UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT (LMD)

En Mathématiques

Option : Modélisation Mathématique et Statistique

ÉTUDE DE L'EXISTENCE DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME EDO NON LINÉAIRE AVEC CONDITIONS DE DIRICHLET

Présentée par

BENTERKI Abdessalem

devant le jury composé de :

M. Blidia	Professeur	U. de Blida 1	Président
M. Rouaki	Maître de Conférences	U. de Blida 1	Directeur de Thèse
T. Moussaoui	Professeur	ENS de Kouba	Examinateur
F. Mokhtari	Maître de Conférences	U. de Alger 1	Examinateur
N. Oukid	Maître de Conférences	U. de Blida 1	Examinatrice

Blida, Février 2019

Je dédie ce travail :

À la mémoire de mon père.

À ma chère mère.

À mes sœurs et mon frère.

Benterki Abdessalem

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu Créateur des univers, l'Omniscient, Qui m'a donné la force, le courage et l'endurance jusqu'à l'accomplissement de ce travail.

La présente thèse a été réalisée sous la supervision du Docteur-chercheur **Rouaki Mohamed**, directeur de thèse. Je désire tout d'abord remercier chaleureusement et vivement monsieur **Rouaki Mohamed** pour l'aide appréciable, conseils précieux et l'encadrement adéquat pour mener à terme cette thèse. Ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux vont particulièrement à mon directeur de recherche pour la confiance qu'il m'a accordée et pour ses idées originales qui ont servi à enrichir cette thèse.

Je tiens également à adresser mes remerciements au Professeur **Blidia Mostafa** pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Je remercie également les professeurs **Toufik Moussaoui**, **Fares Mokhtari** et **Nadia Oukid** pour avoir bien accepté d'examiner cette thèse et de participer à mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.

Je suis aussi très reconnaissant envers **Arslan Hojat Ansari** Docteur-chercheur à l'Université Azad Islamic de Téhéran pour les multiples discussions qui m'ont éclairé sur les problèmes traités sur l'existence des solutions selon la technique de point fixe.

Je désire remercier le professeur **Abdellah-Elhadj Abdellah** directeur du laboratoire de mécanique physique et modélisation mathématique (LMP2M) de l'université de Médéa pour leur aide et leur encouragement.

Mes remerciements vont également à mes amis et mes enseignants Dr. **Rebhi Redha**, Dr. **Alliche Mounir**, Dr. **Hadidi Noureddine** et M. **Zemir Mohamed** pour leurs aides appréciables et leur soutien permanent et sans relâche durant tout cette période de formation doctorale.

J'aimerais adresser un gros merci et exprimer mon extrême gratitude à toute ma famille pour leur patience et leur encouragement tout au long de ces années d'étude et de recherche.

Je remercie énormément mes parents **Hadjira** et **Kamel** qui ont été présents avec moi depuis le début ainsi que mon frère et mes sœurs, **Youcef**, **Zineb** et **Fadhila**.

Benterki Abdessalem

RÉSUMÉ

La question de l'étude de l'existence des solutions pour des problèmes EDO ou EDP non linéaire avec les conditions aux limites, comme conditions de Dirichlet, intéresse les chercheurs depuis plusieurs décennies, et la méthode topologique du point fixe est actuellement trés utilisée.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions pour les problèmes élliptiques suivants, pour $x \in [0,1]$,

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon u'' + f(x,u) = \lambda \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0 \\ \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1) = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} u'' + f(x,u,v) = \lambda, \\ v'' + f(x,v,u) = \lambda, \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} u_1'' + f(x,u_1,u_2) = \lambda & \\ u_2'' + g(x,u_1,u_2) = \mu & \\ \alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0 & i = 1,2 \\ \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1) = 0 & i = 1,2 \end{array}\right. \qquad (P)$$

où $f, g : (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Les constantes $\varepsilon, \lambda, \mu, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i vérifiant, pour chaque $i \in \{1,2\}$,

$$\varepsilon > 0, \lambda, \mu, \beta_i, \delta_i \geqslant 0, \;\; \alpha_i + \beta_i > 0, \;\; \gamma_i + \delta_i > 0, \;\; k_i := \alpha_i\gamma_i + \alpha_i\delta_i + \beta_i\gamma_i > 0.$$

Dans cette thèse, nous avons utilisé trois nouveaux théorèmes du point fixe pour les multifonctions, dans les espaces métriques partiels, pour prouver des résultats d'existence, d'unicité et d'estimation à priori des solutions pour les problèmes non linéaires ci-dessus.

Mots clés

Existence, unicité, point fixe, point fixe couplé, espace métrique partiel, multifonction, équation différentielle d'ordre deux, système différentiel, conditions aux limites, Fonction de Green, Fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi, Fonction de classe C.

2010 Classification mathématique par matières. 65L10, 35J57, 47H04, 47H10, 54H25, 54C60.

ABSTRACT

The question of studying the existence of solutions for nonlinear EDO or EDP problems with boundary conditions, as conditions of Dirichlet, has been of interest to researchers for several decades, and the fixed point topological method is currently very much used.

The objective of this work is to study the existence and uniqueness of solutions for the following elliptic problems, for $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + f(x,u) = \lambda \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0 \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'' + f(x,u,v) = \lambda, \\ v'' + f(x,v,u) = \lambda, \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1'' + f(x,u_1,u_2) = \lambda \\ u_2'' + g(x,u_1,u_2) = \mu \\ \alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0 \quad i = 1,2 \\ \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1) = 0 \quad i = 1,2 \end{cases} \qquad (P)$$

where $f,g : (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions. The constants $\varepsilon, \lambda, \mu, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ and δ_i are such that, for each $i \in \{1,2\}$,

$$\varepsilon > 0, \lambda, \mu, \beta_i, \delta_i \geqslant 0, \;\; \alpha_i + \beta_i > 0, \;\; \gamma_i + \delta_i > 0, \;\; k_i := \alpha_i\gamma_i + \alpha_i\delta_i + \beta_i\gamma_i > 0.$$

In this thesis, we have used three new fixed point theorems for the multifunctions, in the partial metric spaces, to prove the existence, uniqueness and a priori estimate results of the solutions for the nonlinear problems presented above.

Keywords

Existence, uniquness, fixed point, coupled fixed point, multifunction, partial metric space, differential equation of second order, coupled elliptic system, Boundary value problem, Green function, Bianchini-Grandolfi jauge function, C-class function.

2010 Mathematics Subject Classification. 65L10, 35J57, 47H04, 47H10, 54H25, 54C60.

الملــــخص

إن مسألة دراسة وجود حلول لمعادلات تفاضلية EDO أو EDP غير خطية مع شروط على طرفيها، كشروط ديريكلي، أخذت اهتمام الباحثين منذ قرون عدة، و طريقة النقطة الثابتة هي حاليا الأكثر استعمالا.

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود و وحدانية الحلول بالنسبة للمسائل الإهليلجية الآتية، من أجل $x \in [0,1]$،

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + f(x,u) = \lambda \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0 \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'' + f(x,u,v) = \lambda, \\ v'' + f(x,v,u) = \lambda, \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1'' + f(x,u_1,u_2) = \lambda \\ u_2'' + g(x,u_1,u_2) = \mu \\ \alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0 \quad i = 1,2 \\ \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1) = 0 \quad i = 1,2 \end{cases} \qquad (P)$$

حيث أن $f,g : (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين مستمرتين. الأعداد $\varepsilon, \lambda, \mu, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ و δ_i تحقق، من أجل كل $i \in \{1,2\}$، ما يلي

$$\varepsilon > 0, \lambda, \mu, \beta_i, \delta_i \geqslant 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad \gamma_i + \delta_i > 0, \quad k_i := \alpha_i \gamma_i + \alpha_i \delta_i + \beta_i \gamma_i > 0.$$

في هذه الأطروحة، استخدمنا ثلاث نظريات جديدة للنقطة الثابتة بالنسبة لمتعددة الدوال، في الفضاءات المترية الجزئية، لإثبات وجود و وحدانية الحلول و كذا تحديدها بالنسبة للمسائل غير الخطية المذكورة آنفا.

الكلمات المفتاحية

الوجود، الوحدانية، النقطة الثابتة، النقطة الثابتة المزدوجة، متعددة الدوال، فضاء متري جزئي، معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، الأنظمة الإهليلجية المقترنة، المسائل بشروط على طرفيها، دالة غرين، الدالة المقياسية لبيانكيني و غراندولفي، الدالة من نوع C.

2010 **التصنيف الرياضي حسب الموضوع.** 65L10, 35J57, 47H04, 47H10, 54H25, 54C60.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES GRAPHIQUES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La plupart des phénomènes naturels en physique, en chimie, en économie, en biologie ou en mécanique ont un comportement non linéaire. De tels problèmes s'expriment, mathématiquement, sous forme des équations différentielles non linéaires ou des inclusions variationnelles.

Des nombreuses études concernant l'existence des solutions (positives, non positives, nodales, radiales ou non radiales) pour des équations ou des systèmes différentiels de second ordre soumises à diverses conditions aux limites, surtout les conditions de Dirichlet, sont apparues au cours des dix dernières décennies. Les mathématiciens ont trouvé leur chemin pour établir une riche collection de résultats pour les équations différentielles par des méthodes variationnelles [113] et par des techniques topologiques [41, 114].

Les méthodes variationnelles consistent à la reformulation d'un problème EDO ou EDP, en un problème de recherche d'extremum d'une fonctionnelle, qui opère le plus souvent sur un espace de Sobolev. Les méthodes topologiques consistent à la reformulation d'un problème EDO ou EDP, en un problème de recherche d'un point fixe d'un opérateur, qui opère sur des ensembles de fonctions de Hölder.

Les deux techniques topologiques intéressantes sont les théorèmes du point fixe et le degré topologique qui sont étroitement liés. Le théorème du point fixe a l'avantage d'être un théorème relativement élémentaire qui a de nombreuses applications utiles (étude de l'existence et de l'unicité du point fixe, construction d'un algorithme pour le calcul, la convergence de l'algorithme, la stabilité de cet algorithme). La théorie de degré topologique nécessite des considérations plus longues pour son développement, mais elle a un avantage important par rapport aux théorèmes du point fixe : elle donne des informations sur le nombre des solutions distinctes et les familles continues des solutions.

Cette thèse s'intéresse aux problèmes de l'existence, l'estimation et l'unicité par la technique du point fixe pour certaines équations différentielles non linéaires. Des nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité des solutions de certains types d'équations peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application appropriée définie sur un espace bien choisi. Les plus importants outils d'existence en analyse non linéaire sont les théorèmes du point fixe dans le cadre des multifonctions.

Rappelons que la théorie du point fixe est un beau mélange de l'analyse, de la topologie et de la géométrie. Les résultats classiques et majeurs sont : les théorème du point fixe de Banach, de Schauder, de Krasnosel'skii et de Sadovskii pour les fonctions et le théorème de Nadler pour les multifonctions.

Historiquement, Poincaré [90], en 1886, a été le premier à travailler dans la théorie du point fixe pour les courbes definies par les équations différentielles. Puis, en 1912, Brouwer [32] a effectué un théorème du point fixe pour la solution de l'équation $f(x) = x$. Plus tard, il a été étendues par Kakutani [69]. En 1922, Banach [15] a prouvé qu'une fonction de contraction dans un espace métrique complet possède un point fixe unique. Plus tard, il a été développé par Kannan [70].

Schauder, en 1930 [110], a donné une généralization pour le théorème de point fixe de Brouwer dans des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Ce théorème intervient dans la démonstration de l'existence de solutions d'équations différentielles.

En 1955, Krasnosel'skii [73] a observé que l'intégration d'un opérateur différentiel donne une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il a donné un nouveau théorème du point fixe dont lequel il rassemble le principe de l'application contractante de Banach et le théorème de Schauder. Pour plus de détails voir [28].

Dans la même année, Darbo [42] a commencé d'utiliser les ensembles dans les théorèmes des points fixes utilisant la mesure de non-compacité. Plus tard, il a été généralisé par Sadovskii en 1967 [109].

Nadler [87], en 1969, a prouvé le premier théorème de point fixe pour une multifonction contractante utilisant la distance de Hausdorff. Dans [16, 17, 96], les auteurs considèrent une relation dite que chaque mesure de non-compacité est localement lipschitzienne par rapport à la distance de Hausdorff.

D'autre part, pour résoudre quelques systèmes ou des équations différentielles avec conditions aux limites, la façon la plus simple est de calculer la fonction de Green [1] : si le problème $Lu = \sigma$, couplé avec des conditions aux limites linéaires homogènes, n'admet que la solution triviale pour $\sigma \equiv 0$, alors l'opérateur linéaire associé est inversible et son opérateur inverse, $L^{-1}\sigma$, est caractérisé par un noyau intégral, appelé la fonction de Green. La solution du problème $Lu = \sigma$ est alors donné par

$$u(x) = L^{-1}\sigma(x) := \int_a^b G(x,s)\sigma(s)ds, \quad x \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Nous remarquons que, une fois que nous avons lu l'expression de Green, nous connaissons les cas dans lesquels elle n'est pas définie et, par conséquent, les cas de résonance (de non unicité du problème homogène) sont explicitement donnés. L'avantage principal de la fonction de Green est le fait qu'elle est indépendante de la fonction σ. Pour obtenir la solution exacte pour chaque cas particulier de σ, nous avons seulement besoin de calculer l'intégrale correspondante, et nous avons donc l'expression que nous cherchons. Nous n'avons pas besoin de développer un nouveau calcul pour chaque σ : une fois que nous avons l'expression de la fonction G, le problème est résolu pour tout σ et pour lequel l'intégrale est bien définie. De plus, par une lecture de l'expression intégrale, nous pouvons également obtenir des informations qualitatives supplémentaires sur les solutions du problème considéré, comme leurs signes, leurs propriétés d'oscillation, leurs estimation a priori ou leur stabilité. Pour ces raisons, la théorie des fonctions de Green est un outil fondamental dans l'analyse des équations différentielles. Il a été largement étudié dans la littérature [34, 43, 49, 53, 59, 100] et il a une grande importance pour utiliser des techniques itératives monotones, [61, 77], solutions inférieures et supérieures, [26, 33, 44], méthodes variationnelles [113], ou théorèmes des points fixes [41, 114].

La thèse se compose de quatre chapitres. Le premier chapitre est une introduction géné-

1. George Green (1793-1841) a été le premier mathématicien à utiliser ce type de noyaux pour résoudre les problèmes avec conditions aux limites.

rale au présent travail et une recherche bibliographique des travaux antérieurs trouvés dans la littérature pour ce domaine.

Le chapitre 2 est essentiellement une introduction à des propriétés topologiques pour les espaces métriques partiels, à la théorie des ensembles (et donc les propriétés de l'image d'une multifonction) et à la théorie du point fixe, où l'on donne les notations, la terminologie à utiliser. C'est un aperçu visant à rappeler certaines notions de base. Alors que, certains des résultats classiques sur la théorie du point fixe utilisés pour résoudre des systèmes et des équations différentielles, sont également présentés dans ce chapitre.

Dans le chapitre 3, nous présentons trois nouveaux théorèmes du points fixes pour les multifonctions sur les espaces métriques partiels. Le premier résultat, qui a été publié dans [21], est d'étudier l'existence locale du point fixe pour des multifonctions de type pseudo-contractive dans le cadre d'espaces métriques partiels en utilisant les fonctions de jauge de Bianchini-Grandolfi. Ce théorème a généralisé plusieurs résultats dans la littérature. Le deuxième résultat est la version locale du théorème du point fixe couplé sur l'espace métrique partiel complet, voir [24]. Pour le troisième travail, voir [8], nous énonçons des nouveaux théorèmes du point fixe pour des multifonctions dans le cadre d'espace métrique partiel 0-complet qui donnent des informations sur la localité d'un point fixe par rapport à une valeur initiale d'une multifonction en utilisant certaines fonctions de classe C qui ont été introduite par A. H. Ansari [7]. Les résultats prouvés ici généralisent, modifient et unifient certains résultats récents.

Dans le quatrième chapitre, nous discutons l'existence des solutions pour trois systèmes différentiels différents du second ordre avec des conditions aux limites, pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + f(x,u) = \lambda \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0 \\ \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'' + f(x,u,v) = \lambda, \\ v'' + f(x,v,u) = \lambda, \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1'' + f(x,u_1,u_2) = \lambda \\ u_2'' + g(x,u_1,u_2) = \mu \\ \alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0 \quad i = 1,2 \\ \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1) = 0 \quad i = 1,2 \end{cases} \tag{P}$$

où $f, g : (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Les constantes $\varepsilon, \lambda, \mu, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i vérifiant, pour chaque $i \in \{1,2\}$,

$$\varepsilon > 0, \lambda, \mu, \beta_i, \delta_i \geqslant 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad \gamma_i + \delta_i > 0, \quad k_i := \alpha_i\gamma_i + \alpha_i\delta_i + \beta_i\gamma_i > 0.$$

Nous avons appliqué les trois théorèmes des points fixes pour les multifonctions pour établir et de prouver trois théorèmes d'existence pour les trois systèmes mentionnés ci-dessus (voir [8, 21, 22, 23, 24]).

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions de base qui serons utilisées tout au long de cette thèse.

2.1 Notions préliminaires

Nous commençons tout d'abord par la notion d'espace métrique introduite en 1906 par Maurice Fréchet [52]

Définition 2.1.1 *Soit X un ensemble quelconque non vide. Le couple (X,d) est dit un espace métrique si la fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous $x,y,z \in X$, les conditions suivantes :*

(a) $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ *et*

(c) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge. Une suite $(x_n) \subset X$ est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n,x_m) < \varepsilon, \text{ pour tous } n,m > N.$$

En 1994, Matthews a introduit, dans [84], la notion d'un espace métrique partiel, qui est une généralisation des espaces métriques usuels dans lesquels l'auto-distance (i.e. $d(x,x)$) pour n'importe quel point n'a pas besoin d'être égale à zéro. L'espace métrique partiel a de larges applications dans de nombreuses branches des mathématiques ainsi que dans les domaines de l'informatique et de la sémantique (see e.g [72, 85]).

Définition 2.1.2 *Une fonction $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ est dite une métrique partielle sur X et le couple (X, p) est dit espace métrique partiel si, pour tous $x, y, z \in X$, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(P_1) $p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$ *si et seulement si* $x = y$,

(P_2) $p(x,x) \leqslant p(x,y)$,

(P_3) $p(x,y) = p(y,x)$ *et*

(P_4) $p(x,z) + p(y,y) \leqslant p(x,y) + p(y,z)$.

Toute métrique partielle p sur X génère une topologie τ_p d'un T_0-espace [1], où elle a une base de la famille des p-boules ouvertes $\{B_p(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$, où

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$$

pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. La p-boule fermée de centre x et de rayon r est définie comme suit

$$\overline{B_p}(x,r) := \{y \in X : p(x,y) \leqslant p(x,x) + r\}.$$

Si p est une métrique partielle sur X, alors les fonction $p^s, p^w : X \times X \to \mathbb{R}^+$ données par

$$\begin{aligned} p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ p^w(x,y) &= \max\{p(x,y) - p(x,x), p(x,y) - p(y,y)\} \end{aligned}$$

sont des métriques sur X.

Exemple 2.1.3 — *Un exemple élémentaire d'un espace métrique partiel est le couple $(\mathbb{R}^+, p)$, où*

$$p(x,y) = \max\{x,y\}, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^+.$$

1. Rappelons qu'un espace topologique X est dit T_0-espace si pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un ouvert contenant uniquement un des deux points et pas l'autre.

— *Si* (X,d) *est un espace métrique et* $c \geqslant 0$ *est arbitraire, alors*

$$p(x,y) = d(x,y) + c$$

définit une métrique partielle sur X.

— *Soit* $X = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$ *et soit* $p([a,b],[c,d]) = \max\{b,d\} - \min\{a,c\}$. *Alors* (X,p) *est un espace métrique partiel.*

— *La fonction* $p_i : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *(*$i \in \{1,2\}$*) définie par :*

$$\begin{aligned} p_1(x,y) =& d(x,y) + p(x,y) \\ p_2(x,y) =& p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\} \end{aligned}$$

est une métrique partielle dans X *où* $w : X \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction arbitraire.*

D'autres exemples d'espaces métriques partiels intéressants peuvent être trouvés dans [62, 84].

Définition 2.1.4 [84, 103] *Soit* (X,p) *un espace métrique partiel. Alors :*

— *Une suite* $\{x_n\}$ *converge, par rapport à* τ_p, *vers un point* $x \in X$ *si et seulement si* $p(x,x) = \lim\limits_{n \to +\infty} p(x,x_n)$.

— *Une suite* $\{x_n\}$ *est appelée une suite de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m \to +\infty} p(x_n,x_m)$ *existe (et est finie). Si* $\lim\limits_{n,m \to +\infty} p(x_n,x_m) = 0$, *alors* $\{x_n\}$ *est dite une suite de 0-Cauchy dans* (X,p).

— (X,p) *est dit complet si chaque suite de Cauchy* $\{x_n\}$ *dans* X *converge, par rapport à* τ_p, *vers un point* $x \in X$ *tel que* $p(x,x) = \lim\limits_{n,m \to +\infty} p(x_n,x_m)$.

— (X,p) *est dit 0-complet si chaque suite de 0-Cauchy* $\{x_n\}$ *dans* X *converge, par rapport à* τ_p, *vers un point* $x \in X$ *tel que* $p(x,x) = 0$.

Remarque 2.1.5 *Une limite d'une suite dans un espace métrique partiel n'est pas nécessairement unique. De plus, la fonction* $p(\cdot,\cdot)$ *n'est pas nécessairement continue dans le sens où* $x_n \to x$ *et* $y_n \to y$ *implique* $p(x_n,y_n) \to p(x,y)$. *Par exemple, si* $X = [0,+\infty[$ *et* $p(x,y) = \max\{x,y\}$ *pour* $x,y \in X$, *alors pour* $x_n = 1$, $p(x_n,x) = x = p(x,x)$ *pour chaque* $x \geqslant 1$ *et ainsi, par exemple,* $x_n \to 2$ *et* $x_n \to 3$ *quand* $n \to +\infty$.

Lemme 2.1.6 *Soit* (X,p) *un espace métrique partiel.*

(a) *$\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X,p) si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X,p^s).*

(b) *Un espace métrique partiel (X,p) est complet si et seulement si l'espace métrique (X,p^s) est complet. En outre,*

$$\lim_{n\to+\infty} p^s(x_n,x) = 0 \Leftrightarrow p(x,x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m)$$

où x est une limite de $\{x_n\}$ dans (X,p^s).

(c) *Chaque suite de 0-Cauchy dans (X,p) est une suite de Cauchy dans (X,p^s).*

(d) *Chaque espace métrique partiel complet est 0-complet.*

L'inverse des assertions (c) et (d) ne sont pas vérifiées comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.1.7 [103] *L'espace $X = [0,+\infty[\cap\mathbb{Q}$ avec la métrique partielle $p(x,y) = \max\{x,y\}$ est 0-complet, mais n'est pas complet (puisque $p^s(x,y) = |x-y|$ et (X,p^s) n'est pas complet). De plus, la suite $\{x_n\}$ avec $x_n = 1$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy dans (X,p^s), mais ce n'est pas une suite de 0-Cauchy dans (X,p).*

Lemme 2.1.8 [84] *Soit (X,p) un espace métrique partiel. On a*

1. *si $p(x,y) = 0$, alors $x = y$. Mais si $x = y$, alors $p(x,y)$ n'a pas besoin d'être égale à zéro ;*
2. *si $x \neq y$, alors $p(x,y) > 0$.*

Définition 2.1.9 *Un espace vectoriel $(X,+,\cdot)$ est un espace normé si pour tous $x,y \in X$ il existe un nombre réel non négatif $\|x\|$ dit la norme de x, satisfaisant*

— $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

— $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et*

— $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par $d(x,y) := \|x-y\|$.

Définition 2.1.10 *On appelle espace de Banach tout espace normé complet pour la distance associée à la norme.*

Les exemples d'espaces suivants sont très utilisés dans cette thèse.

Exemple 2.1.11 [13] *L'espace* $C([0,1])$ *de fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est un espace vectoriel. Le nombre* $\|f\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|$, *où* $|\cdot|$ *est la norme dans* $\mathbb{R}$, *défini une norme rendant* $(C([0,1]), \|\cdot\|)$ *un espace de Banach. La distance associée à la norme est*

$$d(f,g) = \|f-g\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)-g(t)|.$$

Les métriques partielles associée sont, par exemple,

$$\begin{aligned} p(f,g) &:= d(f,g)+c = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)-g(t)|+c, \\ p(f,g) &:= \|f-g\|+\|f\|+\|g\|. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.12 [89] *Pour* $x \in X = C([0,K])$, *où* $K > 0$, *nous définissons* $\|x\|_\tau = \max_{t\in[0,K]} |x(t)|e^{-\tau t}$, *où* $\tau \geqslant 1$ *est pris arbitrairement. Notons que* $\|x\|_\tau$ *est une norme équivalente à la norme du maximum et* $(X, \|\cdot\|_\tau)$ *est un espace de Banach (voir [9, 30]). La métrique associée à cette norme est donnée par*

$$d_\tau(x,y) = \max_{t\in[0,K]} |x(t)-y(t)|e^{-\tau t}$$

pour tous $x,y \in X$.

Maintenant, considérons X muni de la métrique partielle donnée par

$$p_\tau(x,y) = \begin{cases} d_\tau(x,y), & \text{si } \|x\|_\tau, \|y\|_\tau \leqslant 1\,; \\ d_\tau(x,y)+\tau, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Evidemment, (X, p_τ) *est 0-complet mais pas complet. La métrique associée*

$$p_\tau^s(x,y) = 2p_\tau(x,y) - p_\tau(x,x) - p_\tau(y,y)$$

donnée par

$$p_\tau^s(x,y) = \begin{cases} 2d_\tau(x,y), & \text{si } (\|x\|_\tau, \|y\|_\tau \leqslant 1) \text{ où } (\|x\|_\tau, \|y\|_\tau \geqslant 1)\,; \\ 2d_\tau(x,y)+\tau, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$(C([0,K]), p_\tau^s)$ *n'est pas complet et donc* $(C([0,K]), p_\tau)$ *n'est pas complet [88].*

Dans la suite, on désigne par 2^X l'ensemble des parties de X et soit $C^p(X)$ (resp. $CB^p(X)$) la famille de tous les sous-ensembles non vides et fermés (resp. et bornés) de l'espace métrique partiel (X,p). Nous nous intéressons dans cette thèse aux applications dites multivoques (sont appelées aussi multi-applications, multifonctions ou encore des correspondances). Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles. Dans la suite, nous allons présenter quelques définitions et propriétés relatives à ces fonctions.

Pour $x \in X$ et $A,B \in C^p(X)$, nous définissons

$$p(x,A) = \inf\{p(x,a), a \in A\},$$
$$\delta_p(A,B) = \sup\{p(a,B), a \in A\},$$
$$H_p(A,B) = \max\{\delta_p(A,B), \delta_p(B,A)\}.$$

Nous adoptons les conventions que

$$p(a,\emptyset) = +\infty \quad \text{et} \quad \delta_p(\emptyset,B) = 0. \tag{2.1}$$

Si $p \equiv d$ est une métrique on notera δ_p par e_d. Rappelons que la métrique partielle de Hausdorff (généralisée) H_p entre A et B peut prendre la valeur $+\infty$; voir [18, 63]. Il est clair que H_p (resp. H_d) définie une métrique partielle (resp. métrique) sur $CB^p(X)$.

Exemple 2.1.13 *Soit $X = \mathbb{R}^+$ muni de la métrique $d(x,y) = |x-y|$ et par la métrique partielle $p(x,y) = \max\{x,y\}$. Soit $A = [0,1]$ et $B = [0,+\infty[$ qui sont deux fermés dans (X,d) et (X,p). On a $e(A,B) = 0$, $e(B,A) = +\infty$, $\delta_p(A,B) = 1$ et $\delta_p(B,A) = +\infty$.*

Remarque 2.1.14 *Les pseudo-distances e_d et δ_p ne sont pas symétriques et ne sont pas nécessairement finis donc ils ne vérifient pas les propriétés élémentaires d'une métrique et d'une métrique partielle.*

Lemme 2.1.15 [1] *Supposons que $x_n \to x$ quand $n \to +\infty$ dans un espace métrique partiel (X,p) tel que $p(x,x) = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p(x_n,y) = p(x,y)$ pour tout $y \in X$.*

Lemme 2.1.16 [6, 8] *Soit (X,p) un espace métrique partiel et $A \subset X$. Alors $p(a,A) = p(a,a) \Leftrightarrow a \in \overline{A}$. De plus, $p(a,A) = 0 \Leftrightarrow p(a,a) = 0$ et $a \in \overline{A}$*

où $\overline{A}$ est la fermeture de A par rapport à la métrique partielle p. Notez que A est fermé dans (X,p) si et seulement si $\overline{A}=A$.

PREUVE.

Pour la deuxième partie, nous argumentons par contradiction. Soit $a \in X$ et $A \subset X$ où $p(a,A)=0$ tel que $p(a,a) \neq 0$ ou $a \notin \overline{A}$. Soit $z \in \overline{A}$ tel que $p(a,\overline{A}) = p(a,z)$. Si $p(a,a) \neq 0$ alors l'utilisation de la propriété (P_2) de la métrique partielle donne

$$0 < p(a,a) \leqslant p(a,z) = p(a,\overline{A}) \leqslant p(a,A) = 0$$

ce qui est une contradiction. Si $a \notin \overline{A}$ puis $a \neq z$ et, en utilisant le lemme 2.1.8, nous avons trouver

$$0 < p(a,z) = p(a,\overline{A}) \leqslant p(a,A) = 0$$

ce qui est aussi une contradiction. Donc $p(a,A)=0$ implique que $p(a,a)=0$ et $a \in \overline{A}$.

□

Lemme 2.1.17 [21] *Soit (X,p) un espace métrique partiel. Soit $x \in X$ et $A \subset X$. Si $p(x,A) < \mu$ ($\mu > 0$) alors il existe $a \in A$ tel que $p(x,a) < \mu$.*

PREUVE.

Par contradiction, soit $x \in X$ et $A \subset X$ tel que $p(x,A) < \mu$. Nous supposons que $p(x,a) \geqslant \mu$ pour tout $a \in A$. Ensuite, nous avons

$$p(x,A) = \inf\{p(x,a) : a \in A\} \geqslant \mu,$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, il existe $a \in A$ tel que $p(x,a) < \mu$.

□

Notons que la pseudo-distance $\delta_p : C^p(X) \times C^p(X) \to [0,+\infty]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.18 [11] *Soit (X,p) un espace métrique partiel. Pour tous A, B, $C \in C^p(X)$, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) $\delta_p(A,A) = \sup\{p(a,a), a \in A\}$ *;*

(ii) $\delta_p(A,A) \leqslant \delta_p(A,B)$ *;*

(iii) $\delta_p(A,B) = 0 \Rightarrow A \subseteq B$ *;*

(iv) $\delta_p(A,B) \leqslant \delta_p(A,C) + \delta_p(C,B) - \inf_{c \in C} p(c,c)$.

Remarque 2.1.19 *Les propriétés mentionnées ci-dessus sont satisfaites sans utiliser le concept de bornitude pour A, B et C. Voir la preuve de [11, Proposition 2.2] pour plus de détails.*

Proposition 2.1.20 [11] *Soit (X, p) un espace métrique partiel. Pour tous A, B, $C \in C^p(X)$, nous avons :*

(i) $H_p(A,A) = \sup\{p(a,a), a \in A\}$ *;*

(ii) $H_p(A,A) \leqslant H_p(A,B)$ *;*

(iii) $H_p(A,B) = 0 \Rightarrow A \subseteq B$ *;*

(iv) $H_p(A,B) \leqslant H_p(A,C) + H_p(C,B) - \inf_{c \in C} p(c,c)$.

2.2 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe qui sont utilisés pour étudier l'existence des solutions des problèmes EDOs. A savoir le théorème du point fixe de Krasnosel'skii, celui de Sadovskii pour les fonctions et enfin nous abordons le théorème du point fixe de Nadler pour les multifonctions.

2.2.1 Théorème du point fixe de Krasnosel'skii

Avant de mettre le théorème du point fixe de Krasnosel'skii, nous rappellons le principe de l'application contractante de Banach, dans les espaces métriques complets, et le théorème de Matthews qui est une extension du théorème de Banach dans les espaces métriques partiels complets.

Théorème 2.2.1 (Principe de l'application contractante de Banach [15]) *Soit (X,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une contraction (i.e., il existe une constante*

$0 \leqslant k < 1$ telle que $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$, pour tous $x, y \in X$), alors f admet un et un seul point fixe $x^* \in X$ i.e. $f(x^*) = x^*$.

Ce théorème a été étendu par Mattews [84] aux espaces métriques partiels complets comme suit.

Théorème 2.2.2 (Mattews [84]) *Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et soit $f : X \to X$ une contraction satisfaisant pour $0 \leqslant k < 1$ fixé,*

$$p(f(x), f(y)) \leqslant kp(x,y), \quad \forall x, y \in X. \tag{2.2}$$

Alors f admet un et un seul point fixe $x^* \in X$ i.e. $f(x^*) = x^*$.

Exemple 2.2.1 *Soit $X = \{0, 1, 2\}$ un ensemble muni de la métrique $d(x,y) = |x - y|$ et par la métrique partielle $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$p(0,0) = \frac{1}{5}, \qquad p(1,1) = 0, \tag{2.3}$$

$$p(2,2) = \frac{1}{4}, \qquad p(0,1) = p(1,0) = \frac{3}{4}, \tag{2.4}$$

$$p(0,2) = p(2,0) = 1, \qquad p(1,2) = p(2,1) = 1. \tag{2.5}$$

Prenons $f : X \to X$ une fonction définie par $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$.

Il est clair que les hypothèses du théorème de Matthews 2.2.2 sont satisfaites pour $k = \dfrac{4}{5}$ (le point fixe est $x^* = 1$) et le principe de Banach 2.2.1 n'est pas appliqué, i.e., le théorème de Matthews 2.2.2 est une extension du théorème de Banach.

Nous allons présenter maintenant une version locale du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.3 [75, Théorème 5.1-4] *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $\bar{x} \in X$, $r > 0$ et $0 \leqslant \lambda < 1$. Soit $f : \overline{B_d}(\bar{x}, r) \to X$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $d(\bar{x}, f(\bar{x})) < r(1 - \lambda)$,

(ii) $d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B_d}(\bar{x}, r)$,

alors f admet un et un seul point fixe dans $\overline{B_d}(\bar{x}, r)$.

Si nous adoptons la convention $\overline{B_d}(\bar{x},+\infty) = X$ alors le théorème 2.2.3 pour $r \to +\infty$ devient le principe de Banach 2.2.1. De même, on a la version locale de Matthews sur un espace métrique partiel complet et 0-complet.

Théorème 2.2.4 [112] *Soit (X,p) un espace métrique partiel 0-complet. Soit $\bar{x} \in X$, $r > 0$ et $0 \leqslant \lambda < 1$. Soit $f : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to X$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $p(\bar{x}, f(\bar{x})) < (r + p(\bar{x},\bar{x}))(1-\lambda)$,

(ii) $p(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda p(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors f admet un et un seul point fixe dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

Après cela, nous énonçons le théorème du point fixe de Schauder, qui est une généralization pour le théorème du point fixe de Brouwer dans des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Ce théorème intervient dans la démonstration de l'existence de solutions d'équations différentielles.

Définition 2.2.2 *Soit M un sous-ensemble borné d'un espace Banach et $A : M \to E$ une application. Si A est continue et $A(M)$ est contenu dans un ensemble compact dans E, alors nous disons que A est une application compacte.*

Théorème 2.2.5 (Schauder [110]) *Soit C un ensemble convexe, fermé et borné dans un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application compacte, alors f a au moins un point fixe.*

Remarque 2.2.3 [45, p. 28] *En fait, nous avons seulement besoin que X soit un espace normé. De plus, C doit seulement être convexe (pas nécessairement fermé et borné).*

Le théorème suivant est une application très importante du théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.2.6 (Alternative non linéaire de Leray-Schauder) *Soit Ω un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé X et soit U un sous-ensemble ouvert de Ω avec $0 \in U$. Alors, toute application compacte $f : \overline{U} \to \Omega$ satisfait l'une des propriétés suivantes :*

— *f admet un point fixe, ou*

— *il existe $x^* \in \partial U$ et $0 < \lambda < 1$ avec $x^* = \lambda f(x^*)$.*

Pour résoudre les équations différentielles, en général, nous étudions le problème inverse "équations intégrales" car les opérateurs intégraux avec un noyaux réguliers fournissent les exemples les plus importants d'opérateurs compacts non linéaires sur des espaces de Banach de dimensions infinies.

En 1955, Krasnosel'skii [73] a observé que l'intégration d'un opérateur différentiel donne une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il a donné un nouveau théorème du point fixe dont lequel il rassemble le principe de l'application contractante de Banach et le théorème de Schauder. Le théorème se lit comme suit :

Théorème 2.2.7 (Krasnosel'skii [73]) *Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Supposons que A et B sont deux fonctions de C dans X telles que*

— *$Ax + By \in C$ pour tous $x, y \in C$,*

— *A est continue et $A(C)$ est contenu dans un ensemble compact de X,*

— *B est une contraction avec une constante $\lambda < 1$.*

Alors il existe $x^* \in C$ avec $Ax^* + Bx^* = x^*$.

Remarque 2.2.4 *Si $B \equiv 0$, il coïncide avec le théorème de Schauder.*

2.2.2 Théorème du point fixe de Sadovskii

Le théorème du point fixe de Sadovskii pour les fonctions de condensation continue est basé sur la notion de mesure de non-compacité. Cette notion a été introduite par Kuratowski ([76], 1930). On rappelle que la mesure de non-compacité de Kuratowski pour un sous-ensemble borné S dans un espace métrique (X, d) est un nombre $\alpha(S)$ défini par

$$\alpha(S) := \inf\left\{ r > 0 : S \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_i \subset X, diam(A_i) \leqslant r \right\} \tag{2.6}$$

où $diam(A_i) := \sup\{d(x,y) : x, y \in A_i\}$. Darbo a appliqué cette mesure pour établir un résultat du point fixe, appelé théorème du point fixe de Darbo ([42], 1955). Il indique que si S est un sous-ensemble convexe fermé non vide et borné d'un espace de Banach X et $T : C \to C$ est une fonction continue telle que pour tout ensemble $E \subset C$ on a

$$\alpha(T(E)) \leqslant \lambda \alpha(E) \tag{2.7}$$

où $0 \leqslant \lambda < 1$. Alors T a un point fixe.

Ce théorème généralise à la fois les théorèmes du point fixe de Banach et de Schauder. Ce théorème est vrai aussi pour la mesure de non-compacité de Hausdorff (ou de boule) pour un sous-ensemble borné S de X qui est un nombre réel non négatif $\chi(S)$ défini par

$$\chi(S) := \inf\left\{ r > 0 : S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r), \text{ pour certains } r \right\} \tag{2.8}$$

La relation entre la mesure de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff est donnée par les inégalités suivantes

$$\chi(S) \leqslant \alpha(S) \leqslant 2\chi(S). \tag{2.9}$$

La mesure de non-compacité χ (et même pour α) bénéficie des propriétés suivantes :

— $\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est relativement compact,

— $\chi(A) = \chi(\overline{A}) = \chi(co(A))$, où $\overline{A}$ et $co(A)$ désignent respectivement la fermeture et l'enveloppe convexe fermé de A,

— $A \subset B \Rightarrow \chi(A) \leqslant \chi(B)$,

— $\chi(A \cup B) = \max\{\chi(A), \chi(B)\}$,

— $\chi(A \cap B) = \min\{\chi(A), \chi(B)\}$,

— $\chi(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \lambda\chi(A) + (1-\lambda)\chi(B)$ pour $\lambda \in [0,1]$.

Pour plus d'informations sur la mesure de non-compacité, nous renvoyons le lecteur à [5, 14, 16, 17, 96, 99].

Le théorème suivant montre que la mesure de non-compacité de Hausdorff est liée à la distance de Hausdorff.

Théorème 2.2.8 [14, 16, 17, 96] *Soit (X,d) un espace métrique, Q, Q_1, Q_2 sont des ensembles non vides et bornés de X et $\mathscr{N}^c$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides et compacts de (X,d). Alors*

$$\begin{aligned} |\chi(Q_1) - \chi(Q_2)| &\leqslant \chi(\overline{B_d}(0,1))H_d(Q_1,Q_2) = H_d(Q_1,Q_2) && (2.10) \\ \chi(Q) &= H_d(Q, \mathscr{N}^c) && (2.11) \end{aligned}$$

Le résultat suivant, que l'on appelle le théorème du point fixe de Sadovskii ([109], 1967) est une puissante généralisation du théorème du point fixe de Darbo et de Krasnosel'skii. Rappelons qu'une fonction $T : S \to S$ est dite de condensation, par rapport à α (resp. χ), si et seulement si

$$\alpha(T(E)) < \alpha(E) \quad (resp.\ \ \chi(T(E)) < \chi(E)) \tag{2.12}$$

pour tout sous-ensemble borné E de S.

Alors le théorème de Sadovskii [109] se lit comme suit :

Théorème 2.2.9 (Sadovskii) *Soit C un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ une fonction de condensation et continue. Alors, T a un point fixe.*

2.2.3 Théorème du point fixe de Nadler pour les multifonctions

Dans cette section, nous rappellons le théorème du point fixe de Nadler pour les multifonctions, dans les espaces métriques complets, et le théorème de Aydi et al. qui est une extension du théorème de Nadler pour les multifonctions dans les espaces métriques partiels complets.

Théorème 2.2.10 (Nadler [87]) *Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $F : X \to CB^d(X)$ une multifonction vérifiant : $\exists 0 \leqslant k < 1$ telle que $H_d(F(x),F(y)) \leqslant kd(x,y)$, pour tous $x,y \in X$. Alors F admet un point fixe $x^* \in X$ i.e. $x^* \in F(x^*)$.*

Ce théorème a été étendu par Aydi et al. [11] aux espaces métriques partiels complets comme suit.

Théorème 2.2.11 (Aydi et al. [11]) *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet et soit $F : X \to CB^p(X)$ une multifonction vérifiant : $\exists 0 \leqslant k < 1$ telle que $H_p(F(x),F(y)) \leqslant kp(x,y)$, pour tous $x,y \in X$. Alors F admet un point fixe $x^* \in X$.*

Dans [47], Dontchev et Hager ont présenté un théorème de point fixe pour les multifonctions sur l'espace métrique complet qui parle de la localité d'un point fixe par rapport à une valeur initiale d'une multifonction. Soit (X,d) un espace métrique et soit A et B deux sous-ensembles fermés non vides de X. Alors le théorème de Dontchev et Hager [47] se lit comme suit :

Théorème 2.2.12 *Soit (X,d) un espace métrique complet, un point $\bar{x} \in X$, deux scalaires non négatifs $r > 0$ et λ tel que $0 \leqslant \lambda < 1$, et soit ϕ une multifonction définie sur la boule fermée $\overline{B_d}(\bar{x},r)$ vers un sous-ensemble fermé de X. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) $d(\bar{x},\phi(\bar{x})) < r(1-\lambda)$,

(ii) $e(\phi(x_1)\cap\overline{B_d}(\bar{x},r),\phi(x_2)) \leqslant \lambda d(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in \overline{B_d}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe dans $\overline{B_d}(\bar{x},r)$, c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in \overline{B_d}(\bar{x},r)$ tel que $x^* \in \phi(x^*)$. Si ϕ est une fonction, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_d}(\bar{x},r)$.

Ce théorème est l'outil principal pour établir la convergence de plusieurs méthodes itératives pour le problème d'inclusion variationnelle : trouver $x \in X$ tel que

$$0 \in f(x) + F(x) \tag{VI}$$

où f est une fonction agissant entre deux espaces de Banach X et Y, F est une multifonction de X dans les sous-ensembles de Y. Voir par exemple [46, 54, 55, 56, 68, 97] pour plus d'informations sur les applications de ce théorème.

Rappelons que les inclusions variationnelles (VI) sont un modèle abstrait d'une grande variété incluant des systèmes d'équations non linéaires (quand $F = \{0\}$), des systèmes d'inégalités (quand F est l'ortant positif en $\mathbb{R}^m$), problèmes complémentaires linéaires et non linéaires, inégalités variationnelles (inégalité mixte quasi-variationnelle, inégalité variationnelle de Hartman-Stampacchia), conditions nécessaires de premier ordre pour la programmation non-linéaire, etc. ou d'équilibre (équilibre du réseau de circulation, problèmes d'équilibre des prix spatiaux, problèmes d'équilibre de migration, problèmes de réseau environnemental, etc.) puis ont plusieurs applications en ingénierie et en économie (analyse des structures élastoplastiques, équilibre Walrasien, Équilibre de Nash, problèmes d'équilibre financier, etc.) voir par exemple [50, 51, 57, 74, 101, 102].

CHAPITRE 3

LES NOUVEAUX THÉORÈMES DU POINT FIXE POUR LES MULTIFONCTIONS DANS LES ESPACES MÉTRIQUES PARTIELS

Dans le présent chapitre, on va présenter des théorèmes du point fixe pour les multifonctions dans des espaces métriques partiels. Plus précisément, nous nous intéressons aux thèorèmes suivants :

1. Le théorème du point fixe pour une multifonction pseudo-contractive dans un espace métrique partiel complet utilisant les fonctions de jauge de Bianchini-Grandolfi, [21].
2. Le théorème du point fixe couplé dans les espaces métrique partiels complets [24].
3. Le théorème du point fixe pour une multifonction dans les espaces métriques partiels 0-complets utilisant les fonctions de classe C [8].

3.1 Théorème du point fixe local

Dans cette section nous avons présenté une étude bibliographique à savoir notre étude A. Benterki [21] relative,

A local fixed point theorem for set-valued mappings on partial metric spaces. *Appl. Gen. Topol.*, **17 (1) : 37–49, 2016.**

Dans ce qui suit, on note J un intervalle de $\mathbb{R}^+$ contenant 0, soit un intervalle de la forme $[0,a[$, $[0,a]$ ou $[0,+\infty[$.

Définition 3.1.1 *Soit $r \geqslant 1$. Une fonction $\varphi : J \to J$ est une fonction de jauge d'ordre r sur J si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. $\varphi(\lambda t) \leqslant \lambda^r \varphi(t)$ *pour tout* $\lambda \in]0,1[$ *et* $t \in J$ *;*
2. $\varphi(t) < t$ *pour tout* $t \in J \setminus \{0\}$.

Nous considérons quelques exemples de fonctions de jauge d'ordre $r \geqslant 1$.

Exemple 3.1.2
- $\varphi(t) = \lambda t \ \ (0 < \lambda < 1)$ *est une fonction de jauge du premier ordre sur* $J = [0,1[$ *;*
- $\varphi(t) = c\, t^r \ \ (c > 0, r > 1)$ *est une fonction de jauge d'ordre r sur $J = [0,R[$, où $R = (1/c)^{1/(r-1)}$;*
- *Toute fonction convexe φ sur un intervalle J tel que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) < t$ pour tout $t \in J \setminus \{0\}$ est une fonction de jauge de premier ordre sur J.*

Définition 3.1.3 (fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi [29]) *Une fonction croissante $\varphi : J \to J$ est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur J si*

$$s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) \text{ est convergente pour tout } t \in J \tag{3.1}$$

où φ^n dénote l'itération n-ième de la fonction φ et $\varphi^0(t) = t$ i.e.

$$\varphi^0(t) = t,\ \varphi^1(t) = \varphi(t),\ \varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)), \ldots, \varphi^n(t) = \varphi(\varphi^{n-1}(t)).$$

Ces fonctions sont connues dans la littérature comme des fonctions de comparaison de type (c) dans certaines sources (voir par exemple [25, 108]) et comme un taux de convergence dans d'autres sources (voir par exemple [93, 94]). La somme (3.1) est appelée la fonction d'estimation correspondante et on remarque que φ satisfait l'équation fonctionnelle suivante

$$s(t) = t + s(\varphi(t)) \tag{3.2}$$

et (à l'exception de certains cas particulier) nous avons :

$$\varphi(t) = s^{-1}(s(t) - t). \tag{3.3}$$

Lemme 3.1.4 [91] *Chaque fonction de jauge d'ordre $r \geqslant 1$ sur J est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur J.*

Maintenant, nous sommes prêts à déclarer et prouver notre premier résultat.

Théorème 3.1.1 [21] *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet, et considérons un point $\bar{x} \in X$, un scalaire non négatif $r > 0$ et une multifonction $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante et continue telle que φ est une fonction Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle J et $\lim_{t\downarrow 0} \varphi(t) = 0$. Supposons qu'il existe $\alpha \in J$ et les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x})) < \alpha$ *où* $s(\alpha) \leqslant p(\bar{x},\bar{x}) + r$,

(b) $\delta_p(\phi(x) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r), \phi(y)) \leqslant \varphi(p(x,y)) \quad \forall x,y \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x},\bar{x}) + 2r \in J$, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Si $\varphi \equiv 0$ alors, d'après la proposition 2.1.20(iii) et l'hypothèse (b), nous avons pour tous $x_1, x_2 \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$

$$\begin{cases} \phi(x_1) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r) \subseteq \phi(x_2) \\ \phi(x_2) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r) \subseteq \phi(x_1) \end{cases} \Rightarrow \phi(x_1) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r) = \phi(x_2) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r) \neq \emptyset; \tag{3.4}$$

d'après l'hypothèse (a), la relation(3.4) et le lemme 2.1.17, il existe $x \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$ tel que $x \in \phi(\bar{x}) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r) = \phi(x) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r)$ ce qui complète la preuve.

Supposons maintenant $\varphi \not\equiv 0$, d'après l'hypothèse (a) et le lemme 2.1.17, il existe

$$x_1 \in \phi(\bar{x}) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r)$$

tel que

$$p(x_1,\bar{x}) < \alpha = \varphi^0(\alpha). \tag{3.5}$$

Notons $x_0 = \bar{x}$ et, après l'hypothèse (b), nous avons

$$\begin{aligned} p(x_1,\phi(x_1)) &\leqslant \delta_p(\phi(x_0) \cap \overline{B_p}(x_0,r), \phi(x_1)) \\ &\leqslant \varphi(p(x_0,x_1)) \\ &< \varphi(\alpha) = \varphi^1(\alpha). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Cela implique qu'il existe $x_2 \in \phi(x_1)$ tel que

$$p(x_2,x_1) < \varphi^1(\alpha) \tag{3.7}$$

et, par la propriété (P_4) de la métrique partielle, nous avons

$$\begin{aligned} p(x_2,x_0) &\leqslant p(x_2,x_1)+p(x_1,x_0)-p(x_1,x_1) \\ &< \varphi^1(\alpha)+\varphi^0(\alpha) \\ &< s(\alpha) \leqslant p(x_0,x_0)+r. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Donc $x_2 \in \phi(x_1) \cap \overline{B_p}(x_0,r)$. En procédant par reccurence et supposons que nous avons construit, pour $k \in \mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers non négatifs), un élément x_{k+1} tel que

$$x_{k+1} \in \phi(x_k) \cap \overline{B_p}(x_0,r)$$

et

$$p(x_{k+1},x_k) < \varphi^k(\alpha). \tag{3.9}$$

Par l'hypothèse (b), nous avons

$$\begin{aligned} p(x_{k+1},\phi(x_{k+1})) &\leqslant \delta_p(\phi(x_k) \cap \overline{B_p}(x_0,r),\phi(x_{k+1})) \\ &\leqslant \varphi(p(x_{k+1},x_k)) \\ &< \varphi(\varphi^k(\alpha)) = \varphi^{k+1}(\alpha). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors, il existe $x_{k+2} \in \phi(x_{k+1})$ tel que

$$p(x_{k+2},x_{k+1}) < \varphi^{k+1}(\alpha). \tag{3.11}$$

De plus, l'utilisation de la propriété (P_4) de la métrique partielle,

$$\begin{aligned} p(x_{k+2},x_0) &\leqslant \sum_{j=0}^{k+1} p(x_{j+1},x_j) - \sum_{j=1}^{k} p(x_j,x_j) \\ &< \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j(\alpha) = s(\alpha) \leqslant p(x_0,x_0)+r. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Donc $x_{k+2} \in \phi(x_{k+1}) \cap \overline{B_p}(x_0,r)$ et l'étape de la reccurence est terminée. D'autre part, nous avons

$$\max\{p(x_{k+1},x_{k+1}),p(x_k,x_k)\} \leqslant p(x_{k+1},x_k)$$

ce qui implique que

$$\max\{p(x_{k+1},x_{k+1}),p(x_k,x_k)\} < \varphi^k(\alpha). \tag{3.13}$$

Considéront maintenant

$$\begin{aligned} p^s(x_{k+1},x_k) &= 2p(x_{k+1},x_k) - p(x_{k+1},x_{k+1}) - p(x_k,x_k) \\ &\leqslant 2p(x_{k+1},x_k) \\ &< 2\varphi^k(\alpha). \end{aligned} \tag{3.14}$$

A partir des conditions sur φ, il est clair que $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi^k(t) = 0$ pour $t \in J\setminus\{0\}$ et $\varphi(t) < t$ (voir [25, 92, 108]). Par conséquent, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} p^s(x_{n+1},x_n) = 0$. De plus, pour tous les entiers n et m tels que $n > m$, nous avons

$$\begin{aligned} p^s(x_n,x_m) &\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} p^s(x_{k+1},x_k) \\ &\leqslant 2\sum_{k=m}^{n-1}\varphi^k(\alpha) \\ &\leqslant 2s(\alpha). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Puisque $s(t)$ est convergent pour chaque $t \in J$, nous obtenons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X,p^s). Puisque (X,p) est complet, par le lemme 2.1.6, (X,p^s) est complet et la suite $\{x_n\}$ est convergente en (X,p^s) vers $x \in X$. Encore par le lemme 2.1.6, nous avons

$$p(x,x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m). \tag{3.16}$$

De plus, comme $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X,p^s), nous avons

$$\lim_{n,m\to+\infty} p^s(x_n,x_m) = 0,$$

et, à partir de (3.13), nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} p(x_n,x_n) = 0$, donc, à partir de la définition de p^s, nous avons $\lim\limits_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m) = 0$. Par conséquent, à partir de (3.3), nous avons

$$p(x,x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m) = 0. \tag{3.17}$$

De plus, puisque $\{x_n\}$ est une suite dans la p-boule fermé $\overline{B_p}(x_0,r)$ qui est complète et d'après le lemme 2.1.15, en utilisant (3.17), nous avons pour $y = x_0 \in X$

$$p(x,x_0) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x_0) \leqslant p(x_0,x_0) + r, \tag{3.18}$$

i.e. $x \in \overline{B_p}(x_0, r)$.

Nous affirmons maintenant que $x \in \phi(x)$. L'inégalité triangulaire modifiée et l'hypothèse (b) donnent

$$\begin{aligned} p(x,\phi(x)) &\leqslant p(x,x_n) + p(x_n,\phi(x)) - p(x_n,x_n) \\ &\leqslant p(x,x_n) + \delta_p(\phi(x_{n-1}) \cap \overline{B_p}(x_0,r),\phi(x)) \\ &\leqslant p(x,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},x)). \end{aligned} \tag{3.19}$$

En prenant la limite pour $n \to +\infty$ et en utilisant (3.17) et la continuité de φ, on obtient $p(x,\phi(x)) = 0$. Par conséquent, à partir de (3.17) ($p(x,x) = 0$), nous obtenons $p(x,\phi(x)) = p(x,x)$ ce qui implique, avec le lemme 2.1.16, que

$$x \in \overline{\phi(x)} = \phi(x).$$

Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x},\bar{x}) + 2r \in J$, nous supposons qu'il existe deux points fixes $x^*, x^{**} \in \overline{B_p}(x_0,r)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} p(x^*,x^{**}) &\leqslant p(x^*,x_0) + p(x_0,x^{**}) - p(x_0,x_0) \\ &\leqslant p(x_0,x_0) + 2r \in J \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p(x^*,x^{**}) = p(x^*,\phi(x^{**})) &\leqslant \delta_p(\phi(x^*) \cap \overline{B_p}(x_0,r),\phi(x^{**})) \\ &\leqslant \varphi(p(x^*,x^{**})) \\ &< p(x^*,x^{**}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

ce qui est une contradiction, ce qui termine la preuve.

□

Ce théorème est généralise et étend plusieurs résultats connus dans la littérature comme [6, 11, 12, 15, 47, 48, 65, 75, 81, 82, 83, 84, 87, 104].

L'exemple suivant montre l'utilisation du théorème 3.1.1.

Exemple 3.1.5 *Soit $X=\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ muni de la métrique partielle*

$$p(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y\in\left[0,\dfrac{361}{900}\right]; \\ \max\{x,y\}, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Notez que $p(x,y)$ est une métrique sur $\left[0,\dfrac{361}{900}\right]$ et

$$p^s(x,y)=\begin{cases} 2p(x,y), & x,y\in\left[0,\dfrac{361}{900}\right]; \\ |x-y|, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Premièrement, observer que, pour $a\geqslant\dfrac{361}{900}$, $[a,+\infty[$ est fermée par rapport à la métrique partielle p.

Soit $a\geqslant\dfrac{361}{900}$, alors nous avons

$$\begin{aligned} y\in\overline{[a,+\infty[} &\Leftrightarrow p(y,[a,+\infty[)=p(y,y)\\ &\Leftrightarrow \inf_{z\in[a,+\infty[}p(y,z)=p(y,y)\\ &\Leftrightarrow y\geqslant z\geqslant a\\ &\Leftrightarrow y\in[a,+\infty[\end{aligned}$$

Donc, $[a,+\infty[$ est fermé pour tout $a\geqslant\dfrac{361}{900}$.

Nous prenons

$$\varphi(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}t, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}; \\ 5t-\dfrac{13}{6}, & t\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

qui est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur $J=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ telle que $s(t)=3t$ et $\lim_{t\downarrow 0}\varphi(t)=0$.

On met $\phi:[0,1]\to C^p(X)$ définie par

$$\phi(x)=\begin{cases} \{x^2\}, & x\in\left[0,\dfrac{19}{30}\right]; \\ [1,+\infty[, & x\in\left]\dfrac{19}{30},1\right].\end{cases}$$

Nous appliquons le Théorème 3.1.1 avec les spécifications suivantes

$$\overline{x}=\frac{1}{4},\quad r=1,\quad \alpha=\frac{1}{3}\in J,\quad \overline{B_p}(\overline{x},r)=[0,1].$$

Premièrement, observant que,

$$p\left(\frac{1}{4},\phi\left(\frac{1}{4}\right)\right)=p\left(\frac{1}{4},\left\{\frac{1}{16}\right\}\right)=\frac{1}{4}<\frac{1}{3}=\alpha$$

et $s(\alpha)=3*\frac{1}{3}=1\leqslant p\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)+1$; i.e. la condition (a) de Théorème 3.1.1 est satisfaite.
Pour voir que la condition (b) du Théorème 3.1.1 est valable, il suffit de considérer les cas suivants :

1. Si $x=y\in\left[0,\frac{19}{30}\right]$ alors

$$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{x^2\},\{x^2\})=0\leqslant\begin{cases}\frac{2}{3}p(x,x)=\varphi\left(p(x,y)\right), & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ 5x-\frac{13}{6}=\varphi\left(p(x,y)\right), & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. Si $x,y\in\left[0,\frac{19}{30}\right]$ et $x\neq y$ alors

$$\begin{aligned}\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{x^2\},\{y^2\})&\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2}\max\{x,y\}, & x,y\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ 5\max\{x,y\}-\frac{9}{4}, & \text{sinon.}\end{cases}\\ &\leqslant\begin{cases}\frac{2}{3}\max\{x,y\}=\varphi\left(p(x,y)\right), & x,y\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ 5\max\{x,y\}-\frac{13}{6}=\varphi\left(p(x,y)\right), & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

3. Si $x,y\in\left]\frac{19}{30},1\right]$ alors

$$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{1\},[1,+\infty[)=1\leqslant 5\max\{x,y\}-\frac{13}{6}=\varphi\left(p(x,y)\right).$$

4. Si $x\in\left[0,\frac{19}{30}\right]$ et $y\in\left]\frac{19}{30},1\right]$ alors

$$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{x^2\},[1,+\infty[)=1\leqslant 5y-\frac{13}{6}=\varphi\left(p(x,y)\right)$$

et

$$\delta_p(\phi(y)\cap[0,1],\phi(x))=\delta_p(\{1\},\{x^2\})=1\leqslant 5y-\frac{13}{6}=\varphi\left(p(x,y)\right).$$

Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 3.1.1 sont satisfaites et $x^* \in \{0,1\} \subset \overline{B_p}(\bar{x}, r)$ sont les points requis.

D'un autre côté, il est facile de montrer que le Théorème 2.2.12 n'est pas applicable dans ce cas. En effet, pour $x \in \left[0, \frac{19}{30}\right]$ et $y = 1$, nous avons

$$e_{p^s}(\phi(x) \cap [0,1], \phi(y)) = e_{p^s}(\{x^2\}, [1, +\infty[) = |1 - x^2| \geqslant |1 - x| = p^s(x, y).$$

Donc, aucune constante λ, $0 \leqslant \lambda < 1$ ne peut être choisie de telle sorte que

$$e_{p^s}(\phi(x) \cap \; [0,1], \phi(y)) \leqslant \; \lambda p^s(x, y)$$

pour tous $x, y \in [0,1]$,

Nous pouvons obtenir les corollaires suivants à partir du Théorème 3.1.1.

Corollaire 3.1.1.1 *Soit (X, p) un espace métrique partiel complet, et considérons un point $\bar{x} \in X$, deux scalaires non négatifs $r > 0$ et $0 \leqslant \lambda < 1$ et une multifonction $\phi : \overline{B_p}(\bar{x}, r) \to C^p(X)$. Supposons que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $p(\bar{x}, \phi(\bar{x})) < (p(\bar{x}, \bar{x}) + r)(1 - \lambda)$,

(b) $\delta_p(\phi(x) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r), \phi(y)) \leqslant \lambda p(x, y) \quad \forall x, y \in \overline{B_p}(\bar{x}, r)$,

alors ϕ admet un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x}, r)$. Si ϕ est une fonction, alors x^* est l'unique point fixe de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x}, r)$.

PREUVE.

Nous appliquons le Théorème 3.1.1 pour $\varphi(t) = \lambda t$ qui est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur $J = [0, p(\bar{x}, \bar{x}) + 2r]$ et la fonction d'estimation correspondante est $s(t) = \dfrac{t}{1 - \lambda}$. Prenons $\alpha = (p(\bar{x}, \bar{x}) + r)(1 - \lambda) \in J$.

□

Remarque 3.1.6 *Le corollaire 3.1.1.1 étend le Théorème 2.2.12 sur les espaces métriques partiels.*

L'exemple suivant montre l'utilisation du Théorème 3.1.1 et du corollaire 3.1.1.1.

Exemple 3.1.7 [11, Exemple 3.3] *Soit* $X = \{0,1,4\}$ *muni de la métrique partielle* $p(x,y) = \frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{2}\max\{x,y\}$ *pour tous* $x,y \in X$*. On définit la multifonction* $\phi : X \to C^p(X)$ *par* $\phi(0) = \phi(1) = \{0\}$ *et* $\phi(4) = \{0,1\}$*.*

Nous appliquons le corollaire 3.1.1.1 pour $\bar{x} = 1$*,* $r = 2$ *et* $\lambda = \frac{1}{2}$*. Premièrement, nous avons*

$$p(1,\phi(1)) = p(1,\{0\}) = \frac{3}{4} < (p(1,1)+2)(1-\frac{1}{2}).$$

D'autre part, nous obtenons

$$\delta_p(\phi(x) \cap \overline{B_p}(1,2), \phi(y)) \leqslant \frac{1}{2}p(x,y) \quad \forall x,y \in \overline{B_p}(1,2) = \{0,1\}.$$

Donc, toutes les hypothèses sont satisfaites et le point fixe de ϕ *est* $x = 0 \in \overline{B_p}(1,2)$*.*

Corollaire 3.1.1.2 *Soit* (X,p) *un espace métrique partiel complet, et considérons un point* $\bar{x} \in X$*, un scalaire non négatif* $r > 0$ *et une multifonction* $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$*. Soit* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction strictement croissante et continue telle que* φ *est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle* J *et* $\lim_{t \downarrow 0} \varphi(t) = 0$*. S'il existe* $\alpha \in J$ *tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x})) < \alpha$ *où* $s(\alpha) \leqslant p(\bar{x},\bar{x}) + r$*,*

(b) $H_p(\phi(x),\phi(y)) \leqslant \varphi(p(x,y)) \quad \forall x,y \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$*,*

alors ϕ *a un point fixe* x^* *dans* $\overline{B_p}(\bar{x},r)$*. Si* ϕ *est une fonction et* $p(\bar{x},\bar{x}) + 2r \in J$*, alors* x^* *est l'unique point fixe de* ϕ *dans* $\overline{B_p}(\bar{x},r)$*.*

Preuve.

Nous devons affirmer que la deuxième condition du Théorème 3.1.1 est satisfaite. Pour tous $x_1,x_2 \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$, on obtient

$$\begin{aligned}\delta_p(\phi(x_1) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r), \phi(x_2)) &\leqslant \delta_p(\phi(x_1),\phi(x_2)) \\ &\leqslant H_p(\phi(x_1),\phi(x_2)) \\ &\leqslant \varphi(p(x_1,x_2)).\end{aligned}$$

Nous complétons la preuve en appliquant le Théorème 3.1.1.

□

Corollaire 3.1.1.3 *Soit* (X, p) *un espace métrique partiel complet, et considérons un point* $\bar{x} \in X$*, deux scalaires non négatifs* $r > 0$ *et* λ *tels que* $0 \leqslant \lambda < 1$*, et une multifonction* ϕ : $\overline{B_p}(\bar{x}, r) \to C^p(X)$*. Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x}, \phi(\bar{x})) < (p(\bar{x},\bar{x}) + r)(1 - \lambda)$,

(b) $H_p(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leqslant \lambda p(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B_p}(\bar{x}, r)$,

alors ϕ *a un point fixe* x^* *dans* $\overline{B_p}(\bar{x}, r)$*. Si* ϕ *est une fonction, alors* x^* *est l'unique point fixe de* ϕ *dans* $\overline{B_p}(\bar{x}, r)$*.*

Remarque 3.1.8 *Le corollaire 3.1.1.3 étend le théorème 9.1 donné dans [3] et le lemme 1 donné dans [65] sur l'espace métrique partiel.*

Le théorème du point fixe de Nadler ([11, Théorème 3.2]) sur les espaces métriques partiels est une consequence directe du Corrollaire 3.1.1.3. On remarque que l'hypothèse de la bornitude des valeurs n'est pas nécessaire.

Corollaire 3.1.1.4 *Soit* (X, p) *un espace métrique partiel complet. Si* $\phi : X \to C^p(X)$ *est une multifonction telle que*

$$H_p(\phi(x), \phi(y)) \leqslant \lambda p(x, y),$$

pour tous $x, y \in X$ *où* $0 \leqslant \lambda < 1$*. Alors* ϕ *admet un point fixe.*

PREUVE.

Soit $\bar{x} \in X$. Choisissez $r > 0$ avec $p(\bar{x}, \phi(\bar{x})) < (p(\bar{x},\bar{x}) + r)(1 - \lambda)$. Le résultat découle du corollaire 3.1.1.3.

□

3.2 Théorème du point fixe couplé

Dans cette section nous avons traité l'étude des théorèmes des points fixes couplés pour les multifonctions φ-pseudo-contractives sans utiliser la propriété g-monotone mixé sur la p-boule fermée d'un espace métrique partiel. Des généralisations de quelques résultats bien connus concernant l'existence et la localisation de points fixes couplés sont obtenues.

Au cours des dernières décennies, plusieurs auteurs ont obtenu des résultats concernant le point fixe couplé pour les fonctions et les multifonctions sur différents espaces sans ou avec la propriété de g-monotone mixé (monotone mixé) (voir par exemple, [27, 78, 19, 10, 98, 60, 111, 95, 115, 31, 80, 64, 67, 66]). Notez que la propriété g-monotoné mixé est donnée par ce qui suit :

Définition 3.2.1 *Soit $(X,\preceq)$ un ensemble partiellement ordonné et $F : X \times X \to 2^X$ une multifonction. Nous disons que F a une propriété de g-monotone mixé si pour tous $x_1,x_2,y_1,y_2 \in X$ nous avons*

$$g(x_1) \preceq g(x_2) \Rightarrow \forall u_1 \in F(x_1,y_1), \exists u_2 \in F(x_2,y_1), u_1 \preceq u_2$$

et

$$g(y_1) \preceq g(y_2) \Rightarrow \forall v_1 \in F(x_1,y_1), \exists v_2 \in F(x_1,y_2), v_1 \succeq v_2.$$

La notion de point fixe couplé a d'abord été initiée par Guo et Lakshmikantham dans [58] puis étudiée par Bhaskar et Lakshmikantham dans [27]. Ils étudient des points fixes couplés pour des fonctions ayant la propriété monotone mixé (i.e. pour $g = Id$ la fonction d'identité) dans un espace métrique muni par une relation d'ordre partiel sous des conditions contractives et prouvent le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 [27] *Soit $(X,d,\preceq)$ un espace métrique complet partiellement ordonné et soit $F : X \times X \to X$ une fonction continue qui satisfait la propriété monotone mixé. Supposons qu'il existe un $\lambda \in [0,1)$ tel que*

$$d(F(x,y),F(u,v)) \leqslant \frac{\lambda}{2}\left(d(x,u)+d(y,v)\right), \quad \forall x,y,u,v \in X$$

avec $x \preceq u$ et $y \succeq v$. S'il existe $x_0,y_0 \in X$ tel que $x_0 \preceq F(x_0,y_0)$ et $y_0 \succeq F(y_0,x_0)$, alors il existe $x^*,y^* \in X$ tel que $x^* = F(x^*,y^*)$ et $y^* = F(y^*,x^*)$, i.e., F a un point fixe couplé.

Définition 3.2.2 *Soit (X,p) un espace métrique partiel, $B \subseteq X$ un sous-ensemble et $\phi : B \times B \to C^p$ une multifonction. Un élément $(x^*,y^*) \in B \times B$ est appelé un point fixe couplé de ϕ si*

$$\begin{cases} x^* \in \phi(x^*,y^*) \cap B, \\ y^* \in \phi(y^*,x^*) \cap B. \end{cases}$$

Un point $(x^*,x^*) \in B \times B$ *est appelé un point fixe de* ϕ *si* $x^* \in \phi(x^*,x^*)$.

Notez que si (x^*,y^*) est un point fixe couplé de ϕ, alors (y^*,x^*) est aussi un point fixe couplé.

Théorème 3.2.2 [24] *Soit* (X,p) *un espace métrique partiel complet,* $\bar{x} \in X$ *et* $r > 0$ *un scalaire non négatif. Nous considérons une multifonction* $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction strictement croissante et continue telle que* φ *est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle* J *et* $\lim\limits_{t \downarrow 0} \varphi(t) = 0$. *S'il existe* $\alpha \in J$ *tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x},\bar{x})) < \alpha$, *où* $s(\alpha) \leqslant p(\bar{x},\bar{x}) + r$*;*

(b) $\delta_p(\phi(x,y) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r), \phi(u,v)) \leqslant \varphi(\max\{p(x,u),p(y,v)\}), \quad \forall x,y,u,v \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ *admet un point fixe couplé* (x^*,y^*) *dans* $\overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r)$. *Si* ϕ *est une fonction et* $p(\bar{x},\bar{x}) + 2r \in J$, *alors* (x^*,y^*) *est l'unique point fixe couplé de* ϕ *dans* $\overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Si $\bar{x} \in \phi(\bar{x},\bar{x})$ ou $\varphi \equiv 0$ la preuve est terminée. Nous supposons donc que $\bar{x} \notin \phi(\bar{x},\bar{x})$ et $\varphi \not\equiv 0$. Nous considérons le produit cartésien $X \times X$ muni de la métrique partielle

$$\widetilde{p}((x,y),(u,v)) = \max\{p(x,u),p(y,v)\}$$

et alors $(X \times X, \widetilde{p})$ est une métrique partielle complète. Nous considérons une multifonction

$$\widetilde{\phi} \ : \ \overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r) \to C^{\widetilde{p}} := C^p \times C^p$$

définie par

$$\widetilde{\phi}(x,y) = (\phi(x,y),\phi(y,x)).$$

Maintenant, nous vérifions que $\widetilde{\phi}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème 3.1.1 sur la $\widetilde{p}$-boule fermée $\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)$. Avant de commencer, nous devons prouver les deux proriétés suivantes.

Propriété 3.2.2.1 $\overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r) = \overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)$.

Puisque $\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)\subset\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)$, par contradiction, nous supposons qu'il existe $(a,b)\in\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)\setminus\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)$, i.e.,

$$\widetilde{p}((a,b),(\bar{x},\bar{x}))\leqslant\widetilde{p}((\bar{x},\bar{x}),(\bar{x},\bar{x}))+r \quad \text{et} \quad \max\{p(a,\bar{x}),p(b,\bar{x})\}>p(\bar{x},\bar{x})+r.$$

Alors, nous avons

$$\widetilde{p}((\bar{x},\bar{x}),(\bar{x},\bar{x}))+r=p(\bar{x},\bar{x})+r<\max\{p(a,\bar{x}),p(b,\bar{x})\}=\widetilde{p}((a,b),(\bar{x},\bar{x}))\leqslant\widetilde{p}((\bar{x},\bar{x}),(\bar{x},\bar{x}))+r,$$

ce qui est une contradiction et donc l'égalité est vérifiée.

Propriété 3.2.2.2 $\widetilde{p}((a,b),\widetilde{\phi}(u,v))\leqslant\max\{p(a,\phi(u,v)),p(b,\phi(v,u))\}$.

$$\begin{aligned}\widetilde{p}((a,b),\widetilde{\phi}(u,v))&=\inf_{(c,d)\in\widetilde{\phi}(u,v)}\widetilde{p}((a,b),(c,d))\\&=\inf_{(c,d)\in(\phi(u,v),\phi(v,u))}\max\{p(a,c),p(b,d)\}\\&\leqslant\max\{\inf_{c\in\phi(u,v)}p(a,c),\inf_{d\in\phi(v,u)}p(b,d)\}\\&=\max\{p(a,\phi(u,v)),p(b,\phi(v,u))\}.\end{aligned}$$

Premièrement, on observe que

$$\widetilde{p}((\bar{x},\bar{x}),\widetilde{\phi}(\bar{x},\bar{x}))\leqslant\max\{p(\bar{x},\phi(\bar{x},\bar{x})),p(\bar{x},\phi(\bar{x},\bar{x}))\}<\alpha$$

et $s(\alpha)\leqslant p(\bar{x},\bar{x})+r=\widetilde{p}((\bar{x},\bar{x}),(\bar{x},\bar{x}))+r$. i.e. la condition (a) de théorème 3.1.1 est vraie.

De plus, pour tous $x,y,u,v\in\overline{B_p}(\bar{x},r)$ on obtient

$$\begin{aligned}\delta_{\widetilde{p}}(\widetilde{\phi}(x,y)\cap\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r),\widetilde{\phi}(u,v))&=\sup\{\widetilde{p}((a,b),\widetilde{\phi}(u,v)):(a,b)\in\widetilde{\phi}(x,y)\cap\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)\}\\&\leqslant\sup\{\max\{p(a,\phi(u,v)),p(b,\phi(v,u))\}:(a,b)\in\widetilde{\phi}(x,y)\cap\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)\}\\&\leqslant\begin{cases}\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}((\bar{x},r),\phi(u,v)), & \text{if } p(a,\phi(u,v))\geqslant p(b,\phi(v,u)),\\ \delta_p(\phi(y,x)\cap\overline{B_p}((\bar{x},r),\phi(v,u)), & \text{sinon}\end{cases}\\&\leqslant\varphi(\max\{p(x,u),p(y,v)\})=\varphi(\widetilde{p}((x,y),(u,v))),\end{aligned}$$

i.e. la condition (b) de théorème 3.2.2 est remplie. Par conséquent, toutes les conditions sont vérifiées et il existe alors un point fixe $(x^*,y^*)\in\widetilde{\phi}(x^*,y^*)\cap\overline{B_{\widetilde{p}}}((\bar{x},\bar{x}),r)$, i.e.,

$$\begin{cases}x^*\in\phi(x^*,y^*)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\\ y^*\in\phi(y^*,x^*)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r).\end{cases}$$

Si ϕ est une fonction, alors $\widetilde{\phi}$ est aussi une fonction et comme $p(\bar{x},\bar{x})+2r\in J$, i.e., $\widetilde{p}((\bar{x},\bar{x}),(\bar{x},\bar{x}))+2r\in J$, alors (x^*,y^*) est l'unique point fixe de $\widetilde{\phi}$ et nous avons

$$\begin{cases} x^*=\phi(x^*,y^*)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\\ y^*=\phi(y^*,x^*)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\end{cases}$$

et la preuve est terminée.

$\square$

Remarque 3.2.3

1. *Si p est une métrique partielle sur X, alors*

$$\widetilde{p_1}((x,y),(u,v))=\max\{p(x,u),p(y,v)\}\quad \textit{et}\quad \widetilde{p_2}((x,y),(u,v))=p(x,u)+p(y,v)$$

   sont deux métriques partielles équivalentes sur $X\times X$ telles que $\widetilde{p_1}\leqslant\widetilde{p_2}\leqslant 2\widetilde{p_1}$.

2. *Si $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ pour chaque $a,b\in\mathbb{R}^+$, alors la condition (b) d'après le théorème 3.2.2 est équivalente à :*

   (b') $\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(u,v))+\delta_p(\phi(y',x')\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(v',u'))\leqslant\varphi(\max\{p(x,u),p(y,v)\}+\max\{p(x',u'),p(y',v')\})$.

Donc, à partir de théorème 3.2.2 et la remarque 3.2.3, nous pouvons obtenir les corollaires suivantes.

Corollaire 3.2.2.1 *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet, $\bar{x}\in X$ et $r>0$ un scalaire non négatif. Nous considérons une multifonction $\phi:\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)\to\ C^p(X)$. Soit $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante et continue telle que φ est une fonction de jauge Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle J et $\lim\limits_{t\downarrow 0}\varphi(t)=0$. S'il existe $\alpha\in J$ et les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) *$p(\bar{x},\phi(\bar{x},\bar{x}))<\alpha$, où $s(\alpha)\leqslant p(\bar{x},\bar{x})+r$;*

(b) *$\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(u,v))\leqslant\varphi(\frac{1}{2}(p(x,u)+p(y,v)))$, $\forall x,y,u,v\in\overline{B_p}(\bar{x},r)$,*

alors ϕ a un point fixe couplé (x^*,y^*) dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x},\bar{x})+2r\in J$, alors (x^*,y^*) est l'unique point fixe couplé de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Nous utilisons l'inégalité $\frac{1}{2}\widetilde{p_2} \leqslant \widetilde{p_1}$, la remarque 3.2.3, et la croissance de φ pour compléter la preuve.

□

Corollaire 3.2.2.2 (Version de Bhaskar et Lakshmikantham) *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet, et considérons un point $\bar{x} \in X$, et des scalaires non négatifs $r > 0$ et $0 \leqslant \lambda < 1$. Nous considérons une multifonction $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$. Supposons les deux conditions suivantes :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x},\bar{x})) < (p(\bar{x},\bar{x})+r)(1-\lambda)$ *;*

(b) $\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(u,v)) \leqslant \frac{\lambda}{2}(p(x,u)+p(y,v)),\ \forall x,y,u,v \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$*,*

alors ϕ a un point fixe couplé (x^*,y^*) dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction, alors (x^*,y^*) est l'unique point fixe couplé de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Nous appliquons le corollaire 3.2.2.1 pour $\varphi(t) = \lambda t$ qui est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur $J = [0,+\infty)$ et $s(t) = \frac{t}{1-\lambda}$. Prenez $\alpha = (p(\bar{x},\bar{x})+r)(1-\lambda) \in J$, nous complétons la preuve.

□

Notez que la condition (b) du corollaire 3.2.2.2 peut être réécrit, en utilisant la remarque 3.2.3, comme suit :

(b″) $\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(u,v)) + \delta_p(\phi(y,x)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(v,u)) \leqslant \lambda(p(x,u)+p(y,v))$,

puis nous obtenons la version locale de [10, Théorème 2.1] pour les multifonctions sur des espaces métriques partiels comme suit.

Corollaire 3.2.2.3 *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet, et considérons un point $\bar{x} \in X$, et des scalaires non négatifs $r > 0$ et $k,l \geqslant 0$ tels que $0 \leqslant k+l < 1$. Nous considérons une multifonction $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r)\times\overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$. Supposons les deux conditions suivantes :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x},\bar{x})) < (p(\bar{x},\bar{x})+r)(1-(k+l))$ *;*

(b) $\delta_p(\phi(x,y) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r), \phi(u,v)) \leqslant lp(x,u) + kp(y,v), \forall x,y,u,v \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe couplé (x^*,y^*) dans $\overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction, alors (x^*,y^*) est l'unique point fixe couplé de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r) \times \overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Pour $\lambda = l + k < 1$, nous utilisons la remarque 3.2.3 pour tous $x,y,u,v \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$, et nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta_p(\phi(x,y) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r), \phi(u,v)) + \delta_p(\phi(y,x) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r), \phi(v,u)) &\leqslant (l+k)(p(x,u)+p(y,v)) \\ &\leqslant \lambda(p(x,u)+p(y,v)).\end{aligned}$$

Nous complétons la preuve en appliquant le corollaire 3.2.2.2.

□

3.3 Théorème du point fixe utilisant les fonctions de classe C

L'objectif principal de cette section est d'énoncer des nouveaux théorèmes de point fixe pour une multifonction dans le cadre d'espaces métriques partiels 0-complets en utilisant certaines fonctions de classe C. Les résultats prouvés ici généralisent, modifient et unifient certains résultats récents de la littérature.

Dans la suite, J et J' sont des intervalles de $\mathbb{R}^+$ contenant 0, i.e. des intervalles de la forme $[0,a)$, $[0,a]$ ou $[0,+\infty)$.

En 2014, Ansari [7] a introduit le concept des fonctions de classe C. En utilisant ce concept, nous pouvons généraliser de nombreux théorèmes de points fixes dans la littérature.

Définition 3.3.1 (Les fonctions de classe C [7]) *Soit $F : J \times J' \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que F est une fonction de classe C s'il satisfait aux conditions suivantes :*

(F_1) *$F(s,t) \leq s$, pour tout $(s,t) \in J \times J'$,*

(F_2) *$F(s,t) = s$ implique que $s = 0$ ou $t = 0$.*

Notez que $F(0,0) = 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble de toutes les fonctions de classe C sur $J \times J'$

Exemple 3.3.2 *Les fonctions suivantes $F : J \times J' \to \mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathscr{C}$:*

1. $F(s,t) = s - t$, $J = J' = [0,\infty)$;
2. $F(s,t) = ms$, $0 \leqslant m < 1$, $J = J' = [0,\infty)$;
3. $F(s,t) = s - \varphi(t)$, *où* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *est une fonction continue telle que* $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ *et* $J = J' = [0,\infty)$;
4. $F(s,t) = s^{\alpha}$, *où* $\alpha > 1$ *et* $J \times J' = [0,1) \times [0,\infty)$;
5. $F(s,t) = st^{k}$, *où* $k > 1$ *et* $J \times J' = [0,\infty) \times [0,1)$.

Pour plus d'exemples sur les fonctions de classe C, on peut se référer à [7, 38, 79].

Définition 3.3.3 *Nous notons par $\mathscr{C}_I$ la collection des fonctions de classe C satisfaisant les critères suivants*

— $F(s,t)$ *est croissant en* s *et en* t

— *pour tout* $t \in J'$ *fixé, nous avons*

$$w(s,t) := \sum_{n=0}^{\infty} F^n(s,t) \text{ est convergent pour tout } s \in J,$$

où F^n *dénote l'itération n-ième de la fonction* F *vérifiant ce qui suit :*

$$F^0(s,t) = s,\ F^1(s,t) = F(s,t) \text{ et } F^{n+1}(s,t) = F(F^n(s,t),t).$$

Définition 3.3.4 *Nous notons par $\mathscr{C}_{II}$ la collection des fonctions de classe C satisfaisant les critères suivants*

— $F(s,t)$ *est croissant en* s *et est décroissant en* t

— *pour tout* $t \in J'$ *fixé, nous avons*

$$w(s,t) := \sum_{n=0}^{\infty} F^n(s,t) \text{ est convergent pour tout } s \in J,$$

où F^n *dénote l'itération n-ième de la fonction* F *vérifiant ce qui suit :*

$$F^0(s,t) = s,\ F^1(s,t) = F(s,t) \text{ et } F^{n+1}(s,t) = F(F^n(s,t),F^n(s,t)).$$

Remarque 3.3.5 *Les fonctions w et F satisfont l'équation fonctionnelle*

$$w(s,t) = s + w(F(s,t),t) \qquad si\ \ F \in \mathscr{C}_I$$

$$w(s,t) = s + w(F(s,t),F(s,t)) \qquad si\ \ F \in \mathscr{C}_{II}$$

Les exemples suivants illustrent les définitions 3.3.3 et 3.3.4.

Exemple 3.3.6 — *$F(s,t) = s-t \Rightarrow w(s,t) = 2s-t$ et alors $F \in \mathscr{C}_{II}$;*

— *$F(s,t) = \lambda s \Rightarrow w(s,t) = \dfrac{s}{1-\lambda}$ pour $\lambda \in [0,1)$ et alors $F \in \mathscr{C}_I \cap \mathscr{C}_{II}$;*

— *$F(s,t) = \varphi(s)$ où φ est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi, et alors $F \in \mathscr{C}_I \cap \mathscr{C}_{II}$;*

— *$F(s,t) = \frac{s^2}{2\sqrt{s^2+a^2}}$, où $a \geqslant 0 \Rightarrow w(s,t) = s + \sqrt{s^2+a^2} - a$ pour $s,t \geqslant 0$ et donc $F \in \mathscr{C}_I \cap \mathscr{C}_{II}$;*

— *$F(s,t) = st^k \Rightarrow w(s,t) = \dfrac{s}{1-t^k}$, où $k > 1$ et $F \in \mathscr{C}_I$.*

Dans cette section, on note

$$M(x,y) := \max\left\{p(x,y), p(x,\phi(x)), p(y,\phi(y)), \frac{p(x,\phi(y)) + p(y,\phi(x))}{2}\right\}.$$

Au début, nous présentons le concept suivant qui est nécessaire dans le reste.

Définition 3.3.7 *On note Ξ la classe de fonctions $\tau : X^2 \times (2^X)^2 \to J'$ satisfaisant ce qui suit : $\tau(x,y,A,C) = 0$ implique au moins $p(x,y) = 0$ ou $x = y$, pour tous $x,y \in X$ et $A,C \in 2^X$.*

Exemple 3.3.8 — *$\tau(x,y,A,C) = L(\delta_p(A,C) + p(x,y))$ où $L > 0$;*

— *$\tau(x,y,A_x,C_y) = p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}$;*

— *$\tau(x,y,A_x,C_y) = p^s(x,y) + \min\{p(x,A_x), p(y,C_y), p(x,C_y), p(y,A_x), \delta_p(A_x,C_y)\}$;*

— *$\tau(x,y,A_x,C_y) = \int_0^{p(x,y)} f(s)\, \mathrm{d}s$ où f est une fonction positive.*

Définition 3.3.9 *Nous disons que $\tau \in \Xi$ est croissant sur (X,p) si*

$$p(x,y) \leqslant p(a,b) \Rightarrow \tau(x,y,A_x,C_y) \leqslant \tau(a,b,A_a,C_b) \quad \forall A_x, A_a, C_y, C_b \in 2^X.$$

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et à prouver notre troisième résultat principal.

Théorème 3.3.1 [8] *Soit (X,p) un espace métrique partiel tel que, pour $\bar{x} \in X$ et $r > 0$, $\overline{B_p}(\bar{x},r)$ soit un sous-espace 0-complet de X. Soit $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$ une multifonction. Soit $F \in \mathscr{C}$, $\tau \in \Xi$ et $\alpha \in J$ satisfaisant l'un des critères suivants*

— *$F \in \mathscr{C}_I$ et τ est croissant,*

— *$F \in \mathscr{C}_{II}$ et $\tau(x,y,\phi(x),\phi(y)) \geqslant \alpha$ où $x,y \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$.*

Supposons que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $\delta_p(\phi(x) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(y)) \leqslant F(M(x,y),\tau(x,y,\phi(x),\phi(y)))\ \ \forall\ \ x,y \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$,

(b) $p(\bar{x},\phi(\bar{x})) < \alpha$ *où* $w(\alpha,\cdot) \leqslant p(\bar{x},\bar{x}) + r$ *;*

alors ϕ admet un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x},\bar{x})+2r \in J$, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Si $\bar{x} \in \phi(\bar{x})$ où $F \equiv 0$ la preuve est terminé. Nous supposons donc que $\bar{x} \notin \phi(\bar{x})$ et $F \not\equiv 0$. Selon la deuxième condition, et en utilisant le lemme 2.1.17, il existe $x_1 \in \phi(\bar{x}) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r)$ tel que

$$p(\bar{x},x_1) = \begin{cases} F^0(p(\bar{x},x_1),\tau(\bar{x},x_1,\phi(\bar{x}),\phi(x_1))) < \alpha \quad \text{ou} \\ F^0(p(\bar{x},x_1),p(\bar{x},x_1)) < \alpha, \end{cases}$$

Par reccurence, nous construisons une suite $\{x_k\}$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x}, \\ x_{k+1} &\in \phi(x_k) \cap \overline{B_p}(x_0,r), \\ p(x_k,x_{k+1}) &\leqslant \psi^k(p(x_0,x_1)) \leqslant p(x_0,x_1), \\ \psi^k(p(x_0,x_1)) &= \begin{cases} F^k(p(x_0,x_1),\tau(x_0,x_1,\phi(x_0),\phi(x_1))), & \text{si } F \in \mathscr{C}_I \text{ et } \tau \text{ est croissant} ; \\ F^k(p(x_0,x_1),p(x_0,x_1)), & \text{si } F \in \mathscr{C}_{II} \text{ et } \tau(x,y,\phi(x),\phi(y)) \geqslant \alpha. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Si $x_k = x_{k+1}$ ou $x_k \in \phi(x_k)$ pour certains $k \in \mathbb{N}$, nous avons fini. Nous supposons donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \notin \phi(x_k)$ et $x_k \neq x_{k+1}$ et alors $p(x_k,x_{k+1}) > 0$.

Premièrement, nous montrons que la suite $\{x_k\}$ satisfaisant (3.21) donne

$$M(x_{k-1},x_k) \leqslant p(x_{k-1},x_k) \in J.$$

En effet, pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
M(x_{k-1},x_k) &= \max\left\{p(x_{k-1},x_k), p(x_{k-1},\phi(x_{k-1})), p(x_k,\phi(x_k)), \frac{p(x_{k-1},\phi(x_k)) + p(x_k,\phi(x_{k-1}))}{2}\right\}\\
&= \max\left\{p(x_{k-1},x_k), p(x_k,\phi(x_k)), \frac{p(x_{k-1},\phi(x_k)) + p(x_k,x_k)}{2}\right\}\\
&\leqslant \max\left\{p(x_{k-1},x_k), p(x_k,x_{k+1}), \frac{p(x_{k-1},x_{k+1}) + p(x_k,x_k)}{2}\right\}\\
&\leqslant \max\left\{p(x_{k-1},x_k), p(x_k,x_{k+1}), \frac{p(x_{k-1},x_k) + p(x_k,x_{k+1})}{2}\right\}\\
&= \max\left\{p(x_{k-1},x_k), p(x_k,x_{k+1})\right\}.
\end{aligned}$$

Si $\max\{p(x_{k-1},x_k), p(x_k,x_{k+1})\} = p(x_k,x_{k+1})$, alors la condition (a) et la définition de F donnent une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir $M(x_{k-1},x_k) \leqslant p(x_{k-1},x_k) \in J$

Nous commençons alors en utilisant l'hypothèse (a) et nous avons

$$\begin{aligned}
p(x_{k+1},\phi(x_{k+1})) &\leqslant \delta_p(\phi(x_k) \cap \overline{B_p}(x_0,r), \phi(x_{k+1}))\\
&\leqslant F(M(x_k,x_{k+1}), \tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1})))\\
&\leqslant M(x_k,x_{k+1}).
\end{aligned}$$

Si nous supposons que $M(x_k,x_{k+1}) \leqslant p(x_{k+1},\phi(x_{k+1}))$ ou $\tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1})) = 0$ pour certain $k \in \mathbb{N}$, alors on a

$$F(M(x_k,x_{k+1}), \tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1}))) = M(x_k,x_{k+1}),$$

ceci implique que $M(x_k,x_{k+1}) = 0$ ou $\tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1})) = 0$ et alors $x_k = x_{k+1}$ ou $p(x_k,x_{k+1}) = 0$, ce qui est une contradiction.

Nous supposons donc que $p(x_{k+1},\phi(x_{k+1})) < M(x_k,x_{k+1})$ et $\tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1})) \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et puis il existe $x_{k+2} \in \phi(x_{k+1})$ de telle sorte que

$$p(x_{k+1},x_{k+2}) < M(x_k,x_{k+1}) \leqslant p(x_k,x_{k+1}).$$

De plus, si $F \in \mathscr{C}_I$ et τ est croissante, alors nous avons

$$\begin{aligned}
p(x_{k+1},x_{k+2}) &\leqslant \delta_p(\phi(x_k)\cap\overline{B_p}(x_0,r),\phi(x_{k+1}))\\
&\leqslant F(M(x_k,x_{k+1}),\tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1})))\\
&\leqslant F(p(x_k,x_{k+1}),\tau(x_0,x_1,\phi(x_0),\phi(x_1)))\\
&\leqslant F(\psi^k(p(x_0,x_1)),\tau(x_0,x_1,\phi(x_0),\phi(x_1)))\\
&\leqslant \psi^{k+1}(p(x_0,x_1));
\end{aligned}$$

d'autre part, si $F \in \mathscr{C}_{II}$ et $\tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1}) \geqslant \alpha$,

$$\begin{aligned}
p(x_{k+1},x_{k+2}) &\leqslant \delta_p(\phi(x_k)\cap\overline{B_p}(x_0,r),\phi(x_{k+1}))\\
&\leqslant F(M(x_k,x_{k+1}),\tau(x_k,x_{k+1},\phi(x_k),\phi(x_{k+1})))\\
&\leqslant F(p(x_k,x_{k+1}),\alpha)\\
&\leqslant F(\psi^k(p(x_0,x_1)),p(x_0,x_1))\\
&\leqslant F(\psi^k(p(x_0,x_1)),\psi^k(p(x_0,x_1)))\\
&\leqslant \psi^{k+1}(p(x_0,x_1)).
\end{aligned}$$

D'autre part, x_{k+2} est un élément dans la p-boule fermé $\overline{B_p}(x_0,r)$. En effet,

$$\begin{aligned}
p(x_{k+2},x_0) &\leqslant \sum_{j=0}^{k+1} p(x_{j+1},x_j) - \sum_{j=1}^{k+1} p(x_j,x_j)\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \psi^j(p(x_1,x_0))\\
&\leqslant w(\alpha,\cdot) \leqslant p(x_0,x_0)+r.
\end{aligned}$$

Pour tous les entiers n et m tels que $n > m$, nous avons

$$\begin{aligned}
p(x_n,x_m) &\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} p(x_k,x_{k+1}) - \sum_{k=m+1}^{n-1} p(x_k,x_k)\\
&\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \psi^k(p(x_0,x_1))\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \psi^k(p(x_0,x_1))\\
&\leqslant w(\alpha,\cdot).
\end{aligned}$$

Puisque $w(s,\cdot)$ est convergent pour chaque $s \in J$, nous obtenons que $\{x_n\}$ est une suite de 0-Cauchy dans $\overline{B_p}(x_0,r)$. Comme $\overline{B_p}(x_0,r)$ est un sous-espace 0-complet, alors $\{x_n\}$ converges, par rapport à τ_p, à un point $x^* \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$ tel que

$$p(x^*,x^*) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x^*) = 0.$$

Nous affirmons maintenant que $x^* \in \phi(x^*)$. L'inégalité triangulaire modifiée et l'hypothèse (a) donnent

$$\begin{aligned} p(x^*,\phi(x^*)) &\leqslant p(x^*,x_k) + p(x_k,\phi(x^*)) - p(x_k,x_k) \\ &\leqslant p(x^*,x_k) + \delta_p(\phi(x_{k-1}) \cap \overline{B_p}(x_0,r),\phi(x^*)) \\ &\leqslant p(x^*,x_k) + F(M(x_{k-1},x^*),\tau(x_k,x^*,\phi(x_k),\phi(x^*)))) \\ &\leqslant p(x^*,x_k) + M(x_{k-1},x^*) \\ &\leqslant p(x^*,x_k) + p(x_{k-1},x^*). \end{aligned}$$

On prend la limite quand $k \to +\infty$, on obtient $p(x^*,\phi(x^*)) = 0 = p(x^*,x^*)$ et d'après le lemme 2.1.16 on obtient

$$x^* \in \overline{\phi(x^*)} = \phi(x^*).$$

Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x},\bar{x}) + 2r \in J$, nous supposons qu'il existe deux points fixes $x^*,x^{**} \in \overline{B_p}(x_0,r)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} M(x^*,x^{**}) &\leqslant p(x^*,x^{**}) \\ &\leqslant p(x^*,x_0) + p(x_0,x^{**}) - p(x_0,x_0) \\ &\leqslant p(x_0,x_0) + 2r \in J, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M(x^*,x^{**}) &\leqslant p(x^*,x^{**}) \\ &= p(x^*,\phi(x^{**})) \\ &\leqslant \delta_p(\phi(x^*) \cap \overline{B_p}(x_0,r),\phi(x^{**})) \\ &\leqslant F(M(x^*,x^{**}),\tau(x^*,x^{**},\phi(x^*),\phi(x^{**}))) \\ &\leqslant M(x^*,x^{**}), \end{aligned}$$

et donc on a

$$F(M(x^*,x^{**}),\tau(x^*,x^{**},\phi(x^*),\phi(x^{**})))=M(x^*,x^{**}),$$

ce qui implique que $M(x^*,x^{**})=0$ ou $\tau(x^*,x^{**},\phi(x^*),\phi(x^{**}))=0$, donc $p(x^*,x^{**})=0$, ou $x^*=x^{**}$ ce qui est une contradiction et la preuve est terminée.

□

Pour $F(s,t)=\varphi(s)$ une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1.1 *Soit (X,p) un espace métrique partiel. Soit $\bar{x}\in X$ et $r>0$ tel que $\overline{B_p}(\bar{x},r)$ soit un sous-espace 0-complet de X. Soit $\phi:\overline{B_p}(\bar{x},r)\to C^p(X)$ une multifonction et soit φ une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur J. S'il existe $\alpha\in J$ tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x}))<\alpha$ *où* $s(\alpha)\leqslant p(\bar{x},\bar{x})+r$,

(b) $\delta_p(\phi(x)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(y))\leqslant\varphi(M(x,y))\quad\forall x,y\in\overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x},\bar{x})+2r\in J$, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Puisque $F(s,t)=\varphi(s)$ est une fonction de classe C ne dépend pas de la deuxième variable t, on peut choisir n'importe quelle $\tau\in\Xi$ tel que τ est croissant ou supérieur à α, puis applique le théorème 3.3.1.

□

Remarque 3.3.10 *Le corollaire 3.3.1.1 généralise [21, Théorème 3.2] aux espaces métriques partielles 0-complètes, et par conséquent, généralise les résultats [6, 11, 12, 15, 47, 48, 65, 75, 82, 81, 83, 84, 87, 104].*

Comme un cas particulier, pour $F(s,t)=\lambda s$, nous avons

Corollaire 3.3.1.2 *Soit (X,p) un espace métrique partiel. Soit $\bar{x}\in X$, $\lambda\in[0,1)$ et $r>0$ tels que $\overline{B_p}(\bar{x},r)$ est un sous-espace 0-complet de X. Soit $\phi:\overline{B_p}(\bar{x},r)\to C^p(X)$ une multifonction tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x})) < (p(\bar{x},\bar{x})+r)(1-\lambda)$,

(b) $\delta_p(\phi(x)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(y)) \leqslant \lambda M(x,y) \quad \forall x,y\in\overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction, alors x^* est l'unique point fixe de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Nous appliquons le corollaire pour $\varphi(t)=\lambda t$ qui est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur $J=[0,+\infty)$ et $s(t)=\dfrac{t}{1-\lambda}$. Prenons $\alpha=(p(\bar{x},\bar{x})+r)(1-\lambda)\in J$, ce qui complète la démonstration.

□

Pour $F(s,t)=s-t$ et $\tau(x,y,\phi(x),\phi(y))=\alpha+\psi(x,y,\phi(x),\phi(y))$ tels que $\psi: X\times X\times C^p(X)\times C^p(X)\to[0,+\infty)$ une fonction, nous obtenons ce qui suit :

Corollaire 3.3.1.3 *Soit (X,p) un espace métrique partiel. Soit $\bar{x}\in X$ et $r>0$ tels que $\overline{B_p}(\bar{x},r)$ soit un sous-espace 0-complet de X. Soit $\phi: \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$ une multifonction. S'il existe $\alpha\geqslant 0$ et les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x})) < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}(p(\bar{x},\bar{x})+r)$,

(b) $\delta_p(\phi(x)\cap\overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(y))+\alpha \leqslant M(x,y)-\psi(x,y,\phi(x),\phi(y)) \quad \forall x,y\in\overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

PREUVE.

Puisque $F(s,t)=s-t$ est une fonction de classe C pour $J=J'=[0,+\infty)$, alors on obtient

$$w(\alpha,t)=2\alpha-t\leqslant 2\alpha,$$

pour chaque $t\in J'$. Comme $p(\bar{x},\bar{x})+2r\in J$, il suffit de prendre $2\alpha\leqslant p(\bar{x},\bar{x})+r$ et appliquer le théorème 3.3.1 pour compléter la démonstration.

□

De même, pour $F(s,t) = s - t$ et $\tau(x,y,\phi(x),\phi(y)) = \dfrac{\alpha}{\psi(x,y,\phi(x),\phi(y))}$ tel que $\psi : X \times X \times C^p(X) \times C^p(X) \to (0,1]$, alors nous avons :

Corollaire 3.3.1.4 *Soit (X,p) un espace métrique partiel. Soit $\bar{x} \in X$ et $r > 0$ tels que $\overline{B_p}(\bar{x},r)$ soit un sous-espace 0-complet de X. Soit $\phi : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to C^p(X)$ une multifonction. S'il existe $\alpha \geqslant 0$ et les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x},\phi(\bar{x})) < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}\,(p(\bar{x},\bar{x}) + r)$,

(b) $\psi(x,y,\phi(x),\phi(y))\delta_p(\phi(x) \cap \overline{B_p}(\bar{x},r),\phi(y)) \leqslant M(x,y) - p(\bar{x},\phi(\bar{x})) \quad \forall x,y \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$,

alors ϕ a un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$. Si ϕ est une fonction alors x^* est l'unique point fixe de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$.

CHAPITRE 4

ÉTUDE DE L'EXISTENCE DES SOLUTIONS

Le but de ce chapiter est d'exposer les travaux publiés dans [8, 22, 23, 24]

4.1 Existence des solutions de $\varepsilon u'' + f(x,u) = \lambda$

Dans cette section, nous nous intéressons au problème suivant

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' = f(x,u) - \lambda, \quad x \in (0,1) \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où f est une fonction réelle continue. Les constantes $\varepsilon, \lambda, \alpha, \beta, \gamma$ et δ sont telles que

$$\varepsilon > 0, \lambda, \beta, \delta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad \gamma + \delta > 0, \quad k := \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma > 0. \tag{4.2}$$

Ce modèle non linéaire est très intéressant et étudié par Carrier [35] [20, p. 463], Castro et Shivaji [36, 37], Ammar Khodja [71], Addou et Benmezaï [2] et de Rouaki [105, 106].

Nous nous utilisons notre premier principe d'existence, Théorème 3.1.1, pour établir un résultat d'existence pour (4.1). Soit $X = C([0,1])$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies dans $I = [0,1]$ et muni de la métrique partielle

$$p(u,v) = \|u - v\| + c \qquad \forall u, v \in X,$$

où $\|u\| = \sup\limits_{x \in I} |u(x)|$ et $c \geqslant 0$. Comme

$$p^s(u,v) = 2p(u,v) - p(u,u) - p(v,v) = 2\|u - v\|,$$

alors par le lemme 2.1.6, (X,p) est un espace complet parce que l'espace métrique (X,p^s) est complet. Il est bien connu que $u^* \in C([0,1]) \cap C^2((0,1))$ est une solution du problème (4.1) si et seulement si $u^* \in C([0,1])$ est une solution de l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 G(x,s)[f(s,u(s)) - \lambda]ds \quad x \in I, \tag{4.3}$$

où $G(x,s)$ est la fonction de Green du problème de Sturm-Liouville de second ordre avec conditions aux limites

$$\begin{cases} -z''(x) = 0, & x \in (0,1)\,; \\ \alpha z(0) - \beta z'(0) = 0, \;\; \gamma z(1) + \delta z'(1) = 0 & \end{cases} \tag{4.4}$$

Il est connu que [4, 116]

$$G(x,s) = \frac{1}{k}\begin{cases} (\beta + \alpha s)[\delta + \gamma(1-x)], & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1, \\ (\beta + \alpha x)[\delta + \gamma(1-s)], & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

```
GreenFunction[{-u''[x],a*u[0]-b*u'[0]==0,c*u[1]+d*u'[1]==0},u[x],{x,0,1},y]
```

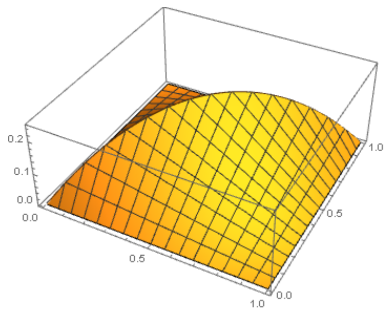

FIGURE 4.1 – La fonction de Green (4.5) pour $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $\gamma > 0$, $\delta = 0$

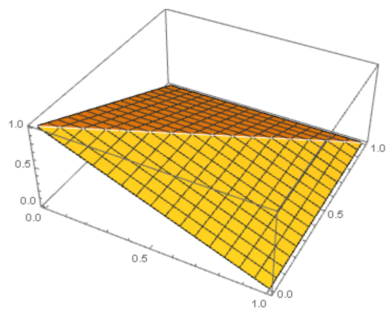

FIGURE 4.2 – La fonction de Green (4.5) pour $\alpha = 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta = 0$

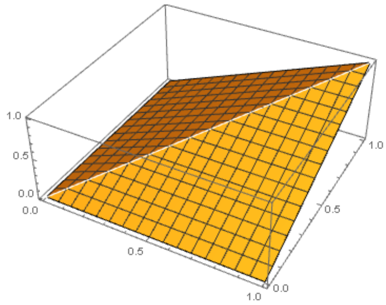

FIGURE 4.3 – La fonction de Green (4.5) pour $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta > 0$

Alors pour tout $x \in I$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(x,s)ds &= \int_0^x G(x,s)ds + \int_x^1 G(x,s)ds \\ &= \frac{1}{k}\left(\int_0^x (\beta+\alpha s)[\delta+\gamma(1-x)]ds + \int_x^1 (\beta+\alpha x)[\delta+\gamma(1-s)]ds\right) \\ &= \frac{1}{2k}\left(\beta\gamma+2\beta\delta+(\alpha\gamma+2\alpha\delta)x-kx^2\right),\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{x\in I}\int_0^1 G(x,s)ds = \frac{1}{8k^2}\left(4k(\beta\gamma+2\beta\delta)+(\alpha\gamma+2\alpha\delta)^2\right) := M \neq 0.$$

Définissons l'opérateur non linéaire $A : X \to X$ par

$$A(u)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 G(x,s)[f(s,u(s))-\lambda]ds \qquad \text{pour tout } u \in X. \tag{4.6}$$

Alors l'existence de solutions au problème (4.1) est équivalent à l'existence d'un point fixe de l'opérateur non linéaire A.

Pour vérifier que A vérifie toutes les hypothèses du théorème 3.1.1 sur la p-boule fermé de rayon $K(\lambda)$ de centre 0_X (la fonction nulle), nous considérons les conditions suivantes :

1. Il existe une constante $C \geqslant 0$ et $K(\lambda)$ une fonction continue positive définie pour $\lambda \geqslant C$.
2. Il existe une fonction croissante et continue $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que φ est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle J et $\lim_{t\downarrow 0}\varphi(t) = 0$.

3. Il existe $\alpha \in J$ tel que $s(\alpha) \leqslant c+K(\lambda)$.
4. $\|f(\cdot,0)-\lambda\| < \dfrac{\varepsilon(\alpha-c)}{M}$.
5. $|f(x,a)-f(x,b)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}(\varphi(|a-b|+c)-c) \quad \forall \begin{cases} x \in I, \\ |a|,|b| \leqslant K(\lambda). \end{cases}$

Par conséquent, nous énonçons et prouvons notre premier résultat d'existence comme suit :

Théorème 4.1.1 [22, 23] *Pour un $c \geqslant 0$ fixé, supposons que les conditions (1)-(5) sont vérifiées. Alors (4.1) admet au moins une solution u^* dans $C([0,1]) \cap C^2((0,1))$ telle que $\|u^*\| \leqslant K(\lambda)$. De plus, si $c+2K(\lambda) \in J$ alors la solution est unique.*

PREUVE.

Soit $A : X \to X$ la simple multifonction définie par

$$A(u)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 G(x,s)[f(s,u(s))-\lambda]ds \qquad \text{pour tout } u \in X. \tag{4.7}$$

Premièrement, l'utilisation des hypothèses (1)-(4) donne

$$\begin{aligned} p(0_X, A(0_X)) &= \sup_{x\in I}|A(0_X)(x)| + c \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in I}\left|\int_0^1 G(x,s)[f(s,0_X(s))-\lambda]ds\right| + c \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in I}\int_0^1 G(t,s)\,|f(s,0)-\lambda|\,ds + c \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|f(\cdot,0)-\lambda\|\sup_{x\in I}\int_0^1 G(x,s)ds + c \\ &< \frac{M\varepsilon(\alpha-c)}{\varepsilon M} + c = \alpha \end{aligned}$$

et $s(\alpha) \leqslant c+K(\lambda) = p(0_X,0_X)+K(\lambda)$. Donc la condition (a) du théorème 3.1.1 est satisfaite.

Soit $u,v \in \overline{B_p}(0_X,K(\lambda))$, alors nous avons deux cas. Le premier, si $A(u)\cap\overline{B_p}(0_X,K(\lambda)) = \emptyset$ alors, par la convention (2.1), nous avons

$$\delta_p(A(u)\cap\overline{B_p}(0_X,K(\lambda)),A(v)) = 0 \leqslant \varphi(p(u,v)).$$

Nous supposons donc que $A(u)\cap\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))\neq\emptyset$. Par la condition (5), nous avons

$$\begin{aligned}
\delta_p(A(u)\cap\overline{B_p}(0_X,K(\lambda)),A(v)) &= p(A(u),A(v)) \\
&= \sup_{x\in I}|A(u)(x)-A(v)(x)|+c \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in I}\left|\int_0^1 G(x,s)(f(s,u(s))-f(s,v(s)))ds\right|+c \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in I}\int_0^1 G(x,s)\,|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\,ds+c \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in I}\int_0^1 G(x,s)(\frac{\varepsilon}{M}(\varphi(|u(s)-v(s)|+c)-c)ds+c \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\sup_{x\in I}\int_0^1 G(x,s)ds\right)\frac{\varepsilon}{M}(\varphi(\|u-v\|+c)-c)+c \\
&\leqslant \frac{M}{\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{M}(\varphi(\|u-v\|+c)-c))+c \\
&\leqslant \varphi(p(u,v)).
\end{aligned}$$

Ainsi, toutes les conditions sont satisfaites et A a au moins un point fixe u^* dans $\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))$ i.e., $p(u^*,0_X)\leqslant p(0_X,0_X)+K(\lambda)\Leftrightarrow\|u^*\|\leqslant K(\lambda)$. Comme A est une fonction et si $c+2K(\lambda)\in J$, i.e., $p(0_X,0_X)+2K(\lambda)\in J$, alors u^* est la solution unique.

□

Exemple 4.1.1 *Nous considérons le problème*

$$\begin{cases} -\varepsilon u''=u^2-\lambda, & x\in(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{4.8}$$

où $\varepsilon=1$ *et* $0<\lambda\leqslant\frac{3}{4}$.

Pour montrer que (4.8) a une solution, nous appliquons le Théorème 4.1.1 avec les spécifications suivantes

$$f(x,u)=u^2, M=\frac{1}{8}, c=0.$$

Prenez

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\sqrt{t}-t)^2, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}; \\ t^4 + \frac{15}{256}, & t \geqslant \frac{1}{4}, \end{cases}$$

qui est croissante, continue et la fonction est de Bianchini-Grandolfi sur $J = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ telle que $s(t) = \sqrt{t}$ et $\lim_{t \downarrow 0} \varphi(t) = 0$. Notez que φ n'est pas une contraction quand $t \to 0$. Choisissez

$$C = 0, \alpha = \frac{\lambda}{4} \in J, K(\lambda) = s(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}.$$

Pour voir que la condition (5) du Théorème 4.1.1 est vraie, nous prenons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a|, |b| \leqslant K(\lambda)$, pour $0 < \lambda \leqslant \frac{3}{4}$.

(a) Si $|a-b|+c \leqslant \frac{1}{4}$, alors

$$\begin{aligned} |f(x,a) - f(x,b)| &= |a^2 - b^2| \\ &\leqslant 8(\sqrt{|a-b|} - |a-b|)^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{M}(\varphi(|a-b|+c) - c, \end{aligned} \tag{4.9}$$

(b) et si $|a-b|+c \geqslant \frac{1}{4}$, alors

$$\begin{aligned} |f(x,a) - f(x,b)| &= |a^2 - b^2| \\ &\leqslant 8(|a-b|^4 + \frac{15}{256}) \\ &= \frac{\varepsilon}{M}(\varphi(|a-b|+c) - c). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ainsi, toutes les conditions (1) - (5) sont satisfaites et le théorème 4.1.1 garantit maintenant que (4.8) a une solution $u \in C([0,1]) \cap C^2((0,1))$ telle que

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}.$$

De plus, pour $\lambda \in \left]0, \frac{1}{16}\right]$ nous avons $c + 2K(\lambda) = \sqrt{\lambda} \in J$ et alors la solution est unique.

4.2 Existence des solutions de $u'' + f(x,u,v) = \lambda$ et $v'' + f(x,v,u) = \lambda$

Dans cette section, nous considérons $X = C([0,1])$ l'espace des fonctions réelles continues définies sur $I = [0,1]$ et $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une métrique définie par

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sup_{t \in I} |u(t) - v(t)|.$$

Nous définissons la métrique partielle

$$p(u,v) = d(u,v) + c = \sup_{t \in I} |u(t) - v(t)| + c, \quad c \geqslant 0,$$

et puisque $p^s(u,v) = 2p(u,v) - p(u,u) - p(v,v) = 2\|u - v\|$, donc par le lemme 2.1.6, (X,p) est complet puisque l'espace métrique $(X, \|\cdot\|)$ est complet. Nous appliquons nos principaux résultats pour étudier l'existence de solutions pour le système elliptique suivant avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' = f(t,u,v) - \lambda, & t \in (0,1), \\ -v'' = f(t,v,u) - \lambda, & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 = v(0) = v(1), \end{cases} \tag{4.11}$$

où $f : (0,1) \times X \times X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\lambda \geqslant 0$. Pour des exemples concernant ce modèle, voir [107, 36, 2, 105, 106] pour une seule variable et [39, 40, 86] pour le système de deux variables.

Maintenant, nous considérons les conditions suivantes.

1. Il existe une constante constante $C \geqslant 0$ et $K(\lambda)$ définie pour $\lambda \geqslant C$.
2. Il existe une fonction croissante et continue $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que φ est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle J et $\lim_{t \downarrow 0} \varphi(t) = 0$.
3. Il existe $\alpha \in J$ tel que $s(\alpha) \leqslant c + K(\lambda)$.
4. $\|f(\cdot,0,0) - \lambda\| < 8(\alpha - c)$.
5. $|f(t,a,b) - f(t,a',b')| \leqslant \begin{cases} 8\varphi(\max\{|a-a'|,|b-b'|\} + c) - 8c, & (a,b) \neq (a',b'), \\ 0, & (a,b) = (a',b') \end{cases}$ pour tous $t \in I$, et $|a|, |a'|, |b|, |b'| \leqslant K(\lambda)$.

Théorème 4.2.1 [24] *Pour un $c \geqslant 0$ fixé, supposons que les conditions* (1)-(5) *sont valables. Alors* (4.11) *a au moins une solution (u^*, v^*) dans $(C^2((0,1)) \cap C([0,1]))^2$ telle que* $\max\{\|u^*\|, \|v^*\|\} \leqslant K(\lambda)$. *De plus, si $c + 2K(\lambda) \in J$, alors la solution (u^*, v^*) est unique.*

Preuve.

Il est bien connu que $(u^*, v^*) \in (C^2((0,1)) \cap C([0,1]))^2$ est une solution de système (4.11) si et seulement si $(u^*, v^*) \in C([0,1]) \times C([0,1])$ est une solution du système intégral non linéaire suivant

$$\begin{cases} u(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)[f(s,u(s),v(s)) - \lambda]ds, & t \in I, \\ v(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)[f(s,v(s),u(s)) - \lambda]ds, & t \in I, \end{cases} \tag{4.12}$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green du problème de Sturm-Liouville de second ordre avec conditions aux limites

$$\begin{cases} -z''(t) = 0, & t \in (0,1), \\ z(0) = 0, & z(1) = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Il est connu que

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.14}$$

et alors pour tout $t \in I$, nous avons

$$\int_0^1 G(t,s)ds = \frac{1}{2}t(1-t),$$

ce qui implique que $\sup\limits_{t \in I} \int\limits_0^1 G(t,s)ds = \dfrac{1}{8}$. Prenons une simple multifonction $A : X \times X \to X$ par

$$A(u,v)(t) = \int_0^1 G(t,s)[f(s,u(s),v(s)) - \lambda]ds \quad \text{pour tous} \quad u,v \in X.$$

Donc, l'existence de solutions au système (4.12) est équivalent à trouver le point fixe couplé à l'opérateur non linéaire A.

Maintenant, nous vérifions que A vérifie toutes les hypothèses de Théorème 3.2.2 sur la p-boule fermé de rayon $K(\lambda)$ centré en 0_X, la fonction nulle de X, qui est notée par $\overline{B_p}(0_X, K(\lambda))$.

Premièrement, l'utilisation des hypothèses (1)-(4) donne

$$\begin{aligned}
p(0_X,A(0_X,0_X)) &= \sup_{t\in I}|0_X(t)-A(0_X,0_X)(t)|+c\\
&\leqslant \sup_{t\in I}\left|\int_0^1 G(t,s)[f(s,0_X(s),0_X(s))-\lambda]ds\right|+c\\
&\leqslant \sup_{t\in I}\int_0^1 G(t,s)\,|f(s,0_X(s),0_X(s))-\lambda|\,ds+c\\
&\leqslant \frac{1}{8}\|f(\cdot,0,0)-\lambda\|+c<\frac{8(\alpha-c)+8c}{8}=\alpha
\end{aligned}$$

et $s(\alpha)\leqslant c+K(\lambda)=p(0_X,0_X)+K(\lambda)$. Donc la condition (a) de Théorème 3.2.2 est satisfaite.

Soit $x,y,u,v\in\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))$, alors nous avons deux cas. Le premier, si $A(x,y)\notin\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))$ alors, par la convention (2.1), nous avons

$$\delta_p(A(x,y)\cap\overline{B_p}(0_X,K(\lambda)),A(u,v))=0\leqslant\varphi(\max\{p(x,u),p(y,v)\}).$$

Nous supposons donc que $A(x,y)\in\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))$. Par la condition (5), nous avons

$$\begin{aligned}
\delta_p(A(x,y)\cap\overline{B_p}(0_X,K(\lambda)),A(u,v)) &= p(A(x,y),A(u,v))\\
&= \sup_{t\in I}|A(x,y)(t)-A(u,v)(t)|+c\\
&= \sup_{t\in I}\left|\int_0^1 G(t,s)(f(s,x(s),y(s))-f(s,u(s),v(s)))ds\right|+c\\
&\leqslant \sup_{t\in I}\int_0^1 G(t,s)\,|f(s,x(s),y(s))-f(s,u(s),v(s))|\,ds+c\\
&\leqslant \sup_{t\in I}\int_0^1 G(t,s)(8\varphi(\max\{|x(s)-u(s)|,|y(s)-v(s)|\}+c)-8c)ds+c\\
&\leqslant \left(\sup_{t\in I}\int_0^1 G(t,s)ds\right)(8\varphi(\max\{\|x-u\|,\|y-v\|\}+c)-8c)+c\\
&\leqslant \frac{1}{8}(8\varphi(\max\{\|x-u\|,\|y-v\|\}+c)-8c)+c\\
&\leqslant \varphi(\max\{p(x,u),p(y,v)\}).
\end{aligned}$$

Alors, toutes les conditions sont satisfaites et A a au moins un point fixe couplé (u^*,v^*) dans $\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))\times\overline{B_p}(0_X,K(\lambda))$, i.e., $\max\{p(u^*,0_X),p(v^*,0_X)\}\leqslant p(0_X,0_X)+K(\lambda)\Leftrightarrow\max\{\|u^*\|,\|v^*\|\}\leqslant K(\lambda)$. Comme A est une fonction et si $c+2K(\lambda)\in J$, i.e., $p(0_X,0_X)+2K(\lambda)\in J$, alors (u^*,v^*) est unique.

□

4.3 Existence des solutions de $u''+f(x,u,v)=\lambda$ et $v''+g(x,u,v)=\mu$

Dans cette section,, nous considérons $X=C([0,1])$ l'espace de toutes les fonctions continues définies sur $I=[0,1]$ muni de la norme $\|u\|=\sup\limits_{t\in I}|u(t)|$. Considérons le produit cartésien $X\times X$ muni de la métrique partielle

$$p((x,y),(u,v))=\|x-u\|+\|y-v\|+c$$

où c est une constante non négative et $X\times X$ est une métrique partielle 0-complète. Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u_1''=f(t,u_1,u_2)-\lambda & t\in(0,1)\\ -u_2''=g(t,u_1,u_2)-\mu & t\in(0,1)\\ \alpha_i u_i(0)-\beta_i u_i'(0)=0 & i=1,2\\ \gamma_i u_i(1)+\delta_i u_i'(1)=0 & i=1,2 \end{cases} \tag{4.15}$$

où $f,g:[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Les constantes $\lambda,\mu,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ et δ_i vérifiant, pour chaque $i\in\{1,2\}$,

$$\lambda,\mu,\beta_i,\delta_i\geqslant 0,\ \ \alpha_i+\beta_i>0,\ \ \gamma_i+\delta_i>0,\ \ k_i:=\alpha_i\gamma_i+\alpha_i\delta_i+\beta_i\gamma_i>0.$$

On remarque que le système elliptique couplé (4.15) contient plusieurs problèmes avec différents choix sur les constantes et les fonctions [2, 36, 39, 40, 86, 105, 106, 107]. Nous pouvons voir que le système elliptique couplé (4.15) est équivalent au système suivant d'équations intégrales

$$\begin{cases} u_1(t) = \int_0^1 G_1(t,s)[f(s,u_1(s),u_2(s)) - \lambda]ds := A(u_1,u_2)(t) & t \in I \\ u_2(t) = \int_0^1 G_2(t,s)[g(s,u_1(s),u_2(s)) - \mu]ds := B(u_1,u_2)(t) & t \in I \end{cases} \tag{4.16}$$

où $G_i(t,s)$, pour $i \in \{1,2\}$, est la fonction de Green du problème de Sturm-Liouville de second ordre avec conditions aux limites

$$\begin{cases} -z''(t) = 0, & t \in (0,1)\,; \\ \alpha_i z(0) - \beta_i z'(0) = 0, \;\; \gamma_i z(1) + \delta_i z'(1) = 0 \end{cases}$$

Il est connu que [4, 116]

$$G_i(t,s) = \frac{1}{k_i} \begin{cases} (\beta_i + \alpha_i s)[\delta_i + \gamma_i(1-t)], & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (\beta_i + \alpha_i t)[\delta_i + \gamma_i(1-s)], & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

et alors pour tout $t \in I$, on a pour chaque $i \in \{1,2\}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_i(t,s)ds &= \int_0^t G_i(t,s)ds + \int_t^1 G_i(t,s)ds \\ &= \frac{1}{k_i}\left(\int_0^t (\beta_i + \alpha_i s)[\delta_i + \gamma_i(1-t)]ds + \int_t^1 (\beta_i + \alpha_i t)[\delta_i + \gamma_i(1-s)]ds\right) \\ &= \frac{1}{2k_i}\left(\beta_i\gamma_i + 2\beta_i\delta_i + (\alpha_i\gamma_i + 2\alpha_i\delta_i)t - k_i t^2\right) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\sup\limits_{t\in I} \int_0^1 G_i(t,s)ds = \dfrac{1}{8k_i^2}\left(4k_i(\beta_i\gamma_i + 2\beta_i\delta_i) + (\alpha_i\gamma_i + 2\alpha_i\delta_i)^2\right) := M_i \neq 0$ et on note $M := \max\{M_1, M_2\}$

Soit $\phi(u_1,u_2)(t) = (A(u_1,u_2)(t), B(u_1,u_2)(t))$. Alors le système (4.16) est équivalent à l'équation du point fixe

$$\phi(u_1,u_2) = (u_1,u_2).$$

Maintenant, nous considérons les conditions suivantes :

1. Il existe une constante $C \geqslant 0$ et $K(\lambda,\mu)$ une fonction continue positive définie, sans perte de généralité, pour $\lambda \geqslant \mu \geqslant C$.
2. Il existe $F \in \mathscr{C}$, $\tau \in \Xi$ et $\alpha \in J$ satisfaisant l'un des critères suivants

— $F \in \mathscr{C}_I$ et τ est non décroissant,

— $F \in \mathscr{C}_{II}$ et $\tau_{x,y,u,v} := \tau((x,y),(u,v),\phi(x,y),\phi(u,v)) \geqslant \alpha$ où $(x,y),(u,v) \in X \times X$.

3. $w(\alpha,\cdot) \leqslant c + K(\lambda,\mu)$.
4. $\|f(\cdot,0,0)-\lambda\| + \|g(\cdot,0,0)-\mu\| < \dfrac{\alpha - c}{M}$.
5. $\dfrac{1}{2M}\left(F(|a-b|+|a'-b'|+c,\tau_{a,a',b,b'})-c\right) \geqslant \begin{cases} |f(\cdot,a,a')-f(\cdot,b,b')|, \\ |g(\cdot,a,a')-g(\cdot,b,b')|, \end{cases} \forall \begin{cases} a,a',b,b' \in \mathbb{R} \\ |a-b| \leqslant K(\lambda,\mu) \\ |a'-b'| \leqslant K(\lambda,\mu) \end{cases}$

Théorème 4.3.1 [8] *Pour un $c \geqslant 0$ fixé, supposons que les conditions (1)-(5) sont satisfaites. Alors* (4.15) *admet au moins une solution (u^*,v^*) dans $(C([0,1]) \cap C^2((0,1)))^2$ tel que $\|u^*\| + \|v^*\| \leqslant K(\lambda,\mu)$. De plus, si $c + 2K(\lambda,\mu) \in J$ alors la solution est unique.*

PREUVE.

Définissons une multifonction $\phi : X \times X \to C^p(X \times X)$ par

$$\phi(u,v)(t) = (A(u,v)(t), B(u,v)(t)) = \left(\int_0^1 G_1(t,s)[f(s,u(s),v(s))-\lambda]ds, \int_0^1 G_2(t,s)[g(s,u(s),v(s))-\mu]ds \right)$$

pour tous $u,v \in X$.

Maintenant, nous vérifions que ϕ vérifie toutes les hypothèses de théorème 3.3.1 sur la p-boule fermée de rayon $K(\lambda,\mu)$ centré en $(0_X,0_X)$ ce que l'on notera par $\overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu))$ où 0_X est la fonction nulle de X.

Premièrement, l'utilisation des hypothèses (1)-(4) donne

$$\begin{aligned}
p((0_X,0_X),\phi(0_X,0_X)) &= p((0_X,0_X),(A(0_X,0_X),B(0_X,0_X)))\\
&= \|A(0_X,0_X)\| + \|B(0_X,0_X)\| + c\\
&= \sup_{t\in I}\left|\int_0^1 G_1(t,s)[f(s,0_X(s),0_X(s))-\lambda]ds\right|\\
&+ \sup_{t\in I}\left|\int_0^1 G_2(t,s)[g(s,0_X(s),0_X(s))-\mu]ds\right| + c\\
&\leqslant \left(\sup_{t\in I}\int_0^1 G_1(t,s)ds\right)\|f(\cdot,0,0)-\lambda\| + \left(\sup_{t\in I}\int_0^1 G_2(t,s)ds\right)\|g(\cdot,0,0)-\mu\| + c\\
&\leqslant M_1\|f(\cdot,0,0)-\lambda\| + M_2\|g(\cdot,0,0)-\mu\| + c\\
&\leqslant M(\|f(\cdot,0,0)-\lambda\| + \|g(\cdot,0,0)-\mu\|) + c\\
&< M\frac{\alpha-c}{M} + c = \alpha,
\end{aligned}$$

et $w(\alpha,\cdot) \leqslant c + K(\lambda,\mu) = p((0_X,0_X),(0_X,0_X)) + K(\lambda,\mu)$. Alors la condition (b) du théorème 3.3.1 est satisfaite.

Soit $(x,y),(u,v) \in \overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu))$ alors nous traitons deux cas. Le premier, si $\phi(x,y) \notin \overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu))$ alors selon la convention (2.1) on a

$$\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu)),\phi(u,v)) = 0 \leqslant F(M((x,y),(u,v)),\tau((x,y),(u,v),\phi(x,y),\phi(u,v))).$$

Nous supposons donc que $\phi(x,y) \in \overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu))$ et, à partir de la condition (5), nous avons

$$\begin{aligned}
\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu)),\phi(u,v)) &= p(\phi(x,y),\phi(u,v))\\
&= \|A(x,y)-A(u,v)\| + \|B(x,y)-B(u,v)\| + c\\
&= \sup_{t\in I}\left|\int_0^1 G_1(t,s)(f(s,x(s),y(s))-f(s,u(s),v(s)))ds\right|\\
&+ \sup_{t\in I}\left|\int_0^1 G_2(t,s)(g(s,x(s),y(s))-g(s,u(s),v(s)))ds\right| + c,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu)),\phi(u,v)) &\leqslant \sup_{t\in I}\int_0^1 G_1(t,s)\,|f(s,x(s),y(s))-f(s,u(s),v(s))|\,ds\\ &+ \sup_{t\in I}\int_0^1 G_2(t,s)\,|g(s,x(s),y(s))-g(s,u(s),v(s))|\,ds+c,\end{aligned}$$

en utilisant la positivité de G_i, la croissance de F par rapport à la première variable et la condition (5) nous avons

$$\begin{aligned}\delta_p(\phi(x,y)\cap\overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu)),\phi(u,v)) &\leqslant \frac{M_1+M_2}{2M}\left(F(\|x-u\|+\|y-v\|+c,\tau_{x,y,u,v})-c\right)+c\\ &\leqslant F(p((x,y),(u,v)),\tau_{x,y,u,v})-c+c\\ &\leqslant F(M((x,y),(u,v)),\tau_{x,y,u,v}).\end{aligned}$$

Donc, toutes les conditions sont satisfaites et A a un point fixe (u^*,v^*) dans $\overline{B_p}((0_X,0_X),K(\lambda,\mu))$ i.e.,

$$p((u^*,v^*),(0_X,0_X))\leqslant p((0_X,0_X),(0_X,0_X))+K(\lambda,\mu)\Leftrightarrow\|u^*\|+\|v^*\|\leqslant K(\lambda,\mu).$$

Si $c+2K(\lambda,\mu)\in J$, i.e. $p((0_X,0_X),(0_X,0_X))+2K(\lambda)\in J$ et comme ϕ est une fonction alors (u^*,v^*) est unique.

$\square$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'étude de l'existence des solutions pour des problèmes non linéaire EDOs avec conditions aux limites qui contients au moins les conditions de Dirichlet et plus particulièrement la théorie qui permet de les générer par la technique des points fixes dans le cadre des multifonctions.

Plusieurs questions se révelent d'ores et déjà intéressantes.

— Est-ce-que l'existence du point fixe pour une multifonction garantie l'existence du point fixe commun, coincidence, couplé commun, triple, quadriple pour des multifonctions et par consequence son application pour des systèmes différentiels bien choisi ?

— Quelles sont les conditions les plus faibles sur un espace pour garantir l'existence d'un point fixe ?

— Quelles sont les conditions suffisantes pour qu'un système différentiel admette une solutions supérieurs et inférieurs ?

— Que se passe t-il si les fonctions du système différentiel sont mesurables ?

Cette thèse nous a permis également d'acquérir des compétences en topologie, théorie du point fixe et leur application dans les systèms différentiels de second ordre pour pouvoir accéder à des problèmes des inclusions différentielles et inclusions variationelles dans le cadre des multifonctions ou dans celui des groupes topologiques en général.

REFERENCES

[1] T. ABDELJAWAD, E. KARAPINAR, AND K. TAŞ, *Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces.*, Appl. Math. Lett., 24 (2011), pp. 1900–1904.

[2] I. ADDOU AND A. BENMEZAÏ, *Boundary-value problems for the one-dimensional p-Laplacian with even superlinearity.*, Electron. J. Differ. Equ., 1999 (1999), p. 29.

[3] R. P. AGARWAL, M. MEEHAN, AND D. O'REGAN, *Fixed point theory and applications.*, Cambridge : Cambridge University Press, 2001.

[4] R. P. AGARWAL AND P. J. WONG, *Existence of solutions for singular boundary problems for higher order differential equations.*, Rend. Semin. Mat. Fis. Milano, 65 (1997), pp. 249–264.

[5] R. AKHMEROV, M. KAMENSKII, A. POTAPOV, A. RODKINA, AND B. SADOVSKII, *Measures of noncompactness and condensing operators. Transl. from the Russian by A. Iacob.*, vol. 55, Basel etc. : Birkhäuser, 1992.

[6] I. ALTUN, F. SOLA, AND H. SIMSEK, *Generalized contractions on partial metric spaces.*, Topology Appl., 157 (2010), pp. 2778–2785.

[7] A. H. ANSARI, *Note on $\varphi - \psi$-contractive type mappings and related fixed point*, in The 2nd Regional Conference on Mathematics and Applications, vol. 2014, 2014, pp. 377–380.

[8] A. H. ANSARI, A. BENTERKI, AND M. ROUAKI, *Some local fixed point results under C-class functions with applications to coupled elliptic systems*, Journal of Linear and Topological Algebra, 07 (2018), pp. 169–182.

[9] A. AUGUSTYNOWICZ, *Existence and uniqueness of solutions for partial differential-functional equations of the first order with deviating argument of the derivative of unknown function.*, Serdica Math. J., 23 (1997), pp. 203–210.

[10] H. AYDI, *Some coupled fixed point results on partial metric spaces.*, Int. J. Math. Math. Sci., 2011 (2011), p. 11.

[11] H. AYDI, M. ABBAS, AND C. VETRO, *Partial Hausdorff metric and Nadler's fixed point theorem on partial metric spaces.*, Topology Appl., 159 (2012), pp. 3234–3242.

[12] H. AYDI, S. H. AMOR, AND E. KARAPINAR, *Berinde-type generalized contractions on partial metric spaces.*, Abstr. Appl. Anal., 2013 (2013), p. 10.

[13] H. AYDI AND E. KARAPINAR, *Fixed point results for generalized α-ψ-contractions in metric-like spaces and applications.*, Electron. J. Differ. Equ., 2015 (2015), pp. 1–15.

[14] J. AYERBE TOLEDANO, T. DOMÍNGUEZ BENAVIDES, AND G. LÓPEZ ACEDO, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory.*, vol. 99, Basel : Birkhäuser, 1997.

[15] S. BANACH, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922), pp. 133–181.

[16] J. BANAŚ, M. JLELI, M. MURSALEEN, B. SAMET, AND C. VETRO, eds., *Advances in nonlinear analysis via the concept of measure of noncompactness.*, Singapore : Springer, 2017.

[17] J. BANAŚ AND J. RIVERO, *On measures of weak noncompactness.*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 151 (1988), pp. 213–224.

[18] G. BEER, *Topologies on closed and closed convex sets.*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993.

[19] I. BEG AND A. R. BUTT, *Coupled fixed points of set valued mappings in partially ordered metric spaces.*, J. Nonlinear Sci. Appl., 3 (2010), pp. 179–185.

[20] C. M. BENDER AND S. A. ORSZAG, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I. Asymptotic methods and perturbation theory. Reprint of the original 1978.*, New York, NY : Springer, reprint of the original 1978 ed., 1999.

[21] A. BENTERKI, *A local fixed point theorem for set-valued mappings on partial metric spaces.*, Appl. Gen. Topol., 17 (2016), pp. 37–49.

[22] A. BENTERKI AND M. ROUAKI, *Existence of solutions for perturbed Dirichlet problem via fixed point method*, in 30th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society, Pure and Applied Mathematics, July 12–15 2017, pp. 25–28.

[23] ——, *Existence of solutions for boundary value problems via fixed point method*, Adv. Stud. Contemp. Math., 28 (2018), pp. 615–623.

[24] A. BENTERKI, M. ROUAKI, AND A. H. ANSARI, *Some coupled fixed point results for set-valued mappings with applications*, Communication in Nonlinear Analysis, 4 (2017), pp. 111–120.

[25] V. BERINDE, *Iterative approximation of fixed points. 2nd revised and enlarged ed.*, vol. 1912, Berlin : Springer, 2nd revised and enlarged ed. ed., 2007.

[26] S. R. BERNFELD AND V. LAKSHMIKANTHAM, *An introduction to nonlinear boundary value problems.* Mathematics in Science and Engineering. Vol. 109. New York-London (1974)., 1974.

[27] T. G. BHASKAR AND V. LAKSHMIKANTHAM, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, 65 (2006), pp. 1379–1393.

[28] A. BHORE, R. DANGI, AND D. AHEERE, *A brief note on fixed point theory*, Journal of Scientific Research in Physical & Mathematical Science, 2 (2015).

[29] R. M. BIANCHINI AND M. GRANDOLFI, *Transformazioni di tipo contracttivo generalizzato in uno spazio metrico*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat, 45 (1968), pp. 212–216.

[30] A. BIELECKI, *Une remarque sur la méthode de Banach-Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires.*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 4 (1956), pp. 261–264.

[31] N. BILGILI, I. M. ERHAN, E. KARAPINAR, AND D. TURKOGLU, *A note on 'Coupled fixed point theorems for mixed g-monotone mappings in partially ordered metric spaces'.*, Fixed Point Theory Appl., 2014 (2014), p. 6.

[32] L. BROUWER, *Uber abbildung von mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71 (1912), pp. 97–115.

[33] A. CABADA, *The method of lower and upper solutions for second, third, fourth, and higher order boundary value problems.*, J. Math. Anal. Appl., 185 (1994), pp. 302–320.

[34] A. CABADA AND J. A. CID, *On the sign of the Green's function associated to Hill's equation with an indefinite potential.*, Appl. Math. Comput., 205 (2008), pp. 303–308.

[35] G. F. CARRIER, *Boundary layer problems in applied mechanics.*, Adv. Appl. Mech., 3 (1953), pp. 1–19.

[36] A. CASTRO AND R. SHIVAJI, *Multiple solutions for a Dirichlet problem with jumping nonlinearities, ii*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 133 (1988), pp. 509–528.

[37] A. CASTRO AND R. SHIVAJI, *Non-negative solutions for a class of non-positone problems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics, 108 (1988), pp. 291–302.

[38] S. CHANDOK, K. TAS, AND A. HOJAT ANSARI, *Some fixed point results for TAC-type contractive mappings.*, J. Funct. Spaces, 2016 (2016), p. 6.

[39] X. CHENG AND C. ZHONG, *Existence of three nontrivial solutions for an elliptic system.*, J. Math. Anal. Appl., 327 (2007), pp. 1420–1430.

[40] M. CHHETRI AND P. GIRG, *Existence and nonexistence of positive solutions for a class of superlinear semipositone systems.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, 71 (2009), pp. 4984–4996.

[41] J. CID, D. FRANCO, AND F. MINHÓS, *Positive fixed points and fourth-order equations.*, Bull. Lond. Math. Soc., 41 (2009), pp. 72–78.

[42] G. DARBO, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 24 (1955), pp. 84–92.

[43] B. DAVIES, *Integral transforms and their applications. 3rd ed.*, New York, NY : Springer, 3rd ed. ed., 2002.

[44] C. DE COSTER AND P. HABETS, *Two-point boundary value problems. Lower and upper solutions.*, Amsterdam : Elsevier, 2006.

[45] S. DJEBALI, L. GÓRNIEWICZ, AND A. OUAHAB, *Solution Sets for Differential Equations and Inclusions*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 18. Berlin, Boston : De Gruyter., 2012.

[46] A. L. DONTCHEV, *Local convergence of the Newton method for generalized equations.*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 322 (1996), pp. 327–331.

[47] A. L. DONTCHEV AND W. W. HAGER, *An inverse mapping theorem for set-valued maps.*, Proc. Am. Math. Soc., 121 (1994), pp. 481–489.

[48] W.-S. DU, E. KARAPINAR, AND N. SHAHZAD, *The study of fixed point theory for various multivalued non-self-maps*, Abstr. Appl. Anal., 2013 (2013), p. 9.

[49] D. G. DUFFY, *Green's functions with applications.*, Boca Raton, FL : Chapman & Hall/ CRC, 2001.

[50] P. DUPUIS AND A. NAGURNEY, *Dynamical systems and variational inequalities.*, Ann. Oper. Res., 44 (1993), pp. 9–42.

[51] M. FERRIS AND J. PANG, *Engineering and economic applications of complementarity problems.*, SIAM Rev., 39 (1997), pp. 669–713.

[52] M. FRÉCHET, *Sur quelques points du calcul fonctionnel.*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906), pp. 1–74.

[53] H. FRIED, *Green's functions and ordered exponentials.*, Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

[54] M. H. GEOFFROY, S. HILOUT, AND A. PIETRUS, *Acceleration of convergence in Donchev's iterative method for solving variational inclusions.*, Serdica Math. J., 29 (2003), pp. 45–54.

[55] M. H. GEOFFROY AND A. PIÉTRUS, *An iterative method for perturbed generalized equations.*, C. R. Acad. Bulg. Sci., 57 (2004), pp. 7–12.

[56] M. H. GEOFFROY AND A. PIÉTRUS, *A fast iterative scheme for variational inclusions.*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 2009 (2009), pp. 250–258.

[57] F. GIANNESSI AND A. MAUGERI, eds., *Variational inequalities and network equilibrium problems. Proceedings of a conference, Erice, Italy, June 19-25, 1994.*, New York, NY : Plenum, 1995.

[58] D. GUO AND V. LAKSHMIKANTHAM, *Coupled fixed points of nonlinear operators with applications.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 11 (1987), pp. 623–632.

[59] R. HAKL AND P. J. TORRES, *Maximum and antimaximum principles for a second order differential operator with variable coefficients of indefinite sign.*, Appl. Math. Comput., 217 (2011), pp. 7599–7611.

[60] J. HARJANI, B. LÓPEZ, AND K. SADARANGANI, *Fixed point theorems for mixed monotone operators and applications to integral equations.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, 74 (2011), pp. 1749–1760.

[61] S. HEIKKILÄ AND V. LAKSHMIKANTHAM, *Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations.*, New York : Marcel Dekker, Inc., 1994.

[62] M. HÖTZEL ESCARDÓ, *PCF extended with real numbers.*, Theor. Comput. Sci., 162 (1996), pp. 79–115.

[63] S. HU AND N. S. PAPAGEORGIOU, *Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory.*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.

[64] H. IŞIK AND D. TÜRKOĞLU, *Coupled fixed point theorems for new contractive mixed monotone mappings and applications to integral equations.*, Filomat, 28 (2014), pp. 1253–1264.

[65] A. D. IOFFE AND V. M. TIHOMIROV, *Theory of extremal problems. Translated from the Russian by K. Makowski.* Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 6. Amsterdam, New York, Oxford : North-Holland Publishing Company., 1979.

[66] H. ISIK, M. IMDAD, D. TURKOGLU, AND N. HUSSAIN, *Generalized meir-keeler type ψ-contractive mappings and applications to common solution of integral equations*, International Journal of Analysis and Applications, 13 (2017), pp. 185–197.

[67] H. ISIK AND S. RADENOVIĆ, *A new version of coupled fixed point results in ordered metric spaces with applications*, UPB Scientific Bulletin, Series A : Applied Mathematics and Physics, 79 (2017), pp. 131–138.

[68] C. JEAN-ALEXIS AND A. PIÉTRUS, *On the convergence of some methods for variational inclusions.*, RACSAM, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., 102 (2008), pp. 355–361.

[69] S. KAKUTANI, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J., 8 (1941), pp. 457–459.

[70] R. KANNAN, *Some results on fixed points*, Bull. Cal. Math. Soc., 60 (1968), pp. 71–76.

[71] F. A. KHODJA, *Une revue et quelques complements sur la determination du nombre des solutions de certains problemes elliptiques semi-lineaires*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1983.

[72] R. KOPPERMAN, S. MATTHEWS, AND H. PAJOOHESH, *Partial metrizability in value quantales.*, Appl. Gen. Topol., 5 (2004), pp. 115–127.

[73] M. KRASNOSEL'SKII, *Zwei Bemerkungen über die Methode der sukzessiven Approximationen.*, Usp. Mat. Nauk, 10 (1955), pp. 123–127.

[74] A. S. KRAVCHUK AND P. J. NEITTAANMÄKI, *Variational and quasi-variational inequalities in mechanics.*, Dordrecht : Springer, 2007.

[75] E. KREYSZIG, *Introductory functional analysis with applications. Paperback edition.*, New York etc. : John Wiley &l Sons, paperback edition ed., 1989.

[76] C. KURATOWSKI, *Sur les espaces complets.*, Fundam. Math., 15 (1930), pp. 301–309.

[77] G. LADDE, V. LAKSHMIKANTHAM, AND A. VATSALA, *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations.* Monographs, Advanced Texts and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 27. Boston-London : Pitman (Advanced Publishing Program) ; New York : John Wiley & Sons, Inc. ; X, 236 p. ; (1985)., 1985.

[78] V. LAKSHMIKANTHAM AND L. ĆIRIĆ, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, 70 (2009), pp. 4341–4349.

[79] A. LATIF, H. ISIK, AND A. H. ANSARI, *Fixed points and functional equation problems via cyclic admissible generalized contractive type mappings.*, J. Nonlinear Sci. Appl., 9 (2016), pp. 1129–1142.

[80] H. LEE, *A coupled fixed point theorem for mixed monotone mappings on partial ordered G-metric spaces.*, Kyungpook Math. J., 54 (2014), pp. 485–500.

[81] P. S. MACANSANTOS, *A generalized Nadler-type theorem in partial metric spaces.*, Int. J. Math. Anal., Ruse, 7 (2013), pp. 343–348.

[82] P. S. MACANSANTOS, *A fixed point theorem for multifunctions in partial metric spaces*, J. Nonlinear Anal. Appl., 2013 (2013), pp. 1–7.

[83] R. T. MARINOV AND D. K. NEDELCHEVA, *Implicit mapping theorem for extended metric regularity in metric spaces.*, Ric. Mat., 62 (2013), pp. 55–66.

[84] S. MATTHEWS, *Partial metric topology.*, in Papers on general topology and applications. Papers from the 8th summer conference at Queens College, New York, NY, USA, June 18–20, 1992, New York, NY : The New York Academy of Sciences, 1994, pp. 183–197.

[85] ——, *An extensional treatment of lazy data flow deadlock.*, Theor. Comput. Sci., 151 (1995), pp. 195–205.

[86] D. MOTREANU AND Z. ZHANG, *Constant sign and sign changing solutions for systems of quasilinear elliptic equations.*, Set-Valued Var. Anal., 19 (2011), pp. 255–269.

[87] S. B. NADLER, *Multi-valued contraction mappings.*, Pac. J. Math., 30 (1969), pp. 475–488.

[88] D. PAESANO AND C. VETRO, *Multi-valued F-contractions in 0-complete partial metric spaces with application to Volterra type integral equation.*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM, 108 (2014), pp. 1005–1020.

[89] R. PANT, R. SHUKLA, H. K. NASHINE, AND R. PANICKER, *Some new fixed point theorems in partial metric spaces with applications.*, J. Funct. Spaces, 2017 (2017), p. 13.

[90] H. POINCARE, *Sur les courbes defines par les équations différentielles, quatrième partie*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2 (1986), pp. 151–217.

[91] P. D. PROINOV, *A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, 67 (2007), pp. 2361–2369.

[92] ——, *New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems.*, J. Complexity, 26 (2010), pp. 3–42.

[93] V. PTÁK, *Concerning the rate of convergence of Newton's process.*, Commentat. Math. Univ. Carol., 16 (1975), pp. 699–705.

[94] ——, *The rate of convergence of Newton's process.*, Numer. Math., 25 (1976), pp. 279–285.

[95] S. RADENOVIĆ, *Remarks on some coupled fixed point results in partial metric spaces.*, Nonlinear Funct. Anal. Appl., 18 (2013), pp. 39–50.

[96] V. RAKOČEVIĆ, *Measures of noncompactness and some applications.*, Filomat, 12 (1998), pp. 87–120.

[97] M. H. RASHID, J. H. WANG, AND C. LI, *Convergence analysis of a method for variational inclusions.*, Appl. Anal., 91 (2012), pp. 1943–1956.

[98] S. RASOULI AND M. BAHRAMPOUR, *A remark on the coupled fixed point theorems for mixed monotone operators in partially ordered metric spaces*, J. Math. Comput. Sci, 3 (2011), pp. 246–261.

[99] S. REICH, *Fixed points of condensing functions.*, J. Math. Anal. Appl., 41 (1973), pp. 460–467.

[100] G. ROACH, *Green's functions. 2nd ed.* Cambridge etc. : Cambridge University Press. XIV, 325 p. (1982)., 1982.

[101] S. M. ROBINSON, *Generalized equations and their solutions, Part I : Basic theory*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1979, pp. 128–141.

[102] ——, *Generalized Equations*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1983, pp. 346–367.

[103] S. ROMAGUERA, *A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces.*, Fixed Point Theory Appl., 2010 (2010), p. 6.

[104] ——, *Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces.*, Topology Appl., 159 (2012), pp. 194–199.

[105] M. ROUAKI, *Nodal radial solutions for a superlinear problem.*, Nonlinear Anal., Real World Appl., 8 (2007), pp. 563–571.

[106] M. ROUAKI, *Existence and classifiction of radial solutions of a nonlinear nonautonomous Dirichlet problem*, arXiv preprint arXiv :1110.4019, (2011).

[107] B. RUF AND S. SOLIMINI, *On a class of superlinear Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions.*, SIAM J. Math. Anal., 17 (1986), pp. 761–771.

[108] I. A. RUS, *Generalized contractions and applications.*, Cluj-Napoca : Cluj University Press, 2001.

[109] B. SADOVSKIĬ, *On a fixed-point principle.*, Funkts. Anal. Prilozh., 1 (1967), pp. 74–76.

[110] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen.*, Stud. Math., 2 (1930), pp. 171–180.

[111] W. SHATANAWI, B. SAMET, AND M. ABBAS, *Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in ordered partial metric spaces.*, Math. Comput. Modelling, 55 (2012), pp. 680–687.

[112] A. SHOAIB, M. ARSHAD, AND A. JAMSHAID, *Fixed point results of locally contractive mappings in ordered quasi-partial metric spaces*, The Scientific World Journal, 2013 (2013).

[113] M. STRUWE, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. 4th ed.*, vol. 34, Berlin : Springer, 4th ed. ed., 2008.

[114] P. J. TORRES, *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem.*, J. Differ. Equations, 190 (2003), pp. 643–662.

[115] D. TURKOGLU AND M. SANGURLU, *Coupled fixed point theorems for mixed g-monotone mappings in partially ordered metric spaces.*, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013), p. 11.

[116] P. J. Wong and R. P. Agarwal, *Eigenvalues of boundary value problems for higher-order differential equations.*, Math. Probl. Eng., 2 (1996), pp. 401–434.