

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

en Mathématiques

NOYAUX ET NOYAUX PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES
DANS LES GRAPHEs ORIENTES

Par

RAMOUL Amina

devant le jury composé de :

N. OUKID	Maître de conférences, U. de Blida 1	Présidente
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida 1	Directeur de thèse
M. ABBAS	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examinatrice
M. CHELLALI	Professeur, U. de Blida 1	Examineur

Blida, Mars 2019

RESUME

Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement à l'étude du concept du noyau dans les graphes orientés et nous étudions la j -indépendance et la p -domination dans un graphe non orienté.

Le concept des noyaux a été introduit par Von Neumann et Morgenstern en 1944, comme une généralisation du concept de solutions pour les jeux coopératifs.

Etant donné un graphe orienté $D = (V, A)$, un sous-ensemble $N \subseteq V$ est un noyau, s'il est indépendant (ses sommets sont non adjacents deux à deux) et absorbant (tout sommet qui n'appartient pas à N a au moins un successeur dans cet ensemble).

Nous commençons par étudier le problème de la caractérisation des graphes non orientés contenant un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant pour deux entiers positifs $p, j \leq \Delta$. Dans un graphe non orienté $G = (V, E)$, un ensemble j -indépendant est un sous-ensemble S de V tel que le degré maximum dans le sous-graphe induit par les sommets de S est au plus $j-1$, et il est p -dominant si pour tout sommet $v \in V \setminus S$, $|N(v) \cap S| \geq p$. Nous caractérisons les arbres T satisfaisant $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ ($\gamma_p(T)$ est le cardinal minimum d'un ensemble p -dominant de T , $\beta_j(T)$ est le cardinal maximum d'un ensemble j -indépendant de T) pour p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$.

Ensuite, nous présentons un nouveau concept " (k,l) -plus-noyau dans les graphes orientés", pour lequel des résultats classiques sur les noyaux dans les graphes orientés sont généralisés. Nous proposons une généralisation de la fonction de Grundy et nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un digraphe ait un noyau.

ABSTRACT

In this thesis, we are mainly interested in studying the concept of kernels in directed graphs and we study j -independence and p -domination in undirected graph.

The concept of kernels was introduced by Von Neumann and Morgenstern in 1944, as a generalization of the concept of solutions for cooperative games.

Given a directed graph $D=(V, A)$, a subset $N\subseteq V$ is a kernel, if it is independent (its vertices are not adjacent two by two) and absorbant (any vertex that does not belong to N has at least one successor in this set).

We begin by studying the problem of characterizing of undirected graphs containing a subset that is both j -independent and p -dominant for two positive integers $p, j \leq \Delta$. In an undirected graph $G=(V,E)$, a j -independent set is a subset S of V such that the maximum degree in the subgraph induced by the vertices of S is at most $j-1$, and a subset S of V is a p -dominant set of G if for every vertex $v \in V-S$, $|N(v)\cap S| \geq p$. We characterize trees T satisfasing $\gamma_p(T)=\beta_j(T)$, where $\gamma_p(T)$ is the minimum cardinality of p -dominant du T , $\beta_j(T)$ is the maximum cardinal of a j -independent set of T , for p, j two positive integers such that $1 \leq j < p \leq \Delta$.

Then, we present a new concept " (k,l) -out-kernel in directed graphs " for which classical results on kernels in directed graphs are generalized. We propose a generalization of the Grundy function and we give a necessary and sufficient condition for a directed graphs to have a kernel.

ملخص

ينصب اهتمامنا في هذه الأطروحة أساساً على دراسة مفهوم النواة في الرسوم البيانية الموجهة بالإضافة إلى j -الاستقلالية و p -الهيمنة في رسم بياني غير الموجه.

تم تقديم مفهوم النواة من قبل فون نومان ومورجنسترن في عام 1944 ، كتعميم لمفهوم الحل الخاص بالألعاب التعاونية.

ليكن $D=(V, A)$ رسم بياني موجه، المجموعة الجزئية $N \subseteq V$ هي نواة إذا كانت مستقلة (رؤوسها ليست متجاورة متنى متنى) و ماصة (كل رأس لا ينتمي الي N لديه على الأقل خليفة واحد في هذه المجموعة).

نبدأ بدراسة مشكلة تحديد خصائص الرسوم البيانية غير الموجهة التي تحتوي على مجموعة جزئية j -مستقلة و p - مهيمنة في ان واحد من اجل عددين طبيعيين $p, j \leq \Delta$. في الرسم البياني غير الموجه $G=(V, E)$ ، المجموعة j -مستقلة هي عبارة عن مجموعة جزئية S من V بحيث تكون أقصى درجة في المخطط الجزئي الناجم عن رؤوس S هي على الأكثر $j-1$ و المجموعة الجزئية S من V هي مجموعة p -مهيمنة من G اذا كان من أجل كل رأس $v \in V-S$ لدينا $|N(v) \cap S| \geq p$. نحدد خصائص الشجرة T التي تحقق $\beta_j(T) = \gamma_p(T)$) $\gamma_p(T)$ هو الأصلي الأدنى لمجموعة p -مهيمنة من T ، $\beta_j(T)$ هو الأصلي الأقصى لمجموعة j -مستقلة من T من اجل عددين طبيعيين p, j بحيث $1 \leq j < p \leq \Delta$.

بعد ذلك، نقدم مفهوماً جديداً " (k,l) -زاند-نواة " في الرسوم البيانية الموجهة ، حيث يتم تعميم النتائج الكلاسيكية على النواة في الرسوم البيانية الموجهة. نقترح تعميم للدالة غراندي ونعطي شرطاً لازماً وكافياً حتى يكون لبيان موجه نواة.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes remerciements ainsi que ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur Mostafa Blidia, Professeur à l'Université de Blida -1-, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et ses encouragements.

Je remercie Madame Nadia Oukid, Maître de conférences "classe A" à l'Université de Blida-1-, pour avoir accepté d'examiner mon travail et de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier Madame Isma Bouchemakh Professeur à l'USTHB, Monsieur Abdelhafid Berrachedi Professeur à l'USTHB, Monsieur Moncef Abbas Professeur à l'USTHB et Monsieur Mustapha Chellali Professeur à l'Université de Blida -1- d'avoir accepté d'examiner ce manuscrit et de faire partie du jury de cette thèse. Leurs remarques et conseils seront sans doute très utiles pour enrichir ce travail.

Je remercie enfin ma famille, mes amis et collègues pour leur soutien et leurs encouragements.

TABLE DES MATIÈRES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIERES	
LISTES DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	
INTRODUCTION	08
1. NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHEs ORIENTÉS	11
1.1. Définitions et notations	11
1.1.1. Graphe orienté	11
1.1.2. Sous-digraphe	12
1.1.3. Chemins, Circuits	13
1.1.4. Quelques classes de digraphes	15
1.1.5. Noyaux dans les digraphes	15
1.2. Complexité des algorithmes	16
2. ÉTAT DE L'ART SUR LE NOYAU DANS LES GRAPHEs ORIENTÉS	19
2.1. Noyaux dans les graphes orientés	19
2.1.1. Définitions et propriétés	19
2.1.2. Sous-classes des digraphes noyau-parfaits	22
2.1.3. Étude algorithmique de la recherche d'un noyau dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits	26
2.2. Noyaux par chemins monochromatiques dans un digraphe m-coloré	27
2.2.1. Définitions	27
2.2.2. Quelques résultats	28
2.3. (k,l)-Noyaux dans un digraphe	32

2.3.1. Définitions	32
2.3.2. Quelques résultats	33
3.(k, l)-PLUS-NOYAU DANS LES GRAPHES ORIENTES	36
3.1. Caractérisation des arbres contenant un sous-ensemble qui est à la fois j- indépendant et p -dominant	36
3.1.1. Résultats préliminaires	38
3.2. (k,l)-plus-noyau dans les digraphes	46
3.2.1. Digraphes symétriques	48
3.2.2. Digraphes transitifs	51
3.2.3. Digraphes sans circuits et digraphes sans circuits impairs	52
3.2.4. La fonction k-Grundy et la fonction caractéristique	59
CONCLUSION	64
REFERENCES	65

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Exemple d'un digraphe D	12
Figure 1.2	Exemple d'un sous digraphe induit	13
Figure 1.3	Exemple sur la forte connexité	14
Figure 2.1	Les digraphes C_3 et C_4	20
Figure 2.2	Un digraphe avec un unique noyau	20
Figure 2.3	Un digraphe qui admet un noyau mais qui n'a pas une fonction de Grundy	22
Figure 2.4	Un digraphe D et sa fermeture par chemins monochromatiques $C(D)$	28
Figure 2.5	Le digraphe G_5	29
Figure 2.6	Le tournoi G_6	30
Figure 2.7	Un digraphe qui admet deux (k,l) -noyaux	33
Figure 2.8	Un digraphe qui n'admet pas de k -noyaux	33
Figure 2.9	Un digraphe avec une fonction $(2,2)$ -Grundy et un digraphe avec une fonction $(3,2)$ -Grundy	35
Figure 3.1	Graphe de Petersen	40
Figure 3.2	N_5^4 -arbre	41
Figure 3.3	N_5^4 -arbre faible et N_5^4 -arbre exacte	41
Figure 3.4	Un digraphe qui admet un $(2,3)$ -plus-noyau	47
Figure 3.5	Un digraphe symétrique D tel que $UG(D) = P_6$	49
Figure 3.6	Un digraphe tel que chaque circuit a un arc symétrique	54
Figure 3.7	Un digraphe qui possède un k -plus-noyau mais qui n'a pas une fonction k -Grundy	60

INTRODUCTION

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes, consistant en l'étude des objets nommés graphes, elle permet de modéliser et résoudre des problèmes d'une manière simple.

Le mot *graphe* a été introduit par le mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814-1897) en 1878. Un graphe est un ensemble de points appelés sommets éventuellement reliés par des lignes ou des flèches appelés arêtes ou arcs respectivement.

L'histoire de la théorie des graphes, débute avec la communication du mathématicien suisse Léonhard Euler (1707 – 1783) dans laquelle il proposait une solution au célèbre problème des ponts de Königsberg (ce problème consistait, à partir d'un quartier quelconque de la ville, à traverser chacun des ponts une fois et une seule et à revenir à son point de départ). Euler représenta cette situation à l'aide d'un dessin (graphe) où les sommets représentent les terres et les arêtes représentent les ponts et il démontra que ce problème n'a pas de solution.

La théorie des graphes constitue aujourd'hui un corpus de connaissance très important, elle trouve ses applications dans d'autres domaines de mathématiques et en informatique, et elle s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie (modélisation des structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations entre les populations) et les applications industrielles (problème du voyageur de commerce).

La domination et d'autres concepts liés aux graphes non orientés sont bien étudiés, les analogues respectifs dans les graphes orientés n'ont pas reçu beaucoup d'attention des chercheurs.

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'étude du concept de *noyaux* dans les graphes orientés.

Le concept de noyaux a été introduit par Von Neumann et Morgenstern [5], comme une généralisation de leur concept de solutions pour les jeux coopératifs. Ils ont aussi prouvé que tout digraphe sans circuits a un noyau unique.

Un noyau est un sous-ensemble de sommets indépendant (ses sommets sont non adjacents deux à deux) et absorbant (tout sommet hors de cet ensemble est l'origine d'au moins

un arc ayant son extrémité terminale dans ce dernier).

Le problème principal sur les noyaux est : quelles propriétés structurelles d'un digraphe impliquent l'existence d'un noyau? Ce concept a trouvé des applications par exemple dans des jeux coopératifs à n personnes, dans des jeux de type Nim [1], dans la logique [2], ...etc

L'existence d'un noyau est un problème difficile : En effet Chvatal a montré que décider si un digraphe possède un noyau est un problème NP -complet.

Dans la littérature nous connaissons deux principales généralisations du concept du noyau dans les graphes orientés:

Le premier concerne les *noyaux par des chemins monochromatiques*. Dans un graphe orienté D dont les arcs sont colorés avec m couleurs, un ensemble $N \subseteq V(D)$ est dit noyau par des chemins monochromatiques si pour chaque paire de sommets distincts $\{u, v\} \in N^2$ il n'existe pas de chemin monochromatique (un chemin dont les arcs sont colorés avec la même couleur) entre eux et pour tout sommet $x \in V(D) \setminus N$ il y a un chemin monochromatique de x vers un sommet $y \in N$. Le concept de noyau par chemins monochromatiques généralise le concept de noyau, comme chaque noyau par des chemins monochromatiques dans un digraphe D où tous les arcs colorés différemment est un noyau de D . Ce concept a été étudié par plusieurs auteurs Sands, Sauer et Woodrow [22], Shen Minggang [23] et Galeana-Sanchez [26, 27, 28].

Le second est celui des (k, l) -noyaux ($k \geq 2, l \geq 1$) dans un graphe orienté, introduit par M. Kwásnik [32]. Un (k, l) -noyau N d'un graphe orienté D est k -stable (si $u, v \in N, u \neq v$, alors $d(u, v) \geq k$) et l -absorbant (si $u \in V(D) \setminus N$ alors il existe $v \in N$ tel que $d(u, v) \leq l$). Un k -noyau est un $(k, k - 1)$ -noyau. Selon cette définition, un noyau est un 2-noyau. Le problème d'existence de (k, l) -noyau dans un graphe orienté donné a été étudié par plusieurs auteurs notamment par M. Kwasnik [33], Galeana-Sanchez et Hernandez-Cruz [34] Szumny, A. Włoch et I. Włoch [35] et d'autres.

Le concept de domination dans les graphes non orientés est naturellement transféré à la domination extérieure dans les graphes orientés. Pour un graphe orienté $D = (V, A)$ et k, l deux entiers positifs, un sous-ensemble S des sommets de D est dit k -indépendant si le degré extérieur maximum du sous-graphe induit S est inférieur ou égal à $k - 1$, i.e., $\Delta^+(S) \leq k - 1$. Un sous-ensemble S des sommets d'un graphe orienté D est dit l -plus-

dominant si chaque sommet de $V \setminus S$ a au moins l successeurs dans S , i.e. $|N_S^+(u)| \geq l$; $\forall u \in V \setminus S$.

Dans cette thèse, nous donnerons une nouvelle généralisation du noyau: le concept de (k, l) -plus-noyau, notre définition utilise le degré extérieur des sommets, les concepts de k -indépendant et l -plus-dominant dans des graphes orientés. Un sous-ensemble N est un (k, l) -plus-noyau d'un graphe orienté D si et seulement si N est un ensemble k -indépendant et l -plus-dominant de D .

Ce document comporte trois chapitres:

Dans le premier chapitre nous introduirons les principales notions de la théorie des graphes ainsi que les notations utilisées dans ce manuscrit, et nous donnerons un aperçu sur la complexité algorithmique dans les graphes.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons un état de l'art sur les noyaux dans les graphes orientés, les noyaux par chemins monochromatiques dans les graphes orientés m -colorés et les (k, l) -noyaux dans les graphes orientés, en citant les principaux résultats.

Le troisième chapitre sera consacré à notre contribution. Nous généraliserons le résultat de Blidia et al. [46] en caractérisant les arbres T satisfaisant $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ pour p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$. Ensuite, nous exposerons le concept de " (k, l) -plus-noyaux dans les graphes orientés " où nous généraliserons quelques résultats classiques sur les noyaux dans les graphes orientés.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale et nous proposerons comme perspective quelques axes de recherches futures.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHEs ORIENTÉS

Nous introduisons dans la première partie les notions et les notations usuelles de la théorie des graphes qui seront utilisées tout au long de cette thèse, nous présentons la plupart des classes de graphes orientés que nous considérerons dans la suite et nous rappelons brièvement la notion du noyau dans les graphes orientés. Ces notations peuvent être retrouvées dans [4]. D'autres notions seront introduites dans les prochains chapitres. Dans la deuxième partie, nous présentons la plupart des classes de graphes orientés que nous considérerons dans la suite et nous rappelons brièvement la notion du noyau dans les graphes orientés. Dans la dernière partie, nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique en définissant certaines notions élémentaires.

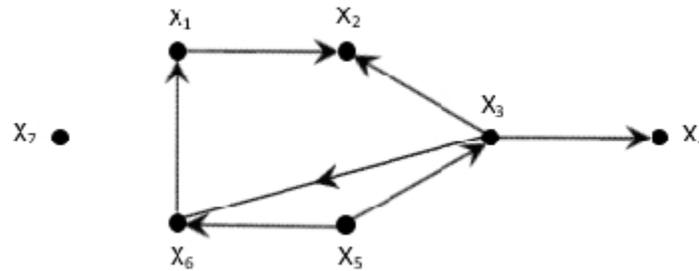
1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe orienté

Un *graphe orienté* D est défini par la donnée d'un couple $(V(D), A(D))$ (ou simplement (V, A)), où $V(D)$ est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appelés *sommets* et $A(D)$ un ensemble des paires ordonnées (x, y) avec $x, y \in V(D)$ dont les éléments sont appelés *arcs*. Le cardinal de V noté n est appelé l'*ordre* de D .

Une *boucle* est un arc reliant un sommet avec lui-même. Un ensemble d'arcs joignant deux sommets x et y dans le même sens est appelé *arc multiple*.

Dans ce qui suit nous considérons les graphes orientés sans boucles et sans arcs multiples. On appellera un *digraphe* un *graphe orienté*, emprunté au mot anglais *directed graph*.

Figure 1.1: Exemple d'un digraphe D

Si (x, y) est un arc d'un digraphe D , alors on dit que y absorbe x et que x domine y , et y est un *successeur* de x et x est un *prédécesseur* de y .

L'ensemble des successeurs d'un sommet x est noté par $N_D^+(x)$

$$N_D^+(x) = \{y \in V \mid xy \in A\} \text{ et } N_D^+[x] = N_D^+(x) \cup \{x\}.$$

L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet x est noté par $N_D^-(x)$

$$N_D^-(x) = \{y \in V \mid yx \in A\} \text{ et } N_D^-[x] = N_D^-(x) \cup \{x\}.$$

Le *degré extérieur* d'un sommet x est $d_D^+(x) = |N_D^+(x)|$ et le *degré intérieur* d'un sommet x est $d_D^-(x) = |N_D^-(x)|$.

On note par $\Delta^+(D)$ et $\Delta^-(D)$ le *degré extérieur maximum* et le *degré intérieur maximum* dans D respectivement, et $\delta^+(D)$ et $\delta^-(D)$ le *degré extérieur minimum* et le *degré intérieur minimum* dans D respectivement.

1.1.2 Sous-digraphe

Soit $D = (V, A)$ et $D' = (V', A')$ deux digraphes.

On dit que D' est un *sous-digraphe* de D si $V' \subseteq V$ et $A' \subseteq A$. Si de plus $A' = \{xy \in A \mid x, y \in V'\}$ alors D' est dit *sous-digraphe induit* de D .

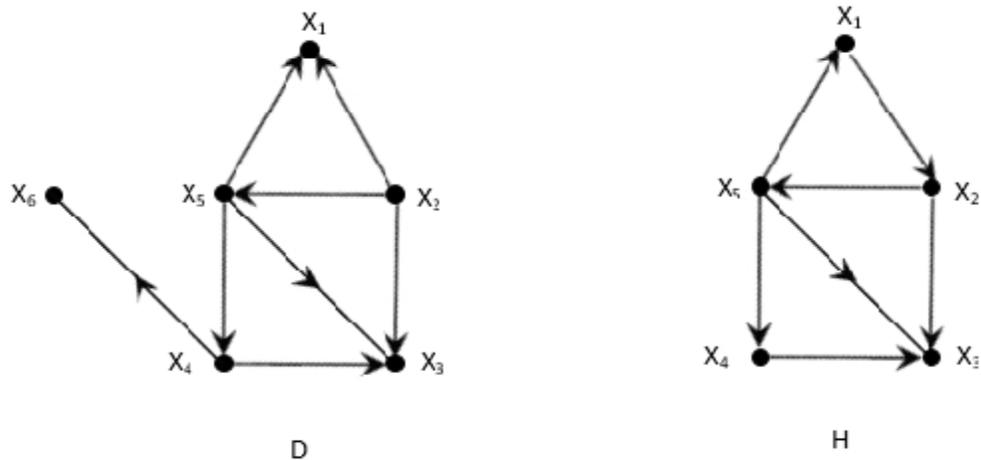


Figure 1.2: Exemple d'un sous-digraphe induit

Le digraphe D a pour ensemble des sommets $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ et le digraphe H est un sous-digraphe de D induit par $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Il est à noter que pour tout $S \subseteq V$, le sous-digraphe de D induit par S , noté par $D[S]$ est l'unique sous-digraphe induit de D avec l'ensemble des sommets est S .

$$N_D^+(S) = \bigcup_{u \in S} N_D^+(u) \text{ et } N_D^+[S] = N_D^+(S) \cup S$$

$$N_D^-(S) = \bigcup_{u \in S} N_D^-(u) \text{ et } N_D^-[S] = N_D^-(S) \cup S$$

On note $\Delta^+(D[S])$, $\Delta^-(D[S])$, $\delta^+(D[S])$ et $\delta^-(D[S])$ par $\Delta^+(S)$, $\Delta^-(S)$, $\delta^+(S)$ et $\delta^-(S)$, respectivement. Le degré maximum ($\Delta^+(S) + \Delta^-(S)$) (resp. le degré minimum ($\delta^+(S) + \delta^-(S)$)) de $D[S]$ est noté par $\Delta(S)$ (resp. $\delta(S)$). Le nombre des sommets dans $N_S^+(x) = N_D^+(x) \cap S$, noté par $d_S^+(x) = |N_S^+(x)|$ est le degré extérieur de x dans S , et le nombre des sommets dans $N_S^-(x) = N_D^-(x) \cap S$, noté par $d_S^-(x) = |N_S^-(x)|$, est le degré intérieur de x dans S .

1.1.3 Chemins, Circuits

Un *chemin* P de longueur k est un digraphe dont l'ensemble des sommets est $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ et l'ensemble des arcs est $\{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$, tel que tous les sommets et les arcs indiqués sont distincts.

Nous appellerons un tel chemin un x_0x_k -chemin, noté par $x_0x_1\dots x_{k-1}x_k$.

Un *circuit* C de longueur k est un digraphe dont l'ensemble des sommets est $\{x_1, \dots, x_k\}$ et l'ensemble des arcs est $\{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{k-1}x_k, x_kx_1\}$, tel que tous les sommets et les arcs indiqués sont distincts. On notera un tel circuit par $x_1\dots x_{k-1}x_kx_1$. Un circuit est dit impair (respectivement, pair) si k est impair (respectivement, pair).

On appelle la *distance* entre x et y dans un digraphe D , noté par $d_D(x, y)$ la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets. S'il n'existe pas un chemin de x à y dans D on prendra $d_D(x, y) = +\infty$.

L'*excentricité* d'un sommet est sa distance maximale à tous les autres sommets.

Un digraphe D est fortement connexe si pour tous deux sommets x et y il existe un xy -chemin et un yx -chemin. Une composante fortement connexe d'un digraphe D est un sous-digraphe fortement connexe maximal. La condensation $SC(D)$ d'un digraphe D est obtenue en contractant chaque composante fortement connexe C en un seul sommet $v(C)$, et il existe un arc d'un sommet $v(C)$ à un sommet $v(C')$ dans $SC(D)$ s'il existe un arc d'un sommet de C à un sommet de C' . Il est clair que $SC(D)$ est un digraphe acyclique (un digraphe sans circuits). Une composante fortement connexe terminale d'un digraphe D est une composante fortement connexe C_T de D telle que $d_{SC(D)}^+(v(C_T)) = 0$, Une composante fortement connexe initiale d'un digraphe D est une composante fortement connexe C_I de D telle que $d_{SC(D)}^-(v(C_I)) = 0$.

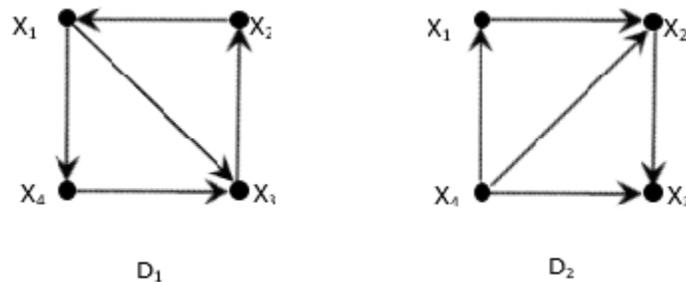


Figure 1.3: Exemple sur la forte connexité

Le digraphe D_1 est fortement connexe, tandis que D_2 ne l'est pas et contient quatre composantes fortement connexes: les sous-digraphes d'ordre 1: $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$ ou $\{x_4\}$.

1.1.4 Quelques classes de digraphes

Soit $D = (V, A)$ un digraphe, un arc $xy \in A$ est dit *symétrique* (resp. *asymétrique*) si $yx \in A$ (resp. $yx \notin A$). La partie asymétrique de D , $Asym(D)$ est un sous-digraphe de D tel que $V(Asym(D)) = V(D)$ et $A(Asym(D)) = \{xy \in A \mid xy \text{ est asymétrique}\}$.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit *symétrique* si $A(Asym(D)) = \emptyset$.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit *transitif* si $\forall x, y, z \in V$, $xy \in A$, $yz \in A$ alors $xz \in A$.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit *complet* si $\forall x, y \in V$, $xy \notin A$ alors $yx \in A$.

Une *clique* est un digraphe symétrique complet.

Un *tournoi* est un digraphe asymétrique complet.

Un digraphe *biparti* est un digraphe dont les sommets peuvent être partitionnés en deux classes X et Y telles que les sommets dans la même classe ne sont pas adjacents.

Nous désignons le digraphe biparti par $BD = (X, Y, A)$.

1.1.5 Noyaux dans les digraphes

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Un ensemble $S \subseteq V$ est indépendant si $A(D[S]) = \emptyset$, (i.e., $\Delta^+(S) = 0$). Un *noyau* N de D est un ensemble de sommets indépendant tel que tout sommet $z \in V(D) \setminus N$ est absorbé par au moins un sommet de N . Un digraphe D est dit un digraphe *noyau-parfait* si tout sous-digraphe induit de D a un noyau.

Nous dirons qu'un digraphe D est *m-coloré* si ses arcs sont colorés avec m couleurs. Un sous-digraphe H de D est *monochromatique* si tous ses arcs sont colorés par une même couleur.

Un ensemble $N \subseteq V$ est dit un *noyau par chemins monochromatiques* d'un digraphe m -coloré $D = (V, A)$, si pour chaque paire de sommets distincts $u, v \in N$ il n'existe pas un chemin monochromatique entre eux (ce qui signifie que N est indépendant par chemins monochromatiques) et pour tout sommet $x \in V \setminus N$ il existe un chemin monochromatique de x à un sommet $y \in N$ (ce qui signifie que N est absorbant par chemins

monochromatiques).

Soient k, l deux entiers tels que $k \geq 2$ et $l \geq 1$. Un ensemble $N \subseteq V$ est dit un (k, l) -noyau de D s'il est k -stable (si $u, v \in N$, $u \neq v$, alors $d(u, v) \geq k$) et l -absorbant (si $u \in V(D) \setminus N$ alors il existe $v \in N$ tel que $d(u, v) \leq l$).

1.2 Complexité des algorithmes

Dans cette section, nous donnerons un aperçu sur la complexité algorithmique en introduisant quelques éléments de base.

Les *problèmes de graphes* se rattachent à la grande classe des problèmes d'optimisation combinatoire.

Un problème d'*optimisation combinatoire* consiste à trouver à l'aide d'un algorithme efficace (ce concept est formalisé ci-dessous) une meilleure solution parmi un ensemble fini (de cardinalité très grande) de solutions admissibles.

Un *algorithme* est une suite finie d'opérations élémentaires permettant de résoudre un problème donné. L'exécution des instructions de l'algorithme transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties). Le mot " algorithme " vient du nom du mathématicien perse Al-Khawarizmi (783–850). Il était un membre d'une académie des sciences à Bagdad, c'est lui qui a écrit le premier traité algorithmique pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.

On appelle algorithme *déterministe* un algorithme dont les résultats qu'il produise peuvent être déduits des spécifications de l'algorithme lui-même. Deux exécutions d'un algorithme déterministe sur des entrées identiques donneront les mêmes sorties.

Un algorithme *non déterministe* est un algorithme composé des instructions de choix, si le bon choix est effectué, le temps de calcul est polynômial, par contre si on énumère tous les choix possibles, l'algorithme non déterministe se transforme en un algorithme déterministe nécessitant un temps de calcul exponentiel.

Pour évaluer et classer les divers algorithmes disponibles pour un problème de graphe, il faut une sorte de mesure de performance, appelée *complexité d'un algorithme*. La théorie de la complexité vise à fournir un cadre formel pour un certain nombre de domaine de

recherche, et en particulier pour l'optimisation combinatoire

La *complexité* d'un algorithme fait correspondre pour une taille donnée le nombre d'instructions maximum qui lui est nécessaire pour résoudre une instance quelconque dans cette taille.

Un algorithme est dit *efficace* ou *polynômial* si le nombre d'opérations élémentaires $T(n)$, nécessaire pour résoudre un problème de taille n , est borné par un polynôme en n , c'est-à-dire, si $T(n) \leq c.n^k$ (c et k étant des constantes), on dit que $T(n)$ est $O(n^k)$, ou encore un tel algorithme a une complexité de $O(n^k)$ (O est la notation de Landau).

Un *problème de décision* est un problème posé sous forme d'une question, dont la réponse est soit " oui ", soit " non ". Par exemple, " Etant donné un graphe G , existe-il un cycle hamiltonien (un cycle qui passe par tous les sommets de G une seule fois)? "

Un des objectifs de la complexité algorithmique est de classer chaque problème de décision suivant son degré de difficulté de résolution, c'est-à-dire selon la complexité du meilleur algorithme permettant de résoudre ce problème.

La *classe P*: est la classe des problèmes de décision, (dits faciles) pouvant être résolus en un temps polynômial. Plusieurs problèmes de graphes appartiennent à P , tels : la *connexité*, le *couplage parfait*, le *plus court chemin*, le *flot maximum*, l'*arbre de poids minimum*... etc

La *classe NP* (problèmes *Non déterministes Polynomiaux*) regroupe tous les problèmes de décision que l'on peut résoudre à l'aide d'un algorithme non déterministe de complexité polynômiale. Cette classe contient les problèmes classiques de la théorie des graphes par exemple: l'indépendance, la coloration, la domination ... etc

La classe NP contient l'ensemble des problèmes où, étant donnée une instance de ce problème, il est possible de déterminer en temps polynômial si celle-ci est une solution pour le problème, il est alors évident que $P \subseteq NP$ car un algorithme polynômial est également un certificat. Une des grandes questions ouvertes à ce jour est: est-ce que $P = NP$? En d'autres termes, s'il est toujours facile de vérifier une solution, est-il aussi facile de trouver une solution? Pour la plupart des problèmes de la classe NP , on ne sait pas dire s'ils peuvent ou ne peuvent pas être résolus par un algorithme polynômial.

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de *réductions*, la plus utilisée est

la *réduction polynômiale*.

On dit que P_1 se réduit en temps polynomial à P_2 s'il existe un algorithme pour P_1 qui fait appel comme un sous programme, à un algorithme de résolution de P_2 et si cet algorithme de résolution de P_1 est polynômial lorsque la résolution de P_2 est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe NP est dit *NP-complet*, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autres termes, s'il existait un algorithme polynômial permettant de résoudre un problème NP -complet, alors il existerait un algorithme polynômial pour tous les problèmes de la classe NP , et on aurait l'égalité $P = NP$.

Un problème d'optimisation est dit *NP-difficile* (*NP-dur*) si le problème de décision associé est NP -complet. Les problèmes NP -difficiles sont au moins aussi difficiles que les problèmes NP -complets.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LE NOYAU DANS LES GRAPHEES ORIENTÉS

En 1944, Von Neumann et Morgenstern [5] ont introduit pour la première fois le concept de noyau dans les graphes orientés comme solutions d'un jeu. Ce concept a attiré beaucoup d'attention parce que certains problèmes peuvent être modélisés par l'utilisation de noyaux dans les digraphes, en effet plusieurs travaux ont été réalisés, notamment par H. Meyniel, P. Duchet, C. Berge, H. Galeana-Sánchez et autres. Le concept du noyau dans les digraphes a connu deux principales généralisations : noyau par des chemins monochromatiques et (k, l) -noyau.

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique sur le noyau dans les digraphes, nous donnerons des définitions et certaines propriétés de chaque concept de noyau et également quelques résultats connus sur ces trois concepts.

2.1 Noyaux dans les graphes orientés

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Un noyau N d'un digraphe $D = (V, A)$ est un sous-ensemble de sommets indépendant ($A(D[N]) = \emptyset$) tel que tout sommet $z \in V(D) \setminus N$ est absorbé par au moins un sommet de N .*

Figure 2.1: Les digraphes C_3 et C_4

La figure 2.1 montre qu'il existe des digraphes sans noyaux, ainsi que des digraphes à plusieurs noyaux par exemple C_3 est sans noyau et C_4 possède deux noyaux $\{x_2, x_4\}$ et $\{x_1, x_3\}$.

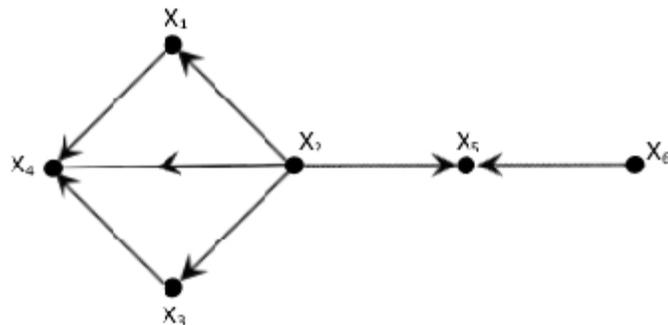


Figure 2.2: Un digraphe avec un unique noyau

L'unique noyau du digraphe de la figure 2.2 est $\{x_4, x_5\}$.

Définition 2.2. *Un digraphe $D = (V, A)$ est dit noyau-parfait si tout sous-digraphe induit de D a un noyau.*

Proposition 2.3. [4] *Si N est un noyau d'un digraphe D , alors N est un indépendant maximal et un absorbant minimal (par rapport à l'inclusion).*

En effet si N est un noyau du digraphe D et $a \notin N$ alors $\{a\} \cup N$ ne peut pas être un ensemble indépendant car a est absorbé par N , donc N est un indépendant maximal.

Si $b \in N$, alors $N \setminus \{b\}$ ne peut pas être un ensemble absorbant car il n'absorbe pas b , donc N est absorbant minimal.

Théorème 2.4. [4] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $S \subset V(D)$ soit un noyau d'un digraphe $D = (V, A)$ est que sa fonction caractéristique φ_S vérifie

$$\forall x \in V, \varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in N^+(x)} \varphi_S(y) \text{ avec } \varphi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Si $N^+(x) = \phi$, on posera par convention $\max_{y \in N^+(x)} \varphi_S(y) = 0$

Définition 2.5. Considérons un digraphe $D = (V, A)$. Une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ est dite une fonction de Grundy si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- 1) $g(x) = k > 0$, entraîne que, pour tout $j < k$ il existe un $y \in N^+(x)$ avec $g(y) = j$.
- 2) $g(x) = k$, entraîne que tout $y \in N(x)$ vérifie $g(y) \neq k$.

Ce concept a été défini par P.M. Grundy en 1939 pour les digraphes acycliques comme suit

$$\forall x \in V, g(x) = \min(\mathbb{N} \setminus \{g(y) : y \in N^+(x)\})$$

En outre, Grundy a prouvé que chaque digraphe acyclique a une fonction de Grundy unique. Cependant, il existe des digraphes sans fonction de Grundy, par exemple les circuits impairs.

Une des propriétés les plus importantes d'une fonction de Grundy est que si D a une fonction de Grundy g , alors D a un noyau.

Proposition 2.6. [4] Si D admet une fonction de Grundy g , alors D a un noyau. En effet l'ensemble $S = \{x \in V / g(x) = 0\}$ est un noyau de D .

Mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre la figure 2.3

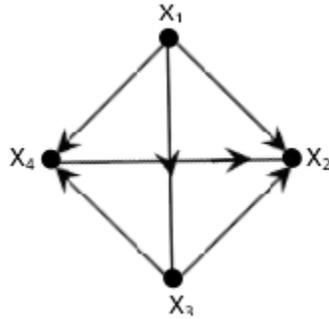


Figure 2.3 : Un digraphe qui admet un noyau mais qui n'a pas une fonction de Grundy

Théorème 2.7. [4] *Si D est un digraphe noyau-parfait alors D admet une fonction de Grundy.*

Dans [9] P. Duchet et H. Meyniel ont introduit le concept de noyau-imparfait critique dans les digraphes.

Définition 2.8. *Un digraphe D est noyau-imparfait critique si D n'a pas de noyau mais chaque sous-digraphe induit propre de D en possède au moins un.*

Théorème 2.9. [9] *Si D est un digraphe ne possédant pas un noyau, alors, il existe un sous-digraphe induit de D qui est un digraphe noyau-imparfait critique.*

Définition 2.10. *Un quasi-noyau S de D est un ensemble de sommets indépendant tel que pour tout $y \in V(D) \setminus S$, il existe un $x \in S$; la distance entre x et y dans D est soit un soit deux .*

Théorème 2.11. [13] *Chaque graphe orienté a un quasi-noyau.*

2.1.2 Sous-classes des digraphes noyau-parfaits

Les théorèmes suivants sont appelés les résultats classiques sur l'existence de noyaux dans les digraphes.

Théorème 2.12. [4] *Si D est un digraphe transitif, alors D a un noyau. De plus, chaque noyau est obtenu en choisissant un seul sommet de chaque composante fortement connexe terminale. Ainsi, tous les noyaux de D ont la même cardinalité et chaque ensemble absorbant minimal est un noyau.*

Théorème 2.13. [4] *Si $D = (V, A)$ est un digraphe symétrique alors D a un noyau. En effet, $N \subseteq V$ est un noyau si et seulement si N est un ensemble indépendant maximal.*

En effet, si N est un indépendant maximal il est aussi un absorbant car tout arc est symétrique et donc N est un noyau. Inversement, si N est un noyau, il est indépendant maximal (sinon N ne serait pas absorbant).

Théorème 2.14. [5] *Un digraphe sans circuits admet un noyau, ce noyau est unique.*

Tout digraphe sans circuits admet un puits (un puits est un sommet qui est successeur de tous ses voisins), et tout puits doit appartenir au noyau. La démonstration se fait par induction sur le nombre n de sommets. si $n = 1$ l'unique sommet est un puits et donc le seul élément du noyau. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n' < n$. Soit s un puits de digraphe D sans circuits et $P(s)$ l'ensemble des prédecesseurs de s . Par hypothèse de récurrence, le digraphe D privé du sommet s et de ceux de $P(s)$ a un noyau unique N . On en déduit que $N \cup \{s\}$ est l'unique noyau de D .

Théorème 2.15. [6] *Un digraphe sans circuits impairs est noyau-parfait.*

La preuve se fait par induction sur le nombre des sommets. On considère le digraphe condensé du digraphe $D = (V, A)$ sans circuits impairs. Toute composante fortement connexe admet un noyau. On considère toutes les composantes fortement connexes terminales C_i et leurs noyaux S_i , $i = 1, \dots, k$. Le sous-digraphe engendré par $V \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^k (C_i \cup N^-(S_i)) \right\}$ admet un noyau par hypothèse d'induction qu'on notera S . Le sous-ensemble $S \cup \left(\bigcup_{i=1}^k S_i \right)$ est un noyau de digraphe D .

Le corollaire suivant découle du théorème 2.7

Corollaire 2.16. *Un digraphe symétrique admet une fonction de Grundy.*

Un digraphe transitif admet une fonction de Grundy.

Un digraphe sans circuits admet une fonction de Grundy.

Un digraphe sans circuits impairs admet une fonction de Grundy.

Le problème de l'existence d'un noyau dans un digraphe donné a été étudié par plusieurs auteurs en particulier M. Richardson, P. Duchet, H. Meyniel, M. Blidia, H. Galeana-Sánchez et V. Neumann-Lara. P. Duchet et H. Meyniel ont donné des conditions suffisantes pour qu'un digraphe ait un noyau.

Théorème 2.17. [10] *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques est noyau-parfait.*

Théorème 2.18. [10] *Un digraphe tel que tout circuit a au moins un arc symétrique est noyau-parfait.*

Définition 2.19. *Une corde d'un circuit est un arc de digraphe mais non du circuit et dont les extrémités sont des sommets du circuit.*

Une corde (x_i, x_j) d'un circuit $x_0x_1\dots x_{k-1}x_kx_0$ est dite courte si $j = i + 2$ ou $i = k$ et $j = 1$.

Théorème 2.20. [12] *Un digraphe tel que tout circuit impair a deux cordes courtes croisées (c'est à dire de la forme (v_i, v_{i+2}) et (v_{i+1}, v_{i+3})) est noyau-parfait.*

Définition 2.21. *Un pôle est l'extrémité terminale d'une corde.*

Théorème 2.22. [11] *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux pôles consécutifs est noyau-parfait.*

Dans [14] V. Neumann-Lara a montré qu'un digraphe biparti admet un noyau et M. Blidia [15] a prouvé qu'un digraphe de parité est noyau-parfait.

Théorème 2.23. [14] *Tout digraphe biparti admet un noyau.*

Définition 2.24. *Un digraphe est de parité si et seulement si pour tout couple de sommets distincts, les chemins reliant ce couple de sommets ont la même parité.*

Théorème 2.25. [15] *Un digraphe de parité est noyau-parfait.*

P. Duchet a posé la conjecture suivante dans [16]

Conjecture 2.26. *Si D est un digraphe tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes, alors D est noyau-parfait.*

Puis il a affirmé cette conjecture dans le cas où tout 3-circuit est symétrique, en donnant le théorème suivant:

Théorème 2.27. [16] *Un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique et tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait.*

Dans [17] nous avons donné une autre preuve de ce résultat en utilisant la méthode de réorientation et une méthode constructive de noyau.

L'idée de la méthode de *réorientation* est qu'un digraphe D possède un noyau si et seulement si il existe un choix d'orientation des arcs symétriques de D produisant un digraphe partiel dans lequel on peut déterminer un noyau d'une manière simple.

La méthode *constructive* a permis de montrer beaucoup de résultats. Elle consiste à construire un noyau dans un digraphe D vérifiant certaines conditions.

Pour celà, on a utilisé le lemme suivant pour montrer le Théorème 2.29

Lemme 2.28. [17] *Si D est un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique alors il existe une réorientation D' du digraphe D sans 3-circuit.*

Théorème 2.29. [17] *Si D est un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique, et tout circuit impair de D possède deux cordes courtes, alors il existe une réorientation D' de D , tel que D' est un digraphe antisymétrique dont chaque circuit impair possède deux cordes courtes.*

Puis nous avons utilisé une méthode constructive, pour montrer que le digraphe obtenu par une réorientation de digraphe qui vérifie les conditions du théorème, est noyau-parfait.

Théorème 2.30. [17] *Un digraphe antisymétrique tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait.*

Par ailleurs, nous avons affirmé la Conjecture 2.26 dans le cas où le graphe non orienté associé au digraphe partiel formé seulement des arcs symétriques est de comparabilité.

Définition 2.31. *Un graphe simple est de comparabilité si ses arêtes peuvent être orientés transitivement sans circuits.*

Théorème 2.32. [17] *Si D est un digraphe tel que tout circuit possède deux cordes courtes et si le graphe non orienté associé au digraphe partiel $SY(D)$ est un graphe de comparabilité, alors D est noyau-parfait.*

2.1.3 Etude algorithmique de la recherche d'un noyau dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits

L'existence d'un noyau est un problème difficile : En effet Chvatal [18] a montré que décider si un digraphe possède un noyau est un problème NP -complet. Fraenkel [19] a montré qu'il reste NP -complet pour les digraphes planaires avec de petits degrés (Un graphe est planaire s'il est possible de le représenter sur un plan sans que deux de ses arcs ne se rencontrent en dehors de leurs extrémités).

Néanmoins, des algorithmes polynomiaux ont été proposés pour ce problème dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits.

Z. Zemir [20] a fourni un algorithme polynomial pour la recherche d'un noyau dans un digraphe $D = (V, A)$ sans circuits, de complexité $O(|V|^2)$ et un autre dans un digraphe $D = (V, A)$ sans circuits impairs de complexité $O(|A| \cdot |V|^2)$. Dans le même manuscrit, un algorithme en au plus $(|V|^4 + |V|)$ opérations a été donné pour la recherche d'un noyau dans un graphe triangulé (tout cycle de longueur > 3 admet une corde) muni d'une orientation normale (toute clique possède un puit).

M. Abbas, Y. Saoula [21] ont élaboré trois algorithmes polynomiaux pour la recherche d'un noyau dans un graphe $G = (V, E)$ muni d'une orientation: le premier est de complexité $O(|E| \cdot |V|^2)$ si G est un graphe de comparabilité (ses arêtes peuvent être orientés transitivement et sans circuits) relativement à M-orientation (tout circuit de longueur trois

possède deux arcs symétriques), le deuxième est aussi de complexité $O(|E| \cdot |V|^2)$ pour un graphe de permutation (si $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ il existe une permutation P des entiers $1, 2, \dots, n$ telle que v_i est adjacent à v_j dans G si et seulement si $\frac{P(i)-P(j)}{i-j} < 0$) muni d'une orientation normale et le troisième dont la complexité $O(|E| \cdot |V|)$ lorsque G est un graphe sans P_4 (G ne possède pas un sous-graphe avec 4 sommets a, b, c, d et les arêtes ab, bc et cd) muni d'une orientation normale.

2.2 Noyaux par chemins monochromatiques dans un digraphe m -coloré

La notion de noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe m -coloré est plus générale que celle du noyau dans un digraphe.

2.2.1 Définitions

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit m -coloré si ses arcs sont colorés avec m couleurs.

Un chemin dans un digraphe m -coloré est dit *monochromatique* si ses arcs ont la même couleur.

Un circuit dans un digraphe m -coloré est dit *quasi-monochromatique* si tous ses arcs, à l'exception d'au plus un, ont la même couleur.

Un *noyau par chemins monochromatiques* dans un digraphe m -coloré $D = (V, A)$ est un sous-ensemble $N \subseteq V$ qui satisfait aux conditions suivantes:

- 1) $\forall x \in N$, il n'existe pas dans D un chemin monochromatique reliant x et y .
- 2) $\forall x \in V \setminus N$, il existe dans D un chemin monochromatique de x vers un sommet de N .

Dans [26] Galeana-Sánchez a établi une relation entre le concept de noyau et le concept de noyau par chemins monochromatiques comme suit:

La *fermeture par chemins monochromatiques* d'un digraphe m -coloré $D = (V, A)$ est un digraphe m -coloré noté $C(D)$ où l'ensemble des sommets $V(C(D)) = V$ et l'ensemble

des arcs

$$A(C(D)) = A \bigcup_{i=1}^m \left\{ \begin{array}{l} uv \text{ coloré avec la couleur } i / \text{ il existe dans } D, \text{ un chemin} \\ \text{monochromatique de couleur } i \text{ reliant les sommets } u \text{ et } v \end{array} \right\}$$

Notons que pour tout digraphe D ,

1. $C(C(D))$ et $C(D)$ sont isomorphes.
2. N est un noyau par chemins monochromatiques de D si et seulement si N est un noyau de $C(D)$.

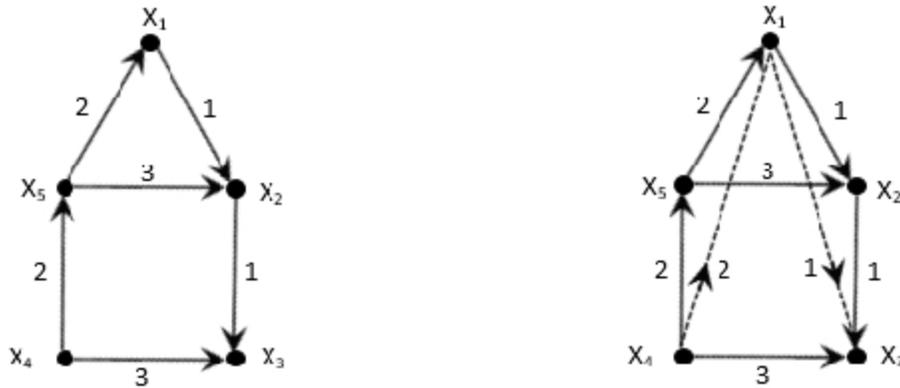


Figure 2.4: Un digraphe D et sa fermeture par chemins monochromatiques $C(D)$

La fermeture par chemins monochromatiques $C(D)$ du digraphe D (voir figure 2.4) admet $\{x_3, x_5\}$ comme noyau donc D admet $\{x_3, x_5\}$ comme noyau par chemins monochromatiques.

2.2.2 Quelques résultats

Pour $m = 1$ c'est à dire si un digraphe D dont les arcs sont colorés avec la même couleur alors la fermeture par chemins monochromatiques $C(D)$ est un digraphe transitif qui admet un noyau donc D a un noyau par chemins monochromatiques.

L'étude de l'existence des noyaux par chemins monochromatiques dans les digraphes m -coloré commence par le théorème de Sands, Sauer et Woodrow prouvé dans [22] en étudiant le cas où $m = 2$, et en particuliers si le digraphe est un tournoi.

Théorème 2.33. [22] *Tout digraphe 2-coloré a un noyau par chemins monochromatiques.*

Corollaire 2.34. [22] *Si T est un tournoi dont les arcs sont colorés avec 2 couleurs alors il existe un sommet v de T tel que pour tout sommet x autre que v de T , il existe un chemin monochromatique de x vers v .*

Dans le même article, les auteurs ont posé le problème suivant:

" Soit T un tournoi 3-coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique, est-il vrai que T contient un sommet v tel que pour tout sommet x de T autre que v , il existe un chemin monochromatique de x à v ?"

Shen Minggan a étudié ce problème dans [23] et il a fourni le résultat suivant:

Théorème 2.35. [23] *Si T est un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique et tout tournoi transitif d'ordre 3 est quasi-monochromatique, alors T a un noyau par chemins monochromatiques.*

Shen Minggan a montré aussi dans [23], que le digraphe G_5 de la figure 2.5, est un tournoi 5-coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique, mais il n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.

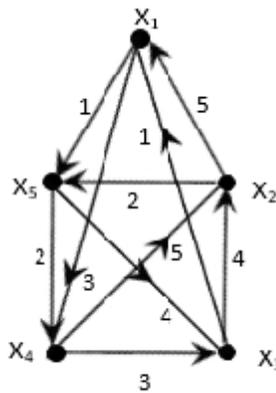


Figure 2.5: Le digraphe G_5

H. Galeana-Sánchez et R. Rojas-Monroy ont montré dans [27], en utilisant le contre exemple de la figure 2.6, qu'un tournoi 4-coloré tel que tout 3-circuit est quasi-monochromatique, mais pourtant il n'a pas de chemins monochromatiques.

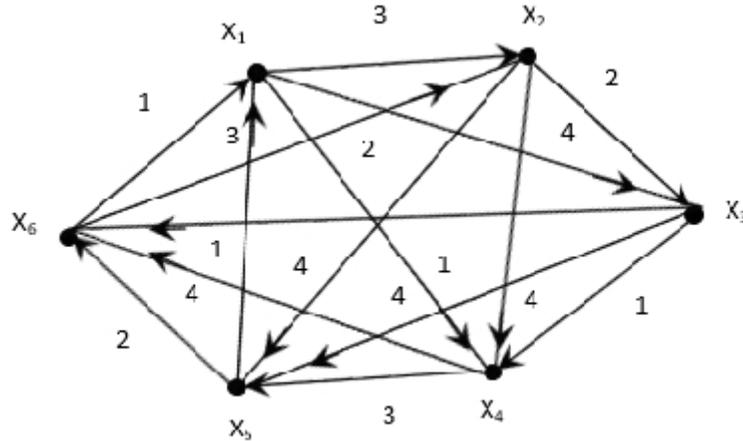


Figure 2.6: Le tournoi G_6

Dans [25], H. Galeana-Sánchez a donné une condition suffisante pour qu'un tournoi m -coloré admette un noyau par chemins monochromatiques.

Théorème 2.36. [25] *Si T est un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est monochromatique, alors T admet un noyau par chemins monochromatiques*

Théorème 2.37. [25] *Si T un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique, alors $C(T)$ est noyau-parfait et donc T admet un noyau par chemins monochromatiques.*

Dans un autre article, Galeana-Sánchez a montré en utilisant le Lemme 2.38, qu'un digraphe obtenu à partir de la suppression d'un seul arc d'un tournoi et qui vérifie la condition du Théorème 2.37 admet un noyau par chemins monochromatiques.

Lemme 2.38. [26] *Soit D un digraphe m -coloré résultant de la suppression d'un seul arc $[x, y]$ d'un tournoi m -coloré T_n . Si tout sous-digraphe induit propre de D a un noyau par chemins monochromatiques, alors au moins l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*

- (i) D a un noyau par chemins monochromatiques

(ii) Il existe un circuit $\gamma \subseteq \text{Asym}(C(D))$ tel que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$.

Théorème 2.39. [26] Soit D un digraphe m -coloré obtenu à partir de la suppression d'un arc d'un tournoi T_n . Si tout circuit contenu dans D de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors D a un noyau par chemins monochromatiques.

Dans notre mémoire de Magister [29], nous avons donné une preuve du théorème de Shen 2.35 en utilisant le théorème 2.18 et nous avons fourni un algorithme polynomial pour la recherche d'un noyau par chemins monochromatiques dans un tournoi m -coloré, de complexité $O(n^6)$ où n est l'ordre du tournoi .

Dans [30], H. Galeana-Sánchez a donné une approche différente pour obtenir des conditions suffisantes pour l'existence d'un noyau par des chemins monochromatiques dans un digraphe m -coloré, en introduisant le concept de *digraphe de classe-couleur* d'un digraphe D m -coloré.

Définition 2.40. Soit D un digraphe m -coloré. Le digraphe de classe -couleur de D noté $\mathfrak{L}_C(D)$ est un digraphe dont les sommets sont les couleurs représentées dans les arcs de D , et $(i, j) \in A(\mathfrak{L}_C(D))$ si et seulement si il existe deux arcs (u, v) et (v, w) dans D tels que (u, v) a la couleur i et (v, w) a la couleur j .

A partir de la définition de la fermeture et du digraphe de classe-couleur, il en résulte que $\mathfrak{L}_C(D)$ peut avoir des boucles et $\mathfrak{L}_C(D) = \mathfrak{L}_C(C(D))$.

Le résultat principal de H. Galeana-Sánchez dans [30] est le suivant:

Théorème 2.41. [30] Soit D un digraphe m -couleur et $\mathfrak{L}_C(D)$ son digraphe de classe-couleur. Si $\mathfrak{L}_C(D)$ est un digraphe biparti, alors D a un noyau par chemins monochromatiques.

Définition 2.42. [31] Soit D un digraphe m -coloré. Si $B \subset \{1, \dots, m\}$ (le symbole \subset dénote un sous-ensemble propre), alors notons D_B le sous-digraphe de D induit par les

arcs dont les couleurs sont dans B . On dit que D est un digraphe quasi couleur-parfait si pour tout $B \subset V$ ($\mathcal{C}_C(D)$) on a $C(D_B)$ est un digraphe noyau-parfait. Si D a un noyau par des chemins monochromatiques et il est un digraphe quasi couleur-parfait, alors D est dit un digraphe couleur-parfait.

Théorème 2.43. [31] Soit D un digraphe m -coloré et $\mathcal{C}_C(D)$ son digraphe de classe -couleur tel que $\mathcal{C}_C(D)$ n'est pas fortement connexe. Si D est un digraphe quasi couleur-parfait, alors D a un noyau par des chemins monochromatiques (et donc D est dit un digraphe couleur-parfait).

2.3 (k,l)-Noyaux dans un digraphe

La deuxième généralisation du noyau, introduite par M. Kwásnik [32], est (k, l) -noyau dans les digraphes. Elle utilise la distance entre deux sommets.

2.3.1 Définitions

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Soient k, l deux entiers naturels tels que $k \geq 2$ et $l \geq 1$. Un ensemble $N \subseteq V$ est dit un (k, l) -noyau de digraphe D si

- 1) $\forall x, x' \in N, x \neq x'$ on a $d_D(x, x') \geq k$.
- 2) $\forall y \in (V \setminus N), \exists x \in N$ tel que $d_D(y, x) \leq l$.

Un k -noyau est un $(k, k - 1)$ -noyau.

Pour $k = 2$ et $l = 1$, un (k, l) -noyau est un noyau au sens de Berge[4].

Pour $k = 2$ et $l = 2$, (k, l) -noyau est un *quasi-noyau*.

Un digraphe tel que tout sous-digraphe induit admet un (k, l) -noyau ($k \geq 2, l \geq 1$) est dit un (k, l) -noyau-parfait.

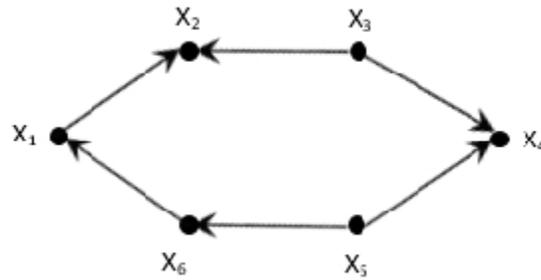


Figure 2.7: Un digraphe qui admet deux (k, l) -noyaux

Le digraphe de la figure 2.7 admet $\{x_2, x_4, x_6\}$ comme un $(2, 1)$ -noyau et $\{x_2, x_4\}$ comme un $(3, 2)$ -noyau.

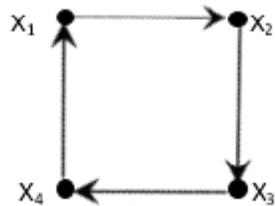


Figure 2.8: Un digraphe qui n'admet pas de k -noyaux

Le (k, l) -noyau peut ne pas exister, en effet le digraphe de la figure 2.8 n'admet pas un 3-noyau.

2.3.2 Quelques résultats

Une généralisation de la notion quasi-noyau.

Théorème 2.44. [36] *Tout digraphe a un $(k, 2k - 2)$ -noyau.*

Un (k, l) -noyau d'un digraphe D est aussi un (k, l') -noyau pour tout $l' \geq l$.

Corollaire 2.45. [36] *Tout digraphe a un (k, l) -noyau pour $l \geq 2k - 2$.*

Corollaire 2.46. [36] *Tout digraphe possède un quasi-noyau.*

Définition 2.47. *Soit $D = (V, A)$ un digraphe. On appelle puissance p -ième de D le digraphe, noté D^p , qui a le même ensemble que D . Deux sommets x et y sont reliés par un arc (x, y) dans D^p s'il existe dans D un chemin de x à y de longueur $\leq p$.*

Théorème 2.48. [37] *Si N est un (k, l) -noyau d'un digraphe D , pour $k \geq 3$ et $l \leq k - 1$, alors N est un $(2, 1)$ -noyau de D^{k-1} .*

Théorème 2.49. [37] *N est un $(k, k - 1)$ -noyau d'un digraphe D si et seulement si N est un $(2, 2 - i)$ -noyau de D^{k-1} , pour $k \geq 3$ et $i = 0, 1$.*

Théorème 2.50. [38] *Un digraphe sans circuits a un $(k, k - 1)$ -noyau, pour $k \geq 2$.*

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème 2.17.

Théorème 2.51. [39] *Soit un digraphe D tel que $ASY(D)$ est fortement connexe. En plus, on suppose que pour tout circuit C de longueur $\neq 0 \pmod{k}$ ou bien (a) ou bien (b) est satisfait*

(a) *Tout arc de C est un arc symétrique de D*

(b) *C a au moins k arcs symétriques*

alors le digraphe D a un $(k, k - 1)$ -noyau.

Théorème 2.52. [39] *Soit un digraphe D fortement connexe tel que tout circuit de D est de longueur $= 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$ alors D a un k -noyau.*

Théorème 2.53. [38] *Si un digraphe D fortement connexe a au plus un circuit C de longueur $\neq 0 \pmod{k}$ de la forme $C = x_1, x_2, \dots, x_{nk+r}, x_1$, $n \geq 1$, $k \geq 2$, $0 < r < k$ ayant $r + 1$ cordes de type (x_i, x_{i+r+1}) , (x_{i+1}, x_{i+r+2}) , \dots , (x_{i+r}, x_{i+2r+1}) , pour un i fixé $1 \leq i \leq nk + r$, alors le digraphe D a un $(k, k - 1)$ -noyau.*

Dans [40] C. Balbuena et al. ont proposé une généralisation de la fonction de Grundy appelée fonction (k, l) -Grundy. Pour cela, ils ont introduit une notation pour les successeurs à distance r d'un sommet $x \in V$

$$N_r^+(x) = \{y \in V / 1 \leq d(x, y) \leq r\}$$

Définition 2.54. *Considérons un digraphe $D = (V, A)$ et soit $l \geq 1$ et $k \geq 2$ deux entiers. Une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ est dite une fonction de (k, l) -Grundy si elle vérifie les deux propriétés suivantes:*

- 1) $g(x) = t > 0$, entraîne que, pour tout $j < t$ il existe un $y \in N_l^+(x)$ avec $g(y) = j$,
- 2) $g(x) = t$, entraîne que tout $y \in N_{k-1}^+(x)$ vérifie $g(y) \neq t$.

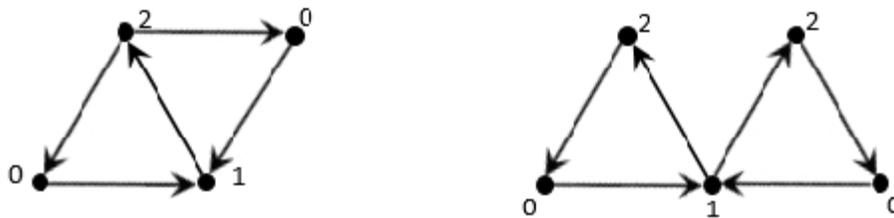


Figure 2.9: Un digraphe avec une fonction $(2, 2)$ -Grundy et un digraphe avec une fonction $(3, 2)$ -Grundy

Remarque 2.55. [40] *Si un digraphe D a une fonction (k, l) -Grundy g , alors $S = \{x \in V / g(x) = 0\}$ est un (k, l) -noyau de D .*

CHAPITRE 3

(k, l)-PLUS-NOYAU DANS LES GRAPHES ORIENTÉS

Ce Chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, nous étudions la j -indépendance et la p -domination dans les graphes non orientés simples. Nous généralisons un résultat de Blidia et al. [46] en caractérisant les arbres T tels que $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ pour p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$. Ensuite, nous exposerons un nouveau concept " (k, l) -plus-noyau dans les graphes orientés" où nous généraliserons quelques résultats classiques sur les noyaux dans les graphes orientés.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [49] et d'une communication [50].

3.1 Caractérisation des arbres admettant un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant

La domination dans les graphes est bien étudiée, pour plus de détails sur ce sujet, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Haynes, Hedetniemi et Slater [41, 42]

Nous considérons des graphes G , non orientés et finis, avec ensemble des sommets V et ensemble des arêtes E .

Le *voisinage ouvert* d'un sommet $v \in V$ est $N(v) = \{u \in V / uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Le *degré* d'un sommet v de G est le cardinal de son voisinage ouvert, i.e. $d_G(v) = |N(v)|$.

Nous désignons par $\Delta = \Delta(G)$ le *degré maximum* de G .

Pour un sous-ensemble A de V , $G[A]$ désignera le *sous-graphe induit* par les sommets de A .

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *indépendant* si $\Delta(G[S]) < 1$.

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si pour tout sommet $v \in V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq \emptyset$. Le *nombre d'indépendance* $\beta(G)$ est le cardinal maximum d'un

ensemble indépendant de G . Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G . On a pour tout graphe G , $\beta(G) \geq \gamma(G)$.

Dans [43, 44] Fink et Jacobson ont introduit les concepts de j -indépendance et p -domination.

Un ensemble j -indépendant est un sous-ensemble S de V tel que le degré maximum dans le sous-graphe induit par les sommets de S est au plus $j - 1$.

Un sous-ensemble S de V est un ensemble p -dominant de G si pour tout sommet $v \in V \setminus S$, $|N(v) \cap S| \geq p$.

Le nombre de j -indépendance $\beta_j(G)$ est le cardinal maximum d'un ensemble j -indépendant de G .

Le nombre de p -domination $\gamma_p(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble p -dominant de G .

Notons qu'un ensemble 1-indépendant (respectivement 1-dominant) est un ensemble indépendant (respectivement dominant) de G , et ainsi $\beta_1(G) = \beta(G)$, $\gamma_1(G) = \gamma(G)$.

Nous notons également que pour tout graphe, un ensemble j -indépendant existe et un ensemble p -dominant existe. En effet, un ensemble indépendant maximal est un ensemble j -indépendant de G et l'ensemble de sommets $V(G)$ est un p -dominant de G . Puisque tout ensemble j -indépendant est un $(j + 1)$ -indépendant, la séquence (β_j) est faiblement croissante et donc

$$\beta(G) \leq \beta_2(G) \leq \dots \leq \beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n.$$

Aussi, puisque tout ensemble p -dominant est un $(p - 1)$ -dominant, la séquence (γ_p) augmente faiblement et donc

$$\gamma(G) \leq \gamma_2(G) \leq \dots \leq \gamma_\Delta(G) < \gamma_{\Delta+1}(G) = n.$$

Dans [45] Chellali, Favaron, Hansberg et Volkman ont donné une étude complète sur la k -indépendance et k -domination.

3.1.1 Résultats préliminaires

Nous commençons par donner quelques résultats connus qui seront utiles par la suite.

Observation 1. *Chaque ensemble p -dominant d'un graphe G contient tout sommet de degré au plus $p - 1$.*

Théorème 3.1 ([46]). *Si T est un arbre, alors pour tout entier positif $p \geq 2$, $\gamma_p(T) \geq \beta_{p-1}(T)$.*

Puisque $\beta_{p-1}(T) \geq \beta_j(T)$ pour tout entiers positifs j, p avec $1 \leq j < p \leq \Delta$, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Si T est un arbre, alors pour tous entiers positifs j, p tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$, $\gamma_p(T) \geq \beta_j(T)$.*

Le résultat suivant dû à Favaron [47] affirme que dans tout graphe $G = (V, E)$, il existe un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et j -dominant pour tout entier positif $j \leq \Delta$.

Théorème 3.3 ([47]). *Pour tout graphe G et j un entier positif $j \leq \Delta$, tout ensemble S qui est j -indépendant tel que $\varphi_j(S) = j|S| - |E(G[S])|$ est maximum, est un ensemble j -dominant de G .*

La preuve du Théorème 3.3 permet de construire un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et j -dominant à partir d'un sous-ensemble j -indépendant. De tels ensembles existent quand $p = j$ avec $1 \leq j \leq \Delta$, et par conséquent pour chaque $1 \leq p \leq j \leq \Delta$ puisque pour $p' < p$, tout ensemble p -dominant est p' -dominant. La question naturelle est: Que se passe-t-il quand $1 \leq j < p \leq \Delta$?

Nous étudions maintenant le problème de l'existence d'un sous-ensemble de sommets d'un graphe donné qui est à la fois j -indépendant et p -dominant pour tous les entiers positifs $p, j \leq \Delta$.

Proposition 3.4. *Soit G un graphe de degré maximum Δ , G contient un sous-ensemble qui est à la fois 1-indépendant et Δ -dominant si et seulement si G contient un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant pour tous les entiers positifs $p, j \leq \Delta$.*

Preuve. Soit G un graphe de degré maximum Δ . Si $1 \leq p \leq j \leq \Delta$, alors d'après le Théorème 3.3 il existe un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant dans G . Puisque chaque ensemble 1-indépendant est j -indépendant dans G pour $j \geq 1$ et chaque ensemble Δ -dominant est p -dominant dans G pour $p \leq \Delta$, si $1 \leq j < p \leq \Delta$, alors il est clair que G contient un ensemble j -indépendant qui est p -dominant. La réciproque est évidente. \square

Proposition 3.5. *Un graphe r -régulier G contient un sous-ensemble qui est j -indépendant et p -dominant pour tous deux entiers $p, j \leq r$ si et seulement si G est biparti.*

Preuve. Si G contient un sous-ensemble qui est j -indépendant et p -dominant pour tous deux entiers $p, j \leq \Delta$, alors il contient un ensemble 1-indépendant qui est r -dominant. Cependant, il est facile de voir que G est biparti. Maintenant, soit $G = (A, B, E)$ un graphe biparti r -régulier, alors A (resp. B) est un ensemble 1-indépendant qui est r -dominant dans G et par la Proposition 3.4 G contient un sous-ensemble qui est j -indépendant et p -dominant pour tous deux entiers $p, j \leq r$. \square

Le graphe de Petersen (voir la Figure 3.1) a un sous-ensemble (sommets noirs) qui est à la fois 1-indépendant et 2-dominant mais il n'a pas un sous-ensemble qui est à la fois 1-indépendant et 3-dominant.

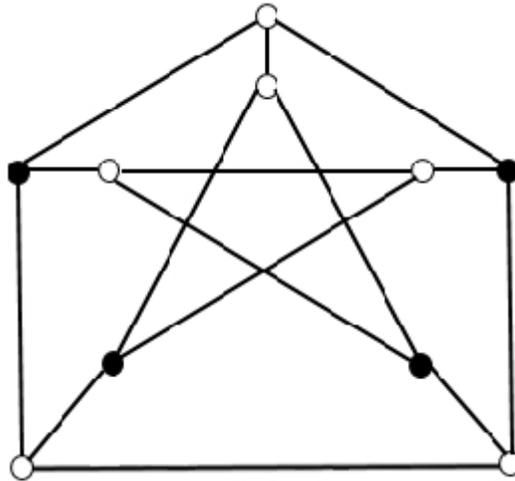


Figure 3.1: Graphe de Petersen

En particulier, le graphe complet n'a pas de sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant quand $j < p$.

Proposition 3.6. *Soit G un graphe complet d'ordre n , p et j deux entiers positifs tels que $p, j \leq \Delta$. Alors G contient un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant dans G si et seulement si $p \leq j$.*

Preuve. Soit G un graphe complet d'ordre n , p et j deux entiers positifs. Si $p \leq j$, alors par le Théorème 3.3 il existe un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant dans G . Si $p > j$, alors chaque ensemble j -indépendant dans G contient au plus j sommets et chaque ensemble p -dominant contient au plus p sommets. Alors, pour $p > j$ il n'existe pas un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant dans G . \square

Nous généralisons d'abord le résultat de Blidia et al. [46] par la caractérisation des arbres T qui vérifient $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ pour p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$.

Pour celà, la définition suivante est importante.

Définition 3.7. Soit T un arbre et p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$.

- (a) Un arbre non trivial T est dit un \mathcal{N}_p^j -arbre si T contient un sommet w de degré au moins $p - 1$ et pour tout sommet $x \in V(T) \setminus \{w\}$, $d_T(x) \leq j$. On appellera w le sommet spécial de T .
- (b) Un \mathcal{N}_p^j -arbre de sommet spécial w est dit exacte si $d_T(w) = p - 1$.
- (c) Un \mathcal{N}_p^j -arbre T de sommet spécial w est dit faible si $d_T(x) \leq j - 1$ pour tout sommet $x \in V(T) \setminus N[w]$.

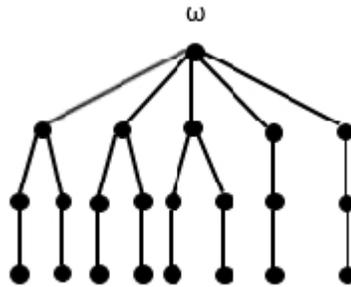


Figure 3.2: \mathcal{N}_5^4 -arbre



Figure 3.3: \mathcal{N}_5^4 -arbre faible et \mathcal{N}_5^4 -arbre exacte

L'étoile subdivisée $K_{1,p}$ est un exemple d'un \mathcal{N}_p^j -arbre pour $2 \leq j < p \leq \Delta$.

Proposition 3.8. *Si p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$ et T est un arbre obtenu à partir d'un \mathcal{N}_p^j -arbre T_0 de sommet spécial w en ajoutant une arête entre w et un sommet v d'un arbre T' , alors*

$$(1) \quad \beta_j(T) \leq \beta_j(T') + (|V(T_0)| - 1).$$

$$(2) \quad \gamma_p(T) \leq \gamma_p(T') - (|V(T_0)| - 1) \text{ avec égalité si } d_{T_0}(w) \geq p \text{ ou } d_{T'}(v) \leq p - 1.$$

Preuve. Soit T un arbre obtenu à partir d'un \mathcal{N}_p^j -arbre T_0 du sommet spécial w en ajoutant une arête entre w et un sommet v d'un arbre T' .

(1) Si S est un $\beta_j(T)$ -ensemble, alors $\beta_j(T) = |S| = |S \cap V(T')| + |S \cap V(T_0)| \leq \beta_j(T') + (|V(T_0)| - 1)$

(2) Soit S un $\gamma_p(T)$ -ensemble. Alors d'après l'Observation 1, S contient $V(T_0) \setminus \{w\}$ et sans perte de généralité $w \notin S$ sinon on remplace w dans S par v . Ainsi $S - (V(T_0) - \{w\})$ est un ensemble p -dominant de T' , alors $\gamma_p(T') \leq \gamma_p(T) - (|V(T_0)| - 1)$. Maintenant si $d_{T_0}(w) \geq p$ alors w est p dominé par ses voisins de T_0 et si $d_{T'}(v) \leq p - 1$ alors v est dans chaque $\gamma_p(T')$ -ensemble. Il s'ensuit que chaque $\gamma_p(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble p -dominant de T en ajoutant l'ensemble $V(T_0) \setminus \{w\}$, donc nous avons $\gamma_p(T) \leq \gamma_p(T') + (|V(T_0)| - 1)$ ce qui implique l'égalité. \square

Soient T un arbre et p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$.

Pour caractériser les arbres T contenant un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant, nous introduisons la famille des arbres \mathcal{A}_p^j de tous les arbres T obtenus à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$), où T_1 est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible du sommet spécial w de degré au moins p , $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par les deux opérations définies ci-dessous. Soit $A(T_1) = V(T_1) \setminus \{w\}$.

- **Opération \mathcal{T}_1 :** Ajouter un \mathcal{N}_p^j -arbre T_0 faible de sommet spécial w de degré au moins p et joindre w à un sommet T_i . Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$.

- **Opération \mathcal{T}_2 :** Ajouter un \mathcal{N}_p^j -arbre T_0 faible et exacte de sommet spécial w et joindre w à un sommet de $A(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$.

Nous énonçons un lemme.

Lemme 3.9. *Soit T un arbre et p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$. Si $T \in \mathcal{A}_p^j$, alors $A(T)$ est à la fois l'unique $\beta_j(T)$ -ensemble et l'unique $\gamma_p(T)$ -ensemble.*

Preuve. Soit T un arbre de \mathcal{A}_p^j . Alors, T est obtenu à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$), où T_1 est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible de sommet spécial w de degré au moins p , $T = T_k$, et, si $k \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par les opérations définies ci-dessus. Nous procéderons par induction sur k . Si $k = 1$, alors T est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible du sommet spécial w de degré au moins p , alors $A(T) = V(T) \setminus \{w\}$ est en effet à la fois l'unique $\beta_j(T)$ -ensemble et l'unique $\gamma_p(T)$ -ensemble. Cela établit le cas de base.

Supposons que $k \geq 2$, et le résultat est valable pour chaque arbre de \mathcal{A}_p^j qui peut être construit à partir d'une séquence de longueur au plus $k - 1$ opérations. Soit $T' = T_{k-1}$. En appliquant l'hypothèse d'induction sur T' on sait que $A(T')$ est à la fois l'unique $\beta_j(T')$ -ensemble et l'unique $\gamma_p(T')$ -ensemble. Soit T un arbre de \mathcal{A}_p^j obtenu à partir de T' . Nous considérons deux cas:

1^{er} Cas. T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{T}_1 .

Soit T_0 un \mathcal{N}_p^j -arbre faible du sommet spécial w de degré au moins p attaché à un sommet $v \in T'$. Soit $A(T) = A(T') \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$. Puisque chaque ensemble j -indépendant maximum de T' peut être étendu à un ensemble j -indépendant de T en ajoutant l'ensemble $V(T_0) \setminus \{w\}$, il en résulte que $\beta_j(T) \geq \beta_j(T') + (|V(T_0)| - 1)$. Par la Proposition 3.8 item (1) on a $\beta_j(T) = \beta_j(T') + (|V(T_0)| - 1)$. Par conséquent, il en résulte que $A(T)$ est un $\beta_j(T)$ -ensemble. Maintenant, puisque $d_{T_0}(w) \geq p$, tout ensemble p -dominant maximum de T' peut être étendu à un ensemble p -dominant de T en ajoutant l'ensemble $V(T_0) \setminus \{w\}$, il en résulte que $\gamma_p(T) \leq \gamma_p(T') + (|V(T_0)| - 1)$. Par la Proposition 3.8 item (2) on a $\gamma_p(T) = \gamma_p(T') + (|V(T_0)| - 1)$. Par conséquent, $A(T)$ est un $\gamma_p(T)$ -ensemble.

Comme chaque $\beta_j(T)$ -ensemble doit contenir $V(T_0) \setminus \{w\}$ il s'ensuit que $A(T)$ est l'unique $\beta_j(T)$ -ensemble.

Supposons maintenant que $A(T)$ n'est pas l'unique $\gamma_p(T)$ -ensemble et soit S un second $\gamma_p(T)$ -ensemble. Alors S doit contenir w sinon $S \setminus (V(T_0) \setminus \{w\})$ est un second $\gamma_p(T')$ -ensemble, contredisant l'unicité de $A(T')$. Aussi, $v \notin S$ et v a exactement $p - 1$ voisins dans $S \cap T'$ sinon $S \cap T'$ est un ensemble p -dominant de T' de taille inférieure à $A(T')$ ou v n'est pas p -dominé par S . Ainsi $S' = \{v\} \cup S \setminus \{w\}$ est un $\gamma_p(T)$ -ensemble et il en résulte que $S' \cap T' = A(T')$ ce qui implique que v est de degré $p - 1$ dans le sous-graphe induit par $A(T')$, contredisant le fait que $A(T')$ est un $\beta_j(T)$ -ensemble, puisque $j < p$.

2^{ème} Cas . T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{T}_2 .

Soit T_0 un \mathcal{N}_p^j -arbre faible exacte du sommet spécial w attaché à un sommet $v \in A(T')$. De même que ci-dessus, on a $\beta_j(T) = \beta_j(T') + (|V(T_0)| - 1)$. il en résulte que $A(T)$ est un $\beta_j(T)$ -ensemble. Par la Proposition 3.8 item (2) $\gamma_p(T') \leq \gamma_p(T) - (|V(T_0)| - 1)$ et puisque $A(T')$ peut être étendu à un ensemble p -dominant de T en ajoutant $V(T_0) - \{w\}$ on a $\gamma_p(T) \leq \gamma_p(T') + (|V(T_0)| - 1)$ ce qui implique l'égalité, il en résulte que $A(T)$ est un $\gamma_p(T)$ -ensemble. En utilisant un argument similaire comme avant, nous concluons que $A(T)$ est à la fois l'unique $\beta_j(T)$ -ensemble et l'unique $\gamma_p(T)$ -ensemble. \square

Théorème 3.10. *Si T est un arbre et p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$, alors les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$.
2. $\Delta(T) \leq j - 1$ ou $T \in \mathcal{A}_p^j$.
3. T a un unique $\beta_j(T)$ -ensemble qui est un unique $\gamma_p(T)$ -ensemble.

Preuve. (1) implique (2). Soient p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$ et T un arbre avec $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$. Supposons que $\Delta(T) \geq j$ et puisqu'il n'y a pas d'arbre T avec $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ et $j \leq \Delta(T) \leq p - 1$, donc $\Delta(T) \geq p$. Soit $B(T) = \{x \in V(T) / d_T(x) \geq p\}$. Nous procéderons par induction sur la taille de $B(T)$. Si $|B(T)| = 1$ alors $\gamma_p(T) = n - 1 =$

$\beta_j(T)$ et donc T est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible du sommet spécial de degré au moins p , donc $T \in \mathcal{A}_p^j$. Cela établit le cas de base.

Soit $|B(T)| \geq 2$ et supposons que chaque arbre T' avec $|B(T')| < |B(T)|$ tel que $\gamma_p(T') = \beta_j(T')$ est dans \mathcal{A}_p^j . Soit T un arbre avec $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ et S est un $\beta_j(T)$ -ensemble.

On enracine T à un sommet r d'excentricité maximale et soit w un sommet de degré au moins p de la distance maximale de r . Alors T_w est un \mathcal{N}_p^{p-1} -arbre (exacte). Soit u un parent de w dans l'arbre enraciné. Soit $T' = T \setminus T_w$. Alors $B(T') \neq \emptyset$ sinon comme supposé ci-dessus nous aurons $B(T) = \{w, u\}$ avec $d_T(u) = p$. Dans ce cas $\gamma_p(T) = n-1 > \beta_j(T)$, contradiction. D'après la Proposition 3.8, $\gamma_p(T) = \gamma_p(T') + |D(T_w)|$ et $\beta_j(T) \leq \beta_j(T') + |D(T_w)|$. Supposons que $\beta_j(T) < \beta_j(T') + |D(T_w)|$, alors $\gamma_p(T') + |D(T_w)| = \gamma_p(T) = \beta_j(T) < \beta_j(T') + |D(T_w)|$ ce qui implique que $\gamma_p(T') < \beta_j(T')$, contredisant la Proposition 3.2. Ainsi $\beta_j(T) = \beta_j(T') + |D(T_w)|$. Comme $D(T_w) \subset S$, nous concluons que $d_T(x) \leq j-1$ pour tout $x \in D(T_w) \setminus C(w)$ et $d_T(x) \leq j$ pour tout $x \in C(w)$. Alors, T_w est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible (exacte) du sommet spécial w de degré au moins p . A partir des deux égalités ci-dessus sur $\gamma_p(T)$ et $\beta_j(T)$ on a $\gamma_p(T') = \beta_j(T')$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à T' . Il en résulte que $T' \in \mathcal{A}_p^j$. Donc $T \in \mathcal{A}_p^j$ et peut être vu comme suit:

Si $d_T(w) \geq p+1$ alors T_w est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible du sommet spécial w , donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{T}_1 .

Si $d_T(w) = p$ alors T_w est un \mathcal{N}_p^j -arbre faible exacte du sommet spécial w , donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{T}_2 .

(2) implique (3). Si $\Delta(T) \leq j-1$ alors $V(T)$ est à la fois un unique $\beta_j(T)$ -ensemble qui est aussi un unique $\gamma_p(T)$ -ensemble. Maintenant si $T \in \mathcal{A}_p^j$ alors d'après le Lemme 3.9 $A(T)$ est à la fois un unique $\beta_j(T)$ -ensemble et un unique $\gamma_p(T)$ -ensemble.

(3) implique (1). Evidente. □

Corollaire 3.11. *Soit T un arbre et p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$. T a un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant si et seulement si $\Delta(T) \leq j-1$ ou $T \in \mathcal{A}_p^j$.*

Preuve. Soit T un arbre et p, j deux entiers positifs tels que $1 \leq j < p \leq \Delta$. Si T a un

sous-ensemble S qui est à la fois j -indépendant et p -dominant, alors $\gamma_p(T) \leq |S| \leq \beta_j(T)$. Alors, d'après la Proposition 3.2, on a $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$. D'après le Théorème 3.10 on a $\Delta(T) \leq j - 1$ ou $T \in \mathcal{A}_p^j$. L'inverse découle du Théorème 3.10. \square

Maintenant, la caractérisation des arbres contenant un sous-ensemble à la fois j -indépendant et p -dominant pour tous les entiers positifs $j, p \leq \Delta$ peut être donnée.

Si $1 \leq p \leq j \leq \Delta$, alors d'après le Théorème 3.3 il existe un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant dans T . Si $1 \leq j < p \leq \Delta$, d'après la Proposition 3.4 et le Corollaire 3.11, nous avons les résultats suivants.

Proposition 3.12. *Un arbre non trivial T a un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant pour tous deux entiers positifs $p, j \leq \Delta$ si et seulement si $T \in \mathcal{A}_\Delta^1$.*

3.2 (k,l)-plus-noyau dans les digraphes

Définition 3.13. *Un sous-ensemble N est un (k, l) -plus-noyau d'un digraphe $D = (V, A)$ si et seulement si N est un ensemble k -indépendant et l -plus-dominant de D (i.e $\Delta^+(N) \leq k - 1$ et $\forall u \in V \setminus N, |N_N^+(u)| \geq l$).*

Un digraphe tel que tout sous-digraphe induit a un (k, l) -plus-noyau est appelé (k, l) -plus-noyau parfait.

Un k -plus-noyau est un (k, k) -plus-noyau. Un noyau est 1-plus-noyau ou $(1, 1)$ -plus-noyau.

Il est clair que dans un digraphe D , si $k > \Delta^+(D)$ alors V est un (k, l) -plus-noyau de D . Donc, on peut supposer que $k \leq \Delta^+(D)$.

Le digraphe de la figure 3.4 admet $\{x_1, x_2, x_3\}$ comme $(2, 3)$ -plus-noyau.

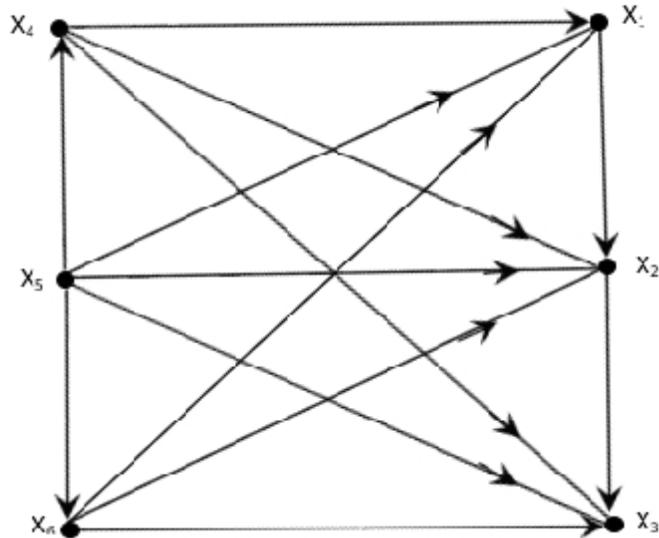


Figure 3.4: Un digraphe qui admet un
(2, 3) –plus-noyau

Observation 2. Soit D un digraphe et k, l deux entiers positifs tels que $l > \Delta^+(D)$. Alors D a un (k, l) -plus-noyau si et seulement si $k > \Delta^+(D)$.

Dans la suite nous supposons que $l \leq \Delta^+(D)$ et $k \leq \Delta^+(D)$.

Observation 3. Soit D un digraphe et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Si D admet un (k, l) -plus-noyau, alors pour tout l' tel que $l' \leq l$ et tout k' tel que $k \leq k' \leq \Delta^+(D)$, D admet un (k', l') -plus-noyau.

Notons qu'un ensemble (k, l) -plus-noyau de D est aussi un ensemble $(\Delta^+(D), 1)$ -plus-noyau de D .

Lorsqu'une propriété P relative à l'orientation du graphe non orienté associé à D (par exemple: un digraphe avec une orientation transitive, un digraphe orienté sans circuits etc...) est aussi satisfaite pour tout sous-digraphe de D , on dit que la propriété est héréditaire dans D .

Observation 4. *Soit D un digraphe avec une propriété héréditaire et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. D est (k, l) -plus-noyau parfait si et seulement si D a un ensemble (k, l) -plus-noyau.*

Puisque un digraphe $(n - 1)/2$ -régulier dont l'ordre est impair n'a pas un $(n - 1)/2$ -plus-noyau, la question qui se pose: quels sont les digraphes qui ont un (k, l) -plus-noyau?

Nous étudions le problème de l'existence de (k, l) -plus-noyau dans les digraphes, et nous généralisons quelques résultats classiques sur les noyaux dans les digraphes.

3.2.1 Digraphes symétriques

Théorème 3.14. *Si D est un digraphe symétrique et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Soit D un digraphe symétrique. Considérons $UG(D)$ le graphe non orienté associé à D . D'après le Théorème 3.3, il existe un sous-ensemble S qui est k -indépendant et k -dominant (voir Figure 3.5). Puisque tous les arcs de D sont symétriques, S est k -indépendant et k -plus-dominant dans D . Par conséquent S est un (k, k) -plus-noyau de D . D'après l'Observation 3, S est aussi un (k, l) -plus-noyau de D , pour $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Comme la propriété de la symétrie est héréditaire pour les sous-digraphes de D , et d'après l'Observation 4 D est (k, l) -plus-noyau parfait.

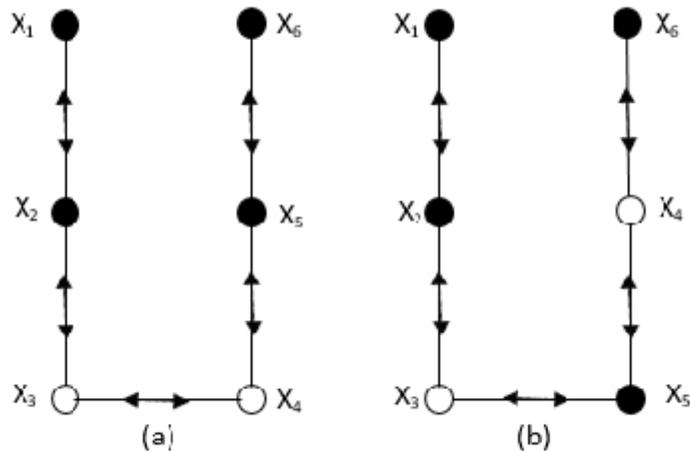


Figure 3.5: Un digraphe symétrique D tel que $UG(D) = P_6$

□

Figure 3.5 montre un digraphe D avec deux ensembles 2-indépendants maximaux dans $UG(D) = P_6$, le premier (a) (les sommets noirs) n'est pas un 2-plus-noyau dans D et le deuxième (b) (les sommets noirs) est un 2-plus-noyau et (2, 1)-plus-noyau dans D . Notons que dans D il n'existe pas un (1, 2)-plus-noyau.

Corollaire 3.15. *Si $D = (V, A)$ est un digraphe symétrique complet et k, l deux entiers positifs inférieurs ou égaux à $\Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait si et seulement si $l \leq k$.*

Preuve. D'après le Théorème 3.14, la condition nécessaire est vérifiée. Pour la condition suffisante, nous supposons qu'au contraire $l > k$. Puisque $D = (V, A)$ est un digraphe symétrique complet, tout ensemble k -indépendant S de D a un nombre de sommets inférieur ou égal à k . S'il n'existe pas de sommets dans $V \setminus S$, alors $S = V$ et $l > k > \Delta^+(S) = \Delta^+(D)$, contradiction. Sinon pour $x \in V \setminus S$, $|N_D^+(x) \cap S| \leq k < l$, ce qui implique que S n'est pas un (k, l) -plus-noyau de D et D n'est pas un digraphe (k, l) -plus-noyau parfait. □

Etant donné que pour $l > k$ il existe un digraphe symétrique qui n'a pas un ensemble

(k, l) -plus-noyau , la question intéressante est de caractériser les digraphes symétriques qui ont (k, l) -plus-noyau pour $l > k$.

Dans ce qui suit, nous donnons une réponse positive à cette question pour une classe spéciale de digraphes symétriques. En effet, nous caractérisons tous les digraphes symétriques D tels que $UG(D)$ est un arbre qui a (k, l) -plus-noyau pour chaque paire d'entiers $l > k$.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons caractérisé tous les arbres T contenant un sous-ensemble qui est à la fois k -indépendant et l -dominant pour tous les entiers positifs k, l avec $1 \leq k < l \leq \Delta$.

Le théorème suivant donne la famille des arbres orientés symétriques qui admettent un (k, l) -plus-noyau pour $1 \leq k < l \leq \Delta^+(D)$.

Théorème 3.16. *Si \overleftrightarrow{T} est un arbre orienté symétrique et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq k < l \leq \Delta^+(\overleftrightarrow{T})$, alors \overleftrightarrow{T} a un ensemble (k, l) -plus-noyau unique si et seulement si*

$$\Delta(UG(\overleftrightarrow{T})) \leq k - 1 \text{ ou } UG(\overleftrightarrow{T}) \in \mathcal{A}_l^k.$$

Preuve. Soit $UG(\overleftrightarrow{T}) = T$ tel $\Delta(T) \leq k - 1$ ou $T \in \mathcal{A}_l^k$. D'après le Corollaire 3.11 il existe un sous-ensemble S qui est à la fois l'unique k -indépendant et l'unique l -dominant dans l'arbre non orienté T . Puisque \overleftrightarrow{T} est symétrique, il est facile de voir que S est un unique ensemble (k, l) -plus-noyau de \overleftrightarrow{T} . Inversement, Soit S l'unique ensemble (k, l) -plus-noyau de \overleftrightarrow{T} avec k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq k < l \leq \Delta^+(\overleftrightarrow{T})$. Alors S est l'unique sous-ensemble qui est à la fois k -indépendant et l -dominant dans l'arbre non orienté T . Alors, $\gamma_l(T) \leq |S| \leq \beta_k(T)$. Puisque $k \leq l - 1$, $\beta_{l-1}(T) \geq \beta_k(T)$. D'après le Théorème 3.1, on en déduit que $\beta_{l-1}(T) \leq \gamma_l(T) \leq |S| \leq \beta_k(T) \leq \beta_{l-1}(T)$ et donc, $|S| = \beta_k(T) = \gamma_l(T)$. Par conséquent S est un sous-ensemble qui est à la fois l'unique ensemble k -indépendant maximum et l'unique ensemble l -dominant minimum de T . D'après le Théorème 3.10 $\Delta(T) \leq k - 1$ ou $T \in \mathcal{A}_l^k$. \square

De l'Observation 3 et le Théorème 3.16, On peut déduire le résultat suivant.

Corollaire 3.17. *Si \overleftrightarrow{T} est un arbre orienté symétrique et k, l deux entiers positifs, alors \overleftrightarrow{T} a un ensemble (k, l) -plus-noyau pour tout $1 \leq k, l \leq \Delta^+(\overleftrightarrow{T})$ si et seulement*

si $UG(\overleftrightarrow{T}) \in \mathcal{A}_\Delta^1$.

3.2.2 Digraphes transitifs

Nous montrons que pour un digraphe transitif D et pour k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, D est un digraphe (k, l) -plus-noyau parfait.

Théorème 3.18. *Si D est un digraphe transitif et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Soit D un digraphe transitif et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Puisque la propriété de transitivité est héréditaire pour les sous-digraphes induits de D , d'après l'Observation 3 et l'Observation 4, il suffit de prouver que D a un k -plus-noyau. La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets. Le théorème est trivial pour les digraphes de petit ordre. Si le nombre de sommets de $D = (V, A)$ est inférieur ou égal à k , alors $\Delta^+(D) < k$, donc V est un k -plus-noyau. Ainsi, On peut supposer sans perte de généralité que $|V| = n \geq k + 1$ et pour tout sous-digraphe D' de D dont l'ordre $n' < n$, D' admet un k -plus-noyau. Considérons la condensation $SC(D)$ du digraphe D . C'est clair que $SC(D)$ est un digraphe acyclique et chaque composante fortement connexe de D est complète et symétrique. Soit C_I la composante initiale de D (une composante fortement connexe avec $d_{SC(D)}^-(v(C_I)) = 0$). Soit D' le subdigraphe induit obtenu de D en supprimant tous les sommets de C_I . Puisque D' est un sous-digraphe transitif et contient moins de n sommets, D' possède un k -plus-noyau S' . Maintenant nous construisons le sous-ensemble k -plus-noyau de D comme suit.

S'il existe un sommet x de C_I tel que $d_{S'}^+(x) = |N_D^+(x) \cap S'| \geq k$, alors S' est un k -plus-noyau de D car tous les sommets y de C_I satisfont $d_{S'}^+(y) = d_{S'}^+(x) = |N_D^+(y) \cap S'| \geq k$, puisque D est transitif. S'il n'y a pas de sommet x tel que $d_{S'}^+(x) = |N_D^+(x) \cap S'| \geq k$, soit $S = S' \cup S''$ tel que S est un ensemble k -indépendant maximal dans D et $S'' \subseteq V(C_I)$. Il est facile de voir que S est un k -plus-noyau de D car chaque sommet de $V(C_I) \setminus S''$ a un degré d'au moins k dans S . Comme D est transitif, tous les sommets de $V(C_I) \setminus S''$ ont le même degré dans S (dans D). Donc D admet un k -plus-noyau. \square

3.2.3 Digraphes sans circuits et digraphes sans circuits impairs

Nous généralisons les résultats classiques de Von Neumann et Morgenstern [5] et Richardson [6, 51].

D'abord nous généralisons le résultat classique de Von Neumann et Morgenstern [5] .

Théorème 3.19. *Si D un digraphe sans circuits et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Soit D un digraphe sans circuits et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Puisque la propriété 'sans circuit' est héréditaire pour le sous-digraphe du D , d'après l'Observation 3 et l'Observation 4, il suffit de prouver que D a un k -plus-noyau. La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets. Le théorème est trivial pour les digraphes de petit ordre. Si $D = (V, A)$ est d'ordre inférieur ou égal à k , alors $\Delta^+(D) < k$, donc V est un k -plus-noyau. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que $|V| = n \geq k + 1$ et pour tout sous-digraphe D' de D avec l'ordre $n' < n$, D' admet un k -plus-noyau. Soit x un sommet source; c'est-à-dire $N_D^-(x) = \emptyset$. Comme le digraphe D est sans circuits, un tel sommet existe dans D et D n'a pas d'arc symétrique . Soit D' le sous-digraphe induit obtenu à partir de D en supprimant x . Puisque D' est sans circuits et contient moins de n sommets, D' possède un k -plus-noyau S' . On distingue deux cas:

1er cas . $|N_D^+(x) \cap S'| \geq k$. Alors S' est un k -plus-noyau de D car x a au moins k successeurs dans S' .

2ème cas. $|N_D^+(x) \cap S'| < k$. Comme $N_D^-(x) = \emptyset$, $S' \cup \{x\}$ est un ensemble k -indépendant et un ensemble k -plus-dominant. Donc, $S' \cup \{x\}$ est un k -plus-noyau de D .

Par conséquent, dans tous les cas D a un k -plus-noyau. □

Dans [7] Berge et Duchet montrent que:

Théorème 3.20. [7] *Un digraphe complet est noyau-parfait si et seulement si tout circuit a un arc symétrique.*

Théorème 3.21 ([8]). *Un digraphe tel que tout circuit a un arc symétrique est un digraphe noyau-parfait.*

Dans ce qui suit, nous généralisons le Théorème 3.20 à un digraphe (k, l) -plus-noyau parfait pour $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$ et nous construisons une famille de contre-exemples au Théorème 3.21 pour $k \geq 2$.

Proposition 3.22. *Si D est un digraphe complet et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait si et seulement si tout circuit dans D a un arc symétrique.*

Preuve. Nous montrons d'abord la condition suffisante. Soit D un digraphe complet tel que tout circuit a un arc symétrique et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Notons que pour chaque sous-digraphe D' de D , il existe un sommet source x dans $\text{Asym}(D')$ car $\text{Asym}(D')$ est sans circuits, alors $d_{D'}^+(x) = |V(D')| - 1$. Comme la propriété 'chaque circuit a un arc symétrique' est héréditaire pour le sous-digraphe D , d'après l'Observation 3 et l'Observation 4, il suffit de montrer que D a un k -plus-noyau. Si le nombre de sommets de $D = (V, A)$ est inférieur ou égal à k , alors $\Delta^+(D) < k$, donc V est un k -plus-noyau. Alors, sans perte de généralité on peut supposer que $|V| = n \geq k + 1$. Aussi un k -plus-noyau S dans un tel digraphe D avec l'ordre au moins $k + 1$, satisfait $|S| = k$, puisque le sous-digraphe contient un sommet source x tel que $d_S^+(x) = |S| - 1 \leq k - 1$ et pour $y \in V \setminus S$; $|N_D^+(y) \cap S| \geq k$. Maintenant, il suffit de prouver que D possède un k -plus-noyau. La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets. Le théorème est trivial pour les digraphes de petit ordre et pour tout sous-digraphe D' de D avec un ordre $n' < n$, D' admet un k -plus-noyau. Soit x un sommet source dans $\text{Asym}(D)$. Soit D' le sous-digraphe induit obtenu à partir de D en supprimant x . Par induction D' possède un k -plus-noyau S' . Comme $d_D^+(x) = |V(D)| - 1 \geq k \geq l$, S' est k -plus-noyau de D . Alors D admet un k -plus-noyau.

Maintenant, prouvons la condition nécessaire. Soit D un digraphe complet qui est un digraphe (k, l) -plus-noyau parfait et nous supposons au contraire qu'il existe un circuit qui n'a pas un arc symétrique. D'après Théorème 3.20 D n'est pas un 1-plus-noyau parfait, alors il n'est pas un (k, l) -plus-noyau parfait pour $k = l = 1$. \square

La Proposition 3.22 n'est pas vraie pour tout digraphe dont tout circuit a un arc symétrique où k, l sont des entiers positifs tels que $k \leq \Delta^+(D)$ (voir la figure 3.6).

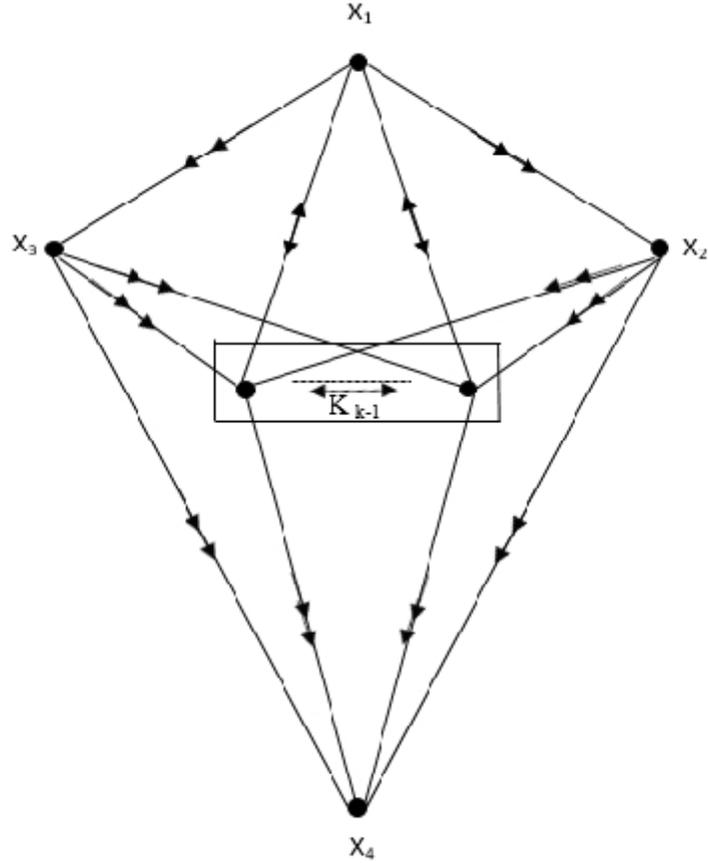


Figure 3.6: Un digraphe tel que chaque circuit a un arc symétrique

Proposition 3.23. *Pour tout $k \geq 2$, il existe un digraphe dont chaque circuit a un arc symétrique et qui n'a pas un k -plus-noyau.*

Preuve. Pour $k \geq 2$, le digraphe D dans la Figure 3.6 n'admet pas un k -plus-noyau. En effet, soit $\overleftrightarrow{K_{k-1}}$ un digraphe complet symétrique d'ordre $k-1$ (voir Figure 3.6). Supposons au contraire que D possède un k -plus-noyau S , alors x_4 et avec au plus une exception, tous les sommets de $\overleftrightarrow{K_{k-1}}$ doivent être dans S . Si tous les sommets de $\overleftrightarrow{K_{k-1}}$ sont dans S , alors $x_1, x_2, x_3 \notin S$, sinon S n'est pas un k -indépendant.

Puisque x_1 n'est pas k -plus-dominé, S n'est pas k -plus-dominant de D . Par conséquent S n'est pas un k -plus-noyau, contradiction. Si avec exactement une exception, tous les sommets de $\overleftrightarrow{K_{k-1}}$ sont dans S , alors $x_1, x_2, x_3 \in S$, sinon S n'est pas un k -plus-dominant. Comme $d^+(x_1) = k$, S n'est pas un k -indépendant de D . Par conséquent S n'est pas un

k -plus-noyau, contradiction. □

Rappelons qu'un digraphe biparti est un digraphe dont les sommets peuvent être partitionner en deux classes X et Y telles que les sommets dans la même classe ne sont pas adjacents. Nous désignons le digraphe biparti par $BD = (X, Y, A)$. Pour un sommet x dans X et $Y' \subseteq Y$ (respectivement y dans Y et $X' \subseteq X$), nous désignons par $d_{Y'}^+(x) = |N_{BD}^+(x) \cap Y'|$ (respectivement $d_{X'}^+(y) = |N_{BD}^+(y) \cap X'|$).

Théorème 3.24. *Si $BD = (X, Y, A)$ est un digraphe biparti et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors BD est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Puisque la propriété d'orientation bipartite est héréditaire pour les sous-digraphes induits de BD , d'après l'Observation 3 et l'Observation 4, il suffit de prouver que BD a un k -plus-noyau. Soit $BD = (X, Y, A)$ un digraphe biparti. Nous définissons les sous-ensembles

$$X_1(0), X_2(0), X_1(1), X_2(1), \dots, X_1(m), X_2(m) \text{ de } X$$

et les sous-ensembles

$$Y_1(0), Y_2(0), Y_1(1), Y_2(1), \dots, Y_1(m), Y_2(m) \text{ de } Y$$

comme suit.

$$X_1(0) = \{x \in X \mid d_Y^+(x) < k\}$$

$$Y_1(0) = \{y \in Y \mid d_X^+(y) < k\}$$

$$X_2(0) = \{x \in X \setminus X_1(0) \mid d_{Y_1(0)}^+(x) \geq k\}$$

$$Y_2(0) = \{y \in Y \setminus Y_1(0) \mid d_{X_1(0)}^+(y) \geq k\}$$

$$X_1(1) = \{x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0)) \mid d_{Y \setminus Y_2(0)}^+(x) < k\}$$

$$Y_1(1) = \{y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0)) \mid d_{X \setminus X_2(0)}^+(y) < k\}$$

$$X_2(1) = \{x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0) \cup X_1(1)) \mid d_{Y_1(0) \cup Y_1(1)}^+(x) \geq k\}$$

$$Y_2(1) = \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0) \cup Y_1(1)) \mid d_{X_1(0) \cup X_1(1)}^+(y) \geq k \right\}$$

$$X_1(m) = \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \mid d_{Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} Y_2(i)}^+(x) < k \right\}$$

$$Y_1(m) = \left\{ y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \mid d_{X \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} X_2(i)}^+(y) < k \right\}$$

$$X_2(m) = \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i) \cup X_1(i+1)) \mid d_{\bigcup_{i=0}^{m-1} Y_1(i)}^+(x) \geq k \right\}$$

$$Y_2(m) = \left\{ y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i) \cup Y_1(i+1)) \mid d_{\bigcup_{i=0}^{m-1} X_1(i)}^+(y) \geq k \right\}$$

Nous continuons cette procédure jusqu'à ce que nous terminons tous les sommets de BD . Soit r le plus petit entier tel que $X_1(r+1) = X_2(r+1) = \emptyset$ et soit p le plus petit

entier tel que $Y_1(p+1) = Y_2(p+1) = \emptyset$. Par la construction ci-dessus nous pouvons voir facilement que le sous-ensemble $S = \left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j) \right)$ est un k -plus-noyau de BD . En effet, puisque BD est un digraphe biparti les seuls arcs sont entre $X_1(i)$ et

$Y_1(j)$ où $i = 0, \dots, r$ et $j = 0, \dots, p$. Montrons que S est k -indépendant: soit $x \in S$. Si $x \in \bigcup_{i=0}^r X_1(i)$, alors il existe $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $x \in X_1(l)$, donc $d_{Y \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} Y_2(j)}^+(x) < k$. Si

$x \in \bigcup_{i=0}^p Y_1(j)$, alors il existe $l' \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $x \in Y_1(l')$, donc $d_{X \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(i)}^+(x) < k$.

Par La construction ci-dessus, nous pouvons voir que $\left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j) \right) \subset \left(Y \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} Y_2(j) \right)$ et

$\left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \right) \subset \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(i) \right)$. Par conséquent, $d_S^+(x) < k$. Montrons que S est k -plus-

dominant, soit $x \in V \setminus S$. Il est clair que $x \in \left[\left(\bigcup_{i=0}^r X_2(i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_2(j) \right) \right]$. Si $x \in$

$\bigcup_{i=0}^r X_2(i)$, alors il existe $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $x \in X_2(l)$ et par la construction ci-dessus

on a $d_{\bigcup_{i=0}^p Y_1(i)}^+(x) \geq k$. Si $x \in \bigcup_{j=0}^p Y_2(j)$, alors il existe $l' \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $x \in Y_2(l')$ et

par la construction ci-dessus on a $d_{\bigcup_{i=0}^r X_1(i)}^+(x) \geq k$. \square

Nous généralisons le résultat classique de Richardson [6, 51]

Théorème 3.25. *Si D est un digraphe sans circuits impairs et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Etant donné que la propriété 'sans circuits impairs' est héréditaire pour le sous-digraphe de D , d'après l'Observation 3 et l'Observation 4, il suffit de prouver que D a un k -plus-noyau. La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets. Le théorème est trivial pour les petits digraphes. Si $D = (V, A)$ est d'ordre inférieur ou égal à k , alors $\Delta^+(D) < k$, ainsi V est un k -plus-noyau donc, on peut supposer sans perte de généralité que $|V| = n \geq k + 1$ et pour tout sous-digraphe induit D' de D avec un ordre $n' < n$, D' admet un k -plus-noyau. Considérons la condensation $SC(D)$ du digraphe D . Il est clair que $SC(D)$ est un digraphe acyclique et chaque composante fortement connexe de D est un sous-digraphe biparti. Soit C_I la composante initiale de D (la composante fortement connexes avec $d_{SC(D)}^-(v(C_I)) = 0$). Soit D' le sous-digraphe induit obtenu à partir de D en supprimant tous les sommets de C_I . Comme D' est sans circuits impairs et contient moins de n sommets, D' possède un k -plus-noyau S' . Nous construisons le sous-ensemble k -plus-noyau de D comme suit.

Tout d'abord, nous supprimons tous les sommets x de C_I avec $d_{S'}^+(x) = |N_D^+(x) \cap S'| \geq k$. Soit C'_I le sous-digraphe induit de C_I obtenue en supprimant tous ces sommets. Puisque C_I est un sous-digraphe biparti, C'_I est aussi biparti. Nous appliquons maintenant la construction similaire utilisée dans la démonstration du Théorème 3.24.

Soit $C'_I = (X, Y, A(C'_I))$ un sous-digraphe biparti induit de D . Nous définissons les sous-ensembles

$$X_1(0), X_2(0), X_1(1), X_2(1), \dots, X_1(m), X_2(m) \text{ de } X$$

et les sous-ensembles

$$Y_1(0), Y_2(0), Y_1(1), Y_2(1), \dots, Y_1(m), Y_2(m) \text{ de } Y$$

en considérant S' , comme suit.

$$X_1(0) = \{x \in X \mid d_{Y \cup S'}^+(x) < k\}$$

$$Y_1(0) = \{y \in Y \mid d_{X \cup S'}^+(y) < k\}$$

$$\begin{aligned} X_2(0) &= \left\{ x \in X \setminus X_1(0) \mid d_{Y_1(0) \cup S'}^+(x) \geq k \right\} \\ Y_2(0) &= \left\{ y \in Y \setminus Y_1(0) \mid d_{X_1(0) \cup S'}^+(y) \geq k \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1(1) &= \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0)) \mid d_{Y \cup S' \setminus Y_2(0)}^+(x) < k \right\} \\ Y_1(1) &= \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0)) \mid d_{X \cup S' \setminus X_2(0)}^+(y) < k \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2(1) &= \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0) \cup X_1(1)) \mid d_{Y_1(0) \cup Y_1(1) \cup S'}^+(x) \geq k \right\} \\ Y_2(1) &= \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0) \cup Y_1(1)) \mid d_{X_1(0) \cup X_1(1) \cup S'}^+(y) \geq k \right\} \end{aligned}$$

⋮
⋮
⋮

$$\begin{aligned} X_1(m) &= \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \mid d_{Y \cup S' \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} Y_2(i)}^+(x) < k \right\} \\ Y_1(m) &= \left\{ y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \mid d_{X \cup S' \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} X_2(j)}^+(y) < k \right\} \\ X_2(m) &= \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i) \cup X_1(i+1)) \mid d_{\bigcup_{i=0}^{m-1} Y_1(i) \cup S'}^+(x) \geq k \right\} \\ Y_2(m) &= \left\{ y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i) \cup Y_1(i+1)) \mid d_{\bigcup_{i=0}^{m-1} X_1(i) \cup S'}^+(y) \geq k \right\} \end{aligned}$$

Nous continuons cette procédure jusqu'à l'épuisement de tous les sommets C'_I . Soit r le plus petit entier tel que $X_1(r+1) = X_2(r+1) = \emptyset$ et soit p le plus petit entier tel que $Y_1(p+1) = Y_2(p+1) = \emptyset$. Comme il n'y a pas d'arcs symétriques entre les composantes fortement connexes de D , Par la construction ci-dessus nous pouvons voir facilement que le sous-ensemble $S = S' \cup \left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j) \right)$ est un k -plus-noyau de D . Montrons que S est un k -indépendant, soit $x \in S$. Si $x \in S'$, alors $d_{S'}^+(x) < k$, puisque il n'y a pas d'arcs entre les sommets de S' et les sommets de $\left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j) \right)$, $d_S^+(x) < k$. Si $x \in \bigcup_{i=0}^r X_1(i)$, alors il existe $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $x \in X_1(l)$, donc $d_{Y \cup S' \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} Y_2(j)}^+(x) < k$. Si

$x \in \bigcup_{i=0}^p Y_1(j)$, alors il existe $l' \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $x \in Y_1(l')$, donc $d_{X \cup S' \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(i)}^+(x) < k$.

Par la construction ci-dessus, nous pouvons voir que $\left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j) \right) \subset \left(Y \cup S' \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} Y_2(j) \right)$

et $\left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \right) \subset \left(X \cup S' \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(i) \right)$. Par conséquent, dans tous les cas, nous avons $d_S^+(x) < k$. Montrons que S est un k -plus-dominant. Soit $x \in V \setminus S$, il est clair que

$x \in \left[\left(\bigcup_{i=0}^r X_2(i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_2(j) \right) \right]$. Si $x \in \bigcup_{i=0}^r X_2(i)$, alors il existe $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ tel que

$x \in X_2(l)$ et d'après la construction ci-dessus on a $d_{\bigcup_{i=0}^p Y_1(i) \cup S'}^+(x) \geq k$. Si $x \in \bigcup_{j=0}^p Y_2(j)$,

alors il existe $l' \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $x \in Y_2(l')$ et par la construction ci-dessus on a

$d_{\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \cup S'}^+(x) \geq k$. □

3.2.4 La fonction k -Grundy et la fonction caractéristique

Dans cette section, nous généralisons la notion de fonction Grundy donnée par Berge dans [1] à la fonction k -Grundy dans les digraphes où k est un entier positif et nous généralisons également quelques résultats concernant la fonction Grundy et la fonction caractéristique.

Définition 3.26. Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction k -Grundy si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. Si $g(x) = l > 0$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}; 0 \leq j < l$, il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x)$ avec $g(y) = j$.
2. Si $g(x) = l$, alors il existe au plus $(k - 1)$ sommets $y \in N_D^+(x)$ avec $g(y) = l$.

Théorème 3.27. Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Si D admet une fonction k -Grundy, alors $S = \{x \in V \mid g(x) = 0\}$ est un k -plus-noyau.

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un digraphe, $S = \{x \in V \mid g(x) = 0\}$ et y un sommet de D . On distingue deux cas.

Cas 1. $y \in S$. Alors $g(y) = 0$, d'après la condition 2 de la Définition 3.26 il existe au plus $(k - 1)$ sommets $x \in N_D^+(y)$ avec $g(x) = 0$. Par conséquent, $\Delta^+(S) < k$, Ce qui implique que S est k -indépendant.

Cas 2. $y \notin S$. Dans ce cas $g(y) = l > 0$, d'après la condition 1 de la Définition 3.26, pour tout $j \in \mathbb{N}; 0 \leq j < l$, il existe au moins k sommets $z \in N_D^+(y)$ avec $g(z) = j$. Par conséquent, pour $j = 0$, il existe au moins k sommets $z \in N_D^+(y)$ avec $g(z) = 0$, ce qui implique que $d_S^+(y) = |N_D^+(y) \cap S| \geq k$. Donc S est k -plus-dominant.

Notons qu'il existe des digraphes qui ont un k -plus-noyau mais ils n'ont pas de fonction k -Grundy (voir Figure 3.7). □

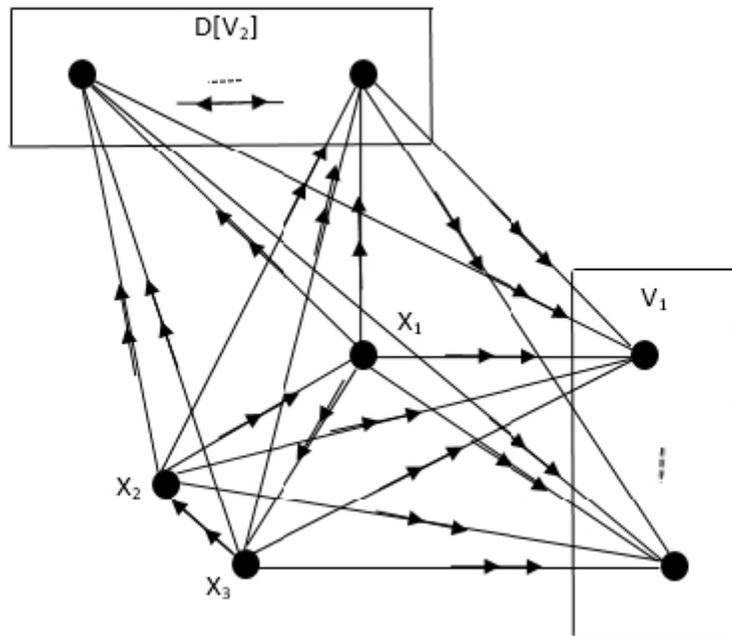


Figure 3.7: Un digraphe qui possède un k – plus-noyau
mais qui n'a pas une fonction k – Grundy

Proposition 3.28. *Pour tout $k \geq 2$, il existe un digraphe D qui a un k -plus-noyau et n'a pas de fonction k -Grundy.*

Preuve. Pour $k \geq 2$, soit $D = (V, A)$ le digraphe dont $V = V_1 \cup V_2 \cup \{x_1, x_2, x_3\}$ où V_1 est un ensemble indépendant de cardinalité k et $D[V_2] = \overleftrightarrow{K}_{k-1}$ est un digraphe symétrique complet d'ordre $k - 1$ comme dans la figure 3.7. V_1 est un k -plus-noyau de D . Nous

montrons que D n'admet pas une fonction k -Grundy. Supposons au contraire que D a une fonction k -Grundy g . D'après la Définition 3.26, il est clair que chaque sommet $v \in V_1$ (resp. $y \in V_2$) satisfait $g(v) = 0$ (resp. $g(y) = 1$). Par symétrie, nous ne considérons que les possibilités de la valeur de g prise par x_1 . Si $g(x_1) = 1$, alors $g(x_3) = 2$ et dans ce cas nous ne pouvons pas donner une valeur à $g(x_2)$. En effet, si $g(x_2) = 1$ alors la valeur de $g(x_1)$ contredit la condition 2 de la Définition 3.26. Si $g(x_2) = 2$ alors nous avons une contradiction avec la condition 1 de la Définition 3.26. Si $g(x_1) = 2$, alors $g(x_2) = 1$ et dans ce cas nous ne pouvons pas donner une valeur à $g(x_3)$. En effet, si $g(x_3) = 1$ alors la valeur de $g(x_2)$ contredit la condition 2 de la Définition 3.26. Si $g(x_3) = 2$ alors nous avons une contradiction avec la condition 1 de la Définition 3.26.

Théorème 3.29. *Si un digraphe $D = (V, A)$ est k -plus-noyau parfait, alors D admet une fonction k -Grundy.*

□

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Comme D est k -plus-noyau parfait, il admet un k -plus-noyau. Soit $N(0)$ un k -plus-noyau de D . Pour tout sommet v de $N(0)$, nous posons $g(v) = 0$. Nous allons définir une séquence d'ensembles $N(i)$ pour tout $i = 1, \dots, l$ comme suit. A l'étape i , puisque D est k -plus-noyau parfait, Le sous-digraphe $D[V \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} N(j)]$ admet un k -plus-noyau $N(i)$, pour tout sommet u of de $N(i)$, nous posons $g(u) = i$. Soit l le plus petit entier tel que $V \setminus \bigcup_{j=0}^l N(j) = \emptyset$. Si $g(x) = l$, alors il existe au plus $(k - 1)$ sommets $y \in N_D^+(x)$ avec $g(y) = l$. Si $g(x) = l > 0$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}; 0 \leq j < l$, il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x)$ avec $g(y) = j$. Ainsi, la fonction g définie ci-dessus est bien une fonction k -Grundy. □

Corollaire 3.30. *Soit $D = (V, A)$ un digraphe. D est k -plus-noyau parfait si et seulement si chaque sous-digraphe D' de D , D' admet une fonction k -Grundy.*

Corollaire 3.31. *Soit $D = (V, A)$ un digraphe.*

1. *Si D est un digraphe symétrique, alors il admet une fonction k -Grundy.*
2. *Si D est un digraphe transitif, alors il admet une fonction k -Grundy.*

3. Si D est un digraphe sans circuits, alors il admet une fonction k -Grundy.

4. Si D est un digraphe sans circuits impairs, alors il admet une fonction k -Grundy.

Une fonction caractéristique d'un sous-ensemble S dans le digraphe $D = (V, A)$ est une fonction $\varphi_S : V \rightarrow \{0, 1\}$ définie comme suit.

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Théorème 3.32. Soit $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif tel que $k \geq 2$. Un sous-ensemble S de V est un k -plus-noyau si et seulement si sa fonction caractéristique φ_S vérifie

$$\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}, \quad \forall x \in V.$$

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif tel que $k \geq 2$. Soit S un k -plus-noyau de D . Si $x \in S$, alors $\varphi_S(x) = 1$. Comme S est k -indépendant, $|N_D^+(x) \cap S| < k$, il existe au plus $(k - 1)$ sommets $y \in N_D^+(x)$ tels que $y \in S$, il existe donc au plus $(k - 1)$ sommets tels que $\varphi_S(y) = 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) < k$ et

$\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} < 1$. D'où $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor = 0$ et $\min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 0$. Par conséquent,

nous avons $\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$.

Si $x \notin S$, alors $\varphi_S(x) = 0$. Puisque S est k -plus-dominant, $|N_D^+(x) \cap S| \geq k$, il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x)$ tels que $y \in S$, donc il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x) \cap S$ et ainsi $\varphi_S(y) = 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) \geq k$ et $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \geq 1$.

D'où $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor \geq 1$ et $\min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 1$. Par conséquent, nous avons

$$\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$$

Inversement, soit φ_S la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$ avec $\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} \forall x \in V$. Si $x \in S$, alors $\varphi_S(x) = 1 = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$

D'où $\min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 0$ et $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor = 0$. Alors, $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} < 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) < k$ et $|N_D^+(x) \cap S| < k$. Alors, $d_S^+(x) < k$, $\forall x \in S$ c'est-à-dire $\Delta^+(S) < k$. Par conséquent S est k -indépendant. Si $x \notin S$, alors $\varphi_S(x) = 0 = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$, d'où $\min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 1$ et $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor \geq 1$.

Alors, $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \geq 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) \geq k$ et $|N_D^+(x) \cap S| \geq k$. Alors, $d_S^+(x) \geq k$, $\forall x \notin S$. Par conséquent S est k -plus-dominant. Ainsi, S est k -plus-noyau. \square

CONCLUSION

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude des concepts de j -indépendance et p -domination dans les graphes non orientés simples et celui du noyau dans les graphes orientés.

Dans un premier lieu, nous avons étudié le problème de la caractérisation des graphes non orientés contenant un sous-ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant pour deux entiers positifs $p, j \leq \Delta$. Nous avons caractérisé un arbre T qui satisfait $\gamma_p(T) = \beta_j(T)$ pour p, j deux entiers positifs tels $1 \leq j < p \leq \Delta$ et nous avons déduit la caractérisation de tous les arbres T contenant un sous-ensemble à la fois j -indépendant et p -dominant pour tous les entiers positifs p, j avec $1 \leq j < p \leq \Delta$.

Dans un second lieu, nous avons introduit un nouveau concept le ” (k, l) -plus-noyau” en généralisant quelques résultats classiques sur le noyau dans les graphes orientés et nous avons étudié le problème d'existence du (k, l) -plus-noyau dans certaines classes de graphes orientés.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Nous proposons des axes qui peuvent faire l'objet de travaux et de recherches ultérieures.

1. Caractériser les graphes bipartis qui admettent un ensemble qui est à la fois j -indépendant et p -dominant pour tout p, j deux entiers positifs.
2. Donner une preuve de la conjecture de P. Duchet.
3. Donner une preuve de la conjecture de Sands, Sauer et Woodrow.
4. Déterminer des algorithmes polynomiaux pour la recherche du (k, l) -noyau dans les digraphes et (k, l) -plus-noyau dans les digraphes.
5. Est-il vrai qu'un digraphe tel que chaque circuit impair a deux arcs symétriques, possède un k -plus-noyau?

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge, *Graphs*, North Holland, 1985.
- [2] C. Berge, *Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux*, Publ. Econométriques, Vol. 6, 1977.
- [3] V. Chvatal, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report CRM 300 Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [4] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. (North Holland, Amsterdam, 1973).
- [5] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University. Press, Princeton 1944.
- [6] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*, Ann. Math. 58, n° 2, 573–580, 1953.
- [7] C. Berge and P. Duchet, *Recent problems and results about kernels in directed graphs*, Discrete Math. 86, 27–31, 1990.
- [8] P. Duchet, *Graphes Noyau-Parfaits*, Ann. Discrete Math. 9, 93–101, 1980.
- [9] P. Duchet and H. Meyniel, *A note on kernel-critical graphs*, Discrete Math. 33, 103–105, 1981.
- [10] P. Duchet, *Représentations: Noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*, Thèse d'état, Université de Paris VI, 1979.
- [11] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Laura, *On kernel and semi-kernels of digraphs*, Discrete Math. 48, 67–76, 1984.
- [12] P. Duchet and H. Meyniel, *Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyau dans les graphes orientés*, Discrete Math. 43, 21–27, 1983.

- [13] V. Chvátal et L. Lovász, *Chaque graphe orienté a un semi-noyau*, Séminaire Hypergraph, Notes de cours en mathématiques, Springer-Verlag, Berlin, vol. 441, p. 175, 1974.
- [14] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, Anales del Instituto de Matemáticas, II UNAM, 1971.
- [15] M. Blidia, *Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes*, Thèse de Doctorat 3ème cycle, Université de Paris VI, 1984.
- [16] P. Duchet, *A sufficient condition for a graph to be kernel perfect*, *Journal of Graph Theory*. 11, 81-85, 1987
- [17] M. Blidia and A. Ramoul, *A note on Duchet's conjecture*, AKCE J. Graphs. Combin, 5, N°2, 127-134, 2008.
- [18] V. Chvatal, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report CRM 300 Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [19] A.S. Fraenkel, *Planar Kernel and Grundy with $d \leq 3, d_{out} \leq 2, d_{in} \leq 2$, are NP-complete*, *Discrete Appl. Math.* 3, 257–262, 1981.
- [20] Z. Zemir, *Recherche de noyaux dans les graphes orientés et graphes munis d'une orientation, étude algorithmique*, Thèse de Magister, Université de Blida, 1996.
- [21] M. Abbas, Y. Saoula, *Polynomial algorithms for kernels in comparability, permutation and P_4 -free graphs*, *A Quarterly Journal of Operations Research*, 40R 3, p.217-225, 2005.
- [22] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge coloured digraphs*, *J. Combin. Theory, Series. B* 33, 271-275, 1982 .
- [23] Shen Minggang, *On monochromatic paths in m -coloured tournaments*, *J. Combin. Theory Series. B* 45, 108-111, 1988.
- [24] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Note A counterexample to monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, *Discrete Math.*156, 103-112, 1996.

- [25] H. Galeana-Sánchez *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156, 103-112, 1996.
- [26] H. Galeana-Sánchez, *Kernel in edge-coloured digraphs*. Discrete Math. 184, 87-99, 1998.
- [27] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *A conterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Discrete Math. 282, 275–276, 2004.
- [28] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *Kernels and some operations in edge-coloured tournaments*, Discrete Math. 308, 6036–6046, 2008.
- [29] A. Ramoul, *Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes orientés*, Mémoire de Magister, Université de Blida, 2008.
- [30] H. Galeana-Sánchez, *Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph*, Discuss Math. Graph Theory 31, 273-281, 2011.
- [31] H. Galeana-Sánchez, R. Sánchez-López, *Kernel by monochromatic paths and color-perfect digraphs*, Discuss Math. Graph Theory 36, 309-321, 2016.
- [32] M. Kwásnik, *On (k, l) -kernels on graphs and their products*, Doctoral dissertation, Technical University of Wrocław, Wrocław, 1980.
- [33] M. Kwasnik, *The Generalization of Richardson's Theorem*, Discuss. Math. 4 , 11–14, 1981.
- [34] H. Galeana-Sánchez and C. Hernández-Cruz, *k -kernels in generalizations of transitive digraphs*, Discuss. Math. Graph Theory 31 n°2, 293-312, 2011.
- [35] W. Szumny, A. Włoch and I. Włoch, *On the existence and on the number of (k, l) -kernels in the lexicographic product of graphs*, Discrete Math. 308, 4616–4624, 2008.
- [36] H. Galeana-Sánchez, Xueliang Li, *Semikernel and (k, l) -kernels in digraph*, Discrete Math. 11, 340-346, 1998.

- [37] M. Kwaśnik, A. Włoc, I. Włoc, *Some remarks about (k, l) -kernels in directed and undirected graphs*, Discrete Math.13, 29-37, 1993.
- [38] D. Bród, A. Włoc, I. Włoc,, *On the existence of (k, l) -kernels in directed graphs*, Journal of Mathematics and applications,, 28, 7-12, 2006.
- [39] H. Galeana-Sánchez, *Note on the existence of (k, l) -kernels in digraph*, Discrete Math. 85, 99-102, 1990.
- [40] C. Ballbuena, H. Galeana-Sánchez, Mucuy-kak Guevara. *About (k, l) -kernels, semikernels and Grundy functions in partial line digraphs*. soumis
- [41] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [42] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater (eds), *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [43] J.F. Fink and M.S. Jacobson, *n-domination in graphs*. In Y. Alavi and A.J. Schwenk, editors, *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*. Wiley, New York, 1985, 283-300.
- [44] J.F. Fink and M.S. Jacobson, *On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs*. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*. Wiley, New York , 301-312, 1985.
- [45] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, and L. Volkmann, *k-domination and k-independence in graphs : a survey*. *Graphs Combin.* 281, 1–55, 2012.
- [46] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann, *Some bounds on p-domination numbers in trees*, Discrete Math. 306, 2031–2037, 2006.
- [47] O. Favaron, *On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k-domination and k-dependence*. *J. Combin. Theory Series B* 39, 101–102, 1985.

- [48] J.F. Fink, M.S. Jacobson: *On n -domination, n -dependence and forbidden subgraphs*. In: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science. Wiley, New York. 301–311, 1985.
- [49] A. Ramoul, M. Blidia, *A new generalization of kernels in digraphs*, Discrete Applied Mathematics, 217, 673–684, 2017.
- [50] A. Ramoul and M. Blidia, *Trees with a subset which is both j -independent and p -dominating for every p and j positive integers*, COSI2015 (ORAN).
- [51] M. Richardson, *Extension theorems for solutions of irreflexive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39, 649-652, 1953.