

MA-530-152-1

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Université Saâd DAHLAB-Blida 1



Faculté des Sciences
Département de Physique
Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnement-Matière
(LPTHIRM)

Mémoire de Master

présenté pour l'obtention du diplôme en :

PHYSIQUE NUCLÉAIRE



ÉQUATION DE SCHRÖDINGER POUR LE POTENTIEL DE WOODS-SAXON PAR LA MÉTHODE DE NIKIVOROF-OUVAROV : SOLUTION ANALYTIQUE POUR UN ÉTAT l -QUELCONQUE

présenté par :

TOUAT Khadidja

obtenu le 29 juin 2017 devant le jury composé de :

- | | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------|------------|
| Mr. M. BENTAIBA | Professeur | U. S. D.-Blida 1 | Président |
| Mr. A. MOUZALI | Maître de conférences B | U. S. D.-Blida 1 | Examineur |
| Mr. S.-A. YAHIAOUI | Maître de conférences B | U. S. D.-Blida 1 | Rapporteur |

Blida 2017

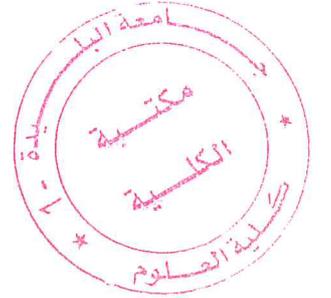
MA-530-152-1

المخلص

في هذه المذكرة، ركزنا بشكل خاص على حل معادلة شرودنغر لكمون وودز- ساكسون بطريقة نيكيفوروف-وفروف .

لحل هذه المشكلة، اخترنا تقريبا مناسباً لمدى الطرد المركزي باستخدام تقريب بيكيريس . حصلنا من الناحية التحليلية على طيف الطاقة و معادلة الموجة لكمون وودز- ساكسون وجدنا أن نتائجنا مقيدة لبعض الشروط المفروضة على الأرقام الكمومية (n, l) .

قمنا بتبرير ملاحظتنا لحسابات عددية عن طريق برنامج Mathematica طيف الطاقة و معادلة الطاقة لمختلف القيم الكمومية (n, l)



Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés particulièrement à la résolution de l'équation de Schrödinger pour le potentiel de Woods-Saxon par la méthode de Nikiforov-Ouvarov.

Afin de résoudre ce problème, nous avons choisi d'approximer le terme centrifuge en utilisant l'approximation de Pekeris. Nous avons obtenu analytiquement le spectre d'énergie ainsi que la fonction d'onde radiale du potentiel de Woods-Saxon. Nous avons constaté que nos résultats sont contraints à quelques conditions imposées aux nombres quantiques radial n et azimutal l , ainsi qu'à la profondeur du puits V_0 .

Nous avons justifié nos observations en calculant numériquement, via le langage formel MATHEMATICA, le spectre d'énergie pour les différentes valeurs de l . Et nous avons aussi tracé la fonction d'onde radiale pour quelques valeurs de n et l .

Abstract

In this work, we are particularly interested in solving the Schrödinger's equation for the Woods-Saxon potential using the Nikiforov-Uvarov method.

In order to solve this problem, we chose to approximate the centrifugal term using the Pekeris approximation. We obtained analytically the energy spectrum as well as the radial wave function of the Woods-Saxon potential. We found that our results are constrained by few conditions imposed on the quantum numbers n and l , as well as the depth of potential well V_0 . We justified our observations numerically, using the software program MATHEMATICA, by calculating the energy spectrum for the different values of l . We also depicted the radial wave function for some values of n and l .

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Résumé | ii |
| Abstract | iii |
| Table des matières | iv |
| Table des figures | vi |
| Liste des tableaux | vii |
| Remerciements | viii |
| Introduction | 1 |
| 1 La méthode de Nikiforov-Ouvarov | 3 |
| 1.1 Formalisme de la méthode de Nikiforov-Ouvarov | 3 |
| 1.1.1 Simplification de l'équation de base | 4 |
| 1.1.2 Cas particuliers | 6 |
| 1.1.3 Solution de l'équation hypergéométrique | 8 |
| 2 Le potentiel de Woods-Saxon | 12 |
| 2.1 Le modèle de la goutte liquide | 12 |
| 2.1.1 Formule semi-empirique de Beth et von Weizsäcker | 12 |
| 2.1.2 L'origine des termes de la formule de Bethe et von Weizsäcker : | 13 |
| 2.1.3 Limitation du modèle de la goutte liquide : détail des masses des noyaux | 16 |
| 2.2 Le modèle en couche | 16 |
| 2.2.1 Le modèle du champ moyen : le potentiel de Woods-Saxon : | 16 |
| 2.2.2 Approximation du potentiel de Woods Saxon par l'oscillateur harmonique : | 18 |
| 2.2.3 Effet de bord | 19 |
| 2.2.4 Le couplage spin-orbite | 19 |
| 2.3 L'approximation de Pekeris | 21 |
| 2.4 L'équation de Schrödinger pour le potentiel de Woods-Saxon | 21 |
| 3 L'Application de la méthode de Nikiforov-Ouvarov | 25 |
| 3.1 La solution analytique de l'équation de Schrödinger pour un état l -quelconque . | 25 |
| 3.1.1 Spectre d'énergie | 28 |
| 3.1.2 La fonction d'onde | 28 |

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| 3.2 Discussion des résultats et conclusion | 30 |
| Conclusion générale | 37 |
| A Dédution des formules (3.11), (3.17) et (3.19) | 39 |
| Bibliographie | 42 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Le Modèle du gaz de Fermi. | 15 |
| 2.2 | Écart en MeV entre les masses mesurées et le calcul dans le cadre du modèle de la goutte liquide en fonction du nombre de neutrons. Selon [35]. | 17 |
| 2.3 | L'allure du potentiel de Woods-Saxon pour $R_0 = 4.91$ fm, $a = 0.6$ fm et $V_0 = 47.78$ MeV. | 18 |
| 2.4 | Les nombres magiques en faisant l'approximation du potentiel de Woods-Saxon. Selon [28]. | 20 |
| 3.1 | La fonction d'onde du potentiel de Woods-Saxon pour $n = 0$ et $l = 1, 5, 10$ et 13 . L'axe vertical représente l'amplitude de la fonction d'onde radiale $R_{nl}(r)$, alors que l'axe horizontal représente la distance internucléaire r | 31 |
| 3.2 | La fonction d'onde du potentiel de Woods-Saxon pour $n = 0$ et $n \neq 0, l = 16, 18$. L'axe vertical représente l'amplitude de la fonction d'onde radiale $R_{nl}(r)$, alors que l'axe horizontal représente la distance internucléaire r . Le trait plein représente l'état $n = 0$, tandis que le trait en pointillé représente l'état $n = 1$ | 32 |
| 3.3 | L'allure du potentiel de Woods-Saxon pour les différentes valeurs de V_0 | 33 |

Liste des tableaux

- 2.1 Nombre de noyaux classés selon la parité ou l'imparité de Z et N. 15
- 3.1 Les valeurs d'énergies propres $-E_{n,l}$ pour l'atome du ^{56}Fe en MeV, pour $1 < l < 16$. 34
- 3.2 Les valeurs d'énergies propres $-E_{n,l}$ pour l'atome du ^{56}Fe en MeV, pour $24 < l < 63$. 35
- 3.3 Les valeurs d'énergies propres $-E_{n,l}$ pour l'atome du ^{56}Fe en MeV, pour $80 < l < 100$ 36

Remerciements

J'exprime tout d'abord mes vifs remerciements à mon directeur de mémoire monsieur Sid-Ahmed YAHIAOUI, d'avoir accepté de m'encadrer, et de me guider tout au long de la réalisation de ce travail. Je le remercie particulièrement pour l'attention accordée durant la partie rédaction.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers monsieur M. Bentaiba pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire, ainsi que monsieur A. Mouzali d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnement-Matière (LPTHIRM) en particulier, messieurs M. CHEKIRINE et M. ZILABDI, ainsi que demoiselles A. Cherfi et L. Ouzeri .

J'adresse mes plus vifs remerciements aux membres de ma famille. A mes très chers parents pour leur soutien tout au long de la réalisation de ce mémoire, sans oublié mes soeurs Zineb, Asma et Nesrine et ma cousine Lamisse.

Un grand merci aussi à mes amies Nesrine et son mari, Aida, Halima, Kahina. Ainsi, que toute la promo 2017 sans oublier Saib Imèn et Boukhalfa Salma.

Introduction

Depuis la conception de la mécanique quantique entre les années 1923 et 1927, la résolution des équations d'ondes a suscité beaucoup d'intérêt, aussi bien sur le plan non-relativiste (équation de Schrödinger) que dans le contexte relativiste (équation de Dirac et Klein-Gordon). Ces équations d'ondes contiennent toutes les informations nécessaires sur le système étudié. La solution des équations d'ondes a beaucoup d'intérêt dans des domaines variés de la physique moléculaire, atomique, subatomique et nucléaire.

Cependant, un très petit nombre de potentiels peuvent être résolu analytiquement pour des états $l \neq 0$, comme les potentiels de l'oscillateur harmonique, Coulomb, l'atome d'hydrogène, etc. Mais la plupart des potentiels qui décrivent les systèmes physiques ne sont pas exactement résolus pour $l \neq 0$ à cause l'existence du terme centrifuge. Néanmoins, de nombreux auteurs ont appliqué des différentes approximations pour le terme centrifuge. Parmi ces potentiels on trouve, les potentiels de Morse [1], Hulthen [2], Pöschl-Teller [3], Manning-Rosen [4, 5], Rosen-Morse [6] et le potentiel de Woods-Saxon [7-13]. Ce dernier a une importance capitale en physique nucléaire, puisque il décrit l'interaction d'un nucléon avec le reste des nucléons du noyau. L'approximation la plus largement utilisée est l'approximation de Pekeris [1, 7, 10, 14]; qui permet de réécrire, moyennant des approximations sur quelques fonctions (généralement jusqu'au deuxième ordre), de terme centrifuge sous une forme identique à celle du reste du potentiel, dans le but de l'absorber dans le potentiel étudié.

Jusqu'à présent, plusieurs méthodes ont été utilisées pour résoudre l'équation d'onde de manière analytique, tels que la méthode de la factorisation [14], la supersymétrie de la mécanique quantique (SUSY QM) [15], la théorie des groupes de Lie [16], les intégrales de chemin de Feynman [17], méthode d'itération asymptotique (AIM) [19-21] et la méthode de Nikiforov-Ouvarov [10, 11, 22, 23, 24]; cette dernière est basée sur la résolution d'une équation différentielle linéaire de second ordre, en la réduisant à une équation généralisée de type hypergéométrique.

Récemment, la méthode de Nikiforov-Ouvarov a montré sa puissance dans le calcul des niveaux d'énergie exacts de tous les états liés, pour certains systèmes quantiques solubles. Il serait donc important de résoudre l'équation de Schrödinger radiale non relativiste, pour le potentiel de Woods-Saxon, par la méthode de Nikiforov-Ouvarov pour des état $l \neq 0$, en utilisant l'approximation de Pekeris au niveau du terme centrifuge.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présenterons la méthode de Nikiforov-Ouvarov pour simplifier d'avantage les équations différentielles du second ordre à coefficients variables, dans le but de les transformer à des équations de types hypergéométriques et dont les solutions sont données par la formule de Rodrigues.

Dans le deuxième chapitre, nous verrons l'intérêt du potentiel de Woods-Saxon en physique nucléaire, afin de déduire la structure fine du noyau. Nous transformons ainsi l'équation de Schrödinger radiale à une équation différentielle du type Nikiforov-Ouvarov, en tenant compte de l'approximation de Pekeris.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de la méthode de Nikiforov-Ouvarov au potentiel de Woods-Saxon du chapitre précédent. Ce faisant, nous déduisons le spectre d'énergie, ainsi la fonction d'onde associée pour des états $l \neq 0$ quelconques, moyennant quelques contraintes sur les nombres quantiques n et l , et V_0 . Les résultats numériques ont été obtenus en utilisant le langage formel MATHEMATICA, version 10.

Pour finir, une conclusion générale conclut ce mémoire.

Chapitre 1

La méthode de Nikiforov-Ouvarov

Beaucoup des phénomènes physiques de la nature sont caractérisés par quelques équations différentielles de base. La résolution de ces équations nous permet d'avoir les informations nécessaires sur le système étudié. Pour cette raison nous allons présenter dans ce chapitre une méthode pour la résolution des équations différentielles linéaire de second ordre dont les solutions polynomiales sont données par la relation de Rodrigues.

La méthode de Nikiforov-Ouvarov est une méthode très puissante autant d'un point de vue mathématique que dans les applications en physique. Par exemple, elle s'avère être une technique très efficace pour résoudre des équations d'onde relativistes et non-relativiste (Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac, ...) pour les différents types d'énergie potentiels.

Ce chapitre est une synthèse tirée des deux références [22, 23]. Nous invitons le lecteur à les consulter pour plus d'information.

1.1 Formalisme de la méthode de Nikiforov-Ouvarov

L'équation réduite est une équation de base de la méthode de NO, elle a la forme suivante :

$$\psi''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\psi'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\psi(z) = 0, \quad (1.1)$$

dans lesquelles les fonctions $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, $\tilde{\tau}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1. $\psi(z)$ est une fonction de type hypergéométrique.

La variable z et les coefficients des polynômes $\tilde{\sigma}(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$ sont susceptibles de prendre toute valeur réelle ou complexe.

Les degrés des coefficients polynomiaux constituent les conditions aux limites de la méthode de NO. Si une équation différentielle de second ordre fournit ces conditions aux limites, elle peut être résolue au moyen des polynômes orthogonaux par la méthode de NO. En utilisant cette stratégie, on peut résoudre systématiquement (1.1) pour avoir les valeurs propres et les fonctions propres.

1.1.1 Simplification de l'équation de base

Essayons de mettre l'équation (1.1) sous une forme plus simple au moyen du changement $\psi(z) = \varphi(z)y(z)$ et d'un choix particulier de la fonction $\varphi(z)$. Ainsi, par le changement précédent, (1.1) se transforme en :

$$y''(z) + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right) y'(z) + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi' \tilde{\tau}}{\varphi \sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right) y(z) = 0. \quad (1.2)$$

En vue de rendre (1.2) plus simple, on donne au coefficient de y' la forme suivante :

$$2\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} = \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}, \quad (1.3)$$

dans laquelle $\tau(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1. On définit un polynôme du premier degré $\pi(z)$ tel que :

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \quad (1.4)$$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}, \quad \text{où} \quad \pi(z) = \frac{1}{2}(\tau(z) - \tilde{\tau}(z)). \quad (1.5)$$

De plus, le coefficient de $y(z)$ s'exprime comme suit

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2} = \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi' \tilde{\tau}}{\varphi \sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}, \quad (1.6)$$

où en combinant (1.4) et (1.5) avec (1.6), le polynôme $\bar{\sigma}(z)$ s'exprime par

$$\bar{\sigma} = \tilde{\sigma} + \pi^2 + \pi(\tilde{\tau} - \sigma') + \pi' \sigma. \quad (1.7)$$

En insérant les seconds membres de (1.3) et (1.6) dans (1.2), on obtient :

$$y''(z) + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y'(z) + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y(z) = 0. \quad (1.8)$$

Les fonctions $\tau(z)$ et $\bar{\sigma}(z)$ sont deux polynômes de degrés non supérieur à 1 et 2 respectivement, (1.8) est donc de même type que (1.1). Nous avons trouvé de cette façon la classe des transformations qui laisse inchangé le type de l'équation : ce sont les transformations qu'on fait subir à (1.1) en opérant le changement $\psi(z) = \varphi(z)y(z)$, où $\varphi(z)$ vérifie (1.5) quelque soit le polynôme du premier degré $\pi(z)$ de telle façon que le polynôme de $\bar{\sigma}(z)$ vérifie l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z), \quad (1.9)$$

où λ est un paramètre.

En insérant (1.9) dans (1.8), on trouve :

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (1.10)$$

Nous dirons que (1.10) est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions sont des fonctions de types hypergéométriques. On appelle (1.10) l'équation généralisée du type hypergéométrique.

Pour définir le polynôme $\pi(z)$ et le paramètre λ , on substitue (1.5) dans (1.10), on obtient l'équation du second ordre en terme de $\pi(z)$:

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0 \quad (1.11a)$$

$$k = \lambda - \pi'(z), \quad (1.11b)$$

et en résolvant (1.11a) en terme de $\pi(z)$, on trouve :

$$\pi(z) = \frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(z) + k\sigma(z)}. \quad (1.12)$$

Pour obtenir les solutions possibles selon les signes plus et moins de (1.12), le paramètre k dans le signe racine carré doit être connu explicitement. Pour fournir cette exigence, le polynôme sous la racine carré doit être un carré parfait donc son discriminant est nul, puisque $\pi(z)$ est

un polynôme de degrés supérieur à 1. Dans ce cas, une équation de la forme quadratique est disponible pour la constante k . Après avoir déterminé les deux expressions de k_{\pm} , on obtient les différentes expressions du polynôme $\pi(z)$ à partir de (1.12). Le choix de ce dernier est porté si et seulement si la fonction $\tau(z)$ possède une dérivé négative. Ayant l'expression de $\pi(z)$, il est possible de déduire l'expression de λ .

Grâce à la transformation proposée, on aura à discuter au lieu de (1.1) une équation plus simple de type (1.10).

1.1.2 Cas particuliers

Voyons quelques cas particuliers concernant le choix du polynôme $\sigma(z)$:

1. Si le polynôme $\sigma(z)$ admet des racines multiples, i.e. $\sigma(z) = (z - a)^2$; il suffit de faire le changement $z - a = 1/s$ pour ramener (1.1) à la forme

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{2 - s\tilde{\tau}(a + 1/s)}{s} \frac{d\psi}{ds} + \frac{s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)}{s^2} \psi = 0. \quad (1.13)$$

Les expressions $s\tilde{\tau}(a + 1/s)$ et $s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)$ sont deux polynômes de degré non supérieur à 1 et 2 respectivement en s . Aussi l'équation (1.13) est une équation du type (1.1) dont le polynôme $\sigma(s)$ est égale à s et n'admet pas de racines multiples.

2. Pour $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$, (1.1) s'exprime sous la forme suivante :

$$z^2\psi'' + z\psi' + (z^2 - \nu^2)\psi = 0, \quad (1.14)$$

En faisant le changement $\psi = \varphi(z)y$, (1.14) est un cas particulier de (1.1), c'est une équation dite de Bessel. Le radicande de (1.12) se présente alors sous la forme $-z^2 + kz + \nu^2$.

Annulant le discriminant de ce trinôme du second degré, on obtient l'équation pour la constante k :

$$k^2 + 4\nu^2 = 0, \quad (1.15)$$

d'où $k = \pm 2i\nu$. On a donc en vertu de (1.12)

$$\pi(z) = \pm\sqrt{-z^2 + \nu^2 \pm 2i\nu z} = \pm(iz \pm \nu). \quad (1.16)$$

Ainsi donc, dans le cas considéré, le polynôme peut se mettre sous quatre formes différentes.

Plaçons nous dans le cas où $k = 2i\nu$, $\pi(z) = iz + \nu$ par exemple. La formule (1.11b) nous donne

$$\lambda = k + \pi' = i(2\nu + 1). \quad (1.17)$$

Finalement (1.10) devient

$$zy'' + (2iz + 2\nu + 1)y' + i(2\nu + 1)y = 0. \quad (1.18)$$

3. Pour $\sigma(z) = 1$ et si l'expression de $(\tilde{\tau}/2)^2 - \tilde{\sigma}$ est un polynôme de premier degré, il n'est pas possible de réduire (1.1) à une équation de type (1.10). Dans ce cas, pour réduire (1.1) à une forme plus simple, on peut choisir le polynôme $\pi(z)$ dans (1.5) de la condition $\tau(z) = 0$. Alors $\tilde{\sigma}(z)$ devient un polynôme du premier degré, et (1.18) s'écrit

$$y'' + (az + b)y = 0. \quad (1.19)$$

4. Un autre cas dans les équations de types hypergéométriques est la solution d'un système d'équations différentielles du premier ordre

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}(z)u_1 + a_{12}(z)u_2 \\ u_2' = a_{21}(z)u_1 + a_{22}(z)u_2 \end{cases}, \quad (1.20)$$

aux coefficients $a_{ik}(z) = \frac{\tau_{ik}(z)}{\sigma(z)}$, où $\tau_{ik}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1, et $\sigma(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 2. En éliminant la fonction $u_2(z)$ dans (1.20), on obtient l'équation définissant $u_1(z)$:

$$u_1'' - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} \right) u_1 + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}\frac{a'_{12}}{a_{12}} - a'_{11} \right) u_1 = 0. \quad (1.21)$$

Puisque $\frac{a'_{12}}{a_{12}} = -\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\tau'_{12}}{\tau_{12}}$, (1.21) sera une équation du type hypergéométrique pour $\tau'_{12} = 0$. Si $\tau'_{12} \neq 0$, on peut effectuer la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 \\ v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2 \end{cases}, \quad (1.22)$$

où α, β, γ et δ sont des constantes. On obtient alors un système d'équations de type

$$\begin{cases} v_1' = \tilde{a}_{11}(z)v_1 + \tilde{a}_{12}(z)v_2 \\ v_2' = \tilde{a}_{21}(z)v_1 + \tilde{a}_{22}(z)v_2 \end{cases}, \quad (1.23)$$

tel que les fonctions $\tilde{a}_{ik}(z)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $a_{ik}(z)$ à coefficients constants dépendant de α, β, γ et δ , elles s'écrivent sous la forme

$$\tilde{a}_{ik}(z) = \frac{\tilde{\tau}_{ik}(z)}{\sigma(z)}. \quad (1.24)$$

où $\tilde{\tau}_{ik}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1

En choisissant les coefficients α, β, γ et δ de façon à avoir $\tau'_{12} = 0$ (ce qui est toujours possible), on obtient, après avoir éliminé la fonction $v_2(z)$ entre (1.22), une équation généralisée du type hypergéométrique pour la fonction $v_1(z)$.

Le cas où $\sigma(z)$ est un polynôme du premier degré, on peut passer de (1.20) à l'équation généralisée du type hypergéométrique par un procédé différent, en choisissant les constantes α, β, γ et δ de telle façon que le coefficient \tilde{a}_{12} soit indépendant de z , i.e. $\tilde{\tau}_{12} = v\sigma(z)$ (v étant une constante)

1.1.3 Solution de l'équation hypergéométrique

Discutons maintenant l'équation de type hypergéométrique suivante :

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (1.25)$$

et montrons que les dérivées d'ordre quelconque des fonctions du type hypergéométrique sont encore des fonctions du type hypergéométrique. A cet effet, dérivons (1.25) et prenons $v_1(z) = y'(z)$, on trouve l'équation suivante :

$$\sigma(z)v_1'' + \tau_1(z)v_1' + \mu_1 v_1 = 0, \quad (1.26)$$

où le polynôme $\tau_1(z)$ est de degré non supérieur à 1, donné par :

$$\tau_1(z) = \tau(z) + \sigma'(z) \quad \text{et} \quad \mu_1 = \lambda + \tau'(z), \quad (1.27)$$

et μ_1 est indépendant de z . Il est évident que (1.26) est une équation de type hypergéométrique.

La réciproque est aussi vraie : chaque solution de (1.26), pour $\lambda \neq 0$, est la dérivée d'une solution de (1.25).

Soit, en effet, $v_1(z)$ une solution de (1.26) dont l'origine est (1.25). Alors, ces deux solutions devraient vérifier la relation suivante :

$$y(z) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(z)v_1' + \tau(z)v_1]. \quad (1.28)$$

Montrons que la fonction $y(z)$ de (1.28) vérifie (1.25) et que sa dérivée se confond avec $v_1(z)$

$$\lambda y' = -[\sigma(z)v_1'' + \tau_1(z)v_1 + \tau'(z)v_1], \quad (1.29)$$

d'où effectivement $y'(z) = v_1(z)$. En portant $v_1(z) = y'(z)$ dans l'expression de $y(z)$, on retrouve (1.25) pour $y(z)$.

Prenons la nouvelle représentation $v_2(z) = y''(z)$, la seconde dérivation de (1.25) donne :

$$\sigma(z)v_2'' + \tau_2(z)v_2' + \mu_2 v_2 = 0, \quad (1.30)$$

où comme au premier cas, le polynôme $\tau_2(z)$ et le coefficient μ_2 sont

$$\tau_2(z) = \tau_1(z) + \sigma'(z) = \tau(z) + 2\sigma'(z) \quad \text{et} \quad \mu_2 = \mu_1 + \tau'(z) = \lambda + 2\tau'(z) + \sigma''(z). \quad (1.31)$$

D'une façon analogue, on peut obtenir par récurrence, pour toute fonction $v_n(z) = y^{(n)}(z)$ une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)v_n'' + \tau_n(z)v_n' + \mu_n v_n = 0, \quad (1.32)$$

et dont les relations de récurrence générales pour τ_n et μ_n sont respectivement données :

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z) \quad \text{et} \quad \mu_n = \lambda + n\tau'(z) + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\sigma''(z). \quad (1.33)$$

Toute solution de (1.32) pour $\mu_k \neq 0$ et $k = 0, 1, \dots, n-1$ est sous la forme $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, où $y(z)$ est une solution de (1.25). Grâce à cette propriété, on peut construire la famille des

solutions particulière de (1.25) pour des valeurs déterminées de λ .

En effet, pour $\mu_n = 0$, (1.32) admet une solution particulière $v_n(z) = \text{const.}$ Puisque $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, cela revient à dire que l'équation de type hypergéométrique admet une solution particulière $y(z) = y_n(z)$ qui est un polynôme de degré n . De telles solutions seront appelées polynômes de type hypergéométrique. Les polynômes $y_n(z)$ sont les solutions les plus élémentaires de (1.25).

Afin d'expliciter le polynôme $y_n(z)$, multiplions (1.25) et (1.32) par les fonctions poids $\rho(z)$ et $\rho_n(z)$ qui permettent d'écrire ces équations sous forme auto-adjointe

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \tag{1.34}$$

$$(\sigma\rho_n v_n)' + \mu_n\rho_n v_n = 0. \tag{1.35}$$

Ici les fonctions $\rho(z)$ et $\rho_n(z)$ vérifient les équations suivantes :

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho \quad \text{et} \quad (\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n, \tag{1.36}$$

En faisant intervenir l'expression explicite de $\tau_n(z)$, on établit une relation entre les fonctions $\rho_n(z)$ et $\rho_0 \equiv \rho(z)$. On a :

$$\frac{(\sigma\rho_n)'}{\rho_n} = \tau + n\sigma' = \frac{(\sigma\rho)'}{\rho + n\sigma'}, \quad \text{avec} \quad \frac{\rho'_n}{\rho_n} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{n\sigma'}{\sigma}, \tag{1.37}$$

$$\rho_n(z) = \sigma_n(z)\rho(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.38}$$

Comme $\sigma\rho_n = \rho_{n+1}$ et $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, (1.35) se laisse transcrite sous la forme :

$$\rho_n v_n = -\frac{1}{\mu_k} (\rho_{n+1} v_{n+1})', \tag{1.39}$$

d'où, pour tout $m < n$, on déduit successivement :

$$\rho_m v_m = \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) (\rho_{m+2} v_{m+2})'' = \dots = \frac{A_m}{A_n} (\rho_n v_n)^{(n-m)} \tag{1.40}$$

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \tag{1.41}$$

Si la fonction $y(z)$ est un polynôme de degré n , i.e. $y = y_n(z)$, il vient que $v_n(z) =$

$y^{(n)}(z) = \text{const}$, et on exprime $y_n^{(m)}(z)$ comme suit

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\rho_n(z)} [\rho_n(z)]^{(n-m)}, \quad (1.42)$$

avec

$$A_{mn} = A_m(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(z) \quad (1.43)$$

où B_n est une constante de normalisation.

On en déduit en particulier, pour $m = 0$, l'expression explicite des polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} [\sigma^n(z)\rho(z)]^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.44)$$

Ainsi, (1.44) définit les solutions polynomiales de (1.25) d'une façon univoque, elle donne la solution des fonctions propres de l'équation différentielle. Ces solutions correspondent aux valeurs propres $y_n(z)$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.45)$$

La solution (1.44) est appelée formule de Rodrigues, le nom de son auteur qui l'a établie en 1814 pour un cas particulier des polynômes du type hypergéométriques, à savoir pour les polynômes de Legendre, où avec $\sigma(z) = 1 - z^2$ et $\rho(z) = 1$.

Chapitre 2

Le potentiel de Woods-Saxon

Le potentiel de Woods-Saxon est un potentiel central et réaliste, il a été proposé pour la première fois en 1954 par R. Woods et P. Saxon. Ils ont mis en évidence ce potentiel pour décrire l'interaction d'un seul nucléon avec le reste des nucléons du noyau, dans le cadre du modèle du champ moyen.

La diffusion élastique d'un électron de haute énergie sur les noyaux constitue la première source d'information sur la distribution de charge nucléaire, et ce potentiel a été vérifié par un calcul d'approximation de cette densité de charge. Le potentiel de Woods-Saxon suppose que la densité des neutrons a approximativement la même forme que celle des protons [27].

Il a suscité beaucoup d'intérêt dans la physique nucléaire [11] pour étudier la structure des noyaux. En effet, l'objectif particulier de ce chapitre est de discuter l'intérêt d'utiliser le potentiel de Woods-Saxon afin de déduire la structure des noyaux.

2.1 Le modèle de la goutte liquide

2.1.1 Formule semi-empirique de Beth et von Weizsäcker

La courte portée des forces nucléaires, l'additivité des volumes et énergies de liaison, sont à la base du premier modèle nucléaire établi par von Weizsäcker et Niels Bohr au milieu des années trente. Il permet d'obtenir les propriétés des noyaux comme leur énergie de liaison, leur rayon, leur stabilité vis-à-vis de la radioactivité [29, 32].

Dès 1935, von Weizsäcker a proposé une approche semi-empirique de la masse des noyaux, donc de l'énergie de liaison. Mais en 1936, Bethe et Bacher ont simplifié d'avantage la formule

de von Weizsäcker et ils ont obtenu la formule de masse semi-empirique connue sous le nom de formule de masse de Bethe et von Weizsäcker [26]. Selon cette approche, la formule de l'énergie de liaison est particulièrement intuitive :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} \pm a_p A^{-1/2}, \quad (2.1)$$

dont les coefficients de l'expression sont de gauche à droite : l'énergie de volume, l'énergie de surface, l'énergie coulombienne, l'énergie d'asymétrie et l'énergie d'appariement. Pour établir cette formule, on suppose que le noyau est une goutte liquide de matière nucléaire et chaque terme a une signification physique que nous allons expliciter [30].

2.1.2 L'origine des termes de la formule de Bethe et von Weizsäcker :

1. Énergie de volume :

Si on fait l'hypothèse que le noyau ressemble à ce que l'on connaît d'une goutte liquide, alors chaque nucléon sera entouré par une couche de nucléon à l'extérieur, son énergie de liaison doit être proportionnel au nombre de ses constituants ; c'est-à-dire, au volume des nucléons qui l'entourent ce qui donne une forme $B = a_v A$, où a_v est une constante. Cependant, procéder ainsi suppose que l'on traite le problème d'une matière nucléaire infinie, dont laquelle les effets de surface sont négligeables. Ceci suppose également que l'on néglige la répulsion coulombienne des protons, qui croît à mesure que Z augmente, ainsi que certains traits caractéristiques de l'interaction nucléon-nucléon [35, 31].

2. Énergie de surface :

Les nucléons intérieurs subissent des forces de façon isotrope, ceux de la surface ne subissent de force que venant de l'intérieur. Ainsi, le terme $a_v A$ surestime la liaison totale puisque le noyau n'est pas infini. Le nombre de liaisons perdues est proportionnel au nombre de nucléons sur la surface. En assimilant la goutte nucléaire à une sphère, sa surface est donnée par $4\pi r_0^2 A^{2/3}$ et la correction à apporter peut être mise sous la forme $(\Delta B)_s = -a_s A^{2/3}$, où a_s est une constante en principe proportionnelle à a_v et à l'épaisseur de surface [35].

On notera d'après la figure 1.2 que ce terme est loin d'être négligeable, il contribue même aux cas des noyaux légers.

3. Énergie coulombienne :

Les nucléons (neutrons et protons) interagissent par les forces nucléaires attractives, mais les protons sont chargés positivement et ils ont tendance à se repousser comme le ferait toutes charges du même signe. L'interaction coulombienne est plus faible que l'interaction nucléaire, mais de longue portée contrairement à la première. Ce terme est le seul qui soit calculable directement, il est plus faible que les termes nucléaire pour les petites valeurs de Z , il favorise un excès de neutrons par rapport aux protons [30].

4. Énergie d'asymétrie :

La coexistence au sein du noyaux de deux ensembles de particules différents (neutrons et protons) conduit à expliquer ce terme par une approche quantique, qui s'appelle le model du gaz de Fermi et qui traite le noyau comme une superposition de deux gaz (de neutrons et de proton) dans un puits de potentiel placés à des niveaux d'énergie bien définis. Chaque niveau occupé obéit au principe d'exclusion de Pauli.

Les protons étant chargés positivement, ils se repoussent mutuellement cela induit une diminution de l'énergie de liaison due à la répulsion électrostatique a_c , ce qui induit une différence de profondeur du puits qui est plus grande pour les protons par rapport à celui des neutrons.

Dans le Modèle du gaz de Fermi, les nucléons sont déposés dans le puits nucléaire comme il est indiqué sur la figure 2.1. Ceux qui possèdent la plus grande énergie cinétique de l'ordre de $E_F = 37 \text{ MeV}$ en l'occurrence, occupent le *niveau de Fermi*¹. Pour empêcher le nucléon de sortir du puits, il faut que sa profondeur soit inférieure à -37 MeV . Plus précisément, puisqu'il faut fournir en moyenne une énergie $S = 8 \text{ MeV}$ (ordre de grandeur de B/A) pour faire sortir un nucléon du puits, cette profondeur sera donnée par [34]

$$V_0 = -(E_F + S) \simeq -47 \text{ MeV} \quad (2.2)$$

5. Énergie d'appariement :

C'est un deuxième effet quantique qui joue un rôle dans l'énergie de liaison. Les nucléons ayant un spin demi-entier ont tendance à s'apparier deux à deux, pour se grouper pré-

¹C'est le dernier niveau remplie correspond au niveau du nucléon le plus faiblement lié et qui peut être le plus facilement arraché du noyau.

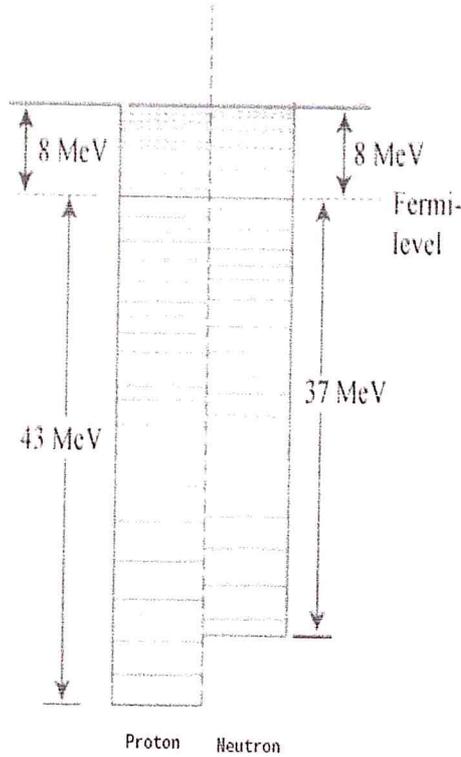


FIG. 2.1: Le Modèle du gaz de Fermi.

férentiellement en nombre pair, donc les noyaux ayant un nombre pair de proton et de neutron sont les plus stables, les noyaux les moins stables sont ceux qui possèdent un nombre impair de neutron et de proton. Le tableau 2.1, illustre le nombre de noyaux stables classés selon la parité ou l'imparité de Z et N .

TAB. 2.1: Nombre de noyaux classés selon la parité ou l'imparité de Z et N .

| Nomenclature ($Z - N$) | Z | N | A | Nombre |
|--------------------------|--------|--------|--------|---------------------|
| PP | pair | pair | pair | 166 |
| PI | pair | impair | impair | 55 |
| IP | impair | pair | impair | 51 |
| IP | impair | impair | pair | 5 (H, Li, B, N, Ta) |

La stabilité s'explique par le fait que deux neutrons et/ou deux protons se couplent pour former un spin résultant $s = 0$. Le terme $\delta(A)$ selon la parité de N et Z est le suivant :

$$\delta(A) = \begin{cases} +a_p A^{-1/2} & \text{(PP)} \\ 0 & \text{(PI)} \\ -a_p A^{-1/2} & \text{(II)} \end{cases} \quad (2.3)$$

Plusieurs familles de coefficients existent dans la littérature. On peut par exemple prendre, pour (2.1), l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}a_\nu &= 15.56 \text{ MeV}, \\a_s &= 17.23 \text{ MeV}, \\a_c &= 0.7 \text{ MeV}, \\a_a &= 23.36 \text{ MeV}, \\a_p &= 34 \text{ MeV}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

2.1.3 Limitation du modèle de la goutte liquide : détail des masses des noyaux

Afin de mieux visualiser les désaccords dans les calculs de masse des noyaux, on représente la différence entre les masses mesurées et la prédiction du modèle de la goutte liquide. La figure 2.2, présente l'écart en MeV entre les masses mesurées et le calcul dans le cadre du modèle de la goutte liquide en fonction du nombre de neutrons. Cette différence présente des structures et une surstabilité pour certains noyaux ayant un nombre de neutrons 50, 82, 126. Ce type de comportement est connu en physique atomique. Il est lié au caractère quantique du système et au remplissage de couches. De même qu'un électron sur une couche pleine est plus difficile à arracher, les nucléons sur des couches pleines entraînent des noyaux particulièrement stables. Ces nombres, appelés nombres magiques, ont pour valeur 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 en physique nucléaire et ils sont différents de ceux de la physique atomique [35].

2.2 Le modèle en couche

2.2.1 Le modèle du champ moyen : le potentiel de Woods-Saxon :

Le modèle du champ (potentiel) moyen repose sur l'observation que tout se passe comme si, en première et bonne approximation, les nucléons individuels dans le noyau évoluaient comme des particules indépendantes plongées dans un potentiel moyen créé par les autres nucléons.

On obtient une description qualitative de ce potentiel (champ) moyen $V(r)$ à partir de la

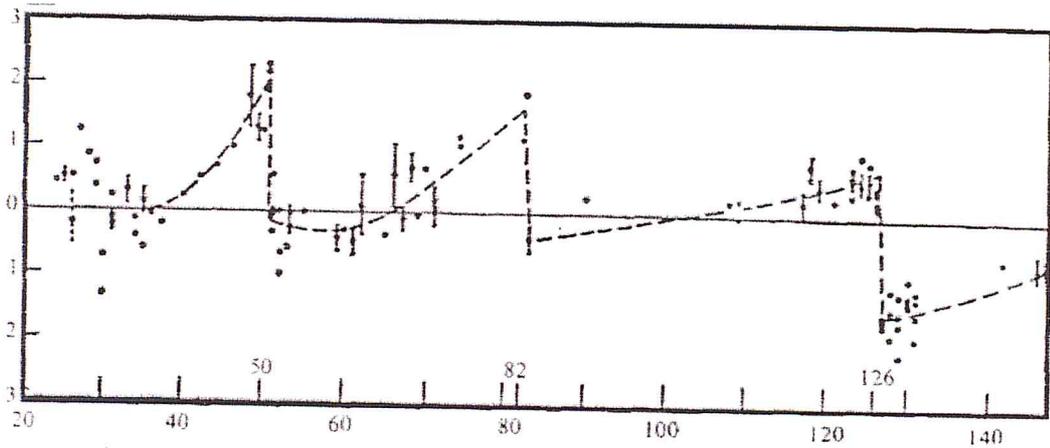


FIG. 2.2: Écart en MeV entre les masses mesurées et le calcul dans le cadre du modèle de la goutte liquide en fonction du nombre de neutrons. Selon [35].

somme des interactions $V(r - r')$ d'un nucléon situé en r avec les autres nucléons du noyau

$$V(r) = \int V(r - r')\rho(r')dr', \quad (2.5)$$

où $\rho(r')$ est la probabilité par unité de volume de trouver un nucléon au voisinage du point r' . L'interaction nucléaire $V(r - r')$ est attractive et de courte portée, elle est en effet très petite au delà d'une distance de 1.4 fm, alors que le diamètre d'un noyau est typiquement de l'ordre de 6 fm, pour un noyau léger et 14 fm pour un noyau lourd. La forme des densités de charge, en première approximation, suggère une expression plus courante au potentiel, ce dernier est donné par :

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}, \quad (2.6)$$

et est appelé le potentiel de Woods-Saxon, illustré sur la figure 2.3.

Dans (2.6), R_0 est le rayon du noyau, a est le paramère de diffusion, V_0 est la profondeur de puits obtenu par le modèle du gaz de Fermi. Ce dernier est un peu plus profond pour les protons que pour les neutrons selon l'argument déjà exposé dans la figure 2.2 pour justifier l'existence du terme d'asymétrie et que l'on retrouve dans la formule de Bethe et von Weizsäcker [35].

L'intérêt de construire le potentiel moyen de la façon la plus réaliste possible réside dans le fait de chercher le processus d'interaction entre nucléons en les considérant comme des particules relativement indépendantes les unes des autres à l'intérieur du potentiel qui les retient. Après

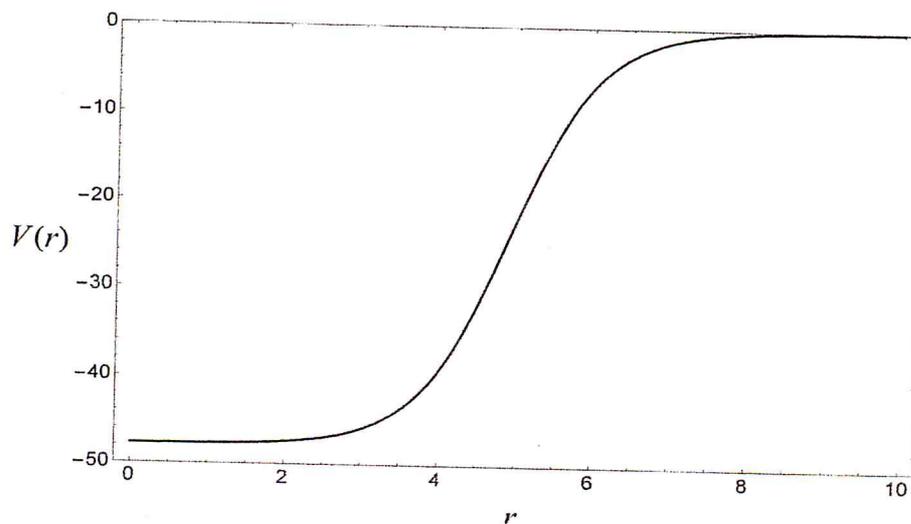


FIG. 2.3: L'allure du potentiel de Woods-Saxon pour $R_0 = 4.91$ fm, $a = 0.6$ fm et $V_0 = 47.78$ MeV.

résolution de l'équation de Schrödinger associé, ses énergies propres sont donc obtenues en sommant les A énergies individuelles et ses fonctions propres en effectuant le produit des A fonctions d'onde individuelles, antisymétriques puisqu'il s'agit d'un système de fermions. En particulier, dans ce modèle l'état fondamental du système est décrit en déposant les A nucléons dans les états les plus bas du potentiel moyen en tenant compte du principe de Pauli [34].

2.2.2 Approximation du potentiel de Woods Saxon par l'oscillateur harmonique :

Le potentiel de Woods-Saxon est un potentiel central plus réaliste par rapport à l'oscillateur harmonique [30]. Il représente l'approximation la plus simple que l'on puisse utiliser afin d'expliquer seulement les premiers nombres magiques 2, 8 et 20.

Le potentiel de l'oscillateur harmonique correspond au premier terme non nul du développement en série de Taylor du potentiel de Woods-Saxon [28]. Il prend la forme : $V_{O.H}(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, où m la masse d'un nucléon et ω la fréquence propre de l'oscillateur.

Les énergies propres de l'oscillateur harmonique à trois dimensions s'écrivent :

$$E_{n,l} = \hbar\omega(N + 3/2) = \hbar\omega(2n + l - 1/2), \quad (2.7)$$

où $N = 2(n - 1) + l$ est le nombre quantique principal, l est le moment orbital et n le nombre quantique radial.

Il en résulte qu'à chaque valeur de N correspondent plusieurs couples possibles de n et l , ce qui entraîne une forte dégénérescence des niveaux d'énergie. La dégénérescence g des niveaux est donnée par la relation suivante [35] :

$$g = (N + 2)(N + 1). \quad (2.8)$$

Les niveaux obtenus avec le potentiel harmonique sont équidistants et chaque espace entre les niveaux (gap) va constituer une barrière à franchir pour exciter un nucléon. Ceci définit les nombres magiques [29].

Ces deux potentiels, oscillateur harmonique et Woods-Saxon ne sont pas en mesure de reproduire tous les nombres magiques. Même avec la dégénérescence accrue pour le potentiel de l'oscillateur harmonique, on n'arrive toujours pas à avoir le nombre magique 28, d'où la nécessité d'ajouter les termes correctifs correspondant à l'effet de bord et au couplage spin-orbite.

2.2.3 Effet de bord

Il correspond au deuxième ordre non nul du développement du potentiel de Woods-Saxon qui s'exprime comme un terme en l . L'expression du potentiel devient :

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - Dl^2, \quad (2.9)$$

où D est une constante positive ajustée par les valeurs expérimentales obtenues à partir des niveaux d'énergie. Le rôle de ce terme est qu'il peut abaisser les niveaux d'énergie de $-Dl(l+1)$ correspondant au moment angulaire j ($\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$) de la couche considérée [28].

2.2.4 Le couplage spin-orbite

C'est un terme calculé sur le principe de la physique atomique et qui consiste à ajouter le terme de l'interaction spin-orbite $f(r)\vec{l} \cdot \vec{s}$ au puits. L'introduction de ce couplage fort permet d'expliquer tous les nombres magiques de 2 jusqu'à 126 et le potentiel du champ moyen prend

la forme suivante [26] :

$$V(r) = V_{O.H} - Dl^2 - f(r) \vec{l} \cdot \vec{s}, \quad (2.10)$$

où $V_{O.H}$ est le potentiel de l'oscillateur harmonique, D est une constante, l est le moment orbitale, il prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots (= s, p, d, f, g, h, \dots)$, l^2 est un terme introduit pour lever la dégénérescence en l des solutions de l'oscillateur harmonique; les énergies des états sont séparées par $j = l \pm 1/2$, $f(r)$ une fonction radiale et s le spin de la particule.

Les nombres l et s étant couplés, ce ne sont pas de bons nombres pour l'hamiltonien. On introduit l'opérateur du moment angulaire total $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$, sachant que le couplage spin-orbite est dû à l'interaction nucléon-noyau qui ne dépend pas seulement de la position et du spin des nucléons, mais également de leur vitesse relative.

Le terme de couplage peut alors s'écrire en fonction de j : $\vec{l} \cdot \vec{s} = 1/2(j^2 - l^2 - s^2)$ et $s = 1/2$. Les niveaux énergétiques nucléaires sous les effets du couplage spin-orbite sont schématisés sur la figure 2.4.

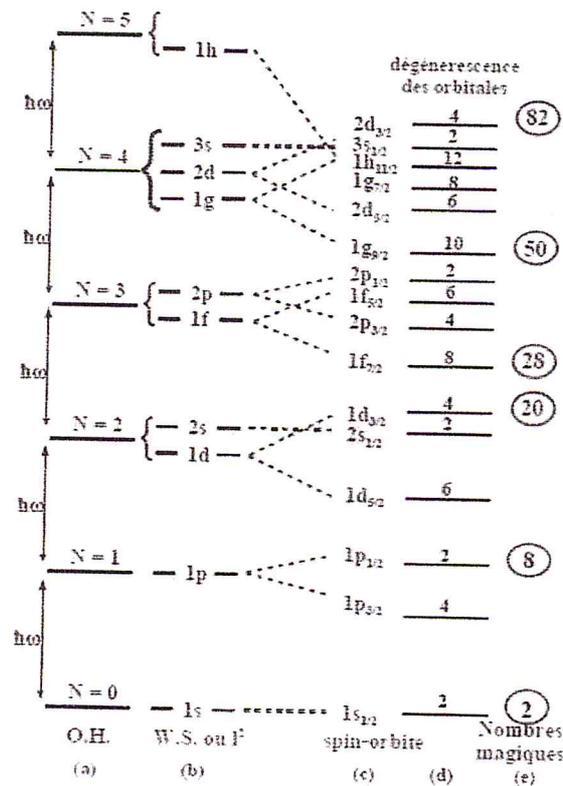


FIG. 2.4: Les nombres magiques en faisant l'approximation du potentiel de Woods-Saxon. Selon [28].

2.3 L'approximation de Pekeris

Au cours de la dernière décennie, une grande communauté de chercheurs a été impliquée dans la recherche des solutions approximatives pour les équations d'ondes (relativiste et non relativiste), y compris le terme centrifuge qu'on trouve dans les potentiels de type exponentiel. La principale caractéristique de ces solutions réside dans la substitution du terme centrifuge par une approximation, de sorte qu'on obtient une équation hypergéométrique, qui est résoluble.

En effet, Pekeris en 1934 a été le premier à introduire une approximation, puisqu'il a réussi à obtenir des solutions analytiques pour l'équation radiale de Schrödinger par le potentiel de Morse avec une barrière centrifuge pour étudier le spectre de rotation-vibration d'une molécule diatomique. L'idée de base de l'approximation de Pekeris est de réécrire approximativement le terme centrifuge en utilisant des exponentiels ressemblant à ceux qui apparaissent dans le reste du potentiel étudié, dans le but d'être capable d'absorber le terme centrifuge dans le potentiel [14].

L'approximation de Pekeris a également été utilisée en relation avec divers potentiels de type exponentiel, on cite par exemple les potentiels de Rosen-Morse [6] et Manning-Rosen [4, 5]. Dans ces cas, diverses fonctions apparaissent dans les potentiels originaux [10], ainsi que dans les termes d'approximation de Pekeris.

2.4 L'équation de Schrödinger pour le potentiel de Woods-Saxon

Dans le système de centre de masse, et en négligeant le couplage spin-orbite, l'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (2.11)$$

où $\psi(\vec{r})$ est la fonction d'onde, E est l'énergie propre et μ est la masse réduite valant approximativement la masse d'un nucléon m_{nuc} . Comme le potentiel de Woods-Saxon possède une symétrie sphérique, les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) sont mieux adaptées au problème.

L'équation (2.11) s'exprime en coordonnées sphériques comme suit :

$$\left[\frac{\widehat{p}_r^2}{2\mu} + \frac{\widehat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \quad (2.12)$$

où \widehat{p}_r est l'opérateur radial défini par $\widehat{p}_r = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$.

Etant donnée que l'hamiltonien commute avec L^2 , on dit alors que le moment angulaire est une constante de mouvement. Ceci nous permet de chercher la solution de $\psi(r, \theta, \phi)$ de (2.12) qui sont forcement sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \frac{1}{r} U_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.13)$$

où $U_{nl}(r)$ est la fonction propre radiale et $Y_l^m(\theta, \phi)$ sont appelées les harmoniques sphériques, et représentent les fonctions propres de L^2 et L_z avec des valeurs propres $\hbar^2 l(l+1)$ et $\hbar m$, respectivement.

En substituant (2.13) dans (2.11), après simplification on obtient une équation qui s'exprime en termes de $U_{nl}(r)$ sous la forme suivante :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi(r) = E\psi(r), \quad (2.14)$$

où l est le moment angulaire quantique. L'équation radiale de Schrödinger pour le potentiel de Woods-Saxon est :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \right] R(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0, \quad (2.15)$$

et en posant la fonction d'onde $U(r) = \frac{R(r)}{r}$ (2.15) est réduite à la forme

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] U(r) = 0, \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V_{\text{eff}}(r)] U(r) = 0 \quad (2.17)$$

avec

$$\begin{aligned} V_{\text{off}}(r) &= V_{\text{WS}}(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \\ &= -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cela dit, il est bien connu que la résolution de l'équation de Schrödinger, dont la forme du potentiel contient le terme centrifuge, n'accepte pas une solution analytique (exacte) pour $l \neq 0$. En effet, de (2.18), on voit que le potentiel effectif est une combinaison d'exponentiels et de l'inverse du potentiel carré qui ne peut pas être résolu analytiquement. Par conséquent, afin de résoudre ce problème, nous proposons d'introduire l'approximation de Pekeris qui est la plus largement utilisé et très pratique pour nos besoins. Cette approximation est basée sur le développement du terme centrifuge en fonction d'une série de fonctions écrites en termes de la distance internucléaire et en tenant compte des termes jusqu'à second ordre, de sorte que le potentiel effectif dépend de l préserve la forme original. Il convient toute fois de souligner que cette approximation n'est valide que pour des états d'énergie vibrationnel du noyau bas

En introduisant dans (2.18) les notations $r = R_0(1+x)$, $\alpha = \frac{R_0}{a}$ et $\gamma = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2}$, le développement du potentiel centrifuge dans la série de Taylor autour de $x = 0$ ($r = R_0$) est donné par :

$$\begin{aligned} V_l(x) &= \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \simeq \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \gamma(l, R_0)(1+x)^{-2} \\ &\simeq \gamma(l, R_0)(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Selon l'approximation de Pekeris, nous devons remplacer le potentiel $V_l(x)$ par l'expression [9, 12] :

$$V_l(x) = \gamma \left(d_0 + \frac{d_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right). \quad (2.20)$$

Afin de définir les paramètres d_0 , d_1 et d_2 , nous développons également ce potentiel dans la série de Taylor autour du point $x = 0$, ($r = R_0$),

$$V_l(x) = \gamma \left[\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{3} \right) - \frac{\alpha}{4} (d_1 + d_2) x + \frac{\alpha^2}{16} d_2 x^2 + \frac{\alpha^3}{48} (d_1 + d_2) x^3 - \dots \right]. \quad (2.21)$$

Comparons (2.19) et (2.21), pour obtenir les constantes suivantes :

$$d_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2}. \quad (2.22)$$

De (2.18), le potentiel effectif d'après l'approximation de Pekeris devient

$$V_{\text{eff}}(x) \rightarrow \tilde{V}_{\text{eff}}(x) \simeq \gamma(l, R_0)d_0 - \frac{V_0 - \gamma(l, R_0)d_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{\gamma(l, R_0)d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2}, \quad (2.23)$$

et après avoir inséré ce nouveau potentiel dans (2.17), nous déduisons

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \gamma d_0 + \frac{V_0 - \gamma d_1}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\gamma d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right] U(r) = 0. \quad (2.24)$$

En posant le nouveau changement de variable $z = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}$, et en tenant compte des expressions

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{\exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}{a^2 \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)\right)^2} U'(z), \quad \frac{d^2U(z)}{dr^2} = \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 U''(z) + \frac{d^2z}{dr^2} U'(z), \quad (2.25)$$

l'équation de Schrödinger obtenue ci-dessus, (2.24), devient

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} + \frac{1 - 2z}{z(1-z)} \frac{dU}{dz} + \frac{-\varepsilon^2 + p^2z - q^2z^2}{z^2(1-z)^2} U(z) = 0. \quad (2.26)$$

où ε^2 , p^2 et q^2 sont donnés par :

$$\varepsilon^2 = -\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} (E - \gamma d_0), \quad p^2 = \frac{2\mu a^2 (V_0 - \gamma d_1)}{\hbar^2}, \quad q^2 = \frac{2\mu a^2 \gamma d_2}{\hbar^2}, \quad (2.27)$$

L'équation (2.26) est de type Nikiforov-Ouvarov qu'on va traiter dans le prochain chapitre dans le but de déduire les propriétés physiques du potentiel de Woods-Saxon.

Chapitre 3

L'Application de la méthode de Nikiforov-Ouvarov

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode de Nikiforov-Ouvarov, traitée au chapitre 1, au potentiel de Woods-Saxon du chapitre précédent. Ainsi, l'objectif de ce présent chapitre est de déduire les solutions (spectre d'énergie et fonction d'onde) analytiques à l'équation de Schrödinger au potentiel de Woods-Saxon pour un état l -quelconque ($l \neq 0$). Nous verrons ultérieurement que nos résultats diffèrent complètement de ceux connus dans la littérature.

3.1 La solution analytique de l'équation de Schrödinger pour un état l -quelconque

Afin d'appliquer la méthode Nikiforov-Ouvarov, il est nécessaire de comparer (2.26) avec (1.1). Subséquemment les valeurs des paramètres de (1.1) sont les suivants :

$$\tilde{\tau}(z) = 1 - 2z, \quad \sigma(z) = z(1 - z), \quad \tilde{\sigma}(z) = -\varepsilon^2 + p^2z - q^2z^2. \quad (3.1)$$

En substituant les polynômes (3.1) dans (1.12), on déduit le polynôme $\pi(z)$:

$$\pi(z) = \pm \sqrt{\varepsilon^2 + (k - p^2)z - (k - q^2)z^2}, \quad (3.2)$$

Pour déterminer k , il suffit de considérer que le polynôme sous la racine carré est parfait et donc son discriminant doit être nul

$$\Delta = k^2 + 2(2\varepsilon^2 - p^2)k + q^4 - 4\varepsilon^2q^2 = 0, \quad (3.3)$$

Le discriminant réduit de (3.3) est $\tilde{\Delta}' = 4\varepsilon^2(\varepsilon^2 - p^2 + q^2)$, d'où les racines en k :

$$k_{\pm} = p^2 - 2\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}, \quad (3.4)$$

Par la suite, on remplace chaque valeur de k dans (3.2) et les solutions possibles pour $\pi(z)$ sont :

$$\pi(z) = \begin{cases} \pm \left[\left(\varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) z - \varepsilon \right], & \text{si } k = k_- = p^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}, \\ \pm \left[\left(\varepsilon^2 - \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) z - \varepsilon \right], & \text{si } k = k_+ = p^2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}, \end{cases} \quad (3.5)$$

On constate qu'il est possible de déduire le spectre d'énergie en comparant (3.5) à (1.44). Par conséquent, le polynôme $\tau(z)$ dans (1.4) pour lequel sa dérivé a une valeur négative est établie par un choix approprié du polynôme $\pi(z)$. Ce choix est approprié à (3.5) pour k_{\pm} , correspondant à la solution négative pour $\pi(z)$, i.e,

$$k_- = p^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}, \quad (3.6)$$

$$\pi(z) = \varepsilon - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) z, \quad (3.7)$$

et le polynôme $\tau(z)$ s'exprime par :

$$\tau(z) = 1 + 2\varepsilon - 2 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) z, \quad (\tau'(z) < 0). \quad (3.8)$$

Après la substitution des polynômes $\pi(z)$, $\tau'(z)$ et k dans (1.45), on obtient :

$$-(2\varepsilon + 1)\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} - \varepsilon(2\varepsilon + 1) + p^2 = -n \left(-2 - 2 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) \right) + n(n - 1), \quad (3.9)$$

$$\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} + \varepsilon + n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4q^2}, \quad (3.10)$$

Nous cherchons maintenant le moyen de résoudre le couple d'équations (3.9) et (3.10) afin de déduire le spectre d'énergie dans E_{nl} dans ε . Ce faisant, on pose

$$\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} + \varepsilon = N = -n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4q^2} \quad (N > 0), \quad (3.11)$$

En élevant au carré (3.11) et en calculant le discriminant à cette équation, on trouve

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(N + \frac{p^2 + q^2}{N} \right), \quad (3.12)$$

où

$$N = -n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4q^2} > 0, \quad (3.13)$$

En utilisant (3.12), il est facile de nous convaincre qu'il existe une borne supérieure au nombre quantique radial n donné par

$$0 \leq n \leq n_{\max} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4q^2}. \quad (3.14)$$

D'un autre côté, (3.11) mène à

$$2N\varepsilon = N^2 + p^2 - q^2 > 0, \quad (p^2 - q^2 > -N^2). \quad (3.15)$$

En remplaçant p^2 et q^2 par leurs formules (2.26), on trouve

$$V_0 > \gamma(D_1 + D_2) - \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2}{\hbar^2}\gamma D_2} \right)^2. \quad (3.16)$$

De la même manière, on remplace les paramètres γ , d_1 et d_2 donnés par (2.22) dans (3.15), on trouve qu'il existe une borne inférieure à V_0 , telle que

$$V_0 > V_0^{(\min)} = \frac{4\hbar^2 a l(l+1)}{\mu R_0^3} - \frac{\hbar^2}{8\mu a^2} \left[2n + 1 - \sqrt{1 + \frac{192a^4 l(l+1)}{R_0^4}} \right]^2. \quad (3.17)$$

Le lecteur trouvera l'essentiel des détails de calcul des expressions (3.11) et (3.17) dans l'annexe A. Contrairement à (3.17), malheureusement, nous avons échoué à déduire la borne supérieure à V_0 , car nous avons utilisé toutes nos équations (et conditions) pour déduire la

borne inférieure.

3.1.1 Spectre d'énergie

Ayant obtenu les expressions intervenant dans l'expression du spectre d'énergie, on peut déterminer les énergies propres analytiquement à l'équation radiale de Schrödinger pour le potentiel de Woods Saxon. Ainsi, en élevant au carré l'expression (3.11) et en arrangeant les termes, on déduit

$$\begin{aligned}
 E_{nl} = & \frac{-\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \left(1 + \frac{12a^2}{R_0^2}\right) - \frac{V_0}{2} - \frac{\hbar^2}{8\mu a^2} \left[\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{192a^4 l(l+1)}{R_0^4}} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{4 \left(\frac{\mu a^2}{\hbar^2} V_0 - 4 \frac{l(l+1)a^3}{R_0^3} \right)^2}{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{192a^4 l(l+1)}{R_0^4}}} \right] \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Nous voulons signaler que le travail effectué par M. Capak et al. [38] qui ont obtenu un spectre d'énergie par une autre méthode et dont le résultat ressemble, à quelques paramètres près, au notre.

3.1.2 La fonction d'onde

Voyons maintenant les fonctions propres correspondantes à l'équation radiale. La solution polynomiale de la fonction de type hypergéométrique $y_n(z)$ dépend de la détermination de la fonction poids qui est déjà inséré dans (1.36). La fonction poids est obtenue comme suit

$$\rho(z) = z^{2\varepsilon} (1-z)^{2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}}, \quad (3.19)$$

et dont on trouvera le détail du calcul dans l'annexe A.

La substitution de $\rho(z)$ dans (1.44) nous permet d'obtenir le polynôme $y_n(z)$ comme suit

$$y_n(z) = b_n z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n+2\varepsilon} (1-z)^{n+2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \right], \quad (3.20)$$

où b_n est une constante de normalisation à déterminer.

Soit le changement de variable $z = (1 - x)/2$, (3.19) devient :

$$y_n(1 - 2x) = b_n \frac{(-1)^n}{2^n} (1 - x)^{-2\varepsilon} (1 + x)^{-2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \times \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x)^{n+2\varepsilon} (1 + x)^{n+2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \right]. \quad (3.21)$$

En tenant compte du fait que $y_n(1 - 2x)$ est un polynôme de Jacobi, il suffira de prendre

$$y_n(1 - 2x) = B_n (1 - x)^{-2\varepsilon} (1 + x)^{-2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x)^{n+2\varepsilon} + (1 + x)^{n+2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \right] \quad (3.22)$$

où $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$. Ainsi, par identification, on obtient

$$b_n = \frac{1}{n!}, \quad (3.23)$$

$$y_n(1 - 2x) = P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})}(x), \quad (3.24)$$

et (3.20) devient

$$\begin{aligned} y_n(z) &= \frac{1}{n!} z^{-2\varepsilon} (1 - z)^{-2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n+2\varepsilon} (1 - z)^{n+2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \right] \\ &\equiv P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})}(1 - 2z). \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'obtention de la fonction radiale $U_{nl}(z)$ dépend de la détermination de la fonction $\varphi(z)$ déduite à partir de (1.5)

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1 - z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}}, \quad (3.26)$$

menant à son tour à la fonction radiale

$$U_{nl}(z) = C_{nl} z^\varepsilon (1 - z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})}(1 - 2z), \quad (3.27)$$

où C_{nl} est la constante de normalisation qu'on peut déterminer en utilisant l'expression 7.391 (1) de [37]

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+1+n)}, & m = n. \end{cases} \quad (3.28)$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler. En normalisant (3.27) selon la condition

$$1 = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} |U_{nl}(z)|^2 dz,$$

on obtient après substitution

$$1 = \int_0^1 |C_{nl}|^2 z^\varepsilon (1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \left(P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})}(1-2z) \right)^2 dz. \quad (3.29)$$

En termes de la variable x introduite ci-dessus, (3.29) se transforme en

$$|C_{nl}|^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{2} \right)^{2\varepsilon} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \left(P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})}(x) \right)^2 \left(-\frac{1}{2} dx \right) = 1, \quad (3.30)$$

et en appliquant (3.28), la constante de normalisation devient

$$|C_{nl}| = C_{nl} = \sqrt{\frac{n! \Gamma(2\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} + 2n + 1) \Gamma(2\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} + n + 1)}{\Gamma(2\varepsilon + n + 1) \Gamma(2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} + n + 1)}}. \quad (3.31)$$

En exprimant $R_{nl}(r) = U_{nl}(r)/r$ ainsi que la transformation $z = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}$, la fonction d'onde radiale associée au potentiel de Woods-Saxon est enfin donnée par :

$$R_{nl}(r) = \frac{C_{nl}}{r} \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)^{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \right)^{-(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})} P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2})}\left(\tanh\left(\frac{r-R_0}{a}\right)\right). \quad (3.32)$$

3.2 Discussion des résultats et conclusion

Nous résumons nos calculs numériques dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 et sur les figures 3.1 et 3.2. Ces calculs ont été préalablement calculé analytiquement (3.18) et (3.32). La valeur de la constante réduite de Planck et les valeurs des différentes grandeurs physiques utilisées pour l'atome de ^{56}Fe sont : $\hbar = 1.0545 \times 10^{-34}$ Js, $R_0 = 4.9162 \times 10^{-15}$ m, $a = 0.6 \times 10^{-15}$ m et $\mu \simeq 0.50433 \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg.

Selon l'inéquation (3.14), nous constatons que le nombre radiale n est borné par n_{\max} . Ainsi, il est entièrement contrôlé par le nombre quantique azimutal l . Comme il est indiqué sur

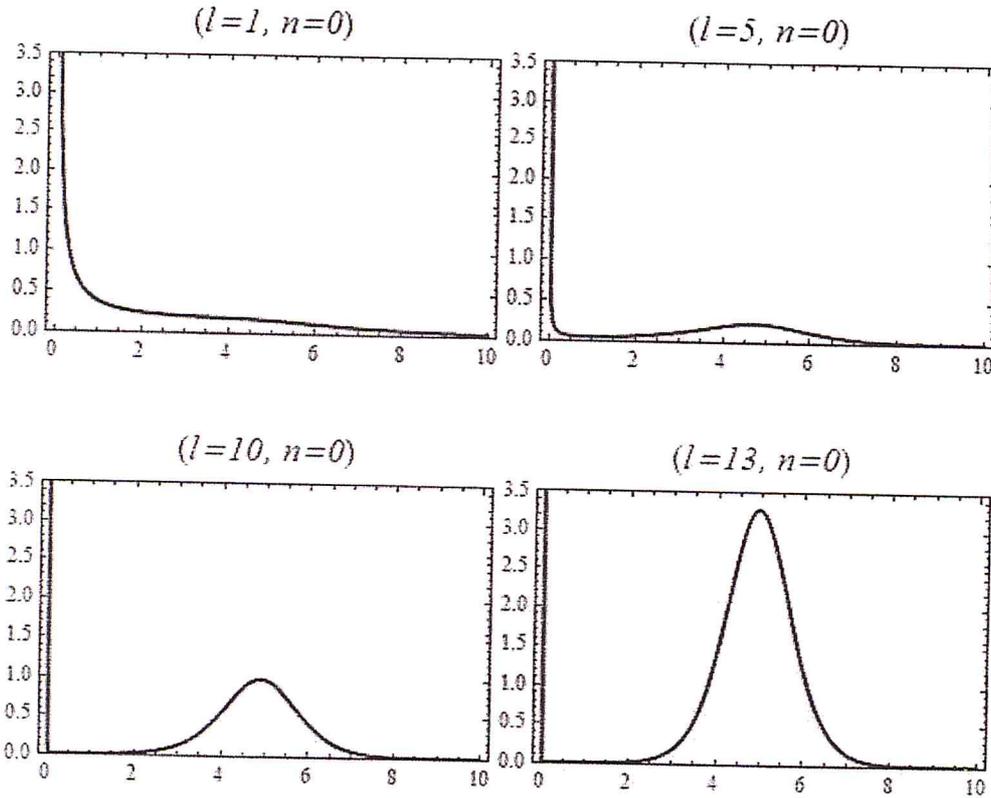


FIG. 3.1: La fonction d'onde du potentiel de Woods-Saxon pour $n = 0$ et $l = 1, 5, 10$ et 13 . L'axe vertical représente l'amplitude de la fonction d'onde radiale $R_{nl}(r)$, alors que l'axe horizontal représente la distance internucléaire r .

le tableau 3.1; si $1 \leq l \leq 13$, n prend une seule valeur 0. On remarque que si $l \geq 14$, le nombre quantique radial peut prendre plusieurs valeurs pour l fixe; par exemple $l = 14$; $n = (0, 1)$, $l = 53$; $n = (\overline{0, 5})$ et $l = 100$; $n = (\overline{0, 9})$. Nous avons trouvé selon (3.17) que V_0 est minoré par $V_{0, \min}$. Ainsi, à chaque couple (n, l) on lui a associé une grandeur V_0 spécifique. Dans notre travail, nous avons élaboré une description propre au potentiel de Woods-Saxon qui donne des niveaux du spectre d'énergie pour le potentiel de Woods-Saxon. En effet, contrairement au modèle de Fermi qui exige une valeur de V_0 de l'ordre de $V_0 \simeq 47 - 50$ MeV, nous avons constaté que via les deux contraintes (3.14) et (3.17), notre modèle admet $V_0 > V_{0, \min}$ pour chaque couple (n, l) . Par ailleurs, nous avons échoué à calculer le $V_{0, \max}$ (bande supérieure) analytiquement car nos équations ne le permettent pas. Cependant, l'élaboration d'une borne inférieure pour V_0 (*i.e.* $V_{0, \min}$) à largement suffit à déduire l'ensemble des valeurs numériques du spectre d'énergie dans les tableaux 3.1, 3.2, 3.3. Le spectre d'énergie est obtenu pour le nombre quantique l variant de 1 à 100, ces valeurs sont négatives en raison de la bande d'énergie dû aux

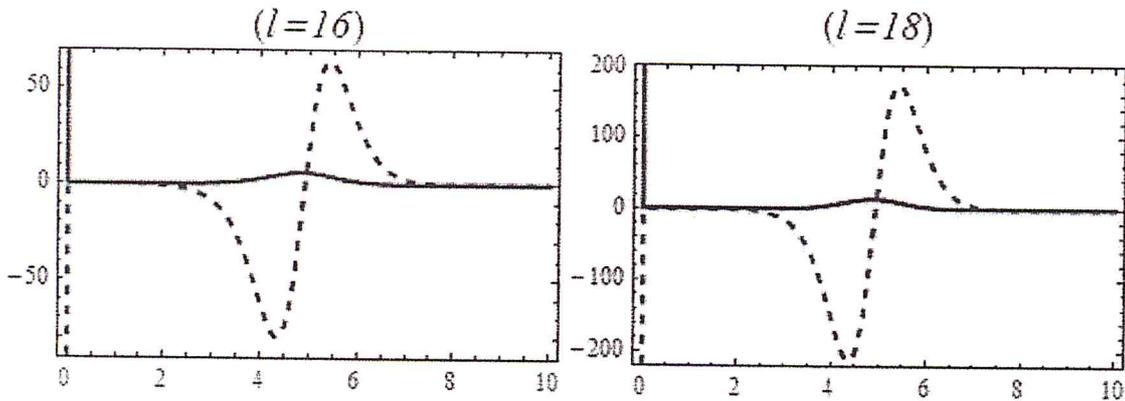


FIG. 3.2: La fonction d'onde du potentiel de Woods-Saxon pour $n = 0$ et $n \neq 0$, $l = 16, 18$. L'axe vertical représente l'amplitude de la fonction d'onde radiale $R_{nl}(r)$, alors que l'axe horizontal représente la distance internucléaire r . Le trait plein représente l'état $n = 0$, tandis que le trait en pointillé représente l'état $n = 1$.

deux contraintes précédentes (n_{\max} et $V_{0, \min}$). Nous avons remarqué que les valeurs absolues de l'énergie croissent lorsque l augmente. Nous allons à présent analyser les figures 3.1 et 3.2 tracées pour la fonction d'onde radiale en fonction de la distance r , déterminé par (3.32). Nous avons constaté que pour $(n, l) = \{(0, 1), (0, 5)\}$, l'allure de la fonction d'onde est en désaccord avec le modèle de l'oscillateur harmonique. Tandis que pour $(n, l) = \{(0, 10), (0, 13)\}$ (pour les grands valeurs du nombre quantique azimutal l), l'allure de la fonction d'onde est une gaussienne. Ce qui fait que le potentiel de Woods-Saxon a un comportement d'un oscillateur harmonique pour les grands nombres l . La figure 3.2 illustre le comportement de l'amplitude de probabilité de la fonction d'onde radiale $R_{n, l}(r)$. Nous remarquons que pour $n = 0$ et l fixe, on obtient une allure gaussienne à la fonction d'onde radiale, tandis que pour $n = 1$, la forme de la fonction d'onde radiale ressemble à celle de l'oscillateur harmonique. D'où la bonne approximation du modèle utilisé.

Pour conclure cette discussion, nous portons à l'attention du lecteur le comportement de la fonction d'onde radiale quant au choix des grandes valeurs du nombre quantique azimutal l . En effet, notre simulation des graphiques montre bien qu'au fur et à mesure que l augmente (pour $n = 0$), l'amplitude de probabilité de la fonction d'onde obtenue (3.32) devient de plus en plus symétrique et gaussienne. Ce comportement reflète très bien le fameux principe de correspondance de Bohr qui stipule qu'à la limite des grands nombres quantiques caractérisant un système microscopique, ce dernier a tendance à basculer vers un régime semi-classique imitant

ainsi un oscillateur harmonique *purement classique* décrit par une courbe gaussienne parfaite.

Par exemple, pour $l = 100$ et $n = 0$, notre simulation a montré dans ce cas que l'amplitude de probabilité de la fonction d'onde radiale est de l'ordre de 10^{17} . Ce nombre (amplitude de probabilité) ne peut avoir de sens physique que si seulement l'étude se fait dans un cadre (semi-) classique.

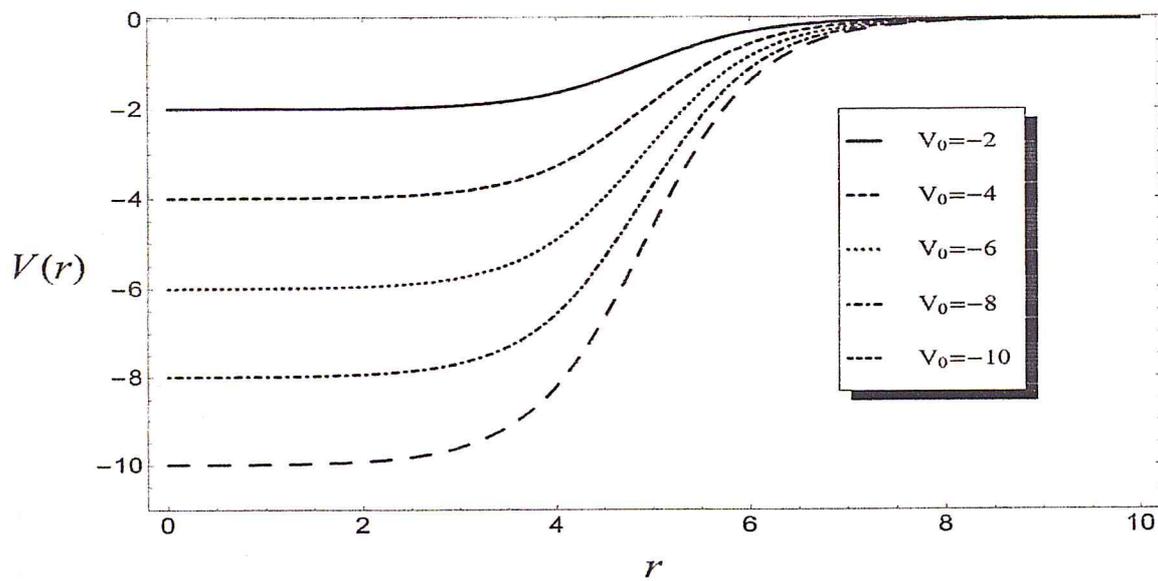


FIG. 3.3: L'allure du potentiel de Woods-Saxon pour les différentes valeurs de V_0 .

TAB. 3.1: Les valeurs d'énergies propres $-E_{n,l}$ pour l'atome du ^{56}Fe en MeV, pour $1 < l < 16$.

| l | n | $V_{0, \min}(\text{MeV})$ | $V_0(\text{MeV})$ | $E_{n,l}(\text{MeV})$ |
|-----|-----|---------------------------|-------------------|-----------------------|
| 1 | 0 | 3.29778 | 3.300 | 2.36786 |
| 2 | 0 | 9.62561 | 9.650 | 7.10331 |
| 3 | 0 | 18.5743 | 18.600 | 14.2072 |
| 4 | 0 | 29.7315 | 30.000 | 23.6741 |
| 5 | 0 | 42.7547 | 43.000 | 35.5163 |
| 6 | 0 | 57.3857 | 58.000 | 49.7183 |
| 7 | 0 | 73.4382 | 74.000 | 66.2968 |
| 8 | 0 | 90.7794 | 91.000 | 85.2433 |
| 9 | 0 | 109.315 | 110.00 | 106.552 |
| 10 | 0 | 128.976 | 129.00 | 130.233 |
| 11 | 0 | 149.714 | 150.00 | 156.279 |
| 12 | 0 | 171.491 | 172.00 | 184.694 |
| 13 | 0 | 194.280 | 195.00 | 215.476 |
| 14 | 0 | 350.848 | 351.00 | 215.544 |
| | 1 | | | 248.623 |
| 15 | 0 | 398.218 | 399.00 | 245.796 |
| | 1 | | | 284.107 |
| 16 | 0 | 446.780 | 447.00 | 279.424 |
| | 1 | | | 322.029 |

TAB. 3.2: Les valeurs d'énergies propres $-E_{n,l}$ pour l'atome du ^{56}Fe en MeV, pour $24 < l < 63$.

| l | n | $V_{0, \min}(\text{MeV})$ | $V_0(\text{MeV})$ | $E_{n,l}(\text{MeV})$ |
|-----|-----|---------------------------|-------------------|-----------------------|
| 24 | 0 | 1003.69 | 1004.00 | 586.498 |
| | 1 | | | 677.242 |
| | 2 | | | 710.349 |
| 34 | 0 | 1990.95 | 1991.00 | 1133.890 |
| | 1 | | | 1283.220 |
| | 2 | | | 1375.010 |
| | 3 | | | 1408.880 |
| 43 | 0 | 3167.07 | 3168.00 | 1776.030 |
| | 1 | | | 1978.410 |
| | 2 | | | 2123.240 |
| | 3 | | | 2210.520 |
| | 4 | | | 2238.460 |
| 53 | 0 | 4790.60 | 4791.00 | 2656.710 |
| | 1 | | | 2918.180 |
| | 2 | | | 3122.110 |
| | 3 | | | 3268.480 |
| | 4 | | | 3357.300 |
| 63 | 0 | 6748.74 | 6749.00 | 3713.340 |
| | 1 | | | 4034.010 |
| | 2 | | | 4297.120 |
| | 3 | | | 4502.680 |
| | 4 | | | 4650.690 |
| | 5 | | | 4741.150 |
| | 6 | 4773.520 | | |

Conclusion générale

Notre mémoire est entièrement dédié à l'application de la méthode de Nikiforov-Ouvarov au potentiel de Woods-Saxon pour l'équation de Schrödinger, en utilisant l'approximation de Pekeris dans le terme centrifuge.

Notre travail s'est articulé autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la méthode de Nikiforov-Ouvarov. Cette dernière permet de résoudre les équations différentielles de second ordre, en la réduisant à une équation généralisée de type hypergéométriques et dont les solutions sont données par la formule de Rodrigues sous la forme de polynômes orthogonaux. Nous avons traité par la suite quelques différents cas particuliers de cette méthode.

Dans le second chapitre, nous avons abordé deux descriptions différentes et importantes, mais complémentaires l'une à l'autre, qui permettent de décrire l'interaction d'un nucléon avec les autres nucléons du noyau (*e.g.*, la goutte liquide et le modèle en couche). Nous avons présenté l'intérêt du potentiel de Woods-Saxon dans le modèle en couche afin de reproduire tous les nombres magiques.

Dans le troisième chapitre, nous avons appliqué la méthode de Nikiforov-Ouvarov au potentiel de Woods-Saxon. Connaissant que la solution analytique de l'équation de Schrödinger pour un état l -quelconque est très compliquée à cause du terme centrifuge, nous avons choisi d'appliquer à ce terme la méthode de Pekeris et qui consiste justement à éliminer le terme centrifuge au profit du potentiel de Woods-Saxon.

Le spectre d'énergie obtenu est donné en termes des nombres quantiques radial n et azimutal l et de la caractéristique du potentiel V_0 (la profondeur du puits). D'un autre côté, la fonction d'onde radiale est obtenue analytiquement et elle est exprimée au moyen des polynômes de Jacobi.

Cette étude théorique nous a permis d'introduire une nouvelle description du potentiel de

Woods-Saxon qui diffère complètement de ce qu'on trouve dans la littérature. En effet, nous avons trouvé que le nombre quantique radial n est majoré par n_{\max} et est simultanément contrôlé par le nombre quantique azimutal l . D'autre part, nous avons aussi trouvé que V_0 est minoré par $V_{0, \min}$. Cette dernière observation nous a conduit à un spectre d'énergie pour le couple (n, l) et dont on lui associe une profondeur propre au puits V_0 .

Afin de justifier nos observations, nous avons calculé, numériquement, les valeurs du spectre d'énergie pour les différentes valeurs de n , l et V_0 correspondantes. Nous avons ainsi obtenu une sorte de "dégénérescence" observée dans la majorité des cas traités et qui consiste à attribuer à une valeur de l une ou plusieurs valeurs de n .

Dans un autre contexte, nous avons tracé la fonction d'onde radiale en fonction de la distance internucléaire r pour l'état fondamental et le premier état excité. Pour les petites valeurs du nombre quantique azimutal l , l'allure est en désaccord avec le modèle de l'oscillateur harmonique. Tandis que pour les grandes valeurs de l , l'allure de la fonction d'onde est une gaussienne. Cela donne au potentiel de Woods-Saxon le comportement d'un oscillateur harmonique pour les grands nombres quantiques azimutaux l . Pour le premier état excité ($n = 1$), la forme de la fonction radiale ressemble à celle de l'oscillateur harmonique. D'où la bonne approximation du modèle utilisé.

Annexe A

Déduction des formules (3.11), (3.17) et (3.19)

Dans cet annexe, nous développerons quelques détails mathématiques afin de rendre le texte plus précis.

Concernant l'équation (3.11).

Après avoir substituer le paramètre k et le polynôme $\pi(z)$ dans (1.11b), le paramètre λ s'exprime par

$$p^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} - \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}, \quad (\text{A.1})$$

en utilisant (A.1), les équations (3.9) et (3.10) deviennent

$$p^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} - \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} = 2 \left(1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) n + n(n-1). \quad (\text{A.2})$$

En regroupant cette dernière en termes de $X = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}$, c'est-à-dire :

$$\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right)^2 + (2n + 1) \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) - q^2 + n(n + 1) = 0, \quad (\text{A.3})$$

et en résolvant (A.2) en fonction de X , les racines sont alors données par :

$$\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}\right)_{\pm} = \frac{-2n - 1 \pm \sqrt{1 + 4q^2}}{2} > 0. \quad (\text{A.4})$$

Comme X est positive, alors il devient évident de prendre uniquement l'expression positive devant la racine carré. D'où l'expression

$$\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} + n + 1/2 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4q^2}, \quad (\text{A.5})$$

correspondante à (3.11).

Conserver l'équation (3.17).

En tenant compte de l'expression (A.5), on déduit :

$$2N\varepsilon = N^2 + p^2 - q^2 > 0 \quad \implies \quad p^2 - q^2 > -N^2, \quad (\text{A.6})$$

où $N > 0$. En substituant les expressions (2.27) de p et q dans (A.6), on trouve :

$$\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} (V_0 - \gamma D_1) - \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} \gamma D_2 > - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2}{\hbar^2} \gamma D_2} \right)^2,$$

où encore en terme de V_0 comme suit :

$$V_0 > \gamma (D_1 + D_2) - \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left(n + 1/2 - 1/2 \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2}{\hbar^2} \gamma D_2} \right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Il devient évident que V_0 possède bel et bien une borne inférieure, notée $V_{0,\min}$, et est donnée par :

$$V_0 > V_{0,\min} = \frac{4\hbar^2 a l(l+1)}{\mu R_0^3} - \frac{\hbar^2}{8\mu a^2} \left[2n + 1 - \sqrt{1 + \frac{192a^4 l(l+1)}{R_0^4}} \right]^2, \quad (\text{A.8})$$

et déduite dans (3.17).

Conservant l'équation (3.19) et la fonction poids $\rho(z)$.

Pour trouver la fonction d'onde, nous devons calculer les polynômes $\varphi(z)$ et $y_n(z)$. En insérant les valeurs de $\sigma(z)$ et $\pi(z)$ données dans (3.1) et (3.2) dans (1.5), on peut trouver la première partie de la fonction d'onde comme suit

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\varepsilon - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) z}{z(1-z)}. \quad (\text{A.9})$$

En intégrant (A.9), on trouve :

$$\ln \varphi(z) = \varepsilon \ln z + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \ln(1-z),$$

où encore sous une forme plus compacte :

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}}. \quad (\text{A.10})$$

D'autre part, pour trouver $y_n(z)$, nous devrions d'abord obtenir la fonction poids $\rho(z)$ qui est déjà inséré dans (1.36). La fonction poids donné dans (1.36) peut être obtenue comme suit :

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)} = \frac{-2 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2} \right) z + 2\varepsilon}{z(1-z)}, \quad (\text{A.11})$$

où en intégrant (A.11), on trouve

$$\ln \rho(z) = \ln(1-z)^{2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} + \ln z^{2\varepsilon},$$

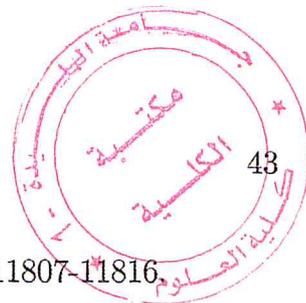
où encore

$$\rho(z) = (1-z)^{2\sqrt{\varepsilon^2 - p^2 + q^2}} z^{2\varepsilon}. \quad (\text{A.12})$$

Ayant ainsi obtenu $\sigma(z)$ et $\rho(z)$, leurs produits nous permet de trouver la fonction d'onde (3.25).

Bibliographie

- [1] C. Berkdemir et J. Han, *Chem. Phys. Lett.* **409** (2005) 203.
- [2] S. M. Ikhdair et A. Sever, *J. Math Phys. Chem.* **42** (2007).
- [3] M. Hamzavi et M. Khdair, *J. Appl. Math. Comput.* **218**.
- [4] W. Qiang et S.-H. Dorg, *Phys. Lett. A* **372** (2008) 5760.
- [5] S. M. Ikhdair, *Phys.* **202** (2012) 201525-20.
- [6] S. M. Ikhdair et M. Hamzavi, *Chin. Phys. B* **22** (2013) 040302.
- [7] W. Lucha et F. Schoberl, *Int. J. Mod. Phys. A* **29** (2014) 1450057.
- [8] M. Copak et B. Gonul, *Mod. Phys. Lett.* (2016) 027310.
- [9] M. R. Pahlavani et S. A. Alavi, *Commun.Theor. Phys* **58** (2012) 739-743.
- [10] M. R. Pahlavani, *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics*, (INTECH, Croatie, 2012).
- [11] M. R. Pahlavani, J. Sadeghi et M. Ghezelbash, *Theor. Phys.* **58** (2012) 739-743.
- [12] B. Rezaei et A. Dashtimoghadam, *J. Theor. Appl. Phys.* (2014) 203-210.
- [13] B. Gonul et K. Koksai, *Phys. Scr.* **76** (2007) 565-570.
- [14] F. J.-S. Ferreira et F.-V. Prudente, *Phy. Lett A* **377**(2013) 3027-3032.
- [15] S. H. Dong, *Factorization Methods in Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Dordrecht 2007).
- [16] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhtame, *Supersymmetry and Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore 2001).
- [17] F. Iachello, *Lie Algebra and Applications*, vol. 708 (Springer-Verlag, Berlin 2006).
- [18] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*, 4ième éd., (World Scientific, Singapore 2004).



- [19] H. Ciftci, R. L. Hall et N. Saad, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** (2003) 11807-11816.
- [20] S.-A. Yahiaoui et M. Bentaiba, *Acta Phys. Pol. B* **42** (2011) 1755.
- [21] B. J. Falaye, M. Hamzavi and S. M. Ikhdair, *Chin. Phys. Lett.* **30** (2012) 020305.
- [22] A. F. Nikivorov et V. B. Ouvarov, *Fonctions spéciales de la physique mathématique* (édition Mir, URSS 1976).
- [23] A. F. Nikivorov et V. B. Ouvarov, *Elément de la théorie des fonctions spéciales*, (édition Mir, URSS 1981).
- [24] B. Gonul et K. Koksul, *Phys. Scr.* **75** (2007) 686-690.
- [25] L. G. Moetto, P.T. Moretto, P. T. Lake et L. Phair, *Phys. Rev. C* **68** (2012) 021303.
- [26] H. Saifi, *Étude des noyaux riches en neutrons près d'une couche fermée de $Z=28,50$ et 82* , thèse de doctorat (université Mentouri Constantine, 2007).
- [27] F. Delaunay, *Structure des états du ^{11}Be excités par la réaction $d(^{10}\text{Be},p)^{11}\text{Be}$* , thèse de doctorat (université de Paris Sud 6, 6 octobre 2003).
- [28] T. Zerouki , *Triaxialité et coexistence de formes dans les noyaux proches de la fermeture de couche $N=82$: évaluation de forme et rotation magnétique dans Nd*, thèse de doctorat (université de Paris Sud, 22 mai 2015).
- [29] M. Bouzidi, *Calcul de la structure nucléaire et les propriétés électromagnétiques des noyaux riches en neutron des isotopes lourds de calcium et des noyaux de l'île d'inversion*, Mémoire de Magister (université Mentouri Constantine, 2008).
- [30] C.-L. Sech et G. Ngô, *Physique Nucléaire des Quarks aux Applications* (Dunod, Paris 2006).
- [31] H. Curien, *Physique Corpusculaire* (La Documentation Française, Paris, 1972).
- [32] D. Blanc, *Physique nucléaire, particules* (Masson, Paris, 1995).
- [33] S. S. Ming, *Nuclear Physic* (Wiley-Inter. Science, United States, 1976).
- [34] L. Valentin, *Physique Subatomique " Développements "*, (OPU, Alger, 1987).
- [35] L. Valentin, *Physique Subatomique " Approche élémentaire "*, (OPU, Alger, 1987).
- [36] J.-L. Basdevant, J. Rich et M. Spiro, *Energie Nucléaire* (Les Éditions de L'école-Polytechniques, Paris, 2002).

- [37] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1965).
- [38] M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul et D. Bonatsos, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **42** (2015) 095102.

