

UNIVERSITE DE BLIDA1

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Aéronautique

Dimensionnement des Tuyères Supersoniques Axisymétriques à
Corps Central Extérieur par la Méthode des Caractéristiques
(Axisymmetric Plug Nozzle Design)

Par

Omar RAMDANI

Devant le jury composé de :

Y. BENKEDDA	Professeur, U. de Blida1	Président
B. SALAH	Professeur, E.N.S.H, Blida	Examineur
M. ROUDANE	MCB, U. de Blida1	Examineur
T. ZEBBICHE	Professeur, U. de Blida1	Rapporteur

Soutenue le 24/01/2018

Remerciements

Je remercie infiniment ALLAH le tout puissant de m'avoir prêté force et santé et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens requis, ainsi que l'amicale et fraternelle assistance de tous. Ce qui a permis la réalisation de ce modeste travail.

Mes chaleureuses remerciements pour le personnel de l'institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales, Administration, Enseignants, et Travailleurs pour leur aide amicale, à divers titres tout au long de mon cursus et durant l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, ne pouvant nommer individuellement les nombreuses personnes, qui m'ont aidé durant la réalisation de ce travail, je tiens néanmoins à leur adresser mes sincères remerciements et mon immense reconnaissance.

Omar RAMDANI

RESUME

La conception d'une tuyère auto-adaptative avec l'altitude, ainsi que du volume et poids réduits est devenue aujourd'hui un enjeu primordial dans l'industrie aérospatiale. Les tuyères à corps central notamment l'aérospike occupent une partie majeure dans ces recherches, et promettent une solution efficace aux pertes de la poussée dues aux phénomènes nuisibles associées à la sur et sous-détente.

L'objectif de notre travail est de tracer le contour authentique des tuyères supersoniques axisymétriques à corps central extérieur (Axisymmetric Plug Nozzle), dont la détente des gaz sera sans chocs le long des parois, donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie.

La méthode de conception est basée sur la théorie de détente centrée de Prandtl Meyer d'un gaz parfait, avec l'outil de la méthode des caractéristiques pour des coordonnées cylindriques, et la fonction du courant de Shapiro pour tracer le contour de la tuyère.

Une comparaison des différents résultats géométriques et aérodynamiques a été faite par rapport aux ceux des modèles de corps central bidimensionnel, MLN bidimensionnel et MLN axisymétrique, où il a été constaté une amélioration du rendement de propulsion et d'adaptation avec l'altitude (résistance au décollement de la couche limite en sur-détente) avec la diminution du volume et poids des tuyères objet de la présente recherche.

Mot clés : Conception de tuyères supersoniques, Tuyère à corps central axisymétrique, Adaptation avec l'altitude, Résistance au décollement de la couche limite, Détente du Prandtl-Meyer, Méthode des Caractéristiques, Fonction d'une ligne de courant de Shapiro.

ABSTRACT

The design of a self-adaptive nozzle with altitude, as well as reduced volume and weight has become now a major issue in the aerospace industry. The central body (plug) nozzles, in particular the Aerospike, occupy a major part of this research and promise an effective solution to the losses of the thrust due to the harmful phenomena associated with over and under expansion .

The aim of our work is to draw the outline of authentic supersonic axisymmetric external plug nozzle, where the expansion of gases will done without shocks along its walls, giving a uniform flow and parallel to the outlet section.

The design method is based on Prandtl-Meyer's centered expansion theory of a perfect gas, with the tool of method of characteristics for cylindrical coordinates, and the streamline function of Shapiro to plot the contour of the nozzle.

A comparison of the various geometric and aerodynamic results was made with those of the two-dimensional plug nozzle, two-dimensional MLN and axisymmetric MLN models, where was found an improvement in propulsion capacity and altitude adaptation (resistance to detachment of the boundary layer in under expansion) with a minimizing of the volume and weight of nozzles subject of this research.

Key words: Design of supersonic nozzles, Axisymmetric center nozzle, Altitude adaptation, Detachment of the boundary layer, Prandtl-Meyer expansion, Characteristics Method (MOC), streamline function of Shapiro.

ملخص

تصميم عادم متكيف ذاتيا مع الارتفاعات وذا حجم ووزن أقل أصبح هدفا رئيسيا في صناعات الفضاء، العاديات ذات جسم مركزي. خاصة المقطوعة منها تحتل جزءا هاما من الأبحاث. وتعد بجل فعال للخسائر الناجمة لقوة الدفع، الناتجة من الظواهر السلبية المصاحبة لفوق وتحت انبعاث الغازات.

الهدف من عملنا هو رسم شكل عادم دائري ذو جسم مركزي خارجي اين تنبعث الغازات طول جدرانه بدون صدمات هوائية، معطية تدفقا هوائيا منظم وموازي لفوهة المخرج.

طريقة التصميم تعتمد على نظرية الانبعاث المركز لغاز مثالي والوسيلة هي طريقة الخصائص لإحداثيات اسطوانية، وعلاقة الخط الهوائي لشابيرو، من اجل رسم جدار العادم.

مقارنة مختلف النتائج الهندسية والحرارية المتحصل عليها مع أخرى لعاديات مثل ذو الجسم المركزي ذو البعدين، العادم اقل طولاً ذو بعدين والدائري؛ بينت تحسن في كفاءة الدفع وتقليل حجم ووزن العادم، موضوع البحث.

الكلمات المفتاحية: تصميم عوادم فوق صوتية، عادم دائري ذو جسم مركزي، تدفق برانتل ماير، طريقة

الخصائص، علاقة الخط الهوائي لشابيرو.

Table des matières

Remerciements.....	1
RESUME.....	2
ABSTRACT	3
ملخص.....	4
Table des matières.....	5
Liste des illustrations	8
Liste des Tableaux	11
INTRODUCTION.....	12
INTRODUCTION A L'ADAPTATION DES TUYERES SUPERSONIQUES AVEC L'ALTITUDE	16
1.1. Objectifs des tuyères	16
1.2. Fonctionnement des tuyères Convergentes-Divergentes.....	17
1.3. Description du flux en hors adaptation	20
1.4. Adaptation des différents types de tuyères.....	23
1.4.1. Tuyères Coniques	24
1.4.2. Tuyères de type Bell.....	24
1.4.3. Tuyères Annulaires	26
1.4.4. Tuyères à Corps Central	26
1.4.4.1. Tuyère à Corps Central Intérieur-Extérieur.....	27
1.4.4.2. Tuyère à Corps Central Extérieur	27
METHODOLOGIE ET PARAMETRES DE CONCEPTION DES TUYERES SUPERSONIQUES.....	29
Introduction :.....	29
2.1. Détente de Prandtl–Meyer.....	29
2.1.1. Définition	29
2.1.2. Angle de Prandtl-Meyer.....	30

2.1.3. Angle de Mach	31
2.2. Principe de conception des tuyères supersoniques.....	32
2.3. Méthode des caractéristiques.....	34
2.4. Détermination des paramètres thermodynamiques et géométriques	36
2.4.1. Les paramètres statiques	36
2.4.2. Détermination du rapport des sections isentropique	36
2.4.3. Détermination de l'expression du débit massique	37
2.4.4. La poussée.....	37
2.4.5. Le coefficient de la poussée	38
2.4.6. Masse de la structure de la tuyère	38
2.4.7. Force de pression exercée sur la paroi du Corps Central	39
METHODOLOGIE DE CONCEPTION DES TUYERES AXISYMETRIQUES A CORPS CENTRAL EXTERIEUR.....	41
Introduction :.....	41
3.1. Méthode de calcul pour un Plug Nozzle axisymétrique	42
3.1.1. Génération du « Expansion Fan ».....	43
3.1.2. Détermination du contour de la paroi	45
3.2. Méthode numérique des caractéristiques et de compatibilités	48
3.3. Discrétisation de la fonction du courant.....	52
3.4. Calcul du point satisfaisant la fonction du courant.....	53
RESULTATS ET DISCUSIONS	55
Introduction :.....	55
4.1. Résultats du Dimensionnement.....	55
4.1.1. Effet de la discrétisation sur la convergence de la solution	55
4.1.2. Les Iso Teta et Mach.....	61
4.1.3. Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du Corps Central.....	64
4.1.4. Effet du rapport thermodynamique Gamma sur l'allure du Corps Central	67

4.2. Les tuyères de plus de Mach 3.5.....	69
4.3. Développement du rapport des sections géométrique	74
4.4. Comportement d'adaptation avec l'altitude.....	75
4.5. Comparaison avec d'autres configurations étudiées	77
4.5.1. Comparaison par rapport au même rayon sonique	78
4.5.2. Comparaison par rapport à la même poussée	80
4.5.3. Comparaison d'un Aérospike	81
Conclusion et Perspectives	83
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	85
REFERENCES.....	87
APPENDICE A	91
APPENDICE B.....	98

Liste des illustrations

Figure 1.1 : Schéma Synoptique d'une Tuyère Convergente-Divergente	16
Figure 1.2 : Schémas conventionnelle d'une tuyère Convergente-Divergente	17
Figure 1.3 : Les différents régimes de fonctionnement.....	18
Figure 1.4 : Les différents régimes de fonctionnement en hors-adaptation	20
Figure 1.5 : Description du flux en sur-détente.....	21
Figure 1.6 : Phénomène du décollement en sur-détente.....	22
Figure 1.7 : Description du flux en sous-détente	23
Figure 1.8 : Tuyère Conique.....	24
Figure 1.9 : Tuyère type Bell	25
Figure 1.10 : Tuyère Bell à géométrie variable.....	25
Figure 1.11 : Schéma d'une tuyère Annulaire	26
Figure 1.12 : Schéma des tuyères à Corps Central.....	27
Figure 1.13 : Comportement de l'Aerospike en fonction de l'altitude.....	28
Figure 2.1 : Ondes de détente et de compression de Prandtl-Meyer	29
Figure 2.2 : Variation de la direction d'écoulement θ	30
Figure 2.3 : Angle maximale de déviation de l'écoulement θ	31
Figure 2.4 : Angle et onde de Mach	32
Figure 2.5 : Principe de conception d'une paroi bidimensionnelle.....	32
Figure 2.6 : Principe de conception d'une paroi axisymétrique	33
Figure 2.7 : Les différentes conceptions géométriques des tuyères.....	33
Figure 2.8 : Conception de la détente centrée vs progressive	34
Figure 2.9 : Présentation des lignes des caractéristiques	35
Figure 2.10 : Tronçon d'une tuyère axisymétrique	39
Figure 2.11 : Force de pression exercée sur un segment du Corps Central	40
Figure 3.1 : Schéma d'une tuyère Plug Nozzle (en haut) et d'autre E-D (en bas).....	41
Figure 3.2 : Présentation des zones de détente et uniformes	42
Figure 3.3 : Relation géométrique entre l'angle PM et celui de la direction du flux	44
Figure 3.4 : Création du réseau des caractéristiques C- et C+	45
Figure 3.5 : Méthode de calcul de la première caractéristique C-	46
Figure 3.6 : Représentation du point (B) au col	46
Figure 3.7 : Calcul des différentes caractéristiques.....	47
Figure 3.8 : Lignes des caractéristiques vs lignes de Mach	48

Figure 4.1 : Maillage en caractéristiques pour $Me = 3, Nc = 10$ et $\Delta x = 0.1$	55
Figure 4.2 : Raffinement du maillage en nombre des caractéristiques $Nc = 20$	56
Figure 4.3 : Raffinement du maillage en nombre des caractéristiques $Nc = 50$	56
Figure 4.4 : Raffinement du maillage en nombre des caractéristiques $Nc = 70$	57
Figure 4.5 : Raffinement du maillage en fonction du pas $\Delta x = 0.05$	57
Figure 4.6 : Raffinement du maillage par un pas $\Delta x = 0.02$	58
Figure 4.7 : Raffinement du maillage par un pas $\Delta x = 0.01$	58
Figure 4.8 : Forme de la tuyère axisymétrique optimale.....	61
Figure 4.9 : Iso Teta pour $Me=3, NC=10$ & $\Delta x=0.1$	62
Figure 4.10 : Iso Teta pour $Me=3, NC=10$ & $\Delta x=0.01$	62
Figure 4.11 : Iso Mach pour $Me=3, NC=20$ & $\Delta x=0.1$	63
Figure 4.12 : Iso Mach pour $Me=3, NC=10$ & $\Delta x=0.01$	63
Figure 4.13 : Variation de T_{paroi}/T_o pour $Me=3.00$ et $T_o=3000$ k°	64
Figure 4.14 : Variation de ρ_{paroi}/ρ_o pour $Me=3.00$ et $T_o=3000$ k°	65
Figure 4.15 : Variation de P_{paroi}/P_o pour $Me=3.00$ et $T_o=3000$ k°	65
Figure 4.16 : Variation de θ_{paroi}/θ_o pour $Me=3.00$ et $T_o=3000$ k°	66
Figure 4.17 : Variation de M_{paroi} pour $Me=3.00$ et $T_o=3000$ k°.....	66
Figure 4.18 : L'allure du Corps Central pour $Me=2.0$	67
Figure 4.19 : Allure du Corps Central pour $Me=2.5$	68
Figure 4.20 : Allure du Corps Central pour $Me=3.0$	68
Figure 4.21 : Recirculation des caractéristiques.....	69
Figure 4.22 : L'angle maximal de déviation de Prandtl-Meyer.....	70
Figure 4.23 : Allure d'une tuyère pour $Me=4$	71
Figure 4.24 : Allure d'une tuyère pour $Me=5$	71
Figure 4.25 : Iso Mach pour $Me=4, NC=10$ & $\Delta x=0.1$	72
Figure 4.26 : Iso Teta pour $Me=4, NC=10$ & $\Delta x=0.1$	72
Figure 4.27 : Iso Mach pour $Me=5, NC=10$ & $\Delta x=0.1$	73
Figure 4.28 : Iso Teta pour $Me=5, NC=10$ & $\Delta x=0.1$	73
Figure 4.29 : Démonstration des sections d'entrée et sortie	74
Figure 4.30 : Démonstration de la section de sortie réelle	74
Figure 4.31 : Simulation du flux au régime de sur-détente ($NPR=15$).....	76
Figure 4.32 : Calcul du Mach à la section perpendiculaire de sortie pour différents NPR	76

Figure 4.33 : Allure du Corps Central 2D pour $M_e=3.0$	77
Figure 4.34 : Allure du MLN 2D pour $M_e=3.0$	77
Figure 4.35 : Allure du MLN axisymétrique pour $M_e=3.0$	78
Figure 4.36 : Les différentes parois des tuyères comparées dans le tableau 4.4.....	79
Figure 4.37 : Les différentes parois des tuyères comparées dans le tableau 4.5.....	81
Figure 4.38 : Les différentes parois des tuyères comparées dans le tableau 4.6.....	82
Figure A.1 : Superposition de deux systèmes de coordonnées, cylindrique et cartésien pour un écoulement axisymétrique.....	91
Figure A.2 : Une ligne de courant passant par un point	94
Figure A.3 : Présentation des caractéristiques	96

Liste des Tableaux

Tableau 4.1 : Effet de la discrétisation (NC) sur la convergence ($Me = 3$, $\Delta x = 0.1$)....	59
Tableau 4.2 : Effet de la discrétisation (Δx) sur la convergence ($Me = 3$, $NC = 10$)	59
Tableau 4.3 : Effet de la discrétisation (Δx) sur la convergence ($Me = 3$, $NC = 20$)	59
Tableau 4.4 : Comparaison par rapport au même rayon sonique	78
Tableau 4.5 : Comparaison par rapport à la même poussée	80
Tableau 4.6 : Comparaison des performances d'Aérospike	81

INTRODUCTION

Les coûts de mise en orbite valent actuellement plusieurs dizaines de milliers de dollars par kilogramme. Ce coût élevé est dû principalement à l'utilisation de lanceurs classiques multi étages de type Bell, qui consomment énormément de carburant. Le principe de concevoir un véhicule spatial à un seul étage équipé d'un lanceur plus performant et moins encombrant, ce qui signifie également un faible emport de carburant ; permette de réduire ces coûts.

En outre, l'objectif de la conception ne demeurerait pas seulement dans l'obtention d'une poussée maximale avec un volume et un poids réduits, mais aussi en la capacité d'adaptation avec l'altitude dans les deux modes de fonctionnement : sous-détente et sur-détente, afin de minimiser le décollement et les charges latérales, qui nuisent sur le rendement de propulsion, sachant que les tuyères conventionnelles offrent uniquement une détente idéale à une seule altitude ou à un rapport de pression.

Les tuyères avec un corps central devenue aujourd'hui un pivot des recherches dans le domaine d'adaptation ; en plus de leur taille avantageuse et de leur forme aussi (Plug Nozzle) qui permet l'intégration de nombreuses parties structurelles, ils ajustent passivement leur rapports de surfaces en fonction de l'altitude, mieux que l'hypothèse des tuyères classiques à géométrie variable qui seront plus volumineuses et complexes dans la manipulation.

Notre modeste travail « conception d'une tuyère supersonique axisymétrique à corps central extérieur » s'inscrit dans cette optique.

L'Etat de la Recherche :

Greer en 1960, a présenté la première étude de dimensionnement des tuyères à corps central bidimensionnel pour une longueur inconnue [9], il a décrit un procédé qui utilise la géométrie et l'équation du rapport des sections isentropique. Commencant par le calcul de la longueur et de la pente des différents lignes de Mach pour arriver au calcul des points du contour par la trigonométrie.

Rao G. V. R dans sa publication [10] en 1961, a pris le contour de Greer comme input pour sa célèbre méthode des contours tronqués et optimisés TOC (plus paraboliques), utilisant les multiplicateurs de Lagrange et la méthode des caractéristiques. Cette démarche a été programmée par un ingénieur chercheur C. C. Lee dans son article [11] en juillet 1963, après un premier [12] en Mars de la même année, où il a utilisé un procédé non connu développé par T. L. Deyound en juillet 1960 [13], ce procédé est basé sur la définition du rapport des sections géométriques, la non adéquation de ce dernier rend les résultats erronés.

Une autre méthode approximative est définie par Angelino [14] en 1964, où Il a utilisé une approche similaire à Greer, seulement, au lieu d'utiliser la géométrie pour définir l'angle de la ligne de Mach fait avec la ligne centrale, il a utilisé les équations des caractéristiques. La référence [15] a fait l'extension du travail de Greer par un examen de l'effet de l'écoulement au départ.

La NASA [16] dicte un modèle analytique pluridisciplinaire pour la conception d'un aérospike dénommé « Annulaire », qui sera utilisé comme lanceur de la navette spatiale X-33, dont la géométrie est traitée comme une surface bidimensionnelle, définie par la méthode du Cubic Spline et la simulation numérique du flux (CFD). Cette étude est suivie d'une analyse des performances de ce modèle [17] et par une simulation du flux à l'arrière de ce type de tuyères par analogie au bord de fuite d'une aile [18].

La référence [7] examine la conception des tuyères supersoniques sous l'hypothèse d'un gaz à haute température, et une comparaison du plug nozzle bidimensionnel a montré qu'il est toujours plus performant et moins encombrant sur celle du MLN.

Les références [19], [20] et [21] présentent des études de l'écoulement dans les tuyères à corps central bidimensionnelles. Une comparaison sur les contours des différentes tuyères utilisées pour la propulsion supersonique est présentée dans les références [22], [23] et [24].

La conception d'une tuyère axisymétrique fait l'objet de deux études analytiques, la première date de 1964 [25], dont elle a pris les surfaces bidimensionnelles du Greer comme étant axisymétriques. La dernière [26] est de Lee et S.J Inman qui date de la même année, S.J Inman est compté parmi les grands théoriciens de la méthode caractéristiques axisymétriques, ils ont appliqué cette nouvelle méthode mais pour une longueur de tuyère connue. En plus de ces études analytiques, plusieurs projets de construction qui ont pris des surfaces bidimensionnelles ou ordinaires en tant que axisymétriques [27],...

L'écoulement axisymétrique dans les tuyères à corps central est examiné dans les références [28], [29], [30], et [31].

Les résultats de ces travaux ne sont pas corrects, le premier scénario de la prise des surfaces bidimensionnelles en tant que axisymétriques est physiquement infondé, car la solution bidimensionnelle ne tient pas en compte la composante radiale du flux dans le calcul de la paroi, La détente en flux perturbé non uniforme.

La définition préalable d'une longueur pour la tuyère ou la prise d'une surface ordinaire, sera traduite par une détente déformée, autrement dit en géométrie, une paroi compressée ou décompressée, la probabilité d'apparition d'ondes de chocs obliques à l'intérieur de la tuyère est très élevée.

Le souhait de concevoir une tuyère axisymétrique à corps central extérieur pour un contour et une longueur inconnus, conformément au principe authentique de la démarche inverse de la conception des tuyères par la méthode des caractéristiques, et sous l'hypothèse d'un flux axisymétrique. Autrement dit, technologiquement et aérodynamiquement axisymétrique, fera l'objet d'une continuité dans ce travail.

Plan de Travail :

Pour atteindre l'objectif tracé, nous avons scindé nos travaux en quatre chapitres :

La première partie rappelle le principe et les régimes de fonctionnement, ainsi que les différents types de tuyères supersoniques, en mettant en exergue le comportement d'adaptation avec l'altitude de chacune d'elles.

La deuxième partie présente le principe de conception d'une tuyère supersonique de Laval, qui se base sur les théories de la détente de Prandtl-Meyer et la méthode des caractéristiques, ce procédé nous conduit à définir les différentes relations et paramètres thermodynamiques et géométriques relatives.

La troisième partie démontre la méthodologie de conception de la tuyère axisymétrique à corps central extérieur de ligne sonique droite, par la méthode des caractéristiques d'Anderson pour des coordonnées cylindriques et la fonction du courant de Shapiro pour tracer le contour.

La dernière, expose les différents résultats thermodynamiques et géométriques obtenus, sous forme de graphes et de tableaux, ainsi que la comparaison avec les résultats du MLN bidimensionnelle, MLN axisymétrique et à corps central bidimensionnelle.

A la fin, une conclusion générale sur le travail élaboré ponctuée de propositions de continuation de la recherche.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A L'ADAPTATION DES TUYERES SUPERSONIQUES AVEC L'ALTITUDE

1.1. Objectifs des tuyères

L'objectif principal d'une tuyère est de produire de la poussée par la conversion de l'énergie thermique des gaz de la chambre de combustion en énergie cinétique, par :

- L'acheminement des gaz d'échappement provenant de la combustion vers la plus petite section transversale qui est le col, auquel, les gaz sont accélérés pour atteindre la vitesse sonique ($M = 1$) ;
- La détente autant que possible des gaz dans le divergent en écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie pour maximiser la poussée.

La poussée, qui est résultante de cette accélération supersonique, est donnée par :

$$F = m_e V_e + (P_e - P_a) \times A_e \quad (1.1) \text{ Ou } m_e \text{ est le débit massique.}$$

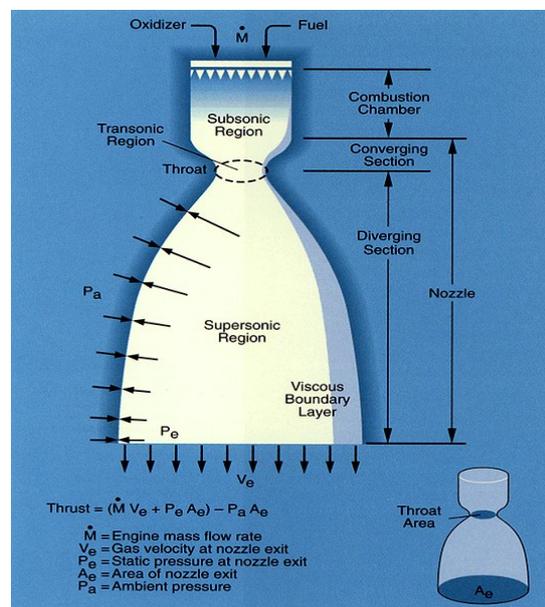


Figure 1.1 : Schéma Synoptique d'une Tuyère Convergente-Divergente

1.2. Fonctionnement des tuyères Convergentes-Divergentes

Nous considérons une tuyère convergente – divergente de Laval comme l'illustre la figure ci-après :

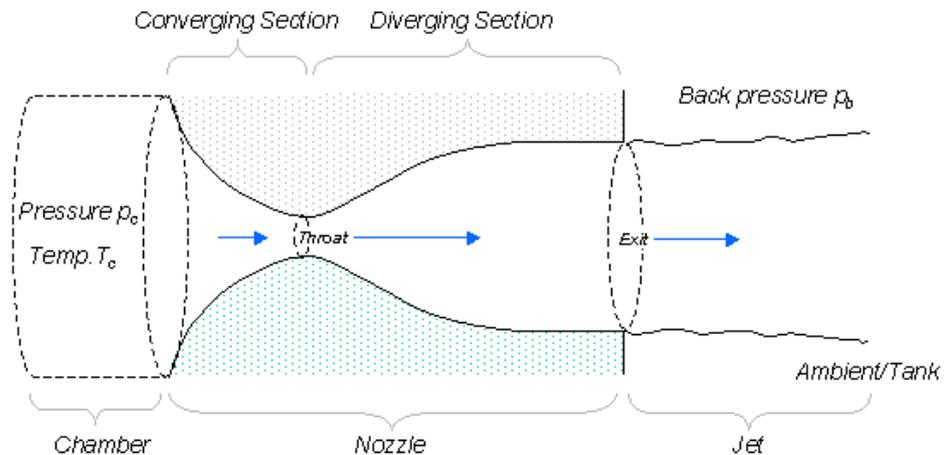


Figure 1.2 : Schémas conventionnelle d'une tuyère Convergente-Divergente

Supposons que le rapport des sections à l'entrée A_e / A^* soit très grand et que l'écoulement est alimenté à partir d'un réservoir de gaz (chambre de combustion), afin que la vitesse d'écoulement en amont soit négligeable et qui s'exprime par un nombre de Mach à la section d'entrée très petit $Me \approx 0$.

Les gaz s'écoulent de la région de haute pression (chambre de combustion) à basse pression (l'extérieur) en passant par le col, s'épuisent ensuite à la température ambiante hors du divergent.

Nous dénommons par :

- P_c : la pression de la chambre de combustion ;
- P_e : la pression des gaz d'échappement à la section de sortie ;
- P_b (ou P_a) : la pression ambiante ou atmosphérique (Back Pressure).

Nous aurons sept (07) régimes de fonctionnement [1] obéissant au théorème de Hugoniot :

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (1.2)$$

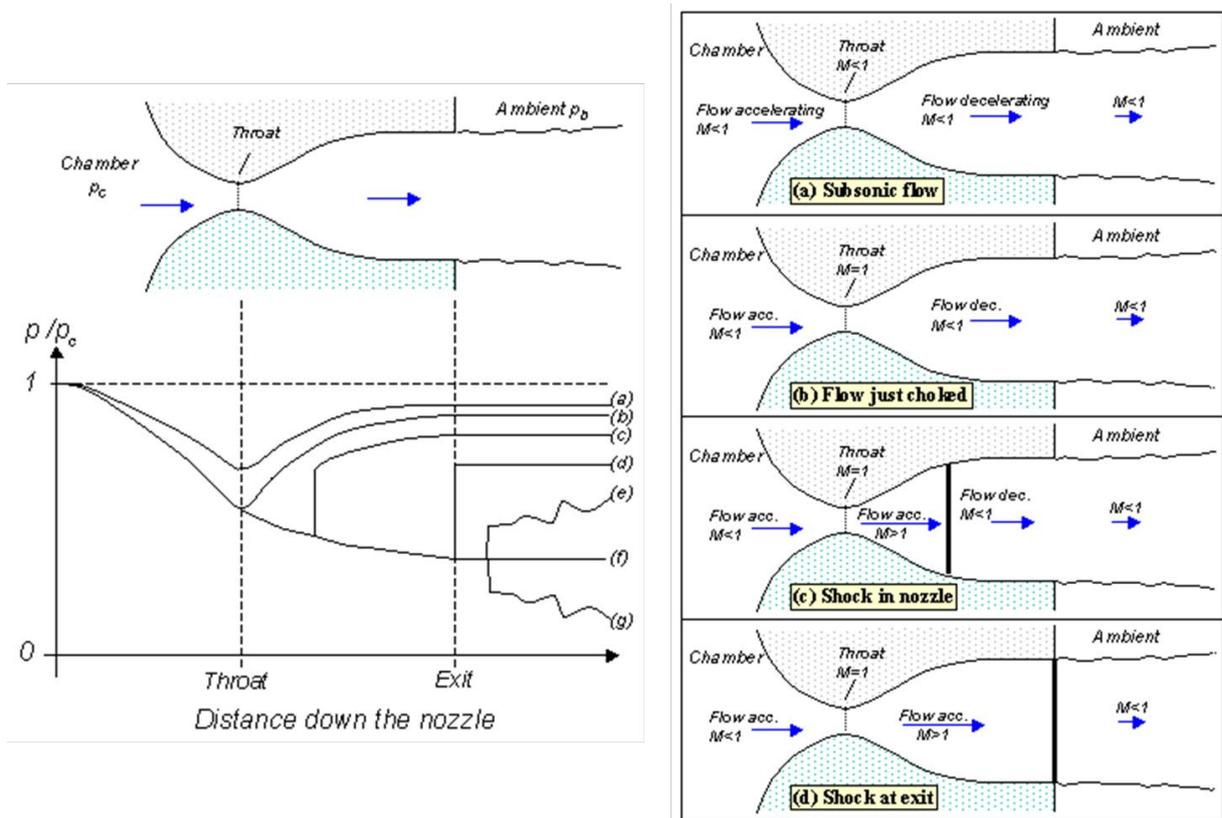


Figure 1.3 : Les différents régimes de fonctionnement

- ❖ La Figure (a) montre le débit à travers le convergent lorsqu'il est complètement subsonique. Le flux s'accélère dans le convergent, atteint sa vitesse maximale (subsonique) au col. Puis le flux décélère à travers la section divergente, s'accroît dans l'ambient comme un flux subsonique.
- ❖ Plus la diminution de P_b jusqu'à où $\frac{P^*}{P_c} = 0.527$ comme montre la figure (b), le comportement du flux est exactement le même qu'en écoulement subsonique, sauf que la vitesse d'écoulement dans le col vient d'atteindre un Mach de un (01) [2]. Le flux est maintenant choqué (amorcé), dont d'autres réductions de la pression ambiante n'engendrent aucun déplacement du point ($M = 1$) loin du col. Toutefois l'écoulement dans la section divergente varie avec la décroissance de la pression ambiante.

- ❖ Si P_b diminue plus que celle juste nécessaire pour choquer le flux ; une région de forme d'écoulement supersonique apparaît juste en aval du col. (Fig.c) Contrairement à un écoulement subsonique, l'écoulement supersonique s'accélère quand l'espace s'agrandit.

Cette région d'accélération supersonique se termine par une onde de choc normale, qui va produire une décélération quasi instantanée du débit à une vitesse subsonique. Ce dernier va décélérer à travers le reste de la section divergente et s'épuise comme un flux subsonique.

Dans ce régime si la pression ambiante est diminuée ou augmentée, la longueur de l'écoulement supersonique dans la section divergente avant l'onde de choc, augmente ou diminue, respectivement.

- ❖ Si P_b décroît encore plus, la région supersonique peut être prolongée sur tout le divergent, jusqu'à ce que le choc est assis à la sortie de la tuyère (Fig. d). En raison de cette très longue région d'accélération, la vitesse d'écoulement juste avant le choc sera très importante, en étant subsonique juste après le choc.
- ❖ Diminuer encore la pression ambiante, l'onde de choc va sortir de la tuyère, figure (e), un schéma complexe de chocs et de réflexions (compression et détente) sera né en place, entraînant un mélange d'écoulement subsonique et supersonique. Nous appelons ce régime la Sur-Détente (Over-Expanded) où l'écoulement se détend fortement dans la tuyère.
- ❖ D'autre réduction de la pression ambiante P_b ; où elle devient égale à la pression de sortie P_e , figure (f), les ondes de choc et de réflexion disparaissent et le flux devient uniformément supersonique. Cette situation, qui est souvent souhaitable, est dénommée l'adaptation ou la « condition de conception ».

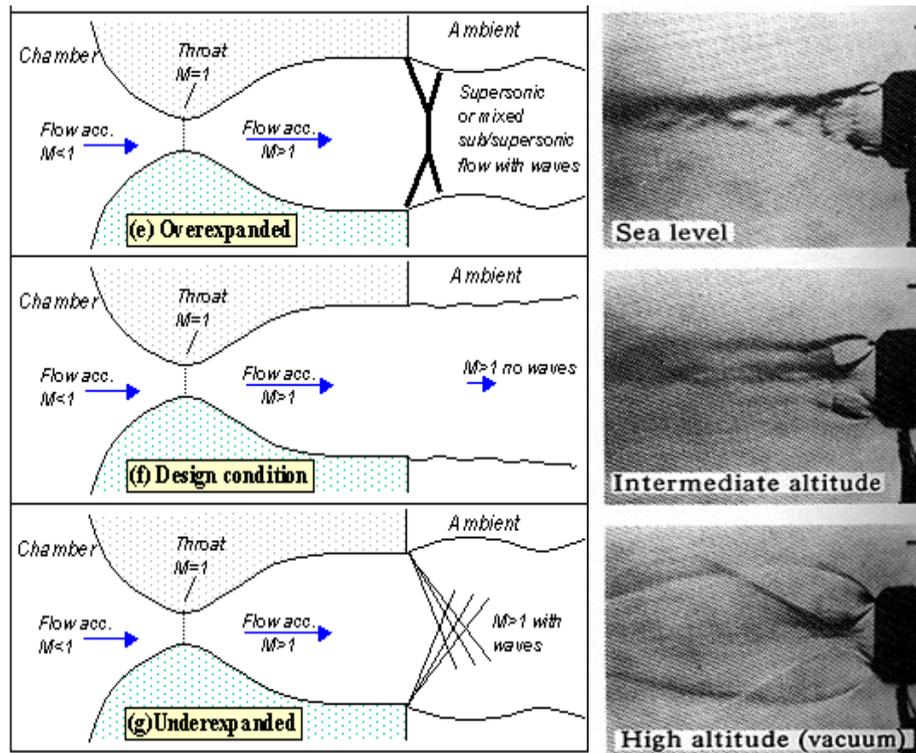


Figure 1.4 : Les différents régimes de fonctionnement en hors-adaptation

- ❖ Finalement, si la P_b décroît encore davantage, la pression de sortie devient supérieure à celle de l'ambient, figure (g). Dans ce cas, on l'appelle la Sous-Détente (Under-Expanded), des ondes de détente se reproduisent initialement dans la section de sortie provoquant des accélérations et des rotations progressives, suivi par un ensemble complexe d'ondes, de re-compression et de détente de Prandtl-Meyer.

1.3. Description du flux en hors adaptation

Les tuyères sont conçues pour être efficaces au démarrage et à des altitudes au-dessus du niveau de la mer, le flux est en sur-détente, c'est-à-dire, la pression des gaz d'échappement P_e est inférieure à la pression ambiante de la sortie P_b .

Pour arriver à la pression ambiante, les gaz subissent une compression en s'éloignant de la sortie passant en premier lieu par un choc oblique (A) qui est provoqué par la pression externe P_b , puis se dirigent vers la ligne centrale (2). A cette ligne dont l'onde de choc (A) est initialement dirigée, se réfléchira en parallèle en onde (B).

Les gaz traversent ce choc réfléchi et tournent parallèlement à la ligne centrale (03), induisant l'augmentation de la pression des gaz plus celle de l'ambiant. C'est la naissance du premier diamant.

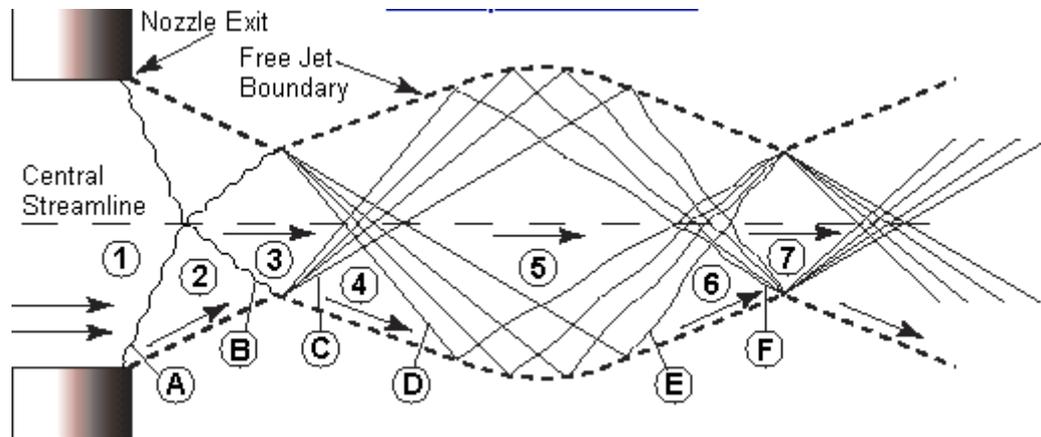


Figure 1.5 : Description du flux en sur-détente

Au point de contact de discontinuité, quand le choc (B) touche la limite du flux libre, des ondes de détente du type Prandtl-Meyer seront mises en place (C) pour réduire la pression élevée de la zone (3) à celle ambiante (P_a), dirigées vers l'axe de la tuyère en tournant le flux avec eux.

Ces dernières, se réfléchissent aussi à leur tour du centre vers les contacts de discontinuité en (D), les gaz passant, tournent dos parallèlement à l'axe central après leur passage par ces ondes, subissant une nouvelle réduction de la pression (5).

Ces ondes réfléchies rencontrent une nouvelle fois la discontinuité avec le flux extérieur, s'orientent vers la ligne centrale mais comme des ondes de compression de Prandtl-Meyer (E). Cela permet l'augmentation de la pression des gaz plus que la pression ambiante, en conduisant avec eux le flux vers le centre (6).

Les ondes de compression seront réfléchies maintenant à partir du plan central comme des ondes de compression (F), augmentant en plus la pression, en tournant le flux parallèle à l'axe de la tuyère (7). Autrement dit c'est la naissance du deuxième diamant.

Le processus du flux est maintenant de retour, comme il était en contact avec l'onde de choc réfléchi (B) ; la pression d'alimentation est supérieure à l'ambiante et le flux est parallèle à l'axe (3).

Dans l'idéal, Ce processus de formation de vague d'expansion-compression et rotation du flux recommence et se poursuivra sans fin, mais une couche de cisaillement turbulente créée par les différences de vitesses à travers les points de discontinuité dissipent les configurations de vagues (Diamant pattern) [1].

Le régime de sur-détente est généralement associé par le décollement de la couche limite et les charges latérales, phénomènes qui affectent le rendement de propulsion.

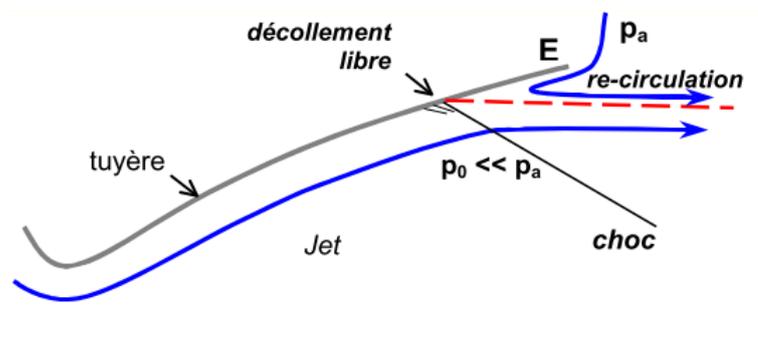


Figure 1.6 : Phénomène du décollement en sur-détente

À très haute altitude où la pression ambiante est inférieure à la pression des gaz d'échappement ($P_e > P_a$), le flux à la section de sortie est semblable à la zone (3) dictée précédemment quand l'écoulement est passé par le biais de l'onde de choc oblique réfléchi (B).

Pour arriver à la pression ambiante, les gaz d'échappement doivent passer par les ondes de détente et compression de Prandtl-Meyer en rotation sur l'axe central, le processus 4-D-5-E-6-F-7 expliqué plus haut se reproduit pour ce cas de la sous-détente.

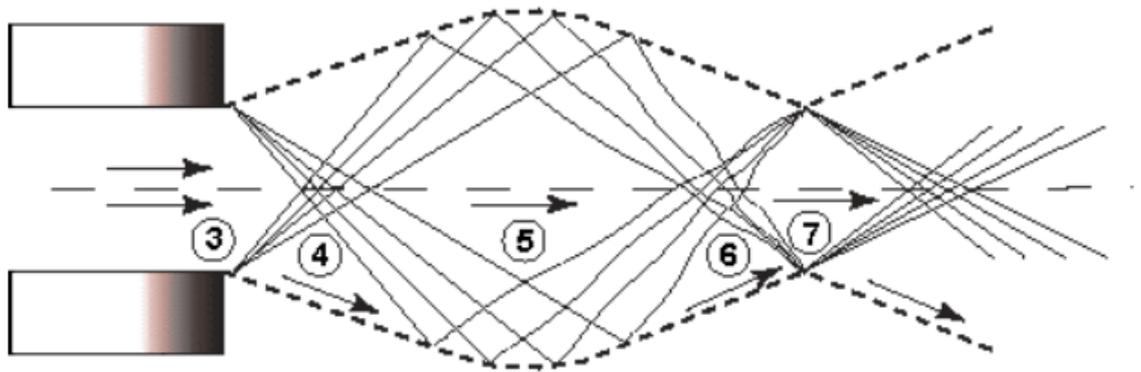


Figure 1.7 : Description du flux en sous-détente

Le régime de la sous-détente est connu pour la grande divergence de sa plume d'échappement des gaz, c'est-à-dire plus de la composante radiale du flux, qui se résume par une perte de poussée.

1.4. Adaptation des différents types de tuyères

Il existe quatre (04) groupes primaires de types de tuyères [1], [2], [3] :

- Cône ;
- Bell ;
- Annulaire ;
- À corps central (Plug, Aerospike, Expansion-Deflection).

1.4.1. Tuyères Coniques

Utilisées dans des applications de fusée au début à cause de sa simplicité et facilité de construction. Le Cône tire son nom du fait que les parois s'écartent à un angle constant. Un petit angle produit une plus grande poussée parce qu'il maximise la composante axiale de la vitesse à la sortie et produit une impulsion spécifique élevée.

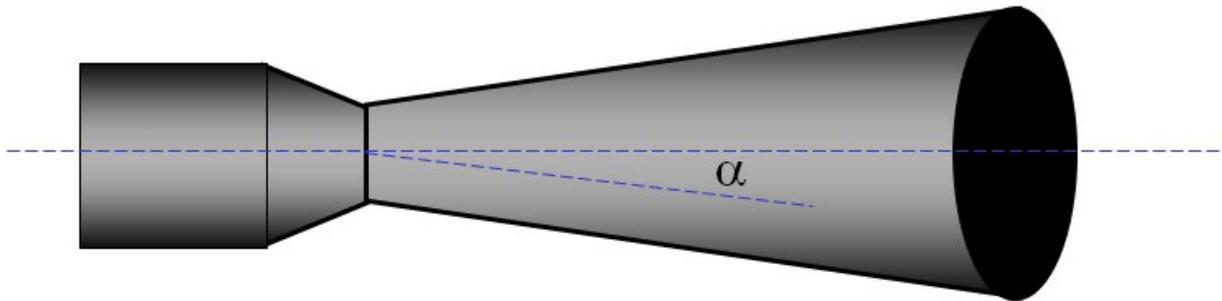


Figure 1.8 : Tuyère Conique

Son inconvénient est que plus longue elle sera plus lourde et complexe à construire, et afin de réduire son poids et sa taille on agrandit son angle de déflexion, mais cela va entraîner la réduction des performances à basse altitude du fait que la haute pression ambiante provoquera la sur-détente et la séparation de l'écoulement qui devient plus radial et perturbé à la sortie.

Il est généralement plus pratique d'utiliser ces tuyères dans le cas des petits moteurs propulsifs, particulièrement pour leur simplicité.

1.4.2. Tuyères de type Bell

Les tuyères coniques délivrent une certaine poussée mais avec une perte considérable, étant donné que l'écoulement à la section de sortie n'est pas axial. Ce problème est réglé par la recherche d'une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle, qui réduit considérablement les pertes de poussée.

Dans ce cas, on peut donner une valeur relativement importante à l'angle de divergence situé près du col allant de 20° à 30° , afin de donner une importante détente sans gêner l'axialité de l'écoulement à la sortie.

La seconde partie du divergent par sa forme courbée de 10° à 14° , tend à faire suivre à l'écoulement la direction uniforme et parallèle [3], [4].

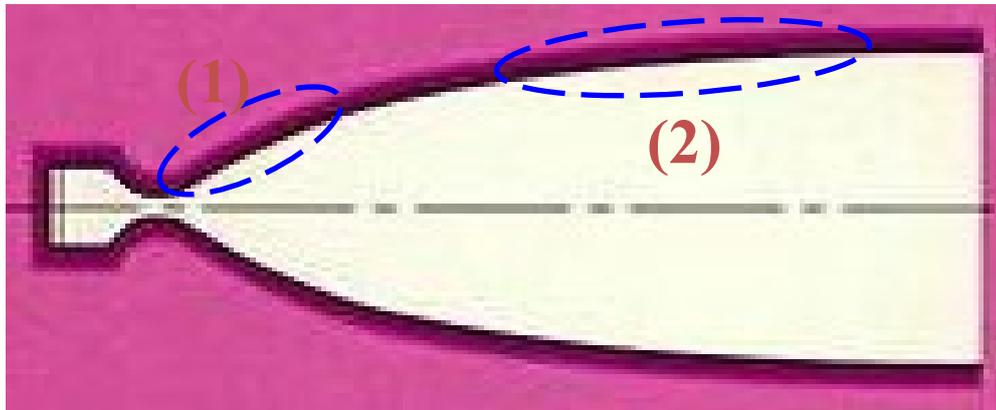


Figure 1.9 : Tuyère type Bell

Le Bell sera optimum qu'à une seule altitude (ou rapport de pression) où $P_e = P_a$. A basse altitude, sera affecté par les problèmes de décollement de la couche limite.

Et dans l'autre cas de haute altitude c'est la divergence de la plume des gaz, et afin de remédier à ce problème ; Il s'agit d'augmenter sa taille quand l'altitude augmente, puisque l'expansion excessive va réduire la poussée et conduire à l'incertitude ou l'instabilité de la direction des gaz.

On peut avoir plusieurs solutions comme : Tuyère double-Bell, Insertions fixes et éjectables,... mais ces solutions lui rend plus encombrant et couteux de fabrication.

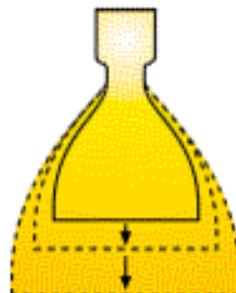


Figure 1.10 : Tuyère Bell à géométrie variable

1.4.3. Tuyères Annulaires

Ce modèle forme un espace annulaire obtenu à partir d'un corps central et une conduite divergente externe. La perte de poussée due à la divergence de l'écoulement est moins considérable que dans la tuyère de type conique au même rapport de section et longueur.

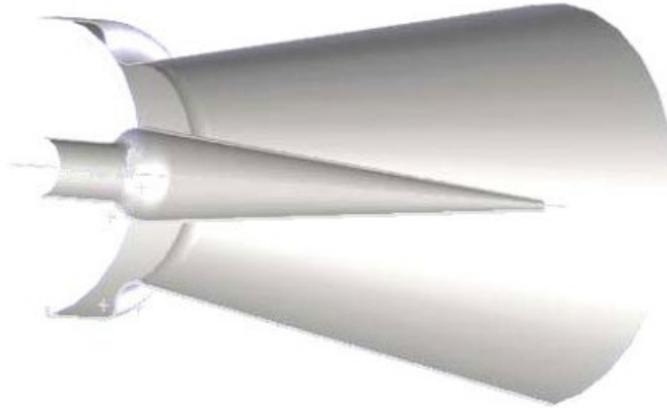


Figure 1.11 : Schéma d'une tuyère Annulaire

L'optimisation de la forme géométrique de cette tuyère reste difficile du fait de la transition des flux créés par deux centres de détente différents et adjacents, particulièrement pour augmenter la résistance au décollement de la couche limite en sur-détente, et l'atténuation de la déflexion excessive de la plume des gaz en sous-détente.

1.4.4. Tuyères à Corps Central

Contrairement aux configurations précédentes où le processus de détente des gaz est principalement influencé par le contour de la paroi de la section divergente de la tuyère, ce processus dans ce cas est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante.

L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures [3]. Deux principaux types de cette tuyère ont été élaborées à ce jour, distinguées par la méthode dans laquelle ils détendent les gaz : vers l'extérieur (Radial out) ou vers l'intérieur (Radial in).

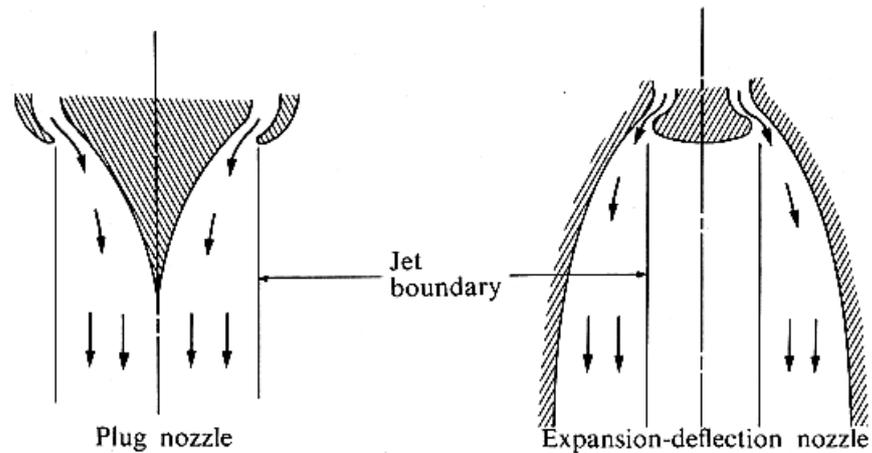


Figure 1.12 : Schéma des tuyères à Corps Central

1.4.4.1. Tuyère à Corps Central Intérieur-Extérieur

L'exemple principal est celui de l'Expansion-Déflexion (E-D), La figure précédente montre en un exemple, que les gaz sont forcés dans un convergent avant de s'élargir dans une tuyère en forme de Bell, le flux est dévié par un corps central, ce qui force les gaz à s'éloigner du centre et de rester attachés aux parois. La position du corps central peut se déplacer pour optimiser les performances.

Le flux est libre de se développer dans « le vide » quand l'altitude ou la pression varie. Ce comportement est souhaitable à basse altitude, car les gaz sont forcés vers l'intérieur et n'exercent plus de force sur les parois de la tuyère, la poussée sera diminuée et la tuyère devient moins efficace. Cependant, le corps central augmente la pression des gaz par leur compression en amont dans une plus petite zone, force le flux à nouveau de s'attacher aux parois de la tuyère. Par conséquent, il va diminuer énormément la perte de poussée due à la séparation du flux.

1.4.4.2. Tuyère à Corps Central Extérieur

Généralement, Nous nous référons aux modèles Plug ou Spike, qui signifie un corps central. Chacun des tuyères Plug dispose d'une pointe courbe de forme idéale, qui permet aux gaz d'échappement de se détendre d'une façon isentropique.

A basse altitude, la pression ambiante force les gaz de rester attachés aux parois du corps central, ce qui signifie une détente sans décollement ou charges latérales. A haute altitude, le fuseau de la détente est resserré par les ondes de détente, rend la tuyère plus performante, sans avoir besoin d'un divergent tendue.

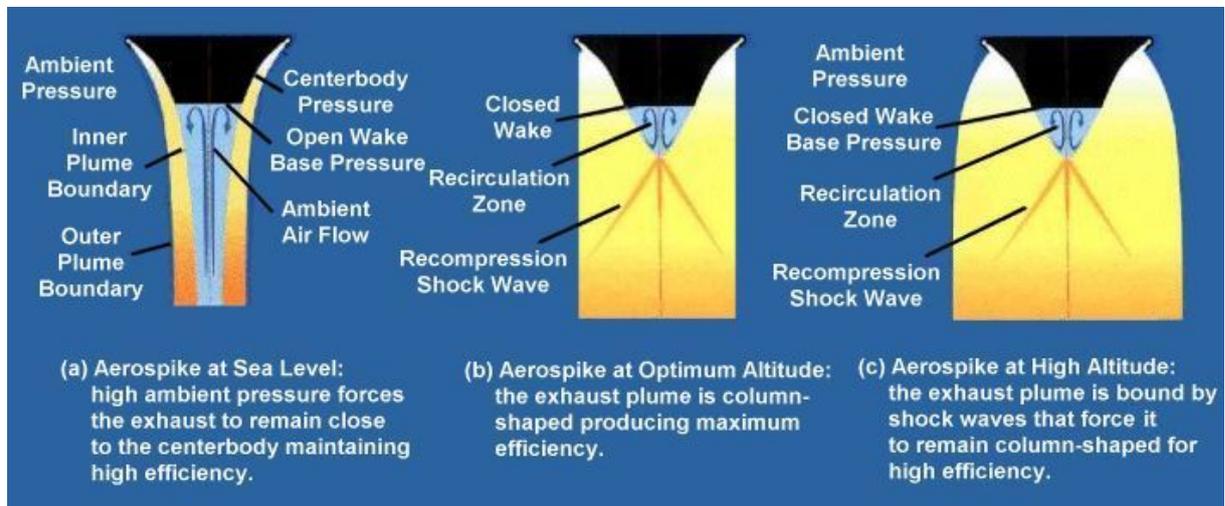


Figure 1.13 : Comportement de l'Aerospike en fonction de l'altitude

Pour diminuer le volume et le poids de ces tuyères, une nouvelle classe connue du nom d'Aerospike (tronquée), en supprimant le pointu au total et le remplacer par un fond plat. Inconvénient de la fiche « plate » est qu'un turbulent sillage sera formé vers l'arrière à haute altitude aboutissant à une grande trainée, sera atténuée par l'introduction d'un écoulement subsonique secondaire. La circulation de ce dernier et son interaction avec les gaz d'échappement créera une « pointe aérodynamique » qui se comporte comme l'idéal (non tronquée), en plus qu'elle va créer une poussée supplémentaire. C'est à cette pointe aérodynamique artificielle pour laquelle la tuyère Aerospike est nommée. [1]

En conclusion, à basses altitudes, nous voulons un faible rapport de sections, afin de minimiser les pertes en sur-détente. Cependant, ce qu'on a compensé à basse altitude, on le perd à hautes altitudes. L'inverse est vrai, plus le rapport de sections est élevé, la performance de la poussée à haute altitude est optimisée au détriment de celle à basse altitude. Donc, l'exploit d'une tuyère auto-adaptative s'avère avantageux.

Après la définition du comportement des différentes tuyères, on passe au principe de leur dimensionnement et les différents paramètres relatifs dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 2

METHODOLOGIE ET PARAMETRES DE CONCEPTION DES TUYERES SUPERSONIQUES

Introduction :

La conception des tuyères supersoniques repose sur la théorie de détente du Prandtl-Meyer et sa formulation par les équations des caractéristiques et de compatibilité, ainsi que de la forme technologique de la tuyère et sa mode de détente centrée ou progressive, en plus de la qualité de la ligne sonique au col, courbé ou supposée droite.

2.1. Détente de Prandtl–Meyer

2.1.1. Définition

La détente de Prandtl-Meyer est un processus d'expansion centrée qui se produit quand un écoulement supersonique tourne autour d'un coin convexe. Elle se compose d'un nombre infini d'ondes Mach, divergeant à partir d'un angle aigu. Chaque onde dans « l'Expansion Fan » transforme le flux progressivement (physiquement, Il est impossible pour le flux de tourner à travers une seule onde de détente parce que ce serait contraire à la seconde loi de la thermodynamique).

À travers cette « Expansion Fan », l'écoulement s'accélère et le nombre de Mach augmente, tandis que les paramètres statiques de la pression, la température et la densité diminuent ; Puisque le processus est isentropique, inversement aux paramètres de stagnation qui restent constants.

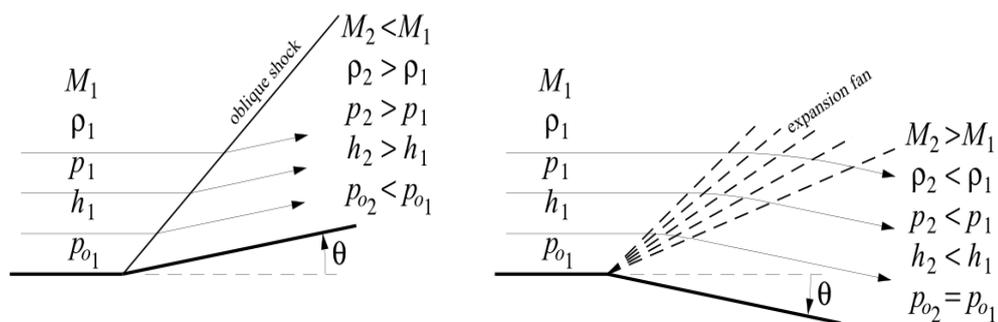


Figure 2.1 : Ondes de détente et de compression de Prandtl-Meyer

Dans le cas où la déviation est vers le haut, les ondes générées seront des ondes de compression et les effets obtenus sont contraires à ceux mentionnés précédemment. [4], [5], [6].

2.1.2. Angle de Prandtl-Meyer

À travers chaque onde de Mach, le flux change sa direction par un angle $d\theta$, tandis que la vitesse change par dV , le nombre de Mach après la déviation (M_2) sera en fonction du nombre de Mach initial (M_1). De la géométrie, le changement de l'angle de déviation (θ) est donnée par :

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (2.1)$$

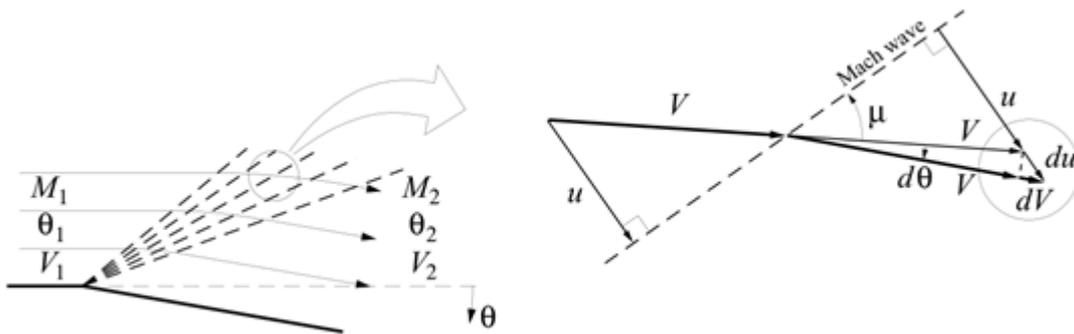


Figure 2.2 : Variation de la direction d'écoulement θ

Cette équation différentielle montre qu'une variation de $d\theta$ génère un changement de dV , et elle est intégrable de l'importe quel point (1) à un autre (2) sur l'onde de Prandtl-Meyer si on arrive à remplacer V par M , auquel θ est devenu égale :

$$\theta = v(M_2) - v(M_1) \quad (2.2)$$

Où, $v(M)$ détermine l'angle à travers lequel un écoulement sonique ($M = 1$) doit se tourner pour atteindre un nombre de Mach particulier (M_2). L'intégrale de l'équation (2.1) résolu par les scientifiques Prandtl et Meyer, donne :

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1} \quad (2.3)$$

De l'équation (2.3), l'angle de déviation va connaître un maximum lorsque le Mach sera à l'infini, et égale à $130^\circ.4$ pour un gaz parfait. Au-delà de cette valeur, il se produit une discontinuité de la vitesse avec création d'une zone morte, la ligne de glissement n'a pas d'existence physique car est liée à l'approximation eulérienne, les effets d'entraînement visqueux la transforment en région de recirculation.

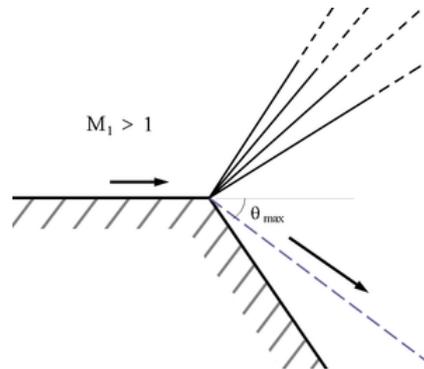


Figure 2.3 : Angle maximale de déviation de l'écoulement θ

Dans un divergent supersonique d'une tuyère, dont M_1 est égale à l'unicité et M_2 égale au Mach désiré à la sortie, l'angle de déviation de l'écoulement (ou bien la pente de la paroi) sera maximal juste après le col, et diminuera graduellement au nul à la section de sortie.

2.1.3. Angle de Mach

L'angle μ d'une onde de Mach par rapport à la direction du flux est appelé angle de Mach. Ça peut être déterminé par la considération de la superposition de plusieurs impulsions émises par le corps mobile, chacun produit un cercle de perturbation (en 2D) ou d'une sphère (en 3D) qui se dilate à la vitesse du son a .

Les ondes de Mach ou les ondes sonores sont constitués aussi de petites variations isentropiques dans ρ, V, p & h .

À un intervalle de temps donné t , le rayon du cercle sera de at , tandis que le corps a déjà parcouru une distance de VT .

L'angle de Mach μ sera égal à [4], [5] :

$$\mu = \arcsin \frac{at}{Vt} = \arcsin \frac{1}{M} \quad (2.4)$$

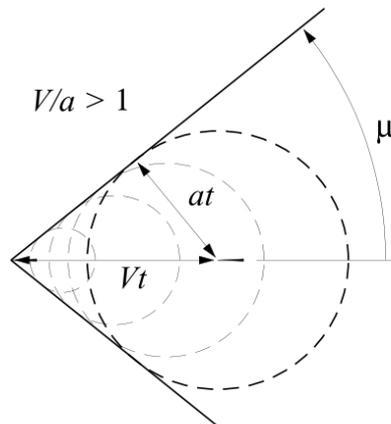


Figure 2.4 : Angle et onde de Mach

2.2. Principe de conception des tuyères supersoniques

Une tuyère parfaite est destinée à fournir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie afin de maximiser la poussée ; cela par la suppression complète des différentes pertes dues aux divergences du flux (la composante radiale) ou aux ondes de choc dans la partie divergente. Autrement dit, ni étranglée ou évasée.

Dans le cas bidimensionnel, Le principe consiste que l'onde de détente réfléchi soit éliminée par la paroi opposée qui forme une surface parallèle au vecteur vitesse résultant de la réflexion [4], [5].



Figure 2.5 : Principe de conception d'une paroi bidimensionnelle

L'ensemble de ces points d'absorption des réflexions représentent le contour de la tuyère, qui sera généralement courbée (parabole) non conique, juste nécessaire à la réalisation d'un écoulement parallèle et uniforme à la section de sortie.

Pour celui d'axisymétrique, la réflexion prend la place d'absorption, mais à condition que l'angle de déviation θ de la paroi soit supérieure à celui de l'onde de Mach incidente en relation, sinon ça sera un cas de compression.

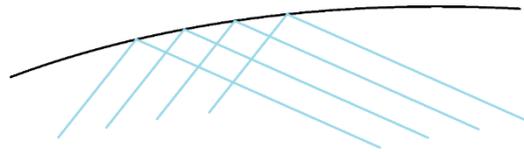


Figure 2.6 : Principe de conception d'une paroi axisymétrique

L'objectif de l'utilisation de la tuyère définit sa géométrie, si elle est utilisée pour la construction d'une soufflerie supersonique, notre souhait est que les gaz soient froids et uniformes pour des raisons de mesure et conservation des outils de l'expérience, sans se soucier si la longueur est minimale ou non. Mais si la tuyère est conçue pour des applications de propulsion supersonique ; dans ce cas on cherche une tuyère axisymétrique ou tridimensionnelle ayant une longueur et poids le plus petit possible avec une force de poussée élevée.

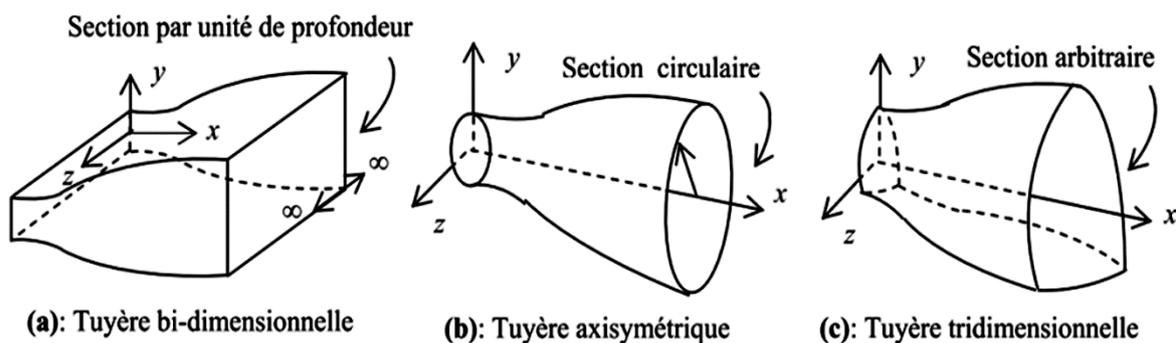


Figure 2.7 : Les différentes conceptions géométriques des tuyères

Ainsi, les concepteurs sont orientés vers la notion de la détente centrée, qui prend place à partir d'un seul point au col, si le cas est contraire ; représenté par un arc comme exemple, la détente sera progressive.

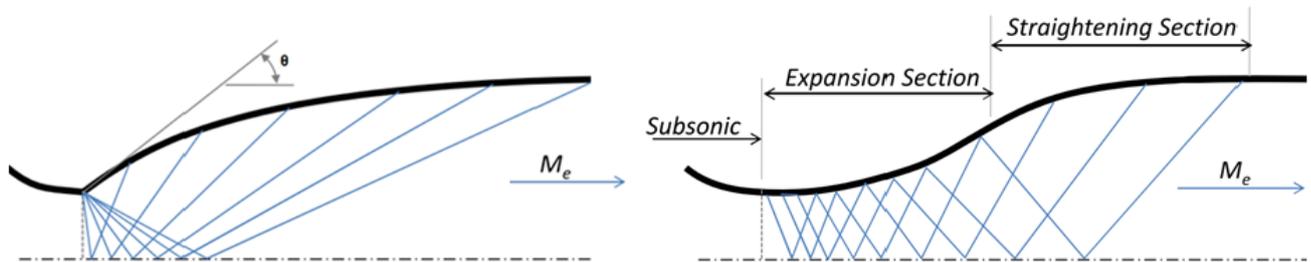


Figure 2.8 : Conception de la détente centrée vs progressive

Pour la partie convergente, il n'y a pas un contour modèle (spécifique convenable et meilleur). Il existe des règles basées sur l'expérience et la théorie des écoulements subsoniques. Dans notre cas, on suppose simplement que nous avons un contour convenable pour la section convergente qui donne un écoulement sonique au col de la tuyère.

2.3. Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est juste une forme que prennent les équations de conservation du débit, quantité de mouvement et d'énergie, représentée en mode de couplage une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Pour nécessité de résolution mathématique, elle sera projetée sur des courbes autres que les lignes de courant, s'appellent les lignes des caractéristiques. Le long desquelles de nouvelles coordonnées, et l'équation aux dérivées partielles se réduit à une simple équation différentielle ordinaire et devenu soluble (la démonstration est exposée dans l'annexe A).

Il est trouvé que pour chaque point du flux (sauf le centre de détente et la paroi) qu'il est passé par deux lignes des caractéristiques : montante et descendante, les deux relations de la méthode des caractéristiques sont en fonction des paramètres de l'expansion de Prandtl-Meyer (θ, ν, μ, M) en plus des coordonnées x et r .

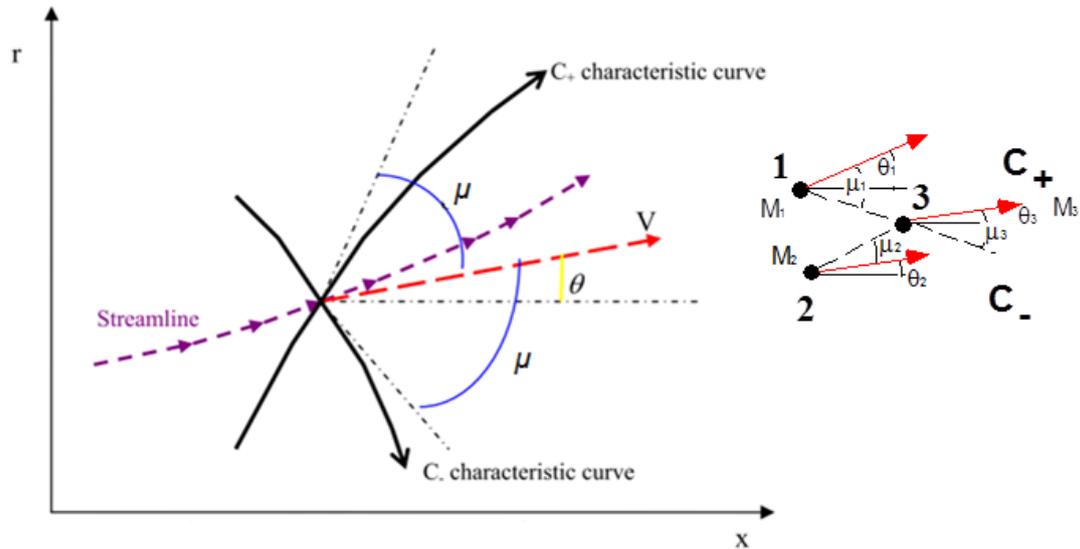


Figure 2.9 : Présentation des lignes des caractéristiques

La première s'appelle l'équation des caractéristiques :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \mp \mu) \quad (\text{A.22})$$

La deuxième est de la compatibilité :

$$d(\theta \pm \nu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \mp \cot \theta} \frac{dr}{r} \quad (\text{A.26})$$

Ces deux relations sont utilisées pour chaque point d'intersection (3), en prenant les propriétés des points (1) et (2) comme inputs, pour définir :

- l'angle de déviation de l'écoulement θ et celui de Prandtl-Meyer ν par le système d'équations (A.26) ;
- déduire par démarche inverse le Mach et son angle μ à partir de celui de Prandtl-Meyer par les relations (2.3) et (2.4).
- et à la fin, les coordonnées x et r par le système d'équation (A.22).

Pour le contour, il y a plusieurs méthodes, dont le principe est généralement basé sur la moyennisation entre la pente de la courbe des points de la paroi et la pente du dernier segment de la caractéristique en relation.

2.4. Détermination des paramètres thermodynamiques et géométriques

Étant donné que le flux s'agit d'un gaz parfait, se détend d'une manière isentropique, uniforme, sans chocs ou discontinuités, dont les forces de frottement, les effets de transfert thermique par conduction, convection ou rayonnement sont négligeables.

Ceci simplifie les calculs des propriétés d'écoulement de manière significative. Les propriétés de stagnation comme la pression, la température et la densité restent constants.

2.4.1. Les paramètres statiques

En chaque point i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), les paramètres thermodynamiques peuvent être déterminés via le nombre de Mach conformément au système d'équations suivant :

$$\frac{T_i}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{-1} \quad (2.5a)$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma_{gp} - 1}} \quad (2.5b)$$

$$\frac{P_i}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{\frac{-\gamma_{gp}}{\gamma_{gp} - 1}} \quad (2.5c)$$

2.4.2. Détermination du rapport des sections isentropique

D'après l'équation de conservation de la masse on a :

$$\rho V A = \rho_* V_* A_* = cste \quad (2.6)$$

Avec : $V = M \times a$ Mais : $M_* = 1$ donc :
 $V_* = M_* \times a_*$

$$\frac{A_*}{A} = M \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \left(\frac{a}{a_*} \right) \quad (2.7)$$

Où la célérité du son est donnée pour un gaz parfait par : $a = \sqrt{\gamma RT}$.

2.4.3. Détermination de l'expression du débit massique

Le débit massique traversant une section A est donné par [7] :

$$\dot{m} = \int_A \rho V \cos \alpha dA \quad (2.8)$$

α : est l'angle que fait le vecteur de vitesse avec la normale à la section A . Si nous divisons la relation (2.8) par la quantité $A_* \rho_0 a_0$ pour rendre le calcul non dimensionnel, nous aurons :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \int_A \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \cos \alpha \frac{dA}{A_*} \quad (2.9)$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère. A cette section on a : $\rho = \rho_*$, $A = A_*$, $a = a_*$, $M = 1$ et $\alpha = 0$ (écoulement horizontal). Donc, notre relation se réduit à une relation plus simple :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \times \frac{a_*}{a_0} \quad (2.10)$$

2.4.4. La poussée

La poussée est l'élément fondamental de performance qui caractérise un moteur aéronautique ou aérospatiale, la poussée est créée par l'expulsion de masse (échappement) traversant la tuyère à haute vitesse. L'expression pour la poussée est donnée par [8] :

$$F = \int P dA = \dot{m} \times V_e + (P_e - P_a) A_e \quad (2.11)$$

Le dernier terme à droite de l'équation représente l'addition des forces de pression (résultante) agissant sur la section de sortie de la tuyère. Qui est égale à zéro pour une tuyère avec un rapport d'expansion optimal ($P_e = P_a$).

En considérant la continuité (conservation de masse) au col de la tuyère et que ($P_e = P_a$), l'équation précédente peut être réécrite comme suite :

$$F = \rho_* A_* V_* \times V \quad (2.12)$$

Avec :

$$v_* = a_*$$

$$v = M \times a$$

Donc l'expression de la poussée sera :

$$F = \rho_* A_* a_* M \times a \quad (2.13)$$

2.4.5. Le coefficient de la poussée

Le degré auquel la poussée est amplifiée par la tuyère est quantifié par le coefficient de poussée C_f , et est défini en termes de la pression de la chambre et de l'aire du col [8].

D'après l'équation du débit massique (2.10), au col on a :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left(\frac{a_*}{a_0} \right) \Rightarrow \dot{m} = A_* \rho_0 a_0 \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left(\frac{a_*}{a_0} \right) \quad (2.14)$$

Remplaçons l'équation (2.14) dans l'équation de poussée (2.13) on obtient :

$$F = A_* \rho_0 a_0 \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left(\frac{a_*}{a_0} \right) M_e a_e \quad (2.15)$$

Le coefficient de poussée est donné par la relation [8] :

$$C_f = \frac{F}{A_* P_0} \quad (2.16)$$

Remplaçons l'équation (2.15) dans l'équation (2.16) on obtient :

$$C_f = \frac{F}{P_0 A_*} = \frac{A_* \rho_0 a_0 \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left(\frac{a_*}{a_0} \right) M_s a_s}{P_0 A_*} = M_s \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left(\frac{a_*}{a_0} \right) \frac{\rho_0}{P_0} a_0 a_s$$

Finalement :

$$C_f = M_e \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \frac{\rho_0}{P_0} a_* a_e \quad (2.17)$$

2.4.6. Masse de la structure de la tuyère

Pour calculer la masse de la structure du corps central, on considère les deux suppositions suivantes :

1. La forme de la paroi entre deux points successifs est une ligne droite. Cette supposition donne de bons résultats si le nombre de points N de la paroi est très élevé.

2. Sa structure est constituée du même matériau, d'une épaisseur t_m et de masse volumique ρ_m constantes.

Le calcul de la masse est lié avec le calcul de l'arc curviligne de la paroi. Sous la forme non-dimensionnelle pour une tuyère bidimensionnelle, il donne :

$$\frac{Masse}{\rho M t_m A_*} = C_{masse} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \sqrt{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda}\right)^2} \quad (2.19)$$

Sachant que $A^* = 2 * y * l$.

Et pour le cas d'un axisymétrique :

$$\frac{Masse}{\rho M t_M A_*} = C_{masse} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \frac{S_{(i)}}{A_*} \quad (2.20)$$

Avec : $S(i)$ représente la surface de révolution de la couronne circulaire limitée entre les points i et $i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$), d'après le théorème de Guldin [37] et [38].

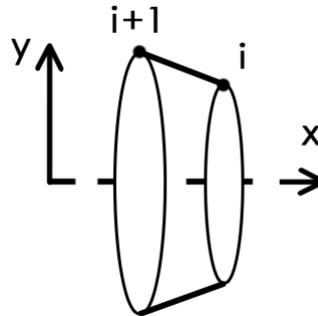


Figure 2.10 : Tronçon d'une tuyère axisymétrique

La surface $S(i)$, sous forme non-dimensionnelle, peut être calculée par :

$$\frac{Masse}{\rho M t_m A_*} = C_{masse} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \left(\frac{r_i}{\lambda} + \frac{r_{i+1}}{\lambda}\right) \sqrt{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{\lambda}\right)^2} \quad (2.21)$$

2.4.7. Force de pression exercée sur la paroi du Corps Central

Pour calculer la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère, on suppose que la pression exercée sur le tronçon (i) est rapprochée par :

$$P_{(i)} = \sigma P_j + (1 - \sigma) P_{j+1} \quad (2.22)$$

$$\text{Alors } F_{(i)} = P_{(j)} S_{(j)} = P_i (y_{i+1} - y_i) * l \quad (2.23)$$

Pour les applications, on prend $\sigma = 0.5$.

Alors, la force de pression axiale F_x exercée sur la paroi, est calculée comme la somme de toutes les forces de pression exercées sur tous les tronçons. Sous forme non dimensionnelle pour un cas bidimensionnel, on obtient :

$$\frac{F_x}{P_0 A_*} = C_{force} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\frac{P(j)}{P_0} \right) \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{y_* - y_*} \right) \quad (2.24)$$

Le cas axisymétrique tient en compte sa révolution autour de l'axe (x) de symétrie, il est donnée comme la projection de la force $F(i)$ sur l'axe x . Alors, la force de pression totale F_x est la somme de toutes les forces de pression axiales exercées sur tous les tronçons. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient :

$$\frac{F_x}{P_0 A_*} = C_{force} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\frac{P(i)}{P_0} \right) \left(\frac{S(i)}{A_*} \right) \sin(\theta_{(i)}) \quad (2.25)$$

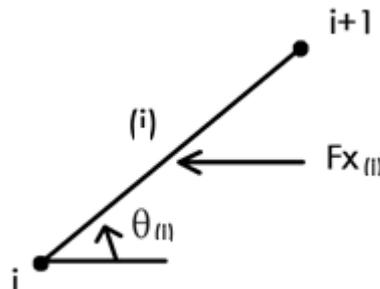


Figure 2.11 : Force de pression exercée sur un segment du Corps Central

Le rapport des pressions dans l'expression (2.24) est donné par la relation (2.20) et l'angle ($\theta_{(i)}$) peut être obtenu par la relation suivante :

$$\theta_{(i)} = \text{arctg} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (2.26)$$

Après qu'on a défini les tuyères et leur comportement d'adaptation avec l'altitude, leur principe et paramètres de conception, on passe à la définition de la méthodologie spécifique de la conception de notre modèle, celui à corps central axisymétrique.

CHAPITRE 3

METHODOLOGIE DE CONCEPTION DES TUYERES AXISYMETRIQUES A CORPS CENTRAL EXTERIEUR

Introduction :

Il existe deux types de tuyères à corps central, celui à corps central extérieur dénommé aussi par le Plug Nozzle, et l'autre d'expansion-déflexion (E-D). Le premier modèle permet de détendre l'écoulement complètement à l'extérieur, tandis que le deuxième admet une partie du flux à détendre à l'intérieur d'une section limitée et la partie restante aura lieu à l'extérieur.

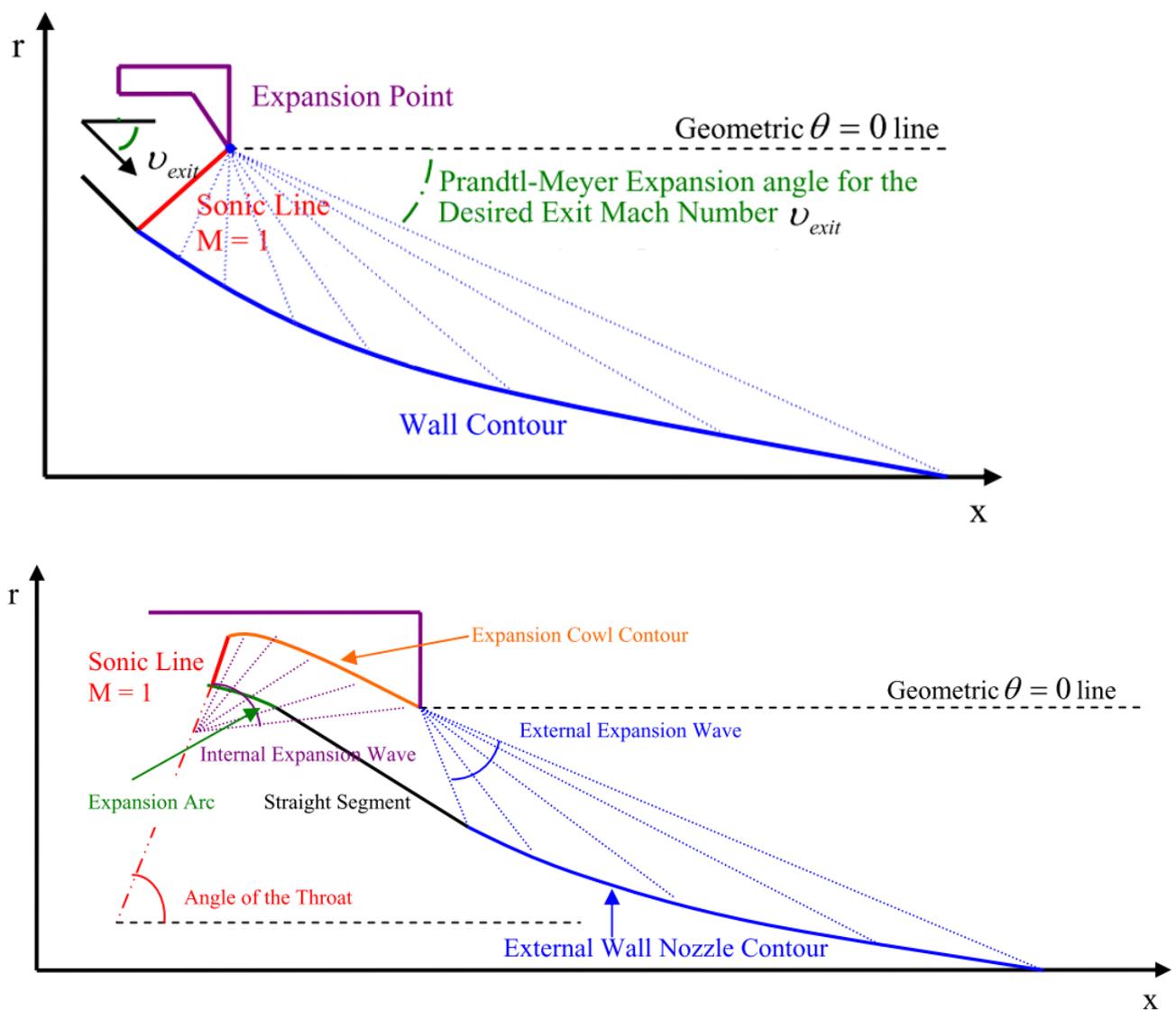


Figure 3.1 : Schéma d'une tuyère Plug Nozzle (en haut) et d'autre E-D (en bas)

La catégorie bidimensionnelle de ces tuyères a principalement deux méthodes pour définir leurs contours ; la première est la méthode des caractéristiques et l'autre emploie le rapport des sections isentropique. Ces développements diffèrent de la solution axisymétrique, puisque cette dernière tient en compte la dimension radiale carrée dans le calcul de la paroi.

La solution bidimensionnelle augmente la surface en coupe transversale de la tuyère, se traduit par un rapport de surface plus grand que celui désiré lorsque cette solution tourne autour de son axe. La solution axisymétrique résout ce problème.

3.1. Méthode de calcul pour un Plug Nozzle axisymétrique

La différence entre ce type de tuyère et les autres modèles, notamment la tuyère à détente centrée, est que l'écoulement au col est incliné d'un angle θ^* par rapport à l'horizontale comme l'indique la figure 3.1, ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles dont l'écoulement est horizontal au col. Par conséquent, la carène (lip) doit être inclinée d'un angle ψ par rapport à la verticale.

La forme du corps central à rechercher accélère l'écoulement du nombre de Mach $M = 1$ au col jusqu'au nombre de Mach $M = M_e$ à la sortie de la tuyère.

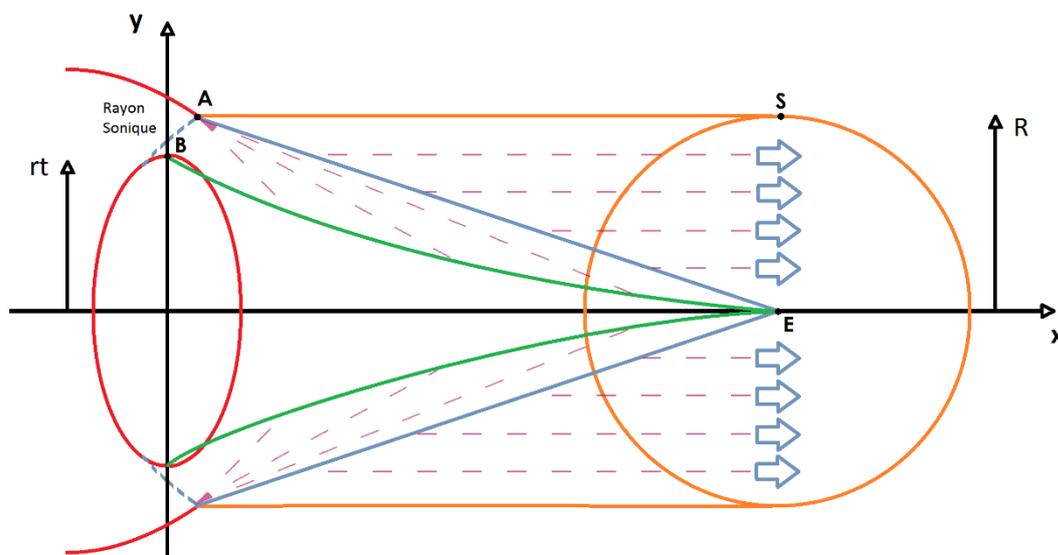


Figure 3.2 : Présentation des zones de détente et uniformes

Comme la déviation de l'écoulement au col n'est pas nulle, l'écoulement à travers le corps central se redresse de l'angle $\theta = \theta^*$ au col à l'angle $\theta = 0$ à la sortie. Tandis que l'angle de Prandtl-Meyer augmente de zéro à sa valeur maximale.

La détente de la tuyère à corps central n'engendre pas une région de Kernel, mais seulement une région de transition (ABE) qui est une région d'onde simple si l'écoulement est bidimensionnel dont la solution peut être obtenue analytiquement [5], [32], [33] et non-simple si l'écoulement est axisymétrique dont la solution sera numérique [34], [35], [36]. La région triangulaire (AES) est une région d'écoulement uniforme à nombre de Mach M_s de sortie.

Une convention usuelle consiste à omettre de représenter les caractéristiques dans une région uniforme, de ne représenter que les caractéristiques rectilignes dans le cas d'une région d'ondes simple et de représenter les deux types de caractéristiques dans le cas de régime non simple.

3.1.1. Génération du « Expansion Fan »

De l'équation (2.3), La direction de l'écoulement du fluide au col est égal à l'angle d'expansion Prandtl-Meyer, qui correspond au nombre de Mach désiré à la sortie de la tuyère :

$$\theta^*(\theta_{SonicLine}) = \nu_{exit} \quad (3.1)$$

Pour atteindre ce Mach désiré, le débit doit être détendu par un « Expansion Fan » de Prandtl-Meyer qui est centré au point (A), ce dernier peut être considéré comme un point de discontinuité contenant un nombre infini d'ondes de Mach, Ces derniers tournent et accélèrent le flux.

Le calcul commence par l'attribution à chaque onde son propre angle de direction, par la discrétisation de la zone de détente de l'écoulement $0 \leq \theta \leq \theta^*$ en un nombre fini N de point.

$$\Delta\theta = \frac{\theta^*}{N} \quad (3.2)$$

En total, on obtient $N+1$ lignes de Mach y compris les deux extrémités.

Dans la figure suivante, Le violet pointillé présente la direction de l'écoulement après qu'il soit passé à travers une onde de Mach avec un changement d'angle de Prandtl-Meyer $d\nu$ et à son tour la direction d'écoulement sera changée de $d\theta$. De la géométrie est vérifiable que $d\theta = d\nu$.

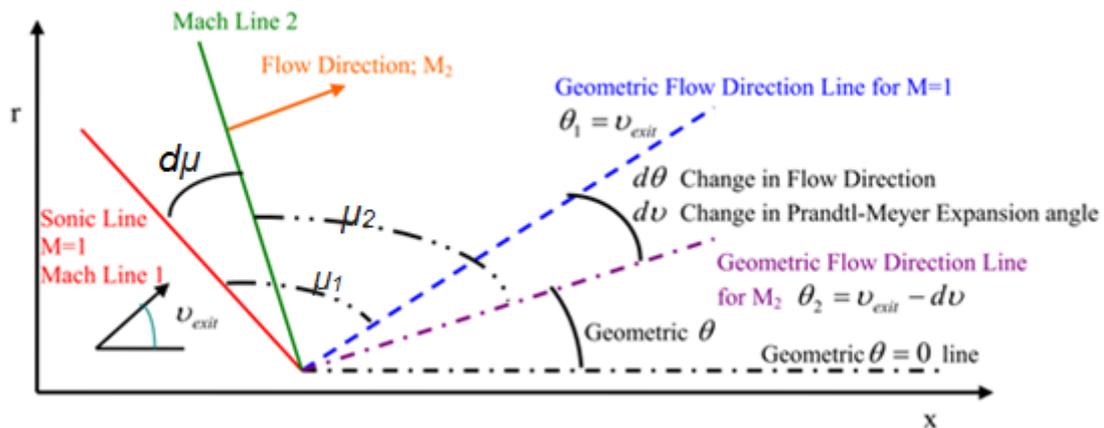


Figure 3.3 : Relation géométrique entre l'angle PM et celui de la direction du flux

Si le changement progressif de l'angle d'expansion Prandtl-Meyer $d\nu$ sera connu pour chaque onde de Mach, le nombre de Mach associé peut être calculé à partir l'équation (2.3) par une démarche inverse. Une fois calculé, l'angle de Mach μ peut être déduit aussi en utilisant l'équation (2.4).

L'abscisse du point (A) est généralement choisi à zéro (0), quand la composante radiale doit être différente de zéro (0) afin d'éviter une discontinuité des équations. Donc, les six paramètres caractéristiques du point (1), qui est un point de discontinué, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = 0 \\ r_A = 0 \\ \theta_i = (i - 1) * \frac{\theta^*}{N} \\ v_i = \theta^* - \theta_i \\ M_i = f(v_i) \\ \mu_i = \text{asin}\left(\frac{1}{M_i}\right) \\ \text{avec : } i = 1, N + 1 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

3.1.2. Détermination du contour de la paroi

La détermination du contour de la paroi de la tuyère axisymétrique se fait en même temps avec le calcul de l'écoulement aux points d'intersections des caractéristiques dans la région de transition (ABE). Pour ce faire, nous avons besoin d'autres caractéristiques C- originaires de la surface de contrôle (AE) qui s'appellent « backwards », les propriétés de ces points sont connues et sont égales aux valeurs de l'écoulement uniforme de la section de sortie (M_e) [32], comme le montre la figure suivante (3.4).

Le contrôle de la géométrie du maillage dans la région de transition dépend de la distance Δx (non-dimensionnelle) choisie pour les points sélectionnés sur la ligne de Mach uniforme (AE) (surface de contrôle). La figure suivante présente le processus et la direction du calcul dans la région de transition.

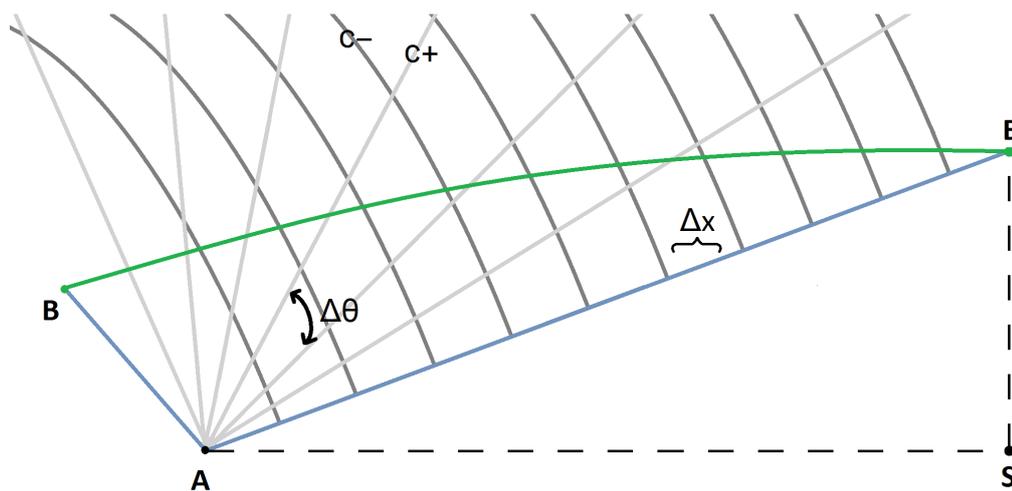


Figure 3.4 : Création du réseau des caractéristiques C- et C+

Les propriétés au point (2) de la surface de contrôle sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_A + \Delta x * \cos(\mu_e) \\ y_2 = y_A + \Delta x * \sin(\mu_e) \\ \theta_2 = 0 \\ v_2 = v_e \\ M_2 = M_e \\ \mu_e = a \sin(1/M_2) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Premièrement, on cherche à calculer la première caractéristique backwards C- et son point de paroi correspondant.

Des deux points (1) et (2) qui sont défini par le système d'équation (3.3) et (3.4), le point (3) sera défini par les deux relations des caractéristiques et de compatibilité (A.21) et (A.26) comme il est montrée dans le sous-paragraphe 3.2.

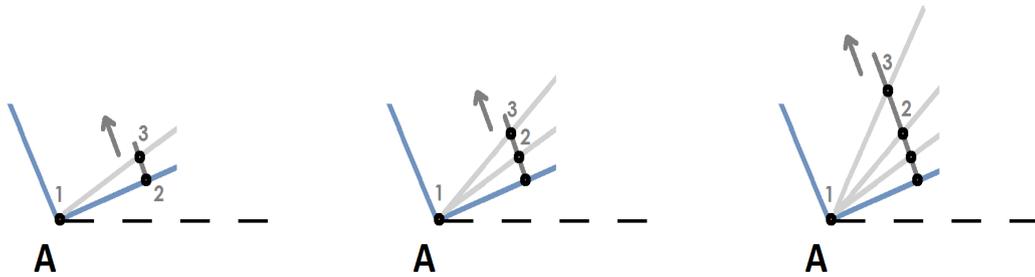


Figure 3.5 : Méthode de calcul de la première caractéristique C-

Le processus est de retour, le point (3) devient le point (2) et l'onde de Mach se déplace de i à $i + 1$ pour définir par la même manière précédente un nouveau point (3), jusqu'à la dernière ligne de Mach ($i = N + 1$), comme le montre la figure précédente.

Ce point sera considéré dans le calcul du nouveau point de la paroi, sauf si sa composante radiale est plus grande que celle du dernier de la paroi [32]; Sinon, une autre caractéristique C- sera calculée par un autre pas $(i + 1)\Delta x$.

Mais la question est comment définir le premier point initial indispensable au calcul de la paroi ?

Le point (B) est dans l'extrémité en face du point (A) du col, leur segment [AB] représente le rayon sonique r_c , est égale à l'unicité pour faire les calculs adimensionnels. Nous savons aussi que la carène au col dans un plug nozzle est déviée d'un angle ψ , qu'est est égal à θ^* .

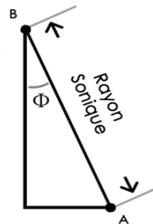


Figure 3.6 : Représentation du point (B) au col

Du précédent et de la figure (3.6), les paramètres du point (B) sont :

$$\begin{cases} x_B = x_A - rc * \sin(\psi) \\ r_B = r_A + rc * \cos(\psi) \\ \theta_B = \theta^* \\ v_B = 0 \\ M_B = 1 \\ \mu_B = \pi/2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme on a montré, le calcul le long de la caractéristique C- se poursuit jusqu'à ce que le point d'intersection des caractéristiques (C+ et C-) ait une composante radiale (r) supérieure à celle du dernier point de la paroi. Une fois que cette condition est remplie ; un segment de ligne de courant entre les deux derniers points de la caractéristique C- peut se rapprocher la variation des positions et propriétés d'écoulement le long de cette caractéristique Backwards. L'intersection de cette ligne avec d'autre émanant du dernier point de la paroi (initialement le point B) définit la position et les propriétés d'écoulement du point suivant de la paroi. Cette méthode de Shapiro est expliquée dans le paragraphe 3.3.

Après la définition de la première caractéristique backwards C- et son point de la paroi, La procédure complète sera répétée pour chaque C- sélectionnée et au lieu d'utiliser les propriétés discontinues du point (A) on utilise celles des points de la caractéristique précédente, comme le montre la figure suivante.

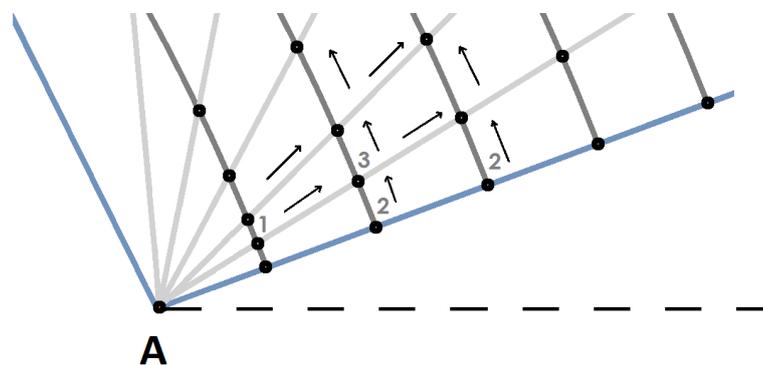


Figure 3.7 : Calcul des différentes caractéristiques

Le nombre de points interne à calculer sur la C- correspondante diminue graduellement jusqu'à ce qu'on obtienne un point, cela ne signifie pas que c'est le dernier point, mais quand son angle θ est égale à zéro (0), correspondant à la dernière ligne de Mach d'accélération.

Numériquement ce point fait l'objet d'une interpolation entre les deux derniers points de la paroi, le dernier a un θ négatif. L'interpolation de r et x est faite en fonction de θ selon la relation (3.25).

Par conséquent, le rayon de sortie, la longueur non-dimensionnelle correspondant à la discrétisation seront donné par :

$$\frac{r_e}{rc} = \frac{r_N}{rc} \quad (3.7)$$

$$\frac{L}{rc} = \frac{x_e}{rc} - \frac{x_B}{rc} \quad (3.8)$$

3.2. Méthode numérique des caractéristiques et de compatibilités

Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbées, et si le maillage est fin de sorte que les points soient proches l'un de l'autre, on peut rapprocher la courbure par une ligne droite, le calcul sera sur les lignes de Mach nommée ξ sur la caractéristique C- et par η sur la caractéristique C+ comme le montre la figure (3.8).

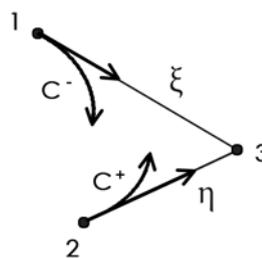


Figure 3.8 : Lignes des caractéristiques vs lignes de Mach

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel, adiabatique d'un gaz parfait, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes connues par les équations des caractéristiques et de compatibilités :

➤ Suivant ξ (1-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dr}{dx}\right) = \tan(\theta - \mu) \end{array} \right. \quad (A.22a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\theta + \mu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} - \cot\theta} * \frac{dr}{r} \end{array} \right. \quad (A.27a)$$

➤ Suivant η (2-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dr}{dx}\right) = \tan(\theta + \mu) \end{array} \right. \quad (A.22b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\theta - \mu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} + \cot\theta} * \frac{dr}{r} \end{array} \right. \quad (A.27b)$$

Après discrétisation et arrangement du système d'équations (A.22 a,b), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{i+1} - \tan(\theta_i - \mu_i) x_{i+1} = r_i - \tan(\theta_i - \mu_i) x_i \\ r_{i+1} - \tan(\theta_i + \mu_i) x_{i+1} = r_i - \tan(\theta_i + \mu_i) x_i \end{array} \right. \quad (3.9 \text{ a, b})$$

Notez que toutes les variables avec l'indice i sont des quantités connues, et les variables avec l'indice $i + 1$ sont des quantités inconnues. Les équations (3.9) sont les équations caractéristiques discrétisées qui définissent l'emplacement dans l'espace $(x - r)$ où les courbes de caractéristiques C- et C+ se croisent. Cette collection de points s'appelle « Characteristic Net ».

Aussi, le système d'équation (A.27 a,b) peut se discrétiser, après arrangement, nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{i+1} + \nu_{i+1} = (\theta_i + \nu_i) + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} - \cot\theta_i} \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i} \\ \theta_{i+1} - \nu_{i+1} = (\theta_i - \nu_i) - \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} + \cot\theta_i} \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i} \end{array} \right. \quad (3.10 \text{ a, b})$$

Notez que r_{i+1} sur le côté droit des équations de compatibilité, dans le calcul ; il s'agit d'une quantité connue à partir de la solution du système précédent (3.9). Ces équations de compatibilité (3.10) peuvent être résolues simultanément pour trouver la direction du flux et l'angle d'expansion de Prandtl-Meyer au point où les caractéristiques sont déjà croisées, le nombre et l'angle de Mach à ce point d'intersection peuvent être extrapolés à partir de l'angle d'expansion de Prandtl-Meyer.

Le système d'équations précédent (3.10) compte deux discontinuités, la première quand l'équation (3.10b) utilise un point situé sur l'axe de symétrie comme input, auxquels r et θ sont égales à zéro.

Dans ce cas, le terme $\frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{M^2-1} + \cot \theta_i}$ sera indéterminé, un double calcul de limites, nous donne :

$$\lim_{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{M^2-1} + \cot \theta_i} \right) = \frac{d\theta}{dr} \quad (3.11)$$

En remplaçant cette dernière dans l'équation (3.10.b) et après discrétisation et arrangement, nous aurons :

$$2\theta_{i+1} - \nu_{i+1} = 2\theta_i - \nu_i \quad (3.12.a)$$

La deuxième discontinuité se trouve sur la dernière ligne de Mach où $\theta = 0$ pour qu'une caractéristique C+ montante, le même procédé converti l'équation (3.10.a) en :

$$\theta_{i+1} + \nu_{i+1} = \theta_i + \nu_i \quad (3.12.b)$$

La nature courbée des caractéristiques est récupérée aussi par un calcul itératif entre les propriétés de deux points sur la même ligne caractéristique, le critère de convergence est en fonction de la direction du flux (θ) puisqu'elle est la dernière qui converge.

La méthode itérative utilise la moyenne de la position et les propriétés de la solution (3) ainsi que la position et les propriétés d'origine des caractéristiques C- (1) et C+ (2) et les refondent à chaque fois comme des conditions de départ de leurs caractéristiques respectives (algorithme de prédicteur-correcteur par différences finies).

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que le critère de convergence de la direction d'écoulement (θ) soit respecté. Les équations suivantes illustrent cette technique de calcul de la moyenne.

On peut approcher la variation de ces paramètres le long des segments (1-2) et (2-3) par l'expression suivante [7] :

$$q_{13} = c_q \cdot q_1 + (1 - c_q)q_3 \quad (3.13)$$

C_q est un coefficient d'interpolations appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres :

➤ Sur le segment ξ (1-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 = \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \\ v_3 = \frac{v_1 + v_3}{2} \\ M_3 = \frac{M_1 + M_3}{2} \\ \mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} \\ r_3 = \frac{r_1 + r_3}{2} \\ x_3 = \frac{x_1 + x_3}{2} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

➤ Suivant η (2-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \\ v_3 = \frac{v_2 + v_3}{2} \\ M_3 = \frac{M_2 + M_3}{2} \\ \mu_3 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} \\ r_3 = \frac{r_2 + r_3}{2} \\ x_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

3.3. Discrétisation de la fonction du courant

Etant donné que dans un débit axisymétrique stable, il y a seulement deux coordonnées spatiales, l'énoncé de l'équation de continuité est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction de courant.

La forme la plus générique de la fonction du courant est :

$$\Psi = f(x, r) \quad (3.16)$$

Ψ est égale à une constante. Pour satisfaire à la condition des lignes de courant, il n'y a pas de changement dans la constante. Par conséquent, $d\Psi = 0$.

Différencions l'équation (3.16) et remplacer par $d\Psi = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr = 0 \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) est valable pour de petits changements dans dx et dr , Pour satisfaire à l'équation de continuité à un point, Ψ est défini par :

$$v = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dx} \quad (3.18a)$$

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \quad (3.18b)$$

Résoudre ces équations (3.18a) et (3.18b) pour $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ respectivement, et les remplacer dans l'équation (3.17) donne :

$$-rv \frac{\rho}{\rho_0} dx + ru \frac{\rho}{\rho_0} dr = 0 \quad (3.19)$$

Dont u et v ne sont pas explicitement connues au niveau des points dans un champ d'écoulement supersonique modélisé par la méthode adimensionnelle des caractéristiques, ils doivent être convertis en nombre de Mach associé au point par la transformation suivante. En géométrie :

$$u = \vec{V} \cos \theta \quad (3.20a)$$

$$v = \vec{V} \sin \theta \quad (3.20b)$$

La vitesse et le nombre de Mach à un point est connu par la relation suivante :

$$\vec{V} = a.M \quad (3.21)$$

Remplacer cette dernière équation dans les deux précédentes (3.20a) et (3.20b), donnera :

$$u = a.M \cos\theta \quad (3.22a)$$

$$v = a.M \sin\theta \quad (3.22b)$$

Remplacer ces résultats dans l'équation (3.19), donne :

$$-r.a.M \sin\theta \frac{\rho}{\rho_0} dx + r.a.M \cos\theta \frac{\rho}{\rho_0} dr = 0 \quad (3.23)$$

Tandis que l'équation est continue aux points r, a, M et ρ/ρ_0 , elle devient divisible par ces derniers :

$$-\sin\theta. dx + \cos\theta. dr = 0 \quad (3.24)$$

Discrétiser et ordonner dans la partie gauche de l'équation précédente la quantité inconnue $(i + 1)$, donne :

$$r_{i+1} - \tan\theta_i. x_{i+1} = r_i - \tan\theta_i. x_i \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) montre que l'étude irrotationnelle et supersonique d'un débit flux ne dépend que de la direction de l'écoulement et de la position du point initial. Cette équation est utilisée pour trouver l'emplacement du point suivant sur la ligne de courant par la solution de deux lignes qui se croisent.

3.4. Calcul du point satisfaisant la fonction du courant

La dernière étape dans la satisfaction de l'équation du courant est de développer des approximations de lignes droites pour les changements de propriétés d'écoulement entre les deux derniers points le long de la caractéristique. L'équation générale pour une ligne droite est :

$$r = mx + z \quad (3.26)$$

Où m est la pente, z est le r_0 à l'intersection, r est l'ordonnée radiale et x la coordonnée selon l'axe de révolution (x) d'un point.

Étant donné que les positions (x, r) de deux points sont connus le long de la ligne d'approximation, la pente m et r_0 de la ligne peuvent être résolus à l'aide du système d'équations :

$$r_1 = mx_1 + z \quad (3.27a)$$

$$r_2 = mx_2 + z \quad (3.27b)$$

La fonction du courant est également dépendante de la direction d'écoulement au point précédent, la variation de θ le long de la ligne droite doit également être calculée. Modifier l'équation (3.26) pour θ sur le plan (θ, x) donne :

$$\theta = m_{\theta}x + z_{\theta} \quad (3.28)$$

Où m_{θ} est la pente, z_{θ} est θ à l'intersection, Étant donné que les positions (x, θ) de deux points sont connus le long de la ligne d'approximation, la pente m_{θ} et θ à l'intersection de la ligne peuvent être résolus en utilisant le système d'équations :

$$\theta_1 = m_{\theta}x_1 + z_{\theta} \quad (3.29a)$$

$$\theta_2 = m_{\theta}x_2 + z_{\theta} \quad (3.29b)$$

Maintenant que les équations des lignes d'approximation sont connues, l'intersection de l'équation du courant avec le plan (x, r) des caractéristiques donne la solution de la position du point suivant qui satisfait la fonction de courant.

La composante (x) de la solution qui satisfait la fonction de courant sera utilisée dans le plan (x, θ) pour trouver le sens d'écoulement au point concerné. Ceci est formulé par l'équation suivante :

$$\theta_{i+1} = m_{\theta}x_{i+1} + z_{\theta} \quad (3.30)$$

Cette solution du point de contour est utilisée dans le calcul du prochain point de la caractéristique.

Le programme de résolution conformément à cette méthode et celle des caractéristiques pour notre tuyère recherché est exposé dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSIONS

Introduction :

Dans ce chapitre, on procède à la présentation des divers résultats obtenus du dimensionnement de la tuyère objet de la recherche, développés par un programme de calcul élaboré en langage Matlab (R 2009a), ainsi que d'autres hypothèses découlant de cette conception. Le logigramme de résolution en annexe obéit à la méthodologie citée dans le chapitre 3.

4.1. Résultats du Dimensionnement

4.1.1. Effet de la discrétisation sur la convergence de la solution

Dans les figures suivantes sont présentés des maillages en caractéristiques obtenus en jouant sur le nombre de caractéristiques $C+$ et $C-$, c'est à dire sur le nombre (NC) des caractéristiques au départ du point (A) et sur la valeur du pas Δx sur la surface de contrôle.

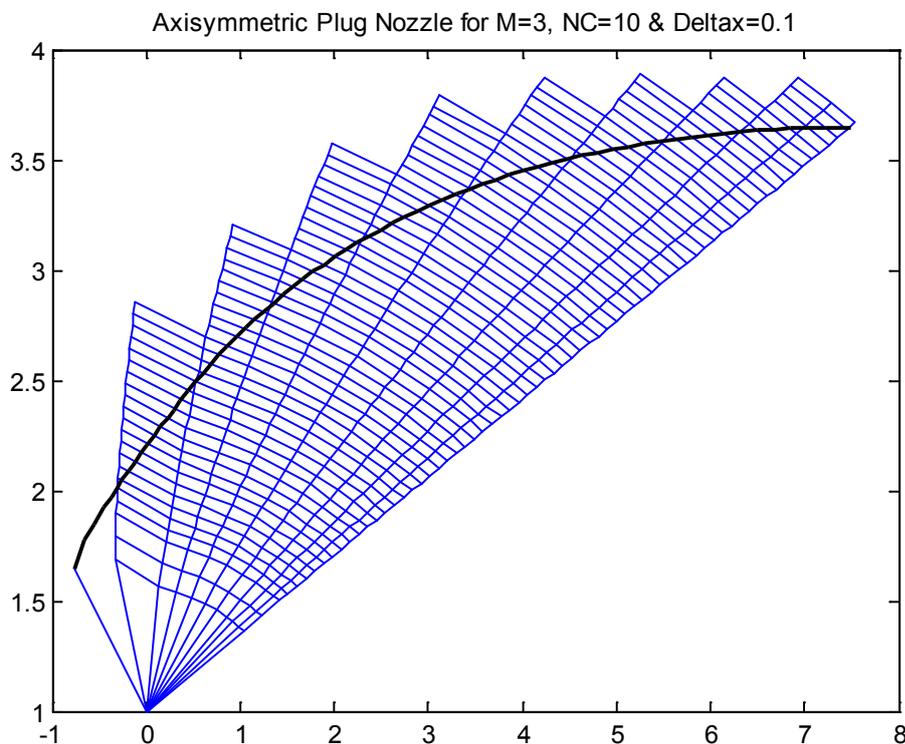


Figure 4.1 : Maillage en caractéristiques pour $M_e = 3$, $N_c = 10$ et $\Delta x = 0.1$

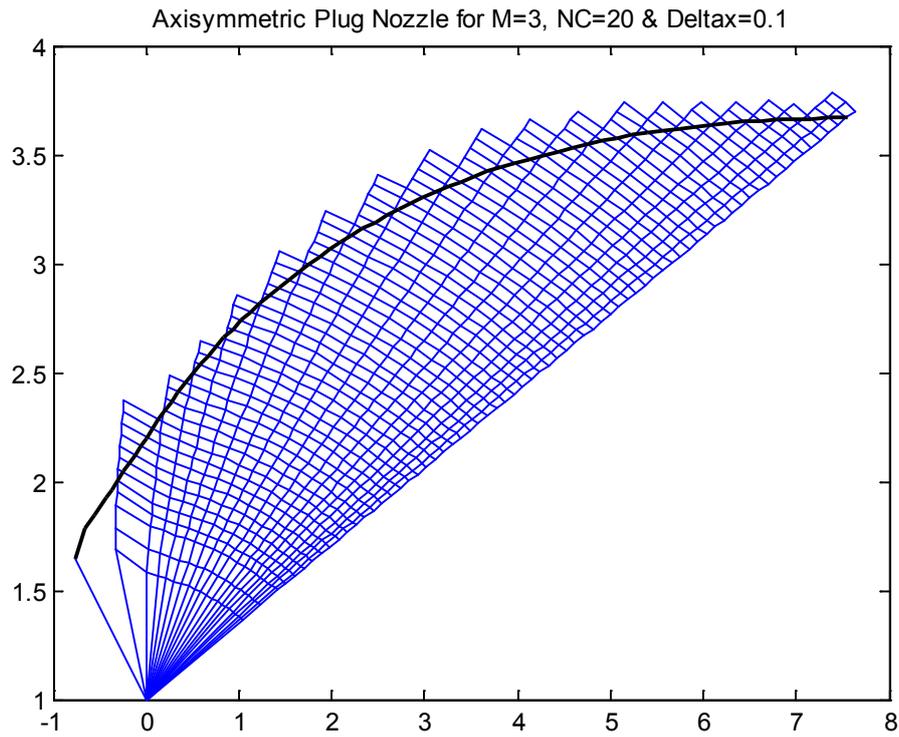


Figure 4.2 : Raffinement du maillage en nombre des caractéristiques $N_c = 20$

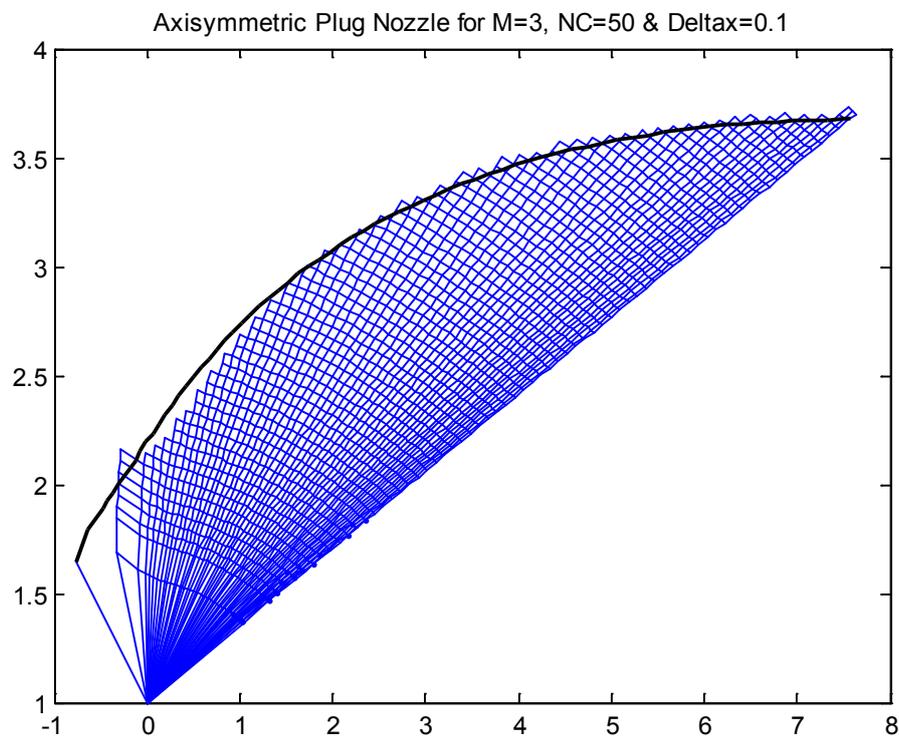


Figure 4.3 : Raffinement du maillage en nombre des caractéristiques $N_c = 50$

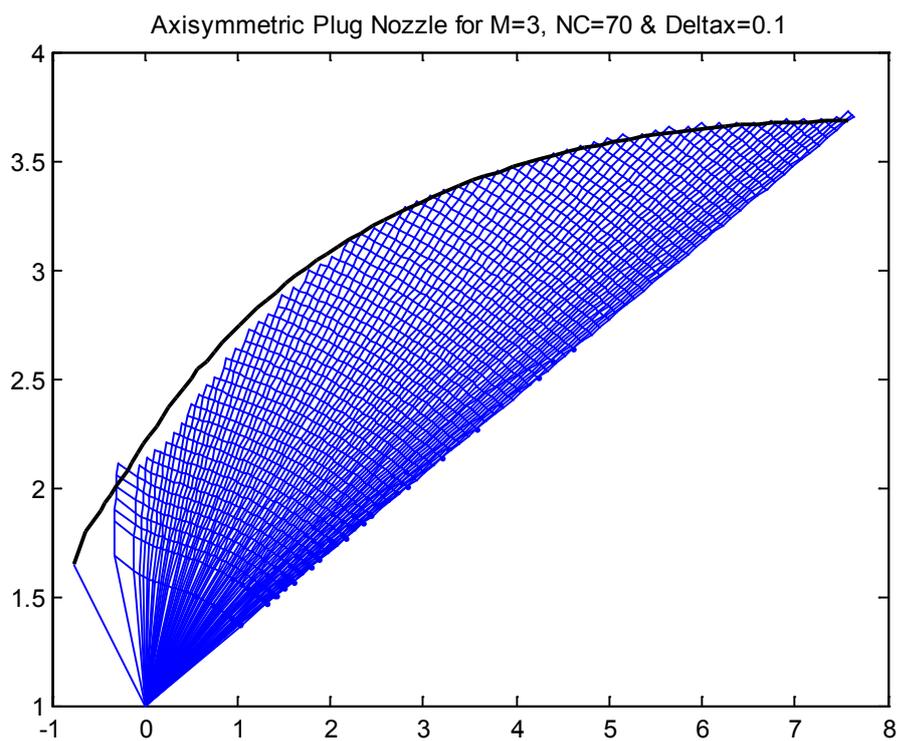


Figure 4.4 : Raffinement du maillage en nombre des caractéristiques $N_c = 70$

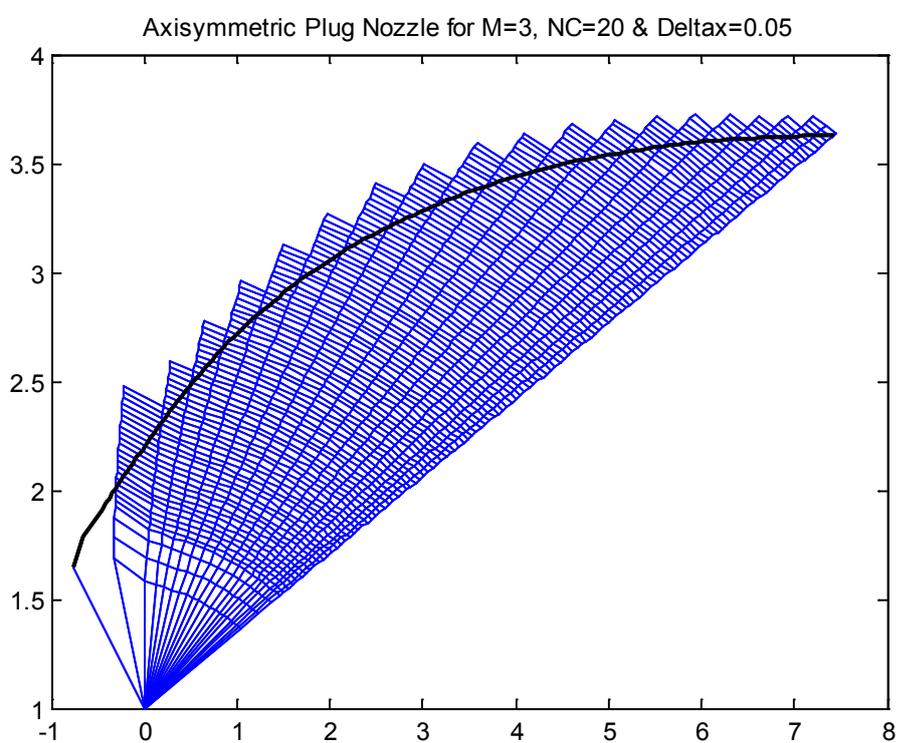


Figure 4.5 : Raffinement du maillage en fonction du pas $\Delta x = 0.05$

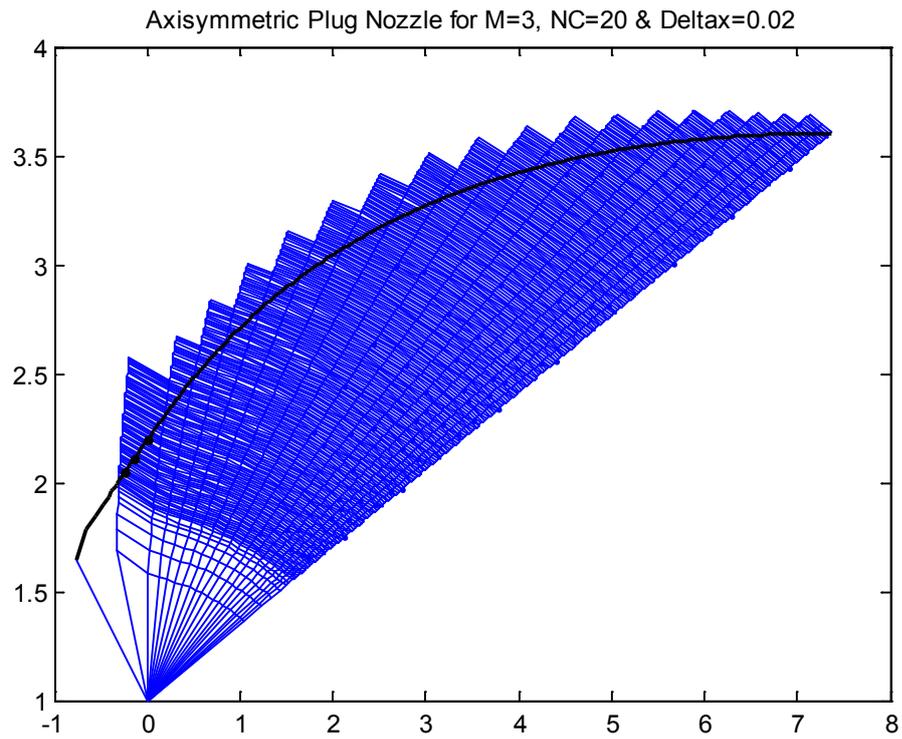


Figure 4.6 : Raffinement du maillage par un pas $\Delta x = 0.02$

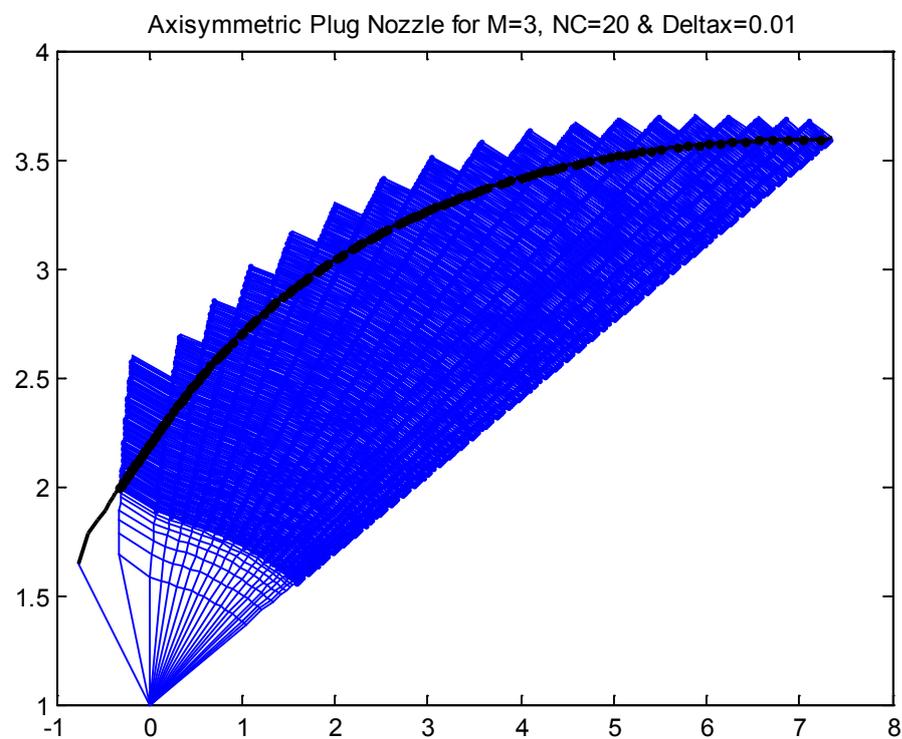


Figure 4.7 : Raffinement du maillage par un pas $\Delta x = 0.01$

Tableau 4.1 : Effet de la discrétisation (NC) sur la convergence ($M_e = 3$, $\Delta x = 0.1$)

NC	L/rc	r/rc	Ae/A* calculé	Ae/A* Isentropique	Error (%)
10	8.2498	2.6471	4.1909	4.2200	0.6909
20	8.3123	2.6693	4.2212	4.2200	0.0278
30	8.3326	2.6764	4.2308	4.2200	0.2557
50	8.3318	2.6761	4.2304	4.2200	0.2470
70	8.3364	2.6787	4.2340	4.2200	0.3304
100	8.3356	2.6775	4.2324	4.2200	0.2921

Tableau 4.2 : Effet de la discrétisation (Δx) sur la convergence ($M_e = 3$, $NC = 10$)

Δx	L/rc	r/rc	Ae/A* calculé	Ae/A* Isentropique	Error (%)
0.1	8.2498	2.6471	4.1909	4.2200	0.6909
0.05	8.1358	2.6069	4.1362	4.2200	1.9862
0.02	8.0749	2.5855	4.1070	4.2200	2.6787
0.01	8.0579	2.5794	4.0988	4.2200	2.8729

Tableau 4.3 : Effet de la discrétisation (Δx) sur la convergence ($M_e = 3$, $NC = 20$)

Δx	L/rc	r/rc	Ae/A* calculé	Ae/A* Isentropique	Error (%)
0.1	8.3123	2.6693	4.2212	4.2200	0.0278
0.05	8.1867	2.6249	4.1607	4.2200	1.4057
0.02	8.1256	2.6034	4.1314	4.2200	2.1013
0.01	8.1062	2.5965	4.1220	4.2200	2.3226

La première remarque prenante est que le problème converge dès le premier essai, par un nombre minimal des données en relation. À n'importe quel nombre des caractéristiques montantes $C+$ (NC) ou Backwards $C-$ (Δx sur la surface de contrôle), les résultats ont une grande similitude, ce qui approuve la rationalité des calculs.

Ce progrès est dû au réseau d'intersection des caractéristiques ($C+$ et $C-$), résolu par un calcul différentiel de prédicteur-correcteur, inversement au cas bidimensionnel où la convergence dépend que du nombre de caractéristiques au départ ($C+$). Mathématiquement parlant, le nombre et le sillage des points dans toute la zone de révolution du flux et leur minutieux calcul limitent la génération, propagation et l'inflation de l'erreur.

La deuxième, est que l'augmentation du nombre de caractéristiques affecte légèrement le rapport des sections, tandis que la diminution de la valeur du pas Δx a un effet de propagation et d'inflation de l'erreur due au grand nombre des points créés.

Et en dernier, la longueur résultante des parois est presque similaire à celle du MLN axisymétrique, qui confirme que la différence entre les deux tuyères ne réside que dans le montage technologique, des parois divergentes vers d'autres convergentes. Ce montage est responsable de la suppression de la région de Kernel.

Les nombreux essais, montrent que le meilleur résultat obtenu est lorsque $NC = 20$ avec un pas $\Delta x = 0.1$ (Ci-après son schéma de tuyère correspondant). L'insertion des ondes de détente pour lisser la première partie n'est pas possible car le radial du dernier point des caractéristiques dans cette zone ne sera jamais supérieure au premier point de la paroi (B), une alternative numérique de corrélation peut résoudre ce problème.

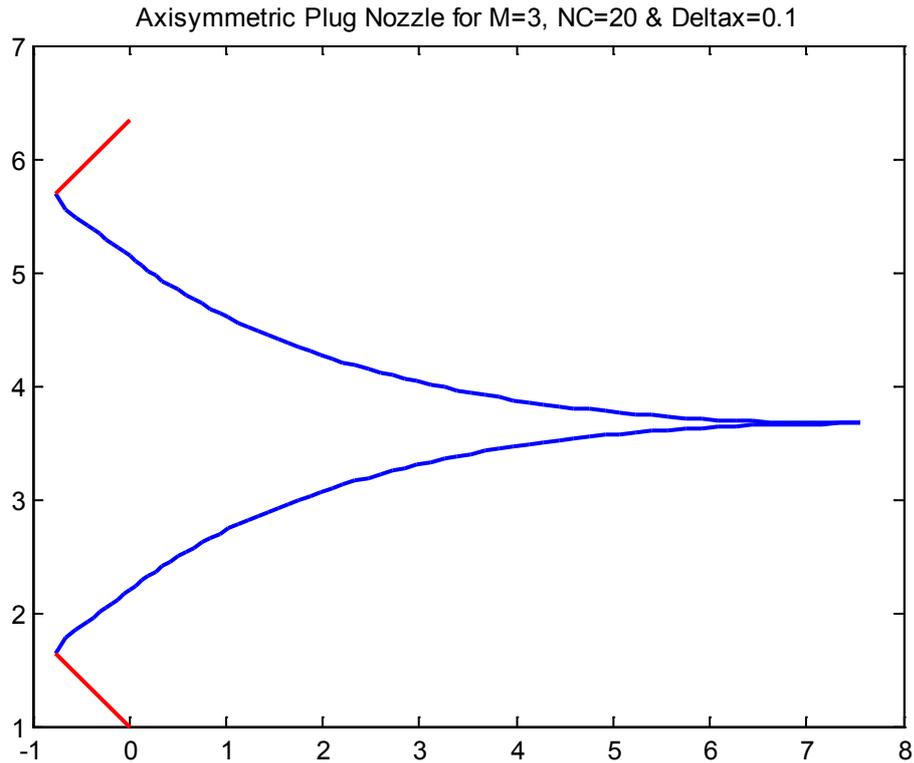


Figure 4.8 : Forme de la tuyère axisymétrique optimale

4.1.2. Les Iso Teta et Mach

Toutes les caractéristiques résultantes ci-dessus ne montrent aucune focalisation, confirmant une détente free sans ondes de choc.

Ainsi, les isolines (Teta et Mach) sont rectilignes et uniformes et ne représentent aucune superposition, annonçant un écoulement en plein développement et sans perturbations ou recirculation.

Ci-dessous sont présentés des schémas isolines Teta et Mach dérivés du calcul des caractéristiques. Notons que les isolines de la température, pression et la masse volumique sont équivalents à ceux du Mach, comme le gaz est supposé parfait obéissant aux relations de la détente isentropique (2.5).

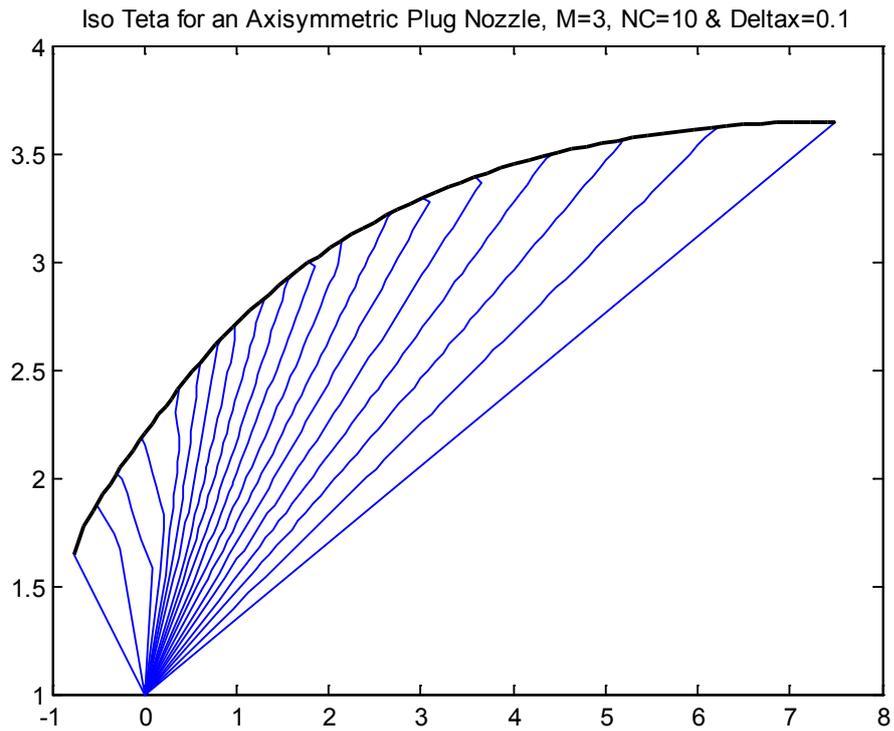


Figure 4.9 : Iso Teta pour $M_e=3$, $NC=10$ & $\Delta x=0.1$

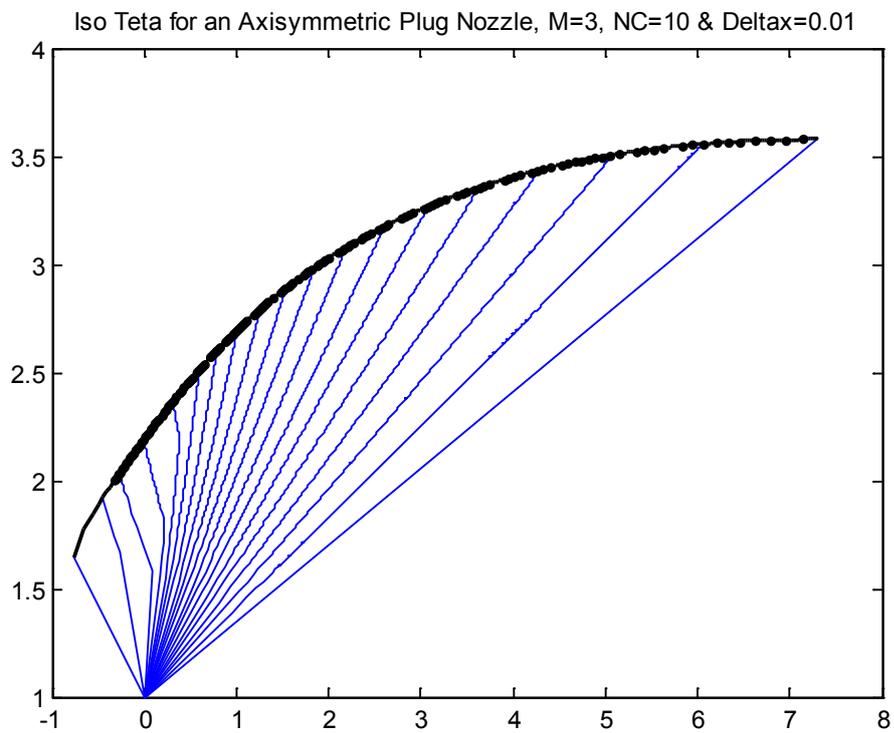


Figure 4.10 : Iso Teta pour $M_e=3$, $NC=10$ & $\Delta x=0.01$

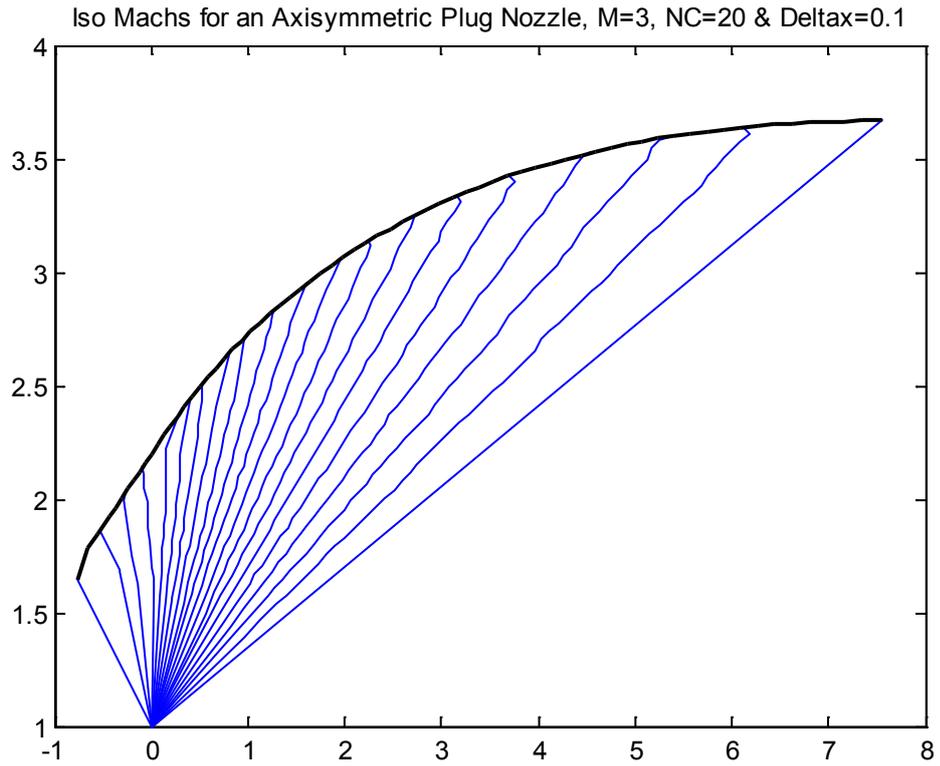


Figure 4.11 : Iso Mach pour $M_e=3$, $NC=20$ & $\Delta x=0.1$

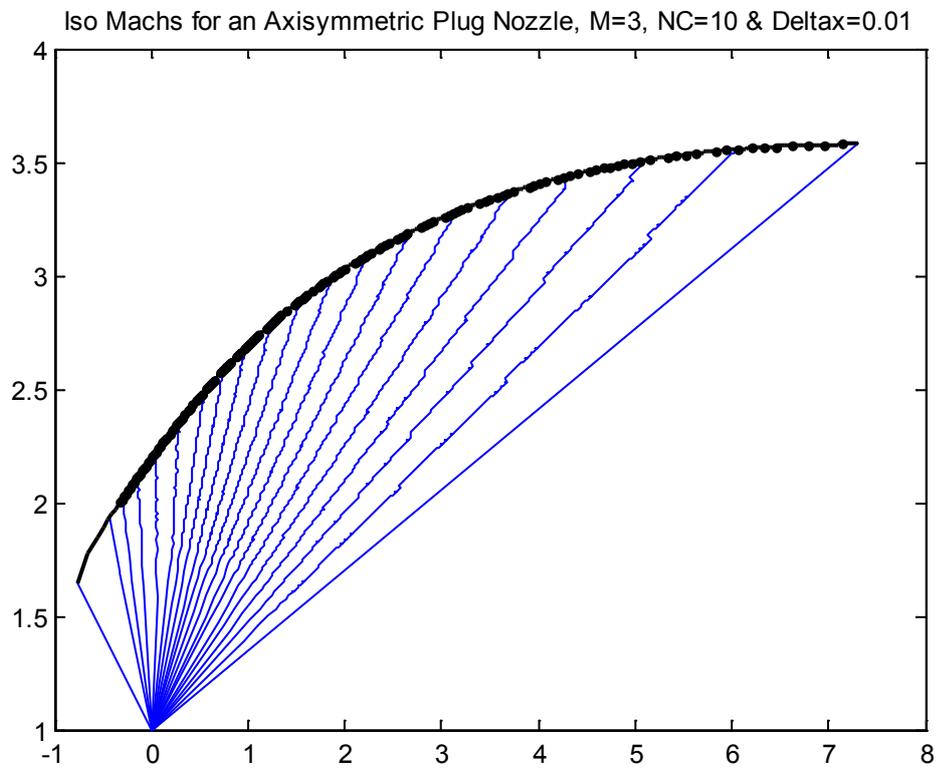


Figure 4.12 : Iso Mach pour $M_e=3$, $NC=10$ & $\Delta x=0.01$

4.1.3. Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du Corps Central

Les figures suivantes représentent respectivement la variation des rapports thermodynamiques T/T_0 , ρ/ρ_0 et P/P_0 , θ et M le long de la paroi des tuyères pour $M_e=3.0$ et $t_0=3000$ °k.

On remarque la diminution du rapport T/T_0 le long de la paroi, plus Gamma est grand, plus un refroidissement se produit. Ce rapport est donc important dans le choix du matériau réfractaire correspondant.

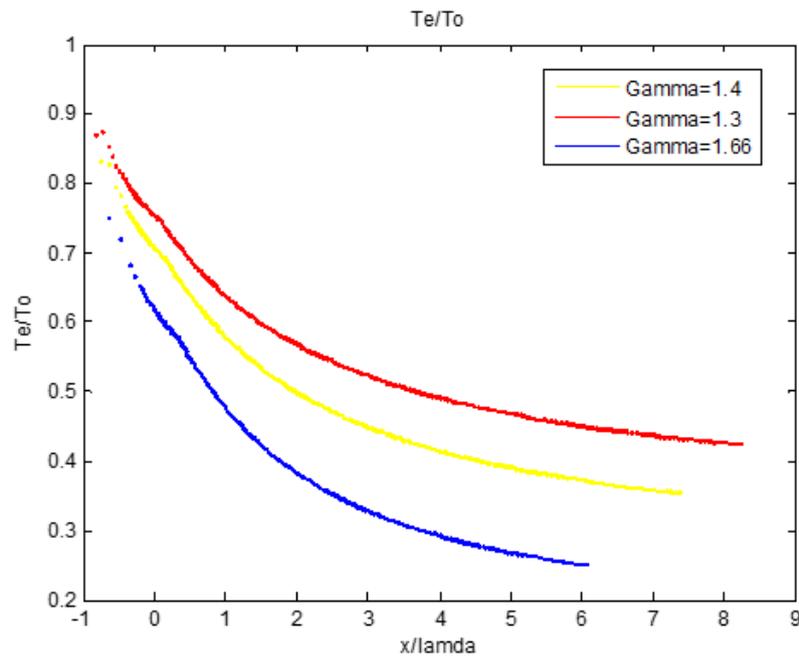


Figure 4.13 : Variation de T_{paroi}/T_0 pour $M_e=3.00$ et $T_0=3000$ k°

Le rapport ρ/ρ_0 nous donne une indication sur la quantité du gaz qui va traverser le divergent afin de déterminer la durée de vie du carburant (l'autonomie).

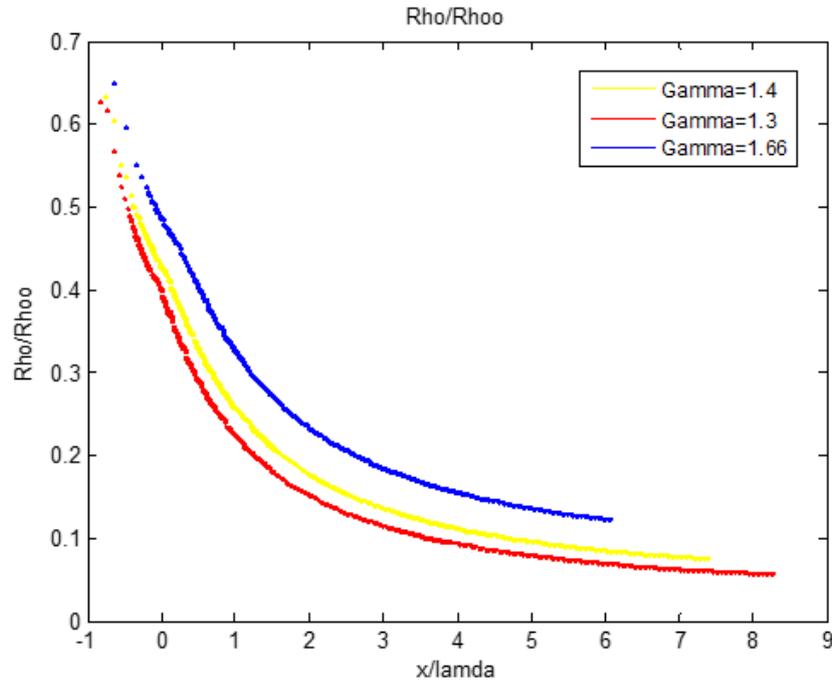


Figure 4.14 : Variation de $\rho_{\text{paroi}}/\rho_0$ pour $M_e=3.00$ et $T_0=3000 \text{ K}$

Le rapport P/P_0 nous servira à déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent, pour étudier la distribution de la contrainte radiale et tangentielle pour connaître la résistance du matériau. Les deux derniers rapports ne montrent pas une grande différence entre les différents gammas, contrairement à celui de la température.

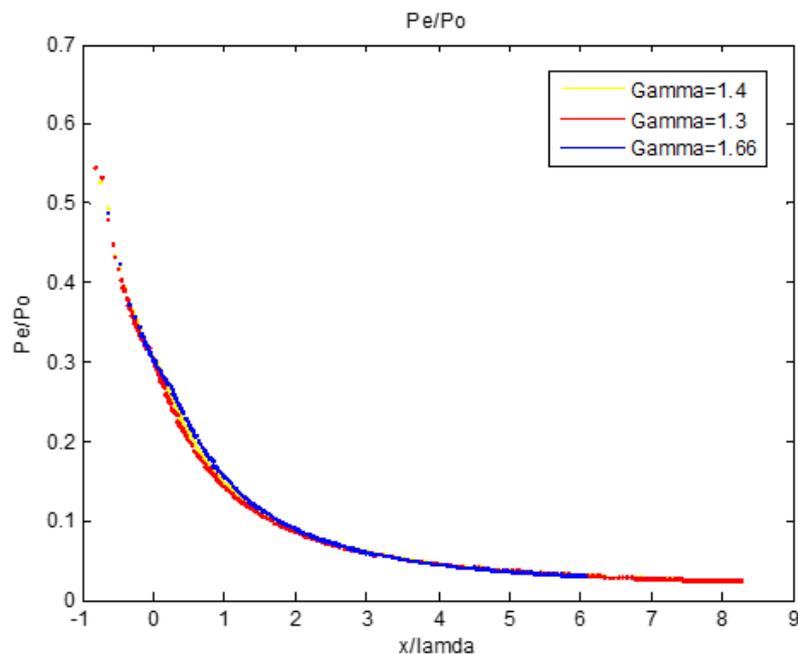


Figure 4.15 : Variation de P_{paroi}/P_0 pour $M_e=3.00$ et $T_0=3000 \text{ K}$

La courbe du θ^* présente une inflexion importante au départ, équivalent au manque des caractéristiques juste après le premier point de la paroi (B), leur insertion en supplément dans cette région est impossible vu que la radiale du dernier point d'une caractéristique montante doit être supérieure à celle du point (B).

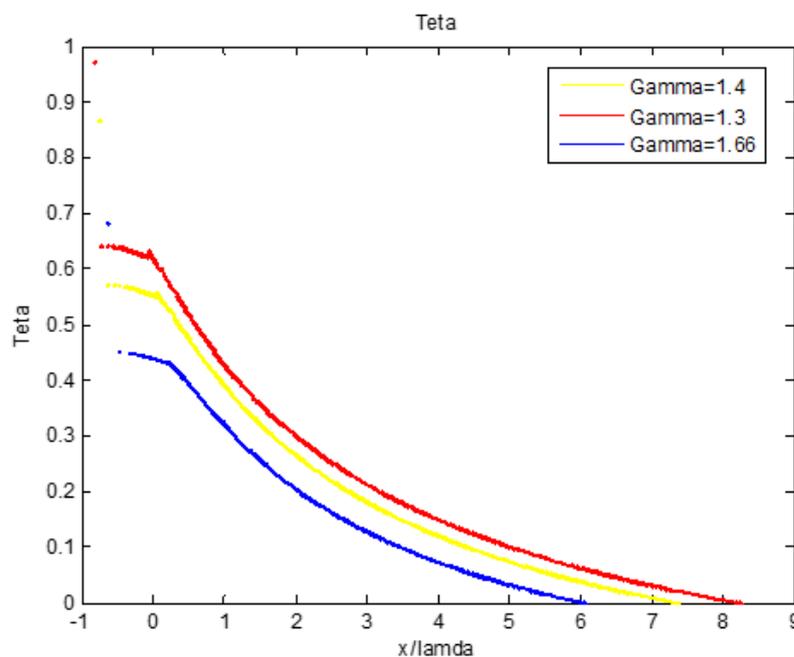


Figure 4.16 : Variation de $\theta_{\text{paroi}}/\theta_o$ pour $M_e=3.00$ et $T_o=3000 \text{ K}$

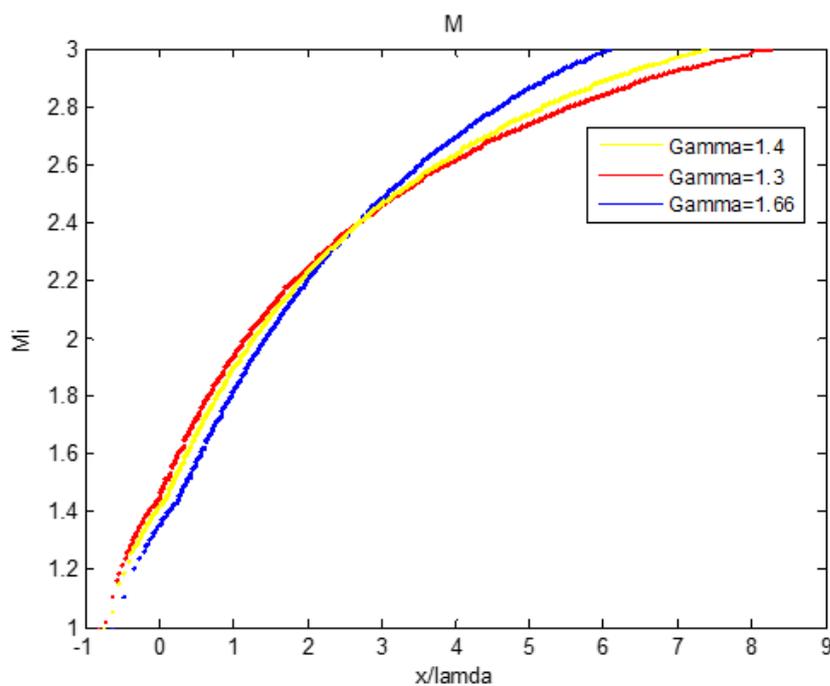


Figure 4.17 : Variation de M_{paroi} pour $M_e=3.00$ et $T_o=3000 \text{ K}$

4.1.4. Effet du rapport thermodynamique Gamma sur l'allure du Corps Central

Les figures suivantes présentent l'allure du corps central respectivement à : $M_e = 2.00, 2.5,$ et 3.0 .

On remarque que la différence entre les trois courbes s'agrandit avec la distance, plus gamma est petit, plus la longueur est élevée. Cela signifie que les gaz qui ont une chaleur spécifique plus élevée ou à grande température, se détendent mal.

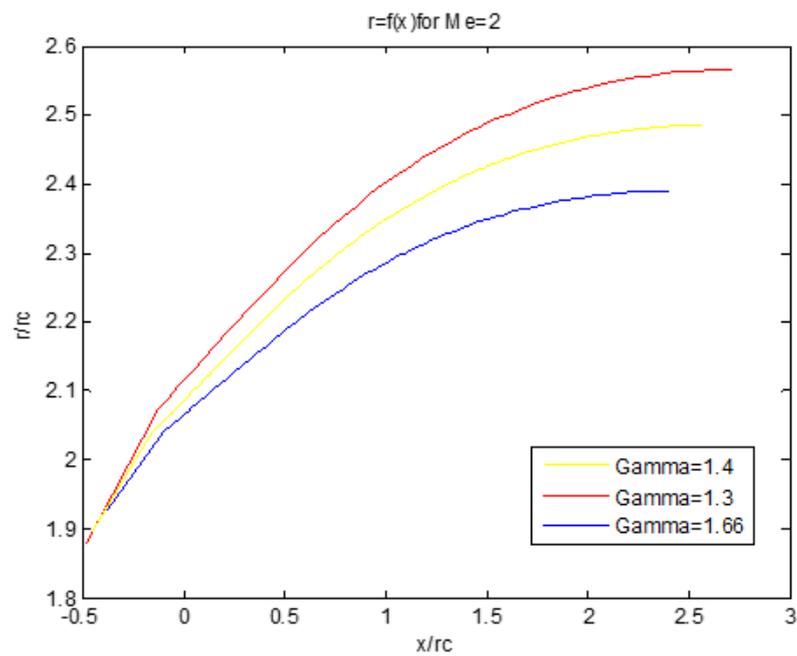


Figure 4.18 : L'allure du Corps Central pour $M_e=2.0$

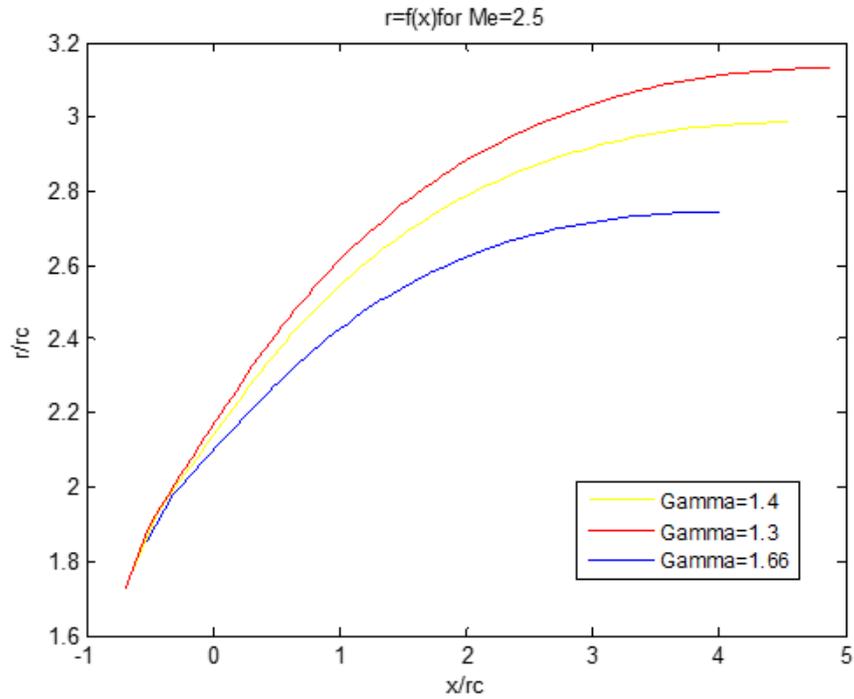


Figure 4.19 : Allure du Corps Central pour $Me=2.5$

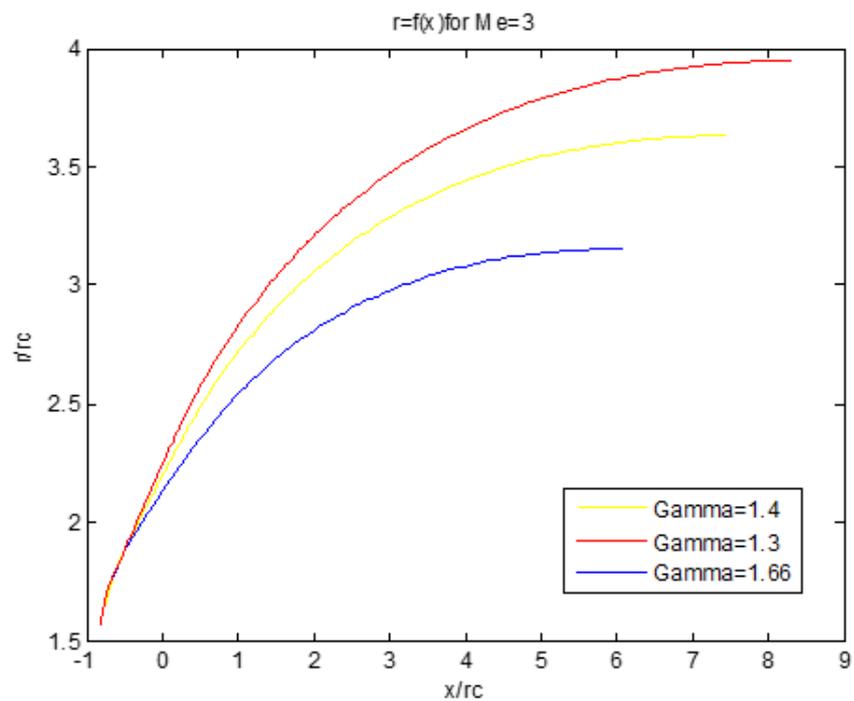


Figure 4.20 : Allure du Corps Central pour $Me=3.0$

Les courbes montrent aussi, que si on veut concevoir des tuyères pour les moteurs de fusées ayant la plus petite longueur et par conséquent la petite masse possible, il est nécessaire de choisir un gaz ayant un rapport γ le plus grand possible.

4.2. Les tuyères de plus de Mach 3.5

Notons qu'à partir de $M_e > 3.2$, la composante radiale des derniers points des caractéristiques C- se met à diminuer (pente négative) donnant l'impression d'un flux en recirculation, qui génère une focalisation des caractéristiques. Cette situation nuit au calcul du contour dont l'erreur atteint plus de 5% à $M_e = 3.5$; ce qui n'est pas acceptable en aérodynamique.

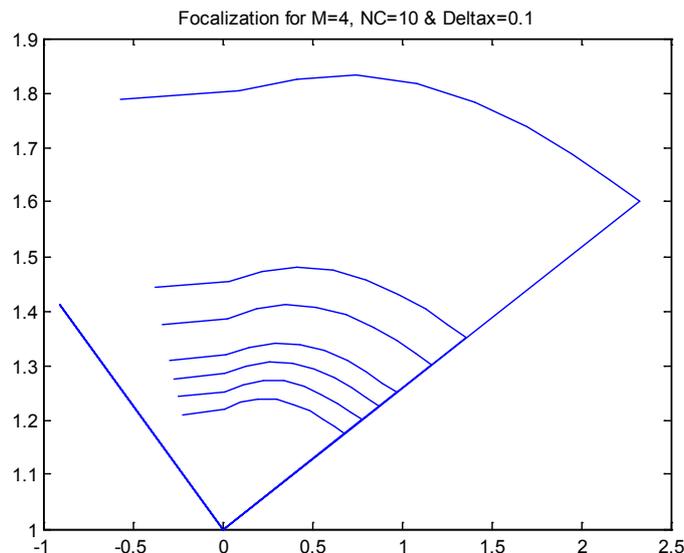


Figure 4.21 : Recirculation des caractéristiques

Dès le premier point d'une focalisation, la méthode des caractéristiques ne converge plus. C'est pour cela, que nous n'arrivons pas à schématiser un exemple comportant des focalisations. L'utilisation des alternatives mathématiques, respectant la méthode des caractéristiques dont l'objectif est de remédier et récupérer la solution, s'il s'agit d'une viscosité artificielle de calcul, restait infructueuse.

Ce comportement du flux n'a que deux interprétations physiques, soit la naissance des ondes de choc obliques ou d'une couche de cisaillement séparant le flux de la paroi et créant une zone de recirculation. La deuxième hypothèse paraît la plus probable du fait qu'elle rappelle la notion de l'angle maximal de la déviation de l'écoulement expliquée dans Chap.2.1.2. Les paramètres de température, pression et de la vitesse connaîtront des discontinuités, les parois résultantes ne seront plus exactes, elles soient compressées ou décompressées.

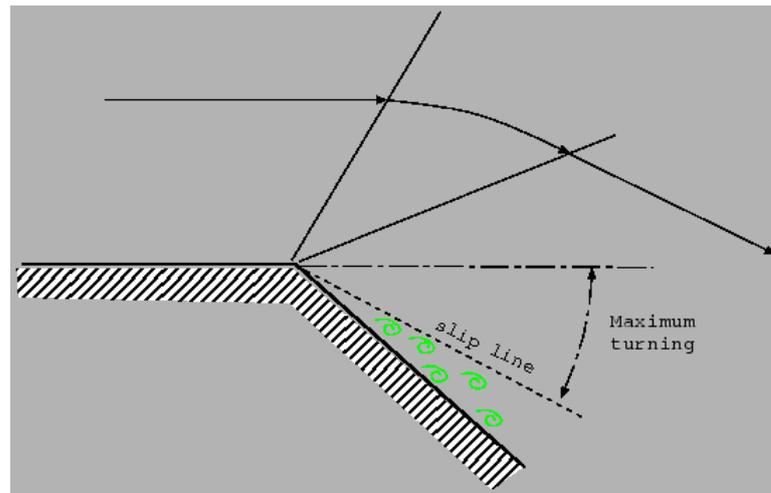


Figure 4.22 : L'angle maximal de déviation de Prandtl-Meyer

Rappelant que l'angle maximal de déviation d'un écoulement dans un processus de détente de Prandtl-Meyer avoisine 130° , qui ne correspond pas au notre cas du $M_e > 3.2$, mais il est nécessaire de noter que ce développement est fait pour un écoulement bidimensionnelle conformément à la relation (2.2), néanmoins qu'il est théorique.

Le MLN axisymétrique peut connaître ce phénomène qu'au Mach avoisinant 13, étant donné que son angle de détente est moins d'un quart (1/4) du celui du Plug Nozzle Axisymétrique.

Ci-dessous quelques exemples de tuyères pour des Mach de plus de 3.5, où nous observons l'absence des lignes caractéristiques au voisinage des Teta élevés avec des focalisations et discontinuités des isolines, engendrant des parois erronées (compressées) et non lisses.

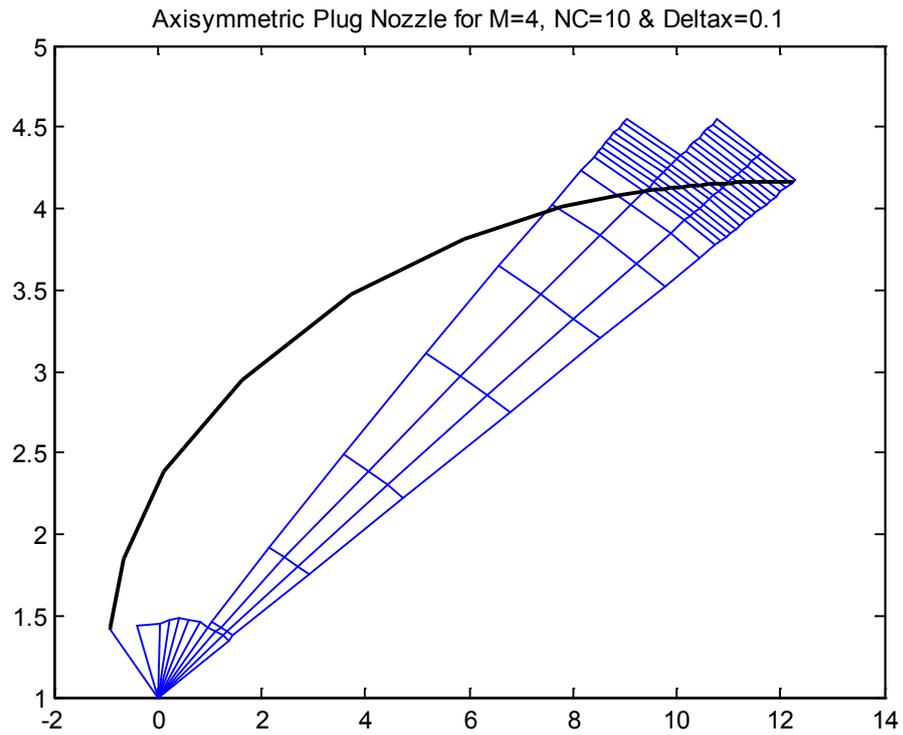


Figure 4.23 : Allure d'une tuyère pour $M_e=4$

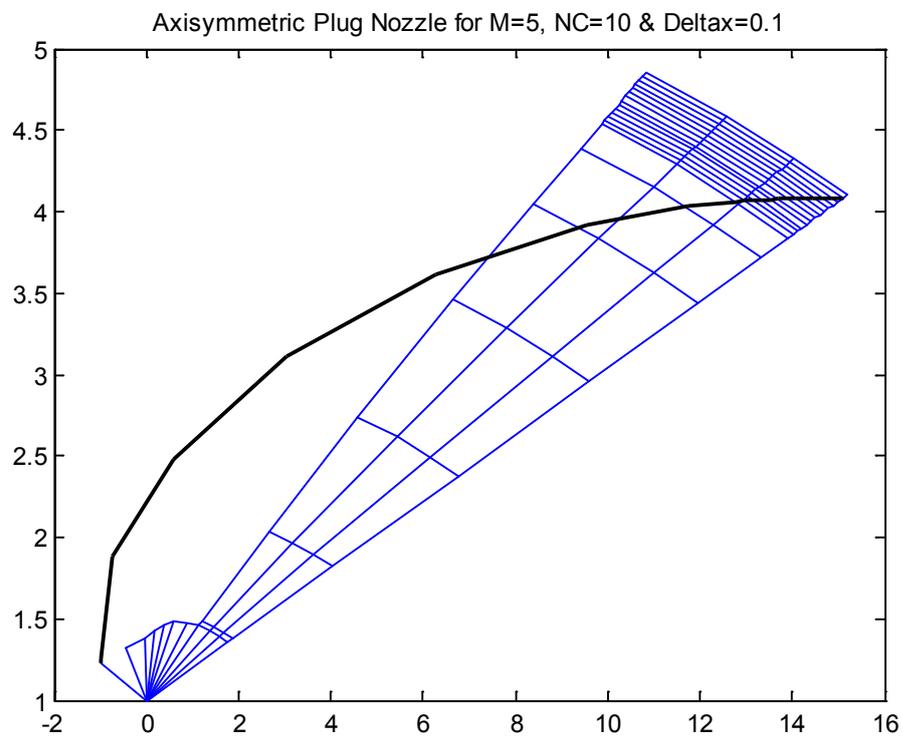


Figure 4.24 : Allure d'une tuyère pour $M_e=5$

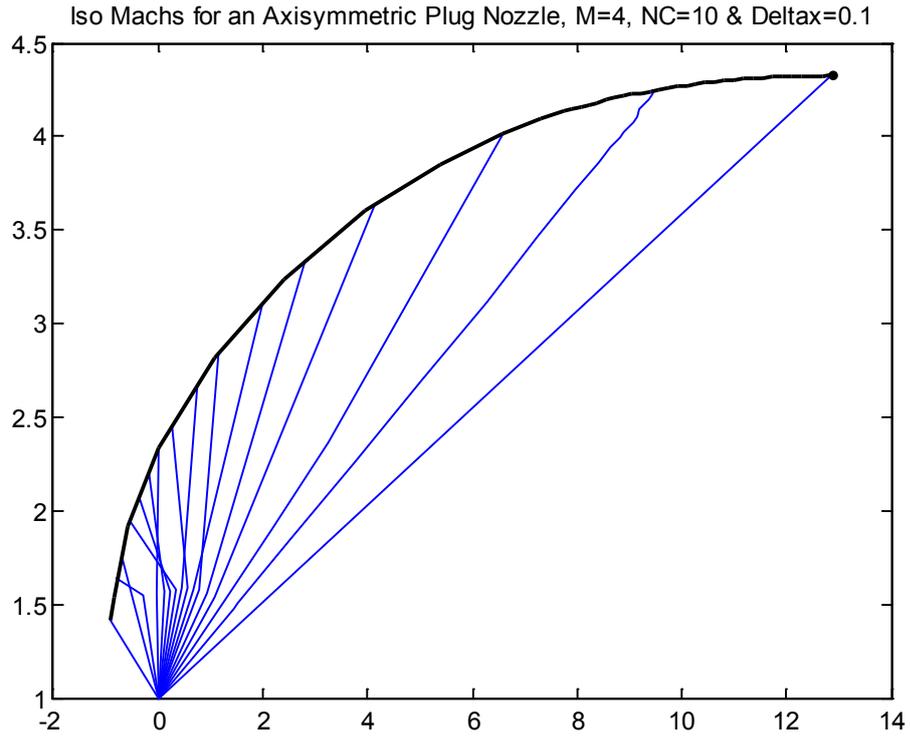


Figure 4.25 : Iso Mach pour $M_e=4$, $NC=10$ & $\Delta x=0.1$

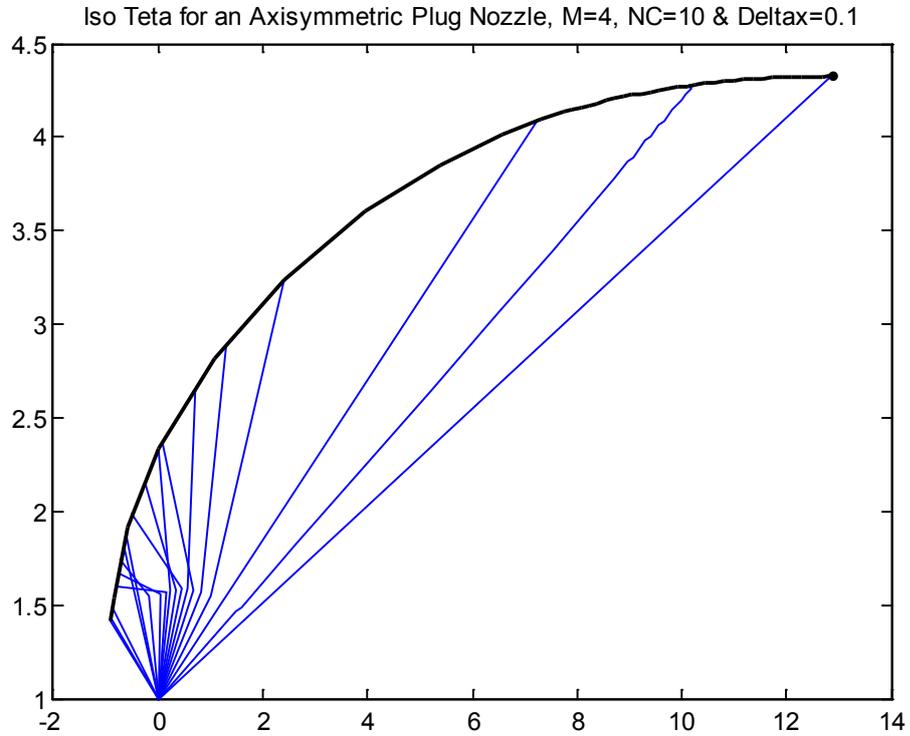


Figure 4.26 : Iso Theta pour $M_e=4$, $NC=10$ & $\Delta x=0.1$

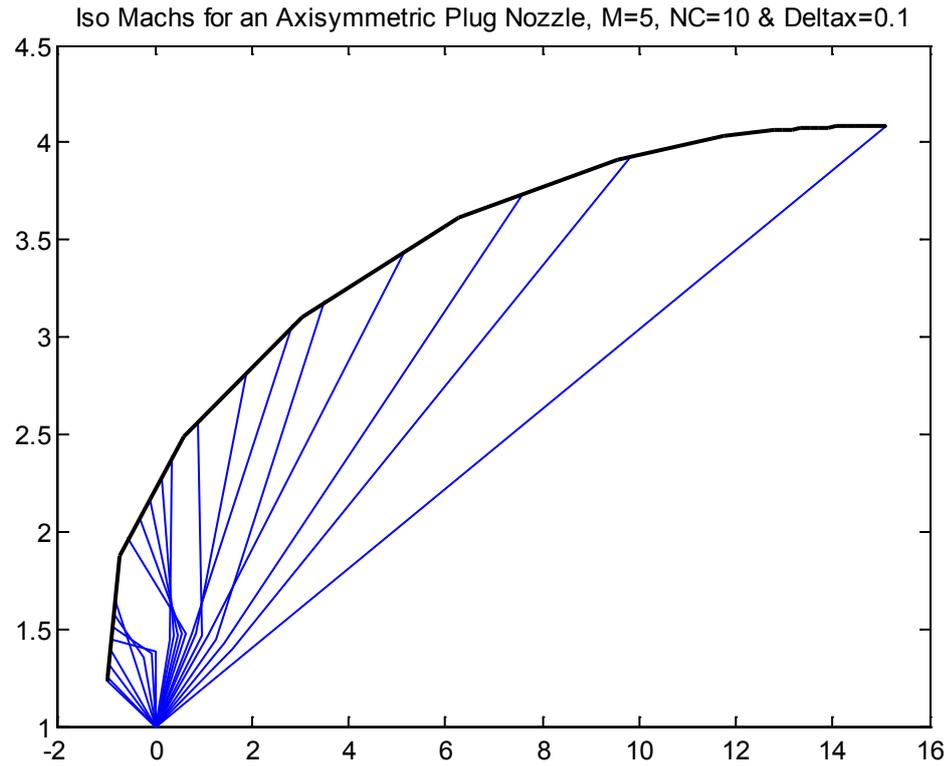


Figure 4.27 : Iso Mach pour $M_e=5$, $NC=10$ & $\Delta x=0.1$

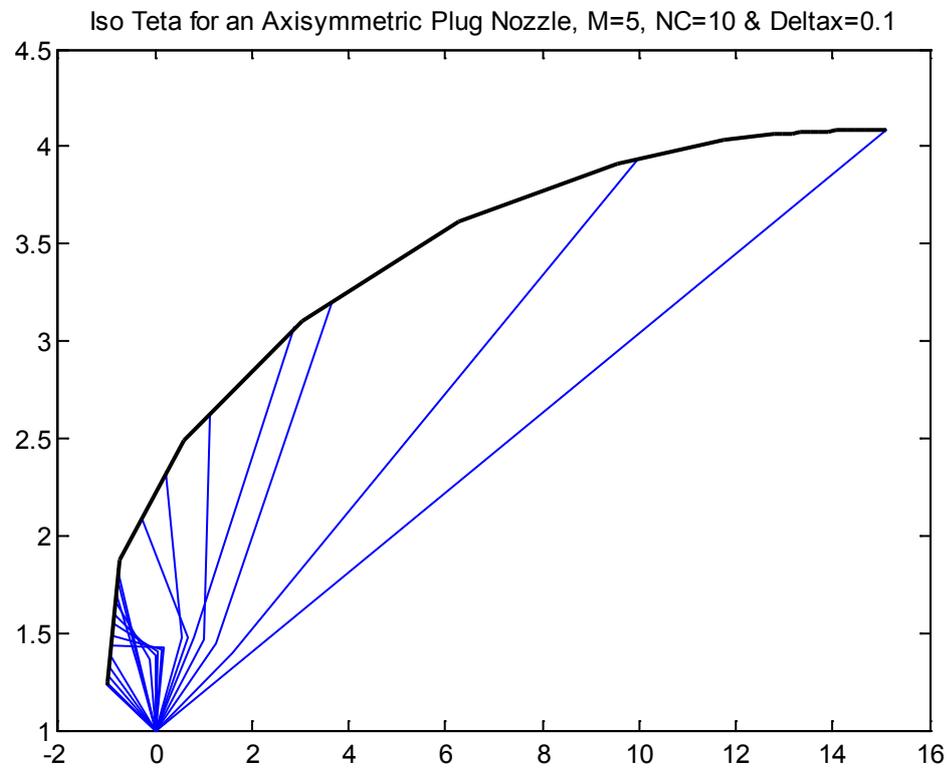


Figure 4.28 : Iso Theta pour $M_e=5$, $NC=10$ & $\Delta x=0.1$

4.3. Développement du rapport des sections géométrique

Contrairement aux autres types de tuyères (sauf la conique), ce modèle ne vérifie pas la propriété de vérification de la conservation du débit à la section perpendiculaire de sortie.

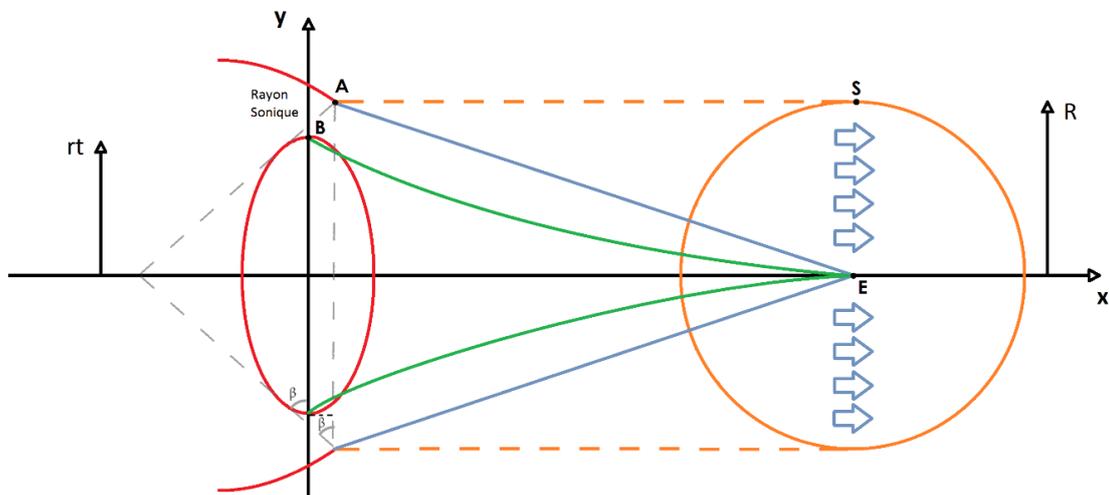


Figure 4.29 : Démonstration des sections d'entrée et sortie

Selon la forme de la zone de détente qui comporte une portion uniforme, et une autre de réseau des caractéristiques sans une région du Kernel, les filets d'air du même débit parcourent diverses distances dans une même durée, formant à la sortie un cône de Mach uniforme (Me), le schéma ci-dessous explique ce phénomène.

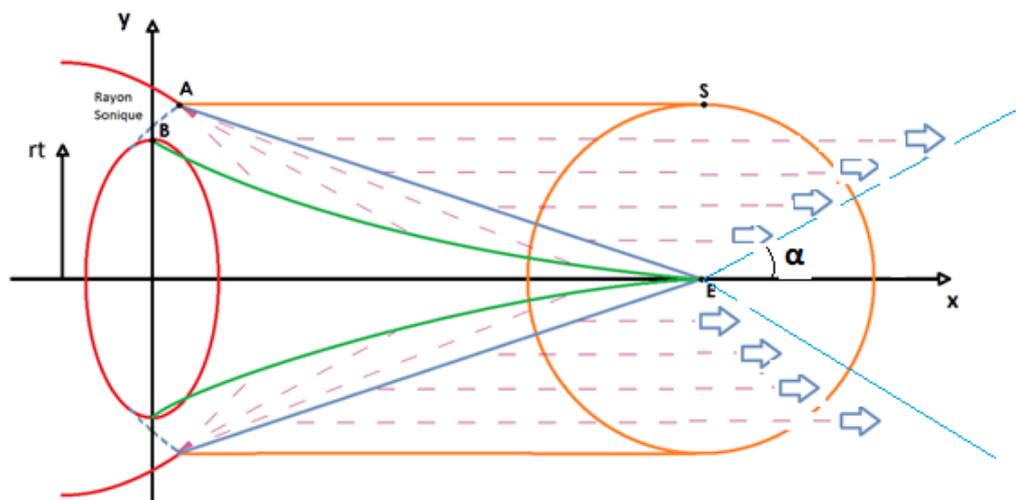


Figure 4.30 : Démonstration de la section de sortie réelle

La surface de ce cône est : $S_{cône} = \pi R^2 / \sin \alpha$

Mais devant l'incapacité de définir une formule générale pour l'angle de déviation α pour l'ensemble de la gamme du Mach, une autre formule trouvée satisfaisant le besoin est adoptée :

$$S_{cône} = \pi R^2 (1.06 \tan(\nu_e + \mu_e))$$

Sachant que μ_e est l'angle de Mach de sortie M_e , et ν_e l'angle de Prandtl-Mayer correspondant à ce Mach.

Pour $M_e = 3$, l'angle $\alpha = 21.0889^\circ$ comme $\sin \alpha = 1 / (1.06 * \tan(\nu_e + \mu_e))$.

La surface du col qu'est de forme d'un cône tronqué, est donnée par :

$$S_{col} = \pi(R + rt)$$

D'où, le rapport de sections géométrique sera égale à :

$$R_{sg} = \frac{R^2 (1.06 \tan(\nu_e + \mu_e))}{R + rt}$$

Ce rapport de sections est utilisé dans les tableaux précédents (4.1, 2 & 3) pour normaliser les calculs par rapport au rapport de sections isentropique.

4.4. Comportement d'adaptation avec l'altitude

Admettant l'approche physique du cône de détente expliquée ci-dessus, les premières ondes de chocs (A) responsables au décollement ne peuvent plus exister, laissant directement la place aux ondes réfléchies (B) (Chap 1.3), le premier disque de Mach sera attaché au pointu de la tuyère. Ce nouveau phénomène, va améliorer la résistance de la couche limite au décollement, atténuant la naissance des charges latérales.

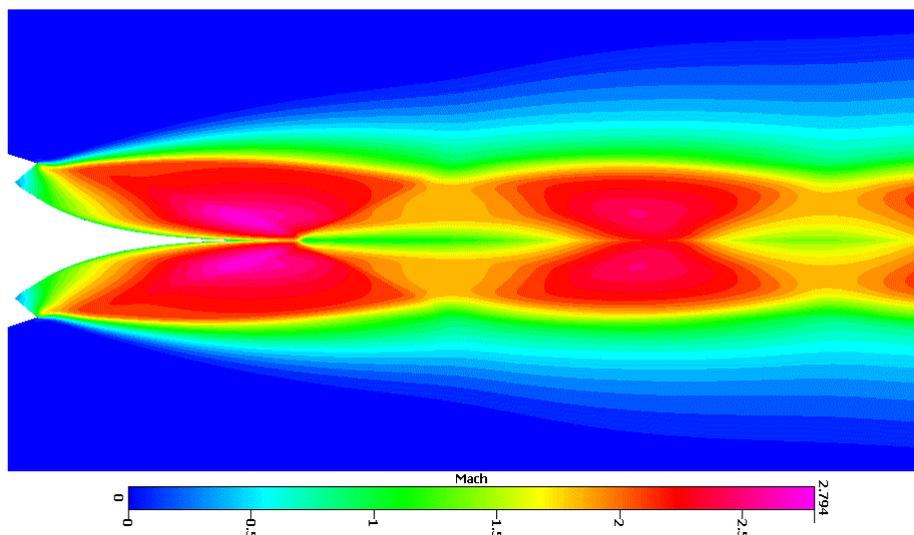


Figure 4.31 : Simulation du flux au régime de sur-détente (NPR=15)

Le schéma ci-dessus montre bien le cône de détente, attachant en son centre les ondes de détente (B), ainsi que le disque du Mach. Après cette compression, l'écoulement continuera sa course de détente-compression conformément au processus habituel de sur-détente (Chap. 1.3).

En sous détente, un fan d'expansion sera créé au pointu de la tuyère accélérant encore le flux. Mais dans la simulation ci-dessous, ce phénomène commence avant le point d'adaptation, qui conferte en plus notre tuyère, des Mach plus grands que celui préconisé de trois ($M_e=3$) voient le jour.

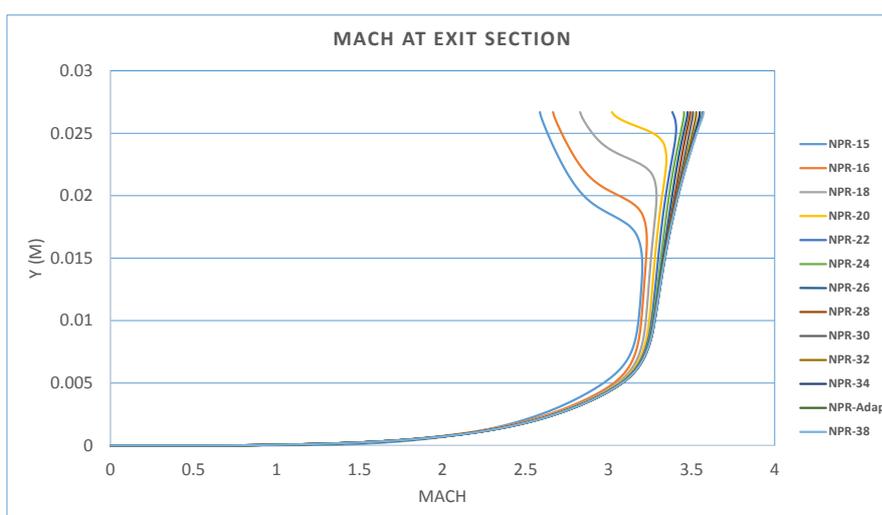


Figure 4.32 : Calcul du Mach à la section perpendiculaire de sortie pour différents NPR

4.5. Comparaison avec d'autres configurations étudiées

Afin de comparer notre tuyère objet du développement, nous avons conçu trois autres modèles, à savoir : même type bidimensionnel et modèle alternatif MLN bidimensionnel et axisymétrique.

1. Plug Nozzle 2D :

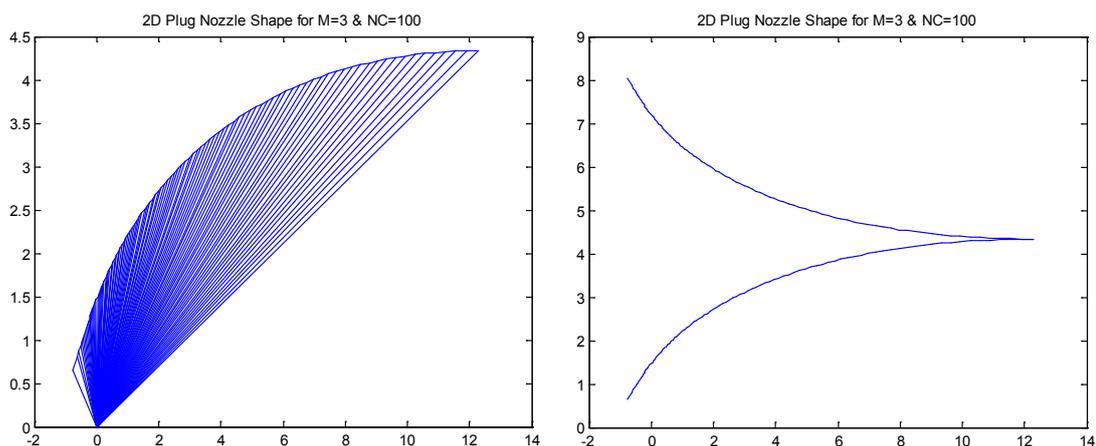


Figure 4.33 : Allure du Corps Central 2D pour $M_e=3.0$

2. MLN 2D :

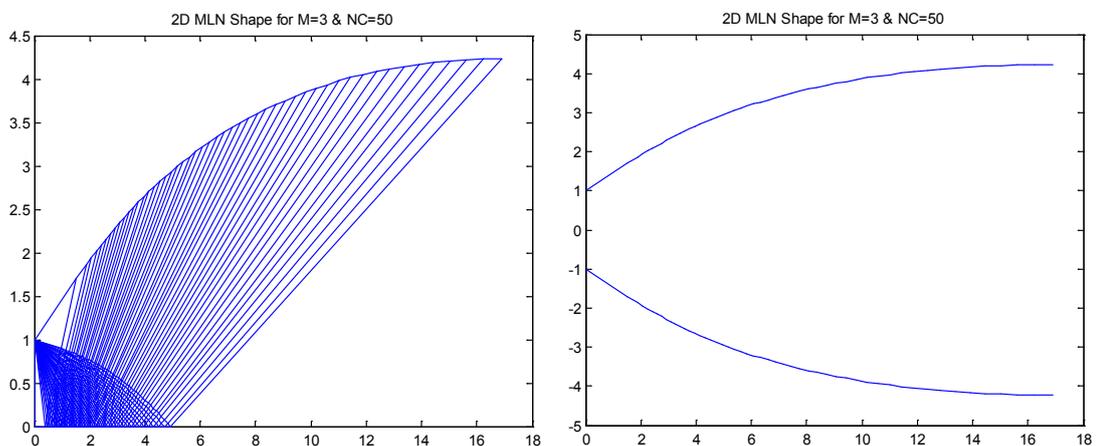


Figure 4.34 : Allure du MLN 2D pour $M_e=3.0$

3. MLN Axisymétrique :

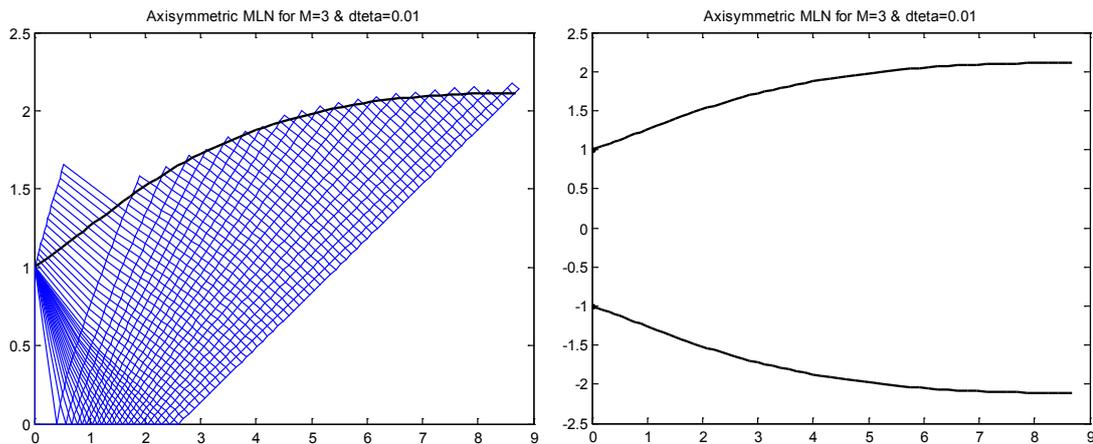


Figure 4.35 : Allure du MLN axisymétrique pour $M_e=3.0$

4.5.1. Comparaison par rapport au même rayon sonique

Dans le tableau suivant, sont présentés les paramètres principaux du dimensionnement de différentes tuyères résultant d'une comparaison par rapport au même Mach de sortie ($M_e = 3.0$) et rayon sonique d'entrée.

Tableau 4.4 : Comparaison par rapport au même rayon sonique

Type Tuyère	Plug Nozzle Axisy	Plug Nozzle 2D	Gain (%)	MLN Axisy	Gain (%)	MLN 2D	Gain (%)
L	8.3123	12.7014	52.802	8.6687	4.111	16.8896	103.188
H	2.6693	4.2212	58.139	2.1106	-26.471	4.2314	58.896
C_{masse}	11.6246	13.5978	16.974	31.2599	168.912	17.3669	49.398
C_{force}	0.3970	0.7460	87.909	0.2904	-36.708	0.2970	-33.67
$F * e6$	21.388	2.9093	635.16	4.5591	369.128	2.9039	635.16

On remarque clairement le gain de plus de 50% en géométrie (longueur et hauteur) par rapport au Plug bidimensionnelle, et encore plus de 103 % en longueur par rapport au MLN bidimensionnelle.

Mais devant un MLN axisymétrique, ce gain devient faible, contrairement à son coefficient de masse qui voit une nette amélioration de 169%.

Le plus grand progrès est dans la poussée, qui devient 7.36527 fois par rapport aux bidimensionnelles, et 4.69128 fois par rapport au MLN axisymétrique. Cette amélioration est due à la surface du col d'entrée.

Notons que les tuyères Plug sont favorisées par rapport aux MLN par le montage convergent de leurs parois, cela contribue à la suppression de la région de Kernel, ainsi qu'à l'autorisation d'un angle incliné de détente qui sera au minimum le double de celui du MLN, ces deux facteurs faisant la détente plus directe et intensive.

Ainsi, les tuyères axisymétriques sont avantagées par le rendement aérodynamique de leur flux tridimensionnel comparant au bidimensionnel.

Ci-après un schéma des parois des quatre tuyères correspondantes au tableau 4.4.

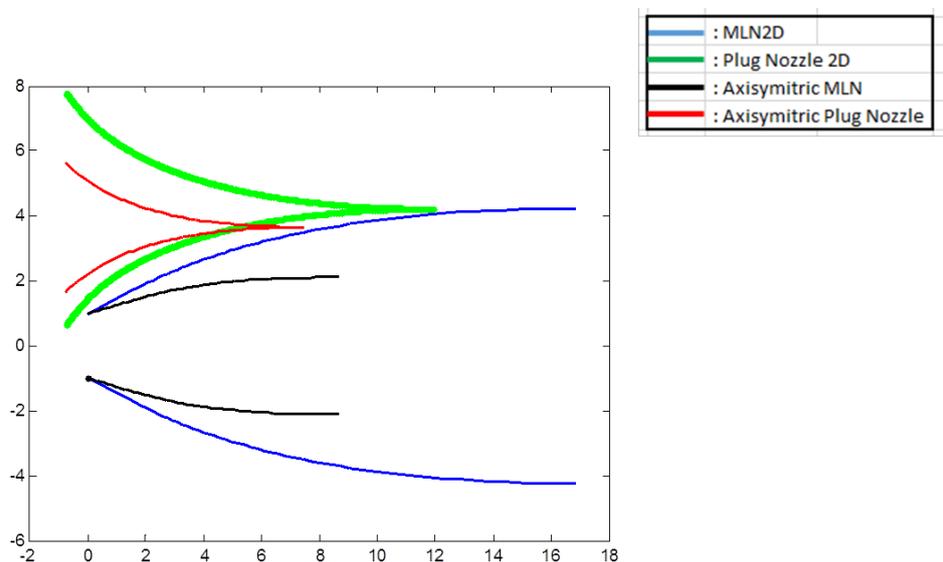


Figure 4.36 : Les différentes parois des tuyères comparées dans le tableau 4.4

4.5.2. Comparaison par rapport à la même poussée

De ce qui précède, il s'avère que le vrai exploit de cette tuyère est tiré de la forme conique de son col d'entrée qui permet d'augmenter le débit où la poussée pour même rayon sonique et conditions génératrices. En plus, cette forme sert l'intégration des parts technologiques à son interne.

Tableau 4.5 : Comparaison par rapport à la même poussée

Type Tuyère	Plug Nozzle Axisy	Plug Nozzle 2D	Gain (%)	MLN Axisy	Gain (%)	MLN 2D	Gain (%)
L	8.3123	93.5492	1025.4	40.6675	389.245	124.396	1396.5
H	2.6693	31.0903	1064.7	9.9014	270.936	31.1654	1067.5
C _{masse}	11.6246	13.5978	16.974	31.2599	168.912	17.3669	49.398
C _{force}	0.3970	0.7460	87.909	0.2904	-36.708	0.2970	-33.67
F *e6	21.388	21.388	0	21.388	0	21.388	0

On remarque clairement les gains surprenants de plus de dix (10) fois en longueur, hauteur et masse par rapport aux tuyères bidimensionnelles, et largement plus de trois (03) fois en longueur par rapport au MLN axisymétrique.

Cette grande propriété permet le lancement d'un seul étage SSTO (Single Stage To Orbit) plus performant et moins encombrant, avec des charges plus lourdes (better payload-to-weight ratio), ou à une altitude plus haute ou distance plus longue.

Ci-après un schéma des parois des quatre tuyères comparées dans la figure suivante.

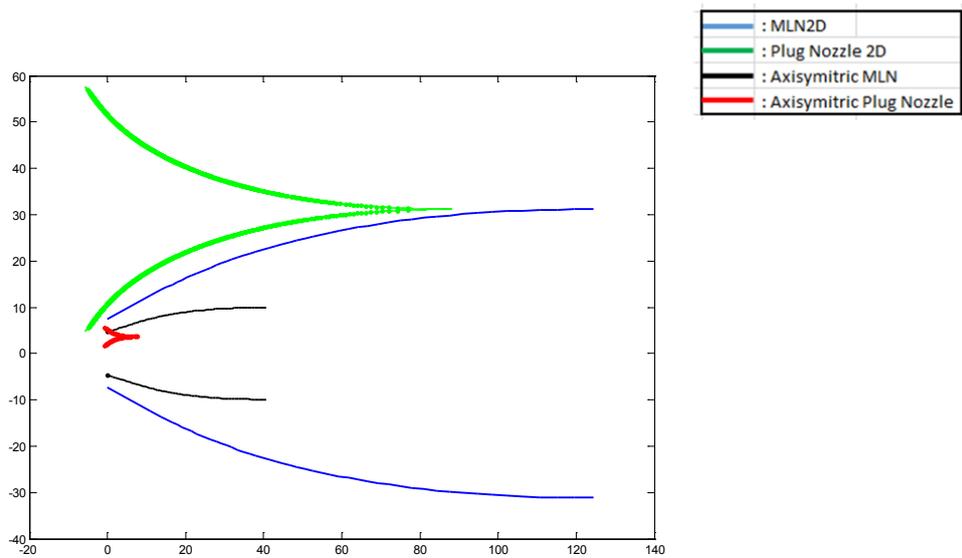


Figure 4.37 : Les différentes parois des tuyères comparées dans le tableau 4.5

4.5.3. Comparaison d'un Aérospike

Dans ce paragraphe, une comparaison d'un Aérospike de $Me=2$ dérivé d'une troncation d'une tuyère $Me=3$ avec d'autre Plug complet de $Me=2$ est présentée.

Tableau 4.6 : Comparaison des performances d'Aérospike

Type Tuyère	Aérospike ($Me=2$)	Axisy Plug Nozzle ($Me = 2$)	Gain (%)
L	1.9812	3.0534	54.119
H	2.6693	1.5064	-43.566
C_{masse}	2.4147	6.8540	183.845
C_{force}	0.3150	0.3858	22.476
$F * e6$	17.792	8.0275	121.638

Les résultats montrent la diminution nette en longueur à plus de 54% et presque 184% en masse, où la poussée vient de doubler par plus de 121% d'amélioration. Et cela sans compter l'effet propulsif de la pointe aérodynamique et la poussée additionnelle qui peuvent même dépasser toutes performances d'une tuyère non tronquée ($M_e=3$).

Donc, un double gain enregistré en longueur et force de propulsion, sans oublier son avantage initial similairement à sa famille des Plugs par rapport aux tuyères classiques.

Ces résultats montrent bien la place importante que va jouer l'aérospike dans le futur de l'industrie aérospatiale.

Ci-après un schéma des parois de deux tuyères comparées dans le tableau 4.6 dans la figure suivante.

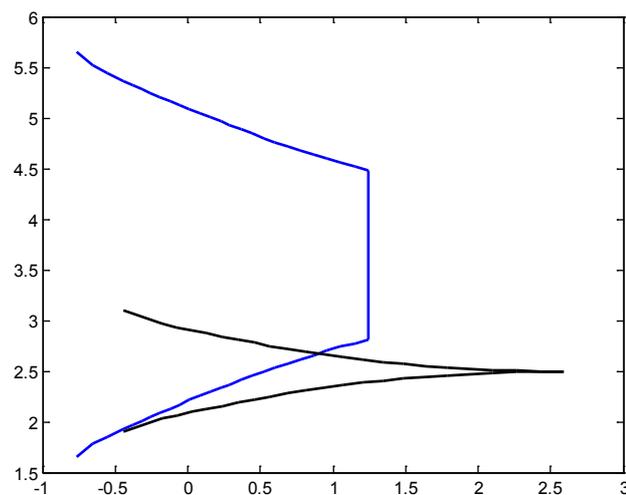


Figure 4.38 : Les différentes parois des tuyères comparées dans le tableau 4.6

Conclusion et Perspectives

En conclusion, nous sommes arrivés à la conception de la tuyère authentique dite « Corps Central Extérieur Axisymétrique » par la méthode des caractéristiques décrites par Anderson et les back-wards et la fonction du courant de Shapiro. Ainsi, nous avons illustré l'amélioration des paramètres aérodynamiques, propulsifs et géométriques de ce modèle par rapport au modèle de même type bidimensionnel et au modèle alternatif MLN bidimensionnel et axisymétrique. Ce progrès est due principalement à sa forme de détente, taille et l'angle élevé de détente du col, ainsi à la suppression de la région de Kernel.

Pour un même rayon sonique (paramétrage géométrique), notre tuyère peut délivrer une force de poussée équivalente à 7.3 fois celles des tuyères bidimensionnelles et de 4.7 fois celle du MLN axisymétrique. Cet avantage conforte notre tuyère d'une géométrie plus faible de dix (10) fois par rapport aux bidimensionnelles et presque quatre (04) fois en longueur au axisymétrique pour une même poussée.

Ce gain de poids et de volume, sans oublier l'avantage d'intégration de plusieurs compartiments dans son corps, montre l'apport, dans un futur proche, des tuyères à corps central, et spécialement les aérospike dans de la conception des lanceurs d'un seul étage (Single Stage To Orbit SSTO) et des navettes spatiales (X-33), qui seront ainsi plus performants.

Aussi, l'adaptation avec l'altitude est fortement améliorée. A basse altitude, le cône de détente créé empêche l'apparition des ondes de choc obliques (A) responsables principales du décollement de la couche limite. En sous-détente, des ondes de détente se créent accélérant le flux et restreignant la dilatation de sa plume. Cet exceptionnel cône de détente a conduit à la définition d'un nouveau rapport des sections géométrique.

La conception des tuyères pour des Mach de plus de 3.5 nous a fait découvrir l'existence d'une limite pour l'angle de déviation (Teta) en flux axisymétrique, autre que celle connu en bidimensionnelle.

Pour enrichir cet axe de recherche, citons quelques propositions de développement du présent travail :

Une étude et des simulations approfondies sur la naissance des charges latérales pour des NPR plus bas, et du comportement du flux à la base du corps central tronqué (Aérospike). Nous comprendrons ainsi la nature des phénomènes de déformation du flux à des Mach supérieurs à 3.5, s'agit-il de la séparation du flux ou de la naissance d'ondes de choc obliques.

Une réflexion sur une solution pour décaler la limite de la conception de la dite tuyère au-delà des Mach équivalent au 3.5.

L'utilisation du modèle Gaz Parfait pour la conception des tuyères supersoniques ne montre pas les paramètres réels de conception. Si la température ou la pression génératrice de la chambre de combustion augmentent, les chaleurs spécifiques, le covolume et les forces intermoléculaires augmentent aussi et les gaz commencent à mal se détendre. La prise du modèle de haute température ou de gaz réel dans les prochaines études paraît intéressante.

Les modèles proposés peuvent être également couplés au modèle d'énergie cinétique chimique, en prenant en considération les réactions chimiques incomplètes ou de re-combustion.

Aussi, à considérer l'intégration du calcul de la zone transsonique auprès du col pour le cas d'une ligne sonique courbé, cas le plus courant.

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A	: Aire d'une section.
M	: Nombre de Mach.
V	: Vitesse de l'écoulement.
a	: Célérité du son.
P	: Pression.
T	: Température.
ρ	: La masse volumique.
\dot{m}	: Débit massique.
R	: Constante thermodynamique de l'air.
γ	: Rapport des chaleurs spécifiques.
ν	: Fonction de Prandtl-Meyer.
μ	: Angle de Mach.
θ	: Déviation du vecteur vitesse.
ψ	: Déviation de la carène par rapport à la verticale.
F	: Force de poussée.
C_f	: Coefficient de poussée.
C_{force}	: Coefficient de la force de pression.
F_x	: Force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère.
σ	: Coefficient d'interpolation de la pression P .
C_{masse}	: Coefficient de la masse de la structure de la tuyère.
ρ_m	: Masse volumique du matériau de la structure de la tuyère.
t_m	: Épaisseur du matériau de la structure de la tuyère.
x	: Abscisse d'un point.
r	: Ordonnée radiale d'un point dans un système axisymétrique.
y	: Ordonnée d'un point dans un système bidimensionnel.
r_c, y_c	: Rayon sonique.
u, v	: Composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.
L	: Longueur de la tuyère.
x_{plug}	: Abscisse du dernier point de la tuyère à corps central.
S	: Longueur curviligne suivant le segment d'une courbe iso-valeur.

- N_c : Nombre des caractéristiques descendantes.
- ξ, η : Lignes de Mach descendante et montante respectivement.
- Δx : Pas non-dimensionnel ($\Delta x/y^*$) pour le calcul dans la région de transition.
- C_q : Coefficient de l'interpolation d'une propriété d'un point.
- ε : Tolérance de calcul.

Abréviations :

- GP* : Gaz parfait.
- MLN* : Abréviations du terme Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée).
- $C+$: Caractéristique montante.
- $C-$: Caractéristique descendante.
- PM* : Prandtl-Meyer.

Indices :

- 0 : Condition génératrice.
- *
- c : Condition critique.
- e : Condition à la sortie.
- (i) : Tronçon.
- i : Nœud.

REFERENCES

1. D. R. Kirk, "MAE 4262: Rockets and Mission Analysis", Mechanical and Aerospace Engineering Department Florida Institute of Technology, (2012).
2. Philippe REIJASSE, "Aérodynamique des tuyères supersoniques", ONERA - Centre de Meudon, (2007).
3. A. Haddad, "Supersonic Nozzle design for arbitrary cross-section", Canfield Institute of Technology, 1988.
4. Anderson, J.D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics", second edition 1998, McGraw-Hill Book, Company, New York, USA.
5. Anderson, J.D., "Modern Compressible Flow with Historical Perspective", Second edition, 1992, McGraw-Hill Book, Company, New York, USA.
6. Rhyning, I.L., "Dynamique des fluides", Press polytechnique Romandes, Lauanne, Suisse, 1984.
7. Zebbiche, T., "Conception et Dimensionnement des tuyères supersoniques Haute Température de Propulsion," Thèse de Doctorat, Département d'Aéronautique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de Blida 1, Algérie, 2006.
8. Richard, N., "Theory of Rockets Motors", Journal of aeronautics, 2008.
9. Greer H., "Rapid Method for Plug Nozzle Design," ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP.560-561, 1961.
10. Rao G. V. R., "Spike Nozzle Contour for Optimum Thrust", Ballistic Missile and Space Technology; edited by C. W. Morrow, Vol. 2, Pergamon Press, New York, PP. 92-101, 1961.
11. C. C. Lee, Technical Note R-61 "Computation of Plug Nozzle Contours by the Rao Optimum Thrust Method", Scientific Research Laboratories Brown Engineering Company INC HUNTSVILLE, ALABAMA, July 1963.

12. C. C. Lee, Technical Note R-41 "Fortran Programs for Plug Nozzle Design" Scientific Research Laboratories Brown Engineering Company INC HUNTSVILLE, ALABAMA, March 1963.
13. T. L. Deyound, "A Simplified Method for Plug Nozzle Design", Technical Memorandum No. 140, July, 1960
14. Angelino G., "Approximate Method for Plug Nozzle Design," AIAA Journal, Vol. 2, N° 10, PP. 1834-1835, 1964.
15. Kraiko A. N., Tillyayeva N. I. and Baftalovski S. V., "Optimal Design of Plug Nozzle and Their Thrust Determination at Start," Journal of Propulsion and Power, Vol. 17, N° 6, 2001, PP. 1347-1352.
16. J. J. Korte, A. O. Salas, H. J. Dunn, and N. M. Alexandrov Langley Research Center, Hampton, Virginia W. W. Follett, G. E. Orient, and A. H. Hadid Rocketdyne Division of Boeing North American, Inc., Canoga Park, California NASA Technical Memorandum 110326 Multidisciplinary Approach to Aerospike Nozzle Design, National Aeronautics and Space Administration Langley Research Center Hampton, Virginia 23681-0001, February 1997.
17. Higdon K. and Landrum D., "Analysis of Annular Plug Nozzle Performance and TVC," AIAA-1999-3211, AIAA-2003-4908, 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Huntsville, Alabama, July 20-23, 2003.
18. Menko E. N., Wisse M. E. N. and Bannink J. W., "Trailing-Edge Cavity Afterbodies for Linear Plug Nozzle Engines," AIAA Journal, Vol. 41, N°9, PP. 1715-1721, 2003.
19. Rommel T., Hagemann G., Schley C. A. and all., "Plug Nozzle Flowfield Analysis," Journal of Propulsion and Power, Vol. 13, N° 5, PP. 629-634, 1997.
20. Marsilio R., "Numerical Simulation for Plug Nozzle Flow Field," AIAA-2001-670, 39th AIAA Aerospace Meeting and Exhibit, Reno Hilton, Reno, Nevada, 8-11 Jan. 2001.
21. Francesco N. and Onofri M., "Theoretical Analysis and Engineering Modeling of Flowfields in Clustered Modules Plug Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 15, N° 4, 1999, PP. 544-551.
22. Hagemann G., Immich H. and Terhardt M., "Flow Phenomena in Advanced Rocket Nozzles - The plug nozzle," AIAA-1998-3522, 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland, OH, July 13-15, 1998.
23. Gerald H., Hans L., Thong V. N. and Gennady E. D., "Advanced Rocket Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 3, 1998, PP. 318-326.

24. Rao G. V. R., "Recent Development in Rocket Nozzle Configuration", ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 1488-1494, 1961
25. Balasaygun, Eray, "Experimental Analysis of Plug Nozzles", department of Mechanical Engineering, The University of Arizona, 1964.
26. C.C. Lee, S.J. Inman, Technical Note R-101 "Numerical Analysis of Plug by the Method of Characteristics", Scientific Research Laboratories Brown Engineering company INC Huntsville, Alabama, MAY 1964.
27. Eric Besnard*, Hsun Hu Chen†, Tom Mueller‡ "Design, Manufacturing and Test of a Plug Nozzle Rocket Engine" AIAA-02-4038, Mechanical and Aerospace Engineering Department California State University, Long Beach John Garvey, Spacecraft Corporation Huntington Beach, CA.
28. Takashi I., Fujii K. and Hayashi A. K., "Computations of Axisymmetric Plug-Nozzle Flow fields: Flow Structures and Thrust Performance," AIAA Journal of Propulsion and Power, Vol. 18, N° 2, PP. 254-260, 2002.
29. Takashi I. and Fujii K., "Numerical Investigations of the Base-Flow Characteristics of Axisymmetric Aerospike Nozzles," Transactions of the Japan Society for Aeronautical and space Sciences, Vol. 45, N° 148, PP. 108-115, 2002.
30. Manolo Pires, "Turbulence Modeling and Applications to Aerospike Plug Nozzle" Instituto Militar de Engenharia PçaGen. Rio de Janeiro Brazil.
31. Thomas J. Mueller, Wayne P. Sule, Arthur E. Fanning, Thomas V. Giel and Fred L. Galanga, "Analytical and Experimental Study of Axisymmetric Truncated Plug Nozzle Flow Fields" Final Report UNDAS TN-601-FR-10, Prepared under Contract No. NAS 8-25601 by University of Notre Dame, Indiana for National Aeronautics and Space Administration, September 1972.
32. A. H. Shapiro, "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1 & 2 The Ronald Press Company, New York, 1953, 1954.
33. Georing M., "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA1990-2024, 26th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Orlando, Florida, July 16-18, 1990.
34. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September 1988.

35. Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
36. Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, 1986.
37. 'Cours de Géométrie Théorique', livre VII, bibliothèque d'enseignement polytechnique, Imprimerie Montentont, Bondy, Seine, 3ème Trimestre 52, N°8, 1952.
38. Berger M., "Géométrie : Convexes et Poly topes, Polyèdres réguliers, aires et Volumes," Tome 3, Fernand Nathan, Paris, 1978.

APPENDICE A

Méthode des Caractéristiques

Nous considérons un système de coordonnées cylindriques, comme le montre la figure suivante, les coordonnées cylindriques sont r, ϕ et x qui correspondent respectivement aux composantes vitesses v, w et u .

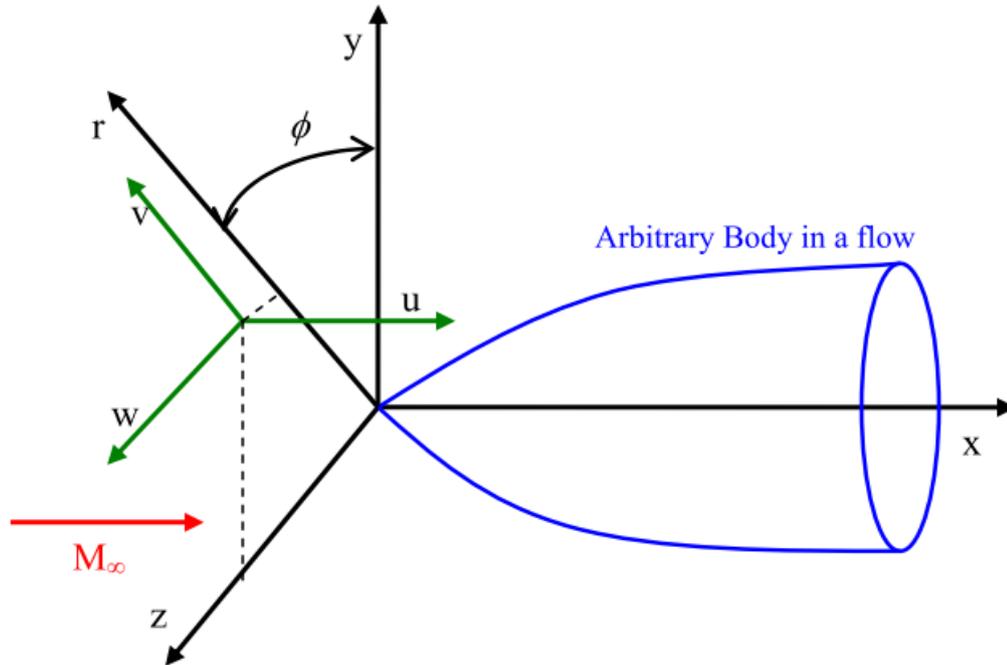


Figure A.1 : Superposition de deux systèmes de coordonnées, cylindrique et cartésien pour un écoulement axisymétrique

L'équation de continuité est :

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Elle devient :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \phi} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Et comme le flux est axisymétrique et irrotationnel, il doit satisfaire : $\partial/\partial\phi = 0$,

L'équation précédente sera simplifiée à :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (\text{A.3})$$

D'après d'Euler, pour un flux irrotationnel, on a :

$$dp = -\rho \vec{V} \cdot d\vec{V} = -\frac{\rho}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) \quad (\text{A.4})$$

Ainsi, la vitesse du son $a = (\partial p / \partial \rho)_s = \partial p / \partial \rho$, avec $w = 0$. Pour un écoulement axisymétrique, L'équation (A.4) devient :

$$dp = -\frac{\rho}{a^2} (u \cdot du + v \cdot dv) \quad (\text{A.5})$$

Du ce qui précède, nous obtiendrons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho}{a^2} \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (\text{A.7})$$

Remplaçons (A.6) et (A.7) dans (A.3), nous obtenons :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r} \quad (\text{A.8})$$

Pour satisfaire la condition d'irrotationalité, il faut :

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Qu'il est possible d'écrire en coordonnées cylindriques :

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} e_r & r e_\phi & e_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) & \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) & \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ v & r w & u \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Pour un flux axisymétrique :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

Remplaçons l'équation (A.11) dans (A.8), nous obtenons :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{uv}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r} \quad (\text{A.12})$$

Nous savons que $u = u(x, r)$ et $v = v(x, r)$, et il est possible d'écrire :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial x} dr \quad (\text{A.13})$$

Et

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial r} dr \quad (\text{A.14})$$

On peut résoudre les trois dernières équations simultanément, pour les trois dérivés $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial r$.

Dans l'objectif de déterminer les lignes des caractéristiques et les équations de compatibilité, $\partial v/\partial x$ doit être fini (petite).

La résolution des équations de (A.12) à (A.14) pour $\partial v/\partial x$ par la méthode de Cramer, donne :

$$\partial v/\partial x = \frac{\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) & -\frac{v}{r} & \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dr \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) & -2\frac{uv}{a^2} & \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \\ dx & dr & 0 \\ 0 & dx & dr \end{vmatrix}} = \frac{N}{D} \quad (\text{A.15})$$

Où N est le numérateur, et D le dénominateur de la solution.

Pour trouver une solution, $\partial v/\partial x$ doit être résolu pour n'importe quelle valeur de dx & dr . Cependant, pour obtenir une solution définie pour $\partial v/\partial x$; dx & dr seront choisis de telle sorte que D ne soit pas égal pas à zéro.

Si dx & dr sont choisis pour que D soit égale à zéro, alors $\partial v/\partial x$ n'est pas défini dans la direction déterminée par dx & dr , Il faut également assumer que $\partial v/\partial x$ est au moins fini, bien qu'il ne soit pas déterminé de manière unique. Une valeur infinie $\partial v/\partial x$ serait physiquement incompatible, avec $\partial v/\partial x$ indéterminé, cela satisfait les deux conditions.

Pour trouver les directions des caractéristiques, on pose $D = 0$, cela donne :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \frac{-uv/a^2 \pm \sqrt{\left[(u^2 + v^2)/a^2\right] - 1}}{1 - (u^2 + v^2/a^2)} \quad (\text{A.16})$$

Cette équation définit les courbes des caractéristiques dans l'espace physique (x, r) . Un examen minutieux montre que le terme intérieur de la racine carrée devient :

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{v^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1 \quad (\text{A.17})$$

Pour cette raison, nous distinguons, si :

1. $M > 1$, il y a deux caractéristiques réelles à travers chaque point du champ d'écoulement.
2. $M = 1$, il est une seule caractéristique réelle pour chaque point de l'écoulement.
3. $M < 1$, les caractéristiques sont imaginaires.

Comme la conception d'une tuyère supersonique est notre sujet, seul le premier cas nous intéresse. Le calcul du champ d'écoulement supersonique sera de l'amont vers l'aval, en supposant que la position du point définissant le col doit être définie par le concepteur, Cela évite la nécessité d'un calcul de l'équation caractéristique dans ce dernier.

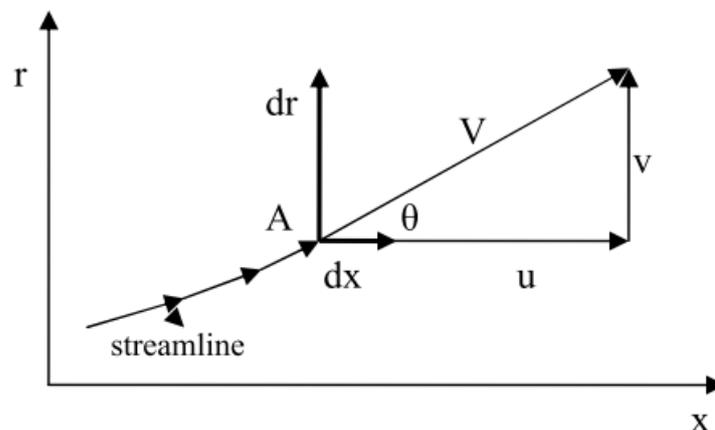


Figure A.2 : Une ligne de courant passant par un point

Considérant un courant comme il est représenté dans la figure précédente (A.2), dans le point A, $u = V \cos \theta$ et $v = V \sin \theta$, en remplaçant ces dernières dans l'équation (A.16), nous aurons :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \frac{\frac{V^2 \cos \theta \sin \theta}{a^2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{a^2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}}{1 - \frac{V^2}{a^2} \cos^2 \theta} \quad (\text{A.18})$$

En appelant par l'angle μ , l'angle de Mach, qu'est donné par $\mu = \sin^{-1}(1/M)$, ou $\sin \mu = 1/M$ et ainsi $V^2/a^2 = M^2 = 1/\sin^2 \mu$, l'équation (A.18) devient :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \frac{\frac{-\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\sin^2 \mu} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} \quad (\text{A.19})$$

De la trigonométrie :

$$\sqrt{\frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\sin^2 \mu} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1} = \sqrt{\csc^2 \mu - 1} = \sqrt{\cot^2 \mu - 1} = \frac{1}{\tan \mu} \quad (\text{A.20})$$

Remplaçant (A.20) dans la (A.19), et après simplification, elle sera équivalente à :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \frac{\frac{-\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \frac{1}{\tan \mu}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} \quad (\text{A.21})$$

Après des manipulations algébriques et trigonométriques, l'équation (A.21) devient :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \mp \mu) \quad (\text{A.22})$$

L'équation précédente montre que pour un flux axisymétrique et irrotationnel, les lignes caractéristiques sont des lignes de Mach pour de petits pas.

Les caractéristiques $C +$ et $C -$ sont montrées dans la figure suivante.

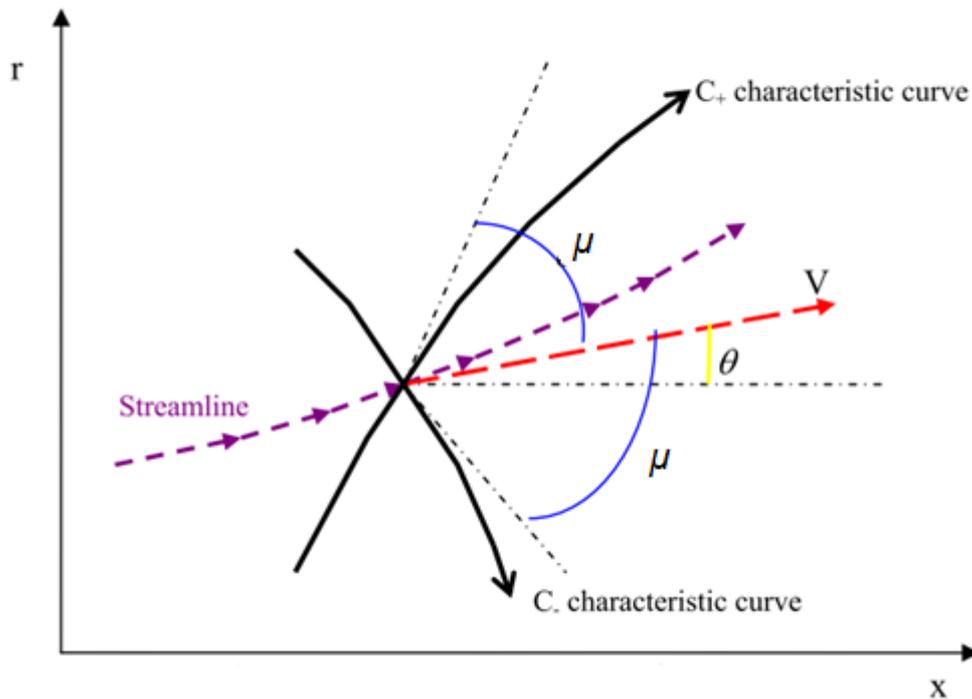


Figure A.3 : Présentation des caractéristiques

Les équations de compatibilité expliquent le comportement du flux le long des courbes des caractéristiques. Elles sont trouvées en fixant $N = 0$ dans l'équation (A.15), le résultat sera les deux possibilités :

$$\frac{dv}{du} = \frac{-\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) - \frac{v}{u} \frac{dx}{du}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{dx}{dr}} \quad (\text{A.23.a})$$

Ou :

$$\frac{dv}{du} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) \frac{dr}{dx} - \frac{v}{r} \frac{dr}{du}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)} \quad (\text{A.23.b})$$

Le terme dr/dx dans l'équation (A.23b) est la direction de la caractéristique donnée par l'équation (A.16), le remplacement de cette dernière dans (A.23b), donne :

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{v^2}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)} - \frac{\frac{v}{r} \frac{dr}{du}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)} \quad (\text{A.24})$$

Référant à la figure (A.2), remplaçons $u = V \cos \theta$ et $v = V \sin \theta$ dans l'équation (A.24), et après manipulations algébriques, nous obtiendrons :

$$d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \mp \cot \theta} \frac{dr}{r} \quad (\text{A.25})$$

Nous savons que le différentiel de Prandtl-Meyer est donné par $d\nu = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$, l'équation (A.25) devient :

$$d(\theta \pm \nu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \mp \cot \theta} \frac{dr}{r} \quad (\text{A.26})$$

On peut diviser cette équation suivant deux caractéristiques C+ et C-, ce qui donnera la forme finale des compatibilités :

$$d(\theta + \nu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} - \cot \theta} \frac{dr}{r} \quad (\text{A.27.a})$$

$$d(\theta - \nu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} + \cot \theta} \frac{dr}{r} \quad (\text{A.27.a})$$

APPENDICE B

