* d'ordre $k + 2$.

Inversement, soit $D \in \{K_{k+1}^*, K_{k+2}^*\}$. Si $n = k + 1$, alors il est facile de voir que $\gamma_{dR}(T_n) = 3 = 2(n - k) + 1$. Maintenant, pour $n = k + 2$, supposons au contraire que $\gamma_{dR}(T_n) < 2(n - k) + 1 = 5$. Soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $\gamma_{dR}(T_n)$ -fonction avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 5.2) et V_2 de cardinalité minimale. Comme $n \geq 2$, $3 \leq 2|V_2| + 3|V_3| \leq 4$, donc $(|V_2|, |V_3|) = (0, 1)$ ou $(2, 0)$. Si $(|V_2|, |V_3|) = (0, 1)$, alors D a un sommet d'ext-degré $n - 1$, d'où on a une contradiction avec $\Delta^+(D) = n - 2$. Si $(|V_2|, |V_3|) = (2, 0)$ alors T_n a deux sommets u, v tels que $N_D^+(u) \cap N_D^+(v) = V - \{u, v\}$ et $u \leftrightarrow v$, d'où on a une contradiction avec le fait que D est un digraphe complet. \square

Corollaire 5.17. *Soit D un graphe orienté k -ext-régulier d'ordre n avec $1 \leq k \leq n - 1$. Alors $\gamma_{dR}(D) = 2(n - k) + 1$ si et seulement si $D = \vec{C}_3$.*

5.6 Tournois avec $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$

Dans cette sous-section, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur les tournois T_n pour lesquels $\gamma_{dR}(T_n) = 2(n - \Delta^+(T_n)) + 1$.

Théorème 5.18. [61] *Soit T_n un tournoi d'ordre n et d'ext-degré maximum $\Delta^+(T_n) \geq 1$. Alors $\gamma_{dR}(T_n) = 2(n - \Delta^+(T_n)) + 1$ si et seulement si $\Delta^+(T_n) \geq n - 2$.*

Preuve. Soit T_n un tournoi d'ordre n et $x \in X_{\Delta^+(T_n)}$. Supposons que $\gamma_{dR}(T_n) = 2(n - \Delta^+(T_n)) + 1$. D'après le Lemme 5.8 et le fait que le sous-graphe $D \left[\overline{N_{T_n}^+[x]} \right]$ soit aussi un tournoi, nous avons $\left| \overline{N_{T_n}^+[x]} \right| \leq 1$, et nous déduisons que $\Delta^+(T_n) \geq n - 2$.

Inversement, si $\Delta^+(T_n) = n - 1$, alors il est facile de voir que $\gamma_{dR}(T_n) = 3 = 2(n - \Delta^+(T_n)) + 1$. Maintenant, pour $\Delta^+(T_n) = n - 2$, supposons au contraire que $\gamma_{dR}(T_n) < 2(n - \Delta^+(T_n)) + 1 = 5$. Soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $\gamma_{dR}(T_n)$ -fonction avec V_2 de cardinalité minimale. Comme $n \geq 2$, $3 \leq 2|V_2| + 3|V_3| \leq 4$, donc $(|V_2|, |V_3|) = (0, 1)$ ou $(2, 0)$. Si $(|V_2|, |V_3|) = (0, 1)$, alors T_n a un sommet avec ext-degré $n - 1$, d'où on a une contradiction avec $\Delta^+(T_n) = n - 2$. Si $(|V_2|, |V_3|) = (2, 0)$ alors T_n a deux sommets u, v tels que $N_{T_n}^+(u) \cap N_{T_n}^+(v) = V - \{u, v\}$ et $u \leftrightarrow v$, d'où on a une contradiction avec le fait que T_n est un tournoi. \square

5.7 Égalité de Nordhaus-Gaddum pour les Digraphes D avec

$$\underline{\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3}$$

Dans cette section, nous donnons une caractérisation descriptive des digraphes D tels que $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3$. Rappelons ici que $\overrightarrow{K_{k+1}^*}$ est le digraphe complet symétrique k -ext-régulier d'ordre $n = k + 1$ (ou digraphe $(n - 1)$ -ext-régulier). A partir d'un circuit $\overrightarrow{C_3}$, on construit deux graphes orientés 1-ext-réguliers, notés par $\overrightarrow{H_1}$ et $\overrightarrow{H_2}$ tels que $\overrightarrow{H_1}$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{C_3}$ en ajoutant un sommet, disant v et on l'attache par un arc de v à un sommet de $\overrightarrow{C_3}$. $\overrightarrow{H_2}$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{H_1}$ en ajoutant un sommet, disant, u et on l'attache par un arc de u au sommet v de $\overrightarrow{H_1}$.

Théorème 5.19. [21] Pour tout digraphe D d'ordre $n \geq 4$,

$$\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3.$$

Théorème 5.20. [61] Si D est un digraphe d'ordre $n \geq 4$, alors

$$6 \leq \gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3.$$

De plus, la borne inférieure de $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D})$ est atteinte si et seulement si chacun de D et \overline{D} a un sommet d'ext-degré $n - 1$ et la borne supérieure de $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D})$ est atteinte si et seulement si D ou $\overline{D} \in \left\{ \overrightarrow{K_{k+1}^*}, \overrightarrow{C_4}, \overrightarrow{C_5}, 2\overrightarrow{C_3}, \overrightarrow{H_1}, \overrightarrow{H_2} \right\}$.

Preuve. Lorsque D a au moins quatre sommets, il est clair que D et son complément \overline{D} satisfont $\gamma_{dR}(D) \geq 3$ et $\gamma_{dR}(\overline{D}) \geq 3$, donc $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \geq 6$ et l'égalité est vraie si et seulement si D et \overline{D} ont tous les deux un sommet de ext-degré $n - 1$. Ainsi, il est clair que, la borne supérieure découle du théorème 5.19,

$$\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3.$$

Pour prouver l'égalité, nous commençons par la condition nécessaire. Supposons que $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3$. D'après le Théorème 5.3 et $\Delta^+(\overline{D}) = n - \delta^+(D) - 1$ on a,

$$2n + 3 = \gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n - 2(\Delta^+(D) - \delta^+(D)) + 4, \quad (5.3)$$

ce qui implique que $\Delta^+(D) = \delta^+(D) = k$. Par conséquent D est k -ext-régulier et \overline{D} est aussi k' -ext-régulier avec $k + k' = n - 1$. Ainsi, d'après (5.3), nous pouvons déduire que $\gamma_{dR}(D) = 2(n - k) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2k + 2$ ou $\gamma_{dR}(D) = 2(n - k)$ et $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2k + 3$. Sans perte de généralité, supposons que $\gamma_{dR}(D) = 2(n - k) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2k + 2$. D'après le Théorème 5.16, $D = \overrightarrow{K_{k+1}^*}$ ou $D = \overrightarrow{K_{k+2}^*}$, et on obtient $k \in \{n - 1, n - 2\}$. Maintenant, en utilisant le fait que $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2k + 2$, nous avons deux cas: \square

Case 1. $k = n - 1$. Dans ce cas, $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2(n - 1) + 2 = 2n$. Par le Théorème 5.1, nous en déduisons que \overline{D} est un digraphe vide ($\Delta^+(\overline{D}) = 0$) et donc $D = \overrightarrow{K_{k+1}^*}$.

Case 2. $k = n - 2$. Dans ce cas, $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2k + 2 = 2n - 2$ et $k' = n - 1 - k = 1$. Par conséquent, \overline{D} est un 1-ext-régulier. Premièrement, notons que chaque composante de \overline{D} contient exactement un circuit $\overrightarrow{C_p}$ comme un sous digraphe d'ordre $p \geq 3$. Aussi,

on observe que si \overline{D} contient au moins trois arcs différents, disant $x_1 \longrightarrow y_1$, $x_2 \longrightarrow y_2$ et $x_3 \longrightarrow y_3$ i.e., $(x_i, y_i) \in A(\overline{D})$ tels que $x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$ et $x_i \neq y_j$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$ avec $i \neq j$. Définissons f par $f(x_i) = 3, f(y_i) = 0$, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et $f(v) = 2$ pour chaque $v \in V(\overline{D}) - \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$. Alors f est une *FDRD* sur \overline{D} de poids $2n - 3$, d'où on a une contradiction avec le fait que $\gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n - 2$. Donc, \overline{D} contient au plus deux composantes connexes. Il est claire que si \overline{D} est connexe, alors \overline{D} contient un seul circuit \overrightarrow{C}_p d'ordre p avec $3 \leq p \leq 5$, et si D contient deux composantes connexes, alors chacune d'elle contient \overrightarrow{C}_3 . De plus, on observe que tout sommet x de \overline{D} satisfait $\Delta^-(\langle \overline{N_D^+}[x] \rangle) \leq 1$ (Sinon, s'il existe un sommet, disant z dans $\overline{N_D^+}[x]$ tel que z a au moins deux int-voisins dans $\overline{N_D^+}[x]$. Nous définissons f par $f(x) = 3, f(y) = f(z) = 0$ et $f(v) = 2$ pour chaque $v \in V(\overline{D}) - \{x, y, z\}$, où $x \rightarrow y$. Alors f est une *FDRD* sur \overline{D} du poids $2n - 3$, d'où on a encore une contradiction). En utilisant ces observations, on déduit que $4 \leq n \leq 6$, et il est simple de vérifier que si $n = 4$ alors $\overline{D} = \overrightarrow{C}_4$ ou \overrightarrow{H}_1 , si $n = 5$ alors $\overline{D} = \overrightarrow{C}_5$ ou \overrightarrow{H}_2 , et si $n = 6$ alors $\overline{D} = 2\overrightarrow{C}_3$. Par conséquent, D ou $\overline{D} \in \{\overrightarrow{K_{k+1}^*}, \overrightarrow{C}_4, \overrightarrow{C}_5, 2\overrightarrow{C}_3, \overrightarrow{H}_1, \overrightarrow{H}_2\}$.

La condition suffisante est facile à voir et nous omettons les détails.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, on a abordé trois thèmes de recherche, à savoir la k -domination, la romaine domination et la romaine domination double dans les digraphes. Dans un premier lieu, pour la k -domination, nous avons donné quelques bornes inférieures pour $\gamma_k(D)$. En particulier $\gamma_k(D) \geq \frac{kn}{k + \Delta^+(D)}$ c'est la borne généralisée de $\gamma(D) \geq \frac{n}{1 + \Delta^+(D)}$ donnée par Ghoshal et all. Ainsi nous avons caractérisé les digraphes atteignant ces bornes. Ensuite, nous avons donné quelques bornes supérieures pour $\gamma_k(D)$. En particulier $\gamma_k(D) \leq \frac{2kn}{2k+1}$ c'est la borne généralisée de $\gamma(D) \leq \frac{2n}{3}$ donnée par Lee. En plus, nous avons caractérisé les digraphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

Dans un second lieu, nous avons étudié la domination romaine dans les digraphes. On a commencé par caractérisé quelques classes spéciales de graphes orientés satisfaisants, $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$, à savoir les graphes orienté k -réguliers, les tournois et les arbres orientés atteignant cette borne supérieure. Ainsi, nous avons caractérisé les digraphes D d'ordre $n \geq 1$ pour lesquels la borne Nordhaus-Gaddum $\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) = n + 3$ est atteinte. Puis, nous avons prouvé que le problème de décider si un graphe orienté D satisfait $\gamma_R(D) = n - \Delta^+(D) + 1$ est CO- NP -complet. Dans le dernier thème, nous avons caractérisé des classes spéciales de graphes orientés satisfaisants, $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+(D)) + 1$. Aussi, nous avons caractérisé les digraphes D d'ordre $n \geq 1$ pour lesquels la borne Nordhaus-Gaddum $\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) = 2n + 3$ est atteinte.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives, et nous proposons quelques problèmes.

- Caractérisation de quelques classes de digraphes tels que $\gamma_k(D) = n - 2$.
- Donner des relations de type Nordhaus-Gaddum pour $\gamma_k(D)$.
- Chercher les digraphes extrémaux dans certaines classes de digraphes D tels que $\gamma_R(D) = n - \Delta^+ + 1$.

- Chercher les digraphes extrémaux dans certaines classes de digraphes D tels que $\gamma_{dR}(D) = 2(n - \Delta^+) + 1$.
- Beeler et al.(2016) ont montré que si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$ et Cockayne (1978) a montré que $\gamma(G) \leq \beta$. D'où:

$$\gamma_{dR}(G) \leq 3\beta.$$

On propose les deux problèmes suivants:

- 1- Étudier la complexité du problème $\gamma_{dR}(G) = 3\beta$.
- 2- Caractérisation des graphes tels que $\gamma_{dR}(G) = 3\beta$.

RÉFÉRENCES

- [1] H.A. Ahangar, M. Chellali and S.M. Sheikholeslami, " *On the double Roman domination in graphs* ". Discrete Appl. Math. (232), 1-7 (2017).
- [2] V. Anu and S.A. Lakshmanan, " *Double Roman domination number* ". Discrete Appl. Math. (244), 198-204 (2018).
- [3] J. Amjadi, A. Bahremndpour S. M. Sheikholeslami and L. Volkmann, " *The Rainbow Domination Number of a digraph* ". Acta Universitatis Apulensis, (37), 255 (2013).
- [4] J. Amjadi, S. Nazari-Moghaddam. S.M. Sheikholeslami and L. Volkmann, *An upper bound on the double Roman domination number* ". J. Comb. Optim. (36), 81-89 (2018).
- [5] H. A. Ahangar, M. Chellali and S.M. Sheikholeslami, " *On the double Roman domination in graphs* ". Discrete Applied Mathematics. Accepted 13 June 2017.
- [6] C. Berge, " *The Theory of Graphs and Its Applications* ". John Wiley & Sons, New York, NY (1962).
- [7] M. Blidia, L. OuldRabah " *Bounds on the domination number in oriented graphs*". Australasian J. Combinatorics 48: 231-242 (2010).
- [8] J. Bang et G. Gutin " *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*". Springer-Verlag .January 28, (2008).
- [9] T. J Bean, M. A. Henning and H. C. Swart, *On the integrity of distance domination in graphs*. Australas. J. Comb. (10) 29-43 (1994).
- [10] R. A. Beeler, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, " *Double Roman domination* ". Discrete Appl. Math. (211), 23-29 (2001).
- [11] D.W. Bange, A. E. Barkauskas, L.H. Host, P.J. Slater, " *Generalized domination and efficient domination in graphs* ". Discrete Mathematics, (159), 1-11 (1996).

- [12] K.S. Booth et J.H. Johnson, " *Dominating sets in chordal graphs* ". SIAM J. Comput. (11), 191-199 (1982).
- [13] A. A. Bertossi, " *Dominating set for split and bipartite graphs* ". Inform. Process. Lett., (19), 37-40 (1984).
- [14] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, " *k*-domination and *k*-independence in graphs ". A survey, Graphs Combin. (281), 1-55 (2012).
- [15] E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi, " *A linear algorithm for the domination number of a tree* ". Inform. Process. Lett., 4 (2), 41-4 (1975).
- [16] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, " *Extremal problems for Roman domination* ". SIAM J. Discrete Math. (23), 1575-1586 (2009).
- [17] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, " *Roman domination in graphs* ". Discrete Mathematics (278), 11-22 (2004).
- [18] E. J. Cockayne, B. Gamble and B. Shepherd. " *An upper bound for the k-domination number of a graph* ". J. Graph Theory (9), 533-534 (1985).
- [19] Y. Caro, unpublished, communicated by N. Linial (1980).
- [20] S. Cook, " *The complexity of theorem proving procedures* " Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 22 (1), 151-158 (1971).
- [21] X. Chen, G. Hao and Z. Xie, " *A note on Roman domination of Digraphs* ". Discussiones Mathematicae Graph Theory (39) 13-21 (2019) doi:10.7151/dmgt.2067.
- [22] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks (7), 247-261 (1977).
- [23] G. S. Domke, G H Fricke, R R Laskar, A. Majumdar, " *Fractional domination and related parameters* ". Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, (1998).
- [24] J E. Dunbar, Hedetniemi S T, M. A. Henning, A. A. McRae, " *Minus domination in graphs* ". Discrete Mathematics, (199), 35-47 (1999).

- [25] J.E. Dunbar, Hedetniemi S T, M. A. Henning, P.J. Slater, " *Signed domination in graphs* ". Graph Theory, Combinatorics, and Applications: Vol. 1. New York: Wiley, 311-322 (1995).
- [26] P. A Dreyer, " *Applications and Variations of Domination in Graphs*, Thesis, New Jersey (2000).
- [27] A. K. Dewdney, " *Fast turning reductions between problems in NP; chapter 4; reductions between NP-compet problems. Technical report 71* ". Dep. Computer Science, Univ. Western Ontario, (1981).
- [28] J. Edmonds, " *Paths trees and flowers*". Canad. J. Math. (174), 49-467 (1965).
- [29] A. Fraenkel, " Planar kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 2$ are NP-complete ". Discrete Appl. Math. (3), 257-262 (1981).
- [30] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar, and S. M. Sheikholeslami, " *On the Roman domination number of a graph* ". Discrete Math. (309), 3447-3451 (2009).
- [31] J. F. Fink, M.S. Jacobson, " *n-domination in graphs* ". In Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science,. New York, 283-300 (1985).
- [32] J. F. Fink, M.S. Jacobson, " *On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs* ". In Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer, Science. New York, , 301-311 (1985).
- [33] J. Ghoshal, R. Laskar and D. Pillone, *Topics on domination in directed graphs*, in *domination in graphs: Advanced topics*, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater (eds), *Marcel Dekker, New York*, 401-437, (1998).
- [34] M.R. Garey and D.S. Johnson, " *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness* ". (Freeman, San Francisco), (1979).
- [35] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, " *Fundamentals of domination in graphs* ". Marcel Dekker, New York, (1998).

- [36] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, " *Domination in graphs: Advanced topics* ". Marcel Dekker, New York, (1998).
- [37] M. A. Henning, " *Dominating function in graphs* ". Domination in Graphs: Advanced Topics: Vol.II. New York: Marcel Dekker Inc., 31-62 (1998).
- [38] G. Hao, X. Chen and L.Volkman, " *Double Roman domination of digraphs* ". Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, Volume 42, Issue 5, pp 1907-1920 (2019).
- [39] M. S. Jacobson and K. Peters, *Complexity questions for n -domination and related parameters*, Congressus Numerantium (68) 7-22 (1989).
- [40] M. Kamaraj, P. Jakkammal, " *Roman domination in Digraphs,*" submitted.
- [41] S.K. Merz and D.J. Stewart, " *Gallai-type theorems and domination in digraphs and tournaments* ". Congressus Numerantium,(15), 431-41 (2002).
- [42] C. Lee, " *On the domination number of a digraph* ". Ph.D. Dissertation, Michigan State University (1994).
- [43] C. Lee, *Domination in digraphs*, J. Korean Math. Soc. 35, No. 4 pp 843-853, (1998).
- [44] C.-H. Liu and G. J. Chang, " *Upper bounds on Roman domination numbers of graphs* ". Discrete Math. 312 (2012), 1386-1391.
- [45] R. Laskar and K. Peters, " *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
- [46] R. E. Ladner, " *On the structure of polynomial time reducibility*" Journal of the ACM, 22 (1), 151-171 (1975).
- [47] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, " *On the algorithmic complexity of total domination* " . SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, N°3, september (1984).

- [48] A. Meir and J.W. Moon, " *Relations between packing and covering number of a tree* ". Pacific J. Math. (61), 225-233 (1975).
- [49] C. Payan and N.H. Xuong, " *Domination-balanced graphs* ". J. Graph Theory (6), 23-32 (1982).
- [50] K. B. Reid, A. A. McRae and S.M. Hedetniemi S.T. Hedetniemi, " *Domination and irredundance in tournaments* ". Australasian Journal of Combinatorics, (29), 157-172 (2004).
- [51] N. J. Rad and L. Volkmann, " *Changing and unchanging the Roman domination number of graph* ", Util. Math. (89), 79-95 (2012).
- [52] M. Schnupp, " *Broadcast Domination* ". Thesis, Jena (2006).
- [53] S. M. Sheikholeslami and L. Volkmann, " *The Roman Domination Number of a digraph* ". Acta Universitatis Apulensis, (27), 77-86 (2011).
- [54] C.F. Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*, Petrograde (1862).
- [55] G. J. Chang and G. L. Nemhauser, " *the k -domination and k -stability problems in sun-free chordal graphs* ". SIAM J. Algebraic Discrete Methods, (5) , 332-345 (1984).
- [56] J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone, " *Topics on domination in directed graphs* ", " *In Domination in Graphs* ". Haynes, T.W., Hedetniemi. S. T. Slater and P.J., editors. Marcel Dekker, Inc. New York, 401 – 437 (1998).
- [57] .G. Hao, D. Ali Mojdeh, and S. Wei,Z. Xie, " *Rainbow domination in the Cartesian product of directed paths* ". Australasian Journal of Combinatorics. Volume 70 (3) 349-361(2018).
- [58] O. Ore, " *Theory of graphs* ". Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.(1962).
- [59] **L. Ouldrabah, M. Blidia, H. A. Bouchou, " *On the k -Domination Number of Digraphs*", Journal of Combinatorial Optimization, 38 (3) 680-688 (2019).**

- [60] L. Ouldrabah, M. Blidia, A. Bouchou, " *Extremal digraphs for an upper bound on the Roman domination number* ", **Journal of Combinatorial Optimization**. 38 (3) 667-679 (2019).
- [61] L. Ouldrabah, M. Blidia, A. Bouchou, L. Volkmann " *Extremal digraphs for an upper bound on the double Roman domination number* ", **Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society**. Article First Online: 05 February (2019). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40840-019-00735-7>.
- [62] L. Ouldrabah, M. Blidia, A. Bouchou, " *Extremal oriented trees for an upper bound on the Double Roman domination number* ", submitted for publication in **Discrete Applied Mathematics**, (2018).
- [63] L. Ouldrabah, M. Blidia, A. Bouchou, " *Roman Domination in Oriented Trees* ", submitted for publication in **Journal Electronic Journal of Graph Theory and Applications**, (2018).
- [64] A. Ramoul, M. Blidia, " *A new generalization of kernels in digraphs* ". **Discrete Applied Mathematics**, (217), 673-684 (2017).
- [65] L. Volkman, K. Jacob, and S. Arumugam, " *Total and connected domination in digraphs* ". **Australasian J.C.** (39), 283 – 292 (2007).
- [66] L. Volkmann, " *Double Roman domination and domatic numbers of graphs* ". **Commun. Comb. Optim.** (3), 71-77 (2018).
- [67] J. Yue, M. Wei, M. Li and G. Liu, " *On the double Roman domination of graphs* ". **Appl. Math. Comput.** (338), 669-675 (2018).
- [68] V. K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Bell Laboratories Technical, Memorandum, 81-11217-9, Murray Hill, NJ (1981).
- [69] X. Zhang, Z. Li, H. Jiang, Z. Shao, " *Double Roman domination in trees* ". Article in **Information Processing Letters**. Preprint submitted to Elsevier, (13), 31-34 (2018).

- [70] E. Zhu Z. Shao " *Extremal problems on weak Roman domination number* ". Information Processing Letters, (138), 12-18 (2018).
- [71] S. Bermudo, H. Fernau, J.M. Sigarreta, " *The differential and the roman domination number of a graph* ". Appl. Anal. Discrete Math. (8) 155-171 (2014).
- [72] I. Steward, " *Defend the Roman Empire!*, Sci. Amer. (281), 136-139 (1999) .
- [73] E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, D.B. West, " *Extremal problems for roman domination* ", SIAM J. Discrete Math. (23) 1575-1586 (2009).
- [74] M. Chellali, N. Jafari Rad, " *Double equality between the roman domination and independent roman domination numbers in trees* ", Discuss. Math. Graph Theory (33) 337-346 (2013).
- [75] N. Jafari Rad and H. Rahbani, " *Some progresse on the Double Roman domination in graphs* ", Discussiones MathematicaeGraph Theory (39) 41-53 (2019). doi:10.7151/dmgt.2069.