

**UNIVERSITE DE SAAD DAHLEB DE BLIDA1**

**Faculté de Technologie**

Département de Mécanique

**THESE DE DOCTORAT**

En génie mécanique

Spécialité : Construction

CONTRIBUTION A L'ANALYSE ET L'ETUDE DYNAMIQUE DES  
POUTRES, PLAQUES ET COQUES EN CONSIDERANT LES  
EFFETS DE L'AMORTISSEMENT STRUCTURAL, DE LA  
TEMPERATURE ET DE LA PIEZOELECTRICITE

Par

**ZEMIRLINE Adel**

Devant le jury composé de :

A. ALLALI	Prof., U.Blida1	Président
S. ABUDURA	Prof., Univ. Médéa	Examineur
A. BELAIDI	M.C.A., U.Boumerdes	Examineur
M. TEMMAR	M.C.A., U.Blida1	Examineur
E. AILAM	M.C.A., U.Khemis-Miliana	Examineur
M. OUALI	Prof., U.Blida1	Directeur de thèse

Blida, 2016

## Dédicaces

A mes parents, ma tendre épouse et enfants.

Du fond du cœur, Adel

## Remerciements

Louange à Allah qui m'a permis d'être ce que je suis aujourd'hui.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à mon directeur de thèse, le Professeur **Mohammed Ouali**, directeur du Laboratoire de recherche Structures-U.Blida1. Sa disponibilité, ses conseils et son soutien ont été d'un grand apport pour la réalisation de cette thèse ainsi que lors de mes études en graduation et en post-graduation.

Je remercie vivement les honorables membres du jury qui ont donné de leur temps et efforts afin de lire et d'examiner cette thèse. Ainsi mes remerciements les plus sincères vont :

à Monsieur Abderrezak ALLALI, professeur à l'université Blida1, qui a accepté de Présider le jury et au professeur Salam ABOUDURA de l'université de Médéa qui est tout le temps disponible pour apporter aide et conseils. à Monsieur Abderrahmane BELAIDI Maître de conférence à l'université de Boumerdes, à Monsieur Mustapha TEMMAR Maître de conférence à l'université de Blida1 et à Monsieur El Hadj AILAM Maître de conférence à l'université de Khemis-Miliana.

Que tous mes examinateurs puissent trouver en ces quelques lignes mes chaleureux remerciements et ma profonde reconnaissance.

Je n'omettrai pas de remercier également Monsieur Ali Mahieddine Maître de conférence au centre universitaire de Khemis-Miliana et le Professeur Abdelah Abdelah-El Hadj Professeur au laboratoire LMP2M de l'université de Médéa et tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ce travail.

Merci à mes parents qui m'ont épaulé et forgé tout au long de ma vie.

Merci à ma chère épouse Amina qui m'a toujours donné du réconfort et qui a su être patiente et présente, à mes deux prunelles Mohamed Ali et Abdelkhalek qui font la joie de père et à mes beaux-parents pour leur soutien et gentillesse.

Je clôture par remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin et que je ne peux tous citer à l'image de Lotfi, Mustapha, Nadir, Hakim, Benaissa, Nadjib, Adel, les Fora...

## TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES.....	
LISTE DES TABLEAUX.....	
Résumé :.....	
: ملخص.....	
Abstract:.....	
INTRODUCTION.....	17
NOTIONS THEORIQUES.....	27
2 1. Introduction.....	27
2 2. La piézoélectricité.....	27
2.2.1. Relations théoriques :.....	31
2 3. L'amortissement structural :.....	32
2.3.1. Hypothèse de Basile:.....	32
2.3.2. Hypothèse d'amortissement proportionnel (Visqueux) :.....	33
2.3.3. L'amortissement Hystérétique :.....	33
2 4. Théorie des Poutres :.....	33
2.4.1. Hypothèses relatives aux poutres :.....	34
2.4.2. La piézoélectricité appliquée aux poutres :.....	35
2.4.2.1. L'énergie potentielle $U$ :.....	38
2.4.2.2. L'énergie cinétique $T$ :.....	42
2 5. Théorie des Plaques :.....	43
2.5.1. Hypothèses relatives aux Plaques :.....	43
2.5.2. L'énergie potentielle $U$ :.....	46
2.5.3. L'énergie cinétique $T$ :.....	50
2 6. Conclusion :.....	52
ETUDE NUMERIQUE, APPLICATION ET SIMULATION.....	54
3 1. Introduction :.....	54
3 2. Discrétisation par éléments finis :.....	54
3.2.1. Application aux poutres :.....	54
3.2.1.1. L'énergie cinétique :.....	57
3.2.1.1.1. La zone SD « sans décollement » :.....	57

3.2.1.1.2.	La zone D « décollée » :	58
3.2.1.2.	L'énergie de déformation :	58
3.2.1.2.1.	La zone SD « sans décollement » :	58
3.2.2.	Application aux plaques :	66
3.2.2.1.	Energie cinétique :	69
3.2.2.2.	Energie de déformation :	70
3 3.	Equations de mouvement et assemblage :	72
3 4.	Résolution et Simulation :	73
3 5.	Conclusion :	75
4 1.	Introduction :	76
4 2.	Confrontation :	76
4 3.	Etude dynamique d'un bimorphe :	83
4 4.	Etude d'un bimorphe présentant une zone de décollement :	91
4.4.1.	Le cas statique :	91
4.4.2.	Le cas dynamique :	104
4 5.	Etude de plaque piézoélectrique :	114
4.5.1.	Fréquences et modes propres :	114
4.5.2.	Etude de cas :	116
CONCLUSION :		122
ANNEXE A :		125
ANNEXE B :		127
LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS :		127
REFERENCES :		129

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Principe de la piézoélectricité directe [L3].	28
Figure 2.2 Sol de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique par AgoraEnergy [L2]	28
Figure 2.3 Vue éclatée des différents composants du moteur piézoélectrique (à gauche) et représentation de l'entraînement du rotor par les crêtes de l'onde progressive (à droite) [L3]	29
Figure 2.4 Les BionicANTs de Festo des fourmis robots à pattes piézoélectrique [L4]	29
Figure 2.5 Les Robobees, principe et constitution. [L5]	30
Figure 2.6 Le Proteus, vue éclatée (à gauche). Action du Proteus sur une tumeur ciblée [L6]	30
Figure 2.7 Positions des 20 classes cristallines piézoélectriques parmi les 32 existantes [38,44]	31
Figure 2.8 Déplacement d'un point de la poutre	34
Figure 2.9 Polarisation parallèle.	36
Figure 2.10 Polarisation antiparallèle	37
Figure 2.11 Montage en parallèle.	37
Figure 2.12 Montage en série.	38
Figure 2.13 Déplacements des plaques. [54]	44

Figure 2. 14 Dimensions d'une plaque	51
Figure 3.1 Localisation de la zone du décollement	55
Figure 3.2 Eléments linéaires (réel et de référence) pour les poutres	57
Figure 3.3 Section longitudinale d'une poutre bimorphe	62
Figure 3.4 Eléments réel et de référence quadrilatères pour les plaques	68
Figure 3.5 Organigramme de la méthode de résolution Newmark.	74
Figure 4.1 La flèche du bout libre dans le cas statique chargement 10N (Modèle présent)	78
Figure 4.2 Flèche du bout libre dans le cas statique chargement 10N (ANSYS®)	78
Figure 4.3 Déplacement axial du bout libre dans le cas statique chargement 10N (Modèle présent).	79
Figure 4.4 Déplacement axial du bout libre dans le cas statique chargement 10N (ANSYS®).	79
Figure 4.5 Déplacement axial du bout libre dans le cas dynamique et un changement de température ambiante de 10°C	80
Figure 4.6 Dimension du Bimorphe.	80
Figure 4.7 Comparaison entre le présent travail et ANSYS® Déplacement vertical du bout libre sous un potentiel de 1V	81
Figure 4.8 Comparaison entre le présent travail et le modèle analytique [53] Déplacement vertical du bout libre sous un potentiel de 1V	82
Figure 4.9 Comparaison entre le présent travail et le modèle analytique [53] Rotation du bout libre sous l'effet d'un potentiel de 1V.	82

Figure 4.10	Comparaison entre le présent travail et le modèle analytique [53], déplacement axial du bout libre sous une charge axiale $F_x = 1\text{N}$	83
Figure 4.11	Modes Propres N° 1,2,3,5,6 et 7 du bimorphe	83
Figure 4.12	Modes Propres N° 4 et 8	84
Figure 4. 13	Effet de l'amortissement dans le cas d'un chargement axial $F_x = 1\text{ N}$	85
Figure 4. 14	Effet de l'amortissement dans le cas d'un chargement vertical $F_z = 1\text{ N}$	85
Figure 4. 15	Effet de l'amortissement dans le cas d'une tension électrique $V = 1\text{ V}$	86
Figure 4.16	Effet de l'amortissement sur le déplacement vertical pour une tension unitaire 1V	86
Figure 4.17	Effet de l'amortissement sur la trajectoire du bimorphe soumis à un chargement sinusoïdal.	87
Figure 4.18	Effet du déphasage entre la tension supérieure et inférieure sur la trajectoire de la pointe du bimorphe pour un amortissement de 0.08	88
Figure 4.19	Effet du déphasage entre la tension supérieure et inférieure sur la trajectoire de la pointe du bimorphe pour un amortissement nul.	88
Figure 4.20	Effet du déphasage entre les tensions supérieure et inférieure sur la trajectoire de la pointe du bimorphe pour un amortissement de 0.04 et trois valeurs d'épaisseurs.	89
Figure 4.21	Influence du rapport d'épaisseur (épaisseur	

supérieure/inférieure) sur la trajectoire du bout libre	90
Figure 4.23 Comparaison du déplacement axial d'un bimorphe encastré-encastré $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 0.005 \text{ m}$	91
Figure 4.24 Comparaison du déplacement axial d'un bimorphe encastré-encastré $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3} \text{ m}$ & $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$	92
Figure 4.25 Comparaison du déplacement axial d'un bimorphe encastré-libre $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3} \text{ m}$ & $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$ .	92
Figure 4.26 Comparaison du déplacement axial d'un bimorphe encastré-libre $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$	93
Figure 4.27 Déplacement axial de poutres encastrés-libres avec trois longueurs de décollement et $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$	94
Figure 4.28 Déplacement vertical de poutres encastrées-libres avec trois longueurs de décollement et $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$	94
Figure 4.29 Déplacement axial de poutres encastrées-encastées avec trois longueurs de décollement et $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$	95
Figure 4.30 Déplacement vertical de poutres encastrées-encastrées avec trois longueurs de décollement et $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$	95
Figure 4.31 Déplacement axial de poutres encastrées-libres avec trois longueurs de décollement et $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$ , une augmentation de température de $10^{\circ}\text{C}$ et $1000 \text{ N.m}^{-2}$	96
Figure 4.32 Déplacement axial de poutres encastrées-libres avec trois longueurs de décollement et $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3} \text{ m}$ & $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$ , une augmentation de température de $10^{\circ}\text{C}$ et $1000 \text{ N.m}^{-2}$	96

- Figure 4.33 Déplacement axial de 02 poutres encastées-libres décollées  
 la 1<sup>ière</sup> :  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3}$  m,  
 La 2<sup>ième</sup> :  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3}$  m une augmentation  
 de température de 10°C et 1000 N.m<sup>-2</sup> uniformément répartie 97
- Figure 4.34 Déplacement axial de poutres encastées-libres  
 avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3}$  m,  
 et un chargement de 1000 N.m<sup>-2</sup> uniformément réparti 98
- Figure 4.35 Déplacement axial de poutres encastées-libres  
 avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3}$  m,  
 et un chargement de 1000 N.m<sup>-2</sup> uniformément réparti 98
- Figure 4.36 Déplacement axial de poutres encastées-encastées  
 avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3}$  m,  
 et un chargement de 1000 N.m<sup>-2</sup> uniformément réparti 99
- Figure 4.37 Déplacement axial de poutres encastées-encastées  
 avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3}$  m,  
 et un chargement de 1000 N.m<sup>-2</sup> uniformément réparti 99
- Figure 4.38 Déplacement axial de poutres encastées-libres  
 avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3}$  m,  
 et une tension de  $V^{\text{Top}} = 100$  V à l'électrode supérieure et  
 $V^{\text{Bot}} = -100$  V à l'électrode inférieure 100
- Figure 4.39 Déplacement axial de poutres encastées-libres  
 avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3}$  m,  
 et une tension de  $V^{\text{Top}} = 100$  V à l'électrode supérieure et  
 $V^{\text{Bot}} = -100$  V à l'électrode inférieure 101
- Figure 4.40 Déplacement axial de poutres encastées-libres  
 avec 03 longueurs du décollement  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3}$  m,

et une tension de  $V^{\text{Top}} = 100 \text{ V}$  à l'électrode supérieure et  
 $V^{\text{Bot}} = -100 \text{ V}$  à l'électrode inférieure 101

Figure 4.41 Déplacement axial de poutres encastées-libres

avec 03 longueurs du décollement  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$ ,  
et une tension de  $V^{\text{Top}} = 100 \text{ V}$  à l'électrode supérieure et  
 $V^{\text{Bot}} = -100 \text{ V}$  à l'électrode inférieure 102

Figure 4.42 Déplacement axial de poutres encastées-encastées

avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$ ,  
et un chargement de  $1000 \text{ N.m}^{-2}$  uniformément réparti et  
 $10^\circ\text{C}$  d'augmentation de température 103

Figure 4.43 Déplacement axial de poutres encastées-encastées

avec 03 positions du décollement  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$ ,  
et un chargement de  $1000 \text{ N.m}^{-2}$  uniformément réparti et  
 $10^\circ\text{C}$  d'augmentation de température 103

Figure 4.44 Comparaison entre les 8 premières fréquences

propres de trois poutres ayant des décollements  
 $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$  106

Figure 4.45 Comparaison entre les 8 premières fréquences

propres de trois poutres ayant des décollements  
 $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$  106

Figure 4.46 Evolution du déplacement axial sous l'effet

d'un chargement uniformément réparti de  
 $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$  en porte à faux 107

Figure 4.47 Evolution du déplacement axial sous l'effet

d'un chargement uniformément réparti de  
 $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$  en porte à faux 107

- Figure 4.48 Evolution du déplacement axial sous l'effet  
d'un chargement uniformément réparti de  $-100 \text{ N.m}^{-2}$   
et  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$  en encasté-encasté 108
- Figure 4.49 Evolution du déplacement axial sous l'effet  
d'un chargement uniformément réparti de  
 $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$  en encasté-encasté 108
- Figure 4.50 Evolution du déplacement vertical sous l'effet  
d'un chargement uniformément réparti de  
 $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$  en encasté-libre 109
- Figure 4.51 Evolution du déplacement vertical sous l'effet  
d'un chargement uniformément réparti de  
 $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$  en encasté-libre 109
- Figure 4.52 Evolution du déplacement vertical sous l'effet  
d'un chargement harmonique et  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$   
en encasté-libre et un coefficient de 0.08 110
- Figure 4.53 Evolution du déplacement vertical sous l'effet  
d'un chargement harmonique et  $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$   
en encasté-libre. Deux coefficients d'amortissement. 0.02 et 0.08 111
- Figure 4.54 Evolution du déplacement vertical sous l'effet  
d'un chargement harmonique et  $h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3} \text{ m}$   
en encasté-libre. Deux coefficients d'amortissement. 0.02 et 0.08 111
- Figure 4.55 Effet du décollement sur la trajectoire du bout libre  
 $h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3} \text{ m}$  112
- Figure 4.56 Effet du décollement sur la trajectoire du bout libre  
 $h_{\text{Top}} = 7.10^{-3}$  &  $h_{\text{Bot}} = 3.10^{-3} \text{ m}$  112
- Figure 4.57 Effet de la longueur du bimorphe sur la trajectoire du bout libre

$h_{\text{Top}} = 7.10^{-3}$ & $h_{\text{Bot}} = 3.10^{-3}$ m	113
Figure 4.58 La trajectoire du bout libre et un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ avec trois coefficients d'amortissement 0.04, 0.06, 0.08 et	
$h_{\text{Top}} = h_{\text{Bot}} = 5.10^{-3}$ m	113
Figure 4.59 La trajectoire du bout libre et un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ avec trois coefficients d'amortissement 0.04, 0.06, 0.08 et	
$h_{\text{Top}} = 3.10^{-3}$ m & $h_{\text{Bot}} = 7.10^{-3}$ m	114
Figure 4.60 Configuration de la plaque	115
Figure 4.61 Les huit premiers modes propres de la plaque	115
Figure 4.62 Les configurations des électrodes.	116
Figure 4.63 Effet des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. Configuration 1	117
Figure 4.64 Effet des changements des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. L = 0.1 m Configuration 2	118
Figure 4.65 Effet des distributions des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. L = 0.2 m Configuration 2	118
Figure 4.66 Effet des changements des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. L = 0.1 m Configuration 3	119
Figure 4.67 Effet des distributions des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. L = 0.2 m Configuration 3	119
Figure 4.68 Effet des changements des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. L = 0.1 m Configuration 4	120
Figure 4.69 Effet des distributions des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux. L = 0.2 m Configuration 4	120

## LISTE DES TABLEAUX

<u>Tableau 4.1</u>	Dimensions de la poutre	77
<u>Tableau 4.2</u>	Propriétés du PVDF	80
<u>Tableau 4.3</u>	Comparaison entre ANSYS® et le présent travail	81
<u>Tableau 4.4</u>	Les 8 premières fréquences propres du bimorphe	84
<u>Tableau 4.5</u>	Comparaison entre le présent travail et celui de Perel <i>et al</i> [63]: les 8 premières fréquences de deux poutres, respectivement avec deux couches identiques et deux couches différentes.	104
<u>Tableau 4.6</u>	Présentation des 8 premières fréquences de deux poutres décollées. La première possède deux couches identiques et la deuxième deux couches d'épaisseurs différentes.	105

## Résumé :

L'utilisation des matériaux piézoélectriques dans le domaine de l'ingénierie a pris une ampleur considérable ces dernières années. La recherche bibliographique révèle la richesse des études faites dans ce domaine, leur actualité et leur importance. Comme contribution à la modélisation et à l'étude du comportement statique et dynamique, on se propose de considérer des structures piézoélectriques modélisées mathématiquement en admettant quelques aspects mécaniques, tels que l'effet du cisaillement, l'amortissement structural et le changement de la température ambiante. Ensuite, on discrétise les modèles établis en utilisant les éléments finis. Afin de se faire une idée plus détaillée sur ces structures, on étudie leur comportement en présence, entre autres, d'un défaut fréquemment rencontré, qui est le décollement entre les différentes couches formant les stratifiés. Les modèles présentés ont été confrontés à ceux de la littérature.

## ملخص :

زاد استخدام المواد الكهروضغطية في مجال الهندسة بشكل كبير في السنوات الأخيرة، و كمساهمة في دراسة السلوك الديناميكي و السكوني نقترح هياكل كهروضغطية منمذجة رياضيا و ذلك بأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب الميكانيكية على غرار تأثير القص، التخميد الهيكلي والتغير في درجة الحرارة المحيطة. ثم باستعمال طريقة العناصر المحددة تجزأ الهياكل لتسهيل عملية الحساب. من أجل تكوين فكرة عامة حول هذا الميدان أدرجنا دراسة على عيب كثيرا ما يصادف في مثل هذه الميادين متمثل في الانفصال بين الطبقات المكونة للهياكل. و لقد تم مقارنة النماذج المقترحة والتحقق منها و ذلك بمقارنتها مع ما هو منشور من أعمال.

## Abstract:

The use of piezoelectric materials in the field of engineering has grown considerably in recent year. As a contribution to the modeling and to study the static and dynamic behavior of structures made of these materials we proposed to consider piezoelectric structures modeled mathematically admitting some mechanical aspects as the effect of the shear deformation, the structural damping and the ambient temperature changes. After that we discretise the established model with the finite element method. We take into a consideration the delamination between the layers in multilayered structures us a major flaw recognized in these structures. The models were compared and checked with those of the literature.

## INTRODUCTION

La science connaît un continuels développement dans quasiment tous les domaines permettant ainsi la naissance de nouveaux matériaux et la mise au point de nouvelles méthodes pour leur élaboration. L'avènement de ces matériaux a ouvert de nouvelles perspectives aux scientifiques, vu les propriétés physiques et mécaniques qu'ils découvrirent pour chaque matériaux élaboré. Parmi cette multitude de matériaux on peut citer les matériaux piézoélectriques qui, justement, font l'objet de notre étude. Ces matériaux se sont vite frayés un chemin à travers un grand nombre de domaines : l'automobile, la médecine, l'aérospatial, l'aéronautique,...etc. Cela est dû à l'aptitude de ces matériaux à la conversion électromécanique et à leur faible encombrement [1]. Par conséquent, les structures dites intelligentes ont vues le jour, permettant aux chercheurs d'élucider de nombreux problèmes qui jadis étaient inexplicables. Ces structures faites à base de matériaux piézoélectriques ont fait l'objet de plusieurs recherches ces derniers temps [1-4].

C'est dans ce cadre qu'on s'intéresse, dans notre travail, à l'application de la piézoélectricité pour l'atténuation des vibrations. Le présent manuscrit est structuré en quatre chapitres. Le premier représente une introduction dans laquelle on donne une vue générale sur les principaux travaux dédiés au domaine de la piézoélectricité et à ses applications ainsi qu'à une vue globale sur notre travail et les différents aspects considérés. Dans le second chapitre, intitulé notions théoriques, on aborde les notions relatives aux théories appliquées et aux différentes hypothèses associées : piézoélectricité, poutres,..., amortissement

structural. Une discrétisation du modèle mathématique, établi au deuxième chapitre, est réalisée par la méthode des éléments finis, ainsi que l'obtention des équations du mouvement et leur résolution sont traités dans le troisième chapitre. Au chapitre quatre on présente les résultats numériques et les commentaires relatifs. Notre travail s'achève par une conclusion générale clôturant ainsi la thèse.

A. Mukherjee, A. S. Chaudhuri, [2] ont présenté une formulation généralisée pour une analyse dynamique non-linéaire de structures piézoélectriques, ils ont utilisé l'algorithme proposé par Bath, Ramm et Wilson, la formulation a été étendue pour inclure le couplage électromécanique, ils ont étudié des problèmes de large déformation due a des chargements transversales, en présence de chargement axial appliqué à des poutres bimorphes en PVDF. Et A. Nikkhoo [3] en utilisant le principe d'Hamilton l'équation de mouvement de poutres munies d'actionneurs piézoélectriques collés sur leurs surfaces supérieures et inférieures, la théorie d'Euler-Bernoulli est prise en compte pour étudier leurs déplacements en admettant différentes conditions aux limites. Un certain nombre de ressorts linéaires à haute rigidité ont été considérés comme des supports intermédiaires. Les résultats obtenus montrent l'efficacité du système de contrôle proposé pour l'atténuation de la réponse des structures à un niveau requis. M. Rahmoune et D. Osmont [4] ont utilisé l'analyse mathématique asymptotique afin d'établir une formulation variationnelle bidimensionnelle, sur des plaques intelligentes multicouches munies de patchs piézoélectriques. Un modèle en éléments finis a été proposé pour modéliser le problème. Il a été observé que la position des patchs piézoélectriques est primordiale dans le processus du contrôle actif et ainsi pour la santé des structures intelligentes. Y.S. Li, W.J. feng and Z.Y. cai [5] ont adopté la théorie de Timoshenko et celle du gradient de déformation modifiée appliquées à des poutres, formées par des matériaux piézoélectriques a graduation fonctionnelle (*Functionally Graded Piezoelectric Materials*), dont la fonction dépendait de la taille de la poutre. Pour illustrer le nouveau modèle de poutre simplement appuyée a graduation fonctionnelle, les problèmes liés à la statique et à la vibration libre de flexion sont résolus numériquement. Il a été noté que pour le cas statique, la grandeur des déplacements transversaux, des rotations et du potentiel électrique prédits par le modèle proposé sont petits par

rapport à ceux prédits par le modèle de Timoshenko. Pour les vibrations libres il a été noté que les fréquences naturelles prédites par le même modèle présenté sont larges, comparées à celles prédites par le modèle de Timoshenko. Y-G, Zhou, Y-M, Chen et H-J, Ding [6] se sont concentré sur l'étude d'un modèle analytique de poutre sandwich faite de matériaux piézoélectriques, et ont proposé de prendre en considération la théorie des déformations du premier ordre « FOSDT », qui admet une fonction de distribution raisonnable du potentiel électrique au niveau des couches piézoélectriques. La précision du modèle étudié, en particulier pour les modes de vibration inférieure, a été prouvée par l'analyse des vibrations libres d'éléments en flexion simplement soutenus, ainsi ils ont pu présentés un modèle analytique efficace pour l'analyse de la réponse dynamique de ces structures piézoélectriques. A. Donoso et O. Sigmund [7] ont étudié le problème du contrôle de la déflexion du bout libre d'une poutre en porte à-faux soumise à un chargement harmonique sur son extrémité libre, en optimisant indépendamment deux paramètres de conception, à savoir la distribution d'épaisseur et la largeur des couches piézoélectriques, pour le premier paramètre (la distribution d'épaisseur) la formulation dépend du champ électrique alors que la tension est maintenue constante, et pour le second, la variation est attribuée à la largeur de la poutre. Ils ont constaté que l'optimisation, d'une gamme entière au-lieu d'une unique fréquence, leurs permet d'obtenir un très bon rendement général de contrôle. L. Wang, R-x. Bai et H. Chen [8] ont traités les problèmes statiques dus à une interface fissurée dans une structure formée par une poutre multicouche, en considérant l'effet du cisaillement, sous des chargements mécaniques et électriques. Basée sur la théorie de Timoshenko appliquée aux poutres, des formulations ont été présentées pour calculer les contraintes au niveau des interfaces, ainsi que deux modes de fissurations pour le calcul des pertes d'énergies. Les résultats proposés sont en bonne corrélation avec ceux présentés dans la littérature. Le modèle de fissure proposé tient compte du cisaillement à la fois dans l'actionneur piézoélectrique et le substrat élastique, ainsi que la contrainte d'interface induite par la couche d'adhésif, ce qui améliore la précision du modèle présenté par rapport au modèle de stratifié composite classique et a celui d'Euler-Bernoulli. C. Jin et X. Wang [9] se sont focalisés sur l'étude du matériau et des propriétés géométriques des actionneurs et des couches de colle entre les actionneurs et les structures qui leur servent d'hôtes, une solution

analytique générale a été prévue pour l'étude de comportement de couplage électromécanique de l'actionneur piézoélectrique, collé à une structure à l'aide d'une couche intermédiaire sous l'effet d'un chargement électrique plane. Une formulation numérique basée sur la méthode des éléments finis est utilisée, pour étudier l'influence de la géométrie et de l'adéquation du matériau de la couche de colle sur la réponse de la structure. L'étude a révélée qu'une augmentation dans l'épaisseur de la couche de colle, provoque une augmentation dans la distribution de la contrainte de cisaillement le long de l'actionneur. X. Liu, R. Chen et L. Zhu [10] ont présenté une méthode d'estimation du rendement de conversion d'énergie d'un transducteur (convertisseur) piézoélectrique en forme d'arc, les résultats présentés montrent que les paramètres de forme ainsi que les modules d'élasticité ont un effet remarquable sur le rendement de la conversion. En augmentant le rapport de longueur entre la structure hôte et le transducteur piézoélectrique, on obtient une plage de longueurs donnant un résultat optimal (0.65 -2.21% pour un substrat en béryllium/bronze et 0.65 - 1.64% pour un substrat en acier). De même, une plage de rapport d'épaisseurs à été constatée (1.16 - 2.65 % pour un substrat en béryllium/bronze et 1.49 - 1.57 % pour un substrat en acier). A. Hai, A. Weiguang, Y. Duohe and W. Binsheng [11] en admettant la charge agissant sur la structure, la surface de la section transversale et la résistance de l'élément en tant que variables aléatoires, la fiabilité du système de structure piézoélectrique est analysée par la méthode des éléments finis stochastique et la théorie de la fiabilité de base. Ils ont constaté que la tension appliquée peut améliorer le niveau de fiabilité d'une structure en treillis munie de patches piézoélectriques, cette fiabilité augmente en augmentant la tension appliquée. A. Mahieddine, J. Pouget et M. Ouali [12] ont développé un modèle de poutre bimorphe décollée en se basant sur le modèle d'Euler-Bernoulli, des résultats numériques ont été présentés pour étudier l'influence du décollement. Les différences entre les flèches calculées par leurs modèle et celles présentées dans la littérature montrent l'adéquation du modèle établi par les auteurs, ils constatent que le déplacement axial augmente avec l'augmentation des épaisseurs des couches. Les fréquences calculées en se basant sur leur formulation sont en bon agrément avec les fréquences exactes. V. Y. Perel et A. N. Palazotto [13] ont développés une théorie de poutres décollées pour élaborer un modèle permettant d'identifier les dommages, essentiellement sous forme de décollement entre les couches d'un stratifié, les fréquences

calculées par la méthode des éléments finis sont en bon accord avec celles obtenues expérimentalement, chose qui prouve la validité des hypothèses établies. R. Dunsch, J-M. Breguet [14] ont présenté un modèle d'approche en superposant les effets de l'action piézoélectrique et celle des charges extérieures, cette approche (basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli) permet d'aboutir à un modèle statique pour n'importe quel actionneur piézoélectrique sous l'effet d'un chargement latéral. Trois différents types de configurations d'actionneurs ont été considérés, le triple-couche constitué de deux couches piézoélectriques œuvrant en opposition et une couche intermédiaire passive, le bimorphe ayant les mêmes configurations sans la couche intermédiaire et le monomorphe avec une couche piézoélectrique et une couche passive. M. Arafa, O. Aldraihem et A. Baz [15] ont présenté une modélisation dynamique d'un moteur piézoélectrique linéaire, le modèle utilisé prédit la réponse dynamique du piézo-moteur à une variété d'excitations. Le modèle établi est basé sur un domaine couplé en éléments finis, il prend en considération les interactions et la friction entre les bimorphes piézoélectriques et la tige d'entraînement. R. Lucinskis, D. Mazeika, T. Hemsel et R. Bansevicius [16] ont entrepris une étude numérique et expérimentale sur un actionneur piézoélectrique ayant deux vecteurs de polarisation mutuellement perpendiculaires, cette étude confirme la forme elliptique de la trajectoire du mouvement du point de contact étudié. Les paramètres et directions du mouvement elliptique peuvent être contrôlés en appliquant différents schémas d'excitations. L'étude expérimentale révèle que des modes de flexion symétrique sont obtenus pour des actionneurs possédant des sections carrées, aussi, qu'un petit changement dans la fréquence d'excitation a une influence considérable sur l'orientation et les paramètres du mouvement elliptique. Y-G, Zhou, Y-M, Chen et H-J, Ding [17] utilisent la théorie des déformations du premier ordre « FOSDT » et l'approximation de type couche par couche pour le potentiel électrique [18]. Le processus de modélisation a révélé qu'une haute précision des fréquences de vibrations de flexion peut être obtenue, comparée à celle obtenue par la théorie des plaques minces, le facteur de correction du cisaillement joue un rôle essentiel pour assurer la précision et la prédiction de la réponse. C. Poizat et A. Benjeddou [19] ont développé deux modèles théoriques de bimorphes piézoélectriques, le premier basé sur l'effet de l'extension le second sur l'extension et cisaillement-extension en jouant sur l'orientation de la polarisation des couches

piézoélectriques, la méthode des éléments finis est utilisée pour la validation des modèles théoriques. Différentes configurations des conditions aux limites sont étudiées. Il a été noté que pour les bimorphes en configuration encastéré-encastéré, un rapport de polarisation égale à 50% (longueur de poutre polarisée/longueur non polarisée) produit une déflexion maximale raisonnable. A noter aussi que, même si le cisaillement conduit à une déviation maximale petite, il crée également des contraintes beaucoup plus faibles et homogènes dans l'interface des bimorphes. D. Mazeika et R. Bansevicius [20] ont présenté une modélisation numérique d'un actionneur piézoélectrique muni d'une masse préchargée. Il a été montré que les trajectoires elliptiques de la pointe de l'actionneur peuvent être obtenues en appliquant différentes valeurs de masse et différents modes de vibrations de résonance. Un mouvement direct et inverse de l'actionneur est obtenu en utilisant deux modes de vibrations et différents schémas d'électrodes. La forme (aire et longueur) de ces ellipses diffère de mode en mode, ce qui implique une différence dans la force motrice de l'actionneur. S. Avdiaj, J. Setina et N. Sylva [21] ont adopté une méthode générale d'analyse électrostatique par éléments finis de structure en quartz en utilisant ANSYS<sup>®</sup> comme logiciel de calcul, compte-tenu du fait que la FEM est utilisée pour résoudre les problèmes liés aux macrostructures, une extension est faite pour les microstructures. N-T. Nguyen et K. J. Yoon [22] ont présenté une étude sur le déplacement d'actionnement des actionneurs piézoélectriques unimorphe avec deux conditions de chargement: chargement central et sur la pointe. Le déplacement d'actionnement de vérins unimorphes piézoélectriques chargés est prédit par la FEM et observé par des expériences. Etonnamment, les prédictions ne montrent pas la tendance correcte du comportement de l'actionneur, la modélisation et la prédiction de ce comportement exigent une relation constitutive appropriée entre les contraintes mécaniques, le champ électrique et de la déformation d'actionnement. Deux genres typiques d'unimorphe piézoélectrique sont étudiées numériquement et expérimentalement, LiPCA-C3 (*Lightweight Piezoceramic Composite Actuator*) et THUNDER « une production de la NASA produite en collant des piézo-céramiques fines sur des plaques métalliques par des adhésives polyamides à haute température ». R. Merry, R. Van de Molengraft et M. Steinbuch [23] ont dérivé un modèle électromécanique d'un actionneur piézoélectrique marchant avec quatre piézo-jambes bimorphes, qui contiennent un

empilement de deux piézo-couches chacune séparée électriquement. Les différentes couches dans les piézo-jambes sont modélisées à l'aide d'une structure faite d'éléments localisés à base de masse-ressort-amortisseur connectés. Une approche basée sur l'énergie est utilisée pour dériver un modèle dynamique de l'actionneur à travers les équations du mouvement de Lagrange. La linéarisation statique dérivée entre les formes d'onde d'entrée, et les trajectoires des extrémités des jambes fournit une interprétation physique des coefficients de flexion et d'extension de ses jambes. Les trajectoires d'extrémités modélisées montrent une bonne correspondance avec les mesures obtenues expérimentalement, pour les deux formes d'onde sinusoïdales et asymétriques avec une précision entre 77 et 90%. A. Mahieddine et M. Ouali [24] ont développé un modèle en éléments finis pour l'analyse de poutres munies d'actionneurs et de capteurs piézoélectriques basé sur le modèle du premier ordre de la théorie de Kirshoff. Le modèle prend en considération les déformations de cisaillement. Des résultats numériques ont été présentés pour étudier l'efficacité des capteurs et actionneurs piézoélectriques dans le contrôle actif des vibrations. V. Rovenski et H. Abramovich [25] ont présenté des études et des définitions des poutres piézoélectriques, des matériaux piézoélectriques, les équations de la piézoélectricité linéaire et leur présentation matricielle, les conditions aux limites. Les auteurs ont également commenté la formulation des problèmes aux limites bidimensionnelles, jouant un rôle central dans leur travail. Ils ont présenté la solution au problème piézoélectrique de St. Venant, qui est utilisé pour corriger la solution principale pour annuler les charges résiduelles. A ajouter aussi à leur travail la description de la méthodologie de solution générale du problème. Almansi-Michell. T- M. Badri Albarody et H. H. Al-Kayiem [26], le modèle analytique d'une plaque composite TMEE « Thermo-Magnéto-Electro-Elastique » basé sur la théorie FOSDT a été développé. De nouvelles questions suscitées par la stratification structurelle, telles que les distributions de flèche au centre, contraintes, déplacement électrique, et l'induction magnétique sur l'épaisseur de la plaque, ont été abordées. Le modèle développé fournit une base pour étudier les effets interactifs entre les champs thermiques, magnétiques, électriques et élastiques dans les structures à parois minces. Pour cela une structure formée par une plaque multicouche sous l'effet de chargement sinusoïdal à été considérée en condition aux limites « simplement appuyée ». Il a été noté que les flèches du

centre, le potentiel électrique et magnétique diminuent quand le rapport (coté/épaisseur) de la plaque augmente. J. Jovanova, V. Gavriloski, M. Djidrov and G. Tasevski [27] leur recherche inclut la modélisation, la simulation et la réalisation expérimentale d'une structure intelligente formée par une poutre en aluminium avec des patchs piézoélectriques distribués sur elle, et excitée par des excitateurs externes. La présentation théorique d'un algorithme de contrôle optimale par rétroaction est établie, ces algorithmes ont été développés et testés via un dispositif expérimental qui a donné de bons résultats dans l'atténuation des vibrations. Y-S. Lee [28] a étudié les réponses dynamiques et les propriétés de certaines structures de poutres équipées par des paires de capteurs-actionneurs co-localisés, en incluant des agitateurs conventionnels présentés en trois différentes configurations. Cette étude cible la mise en œuvre d'un système analogue, plus simple et plus réaliste pour le contrôle actif, qui se compose de capteurs, actionneurs et amplificateurs de puissance (sans les processeurs de signaux numériques *digital signal processors*) et des filtres passe-bas. Il a été observé qu'une paire co-localisée d'un accéléromètre et d'agitateur est très bonne en termes de performance et de stabilité. Aussi, une paire assortie d'un capteur et actionneur piézoélectrique ne convient pas avec un système de contrôle actif de vibrations par rétroaction. A. Kokkinopoulos, G. Vokas et P. Papageorgas [29] ont analysé la possibilité d'intégrer des générateurs piézoélectriques sur des chaussées fréquemment utilisées, en l'occurrence celle appelée ATTIKI ODOS en Grèce qui présente un nombre important de véhicules circulant sur cette route, et aussi un nombre élevé de postes de péage, le trafic routier a été analysé afin de déterminer les positions idéales pour implanter ces générateurs piézoélectrique dans la chaussée. Trois combinaisons portant sur le trafic le plus dense ont conduit à trois scénarios de production d'électricité. Puis, afin d'utiliser « *Vehicular Calculator* », outil développé par InnowattechLTD, un certain nombre de paramètres et hypothèses ont été envisagés. Il a été noté que la mise en œuvre d'un tel système piézoélectrique est vraiment avantageuse, car elle fournit suffisamment d'énergie électrique pour couvrir les besoins locaux de la voirie, d'autant plus que l'énergie produite est consommée au même endroit en évitant le transport d'énergie. Parmi les avantages les plus remarquables est que, en étant installés sur les chaussées, les générateurs piézoélectriques préservent l'environnement dans son état original. I. Ecsedi [30] a présenté un modèle

unidimensionnel de poutres piézoélectriques basé sur la théorie d'Euler-Bernoulli, ainsi que des hypothèses adéquates concernant la composante axiale du déplacement électrique, ainsi que la détermination des équations de mouvement des vibrations longitudinales et transversales en fonction de déplacement unidimensionnelle variable (mécanique et électrique). Les calculs détaillés traitent la détermination des fréquences propres des vibrations transversales libres de poutre simplement appuyées et en circuit ouvert. Y. Xu et D. Zhou [31] ont établi un modèle d'une poutre piézoélectrique à épaisseur variable, dont les conditions aux limites appliquées à cette poutre sont, simplement supporté. Les coefficients inconnus de la solution sont déterminés en utilisant les séries de Fourier sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre. L'étude de la convergence montre que les solutions convergent rapidement, si une augmentation dans les termes de la série est observée. Une étude comparative a montré que les résultats sont en accord avec ceux de la littérature. Quatre exemples ont été analysés pour démontrer l'efficacité des résultats de la solution proposée. Ainsi l'effet de la variation d'épaisseur sur les contraintes et les déplacements a été étudié. D. U. Kong, B. R. Son, S-J. Moon et D-H. Lee [32] ont déposé un brevet d'invention d'un robot miniature capable de réaliser un mouvement efficace, ainsi que le déplacement sur chemins non structurés en utilisant une multitude de piézo-jambes piézoélectriques à deux degrés de liberté, muni d'un nouveau mécanisme de conduite et une structure de contrôle. Ceci est réalisé grâce à des signaux d'entrée commandés par un dispositif de commande, ayant le comportement d'un réseau neuronal artificiel, et permettant la modélisation des comportements complexes grâce à une structure simple. C. Maurini, J. Pouget et S. Vidoli, [33] ont adopté un modèle d'*extensible elastica* [34,35] où la cinématique de poutre est décrite en termes de rotations transversales seulement, qui sont évaluées en utilisant la théorie de poutre monocouche équivalente [36,37]. Le modèle a été établi en se basant sur la formulation de Lagrange et appliqué pour l'analyse de la stabilité. L'effet de l'actuation axiale et de flexion est discuté, il a été observé que la stabilité de toute configuration de la poutre est indépendante de l'actionnement de flexion. Ainsi, les instabilités dans la configuration spatiale ont été caractérisées en termes de l'actionnement axial seulement.

Ainsi l'objectif de cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une étude sur le comportement de structures (formées essentiellement par des poutres et des plaques) piézoélectriques, en considérant plusieurs paramètres :

- l'effet de cisaillement (illustré par la théorie des déformations de premier ordre ou appelé communément théorie de Timoshenko),
- l'amortissement structural (traduisant les mécanismes internes de dissipation d'énergie),
- l'influence des conditions aux limites et les caractéristiques géométriques,
- les changements de température ambiante (travaillant toujours loin de la température de Curie propre aux matériaux piézoélectriques) et,
- aussi la présence d'un défaut dans la structure (comme défaut on considèrera une zone de décollement entre les couches formant les bimorphes, les longueurs et emplacements de ces défauts seront étudiés).

## NOTIONS THEORIQUES

### 2 1.     Introduction

Dans ce chapitre on donne les notions théoriques utiles concernant la piézoélectricité, l'amortissement structurale, les poutres et plaques. Ainsi que les hypothèses adoptées dans notre travail et relatives à ces théories.

### 2 2.     La piézoélectricité

La découverte de la propriété piézoélectrique date des années 1880, par les frères Pierre et Jacques Curie, mais l'appellation *Piézoélectricité* fut un an plus tard par Wilhelm Hankel qui donna se nom tiré du grec « Piezein » et qui signifie presser [1,38,L1]. L'aptitude à la reconversion électromécanique des matériaux dits piézoélectriques leurs procure un grand avantage dans le domaine du contrôle actif [38,39], à la récupération de l'énergie mécanique pour la convertir en énergie électrique [L2], ou même à la mise en œuvre de dispositifs d'actionnement (appelés actionneurs). Ce phénomène est le produit de la séparation des centres des charges positives et ceux des charges négatives suite à une contrainte mécanique appliquée sur un matériau non conducteur (Figure (2.1) [L3]), cette séparation fait apparaitre un champ électrique entre les faces de ce matériau, cette action est nommée l'effet directe, inversement, en appliquant un champ électrique sur ce matériau une déformation mécanique apparait (effet inverse).

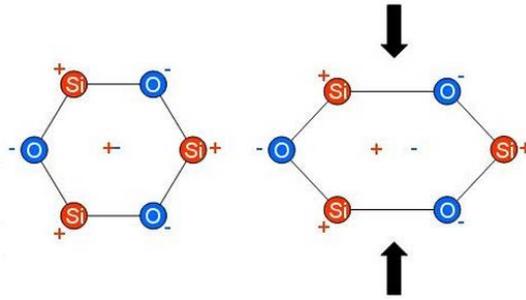


Figure 2.1. Principe de la piézoélectricité directe [L3].

Comme applications industrielles de la piézoélectricité on peut citer les exemples suivants :

AgoraEnergy développe un sol qui récupère l'énergie mécanique des passants pour la convertir en énergie électrique, grâce à une dalle spéciale contenant des éléments piézoélectriques. Dans des lieux à forte affluence, l'AgoraEnergy est une source durable et locale. Elle peut être utilisée dans l'environnement urbain pour alimenter par exemple l'éclairage et l'affichage. [L2]



Figure 2.2. Sol de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique par AgoraEnergy [L2].

Le service mécanique à l'université du Mons en Belgique travaille dans la modélisation de moteur piézoélectrique à onde progressive [L3]. Cette dernière en se propageant dans l'anneau statorique, impose à chaque point de celui-ci une trajectoire elliptique (figure 2.3), un disque libre en rotation, posé sur le stator vibrant entraîne un mouvement de rotation continu à partir d'une vibration piézoélectrique à haute fréquence.



Figure 2.3 Vue éclatée des différents composants du moteur piézoélectrique (à droite) et représentation de l'entraînement du rotor par les crêtes de l'onde progressive (à gauche) [L3]

La firme FESTO a développé les BionicANTS ou les robots fourmis, ceux sont des robots capables de collaborer entre eux pour résoudre (ensemble) des tâches complexes [L4]. Les pattes de ces fourmis sont des actionneurs souples piézoélectriques qui nécessitent peu d'énergie et facilitent les mouvements.

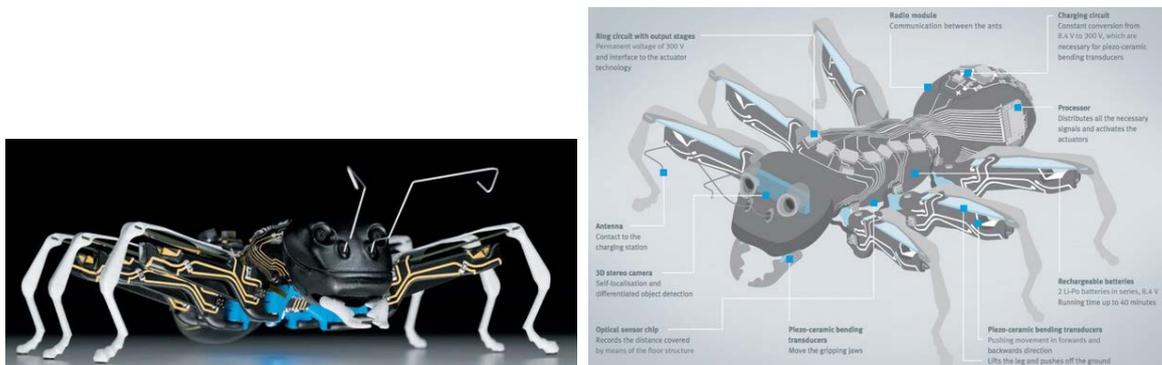


Figure 2.4. Les BionicANTS de Festo des fourmis robots à pattes piézoélectrique [L4].

R. Wood, R. Nagpal et G. Y. Wei [L5,40] ont étudié et réalisé des robots minuscules destinés à remplacer les abeilles (exterminées par les pesticides) qui n'arrivent plus à polliniser (mode de reproduction des fleurs) efficacement les plantes, leur vol réalisé grâce à des actionneurs piézoélectriques imitant ainsi celui des insectes.

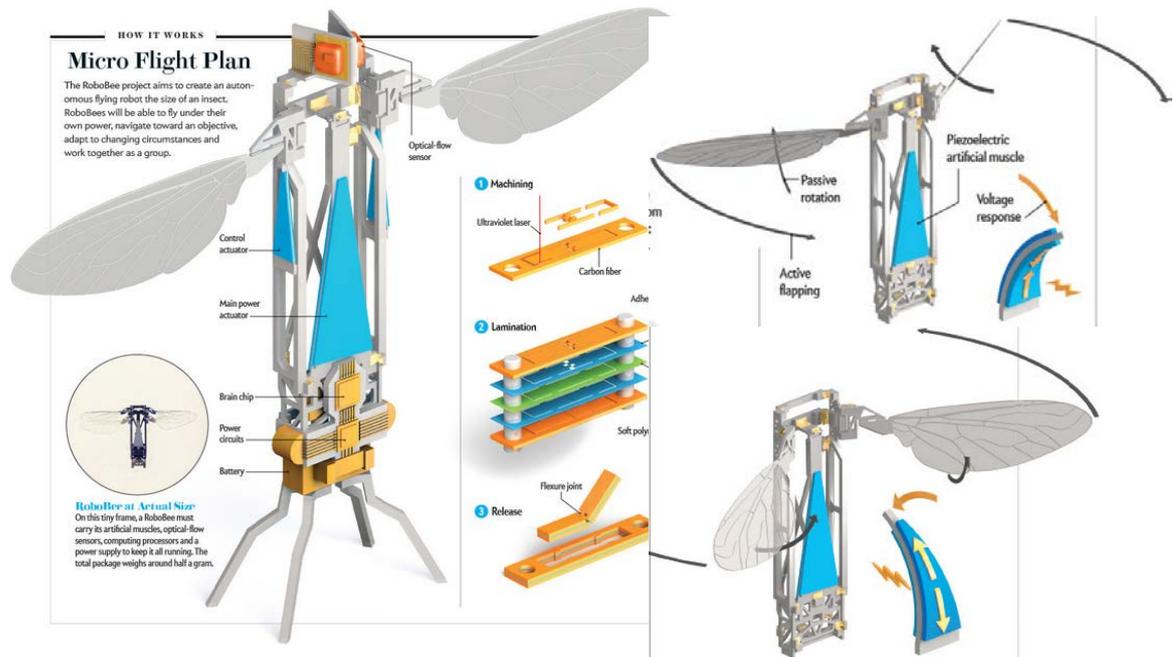


Figure 2.5. Les Robobees principe et constitution. [L5]

Comme application médicale récente, on peut citer le Proteus, c'est un nano-robot destiné à la médecine. Ce robot (vu sa taille de l'ordre du quart de millimètre) peut être introduit dans des vaisseaux sanguins pour embarquer des équipements très spéciaux pour pratiquer des interventions chirurgicales (comme un scalpel ou une caméra), ou une dose très concentrée de médicaments, qu'il pourra injecter directement dans les tumeurs [L6]. Ce robot peut se déplacer grâce à des flagelles animées par un moteur piézoélectrique.

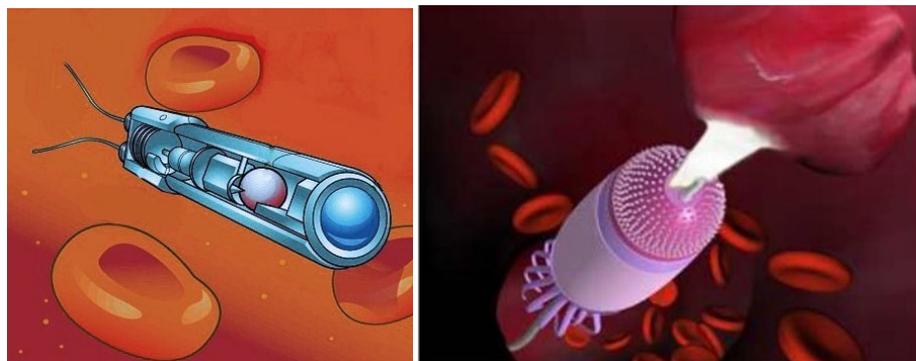


Figure 2.6. Le Proteus, vue éclatée (à gauche). Action du Proteus sur une tumeur ciblée [L6]

### 2.2.1. Relations théoriques :

Les relations traduisant le couplage entre les contraintes mécaniques et les constantes piézoélectriques, en considérant les contraintes thermiques sont données par les relations du système (2.1) [22, 41]. Ces relations ont été traitées. [1,38,39,41,43] :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - \lambda_{ij} \Theta \\ D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \bar{\varepsilon}_{ik} E_k + p_i \Theta \end{cases} \quad 2.1$$

Sous forme matricielle la relation (2.1) peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} - [e]^t\{E\} - \{\lambda\}\Theta \\ \{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [\bar{\varepsilon}]\{E\} + \{p\}\Theta \end{cases} \quad 2.2$$

Compte-tenu du fait que sur les 32 classes cristallines existantes, seulement 20 d'entre elles présentent l'aspect piézoélectrique [38], cela réduira considérablement les constantes élastiques présentes dans la matrice des coefficients d'élasticités notée par  $[Q]$ ,

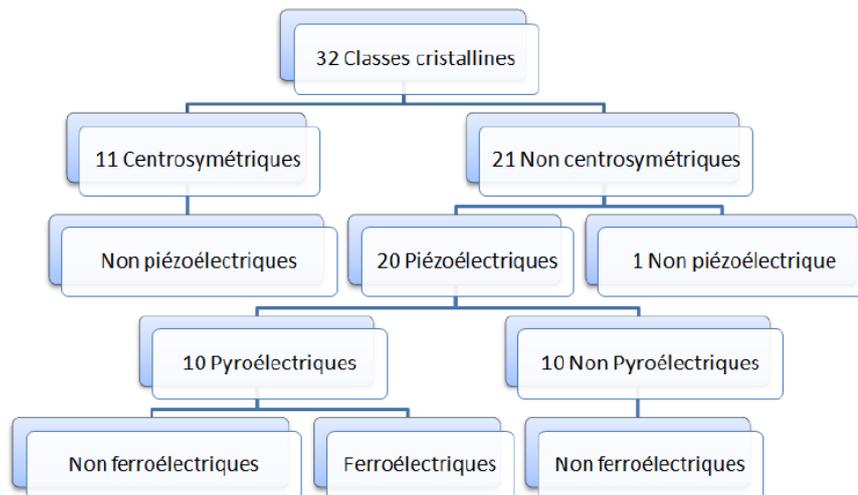


Figure 2.7. Positions des 20 classes cristallines piézoélectriques parmi les 32 existantes [38,44]

Donc les matrices des permittivités, des élasticités et des constantes piézoélectriques relatives aux matériaux piézoélectriques et plus précisément les PVDF (comme application dans notre travail ont considéré les PVDF) prennent respectivement les formes générales suivantes :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad 2.3$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.4$$

$$[\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad 2.5$$

### 2.3. L'amortissement structural :

L'amortissement structural représente l'ensemble des mécanismes de dissipation d'énergie présents dans les matériaux constituant les structures [38,45,46], ces mécanismes responsables des dissipations ont de nombreuses origines : frottements, interaction fluide-structure dans une lame fluide, chocs, viscosité et plasticité, rayonnement vibratoire aux appuis [45]. Pour modéliser l'amortissement structural il existe deux hypothèses qui permettent de rendre la matrice d'amortissement diagonale (physiquement ça n'a pas de sens, mais ça permet de revenir à un système d'équations découplées) dans la base des modes propres [47]. Car, il est nécessaire d'effectuer des hypothèses sur la répartition de l'amortissement dans la structure, étant donné que les techniques expérimentales d'identification de la dynamique des structures sont basées principalement sur l'analyse modale. Ces deux hypothèses sont, Hypothèse de Basile et Hypothèse d'amortissement proportionnel.

#### 2.3.1. Hypothèse de Basile:

Elle consiste à considérer que les termes à l'origine de la dissipation sont les termes diagonaux de la matrice d'amortissement uniquement, donc on admet que l'amortissement est très faible et que les modes sont éloignés en terme de fréquences [45,47]. Néanmoins la partie extradiagonale peut intervenir pour les modes couplés.

### 2.3.2. Hypothèse d'amortissement proportionnel (Visqueux) :

La matrice de dissipation est considérée comme étant proportionnelle aux matrices d'inertie et de raideur, ce qui peut être traduit par la supposition du fait que la dissipation de chaque zone (masse, raideur) est proportionnellement de la même façon [45,47]. Cet amortissement, dit de "Rayleigh", peut prendre trois caractéristiques principales. Amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie. Amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité. Et finalement amortissement proportionnel complet [45]. La matrice d'amortissement prend la forme générale suivante :

$$[C] = \bar{\alpha}[M] + \bar{\beta}[K] \quad 2.6$$

- L'amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie :  
 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_i$  Et  $\bar{\beta} = 0$  ce cas est utilisé dans les résolutions en domaine transitoire [45].  $\bar{\alpha}_i$  Est relatif au  $i^{eme}$  mode propre. Les modes en basse fréquence sont très amorties.
- L'amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité :  
 $\bar{\alpha} = 0$  Et  $\bar{\beta} = \bar{\beta}_i$  ça traduit que les modes élevés (en hautes fréquences) sont très amorties [45].
- L'amortissement proportionnel complet :  
 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_i$  Et  $\bar{\beta} = \bar{\beta}_i$  donc c'est une combinaison entre les deux cas précédents [44].

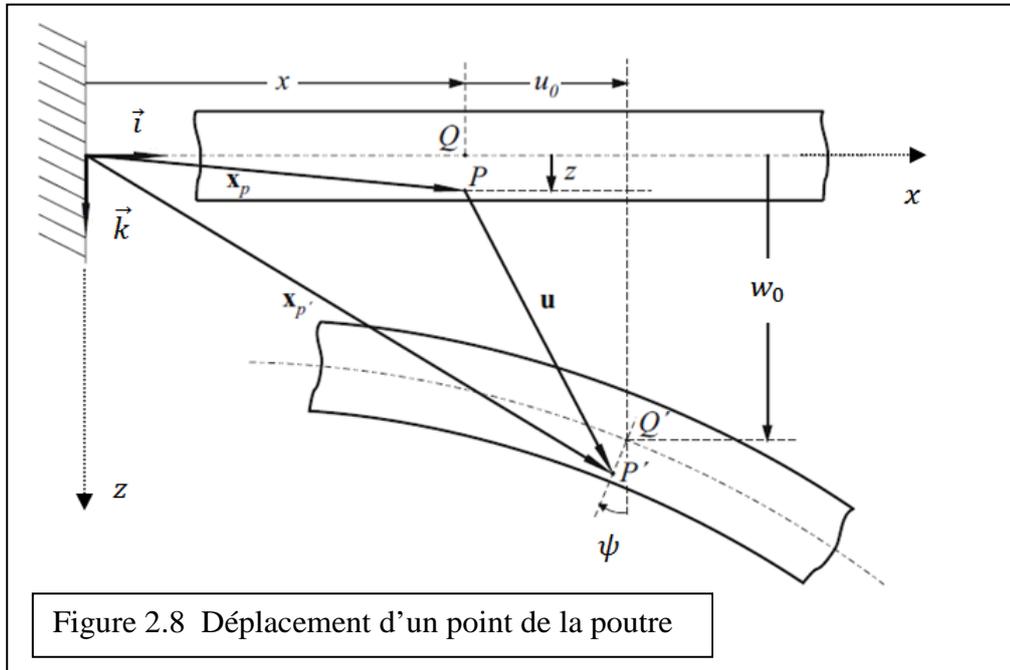
### 2.3.3. L'amortissement Hystérétique :

Pour caractériser l'amortissement des matériaux, une hypothèse additionnelle est adoptée. Une matrice des rigidités complexe est définie telle que la partie imaginaire soit liée à l'amortissement [48,49].

## 2 4. Théorie des Poutres :

La théorie de Timoshenko (Stephen Timoshenko 1878-1972 ingénieur Ukrainien et professeur à l'université de Stanford USA) sur les poutres qui est appelée communément, la théorie des déformations de cisaillement du premier

ordre appliquée aux poutres, notée par FOSDT "First Order Shear Deformation Theory" [50]. Cette théorie prend en considération les déformations du cisaillement et admet trois champs de déplacement (deux champs de translation et un champ de rotation), illustrés par la Figure (2.8).



#### 2.4.1. Hypothèses relatives aux poutres :

Pour une poutre, la longueur est grande par rapport aux dimensions de la section.

- L'ensemble des centres de sections droites successives constituant la poutre représente une ligne ou courbe continue appelée *fibres moyenne*.
- Les sections droites sont perpendiculaires à la fibre moyenne.
- Le rayon de courbure est grand par rapport aux dimensions des sections droites.
- Les sections droites de la poutre sont indéformables.
- L'hypothèse de Barré Sant-venant est prise en compte dans la considération des actions des efforts. *Un système d'actions de surfaces agissant sur une petite zone n'influence les contraintes que par sa résultante générale, et son moment résultant.* [51]
- Le champ électrique possède une seule direction (suivant z)

Le déplacement d'un point  $P$  quelconque de la poutre est donné par (figure 2.8) :

$$u = X_p - X_{\tilde{p}}$$

$$X_p = x.\vec{i} + z.\vec{k}$$

$$X_{\tilde{p}} = (x + u_0 - z.\sin\psi).\vec{i} + (w_0 + z.\cos\psi).\vec{k}$$

Si :  $\sin\psi \approx \psi$  et  $\cos\psi \approx 1$  (pour les petites valeurs de  $\psi$ )

$$u = (u_0 - z.\sin\psi).\vec{i} + (w_0).\vec{k}$$

D'où on écrit :

$$\begin{cases} u = u_0 - z\psi \\ v = 0 \\ w = w_0 \end{cases} \quad 2.7$$

Les déformations sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_{,x} - z\psi_{,x} \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi = w_{,x} - \psi = \beta \end{cases} \quad 2.8$$

#### 2.4.2. La piézoélectricité appliquée aux poutres :

La combinaison entre le système d'équations (2.8) avec les matrices (2.3), (2.4) et (2.5) permet de calculer les contraintes dans un matériau piézoélectrique, en admettant les effets de la température ainsi que les hypothèses énumérées ci-dessus, et cela en appliquant la loi de Hooke généralisée et la relation du déplacement diélectrique pour les matériaux piézoélectriques :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \Theta \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \quad 2.9$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{21} & \bar{\varepsilon}_{22} & \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{31} & \bar{\varepsilon}_{32} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \Theta \quad 2.10$$

Après calcul les formes finales suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \sigma_x = \left( Q_{11} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{22}} \right) \varepsilon_x - \left( e_{31} - \frac{Q_{21}}{Q_{22}} e_{32} \right) E_z - \Theta \lambda_1 \\ \tau_{xz} = \left( Q_{55} - \frac{Q_{45}^2}{Q_{44}} \right) \gamma_{xz} \end{cases}$$

$$D_z = \left( \bar{\varepsilon}_{33} + \frac{e_{32}^2}{Q_{22}} \right) E_z + \left( e_{31} - e_{32} \frac{Q_{21}}{Q_{22}} \right) \varepsilon_x + p_3 \Theta$$

Posant :

$$\begin{cases} \sigma_x = \bar{Q}_{11} \varepsilon_x - \tilde{e}_{31} E_z - \Theta \lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55} \gamma_{xz} \end{cases} \quad 2.11$$

$$D_z = \bar{\varepsilon}_{33} E_z + \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + \Theta p_3 \quad 2.12$$

Avec :

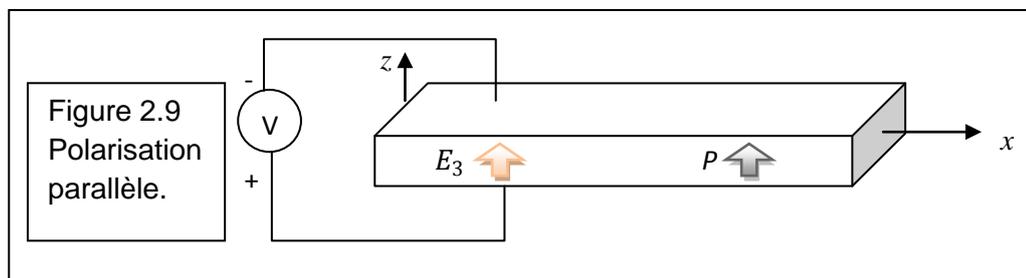
$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} + Q_{12} \left( \frac{Q_{26} Q_{61} - Q_{21} Q_{66}}{Q_{22} Q_{66} - Q_{26}^2} \right) + Q_{16} \left( \frac{Q_{61} Q_{22} - Q_{62} Q_{21}}{Q_{26}^2 - Q_{22} Q_{66}} \right) \quad 2.13$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55} - \frac{Q_{45}^2}{Q_{44}} \quad 2.14$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \left[ \bar{\varepsilon}_{33} + \frac{Q_{66} e_{32}^2}{Q_{22} Q_{66} - Q_{26}^2} \right] \quad 2.15$$

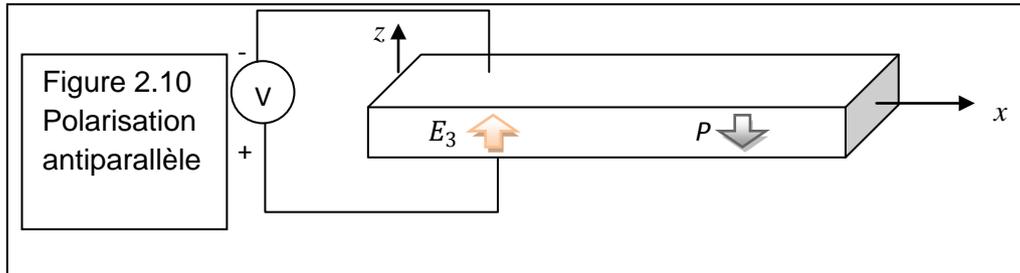
$$\tilde{e}_{31} = \left[ e_{31} + e_{32} \frac{Q_{26} Q_{61} - Q_{21} Q_{66}}{Q_{22} Q_{66} - Q_{26}^2} \right] \quad 2.16$$

On distingue deux cas de figure, cas d'un montage en série et celui en parallèle. Dans le cas où la couche piézoélectrique est montée en parallèle, le champ électrique et la polarisation possèdent la même orientation. (Figure 2.9)



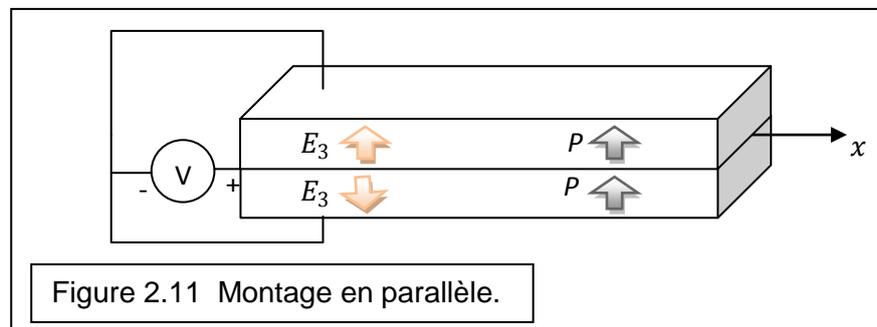
$$\begin{cases} \sigma_x = \bar{Q}_{11} \varepsilon_x - \tilde{e}_{31} E_z - \Theta \lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55} \gamma_{xz} \\ D_z = \bar{\varepsilon}_{33} E_z + \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + \Theta p_3 \end{cases} \quad 2.17$$

Dans le cas où la couche piézoélectrique est montée en série dite antiparallèle, le champ électrique et la polarisation possèdent deux orientations différentes. (Figure 2.10)



$$\begin{cases} \sigma_x = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x + \tilde{e}_{31}E_z - \Theta\lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ -D_z = \bar{\varepsilon}_{33}E_z - \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \Theta p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x + \tilde{e}_{31}E_z - \Theta\lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ D_z = -\bar{\varepsilon}_{33}E_z + \tilde{e}_{31}\varepsilon_x - \Theta p_3 \end{cases} \quad 2.18$$

Alors pour les poutres bimorphes on peut distinguer deux cas de figures. Si les deux couches étaient en parallèle, le champ électrique appliqué ne possède pas le même sens. [52,53] (Figure 2.11)



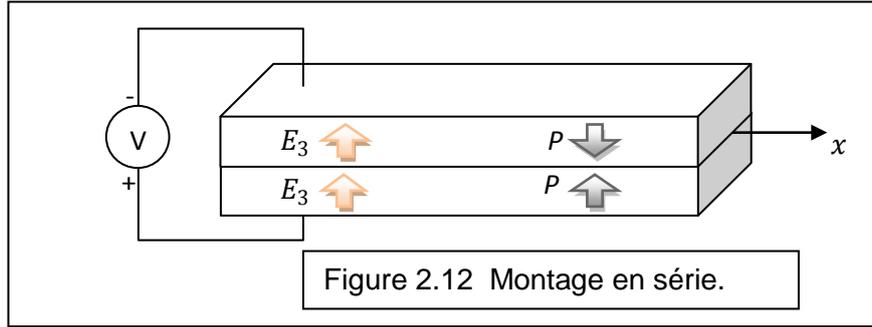
A cette étape on doit ajouter une hypothèse relative aux structures bimorphes.

- Tous déplacements communiqués à une couche sera intégralement transmis à l'autre. D'une autre façon, les deux couches sont parfaitement collées.

$$\begin{cases} \sigma_x^T = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x - \tilde{e}_{31}E_z - \Theta\lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ D_z^T = \bar{\varepsilon}_{33}E_z + \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \Theta p_3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \sigma_x^B = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x - \tilde{e}_{31}E_z - \Theta\lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ -D_z^B = -\bar{\varepsilon}_{33}E_z - \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \Theta p_3 \end{cases} \quad 2.19$$

A noter que les exposants  $X^T$  et  $X^B$  signifient respectivement la couche supérieure et inférieure.

Si les deux couches étaient en série, le champ électrique appliqué possède le même sens [52] (Figure 2.12) :



$$\begin{cases} \sigma_x^T = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x + \tilde{e}_{31}E_z - \Theta\lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ D_z^T = \bar{\varepsilon}_{33}E_z - \tilde{e}_{31}\varepsilon_x - \Theta p_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_x^B = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x - \tilde{e}_{31}E_z - \Theta\lambda_1 \\ \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ D_z^B = \bar{\varepsilon}_{33}E_z + \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \Theta p_3 \end{cases} \quad 2.20$$

#### 2.4.2.1. L'énergie potentielle $U$ :

L'énergie potentielle d'un domaine de volume  $V$  est donnée par la relation (2.21), qui permet de déterminer les quatre termes liés à l'élasticité du matériau, la température, la piézoélectricité et finalement le terme diélectrique :

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon\sigma - DE) dV \quad 2.21$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V ((\varepsilon_x\sigma_x + \gamma_{xz}\tau_{xz}) - D_z E_z) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x\sigma_x + \gamma_{xz}\tau_{xz}) - (\bar{\varepsilon}_{33}E_z + e_{31}\varepsilon_x + \Theta p_3) E_z dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x(\bar{Q}_{11}\varepsilon_x - \tilde{e}_{31}E_z - \tilde{\lambda}_1\Theta) + \gamma_{xz}\bar{Q}_{55}\gamma_{xz}) \\ &\quad - (\bar{\varepsilon}_{33}E_z + e_{31}\varepsilon_x + \Theta p_3) E_z dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \left( \underbrace{\varepsilon_x \bar{Q}_{11} \varepsilon_x + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55} \gamma_{xz}}_{\text{Elastique}} \right) - \left( \underbrace{\varepsilon_x \tilde{\lambda}_1 \Theta + \Theta p_3 E_z}_{\text{Thermique}} \right) - \left( \underbrace{\tilde{e}_{31} \varepsilon_x E_z + \tilde{e}_{31} E_z \varepsilon_x}_{\text{Piézoélectrique}} \right) \\ &\quad - \left( \underbrace{\bar{\varepsilon}_{33} E_z E_z}_{\text{Diélectrique}} \right) dV \quad 2.22 \end{aligned}$$

Prenant le cas du montage en série, vu que la réalisation de ce type de montage est plus pratique que celle du montage en parallèle, l'énergie de déformation dans un matériau piézoélectrique prend la forme:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_V ((\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xz} \tau_{xz}) - D_z E_z) dV \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{-h_{pB}}^0 [(\varepsilon_x (\bar{Q}_{11}^B \varepsilon_x - \tilde{e}_{31}^B E_z - \Theta \tilde{\lambda}_1^B) + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55}^B \gamma_{xz}) \\
&\quad - (\bar{\varepsilon}_{33}^B E_z + \tilde{e}_{31}^B \varepsilon_x + \Theta p_3^B) E_z] dz dy dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_0^{h_{pT}} [(\varepsilon_x (\bar{Q}_{11}^T \varepsilon_x + \tilde{e}_{31}^T E_z - \Theta \tilde{\lambda}_1^T) + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55}^T \gamma_{xz}) \\
&\quad - (\bar{\varepsilon}_{33}^T E_z - \tilde{e}_{31}^T \varepsilon_x - \Theta p_3^T) E_z] dz dy dx
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\text{Avec } E_i^B = \frac{\partial \phi^B}{\partial i} \text{ ou plus généralement } \begin{Bmatrix} E_x^B \\ E_y^B \\ E_z^B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^B}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi^B}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^B}{\partial z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \phi_{,x}^B \\ \phi_{,y}^B \\ \phi_{,z}^B \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} E_x^T \\ E_y^T \\ E_z^T \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \phi_{,x}^T \\ \phi_{,y}^T \\ \phi_{,z}^T \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \iiint_{-h_{pB}}^0 [(\varepsilon_x (\bar{Q}_{11}^B \varepsilon_x + \tilde{e}_{31}^B \phi_{,z}^B - \Theta \tilde{\lambda}_1^B) + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55}^B \gamma_{xz}) + (-\bar{\varepsilon}_{33}^B \phi_{,z}^B + \tilde{e}_{31}^B \varepsilon_x + \Theta p_3^B) \phi_{,z}^B] dz dy dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_0^{h_{pT}} [(\varepsilon_x (\bar{Q}_{11}^T \varepsilon_x - \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T - \Theta \tilde{\lambda}_1^T) + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55}^T \gamma_{xz}) \\
&\quad + (-\bar{\varepsilon}_{33}^T \phi_{,z}^T - \tilde{e}_{31}^T \varepsilon_x - \Theta p_3^T) \phi_{,z}^T] dz dy dx
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{b}{2} \int \left\{ \int_{-h_{Bot}}^0 [(\varepsilon_x \bar{Q}_{11}^B \varepsilon_x + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55}^B \gamma_{xz}) + (\phi_{,z}^B \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^B + \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^B \phi_{,z}^B) - \phi_{,z}^B \bar{\varepsilon}_{33}^B \phi_{,z}^B + (\Theta p_3^B \phi_{,z}^B - \varepsilon_x \Theta \tilde{\lambda}_1^B)] dz \right. \\
&\quad + \int_0^{h_{Top}} [(\varepsilon_x \bar{Q}_{11}^T \varepsilon_x + \gamma_{xz} \bar{Q}_{55}^T \gamma_{xz}) - (\varepsilon_x \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T) - \phi_{,z}^T \bar{\varepsilon}_{33}^T \phi_{,z}^T \\
&\quad \left. - (\Theta p_3^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \Theta \tilde{\lambda}_1^T)] dz \right\} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} b \int (u_{,x} \tilde{N} + \psi_{,x} \tilde{M} + (w_{,x} - \psi) \tilde{T}) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 (\Theta p_3^B \phi_{,z}^B - \varepsilon_x \Theta \tilde{\lambda}_1^B) dz - \int_0^{h_{Top}} (\Theta p_3^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \Theta \tilde{\lambda}_1^T) dz \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 [\phi_{,z}^B \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^B + \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^B \phi_{,z}^B] dz - \int_0^{h_{Top}} [\varepsilon_x \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T] dz \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 \phi_{,z}^B \bar{\varepsilon}_{33}^B \phi_{,z}^B dz + \int_0^{h_{Top}} \phi_{,z}^T \bar{\varepsilon}_{33}^T \phi_{,z}^T dz \right) dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$U = U_{Elas} + U_{Therm} + U_{Piezo} + U_{Diélec} \tag{2.26}$$

- Energie de déformation élastique : " $U_{Elas}$ "

En admettant que  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{M}$  et  $\tilde{T}$  sont respectivement, l'effort normal, l'effort tranchant et le moment :

$$\tilde{N} = \int_A \sigma_{mec} dA ; \tilde{M} = \int_A z \cdot \sigma_{mec} dA \text{ et } \tilde{T} = \int_A \tau dA$$

On pose :  $e = u_{,x} ; \gamma = w_{,x} - \psi$  et  $\chi = \psi_{,x}$

De là :

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int [e \cdot \tilde{N}^B + \chi \cdot \tilde{M}^B + \gamma \cdot \tilde{T}^B] + [e \cdot \tilde{N}^T + \chi \cdot \tilde{M}^T + \gamma \cdot \tilde{T}^T] \quad 2.27$$

$$\begin{cases} u(x, z) = u(x) + z\psi(x) \\ w(x, z) = w(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = e + z\chi \\ \gamma = w_{,x} - \psi \end{cases} \quad 2.28$$

Détaillons l'équation (2.27) en considérant (2.28) :

$$\tilde{N}^B = \int_{A^B} \sigma_{mec} dA = \int_{A^B} \bar{Q}_{11}^B (e + z\chi) dA$$

$$\tilde{M}^B = \int_{A^B} z \sigma_{mec} dA = \int_{A^B} z \bar{Q}_{11}^B (e + z\chi) dA$$

$$\tilde{T}^B = \int_{A^B} \tau dA = \int_{A^B} \bar{Q}_{55}^B (w_{,x} - \psi) dA$$

$$\tilde{N}^T = \int_{A^T} \sigma_{mec} dA = \int_{A^T} \bar{Q}_{11}^T (e + z\chi) dA$$

$$\tilde{M}^T = \int_{A^T} z \sigma_{mec} dA = \int_{A^T} z \bar{Q}_{11}^T (e + z\chi) dA$$

$$\tilde{T}^T = \int_{A^T} \tau dA = \int_{A^T} \bar{Q}_{55}^T (w_{,x} - \psi) dA$$

Posons :

$$H_m^B = \int_{A^B} \bar{Q}_{11}^B dA ; H_{mf}^B = \int_{A^B} z \bar{Q}_{11}^B dA ; H_f^B = \int_{A^B} z^2 \bar{Q}_{11}^B dA$$

$$H_c^B = \hat{K} \bar{H}_c^B ; \bar{H}_c^B = \int_{A^B} \bar{Q}_{55}^B dA$$

$$H_m^T = \int_{A^T} \bar{Q}_{11}^T dA ; H_{mf}^T = \int_{A^T} z \bar{Q}_{11}^T dA ; H_f^T = \int_{A^T} z^2 \bar{Q}_{11}^T dA$$

$$H_c^T = \hat{K} \bar{H}_c^T ; \bar{H}_c^T = \int_{A_{A^T \text{ piezo } 2}} \bar{Q}_{55}^T dA$$

$$\tilde{N}^B = H_m^B e + H_{mf}^B \chi ; \tilde{M}^B = H_{mf}^B e + H_f^B \chi \quad \text{aussi} \quad \tilde{T}^B = H_c^B \gamma$$

$$\tilde{N}^T = H_m^T e + H_{mf}^T \chi ; \tilde{M}^T = H_{mf}^T e + H_f^T \chi \quad \text{aussi} \quad \tilde{T}^T = H_c^T \gamma$$

On injecte ces résultats dans (2.25) puis dans (2.26) :

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int [e \cdot (H_m^B e + H_{mf}^B \chi) + \chi \cdot (H_{mf}^B e + H_f^B \chi) + \gamma (H_c^B \gamma)] \\ + [e \cdot (H_m^T e + H_{mf}^T \chi) + \chi \cdot (H_{mf}^T e + H_f^T \chi) + \gamma (H_c^T \gamma)] dx \quad 2.29$$

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int [e (H_m^B + H_m^T) e + e (H_{mf}^B + H_{mf}^T) \chi + \chi (H_{mf}^B + H_{mf}^T) e + \chi (H_f^B + H_f^T) \chi \\ + \gamma (H_c^B + H_c^T) \gamma] dx \quad 2.30$$

On peut ainsi écrire :  $U_{Elas} = \frac{1}{2} \int_0^L \{e\}^t [H] \{e\} dx$  et  $\{e\}^t = \{u_{,x} \quad \psi_{,x} \quad (w_{,x} - \psi)\}$

L'exposant  $X^t$  indique la transposée de la matrice ou vecteur  $X$ .

$$[H] = \begin{bmatrix} H_m^B + H_m^T & H_{mf}^B + H_{mf}^T & 0 \\ & H_f^B + H_f^T & 0 \\ Sym & & H_c^B + H_c^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ & H_f & 0 \\ Sym & & H_c \end{bmatrix}$$

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int_0^L \{u \quad w \quad \psi\} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial x & -1 \end{bmatrix} [H] \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial x & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} dx \quad 2.31$$

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int \{u\}^t [B]^t [H] [B] \{u\} dx \quad 2.32$$

- Energie de déformation thermique :

$$U_{Therm} = \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 (\Theta p_3^B \phi_{,z}^B - \varepsilon_x \Theta \tilde{\lambda}_1^B) dz - \int_0^{h_{Top}} (\Theta p_3^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \Theta \tilde{\lambda}_1^T) dz \right) dx$$

$$U_{Therm} = \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 (\Theta p_3^B \phi_{,z}^B - \varepsilon_x \bar{Q}_{11}^B \Theta \alpha_1^B) dz - \int_0^{h_{Top}} (\Theta p_3^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \bar{Q}_{11}^T \Theta \alpha_1^T) dz \right) dx$$

$$U_{Therm} = \frac{1}{2} b \int \left[ \int_{-h_{Bot}}^0 [\Theta p_3^B \phi_{,z}^B - (u_{,x} + z \psi_{,x}) \bar{Q}_{11}^B \Theta \alpha_1^B] dz \right. \\ \left. - \int_0^{h_{Top}} [\Theta p_3^T \phi_{,z}^T + (u_{,x} + z \psi_{,x}) \bar{Q}_{11}^T \Theta \alpha_1^T] dz \right] dx \quad 2.33$$

- Energie de déformation piézoélectrique :

$$U_{Piezo} = \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 [\phi_{,z}^B \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^B + \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^B \phi_{,z}^B] dz - \int_0^{h_{Top}} [\varepsilon_x \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T + \varepsilon_x \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T] dz \right) dx$$

$$U_{Piezo} = \frac{1}{2} b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 [\phi_{,z}^B (u_{,x} + z \psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^B + (u_{,x} + z \psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^B \phi_{,z}^B] dz \right. \\ \left. - \int_0^{h_{Top}} [\phi_{,z}^T (u_{,x} + z \psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^T + (u_{,x} + z \psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T] dz \right) dx \quad 2.34$$

- Energie de déformation diélectrique :

$$U_{Diéle} = -\frac{1}{2}b \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 \phi_{,z}^B \bar{\bar{\epsilon}}_{33}^B \phi_{,z}^B dz + \int_0^{h_{Top}} \phi_{,z}^T \bar{\bar{\epsilon}}_{33}^T \phi_{,z}^T dz \right) dx \quad 2.35$$

- Le travail des forces externes:

$$W_{ext} = \int_A \left( \underbrace{\mathcal{F}_z w + \mathcal{M}_y \psi_y}_{\text{mécanique}} + \underbrace{\phi P}_{\text{électrique}} \right) dA = W_{ext}^{mécani} + W_{ext}^{élect} \quad 2.36$$

Où  $\mathcal{F}_z$ ,  $\mathcal{M}_y$  et  $P$  représentent respectivement la force et le moment appliqués sur la poutre et la charge électrique appliquée sur les éléments piézoélectriques.

#### 2.4.2.2. L'énergie cinétique $T$ :

L'énergie cinétique s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx \quad 2.37$$

$$T = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h_{Bot}}^0 \rho^B \{ \dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi} \} [\bar{\bar{T}}] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} dz + \int_0^{h_{Top}} \rho^T \{ \dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi} \} [\bar{\bar{T}}] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} dz dx \quad 2.38$$

$$[\bar{\bar{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ & 1 & 0 \\ Sym & & z^2 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{b}{2} \int_0^L \rho^B \{ \dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi} \} \begin{bmatrix} h_{Bot} & 0 & -h_{Bot}^2/2 \\ & h_{Bot} & 0 \\ Sym & & h_{Bot}^3/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \rho^T \{ \dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi} \} \begin{bmatrix} h_{Top} & 0 & h_{Top}^2/2 \\ & h_{Top} & 0 \\ Sym & & h_{Top}^3/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} dx \quad 2.39$$

$$T = \frac{b}{2} \int_0^L \{\dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}\} [\bar{T}] \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} dx \quad 2.40$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \rho^B h_{Bot} + \rho^T h_{Top} & 0 & \rho^T h_{Top}^2/2 - \rho^B h_{Bot}^2/2 \\ & \rho^B h_{Bot} + \rho^T h_{Top} & 0 \\ Sym & & \rho^B h_{Bot}^3/3 + \rho^T h_{Top}^3/3 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_2 \\ & \bar{T}_1 & 0 \\ Sym & & \bar{T}_3 \end{bmatrix}$$

## 2.5. Théorie des Plaques :

Raymon David Mindlin 1906-1987 l'un des étudiants de Timoshenko [L7] a développé une théorie dite La théorie de Mindlin. Cette dernière, qui est une extension de celle de Kirshhoff-love [L8], prend en considération les effets de cisaillement dans les plaques, cette théorie est appelée aussi la théorie des déformations de cisaillement du premier ordre appliquée aux plaques.

### 2.5.1. Hypothèses relatives aux Plaques :

- Une fibre normale est un ensemble de points constituant un trait normal au plan moyen.
- Le plan moyen, équivalent de la fibre moyenne en théorie des poutres, représente un plan équidistant des deux faces de la plaque.
- La fibre normale est toujours rectiligne mais pas nécessairement perpendiculaire au plan moyen.

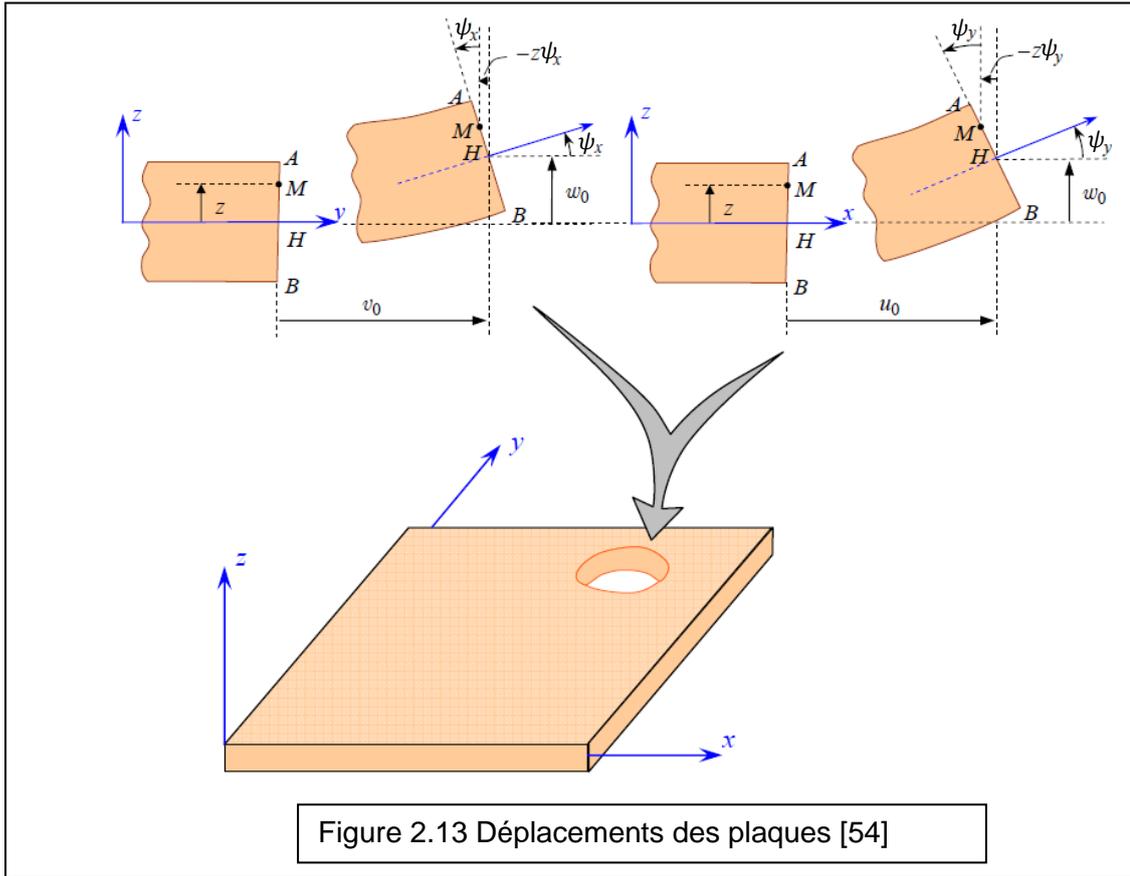


Figure 2.13 Déplacements des plaques [54]

Les déplacements sont donnés par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad 2.41$$

Les déformations ont pour expressions:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial [u(x, y) + z\psi_x(x, y)]}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial [v(x, y) + z\psi_y(x, y)]}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial [u(x, y) + z\psi_x(x, y)]}{\partial y} + \frac{\partial [v(x, y) + z\psi_y(x, y)]}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial [u(x, y) + z\psi_x(x, y)]}{\partial z} + \frac{\partial [w(x, y)]}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial [v(x, y) + z\psi_y(x, y)]}{\partial z} + \frac{\partial [w(x, y)]}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad 2.42$$

Donc sous forme simplifiée [38,54]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} + z\psi_{x,x} \\ \varepsilon_y = v_{,y} + z\psi_{y,y} \\ \gamma_{xy} = (u_{,y} + v_{,x}) + z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ \gamma_{xz} = \psi_x + w_{,x} \\ \gamma_{yz} = \psi_y + w_{,y} \end{cases} \quad 2.43$$

Posons :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\chi\} \quad 2.44$$

$$\text{Avec : } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \psi_x + w_{,x} \\ \psi_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad 2.45$$

$\{\varepsilon\}$  : Déformations linéaires ;

$\{e\}$  : // de membrane ;

$\{\gamma\}$  : // de cisaillement transversal ;

$\{\chi\}$  : Les courbures.

Reportons les relations liées à la loi de Hooke (2.9) et le déplacement diélectrique (2.10) et introduisons les hypothèses liées aux plaques [38]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{26} \\ 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \Theta \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \quad 2.46$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} E_z - \Theta \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\text{En générale, on a : } [H] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} ; [H_\tau] = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix} \text{ Et } \{\hat{e}\} = \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Alors, pour les bimorphes on pose : } [H^{B,T}] = \begin{bmatrix} Q_{11}^{B,T} & Q_{12}^{B,T} & Q_{16}^{B,T} \\ Q_{21}^{B,T} & Q_{22}^{B,T} & Q_{26}^{B,T} \\ Q_{61}^{B,T} & Q_{62}^{B,T} & Q_{66}^{B,T} \end{bmatrix} ; [H_\tau^{B,T}] = \begin{bmatrix} Q_{44}^{B,T} & Q_{45}^{B,T} \\ Q_{54}^{B,T} & Q_{55}^{B,T} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \{\hat{e}^{B,T}\} = \begin{Bmatrix} e_{31}^{B,T} \\ e_{32}^{B,T} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} - \{\hat{e}\}E_z - \Theta\{\lambda\} \\ \{\tau\} = [H_\tau]\{\gamma\} \end{cases} \quad 2.47$$

De même :

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{21} & \bar{\varepsilon}_{22} & \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{31} & \bar{\varepsilon}_{32} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \Theta \quad 2.48$$

$$D_z = e_{31}\varepsilon_x + e_{32}\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_{33}E_z \quad 2.49$$

### 2.5.2. L'énergie potentielle $\hat{U}$ :

L'énergie potentielle d'un domaine de volume  $V$  est donnée par les relations (2.19) qui donnent les quatre termes liés à l'élasticité, la température, la piézoélectricité et le terme diélectrique :

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon\sigma - DE) dV = \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon\}^t \{\sigma\} - \{D\}^t \{E\}) dV \quad 2.50$$

$$\hat{U} = \hat{U}_{Elas} + \hat{U}_{Therm} + \hat{U}_{Piezo} + \hat{U}_{Diélec} \quad 2.51$$

- Energie de déformation élastique : " $\hat{U}_{Elas}$ "

On peut réécrire les relations du système (2.43) sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} \quad 2.52$$

ou sous forme générale :

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [B]\{q\} \quad 2.53$$

Le système (2.53) traduit les déformations  $\{\tilde{\varepsilon}\}$  en fonction des déplacements généralisés  $\{q\}$ .

Maintenant posons :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_0^h \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz ; \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_0^h z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz ; \{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_0^h \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz$$

$\{N\}$  : Efforts résultants de membrane ;

$\{M\}$  : // résultants de flexion ;

$\{T\}$  : // résultants tranchants ;

Et :

$$\{N\} = [H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\}$$

$$\{M\} = [H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\}$$

$$\{T\} = [H_c]\{\gamma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix}$$

Pour les structures bimorphes on écrit :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix}^T = \begin{bmatrix} [H_m^T] & [H_{mf}^T] & [0] \\ [H_{mf}^T] & [H_f^T] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c^T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix}^B = \begin{bmatrix} [H_m^B] & [H_{mf}^B] & [0] \\ [H_{mf}^B] & [H_f^B] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c^B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix}$$

$$[H_m^B] = \int_{-h_{Bot}}^0 [H^B] dz ; [H_{mf}^B] = \int_{-h_{Bot}}^0 [H^B] z \cdot dz ; [H_f^B] = \int_{-h_{Bot}}^0 [H^B] z^2 \cdot dz ;$$

$$[H_c^B] = [k]h[H_\tau^B]$$

$$\text{Et aussi : } [H_m^T] = \int_0^{h_{Top}} [H^T] dz ; [H_{mf}^T] = \int_0^{h_{Top}} [H^T] z \cdot dz ; [H_f^T] = \int_0^{h_{Top}} [H^T] z^2 \cdot dz ;$$

$$[H_c^T] = [k]h[H_\tau^T]$$

$[k]$  est le coefficient de correction de Mindlin :  $[k] = 5/6$

$$\text{Donc : } [H_m^T] = \int_0^{h_{Top}} \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{12}^T & Q_{16}^T \\ Q_{21}^T & Q_{22}^T & Q_{26}^T \\ Q_{61}^T & Q_{62}^T & Q_{66}^T \end{bmatrix} dz = h_{Top} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{12}^T & Q_{16}^T \\ Q_{21}^T & Q_{22}^T & Q_{26}^T \\ Q_{61}^T & Q_{62}^T & Q_{66}^T \end{bmatrix} = h_{Top} \cdot [H^T] \quad 2.54$$

$$[H_{mf}^T] = \int_0^{h_{Top}} [H^T]z. dz = \frac{h_{Top}^2}{2} \cdot [H^T] \quad 2.55$$

$$[H_f^T] = \int_0^{h_{Top}} [H^T]z^2. dz = \frac{h_{Top}^3}{3} \cdot [H^T] \quad 2.56$$

$$[H_c^T] = [k]h_{Top} [H_\tau^T] = [k]h_{Top} \begin{bmatrix} Q_{44}^T & Q_{45}^T \\ Q_{54}^T & Q_{55}^T \end{bmatrix} \quad 2.57$$

Par analogie on trouve :

$$[H_m^B] = \int_{-h_{Bot}}^0 \begin{bmatrix} Q_{11}^B & Q_{12}^B & Q_{16}^B \\ Q_{21}^B & Q_{22}^B & Q_{26}^B \\ Q_{61}^B & Q_{62}^B & Q_{66}^B \end{bmatrix} dz = h_{Bot} \cdot [H^B] \quad 2.58$$

$$[H_{mf}^B] = \int_{-h_{Bot}}^0 [H^B]z. dz = -\frac{h_{Bot}^2}{2} \cdot [H^B] \quad 2.59$$

$$[H_f^B] = \int_{-h_{Bot}}^0 [H^B]z^2. dz = \frac{h_{Bot}^3}{3} \cdot [H^B] \quad 2.60$$

$$[H_c^B] = [k]h_{Bot} [H_\tau^B] = [k]h_{Bot} \begin{bmatrix} Q_{44}^B & Q_{45}^B \\ Q_{54}^B & Q_{55}^B \end{bmatrix} \quad 2.61$$

$$\{N\} = [H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\} = ([H_m^B] + [H_m^T])\{e\} + ([H_{mf}^B] + [H_{mf}^T])\{\chi\}$$

$$\{N\} = (h_{Top} \cdot [H^T] + h_{Bot} \cdot [H^B])\{e\} + \left( \frac{h_{Top}^2}{2} \cdot [H^T] - \frac{h_{Bot}^2}{2} \cdot [H^B] \right) \{\chi\} \quad 2.62$$

$$\{M\} = [H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\} = ([H_{mf}^B] + [H_{mf}^T])\{e\} + ([H_f^B] + [H_f^T])\{\chi\}$$

$$\{M\} = \left( \frac{h_{Top}^2}{2} \cdot [H^T] - \frac{h_{Bot}^2}{2} \cdot [H^B] \right) \{e\} + \left( \frac{h_{Top}^3}{3} \cdot [H^T] + \frac{h_{Bot}^3}{3} \cdot [H^B] \right) \{\chi\} \quad 2.63$$

$$\{T\} = [H_c]\{\gamma\} = ([H_c^B] + [H_c^T])\{\gamma\} = [k](h_{Bot} [H_\tau^B] + h_{Top} [H_\tau^T])\{\gamma\} \quad 2.64$$

Ces dernières relations peuvent être résumées de la manière suivante :

$$[H_m] = (h_{Top} \cdot [H^T] + h_{Bot} \cdot [H^B])$$

$$[H_{mf}] = \left( \frac{h_{Top}^2}{2} \cdot [H^T] - \frac{h_{Bot}^2}{2} \cdot [H^B] \right)$$

$$[H_f] = \left( \frac{h_{Top}^3}{3} \cdot [H^T] + \frac{h_{Bot}^3}{3} \cdot [H^B] \right)$$

$$[H_c] = \overline{k} (h_{Bot} [H_t^B] + h_{Top} [H_t^T])$$

L'énergie élastique est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{Elas} &= \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \\ \hat{U}_{Elas} &= \frac{1}{2} \int_A [\langle e \rangle \{N\} + \langle \chi \rangle \{M\} + \langle \gamma \rangle \{T\}] dA \end{aligned} \quad 2.65$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{Elas} &= \frac{1}{2} \int_A \langle \langle e \rangle \langle \chi \rangle \langle \gamma \rangle \rangle \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} dA \\ \hat{U}_{Elas} &= \frac{1}{2} \int_A \langle \langle e \rangle \langle \chi \rangle \langle \gamma \rangle \rangle [\bar{H}] \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} dA = \frac{1}{2} \int_A \langle \bar{\varepsilon} \rangle [\bar{H}] \langle \bar{\varepsilon} \rangle dA \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.52), on obtient la forme finale suivante :

$$\hat{U}_{Elas} = \frac{1}{2} \int_A \langle q \rangle [B]^t [\bar{H}] [B] \langle q \rangle dA \quad 2.66$$

- Energie piézoélectrique : " $\hat{U}_{Piezo}$ "

$$\hat{U}_{Piezo} = -\frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x e_{31} E_z) + (\varepsilon_y e_{32} E_z) + (e_{31} \varepsilon_x + e_{32} \varepsilon_y) E_z dV \quad 2.67$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{Piezo} &= -\frac{1}{2} \int_V ((u_{,x} + z\psi_{x,x}) e_{31} E_z) + ((v_{,y} + z\psi_{y,y}) e_{32} E_z) \\ &\quad + (e_{31} (u_{,x} + z\psi_{x,x}) + e_{32} (v_{,y} + z\psi_{y,y})) E_z dV \end{aligned} \quad 2.68$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{Piezo} &= \frac{1}{2} \int \int \left[ \int_{-h_{Bot}}^0 (e_{31}^B \phi_{,z}^B (u_{,x} + z\psi_{x,x}) + e_{32}^B \phi_{,z}^B (v_{,y} + z\psi_{y,y})) \right. \\ &\quad \left. + (e_{31}^B (u_{,x} + z\psi_{x,x}) \phi_{,z}^B + e_{32}^B (v_{,y} + z\psi_{y,y}) \phi_{,z}^B) dz \right] \\ &\quad + \int_0^{-h_{Top}} [(e_{31}^T \phi_{,z}^T (u_{,x} + z\psi_{x,x}) + e_{32}^T \phi_{,z}^T (v_{,y} + z\psi_{y,y})) \\ &\quad \left. + (e_{31}^T (u_{,x} + z\psi_{x,x}) \phi_{,z}^T + e_{32}^T (v_{,y} + z\psi_{y,y}) \phi_{,z}^T)] dx dy \end{aligned} \quad 2.69$$

- Energie thermique : " $\hat{U}_{Therm}$ "

$$\hat{U}_{Therm} = -\frac{1}{2} \int_V [\lambda_1 \varepsilon_x + \lambda_2 \varepsilon_y] \Theta dV \quad 2.70$$

$$\hat{U}_{Therm} = -\frac{1}{2} \int \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 [(u_{,x} + z\psi_{x,x})\lambda_1^B + (v_{,y} + z\psi_{y,y})\lambda_2^B] \right. \\ \left. + \left( \int_0^{h_{Top}} [(u_{,x} + z\psi_{x,x})\lambda_1^T + (v_{,y} + z\psi_{y,y})\lambda_2^T] \right) \Theta dx dy \right)$$

$$\hat{U}_{Therm} = -\frac{1}{2} \int \int \left[ \left( h_{Bot} u_{,x} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \psi_{x,x} \right) \lambda_1^B + \left( h_{Bot} v_{,y} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \psi_{y,y} \right) \lambda_2^B \right] \\ + \left[ \left( h_{Top} u_{,x} + \frac{h_{Top}^2}{2} \psi_{x,x} \right) \lambda_1^T + \left( h_{Top} v_{,y} + \frac{h_{Top}^2}{2} \psi_{y,y} \right) \lambda_2^T \right] \Theta dx dy \quad 2.71$$

- Energie Diélectrique : " $\hat{U}_{Dielec}$ "

$$\hat{U}_{Dielec} = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon}_{33} E_z E_z dV \quad 2.72$$

$$\hat{U}_{Dielec} = \frac{1}{2} \int \int \left( \int_{-h_{Bot}}^0 (\bar{\varepsilon}_{33}^B \phi_{,z}^B) \phi_{,z}^B dz \right) + \left( \int_0^{h_{Top}} (\bar{\varepsilon}_{33}^T \phi_{,z}^T) \phi_{,z}^T dz \right) dx dy \quad 2.73$$

### 2.5.3. L'énergie cinétique $\hat{T}$ :

L'énergie cinétique  $\hat{T}$  est donnée par la relation :

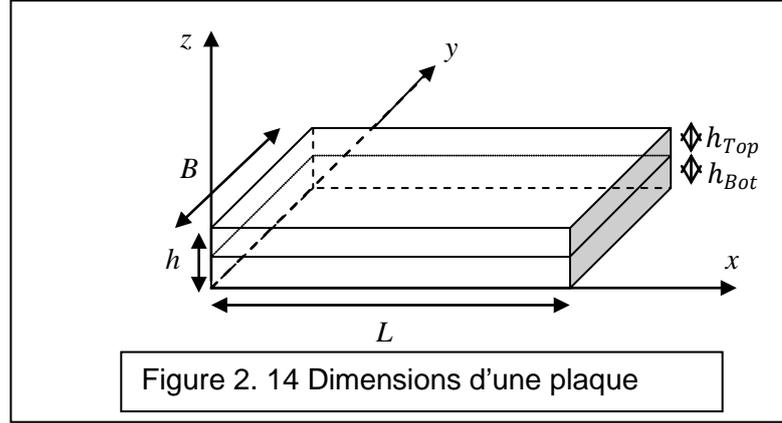
$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad 2.74$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int \rho \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dV$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int \rho \left( \dot{u}^2 + (z\dot{\psi}_x)^2 + 2z(\dot{u}\dot{\psi}_x) + \dot{v}^2 + (z\dot{\psi}_y)^2 + 2z(\dot{v}\dot{\psi}_y) + \dot{w}^2 \right) dV \quad 2.75$$

Sous forme matricielle :

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int \rho \{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}_x \quad \dot{\psi}_y \} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & z \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & z^2 & 0 \\ & & & & z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} dV$$



$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^B \int_{-h_{Bot}}^0 \rho^B \{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}_x \quad \dot{\psi}_y \} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & z \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & Sym & z^2 \\ & & & & z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} dz$$

$$+ \int_0^{h_{Top}} \rho^T \{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}_x \quad \dot{\psi}_y \} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & z \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & Sym & z^2 \\ & & & & z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} dz dy dx$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^B \rho \{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}_x \quad \dot{\psi}_y \} [\bar{T}] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} dy dx \quad 2.76$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \rho^B h_{Bot} + \rho^T h_{Top} & 0 & 0 & \rho^T \frac{h_{Top}^2}{2} - \rho^B \frac{h_{Bot}^2}{2} & 0 \\ & \rho^B h_{Bot} + \rho^T h_{Top} & 0 & 0 & \rho^T \frac{h_{Top}^2}{2} - \rho^B \frac{h_{Bot}^2}{2} \\ & & \rho^B h_{Bot} + \rho^T h_{Top} & 0 & 0 \\ & & & Sym & \rho^B \frac{h_{Bot}^3}{3} + \rho^T \frac{h_{Top}^3}{3} \\ & & & & \rho^B \frac{h_{Bot}^3}{3} + \rho^T \frac{h_{Top}^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & 0 & 0 & \bar{T}_2 & 0 \\ & \bar{T}_1 & 0 & 0 & \bar{T}_2 \\ & & \bar{T}_1 & 0 & 0 \\ & & & Sym & \bar{T}_3 \\ & & & & \bar{T}_3 \end{bmatrix} \quad 2.77$$

## 2.6.     Conclusion :

Dans ce deuxième chapitre, on a élaboré les modèles mathématiques des poutres et des plaques. On a tenu compte de quelques hypothèses simplificatrices. Ceci nous permet d'obtenir les différentes matrices (inerties, rigidité, piézoélectriques, diélectriques et thermiques) relatives aux poutres et aux plaques. Ces matrices feront l'objet (au troisième chapitre) d'une discrétisation en éléments finis afin d'être utilisées dans la suite du travail.

## ETUDE NUMERIQUE, APPLICATION ET SIMULATION

### 3 1. Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à la discrétisation par éléments finis des différentes structures considérées (poutres et plaques), l'élaboration des différentes matrices élémentaires, obtention des matrices globales par assemblage de ces dernières, et aussi à la formulation des équations régissant les mouvements. En dernier, la résolution numérique des équations de mouvement sera détaillée.

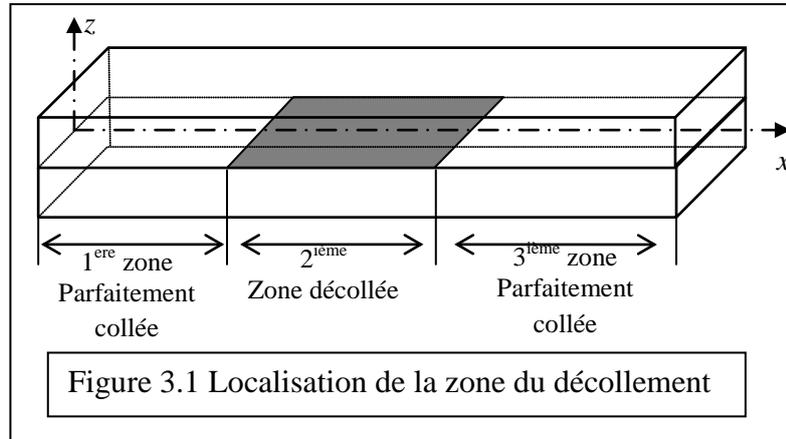
### 3 2. Discrétisation par éléments finis :

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus utilisées en ingénierie pour discrétiser des domaines d'études : transfert de chaleur, mécanique des fluides, électromagnétisme, acoustique ou mécanique de la rupture [41]. Fondamentalement, la méthode des éléments finis (notée par MEF) consiste en l'application, sur des sous-domaines appelés *éléments finis*, de la méthode variationnelle classique. Ces *éléments* sont interconnectés par des points appelés *nœuds*. C'est une technique d'approximation des fonctions solutions par ces éléments [55], les inconnus seront des valeurs de ces fonctions en certains nœuds.

#### 3.2.1. Application aux poutres :

Considérons une poutre bimorphe constituée d'un empilement de deux couches piézoélectriques. Elle est divisée en trois zones, deux zones où les deux

couches sont parfaitement collées, la troisième (entre les deux zones) où les deux couches sont décollées, (Figure 3.1 [56]).



Dans la 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> zone « sans décollement » :

On définit les différents vecteurs de déplacements ainsi que les fonctions de forme suivantes :

$$\{u \quad w \quad \psi\}^t = [N_{sd}]\{q\} \quad 3.1$$

$$\{u_i \quad u_j\}^t = [N_{u_{sd}}]\{q\} \quad 3.2$$

$$\{w_i \quad w_j\}^t = [N_{w_{sd}}]\{q\} \quad 3.3$$

$$\{\psi_i \quad \psi_j\}^t = [N_{\psi_{sd}}]\{q\} \quad 3.4$$

Les différentes matrices sont définies par :

$$N_{u_{sd}} = \left[ \frac{1}{2}N_1 \quad \frac{1}{2}N_1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}N_2 \quad \frac{1}{2}N_2 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$N_{w_{sd}} = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0]$$

$$N_{\psi_{sd}} = [0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2]$$

$$N_{sd} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N_1 & \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}N_2 & \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad 3.5$$

2<sup>er</sup> zone avec décollement : [57,58]

$$\{u^T \quad u^B \quad w \quad \psi\}^t = [N_d]\{q\} \quad 3.6$$

$$\{u_i^T \quad u_j^T\}^t = [N_{u\_d}^T]\{q\} \quad 3.7$$

$$\{u_i^B \quad u_j^B\}^t = [N_{u\_d}^B]\{q\} \quad 3.8$$

$$\{w_i \quad w_j\}^t = [N_{w\_d}]\{q\} \quad 3.9$$

$$\{\psi_i \quad \psi_j\}^t = [N_{\psi\_d}]\{q\} \quad 3.10$$

Avec :

$$N_{u\_d}^T = [N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$N_{u\_d}^B = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0]$$

$$N_{w\_d} = [0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0]$$

$$N_{\psi\_d} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2]$$

$$N_{\phi}^T = \left[ 1 - \frac{z}{h_{Top}} \quad \frac{z}{h_{Top}} \quad 0 \right] \quad 3.11$$

$$N_{\phi}^B = \left[ 0 \quad 1 - \frac{z}{h_{Bot}} \quad \frac{z}{h_{Bot}} \right] \quad 3.12$$

$$\phi^B = [N_{\phi}^B]\{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^t \quad 3.13$$

$$\phi^T = [N_{\phi}^T]\{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^t \quad 3.14$$

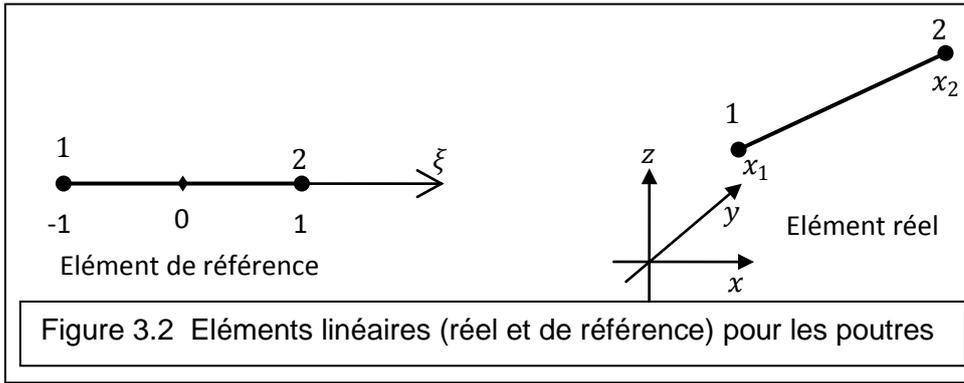


Figure 3.2 Eléments linéaires (réel et de référence) pour les poutres

Les fonctions de forme sont :  $N_1 = \frac{1-\xi}{2}$  et  $N_2 = \frac{1+\xi}{2}$

Notons par  $X_{sd}$  et  $X_d$  les matrices  $X$  concernant respectivement, à la zone sans décollement et à la zone de décollement. On définit les différents champs de déplacements en fonction des fonctions de forme par :

$$u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{x_n\} \tag{3.15}$$

La dérivée peut être calculée de la façon :

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \left\langle \frac{\partial N(\xi)}{\partial \xi} \right\rangle \{x_n\} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d\xi}{dx} \left\langle \frac{\partial N(\xi)}{\partial \xi} \right\rangle \{x_n\} = \frac{d\xi}{dx} \frac{\partial}{\partial \xi} \langle N(\xi)_1 \quad N(\xi)_2 \rangle \{u_n\} = \frac{2}{l^e} \frac{\partial}{\partial \xi} \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \{u_n\} \\ &= \frac{2}{l^e} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right\rangle \{u_n\} = \frac{2}{l^e} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{l^e} \langle -1 \quad 1 \rangle \end{aligned}$$

3.2.1.1. L'énergie cinétique :

3.2.1.1.1. La zone SD « sans décollement » :

T

$$= \frac{bl^e}{4} \int_{-1}^1 \{\dot{q}\}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 \\ \bar{T}_1 & 0 & 0 \\ Sym & \bar{T}_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N_1 & \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}N_2 & \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \{\dot{q}\} d\xi$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^t [M_{sd}] \{\dot{q}\} \tag{3.17}$$

$$[M_{sd}] = \frac{bl^e}{6} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 \\ \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 \\ \bar{T}_3 & \bar{T}_3 & 0 & 2\bar{T}_2 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & 0 & \bar{T}_2 \\ \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 \\ \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 \\ 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & 0 & \bar{T}_2 & \bar{T}_3 & \bar{T}_3 & 0 & 2\bar{T}_2 \end{bmatrix}$$

3.2.1.1.2. La zone D « décollée » :

$$T = \frac{bl^e}{4} \int_{-1}^1 \{\dot{q}\}^t \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1^B & 0 & 0 & \bar{T}_3^B \\ 0 & \bar{T}_1^T & 0 & \bar{T}_3^T \\ 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 \\ \bar{T}_3^B & \bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \{\dot{q}\} d\xi$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^t [M_d] \{\dot{q}\} \tag{3.18}$$

$$[M_d] = \frac{bl^e}{6} \begin{bmatrix} 2\bar{T}_1^B & 0 & 0 & 2\bar{T}_3^B & \bar{T}_1^B & 0 & 0 & \bar{T}_3^B \\ 0 & 2\bar{T}_1^T & 0 & 2\bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_1^T & 0 & \bar{T}_3^T \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 \\ 2\bar{T}_3^B & 2\bar{T}_3^T & 0 & 2\bar{T}_2 & \bar{T}_3^B & \bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_2 \\ \bar{T}_1^B & 0 & 0 & \bar{T}_3^B & 2\bar{T}_1^B & 0 & 0 & 2\bar{T}_3^B \\ 0 & \bar{T}_1^T & 0 & \bar{T}_3^T & 0 & 2\bar{T}_1^T & 0 & 2\bar{T}_3^T \\ 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 \\ \bar{T}_3^B & \bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_2 & 2\bar{T}_3^B & 2\bar{T}_3^T & 0 & 2\bar{T}_2 \end{bmatrix}$$

3.2.1.2. L'énergie de déformation :

3.2.1.2.1. La zone SD « sans décollement » :

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{l^e}{2} \{q\}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_m & H_f & 0 \\ \text{Sym} & H_c & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N_1 & \frac{1}{2}N_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}N_2 & \frac{1}{2}N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \{q\} d\xi$$

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \{q\}^t [K_{uu-sd}]^e \{q\} \quad 3.19$$

$$[K_{uu-sd}]^e = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}H_m & \frac{1}{4}H_m & 0 & \frac{1}{2}H_{mf} & -\frac{1}{4}H_m & -\frac{1}{4}H_m & 0 & -\frac{1}{2}H_{mf} \\ & \frac{1}{4}H_m & 0 & \frac{1}{2}H_{mf} & -\frac{1}{4}H_m & -\frac{1}{4}H_m & 0 & -\frac{1}{2}H_{mf} \\ & & \frac{12H_f}{\varphi l^{e2}} & \frac{6H_f}{\varphi l^e} & 0 & 0 & -\frac{12H_f}{\varphi l^{e2}} & \frac{6H_f}{\varphi l^e} \\ & & & H_f \frac{(\varphi + 4)}{\varphi} & -\frac{1}{2}H_{mf} & -\frac{1}{2}H_{mf} & -\frac{6H_f}{\varphi l^e} & H_f \frac{(2 - \varphi)}{\varphi} \\ & & & & \frac{1}{4}H_m & \frac{1}{4}H_m & 0 & \frac{1}{2}H_{mf} \\ & & & & & \frac{1}{4}H_m & 0 & \frac{1}{2}H_{mf} \\ & & \text{Sym} & & & & \frac{12H_f}{\varphi l^{e2}} & -\frac{6H_f}{\varphi l^e} \\ & & & & & & & H_f \frac{(\varphi + 4)}{\varphi} \end{bmatrix} \quad 3.20$$

3.2.1.2.2. La zone D « décollée » :

$$U_{Elas} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{l^e}{2} \{q\}^t \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_m & 0 & H_{mf} & 0 \\ & H_m & H_{mf} & 0 \\ \text{Sym} & & H_f & 0 \\ & & & H_c \end{bmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{bmatrix} \frac{\partial}{l^e \partial} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{\partial}{l^e \partial \xi} & 0 & 0 \\ & & 0 & \frac{\partial}{l^e \partial \xi} \\ \text{Sym} & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \{q\} d\xi \quad 3.21$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{l^e}{2} \{q\}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & -\frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} \\ 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l^e} H_c & \frac{1}{l^e} N_1 H_c & 0 & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_c & \frac{1}{l^e} N_2 H_c \\ \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & \frac{1}{l^e} N_1 H_c & \frac{1}{l^{e2}} H_f + N_1 H_c N_1 & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & -\frac{1}{l^e} H_c N_1 & -\frac{1}{l^{e2}} H_f + N_2 H_c N_1 \\ -\frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & \frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} \\ 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_m & 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l^{e2}} H_c & -\frac{1}{l^e} H_c N_1 & 0 & 0 & \frac{1}{l^{e2}} H_c & -\frac{1}{l^e} H_c N_2 \\ -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & -\frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & \frac{1}{l^e} H_c N_2 & -\frac{1}{l^{e2}} H_f + N_1 H_c N_2 & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & \frac{1}{l^{e2}} H_{mf} & -\frac{1}{l^e} H_c N_2 & \frac{1}{l^{e2}} H_f + N_2 H_c N_2 \end{bmatrix} \{q\} d\xi$$

$$[K_{uu-d}]^e = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} H_m & 0 & 0 & H_{mf} & -H_m & 0 & 0 & -H_{mf} \\ & H_m & 0 & H_{mf} & 0 & -H_m & 0 & -H_{mf} \\ & & \frac{12H_f}{\varphi l^{e2}} & \frac{6H_f}{\varphi l^e} & 0 & 0 & -\frac{12H_f}{\varphi l^{e2}} & \frac{6H_f}{\varphi l^e} \\ & & & H_f \frac{(\varphi + 4)}{\varphi} & -H_{mf} & -H_{mf} & -\frac{6H_f}{\varphi l^e} & H_f \frac{(2 - \varphi)}{\varphi} \\ & & & & H_m & 0 & 0 & H_{mf} \\ & & & & & H_m & 0 & H_{mf} \\ \text{Sym} & & & & & & \frac{12H_f}{\varphi l^{e2}} & -\frac{6H_f}{\varphi l^e} \\ & & & & & & & H_f \frac{(\varphi + 4)}{\varphi} \end{bmatrix} \quad 3.22$$

Etant donné que la structure est formée par un empilement de deux couches donc [57,58]:

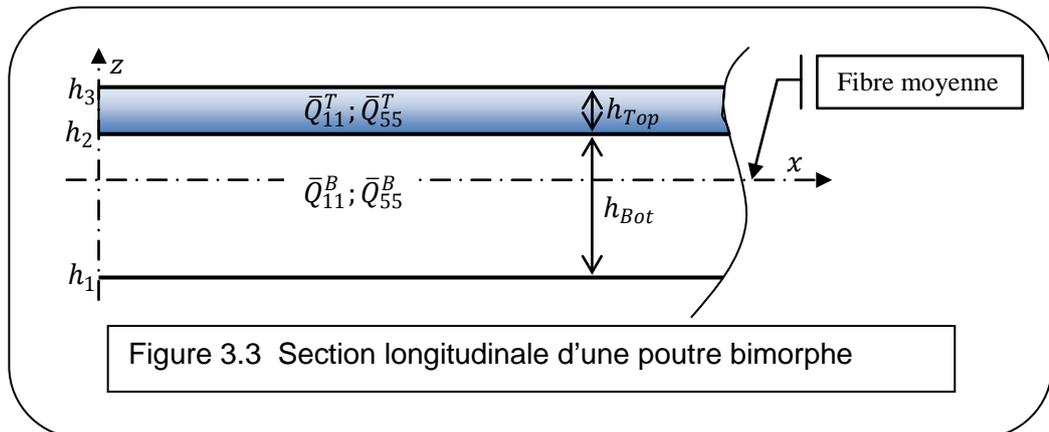
$$\begin{aligned}
 & [K_{uu-d}]^T \\
 & = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & H_m^T & 0 & H_{mf}^T & 0 & -H_m^T & 0 & -H_{mf}^T \\ & & \frac{12H_f^T}{\varphi^T l^{e2}} & \frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} & 0 & 0 & -\frac{12H_f^T}{\varphi^T l^{e2}} & \frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} \\ & & & H_f^T \frac{(\varphi^T + 4)}{\varphi^T} & 0 & -H_{mf}^T & -\frac{6H_f}{\varphi^T l^e} & H_f^T \frac{(2 - \varphi^T)}{\varphi^T} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & H_m^T & 0 & H_{mf}^T \\ & & \text{Sym} & & & & \frac{12H_f^T}{\varphi^T l^{e2}} & -\frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} \\ & & & & & & & H_f^T \frac{(\varphi^T + 4)}{\varphi^T} \end{bmatrix} \quad 3.23
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [K_{uu-d}]^{eB} \\
 & = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} H_m^B & 0 & 0 & H_{mf}^B & -H_m^B & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{mf}^B \\ & & \frac{12H_f^B}{\varphi^B l^{e2}} & \frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e} & 0 & 0 & -\frac{12H_f^B}{\varphi^B l^{e2}} & \frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e} \\ & & & H_f^B \frac{(\varphi^B + 4)}{\varphi^B} & -H_{mf}^B & 0 & -\frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e} & H_f^B \frac{(2 - \varphi^B)}{\varphi^B} \\ & & & & H_m^B & 0 & 0 & H_{mf}^B \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym} & & & & \frac{12H_f^B}{\varphi^B l^{e2}} & -\frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e} \\ & & & & & & & H_f^B \frac{(\varphi^B + 4)}{\varphi^B} \end{bmatrix} \quad 3.24
 \end{aligned}$$

$$[K_{uu-d}]^{e \text{ finale}} = [K_{uu-d}]^{eB} + [K_{uu-d}]^{eT} \quad 3.25$$

$$\begin{aligned}
 & [K_{uu-d}]^{finale} \\
 & = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} H_m^B & 0 & 0 & H_{mf}^B & -H_m^B & 0 & \dots \\ & H_m^T & 0 & H_{mf}^T & 0 & -H_m^T & \dots \\ & & \left(\frac{12H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{12H_f^B}{\varphi^B l^e}\right) & \left(\frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e}\right) & 0 & 0 & \dots \\ & & & \left(H_f^B \frac{(\varphi^B + 4)}{\varphi^B} + H_f^T \frac{(\varphi^T + 4)}{\varphi^T}\right) & -H_{mf}^B & -H_{mf}^T & \dots \\ & & & & H_m^B & 0 & \dots \\ & & & & & H_m^T & \dots \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \\ & \dots & 0 & -H_{mf}^B & & & \\ & \dots & 0 & -H_{mf}^T & & & \\ & \dots & -\left(\frac{12H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{12H_f^B}{\varphi^B l^e}\right) & \frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e} & & & \\ & \dots & -\left(\frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e}\right) & \left(H_f^T \frac{(2 - \varphi^T)}{\varphi^T} + H_f^B \frac{(2 - \varphi^B)}{\varphi^B}\right) & & & \\ & \dots & 0 & H_{mf}^B & & & \\ & \dots & 0 & H_{mf}^T & & & \\ & \dots & \frac{12H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{12H_f^B}{\varphi^B l^e} & -\left(\frac{6H_f^T}{\varphi^T l^e} + \frac{6H_f^B}{\varphi^B l^e}\right) & & & \\ & \dots & & H_f^B \frac{(\varphi^B + 4)}{\varphi^B} + H_f^T \frac{(\varphi^T + 4)}{\varphi^T} & & & \end{bmatrix} \quad 3.26 \\
 & \frac{H_c l^e}{H_f} = \frac{12}{\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{12H_f}{H_c l^e} \Rightarrow \begin{cases} \varphi^T = \frac{12H_f^T}{H_c^T l^e} \\ \varphi^B = \frac{12H_f^B}{H_c^B l^e} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour garder la fibre moyenne toujours située au milieu de la poutre, on admet le schéma suivant :



$$h_1 = -\left(\frac{h_{ot} + h_{Top}}{2}\right) \quad ; \quad h_2 = \left(\frac{h_{Bot} - h_{Top}}{2}\right) \quad ; \quad h_3 = \left(\frac{h_{Bot} + h_{Top}}{2}\right)$$

$$H_m = \int_{A_B} \bar{Q}_{11}^B dA + \int_{A_T} \bar{Q}_{11}^T dA = H_m^T + H_m^B = b(\bar{Q}_{11}^B h_{pB} + \bar{Q}_{11}^T h_{pT})$$

$$H_{mf} = \int_{A_B} z \bar{Q}_{11}^B dA + \int_{A_T} z \bar{Q}_{11}^T dA = H_{mf}^T + H_{mf}^B = b\left(-\bar{Q}_{11}^B \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} + \bar{Q}_{11}^T \frac{h_{pB} h_{pT}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} H_f &= \int_{A_B} z^2 \bar{Q}_{11}^B dA + \int_{A_T} z^2 \bar{Q}_{11}^T dA = H_f^T + H_f^B \\ &= b\left(\frac{\bar{Q}_{11}^B}{12} [h_{pB} (3h_{pT}^2 + h_{pB}^2)] + \frac{\bar{Q}_{11}^T}{12} [h_{pT} (3h_{pB}^2 + h_{pT}^2)]\right) \end{aligned}$$

$$H_c = \hat{K}(\bar{H}_c^B + \bar{H}_c^T) = \hat{K}b\left(\bar{Q}_{55}^B \int_{h_1}^{h_2} dz + \bar{Q}_{55}^T \int_{h_2}^{h_3} dz\right) = \hat{K}b(\bar{Q}_{55}^B h_{pB} + \bar{Q}_{55}^T h_{pT})$$

Ce qui implique [57,58] :

$$[M_{sd}] = \frac{bl^e}{6} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 \\ \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 \\ \bar{T}_3 & \bar{T}_3 & 0 & 2\bar{T}_2 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & 0 & \bar{T}_2 \\ \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{4}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 \\ \frac{1}{4}\bar{T}_1 & \frac{1}{4}\bar{T}_1 & 0 & \frac{1}{4}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & \frac{1}{2}\bar{T}_1 & 0 & \bar{T}_3 \\ 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{T}_3 & \frac{1}{2}\bar{T}_3 & 0 & \bar{T}_2 & \bar{T}_3 & \bar{T}_3 & 0 & 2\bar{T}_2 \end{bmatrix} \quad 3.27$$

$$[M_d] = \frac{bl^e}{6} \begin{bmatrix} 2\bar{T}_1^B & 0 & 0 & 2\bar{T}_3^B & \bar{T}_1^B & 0 & 0 & \bar{T}_3^B \\ 0 & 2\bar{T}_1^T & 0 & 2\bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_1^T & 0 & \bar{T}_3^T \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 \\ 2\bar{T}_3^B & 2\bar{T}_3^T & 0 & 2\bar{T}_2 & \bar{T}_3^B & \bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_2 \\ \bar{T}_1^B & 0 & 0 & \bar{T}_3^B & 2\bar{T}_1^B & 0 & 0 & 2\bar{T}_3^B \\ 0 & \bar{T}_1^T & 0 & \bar{T}_3^T & 0 & 2\bar{T}_1^T & 0 & 2\bar{T}_3^T \\ 0 & 0 & \bar{T}_1 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{T}_1 & 0 \\ \bar{T}_3^B & \bar{T}_3^T & 0 & \bar{T}_2 & 2\bar{T}_3^B & 2\bar{T}_3^T & 0 & 2\bar{T}_2 \end{bmatrix} \quad 3.28$$

$$\bar{T}_1 = \int_{h_1}^{h_2} \rho^B dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho^T dz = \rho^B h^B + \rho^T h^T$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_2 &= \int_{h_1}^{h_2} \rho^B z^2 dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho^T z^2 dz = \frac{\rho^B}{12} (h^B)(3h^{T2} + h^{B2}) + \frac{\rho^T}{12} (h^B)(3h^{T2} + h^{B2}) \\ \bar{T}_3 &= \int_{h_1}^{h_2} \rho^B z dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho^T z dz = -\frac{\rho^B}{2} h^B h^T + \frac{\rho^T}{2} h^T h^B \\ \bar{T}_1^B &= \int_{h_1}^{h_2} \rho^B dz = \rho^B h^B; & \bar{T}_1^T &= \int_{h_2}^{h_3} \rho^T dz = \rho^T h^T \\ \bar{T}_3^B &= \int_{h_1}^{h_2} \rho^B z dz = -\frac{\rho^B}{2} h^B h^T; & \bar{T}_3^T &= \int_{h_2}^{h_3} \rho^T z dz = -\frac{\rho^T}{2} h^B h^T\end{aligned}$$

### 3.2.1.3. Energie de déformation piézoélectrique :

$$\begin{aligned}U_{Piezo} &= \frac{1}{2} b \int \left( \int_{h_1}^{h_2} [\phi_{,z}^B (u_{,x} + z\psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^B + (u_{,x} + z\psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^B \phi_{,z}^B ] dz \right. \\ &\quad \left. - \int_{h_2}^{h_3} [\phi_{,z}^T (u_{,x} + z\psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^T + (u_{,x} + z\psi_{,x}) \tilde{e}_{31}^T \phi_{,z}^T ] dz \right) dx \quad 3.29\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_{Piezo} &= \frac{1}{2} b \int \left[ \left( \tilde{e}_{31}^B \{\phi\}^t \left[ h_{pB} [\tilde{N}_\phi^B]^t \frac{\partial [N_u^B]}{\partial x} - [\tilde{N}_\phi^B]^t \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \frac{\partial [N_\psi^B]}{\partial x} \right] \{q\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{e}_{31}^B \{q\}^t \left[ h_{pB} \left( \frac{\partial [N_u^B]}{\partial x} \right)^t [\tilde{N}_\phi^B] - \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \left( \frac{\partial [N_\psi^B]}{\partial x} \right)^t [\tilde{N}_\phi^B] \right] \{\phi\} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \tilde{e}_{31}^T \{\phi\}^t \left[ h_{pT} [\tilde{N}_\phi^T]^t \frac{\partial [N_u^T]}{\partial x} + [\tilde{N}_\phi^T]^t \frac{h_{pT} h_{pB}}{2} \frac{\partial [N_\psi^T]}{\partial x} \right] \{q\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{e}_{31}^T \{q\}^t \left[ h_{pT} \left( \frac{\partial [N_u^T]}{\partial x} \right)^t [\tilde{N}_\phi^T] + \frac{h_{pT} h_{pB}}{2} \left( \frac{\partial [N_\psi^T]}{\partial x} \right)^t [\tilde{N}_\phi^T] \right] \{\phi\} \right) \right] dx\end{aligned}$$

$U_{Piezo}$

$$= \frac{b}{2} \int \{\phi\}^t \begin{bmatrix} 0 & \tilde{e}_{31}^T & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & 0 & -\tilde{e}_{31}^T & 0 & -\frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} \\ -\tilde{e}_{31}^B & -\tilde{e}_{31}^T & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & \tilde{e}_{31}^B & \tilde{e}_{31}^T & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \\ \tilde{e}_{31}^B & 0 & 0 & -\frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} & -\tilde{e}_{31}^B & 0 & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \end{bmatrix} \{q\}$$

$$+ \{q\}^t \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{e}_{31}^B & \tilde{e}_{31}^B \\ \tilde{e}_{31}^T & -\tilde{e}_{31}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & -\frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \\ 0 & \tilde{e}_{31}^B & -\tilde{e}_{31}^B \\ -\tilde{e}_{31}^T & \tilde{e}_{31}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \end{bmatrix} \{\phi\} d\xi \quad 3.30$$

D'où : [57,58]

$$U_{Piezo} = \frac{1}{2} \{q\}^t [K_{u\phi}] \{\phi\} + \frac{1}{2} \{\phi\}^t [K_{\phi u}] \{q\} \quad 3.31$$

$$[K_{u\phi}] = b \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{e}_{31}^B & \tilde{e}_{31}^B \\ \tilde{e}_{31}^T & -\tilde{e}_{31}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & -\frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \\ 0 & \tilde{e}_{31}^B & -\tilde{e}_{31}^B \\ -\tilde{e}_{31}^T & \tilde{e}_{31}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \end{bmatrix} \quad 3.32$$

$$[K_{\phi u}] = b \begin{bmatrix} 0 & \tilde{e}_{31}^T & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & 0 & -\tilde{e}_{31}^T & 0 & -\frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} \\ -\tilde{e}_{31}^B & -\tilde{e}_{31}^T & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} & \tilde{e}_{31}^B & \tilde{e}_{31}^T & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^T h_{pB}}{2} - \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \\ \tilde{e}_{31}^B & 0 & 0 & -\frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} & -\tilde{e}_{31}^B & 0 & 0 & \frac{\tilde{e}_{31}^B h_{pT}}{2} \end{bmatrix} \quad 3.33$$

#### 3.2.1.4. Energie de déformation thermique :

$$U_{Therm} = \frac{1}{2} b \int \left[ \int_{h_1}^{h_2} [\Theta p_3^B \phi_{,z}^B - (u_{,x} + z\psi_{,x}) \bar{Q}_{11}^B \Theta \alpha_1^B] dz - \int_{h_2}^{h_3} [\Theta p_3^T \phi_{,z}^T + (u_{,x} + z\psi_{,x}) \bar{Q}_{11}^T \Theta \alpha_1^T] dz \right] dx \quad 3.34$$

$$\begin{aligned}
 U_{Therm} &= \frac{1}{2} b \int_0^L (p_3^B [\tilde{N}_\phi^B] h_{pB} - p_3^T [\tilde{N}_\phi^T] h_{pT}) \Theta \{ \phi \} dx \\
 &+ \frac{1}{2} b \int_{-1}^1 \left[ \left( -h_{pB} \left( \frac{\partial [N_u^B]}{\partial \xi} \right) + \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \left( \frac{\partial [N_\psi^B]}{\partial \xi} \right) \right) \bar{Q}_{11}^B \alpha_1^B \right] \\
 &- \left[ \left( h_{pT} \left( \frac{\partial [N_u^T]}{\partial \xi} \right) + \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \left( \frac{\partial [N_\psi^T]}{\partial \xi} \right) \right) \bar{Q}_{11}^T \alpha_1^T \right] \frac{l^e}{2} \Theta \{ q \} d\xi \\
 U_{Therm} &= \frac{Lb\Theta}{2} (p_3^B [\tilde{N}_\phi^B]^t h_{pB} - p_3^T [\tilde{N}_\phi^T]^t h_{pT}) \{ \phi \}^t \\
 &+ \frac{1}{2} b \int_{-1}^1 \left[ \left( -h_{pB} \left( \frac{\partial [N_u^B]}{\partial \xi} \right)^t + \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \left( \frac{\partial [N_\psi^B]}{\partial \xi} \right)^t \right) \bar{Q}_{11}^B \alpha_1^B \right] \\
 &- \left[ \left( h_{pT} \left( \frac{\partial [N_u^T]}{\partial \xi} \right)^t + \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \left( \frac{\partial [N_\psi^T]}{\partial \xi} \right)^t \right) \bar{Q}_{11}^T \alpha_1^T \right] \frac{l^e}{2} \Theta \{ q \}^t d\xi \quad 3.35
 \end{aligned}$$

$$U_{Therm} = \frac{Lb\Theta}{2} \begin{bmatrix} p_3^T \\ -(p_3^T + p_3^B) \\ p_3^B \end{bmatrix} \{ \phi \}^t - \frac{\Theta b}{2} \begin{bmatrix} -h_{pB} \bar{Q}_{11}^B \alpha_1^B \\ -h_{pT} \bar{Q}_{11}^T \alpha_1^T \\ 0 \\ \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \bar{Q}_{11}^B \alpha_1^B - \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \bar{Q}_{11}^T \alpha_1^T \\ h_{pB} \bar{Q}_{11}^B \alpha_1^B \\ h_{pT} \bar{Q}_{11}^T \alpha_1^T \\ 0 \\ \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \bar{Q}_{11}^T \alpha_1^T - \frac{h_{pB} h_{pT}}{2} \bar{Q}_{11}^B \alpha_1^B \end{bmatrix} \{ q \}^t$$

Alors : [57]

$$U_{Therm} = \frac{1}{2} [V_\phi] \{ \phi \}^t + \frac{1}{2} [V_u] \{ q \}^t \quad 3.36$$

### 3.2.2. Application aux plaques :

Pour des éléments quadrilatéraux à quatre nœuds, on associe cinq degrés de liberté pour chaque nœud :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & N_i & 0 & 0 & 0 \\ & & N_i & 0 & 0 \\ Sym & & & N_i & 0 \\ & & & & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{Bmatrix} \quad 3.37$$

Sous forme générale on écrit :  $\{q\} = [N]\{q_e\}$

où :  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$  représente la matrice les fonctions de forme exprimées en fonction des coordonnées cartésiennes ( $x$  et  $y$ ).

$\{q_e\} = \{\{q_1\}\{q_2\} \dots \{q_4\}\}$  est le vecteur des déplacements nodaux.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) ; N_2 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y) ; N_3 = \frac{1}{4}(1+x)(1+y) ; N_4 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y)$$

Comme les nœuds d'interpolation sont les mêmes que les nœuds géométriques, alors :  $N_i(x, y) \equiv \bar{N}_i(\xi, \eta)$

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) ; \bar{N}_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) ; \bar{N}_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) ; \bar{N}_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Le passage de coordonnées cartésiennes ( $x, y$ ) aux coordonnées naturelles ( $\xi, \eta$ ) se fait selon :

$$T = \iint f(x, y) dx dy = \iint f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \tag{3.38}$$

Avec :  $|J|$  le déterminant de la matrice jacobéenne donnée par la relation :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$x = \langle N \rangle \{x_n\} = N_1(\xi, \eta)x_i + N_2(\xi, \eta)x_j + N_3(\xi, \eta)x_k + N_4(\xi, \eta)x_l$$

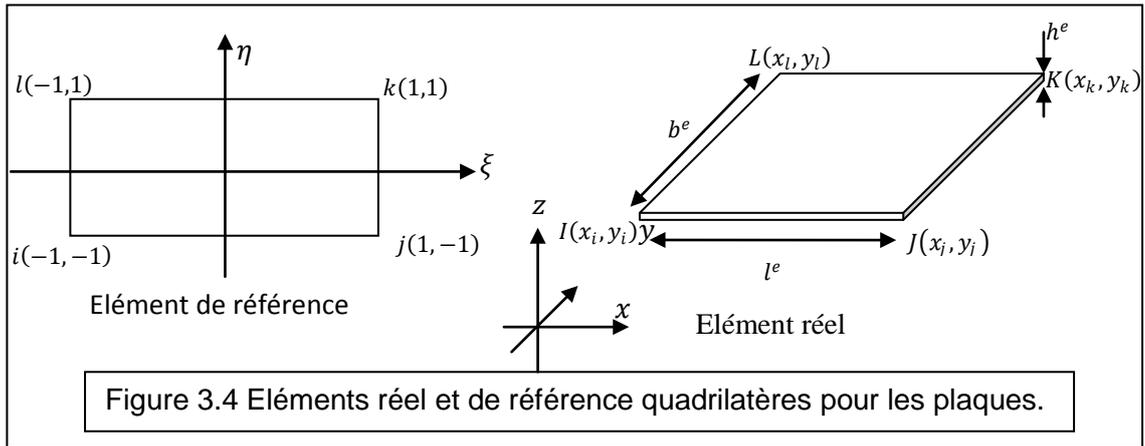
$$= \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle \{x_n\} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle \{y_n\} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \{x_n\} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \{y\} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \right\rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix}$$



$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \langle (\eta - 1) \quad (1 - \eta) \quad (1 + \eta) \quad (-1 - \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \langle (\eta - 1) \quad (1 - \eta) \quad (1 + \eta) \quad (-1 - \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \langle (\xi - 1) \quad (-1 - \xi) \quad (1 + \xi) \quad (1 - \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \langle (\xi - 1) \quad (-1 - \xi) \quad (1 + \xi) \quad (1 - \xi) \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} [(\eta - 1)x_i + (1 - \eta)x_j + (\eta + 1)x_k + (-\eta - 1)x_l] \\ &= \frac{1}{4} [(x_i - x_j + x_k - x_l)\eta - x_i + x_j + x_k - x_l]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} [(\eta - 1)y_i + (1 - \eta)y_j + (\eta + 1)y_k + (-\eta - 1)y_l] \\ &= \frac{1}{4} [(y_i - y_j + y_k - y_l)\eta - y_i + y_j + y_k - y_l]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} [(\xi - 1)x_i + (-\xi - 1)x_j + (\xi + 1)x_k + (1 - \xi)x_l] \\ &= \frac{1}{4} [(x_i - x_j + x_k - x_l)\xi - x_i - x_j + x_k + x_l]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} [(\xi - 1)y_i + (-\xi - 1)y_j + (\xi + 1)y_k + (1 - \xi)y_l] \\ &= \frac{1}{4} [(y_i - y_j + y_k - y_l)\xi - y_i - y_j + y_k + y_l]\end{aligned}$$

[J]

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} [(x_i - x_j + x_k - x_l)\eta - x_i + x_j + x_k - x_l] & [(y_i - y_j + y_k - y_l)\eta - y_i + y_j + y_k - y_l] \\ [(x_i - x_j + x_k - x_l)\xi - x_i - x_j + x_k + x_l] & [(y_i - y_j + y_k - y_l)\xi - y_i - y_j + y_k + y_l] \end{bmatrix}$$

$$|J| = A_0 + A_1\xi + A_2\eta$$

$$A_0 = \frac{1}{8} [(y_l - y_j)(x_k - x_i) - (y_k - y_i)(x_l - x_j)] = \frac{1}{4} b^e l^e$$

$$A_1 = \frac{1}{8} [(y_k - y_l)(x_j - x_i) - (y_j - y_i)(x_k - x_l)] = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{8} [(y_l - y_i)(x_k - x_j) - (y_k - y_j)(x_l - x_i)] = 0$$

### 3.2.2.1. Energie cinétique :

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^B \{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}_x \quad \dot{\psi}_y \} [\bar{T}] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} dy dx \quad 3.39$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle \dot{q} \rangle [\bar{N}]^t [\bar{T}] [\bar{N}] \{ \dot{q} \} |J| d\xi d\eta \quad 3.40$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^t [\bar{M}] \{ \dot{q} \} \quad 3.41$$

Des informations et détails sur la matrice  $[\bar{M}]$  sont donnés en annexe A.

### 3.2.2.2. Energie de déformation :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle q \rangle [N]^t [B]^t [\bar{H}] [B] [N] \{q\} |J| d\xi d\eta$$

$$\bar{U} = \frac{b^e l^e}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle q \rangle [\bar{B}]^t [\bar{H}] [\bar{B}] \{q\} d\xi d\eta \quad 3.42$$

Les dérivées des fonctions de forme seront après calcul comme suite :

$$\bar{N}_{1,\xi} = \frac{1}{4}(\eta - 1) ; \bar{N}_{2,\xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) ; \bar{N}_{3,\xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) ; \bar{N}_{4,\xi} = \frac{1}{4}(-1 - \eta)$$

$$\bar{N}_{1,\eta} = \frac{1}{4}(\xi - 1) ; \bar{N}_{2,\eta} = \frac{1}{4}(-1 - \xi) ; \bar{N}_{3,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) ; \bar{N}_{4,\eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)$$

$$[\bar{B}(\xi, \eta)] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & z\bar{N}_{i,\xi} \\ 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 & -z\bar{N}_{i,\eta} & 0 \\ \bar{N}_{i,\eta} & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & -z\bar{N}_{i,\xi} & z\bar{N}_{i,\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{N}_{i,\xi} & \bar{N}_{i,\eta} \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\xi} & 0 & N_i \\ 0 & 0 & \bar{N}_{i,\eta} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad 3.43$$

Finalement on aboutit à la forme matricielle suivante :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \langle q \rangle [\bar{K}] \{q\} \quad 3.44$$

Avec :

$$[\bar{K}] = \frac{b^e l^e}{4} \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{11}] & [\tilde{K}_{12}] & [\tilde{K}_{13}] & [\tilde{K}_{14}] \\ [\tilde{K}_{21}] & [\tilde{K}_{22}] & [\tilde{K}_{23}] & [\tilde{K}_{24}] \\ [\tilde{K}_{31}] & [\tilde{K}_{32}] & [\tilde{K}_{33}] & [\tilde{K}_{34}] \\ [\tilde{K}_{41}] & [\tilde{K}_{42}] & [\tilde{K}_{43}] & [\tilde{K}_{44}] \end{bmatrix} \quad 3.45$$

Les sous-matrices  $[\tilde{K}_{ij}]$  sont données dans l'annexe A.

### 3.2.2.3. Energie piézoélectrique :

Soit la relation (2.69) après intégration on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{Piezo} = & \frac{1}{2} \int \int \{\phi\}^t \left( e_{31}^B [\tilde{N}_\phi^B]^t \left( h_{Bot} \frac{\partial [N_u^B]}{\partial \xi} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_x}^B]}{\partial \xi} \right) \right. \\
& + e_{32}^B [\tilde{N}_\phi^B]^t \left( h_{Bot} \frac{\partial [N_v^B]}{\partial \eta} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_y}^B]}{\partial \eta} \right) \{q\} \\
& + \{q\}^t \left( e_{31}^B \left( h_{Bot} \frac{\partial [N_u^B]^t}{\partial \xi} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_x}^B]^t}{\partial \xi} \right) [\tilde{N}_\phi^B] \right. \\
& + e_{32}^B \left( h_{Bot} \frac{\partial [N_v^B]^t}{\partial \eta} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_y}^B]^t}{\partial \eta} \right) [\tilde{N}_\phi^B] \{ \phi \} \\
& + \{ \phi \}^t \left( e_{31}^T [\tilde{N}_\phi^T]^t \left( h_{Top} \frac{\partial [N_u^T]}{\partial \xi} + \frac{h_{Top}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_x}^T]}{\partial \xi} \right) \right. \\
& + e_{32}^T [\tilde{N}_\phi^T]^t \left( h_{Top} \frac{\partial [N_v^T]}{\partial \eta} + \frac{h_{Top}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_y}^T]}{\partial \eta} \right) \{q\} \\
& + \{q\}^t \left( e_{31}^T \left( h_{Top} \frac{\partial [N_u^T]^t}{\partial \xi} + \frac{h_{Top}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_x}^T]^t}{\partial \xi} \right) [\tilde{N}_\phi^T] \right. \\
& \left. \left. + e_{32}^T \left( h_{Top} \frac{\partial [N_v^T]^t}{\partial \eta} + \frac{h_{Top}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_y}^T]^t}{\partial \eta} \right) [\tilde{N}_\phi^T] \{ \phi \} \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\hat{U}_{Piezo} = \frac{1}{2} \{ \phi \}^t [\tilde{K}_{\phi u}] \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^t [\tilde{K}_{u\phi}] \{ \phi \} \quad 3.46$$

### 3.2.2.4. Energie diélectrique :

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{Dielec} = & \frac{1}{2} \int \int \{ \phi \}^t \left( \int_{-h_{Bot}}^0 \left( \bar{\epsilon}_{33}^B [\tilde{N}_\phi^B]^t \right) [\tilde{N}_\phi^B] dz \right) \\
& + \left( \int_0^{h_{Top}} \left( \bar{\epsilon}_{33}^T [\tilde{N}_\phi^T]^t \right) [\tilde{N}_\phi^T] dz \right) \{ \phi \} |J| d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\hat{U}_{Diele} = \frac{1}{2} \{\phi\}^t [\tilde{K}_{\phi\phi}] \{\phi\} \quad 3.47$$

### 3.2.2.5. Energie thermique :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{Therm} = & -\frac{1}{2} \int \int \{q\}^t \left[ \left( h_{Bot} \frac{\partial [N_u^B]}{\partial \xi} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_x}^B]}{\partial \xi} \right) \lambda_1^B \right. \\ & + \left. \left( h_{Bot} \frac{\partial [N_v^B]^t}{\partial \eta} + \frac{h_{Bot}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_y}^B]^t}{\partial \eta} \right) \lambda_2^B \right] \\ & + \left[ \left( h_{Top} \frac{\partial [N_u^T]^t}{\partial \xi} + \frac{h_{Top}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_x}^T]^t}{\partial \xi} \right) \lambda_1^T \right. \\ & + \left. \left( h_{Top} \frac{\partial [N_v^T]^t}{\partial \eta} + \frac{h_{Top}^2}{2} \frac{\partial [N_{\psi_y}^T]^t}{\partial \eta} \right) \lambda_2^T \right] |J| d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\hat{U}_{Therm} = \frac{1}{2} [\tilde{V}_\phi] \{\phi\}^t + \frac{1}{2} [\tilde{V}_u] \{q\}^t \quad 3.46$$

## 3 3. Equations de mouvement et assemblage :

Une fois que les différentes matrices élémentaires obtenues, on procède à leur assemblage afin d'aboutir aux matrices globales. Chaque matrice élémentaire doit être écrite sous la forme globale, par la suite l'addition de ces nouvelles matrices donne lieu aux matrices globales.

L'équation de mouvement fait intervenir les différentes matrices globales établies jusqu'à présent, ce qui permet d'écrire :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K_{uu}]\{q\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = \{F\} + \{V_u\} \quad 3.47$$

$$[K_{\phi u}]\{q\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{B\} + \{V_\phi\} \quad 3.48$$

où [C] est la matrice des amortissements évaluée de sorte à obtenir le mécanisme de dissipation interne du matériau équation (2.6).

L'équation (3.47) est appelée l'équation d'actuation et celle (3.48) est appelée équation du senseur [1].

Sou forme globale on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F] \\ [B] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [V_u] \\ [V_\phi] \end{Bmatrix} \quad 3.49$$

Dans le cas statique l'équation s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F] \\ [B] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [\bar{E}] \\ [\bar{E}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\bar{F}] \\ [\bar{B}] \end{Bmatrix}$$

Le système est de la forme :

$$[K_{uu}]\{q\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = [\bar{F}]$$

$$[K_{\phi u}]\{q\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = [\bar{B}]$$

### 3.4. Résolution et Simulation :

Le système d'équations (3.49) obtenu est résolu en utilisant le schéma de Newmark. Ce dernier est largement utilisé dans le domaine dynamique [38,46,59,60], il représente une méthode d'intégration numérique se basant sur le développement de Taylor. Cette méthode consiste à prédire la valeur de la vitesse et du déplacement pour ensuite calculer la nouvelle valeur de l'accélération qu'on réutilisera pour recalculer les nouvelles valeurs (corrigées) des vitesses et du déplacement déjà prédites. Pour résumer cette méthode, on définit les étapes suivantes [60] :

1. Calcul de la première valeur de l'accélération  $\ddot{q}_0$  :

$$\ddot{q}_0 = M_G^{-1}(\bar{F}_0 - C_G \dot{q}_0 - K_G q_0)$$

2. Introduction d'un incrément temporel entre l'instant  $t_n$  et  $t_{n+1}$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

3. Prédiction de la vitesse et du déplacement de l'instant suivant  $t_1 = t_0 + \Delta t$  :

$$\dot{q}_{n+1}^p = \dot{q}_n + (1 - \tilde{\delta})\Delta t \ddot{q}_n \quad \text{et} \quad q_{n+1}^p = q_n + (0.5 - \tilde{\varrho})\Delta t^2 \ddot{q}_n$$

4. Calcul de l'accélération à l'instant suivant  $t_1 = t_0 + \Delta t$  ou  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

$$\bar{S}\ddot{q}_{n+1} = G_{n+1} - C_G\dot{q}_{n+1} - K_Gq_{n+1} \text{ Ou } \bar{S} = M_G + \delta\Delta tC_G + \tilde{\varrho}\Delta t^2K_G$$

5. Correction des vitesses et déplacements déjà prédits

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^p + \tilde{\delta}\Delta t\ddot{q}_{n+1} \quad \text{et} \quad q_{n+1} = q_{n+1}^p + \tilde{\varrho}\Delta t^2\ddot{q}_{n+1}$$

6. Désormais l'état du système à l'instant  $t_{n+1}$  est connu. Alors on passe à  $t_{n+2}$ , pour cela on incrémente le temps par une même valeur  $\Delta t$ .

Les constantes  $\tilde{\delta}$  et  $\tilde{\varrho}$  correspondent à une variation linéaire de l'accélération dans l'intervalle temporel considéré [60,61]. Ces constantes ont pour valeurs respectives  $1/2$  et  $1/6$ . Pour bien illustrer ce schéma, on utilise l'algorithme suivant :

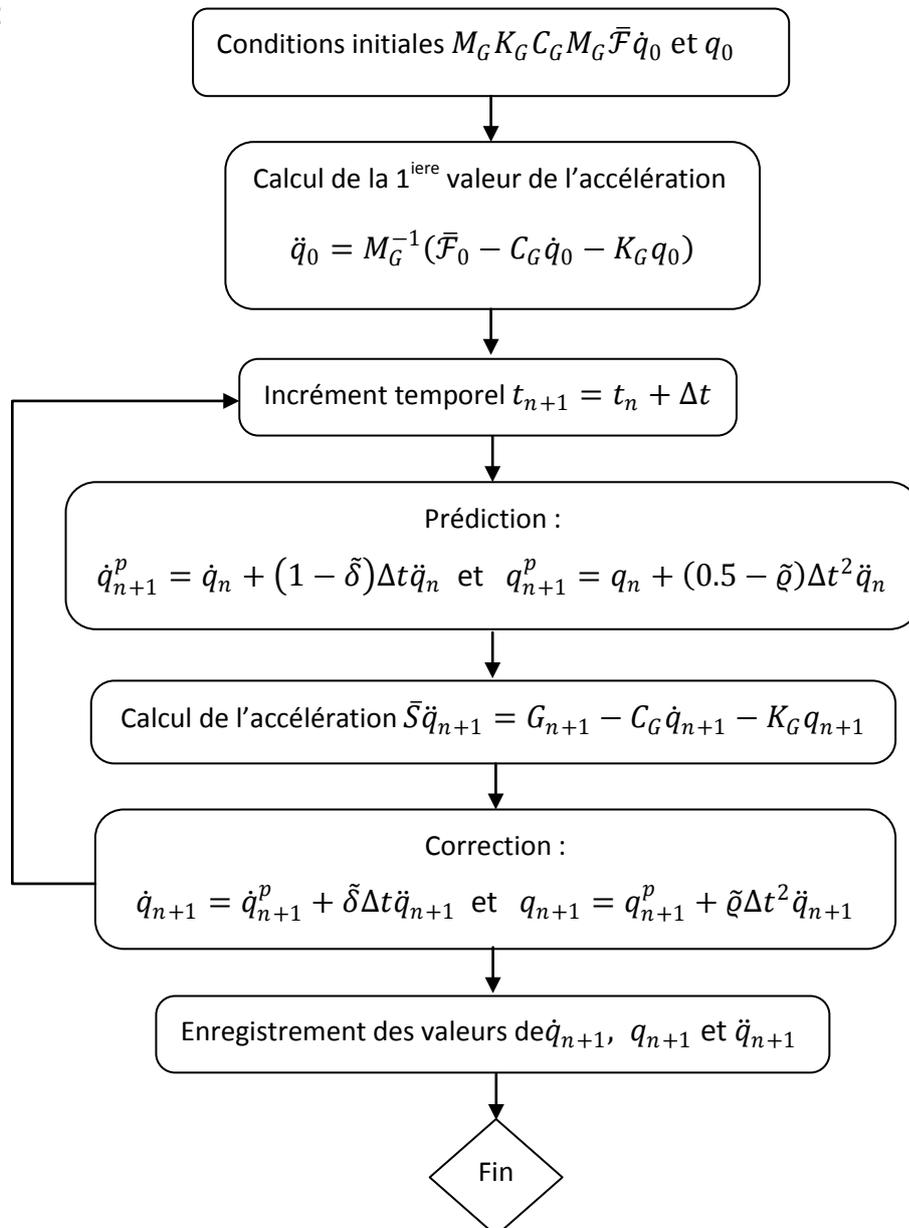


Figure 3.5 Organigramme de la méthode de résolution Newmark.

Afin d'obtenir des résultats numériques un programme sous logiciel MATLAB a été élaboré. Le fonctionnement de ce programme est illustré par les étapes suivantes :

1. Introduction des données relatives à la discrétisation comme le nombre d'éléments dans la zone décollée, le nombre d'éléments dans les zones collées et le nombre de nœuds de chaque zone.
2. Introduction des données liées à la géométrie, longueur, largeur, épaisseurs.
3. Introduction des données liées aux propriétés des matériaux, à savoir : l'élasticité, les coefficients piézoélectriques, les coefficients de dilatation thermique et la permittivité.
4. Calcul des connectivités entre éléments dans les différentes zones.
5. Calcul de la matrice d'inertie élémentaire.
6. Calcul de la matrice d'inertie globale.
7. Calcul de la matrice des rigidités élémentaire.
8. Calcul de la matrice des rigidités globale.
9. Calcul du vecteur charge.
10. Introduction des conditions aux limites.
11. Résolution par la méthode de Newmark.
12. Affichage des résultats.

### 3 5.      Conclusion

Dans ce troisième chapitre, les matrices de l'inertie, de l'élasticité, de la piézoélectricité et du déplacement diélectrique obtenues au deuxième chapitre ont été discrétisées en éléments finis. Cette discrétisation permet d'obtenir les différentes matrices élémentaires qu'on a assemblées pour obtenir les matrices globales. Ces dernières forment l'équation du mouvement.

De même, on a présenté la méthode numérique de Newmark servant à la résolution de l'équation du mouvement.

## RESULTATS ET ANALYSE

### 4 1. Introduction :

Dans ce chapitre, on présente les résultats obtenus pour les cas des poutres et des plaques. Ces résultats numériques sont obtenus respectivement par des codes de calcul adéquats (Matlab et ANSYS®). Ils sont confrontés à ceux de la littérature.

### 4 2. Confrontation :

Afin de pouvoir valider les résultats du modèle présenté, on procède à leur comparaison pour le cas statique avec ceux du logiciel ANSYS®. Pour cela, on considère une poutre simple piézoélectrique en porte à faux (encastrée-libre), soumise à un chargement concentré sur le bout libre. La poutre est en PZT-4 avec les caractéristiques suivantes :

La densité :  $\rho_p = 7600 \quad \text{Kg/m}^3$

Coefficient d'expansion thermique :  $\alpha_{11}^p = 1.2 * 10^{-6} \quad 1/C^\circ$

Coefficient des contraintes thermiques :  $\tilde{\lambda}_{11}^p = 1.03 * 10^5 \quad \text{N/m}^2 \quad C^\circ$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 13.9 & 7.78 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.78 & 13.9 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.43 & 7.43 & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.06 \end{bmatrix} 10^{10} \text{ Pa}$$

La matrice des rigidités est :

La matrice des constantes piézoélectriques est :

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 & 0 \\ -5.2 & -5.2 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{C/m}^2$$

Alors [38]:

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4.961 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.961 & 0 & 0 \\ -1.238 & -1.238 & 2.913 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-10} \text{C/N}$$

$$d_{31} = 2.913 \cdot 10^{-10} \text{C/N} \text{ ou } d_{31} = 11 \cdot 10^{-11} \text{m/V}$$

$$p_3 = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{C/m}^2\text{°C}$$

Matrice des permittivités est :  $\bar{\epsilon} = 10^{-11} \begin{bmatrix} 646 & 0 & 0 \\ 0 & 646 & 0 \\ 0 & 0 & 562 \end{bmatrix} \text{F/m}$

Les dimensions de la poutre sont données dans le tableau (4.1) :

La dimension	symbole	Valeur (m)
Longueur	$L$	0.5
Largeur	$b$	0.05
Epaisseur	$h_p$	0.01

Tableau 4.1 : Dimensions de la poutre.

Notons que la flèche du bout libre calculée par notre programme est de 0.001043 (m), tandis que celle affichée par ANSYS<sup>®</sup> est  $0.10656 \cdot 10^{-02}$  soit une différence de  $(2.76 \cdot 10^{-05})$  ou un taux de 2.1%, figure (4.1) (*le modèle présent*) et figure (4.2) (ANSYS<sup>®</sup>). Dans le cas d'une augmentation de température de 10°C, le déplacement axial donné par le présent modèle est de :  $7.5 \cdot 10^{-06}$  (m), et celui par ANSYS<sup>®</sup> est de  $7.58 \cdot 10^{-6}$  m. soit un taux de 1%. Figure (4.3), (*le modèle présent*) et Figure (4.4) (ANSYS<sup>®</sup>).

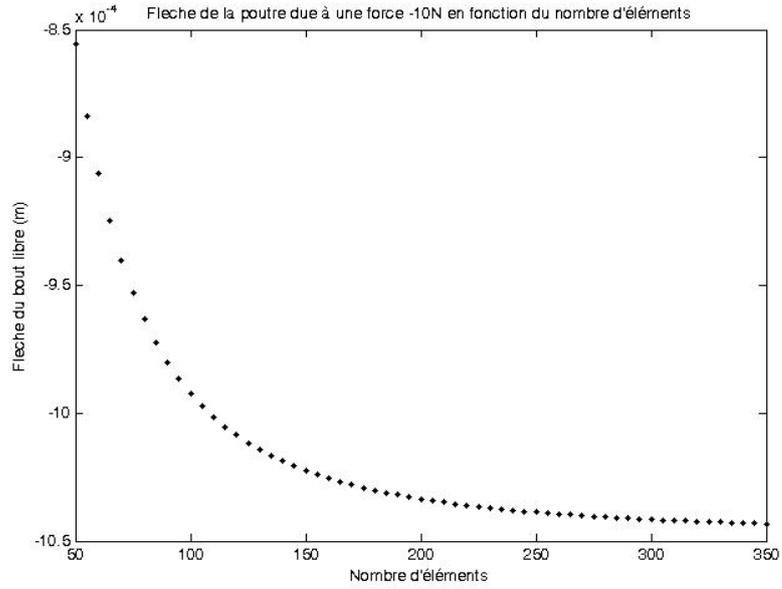


Figure 4.1 Flèche du bout libre dans le cas statique chargement 10N (Modèle présent)

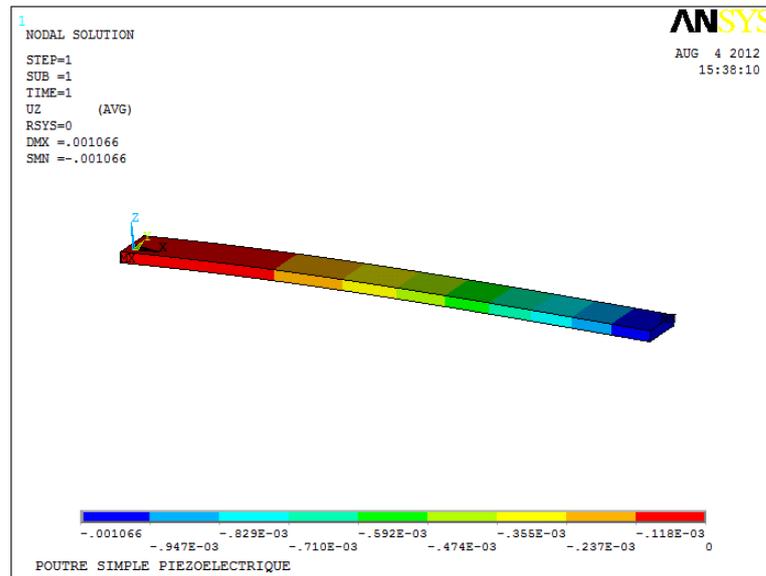


Figure 4.2 Flèche du bout libre dans le cas statique chargement 10N (ANSYS®)

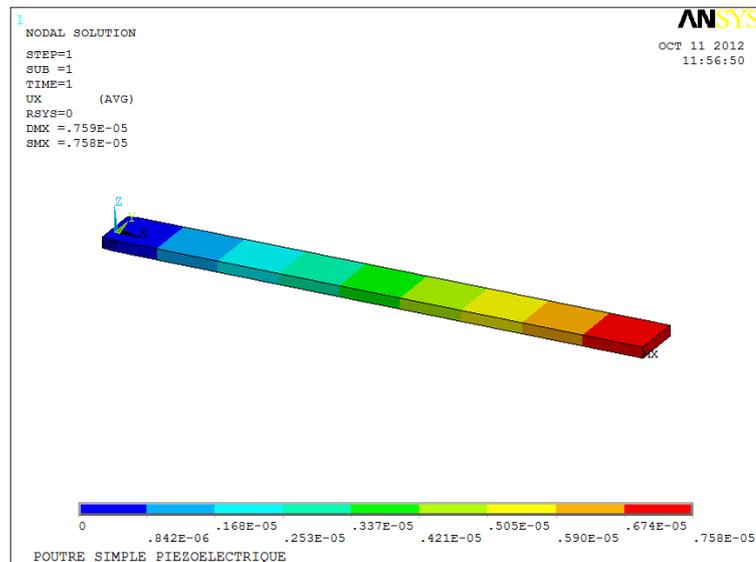
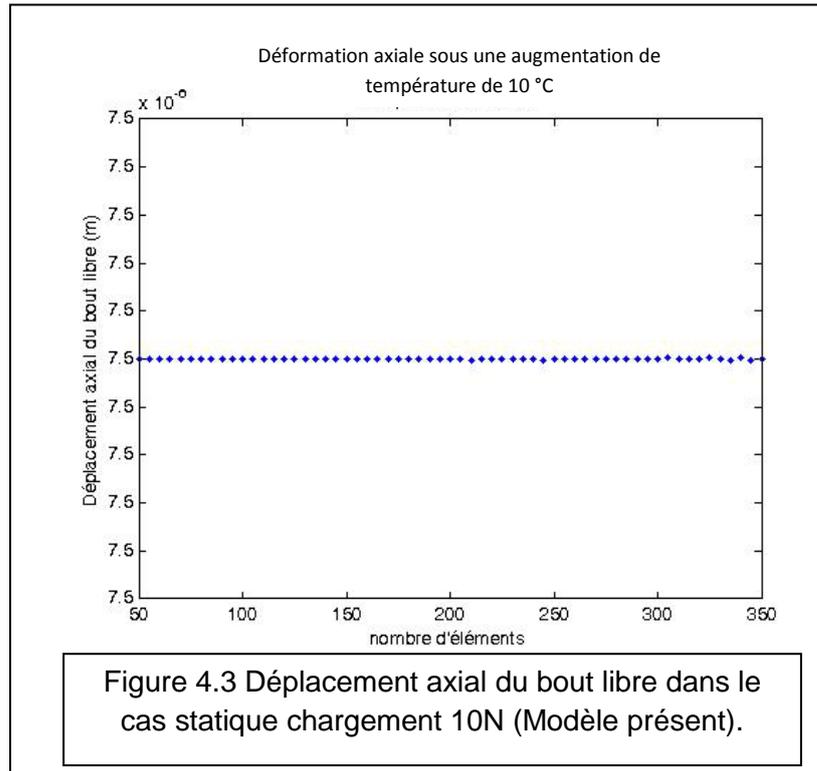


Figure 4.4 Déplacement axial du bout libre dans le cas statique chargement 10N (ANSYS®).

En deuxième lieu, on compare le cas dynamique Figure 4.5, en admettant deux valeurs différentes du coefficient d’amortissement structural (0.08 et 0.04), pour une augmentation de température ambiante de 10°C.

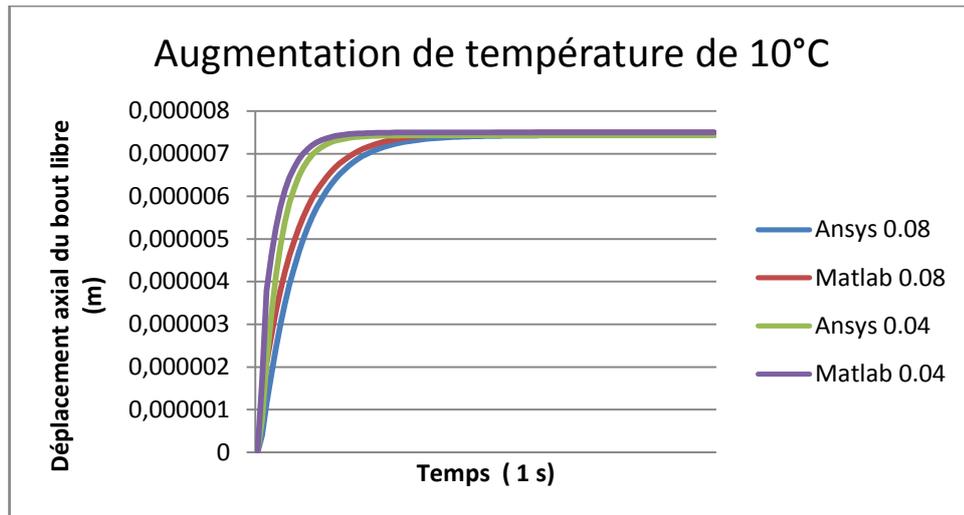


Figure 4.5 Déplacement axial du bout libre dans le cas dynamique et un changement de température ambiante de 10°C

Toujours dans le but de comparer notre programme, on prend une poutre bimorphe piézoélectrique formée par un autre matériau (un PVDF) pour s'assurer un bon fonctionnement du programme. Le PVDF aux propriétés listées dans le tableau (4.2). La géométrie de la poutre est illustrée en Figure 4.6.

Propriétés du PVDF	
$\rho$	1800 Kg/m <sup>3</sup>
$E_1$	$2 * 10^9$ N/m <sup>2</sup>
$E_2$	$2 * 10^9$ N/m <sup>2</sup>
$G_{12}$	$7.75 * 10^8$ N/m <sup>2</sup>
$\nu$	0.29
$d_{31}$	$2.2 * 10^{-11}$ C/N
$\bar{\epsilon}_{11}$	1.62
	$* 10^{-11}$ F/m
$\bar{\epsilon}_{22}$	1.62
	$* 10^{-11}$ F/m
$\bar{\epsilon}_{33}$	1.62
$p_3^*$	$* 10^{-11}$ F/m
$\alpha$	$-20 * 10^{-6}$ C/m <sup>2</sup> K
	$1.3 * 10^{-4}$ °C <sup>-1</sup>

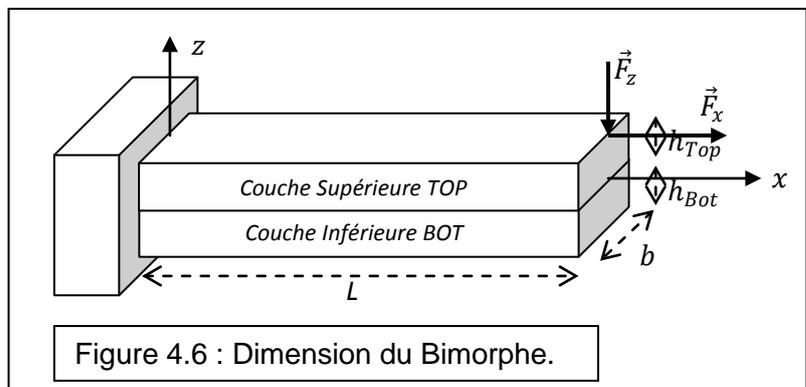


Figure 4.6 : Dimension du Bimorphe.

Tableau (4.2): Propriétés du PVDF

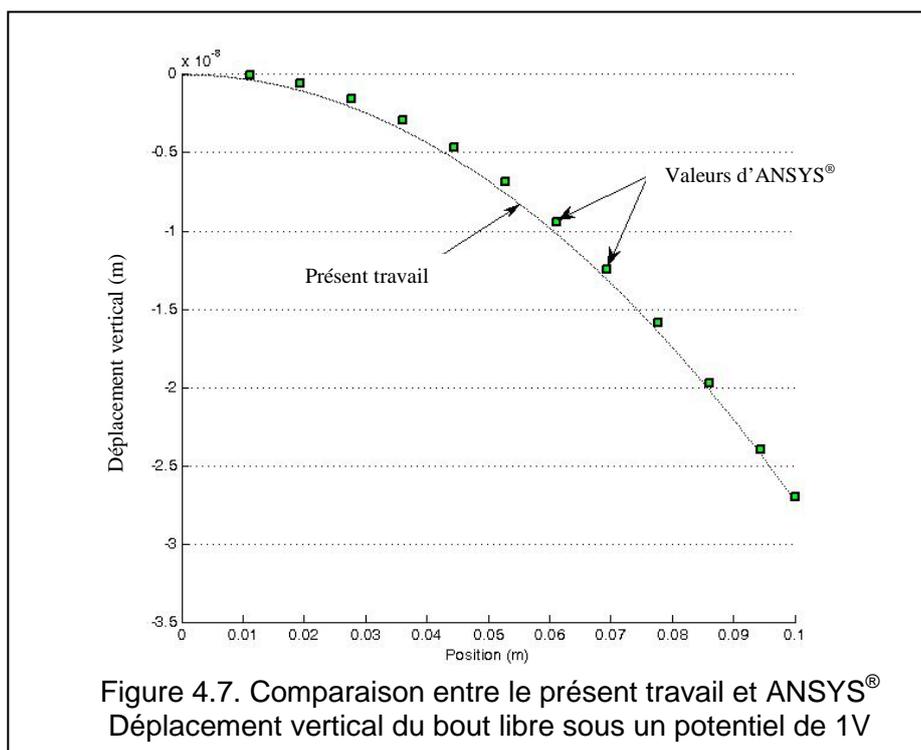
Les dimensions sont :  $L = 0.1$ m,  $b = 0.05$  m, et  $h_{pT} = h_{pB} = 0.025$  m. Pour la constante  $p_3$ , elle varie en fonction de la température suivant la relation [62]:

$$p_3(T) = p_{3,0} + YT \quad \text{Pour} \quad \begin{cases} Y = -0.07 \cdot 10^{-6} \text{ et } p_{3,0} = -21.3 \cdot 10^{-6} \text{ si } T < -20^\circ\text{C} \\ Y = -0.3 \cdot 10^{-6} \text{ et } p_{3,0} = -26.6 \cdot 10^{-6} \text{ si } -20^\circ\text{C} \leq T \leq 20 \\ Y = -0.49 \cdot 10^{-6} \text{ et } p_{3,0} = -24.3 \cdot 10^{-6} \text{ si } T > 20^\circ\text{C} \end{cases}$$

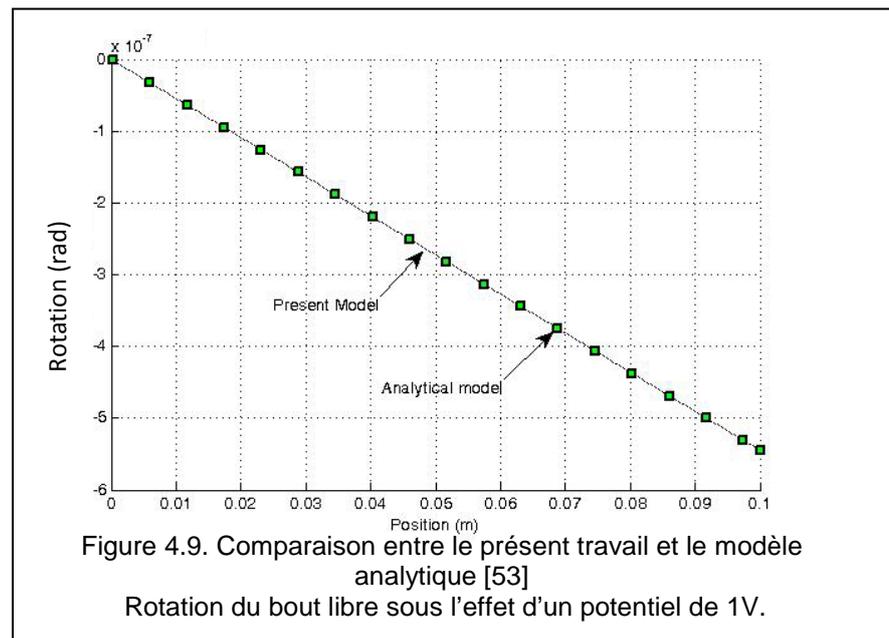
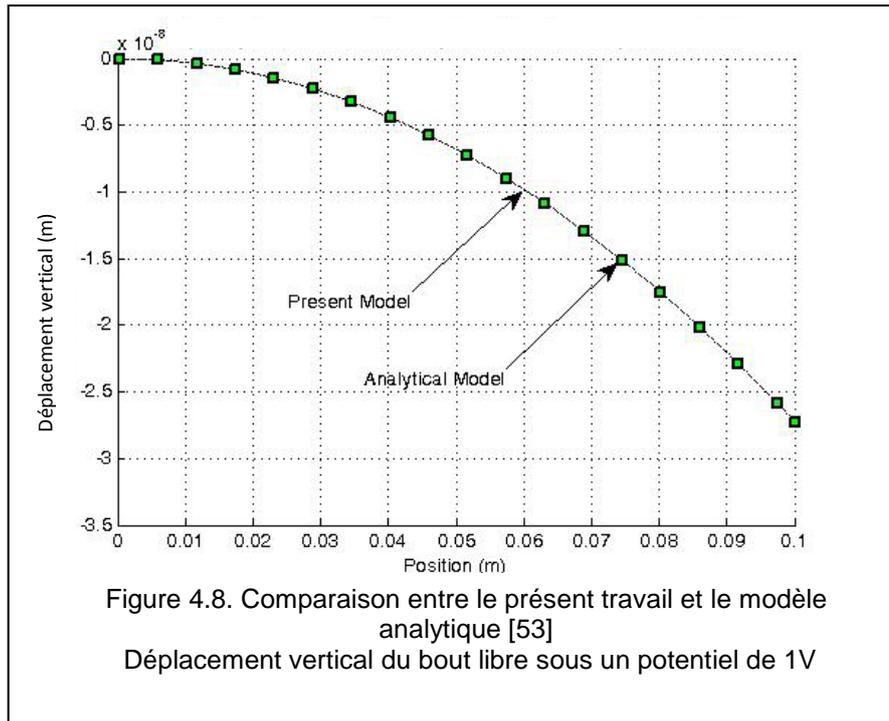
Une comparaison entre ANSYS® et le présent travail, dans le cas d'une application d'un potentiel unitaire sur la face libre supérieure est présentée au tableau (4.3) :

Position (m)	ANSYS®	Présent travail	Erreurs
0	0	0	0,00%
0,02	-8,70E-10	-1,09E-09	20,14%
0,04	-4,05E-09	-4,36E-09	7,13%
0,06	-9,47E-09	-9,81E-09	3,45%
0,08	-1,71E-08	-1,74E-08	1,74%
0,1	-2,70E-08	-2,72E-08	0,75%

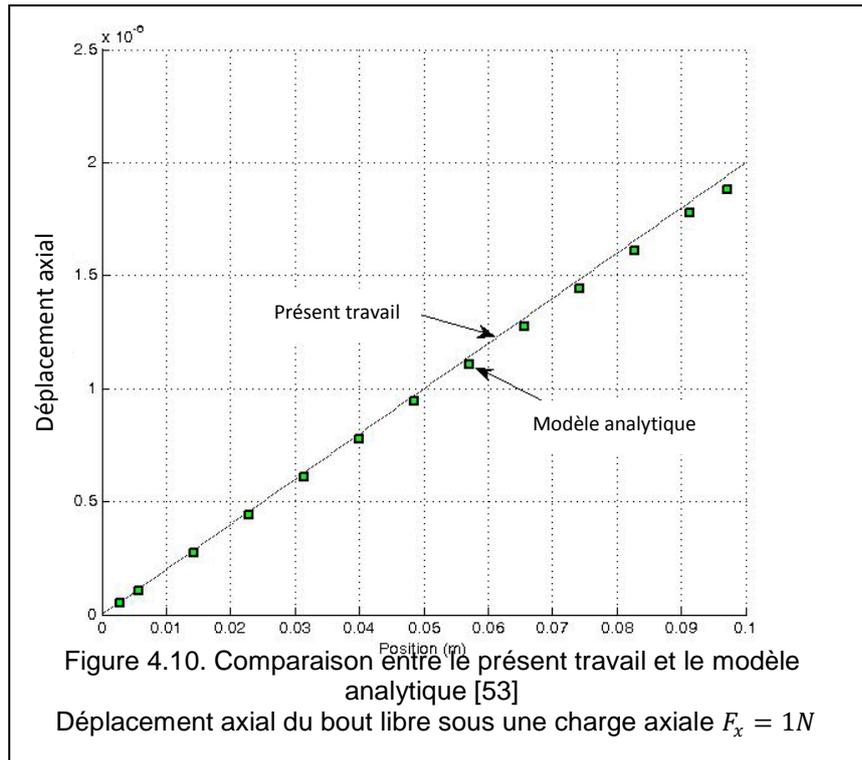
Tableau 4.3 : Comparaison entre ANSYS® et le présent travail



La différence au bout libre du bimorphe est de l'ordre de 0.75% entre ANSYS® (avec des éléments solides SOLID226) et le présent travail. Cela est dû au fait que les éléments utilisés par ANSYS® sont du type quadratique à 20 nœuds, tandis que dans notre travail on considère des éléments linaires à deux nœuds (figure 4.7). Afin de valider notre modèle on a confronté nos résultats (figures 4.8, 4.9 et 4.10) avec ceux de la littérature [53]:



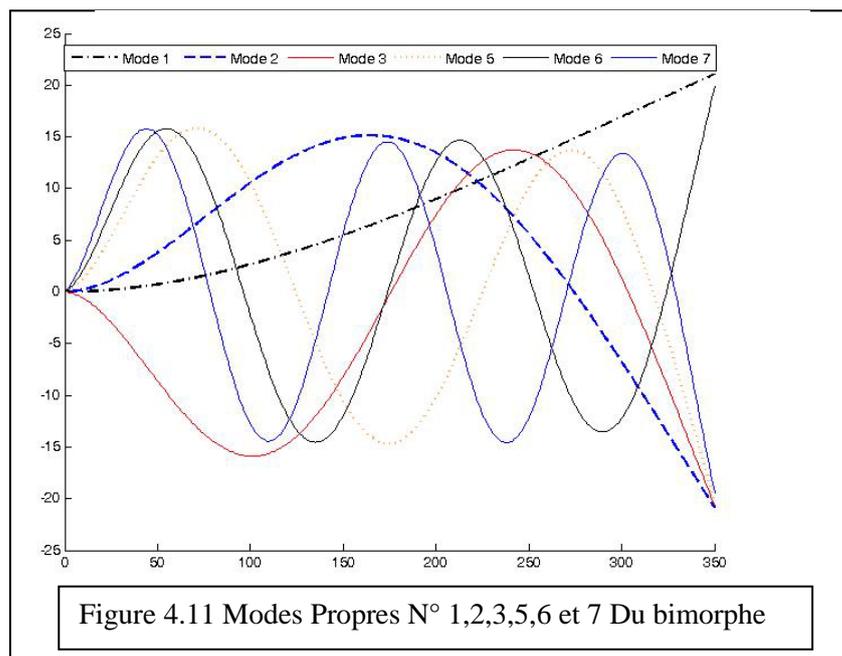
L'effet d'une force unitaire sur la direction axiale est illustré dans la figure (4.9).

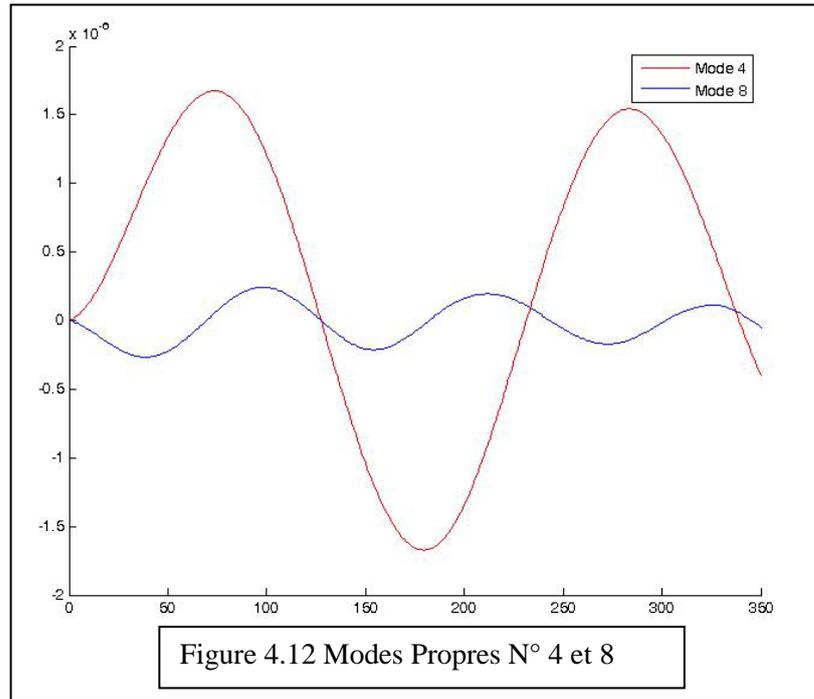


L'examen des résultats présentés permet de prouver l'efficacité du programme établi par leur bonne concordance avec ceux obtenus par le logiciel ANSYS® et ceux de la littérature. On considère ce programme comme exploitable.

4 3. Etude dynamique d'un bimorphe :

L'étude dynamique du bimorphe donne les modes propres associés aux premières fréquences propres (tableau (4.4)).





Fréquence (Hz)	Mode associé
60,115	1
372,379	2
1024,01	3
1863,393	4
1957,119	5
3138,937	6
4531,04	7
5590,254	8

**Tableau 4.4** Les 8 premières fréquences propres du bimorphe

Afin d’observer l’effet de l’amortissement structural sur le bimorphe, on applique trois chargements unitaires, le premier axial, le second vertical et le troisième électrique sur la couche inférieure, tout en choisissant deux coefficients d’amortissement (0.08 et 0.04).

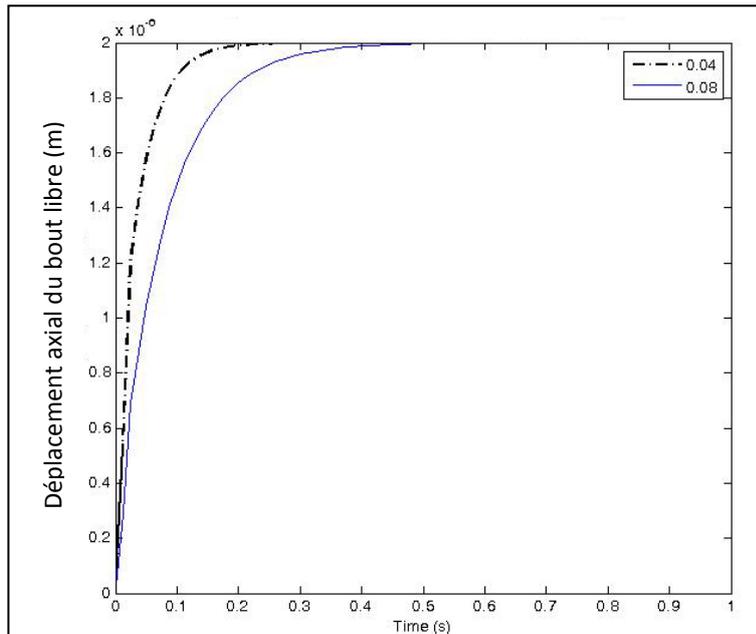


Figure 4. 13. Effet de l'amortissement dans le cas d'un chargement axial  $F_x = 1 N$

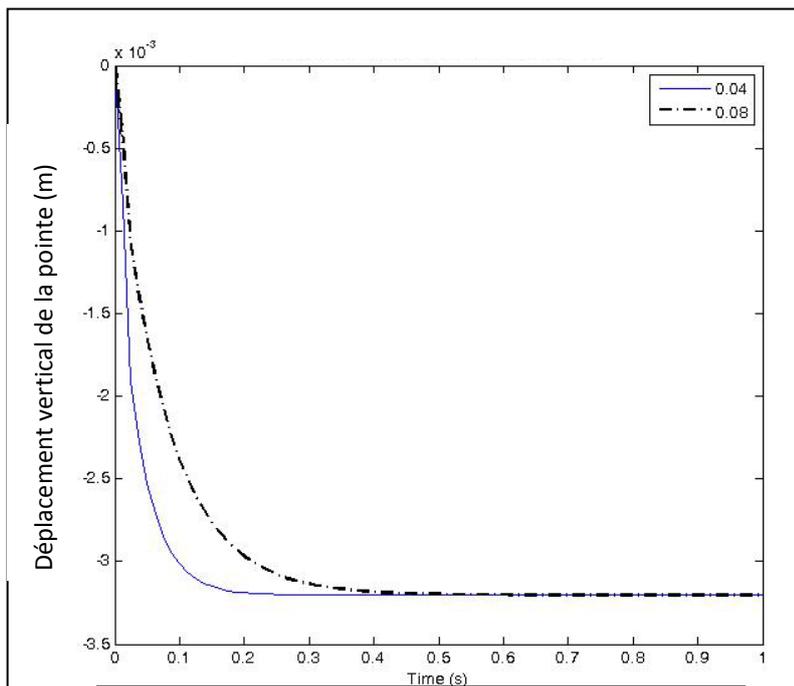
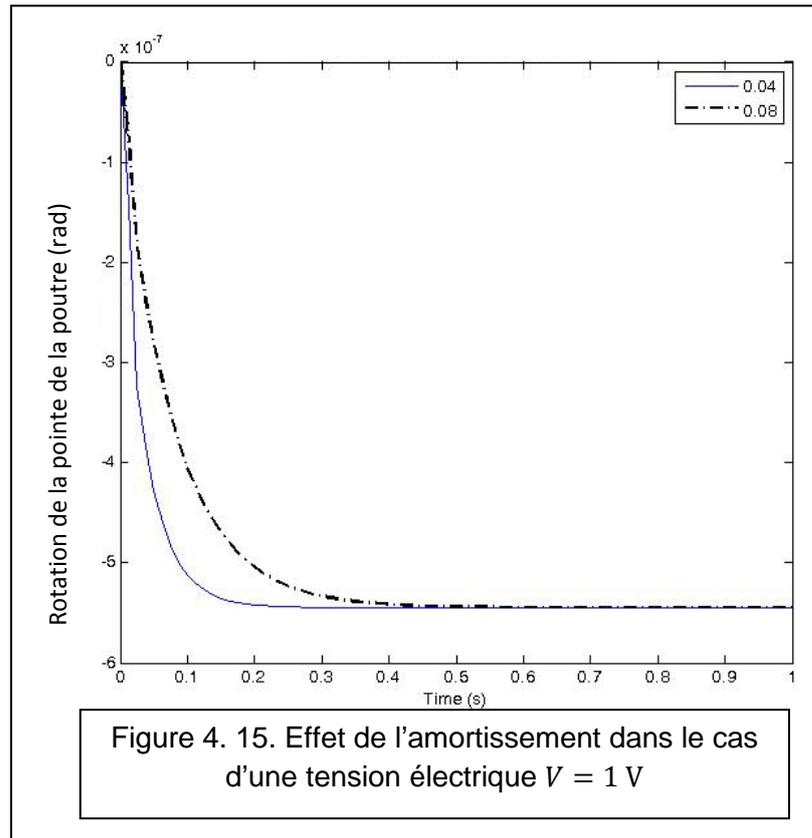
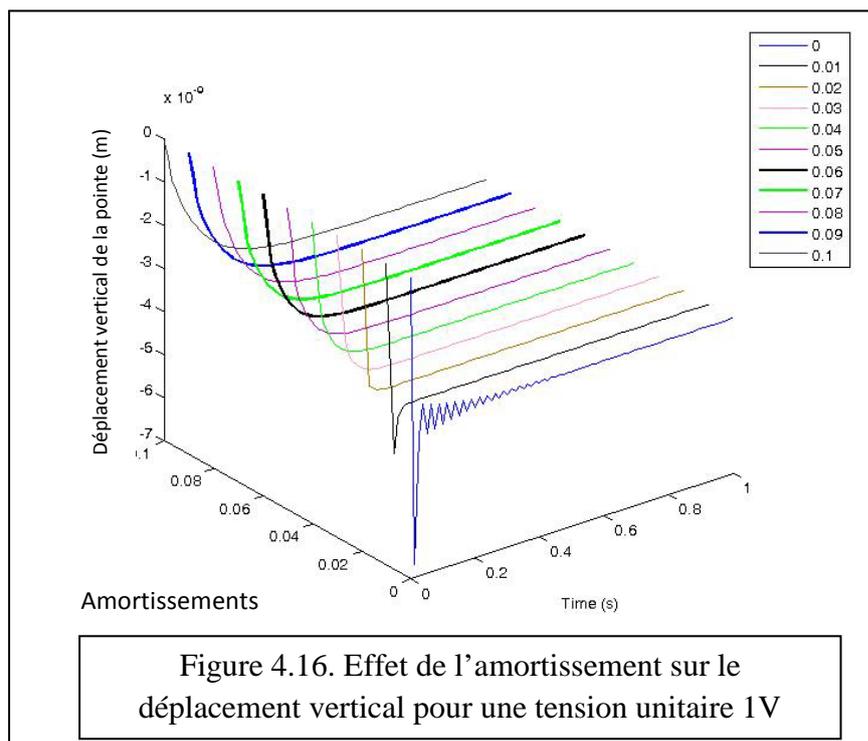


Figure 4. 14. Effet de l'amortissement dans le cas d'un chargement vertical  $F_z = 1 N$

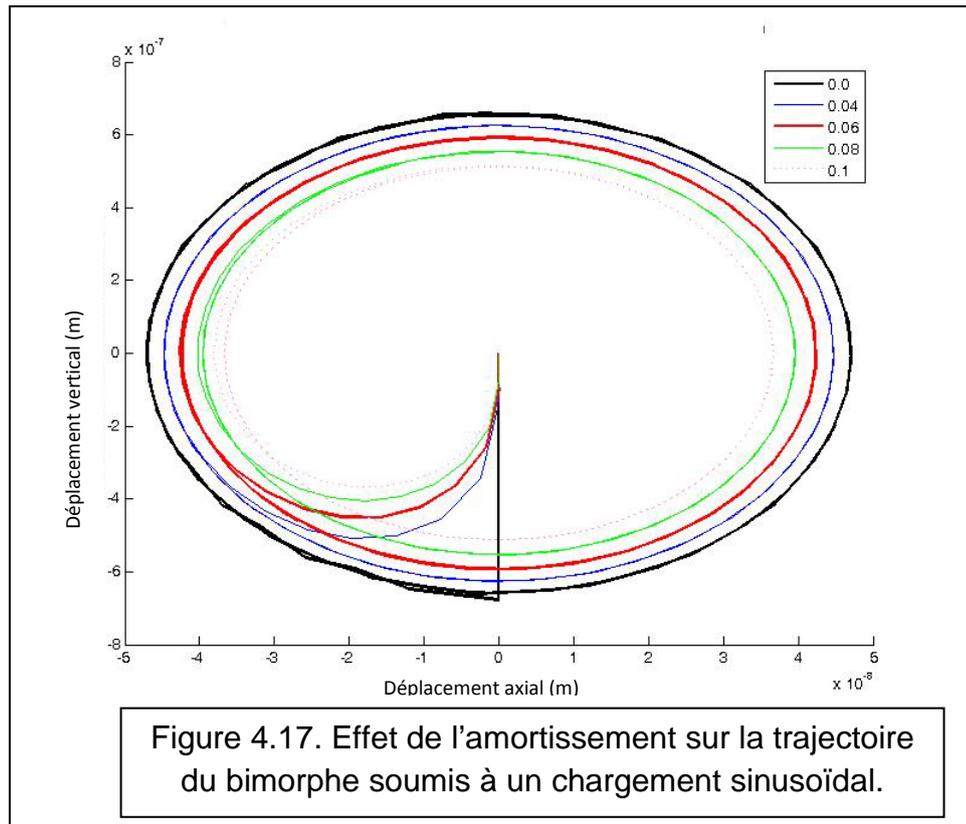


En considérant plusieurs coefficients d'amortissement structural (*allant d'une poutre conservative, à une poutre amortie à 10%, c.-à-d. 0, 0.01, 0.02, ..., 0.1*) la flèche du bout libre est représentée par la Figure (4.15) :

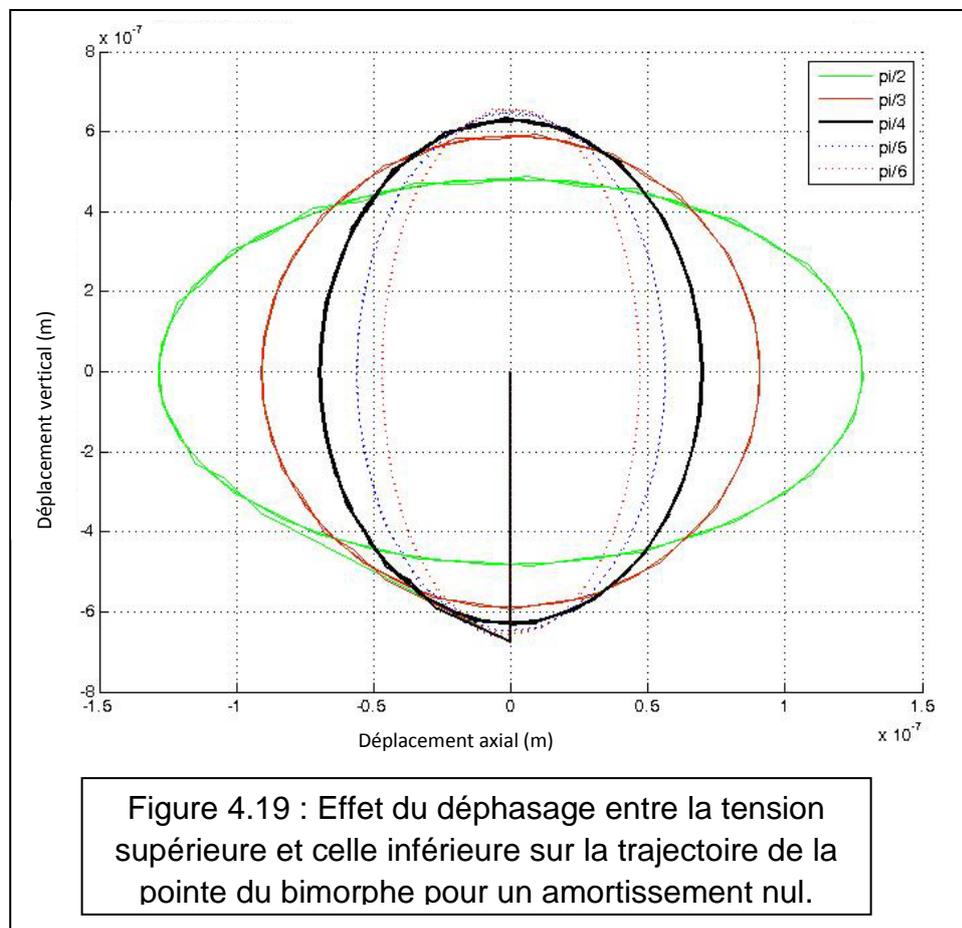
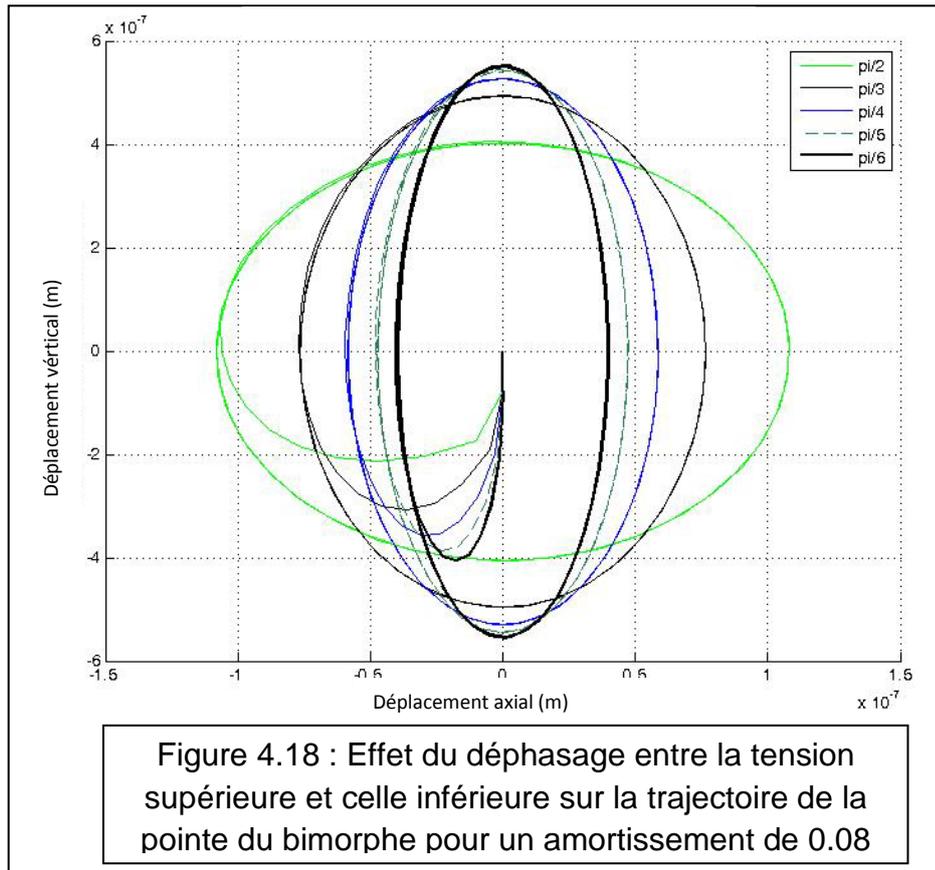


Appliquons un champ électrique sinusoïdal sur la poutre (sur la couche supérieure  $V^T = 100\cos(\omega t)$ , et sur la couche inférieure  $V^B = -100\cos(\omega t + \phi)$ ).  $\phi$  est le déphasage entre le signal de la couche supérieure et celui de la couche inférieure.

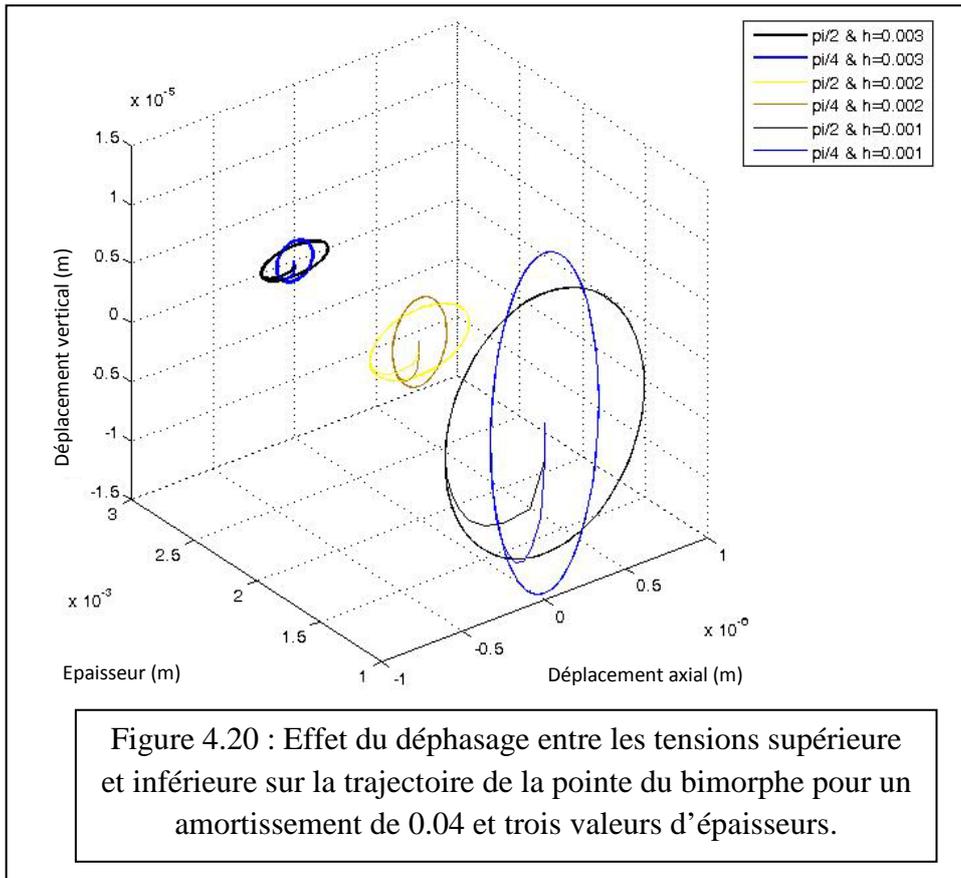
La trajectoire du bout libre en fonction de différentes valeurs du coefficient d'amortissement est représentée dans la figure (4.17):



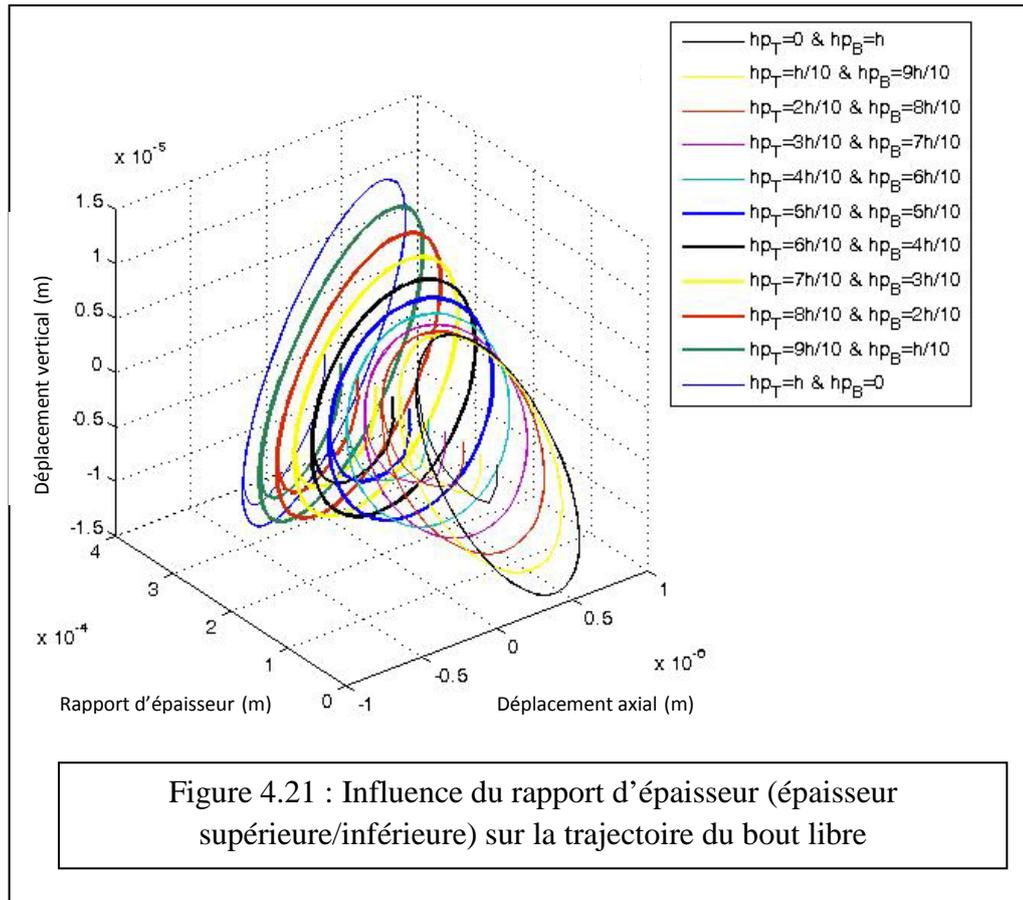
Pour deux bimorphes (*le premier amorti à 8% et le second à 0%*), on constate l'effet du déphasage entre le potentiel de la couche supérieure et celui de la couche inférieure sur la trajectoire du bout libre, (figures (4.18) et (4.19)):



L'influence de l'épaisseur de la poutre sur la trajectoire en considérant un amortissement égal à 4% est illustrée par la Figure (4.20) :



Pour la même épaisseur totale  $h$  du bimorphe, on considère différents rapports d'épaisseurs entre les couches supérieure et inférieure (figure 4.21). Pour les cas étudiés, on choisit :  $h = \frac{L}{100}$  et  $b = \frac{2L}{100}$  avec  $L=0.03m$  on obtient les résultats donnés en figure (4.21).



Des résultats obtenus on peut tirer les remarques suivantes :

- L'amortissement structural donne un effet stabilisant à la structure.
- L'amortissement n'influe pas sur la valeur de la réponse du bimorphe en question, mais il influe sur le temps de réponse et sur sa forme.
- Le déphasage de la tension entre la couche supérieure et inférieure affecte considérablement la trajectoire du bout libre, on peut obtenir des formes régulières de la trajectoire en jouant sur le déphasage.
- On obtient une meilleure actuation en diminuant, dans la mesure du possible, l'épaisseur du bimorphe.
- La trajectoire diminue avec l'augmentation de l'amortissement structural, ce qui induit une perte dans l'actuation.
- Le rapport d'épaisseur (épaisseur de la couche supérieure/épaisseur de la couche inférieure) donne une allure symétrique à la trajectoire, et cela autour de la valeur moyenne, qui correspond à la moitié de l'épaisseur totale de la poutre.

4.4. Etude d'un bimorphe présentant une zone de décollement :

4.4.1. Le cas statique :

4.4.1.1. Confrontation des résultats

Prenons une poutre en PVDF formée par un empilement de deux couches qui ne sont pas parfaitement collées, avec une zone de décollement se situant entre ces deux couches, (voir Figure (3.1)). la poutre possède les mêmes caractéristiques que celle prise par Mahieddine [12,38] soit :  $L = 0.4\text{ m}$ ,  $b = 0.03\text{ m}$  et  $h_{Top} + h_{Bot} = 0.01\text{ m}$ , avec deux conditions aux limites, encastée-encastée et encastée-libre, la comparaison entre nos résultats et ceux de l'auteur sont présentées ci-après, toutefois, notons que la différence entre les deux modèles est due au fait que dans notre modèle on a considéré l'effet de cisaillement.

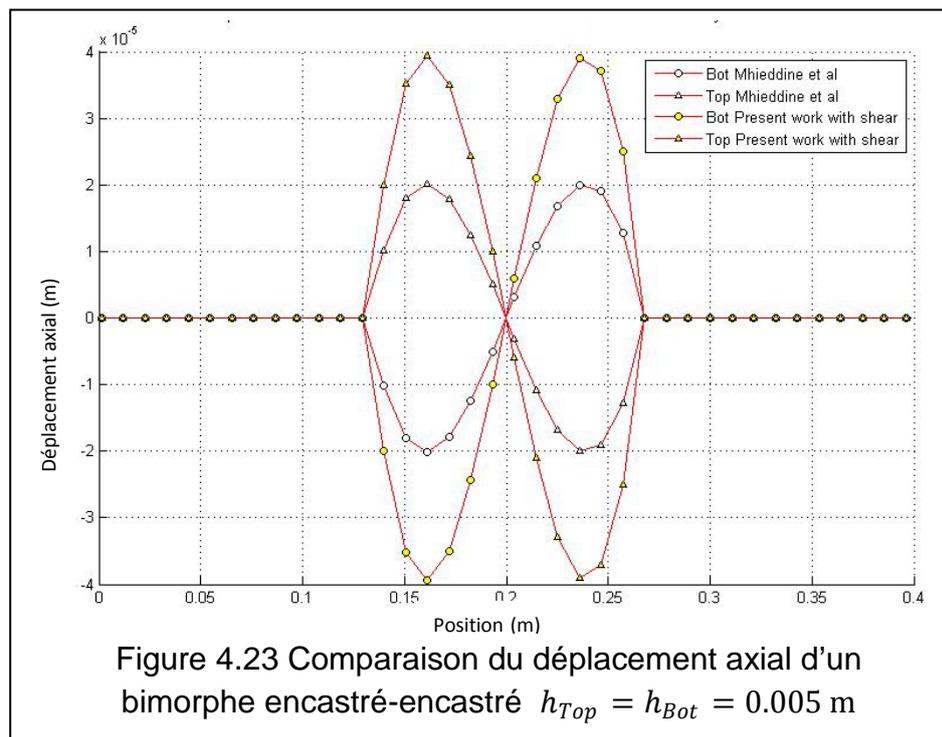
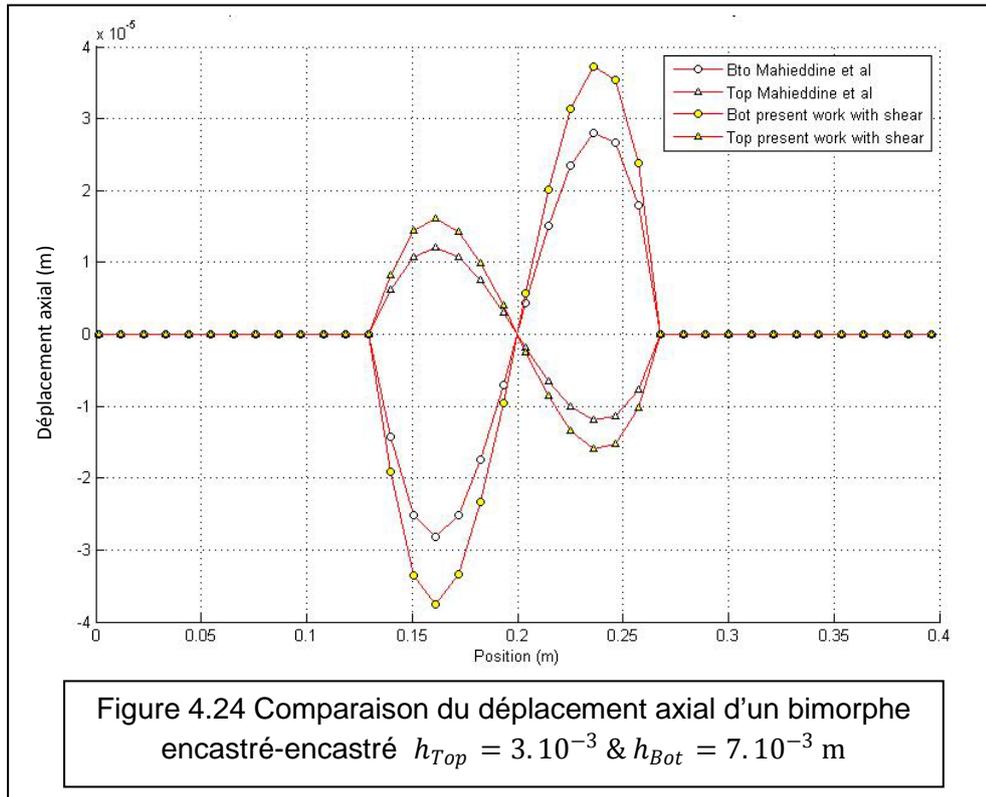
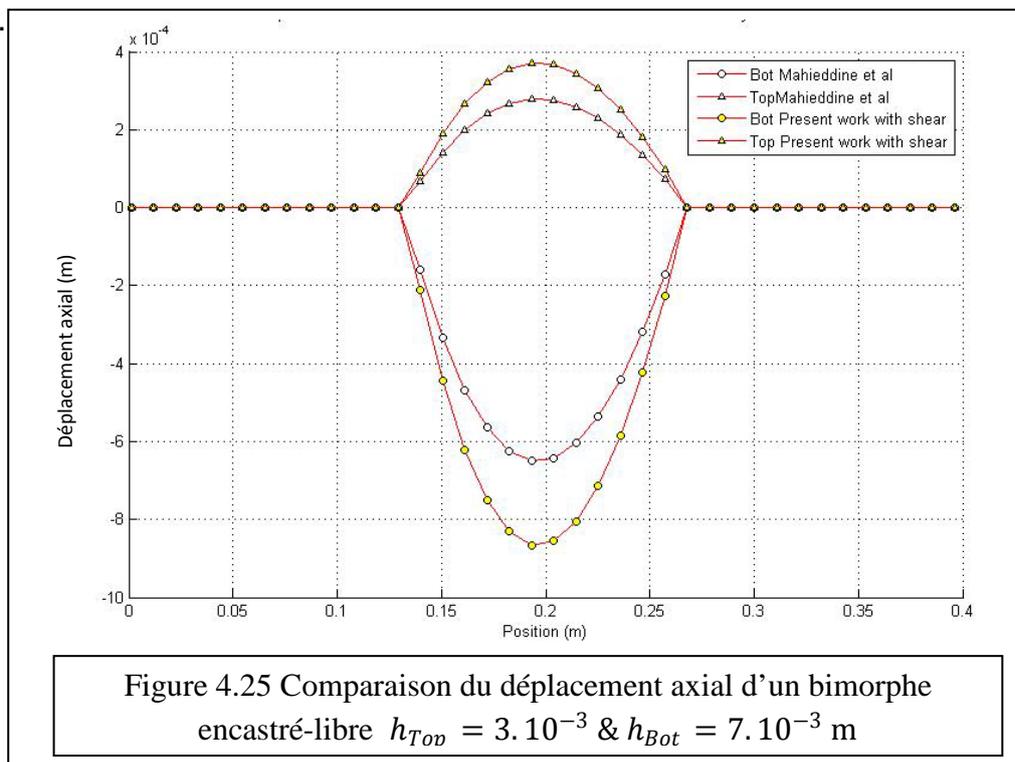
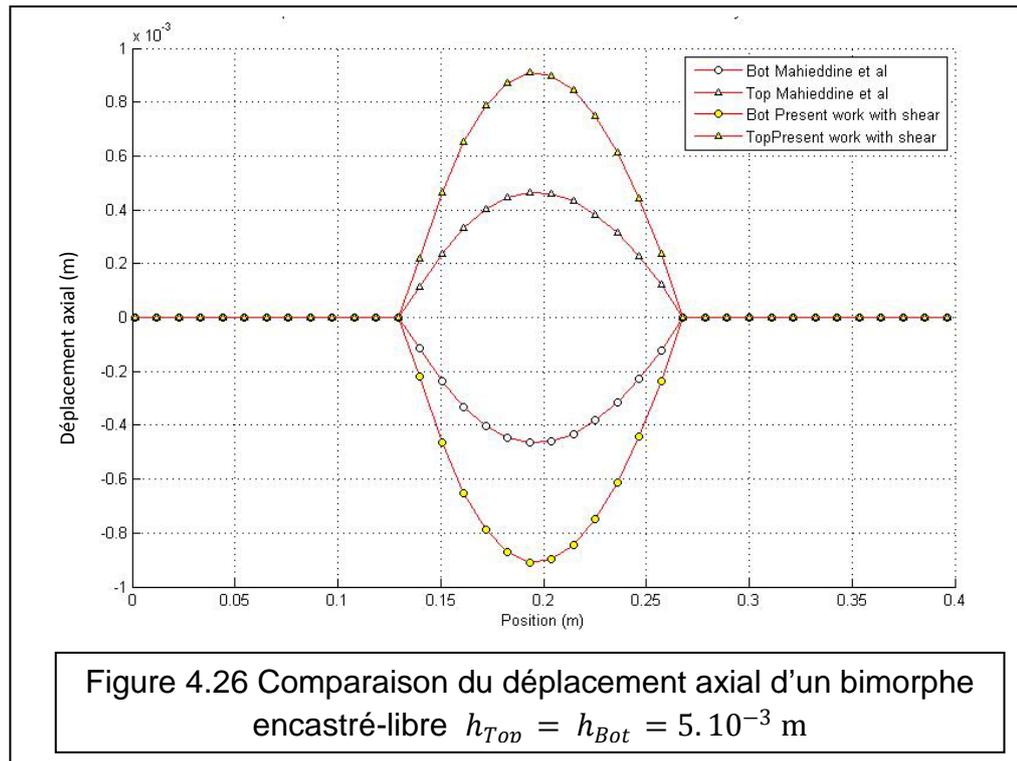


Figure 4.23 Comparaison du déplacement axial d'un bimorphe encasté-encasté  $h_{Top} = h_{Bot} = 0.005\text{ m}$



Les deux Figures (4.23) et (4.24) représentent les déplacements axiaux de poutres ayants la même épaisseur totale, tandis que les épaisseurs des couches inférieure et supérieure changent. Les valeurs present sont respectivement  $h_{Top} = h_{Bot} = 50\%$  de  $h$  et  $h_{Top} = 30\%$  de  $h$  et  $h_{Bot} = 70\%$  de  $h$ . Les conditions aux limites (encastré-encastré) sont appliquées pour le cas des figures 4.23 et 4.24 [57].





Les Figures (4.25) et (4.26) représentent les déplacements axiaux des poutres ayants les mêmes caractéristiques que celles des figures (4.23) et (4.24), les poutres sont encastées-libres [57].

D'après ce qu'on vient de présenter comme comparaison, on voit que l'effet du cisaillement est prépondérant et distinctif, car entre les deux modèles, les champs des déplacements axiaux gardent les mêmes allures, en acquérant de la valeur si le cisaillement est pris en compte.

#### 4.4.1.2. Etude de cas

Dans ce qui suit, on étudie le même bimorphe en prenant en considération quelques nouveaux paramètres, à savoir, la longueur du décollement ainsi que sa position, le changement de la température ambiante, les conditions aux limites le changement des épaisseurs (en gardant toujours la même épaisseur totale de la poutre) et la nature du chargement appliqué [56,57].

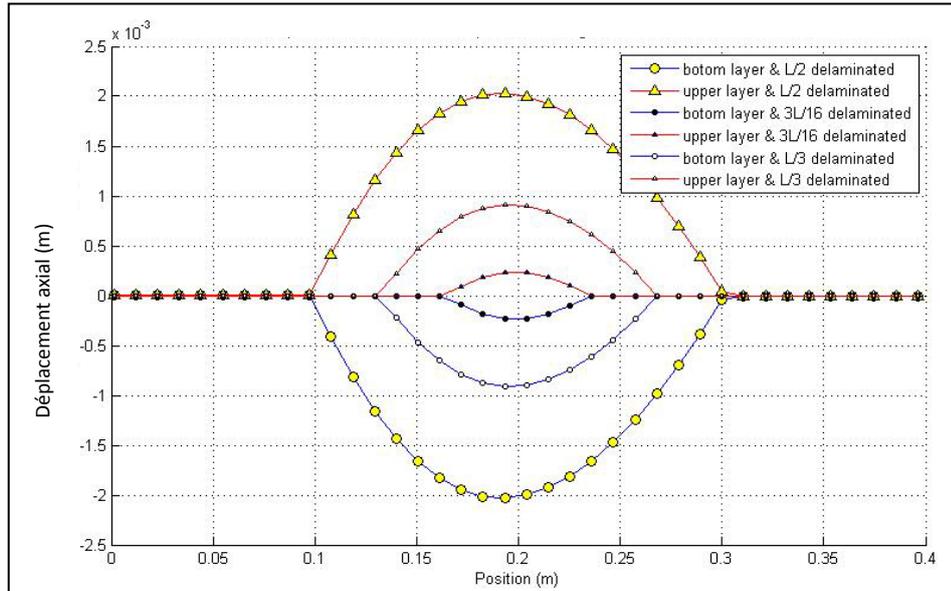


Figure 4.27 Déplacement axial de poutres encastées-libres avec trois longueurs de décollement et  $h_{Top} = h_{Bot} = 5 \cdot 10^{-3}$  m

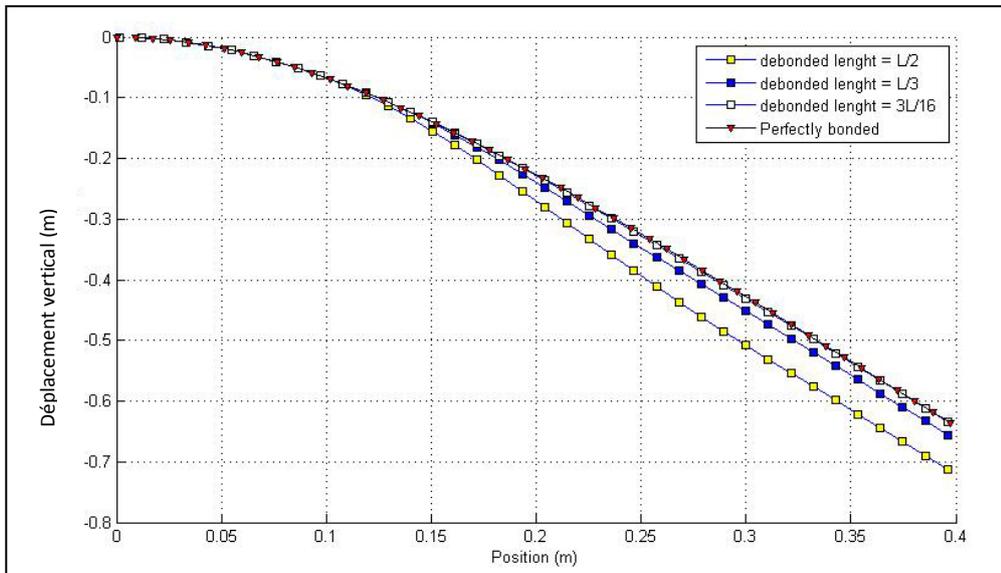
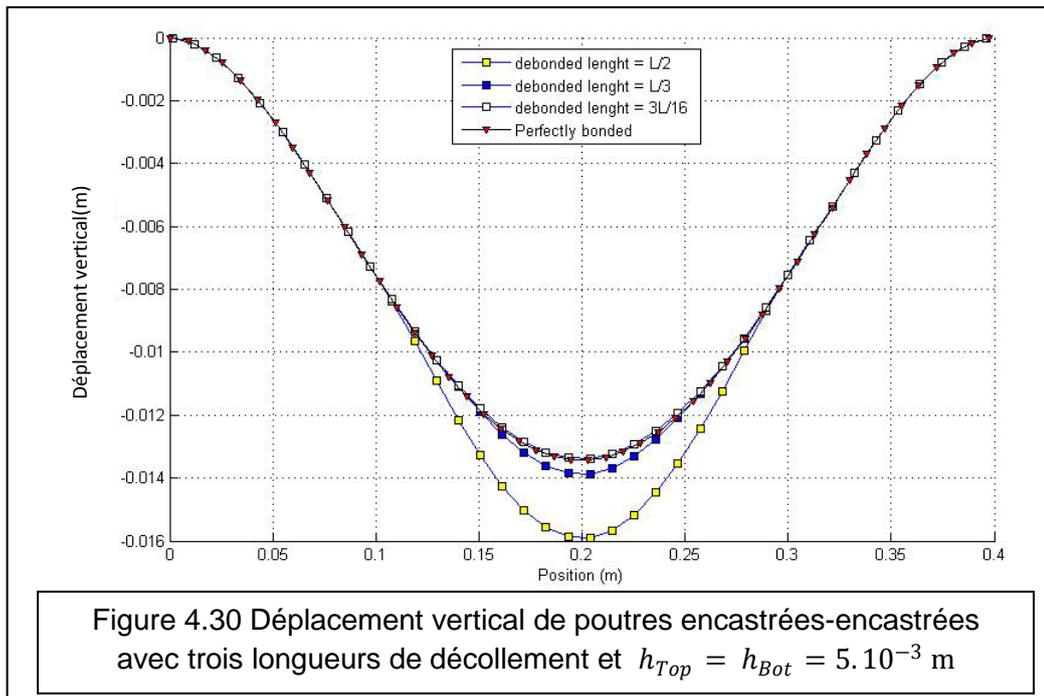
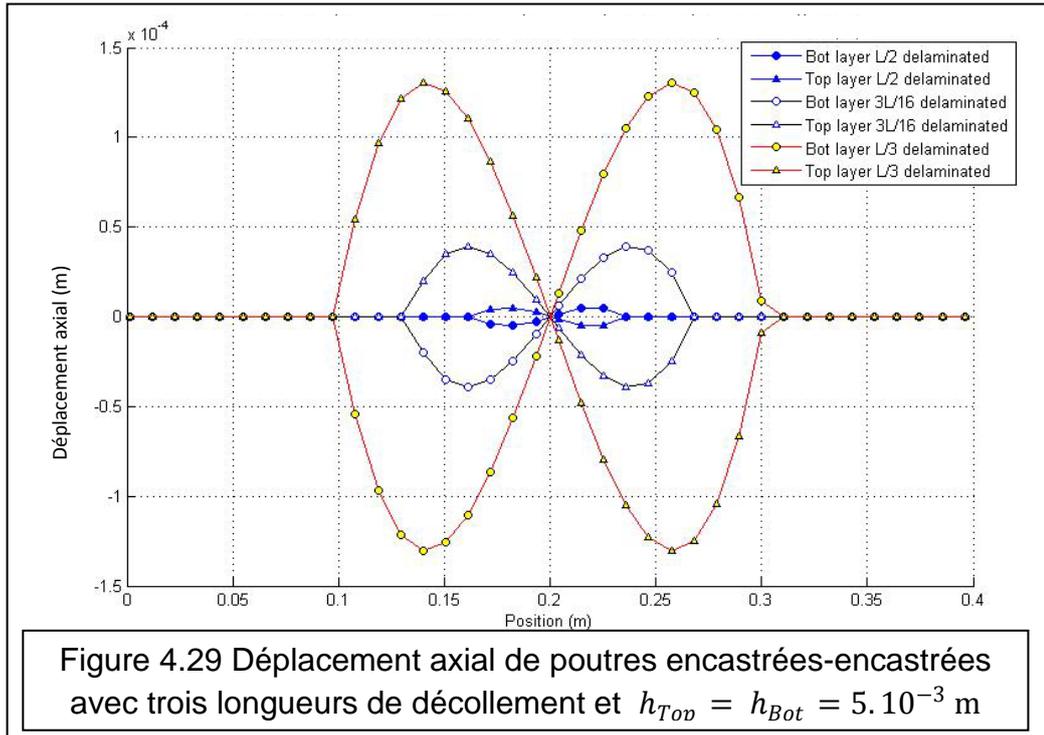


Figure 4.28 Déplacement vertical de poutres encastées-libres avec trois longueurs de décollement et  $h_{Top} = h_{Bot} = 5 \cdot 10^{-3}$  m



Les Figures (4.27-30) représentent des poutres soumises à un chargement uniformément réparti de valeur de  $1000 \text{ N.m}^{-2}$ . La longueur du décollement influe considérablement sur les champs de déplacements, en terme de déplacement axial on remarque que l'allure de ce dernier ne subie aucune influence tandis que sa valeur maximale augmente avec l'augmentation de la longueur du décollement.

Il en est de même pour le déplacement vertical, donc la poutre résiste moins au chargement.

Maintenant, considérons un changement de la température ambiante. Pour une augmentation de  $10^{\circ}\text{C}$  et une application du chargement de  $1000 \text{ N.m}^{-2}$ , on obtient les graphes suivants.

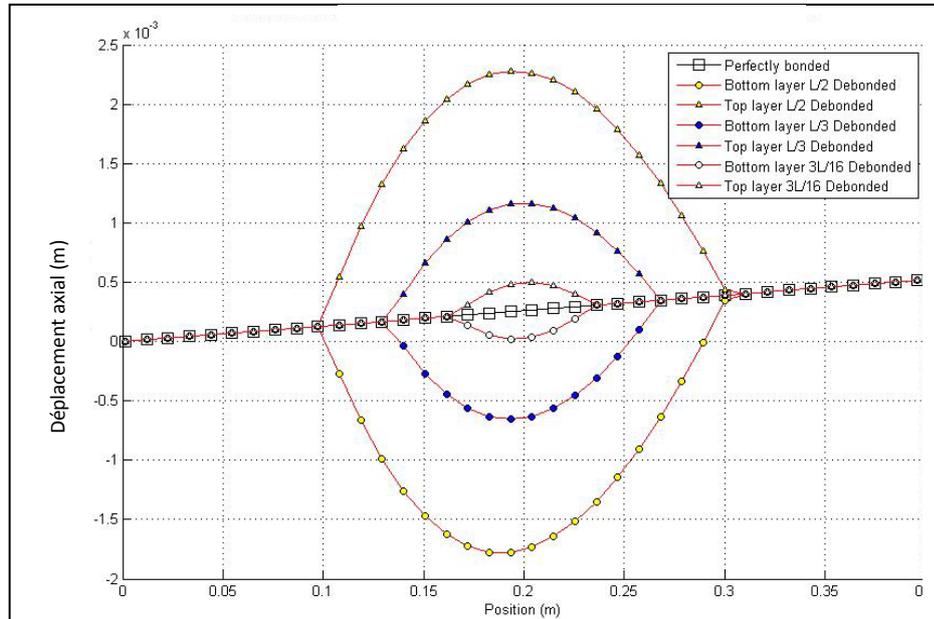


Figure 4.31 Déplacement axial de poutres encastées-libres avec trois longueurs de décollement et  $h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3} \text{ m}$ , une augmentation de température de  $10^{\circ}\text{C}$  et  $1000 \text{ N.m}^{-2}$

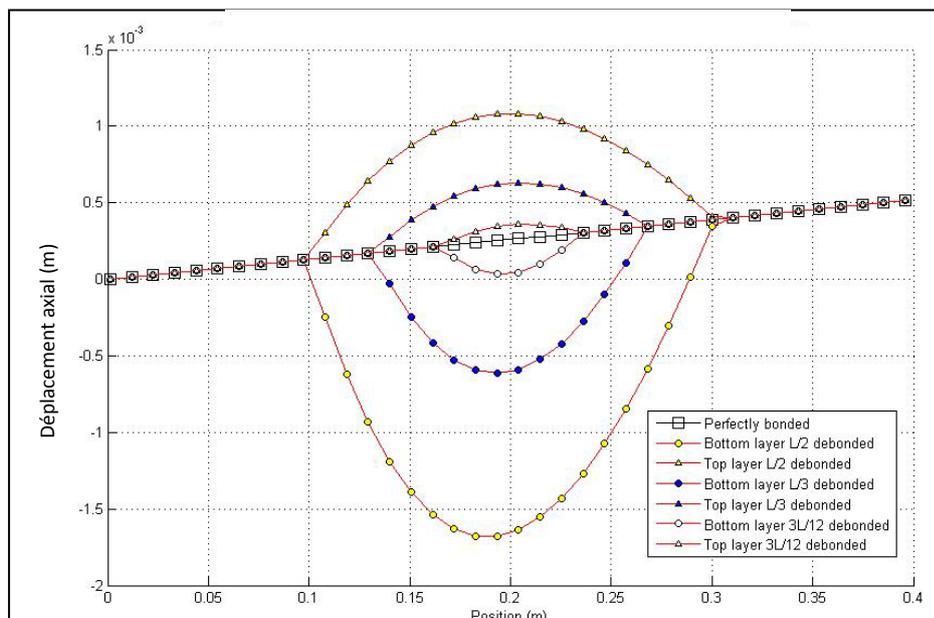
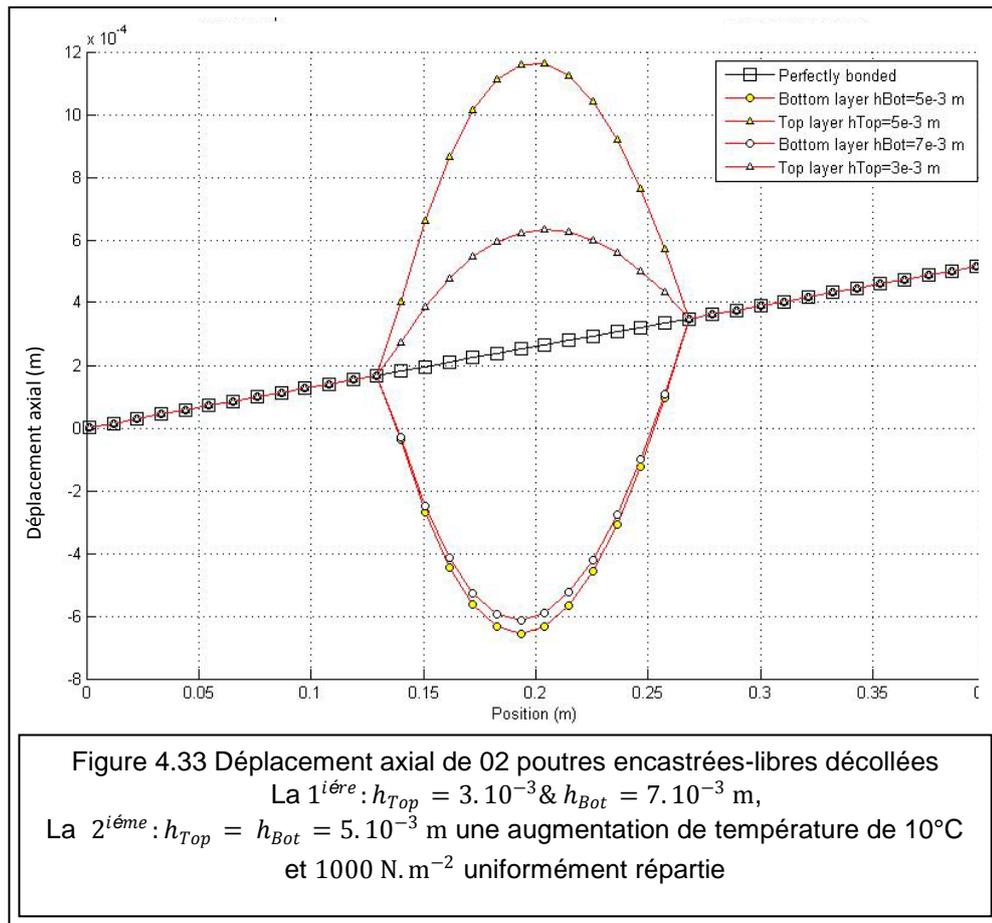


Figure 4.32 Déplacement axial de poutres encastées-libres avec trois longueurs de décollement et  $h_{Top} = 3.10^{-3} \text{ m}$  &  $h_{Bot} = 7.10^{-3} \text{ m}$ , une augmentation de température de  $10^{\circ}\text{C}$  et  $1000 \text{ N.m}^{-2}$



Les Figures (4.31-33) montrent l'effet du changement de la température ambiante sur les poutres en considérant deux formes de répartition d'épaisseurs. Le déplacement axial total de la poutre n'est pas affecté par la température. Néanmoins, on aperçoit clairement l'influence de l'épaisseur sur les champs de déplacement localisés dans la zone décollée. L'augmentation de l'épaisseur produit une augmentation des champs axiaux qui se créent au niveau du décollement.

Désormais, étudions l'effet du positionnement de la zone décollée sur le comportement statique de la poutre. Pour cela, on considère trois éventuelles positions du décollement dans des poutres ayant respectivement les mêmes et de différentes épaisseurs de couches. L'épaisseur totale de la poutre reste inchangée en considérant des poutres consoles et encastées-encastées.

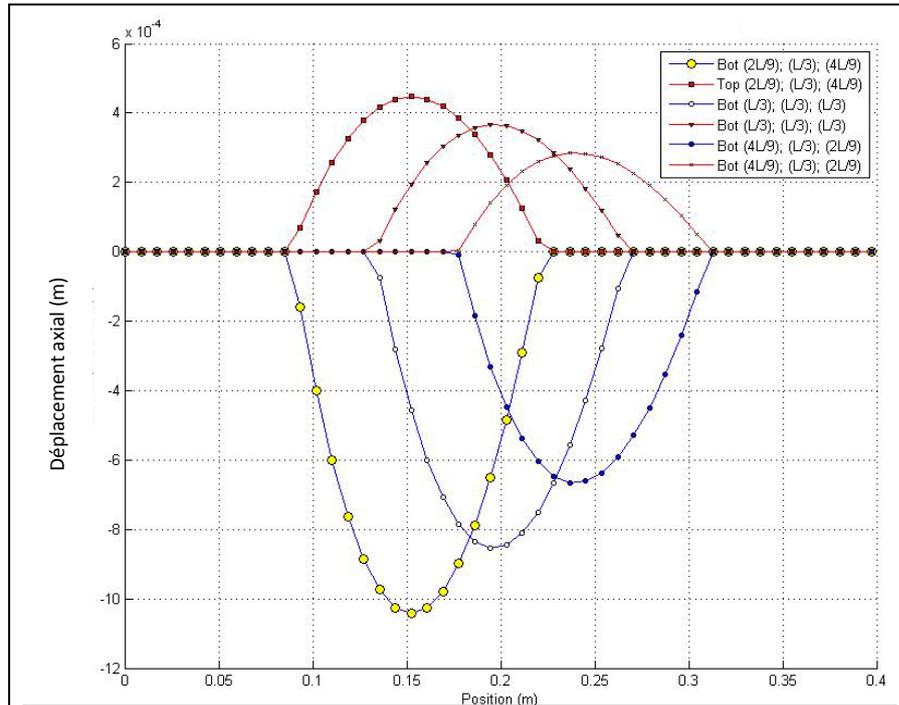


Figure 4.34 Déplacement axial de poutres encastées-libres avec 03 positions du décollement  $h_{Top} = 3.10^{-3}$  &  $h_{Bot} = 7.10^{-3}$  m.

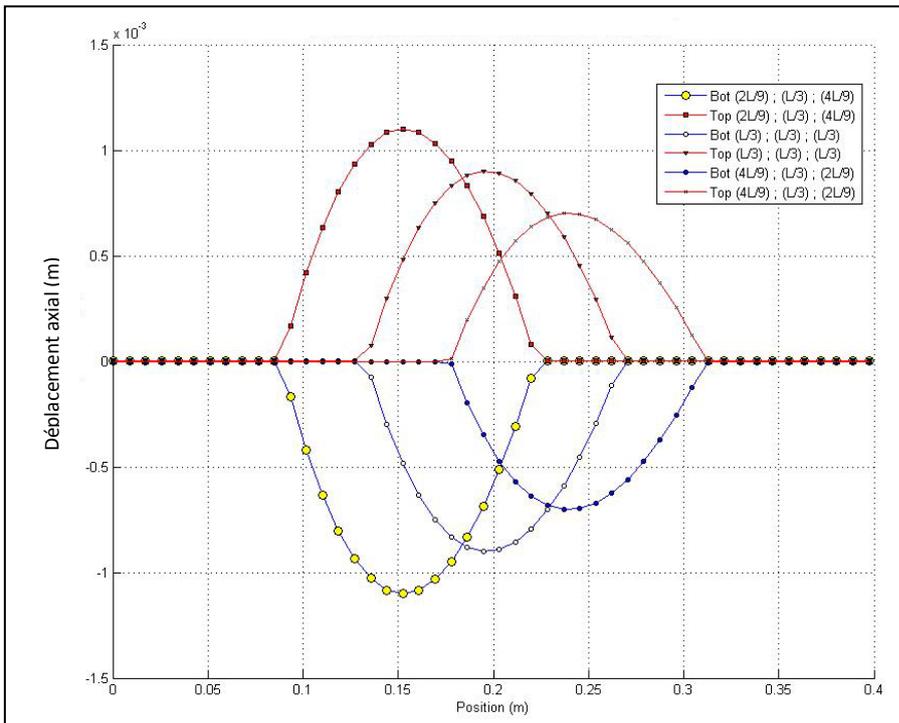
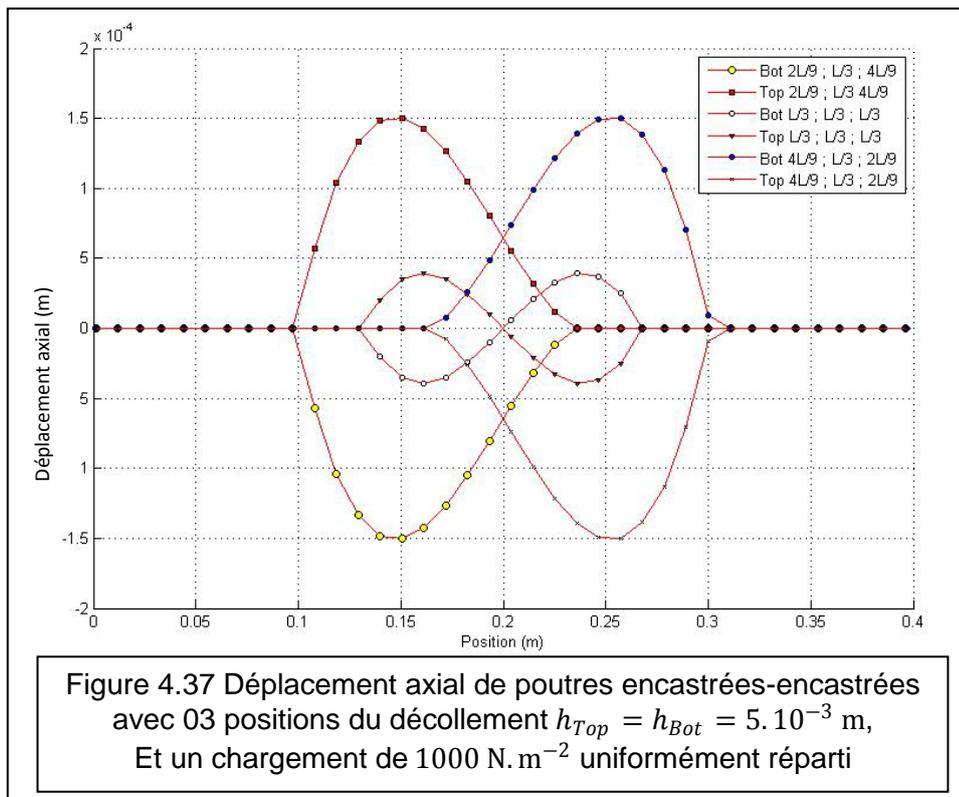
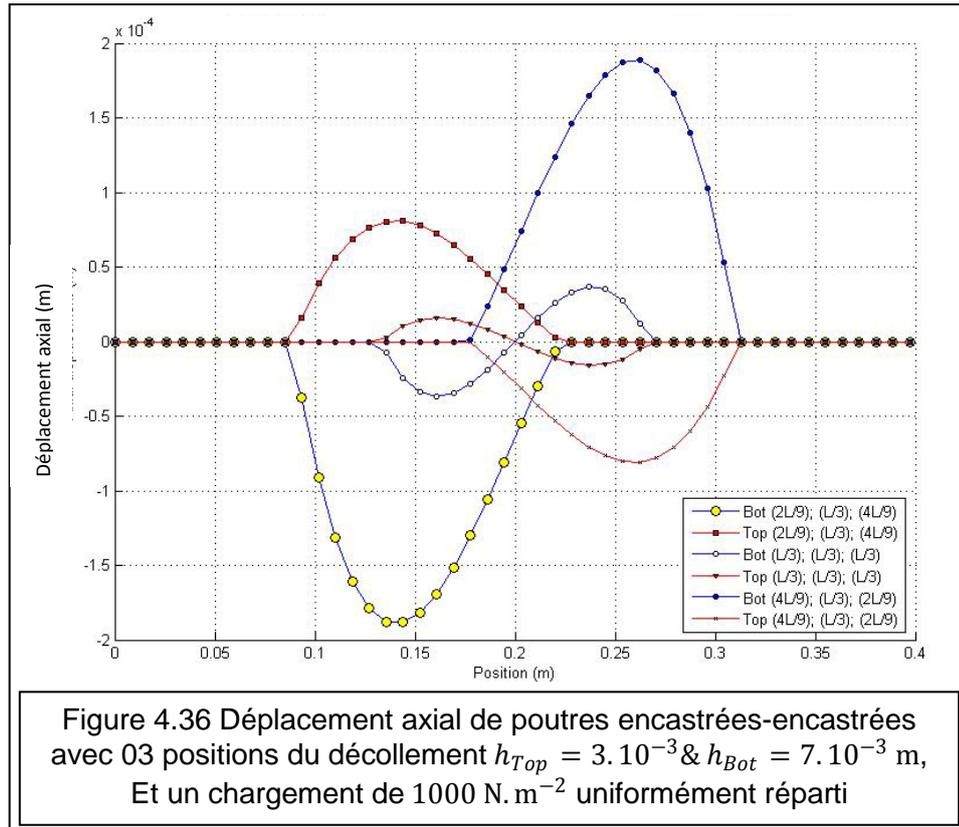


Figure 4.35 Déplacement axial de poutres encastées-libres avec 03 positions du décollement  $h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3}$  m, Et un chargement de  $1000 \text{ N.m}^{-2}$  uniformément réparti

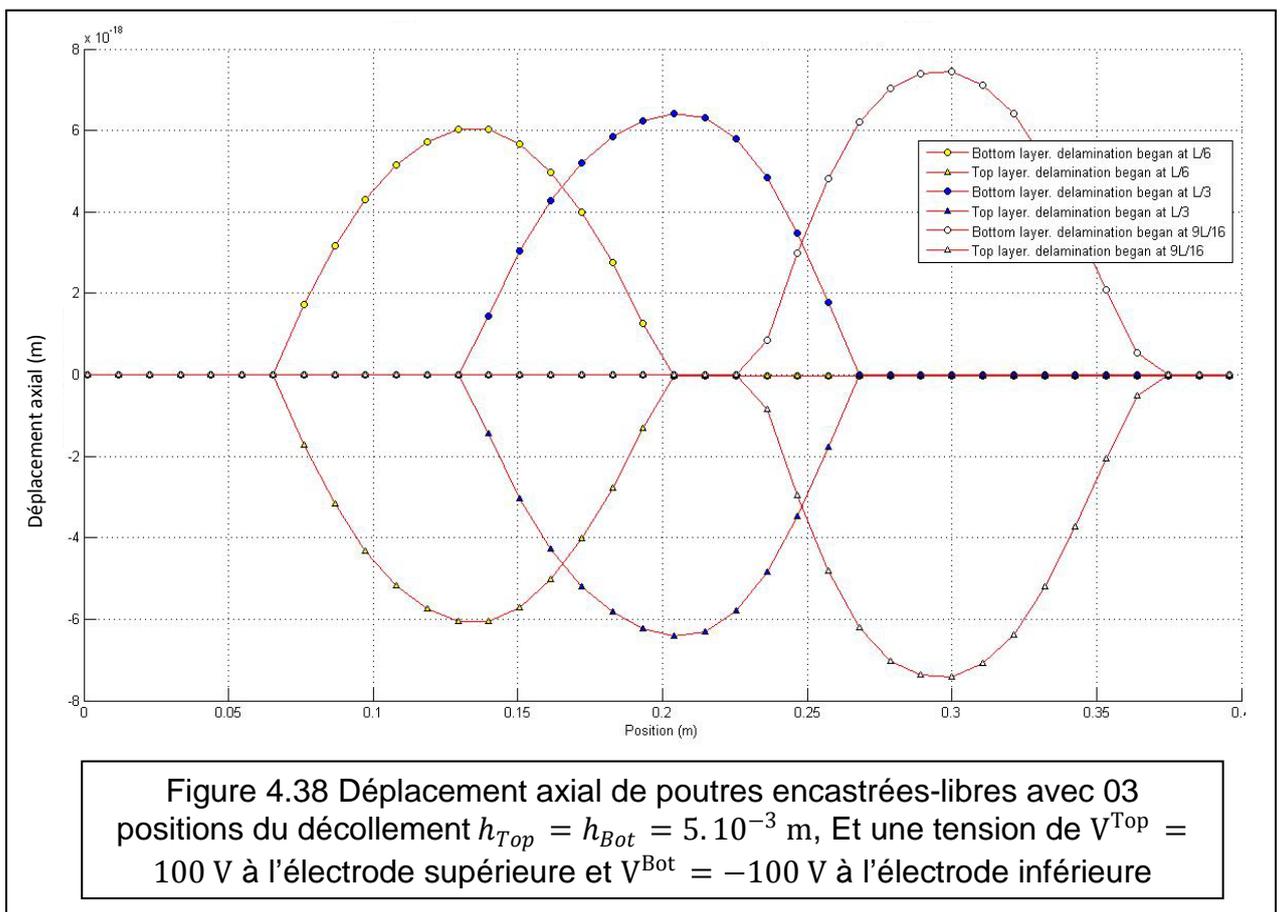


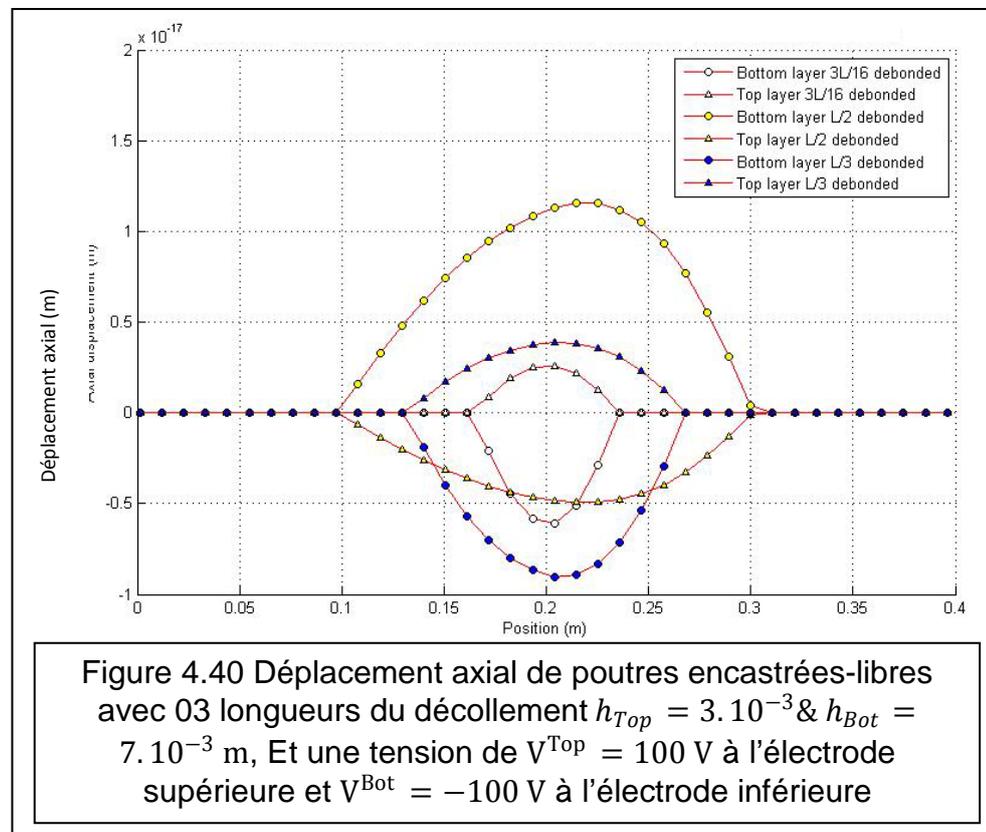
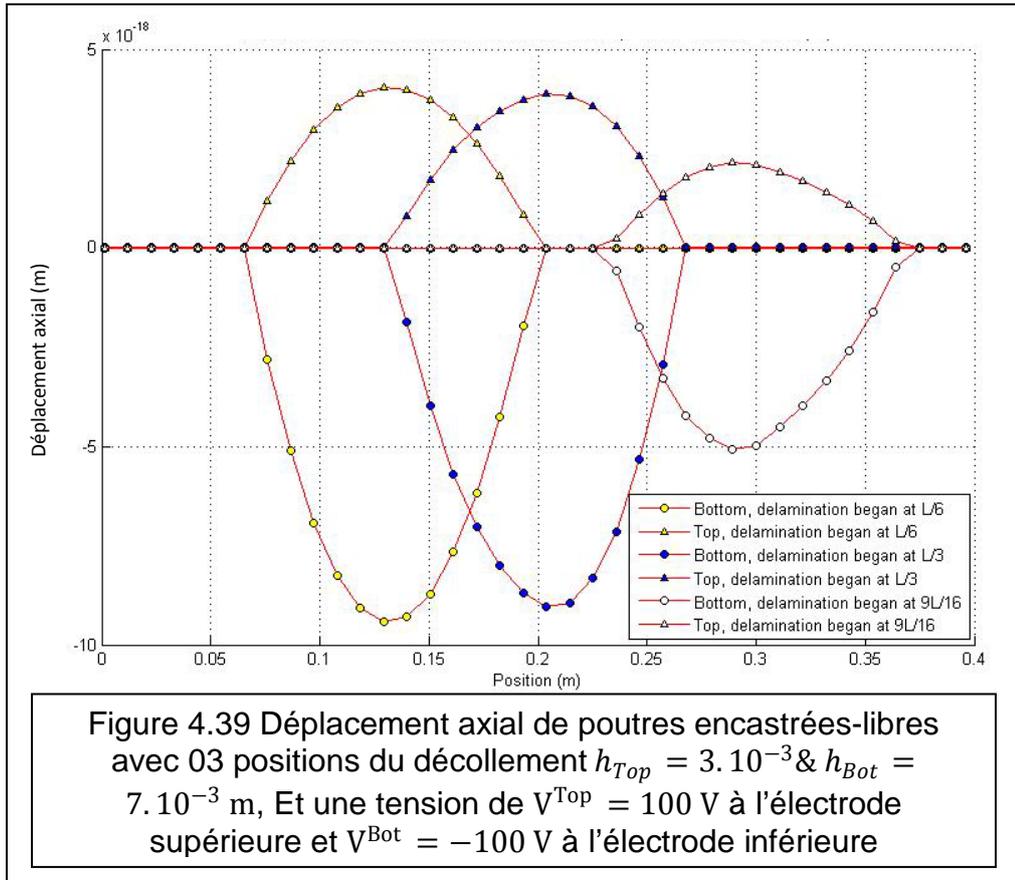
En observant les graphes présentés en figures (4.34-37) on aperçoit l'effet de l'encastrement sur le champ de déplacement axial qui se crée au niveau du

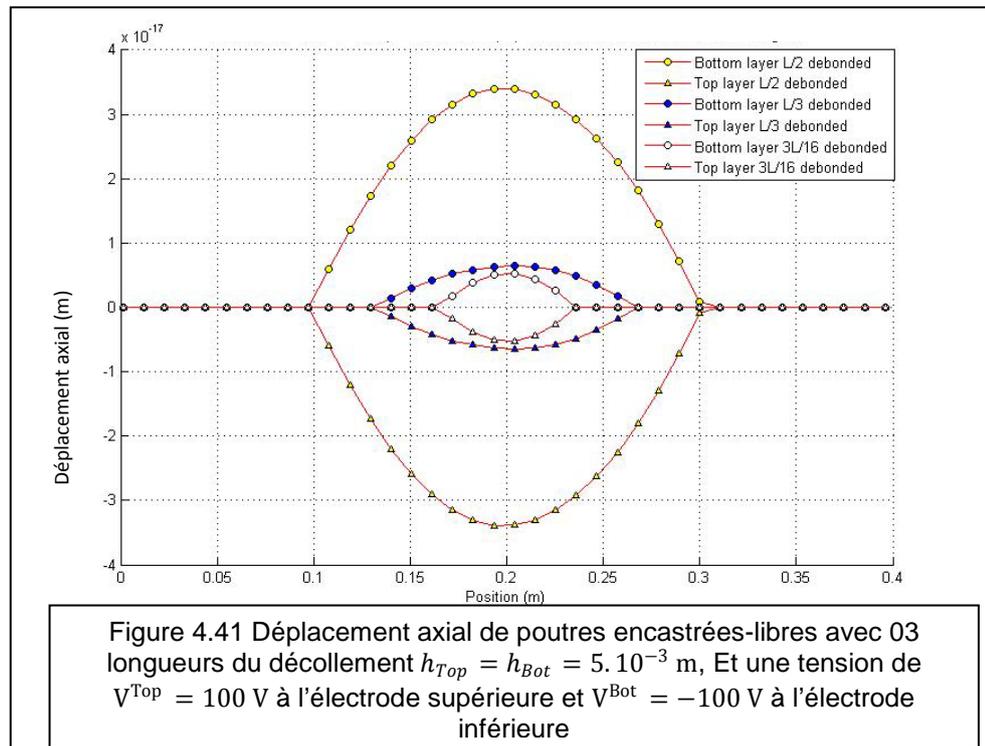
décollement, ce champ s'accroît d'avantage si le décollement se situe près du point d'encastrement.

De même, l'épaisseur des couches influe considérablement sur ce champ, car il s'accroît avec leurs accroissements.

A présent, on applique une tension électrique entre les électrodes du bimorphe d'une valeur de  $V^{Top} = 100 \text{ V}$ , à l'électrode supérieure et  $V^{Bot} = -100 \text{ V}$  à l'électrode inférieure, sur des poutres en portes à faux ayant les épaisseurs respectives suivantes  $h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3} \text{ m}$ , et  $h_{Top} = 3.10^{-3} \& h_{Bot} = 7.10^{-3} \text{ m}$  et des décollements de longueurs et de positions différentes.

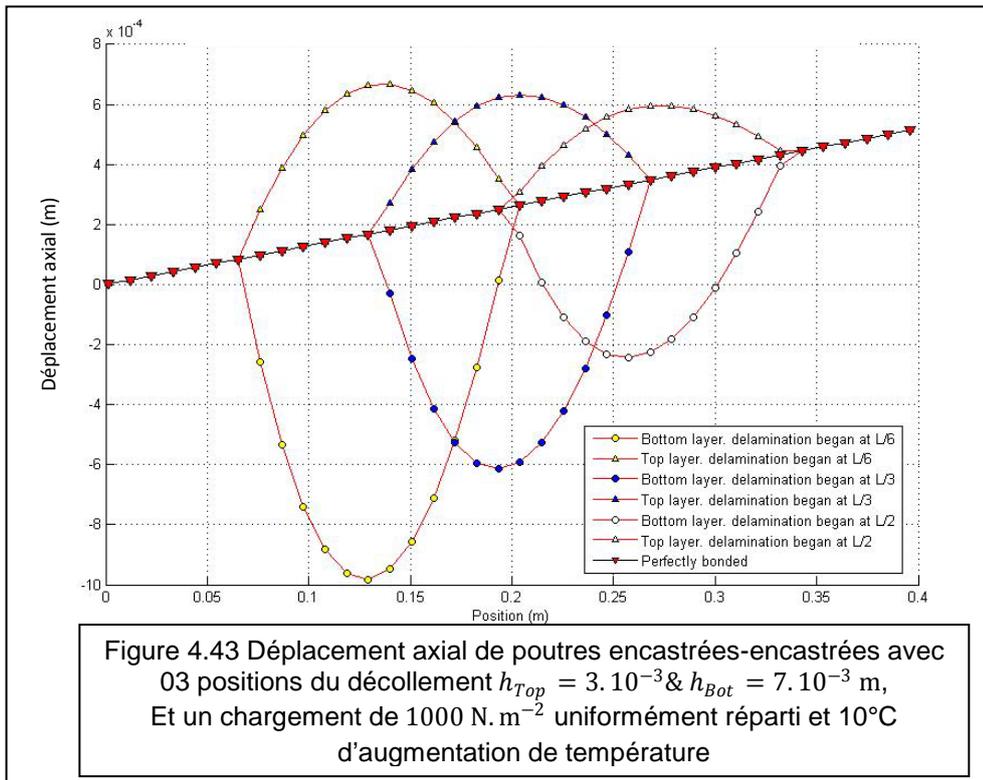
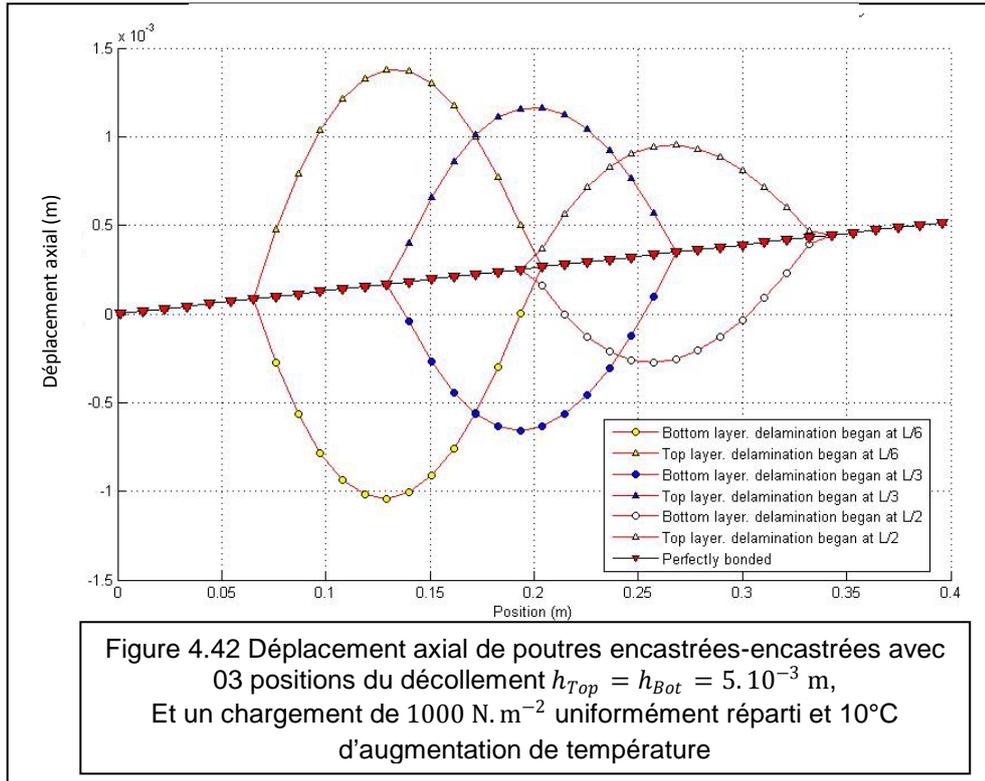






Les Figures (4.38-41) représentent les champs de déplacement axiaux induits par l'application d'un potentiel électrique sur des poutres en consoles. On remarque la même propriété observée lors de l'application d'un chargement mécanique concernant la position du décollement, aussi la symétrie présente sur la Figure (4.41), et absente sur la Figure (4.40), prouve que la contribution de chaque couche est la même lorsqu'il s'agit de réponse suite à un chargement électrique.

Afin d'observer l'effet de l'augmentation de la température ambiante sur le positionnement du décollement, on admet deux cas de figures, le premier cas, lorsque les épaisseurs des couches sont identiques, le second, lorsque elles sont différentes. L'épaisseur totale de la poutre reste inchangée. L'application d'une charge uniformément répartie sur la totalité de la longueur de la poutre permet d'obtenir les résultats suivants.



Il est bien claire que l'augmentation de la température n'influe pas sur le comportement des poutres décollées, mais toujours faut-il noter que, la position du décollement par rapport au point de fixation affecte le champ de déplacement généré au niveau de la zone décollée.

4.4.2. Le cas dynamique :

4.4.2.1. Confrontation des résultats

On présentera deux tableaux de comparaison. Le premier Tableau (4.5) affiche les fréquences obtenues par le présent modèle et ceux de la littérature, pour des poutres parfaitement collées. Le second Tableau (4.6) affiche des fréquences de poutres décollées. Les écarts entre les résultats remarquables pour les hautes fréquences sont dus au fait que le modèle présenté par Perel et al [63] ne tient pas compte du cisaillement tandis que notre modèle le prend en considération [58].

	Fréquences Hz	Analytique Perel [63]	Présent travail	écart		Analytique Perel [63]	Présent travail	écart
$h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3} \text{ m}$	1 <sup>ière</sup> Fréq	10.641	10.641	0.00%	$h_{Top} = 3.10^{-3} \& h_{Bot} = 7.10^{-3} \text{ m}$	10.641	10.668	-0.25%
	2 <sup>ème</sup> Fréq	66.749	66.639	0.16%		66.749	66.657	0.14%
	3 <sup>ème</sup> Fréq	186.711	186.380	0.18%		186.711	185.767	0.51%
	4 <sup>ème</sup> Fréq	365.914	364.629	0.35%		365.914	361.581	1.18%
	5 <sup>ème</sup> Fréq	604.927	601.474	0.57%		604.927	592.609	2.04%
	6 <sup>ème</sup> Fréq	903.702	658.809	27.10%		903.702	658.809	27.10%
	7 <sup>ème</sup> Fréq	1262.117	896.158	29.00%		1262.117	876.174	30.58%
	8 <sup>ème</sup> Fréq	1680.400	1247.811	25.74%		1680.400	1209.281	28.04%

Tableau 4.5 Comparaison entre le présent travail et celui de Perel *et al* [63]: les 8 premières fréquences de deux poutres, respectivement avec deux couches identiques et deux couches différentes.

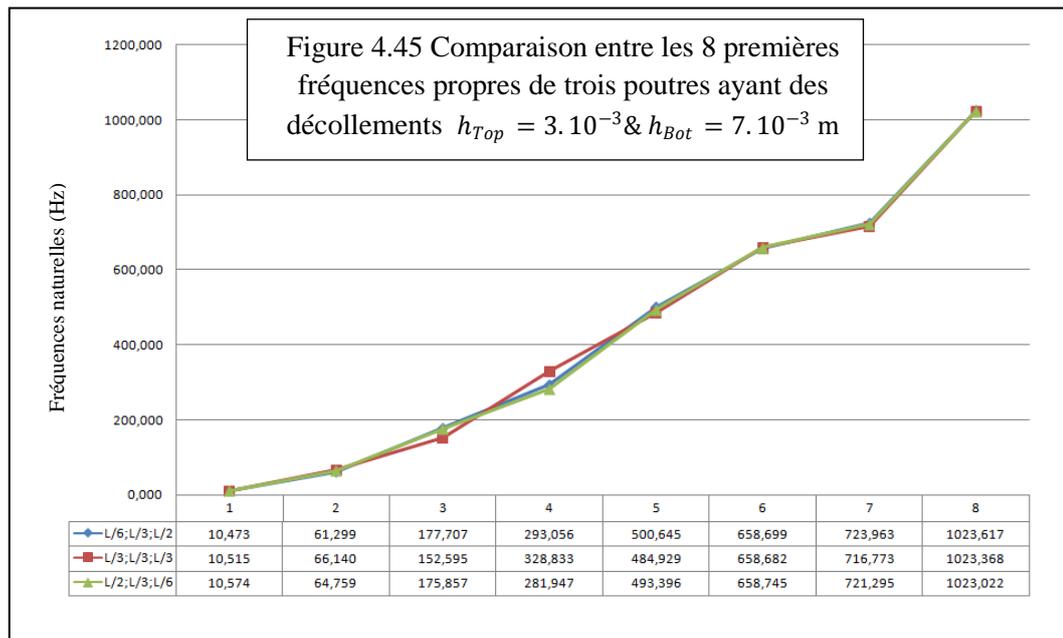
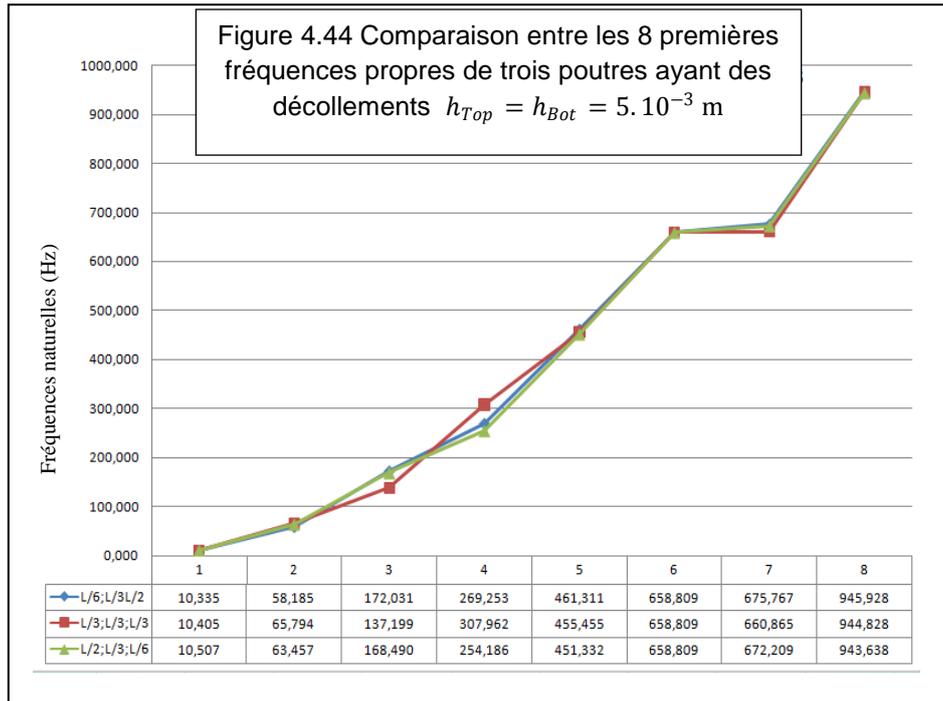
Dans le Tableau (4.6) les zones de décollement ont soit des longueurs différentes soit des positions différentes les unes des autres. On peut observer que les fréquences naturelles diminuent si la poutre présente un décollement. Les fréquences naturelles sont égales si la position du décollement est symétrique par rapport au centre de la poutre.

	Fréquences (Hz)	Longueurs des bimorphes (Zone collée ; Zone décollée ; Zone collée)						
		L/6;L/3;L/2	L/3;L/3;L/3	L/2;L/3;L/6	L/4;L/2;L/4	L/3;L/3;L/3	5L/12;L/6;5L/12	5L/6;L/12;5L/6
$h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3} \text{ m}$	1 <sup>ère</sup> Fréq	10.335	10.405	10.507	9.879	10.405	10.631	10.659
	2 <sup>ème</sup> Fréq	58.185	65.794	63.457	62.229	65.794	66.600	66.624
	3 <sup>ème</sup> Fréq	172.031	137.199	168.490	116.868	137.199	173.317	184.128
	4 <sup>ème</sup> Fréq	269.253	307.962	254.186	241.801	307.962	358.560	361.341
	5 <sup>ème</sup> Fréq	461.311	455.455	451.332	419.408	455.455	505.061	576.929
	6 <sup>ème</sup> Fréq	658.809	658.809	658.809	636.862	658.809	658.809	658.808
	7 <sup>ème</sup> Fréq	675.767	660.865	672.209	658.809	660.865	836.792	874.605
	8 <sup>ème</sup> Fréq	945.928	944.828	943.638	819.045	944.828	1017.649	1147.988
$h_{Top} = 3.10^{-3} \& h_{Bot} = 7.10^{-3} \text{ m}$	1 <sup>ère</sup> Fréq	10.473	10.515	10.574	10.195	10.515	10.646	10.660
	2 <sup>ème</sup> Fréq	61.299	66.140	64.759	64.010	66.140	66.598	66.599
	3 <sup>ème</sup> Fréq	177.707	152.595	175.857	133.599	152.595	178.292	184.620
	4 <sup>ème</sup> Fréq	293.056	328.833	281.947	274.799	328.833	359.243	360.737
	5 <sup>ème</sup> Fréq	500.645	484.929	493.396	467.751	484.929	535.405	581.848
	6 <sup>ème</sup> Fréq	658.699	658.682	658.745	658.377	658.682	659.020	659.131
	7 <sup>ème</sup> Fréq	723.963	716.773	721.295	696.510	716.773	851.598	872.018
	8 <sup>ème</sup> Fréq	1023.617	1023.368	1023.022	902.976	1023.368	1065.752	1168.141

Tableau 4.6 Présentation des 8 premières fréquences de deux poutres décollées, la première possède deux couches identiques, et la deuxième a deux couches d'épaisseurs différentes.

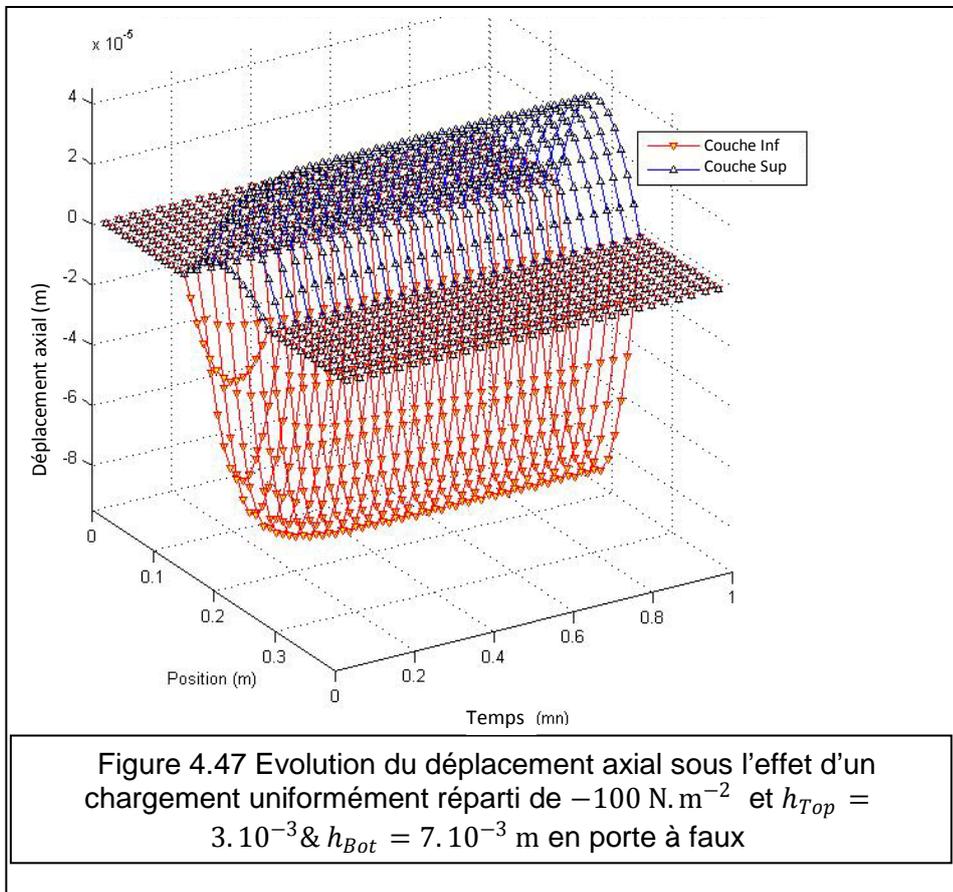
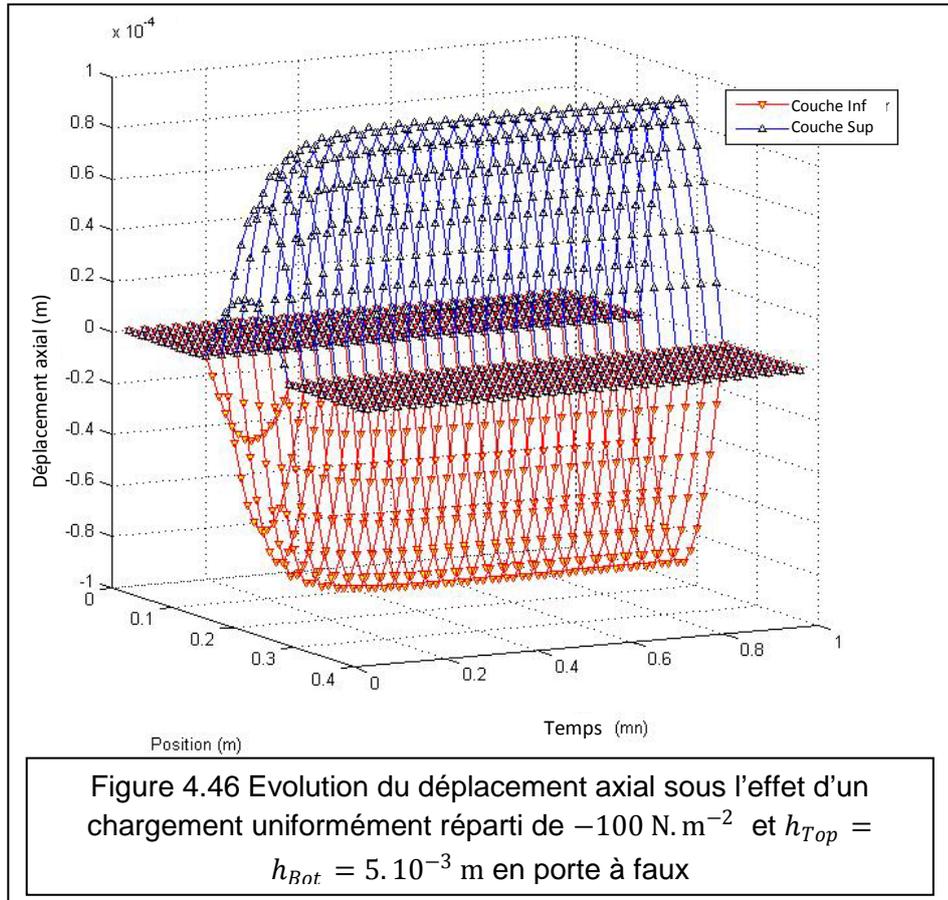
Donc comme résultat de la confrontation, on remarque que les résultats obtenus dans ce présent travail sont en bon accord avec ceux de la littérature.

Les figures (4.44) et (4.45) représentent une comparaison graphique des fréquences propres du tableau (4.5)



4.4.2.2. Etude de cas :

On considère les données de la poutre [63]. L'application d'un chargement uniformément réparti sur la longueur totale de la poutre avec la prise en compte d'un amortissement structural de 0.08 (soit 8%), et les épaisseurs  $h_{Top} = 3.10^{-3}$  et  $h_{Bot} = 7.10^{-3} m$ , donne le déplacement axial représenté par les Figures (4.46-49). Le déplacement vertical est représenté par les Figures (4.50) et (4.51).



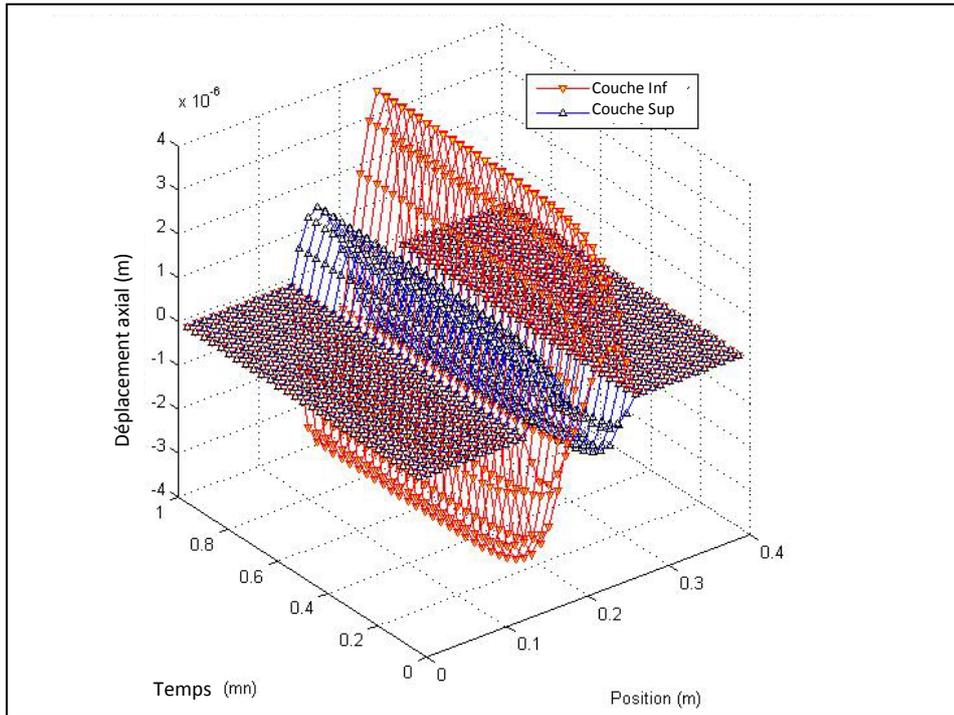


Figure 4.48 Evolution du déplacement axial sous l'effet d'un chargement uniformément réparti de  $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{Top} = 3.10^{-3}$  &  $h_{Bot} = 7.10^{-3}$  m en encasté-encasté

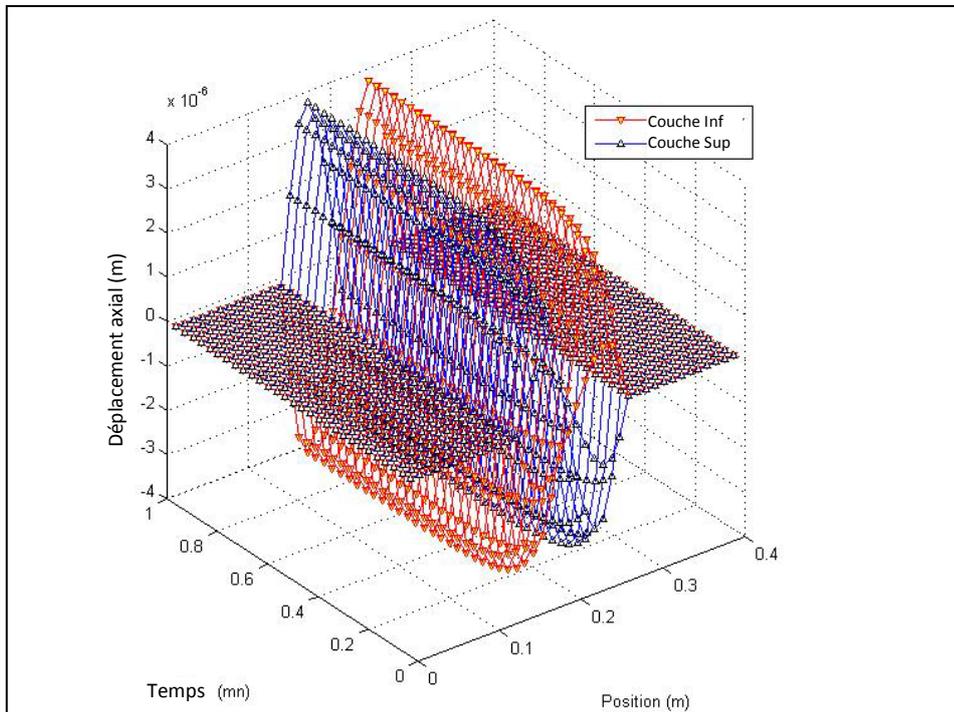


Figure 4.49 Evolution du déplacement axial sous l'effet d'un chargement uniformément réparti de  $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3}$  m en encasté-encasté

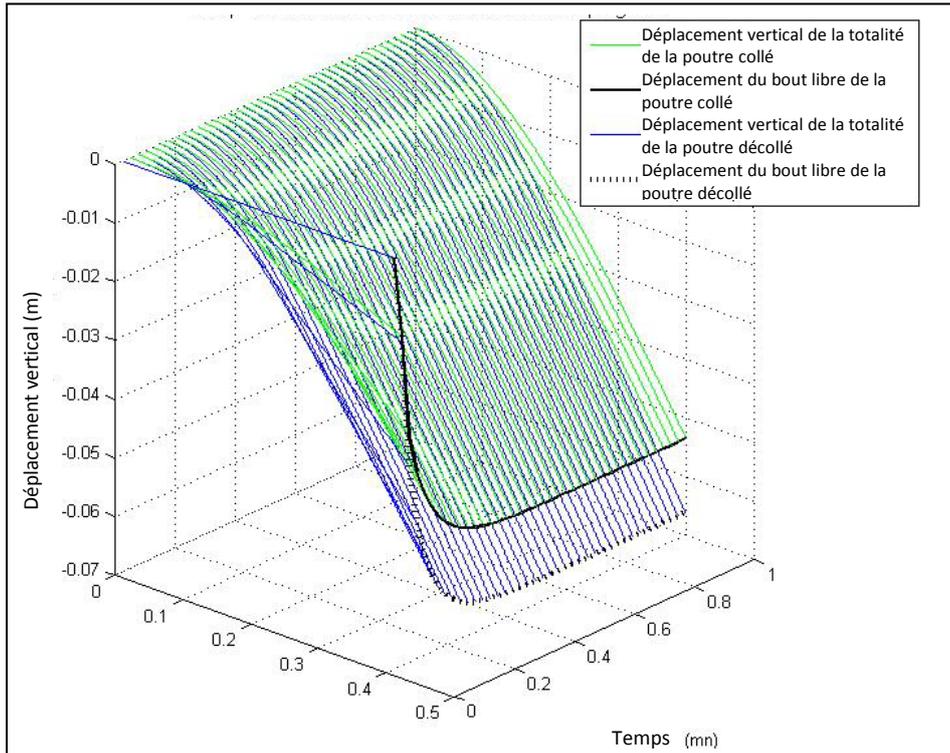


Figure 4.50 Evolution du déplacement vertical sous l'effet d'un chargement uniformément réparti de  $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{Top} = h_{Bot} = 5.10^{-3} \text{ m}$  en encastré-libre

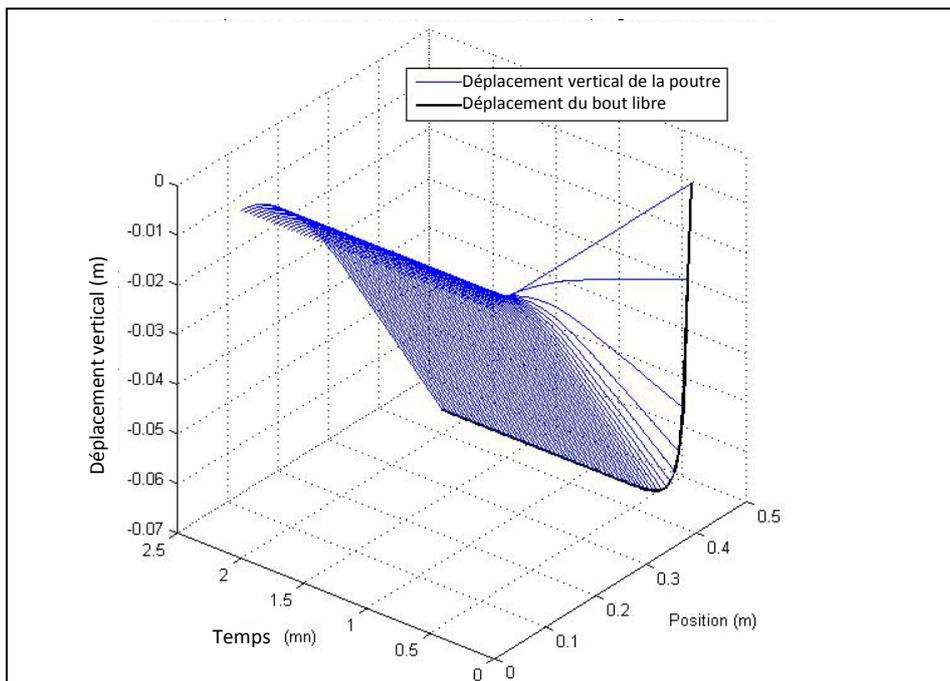


Figure 4.51 Evolution du déplacement vertical sous l'effet d'un chargement uniformément réparti de  $-100 \text{ N.m}^{-2}$  et  $h_{Top} = 3.10^{-3}$  &  $h_{Bot} = 7.10^{-3} \text{ m}$  en encastré-libre

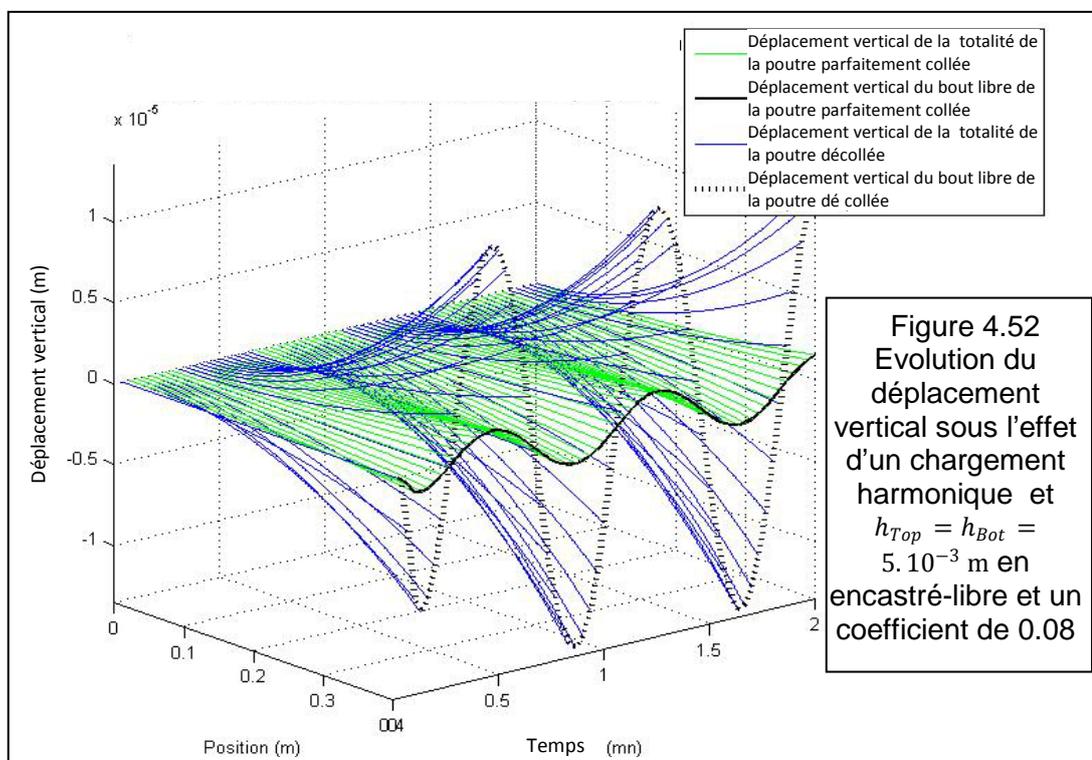
En observant les Figures (4.46-49) on remarque que les épaisseurs des couches affectent le champ de déplacement créé dans la zone décollée. Il augmente avec l'augmentation des épaisseurs. En outre, les conditions aux limites affectent aussi ce champ. Quand la poutre est en configuration encastree-encastree des valeurs positives et negatives de même magnitude apparaissent pour des poutres ayant des épaisseurs de couches identiques. Par contre, ces magnitudes changent pour des épaisseurs qui différent. Les Figures (4.50) et (4.51) représentent le déplacement vertical (qui augmente) affecté par la présence du décollement. Le changement d'épaisseur de chaque couche (l'épaisseur totale de la poutre demeurant inchangée) n'affecte pas le déplacement vertical.

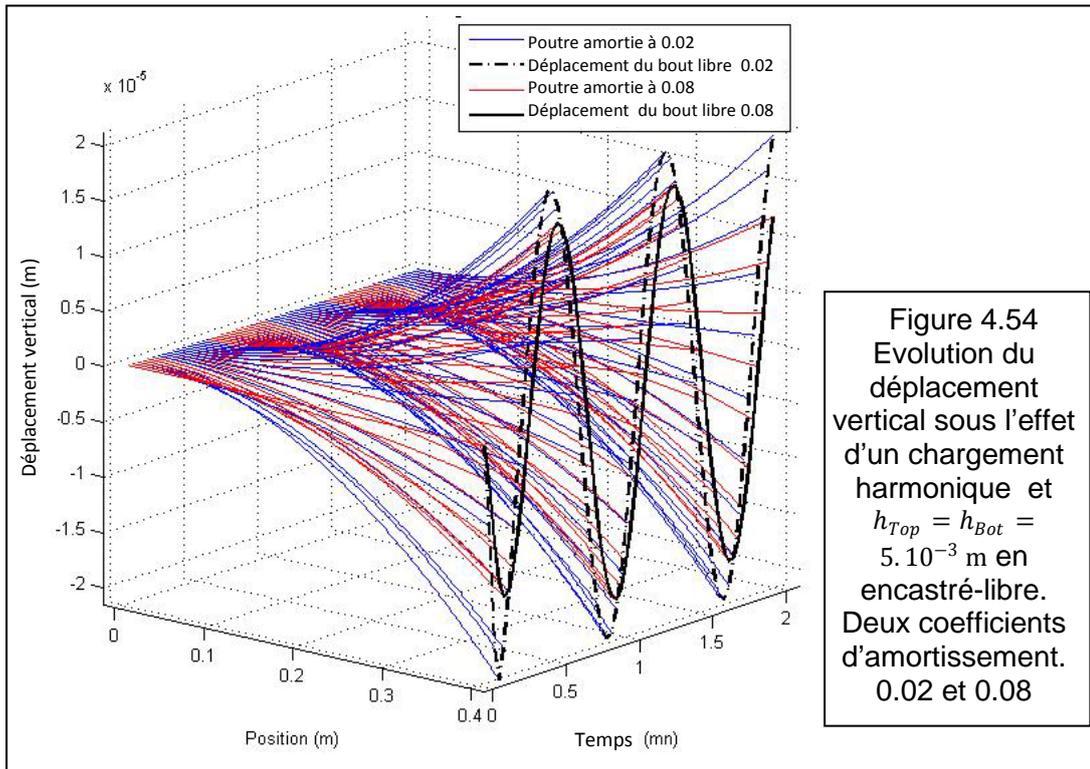
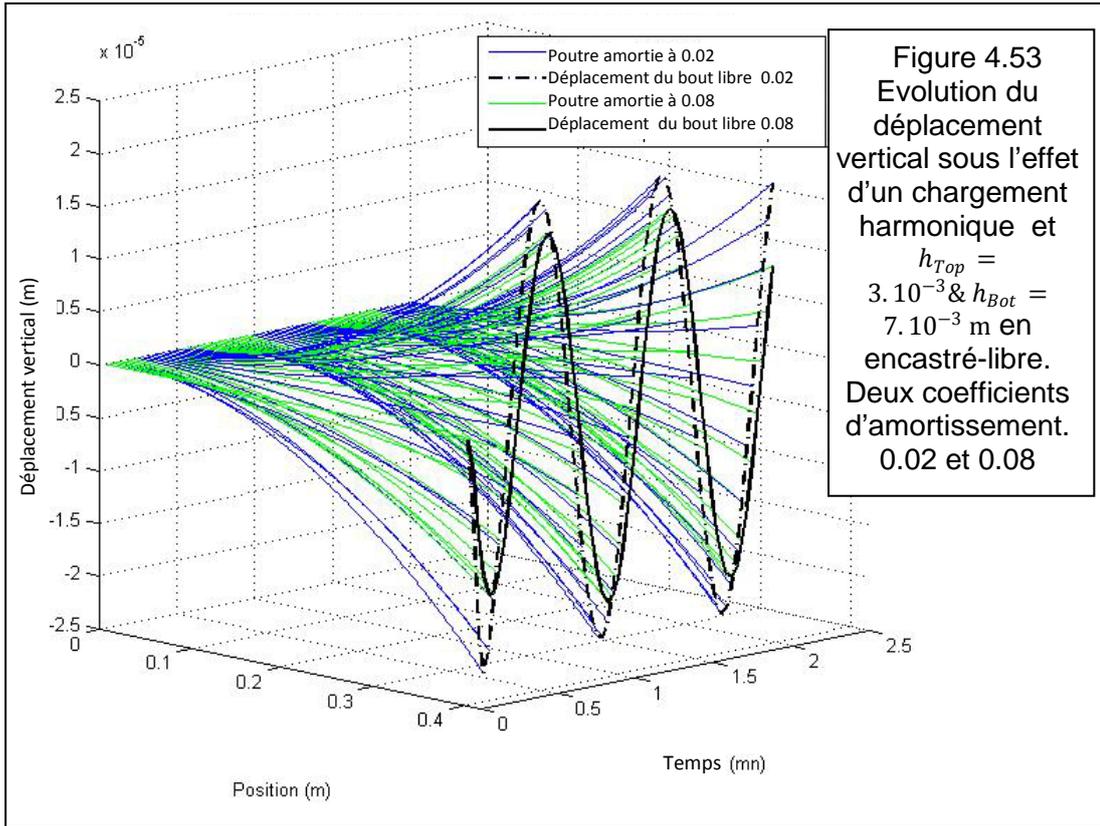
#### 4.4.2.3. Sollicitation harmonique :

Dans le cas d'une excitation électrique, des voltages  $V^{Top}$  et  $V^{Bot}$  appliqués respectivement sur les électrodes supérieure et inférieure, ont la forme suivante :

$$V^{Top} = V \cos(8t) \quad \text{et} \quad V^{Bot} = V \cos(8t + \varphi)$$

$\varphi$  : est le déphasage entre la tension des électrodes supérieure et inférieure [15].

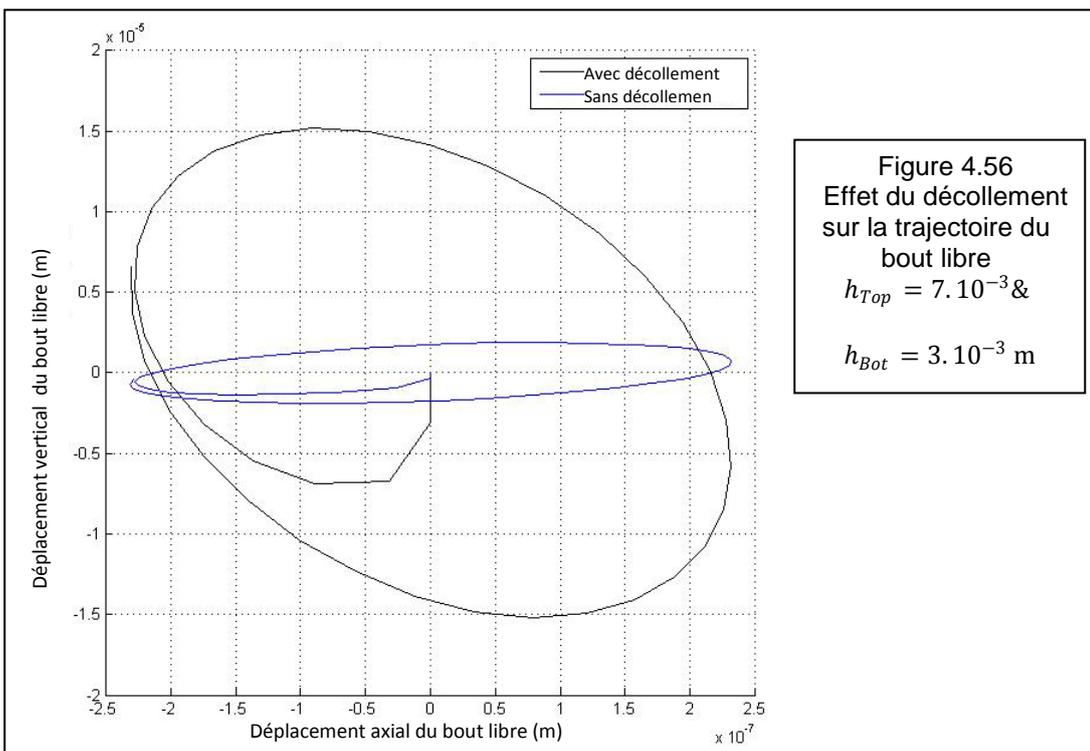
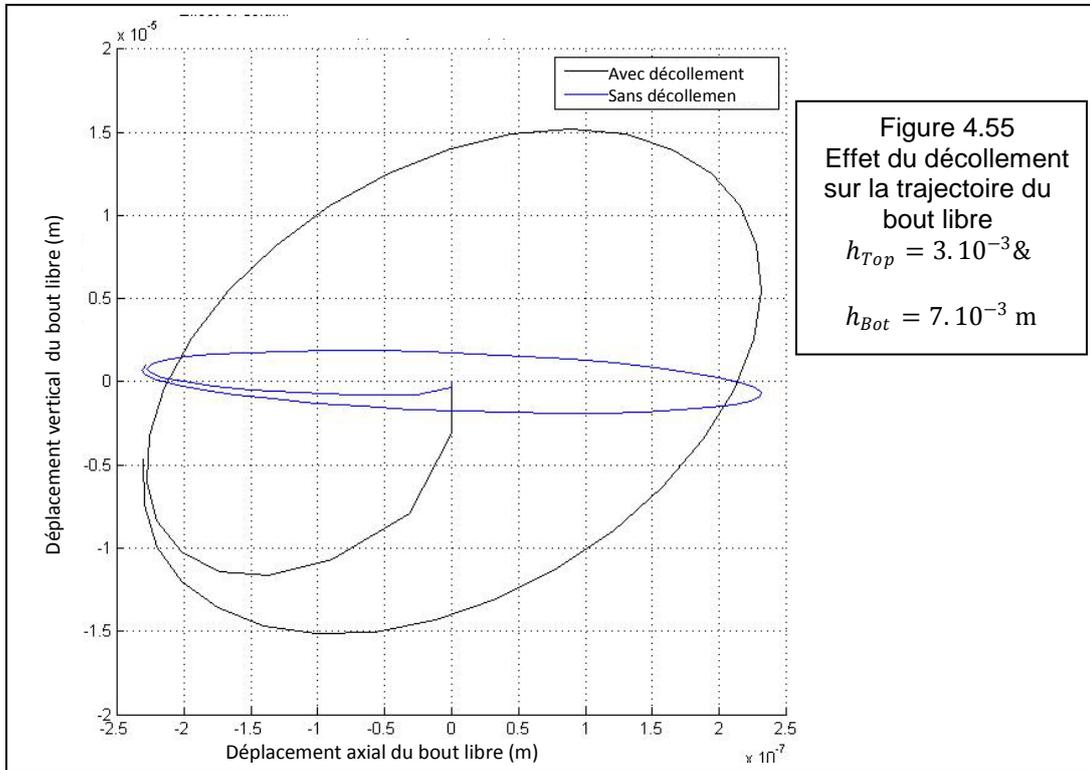


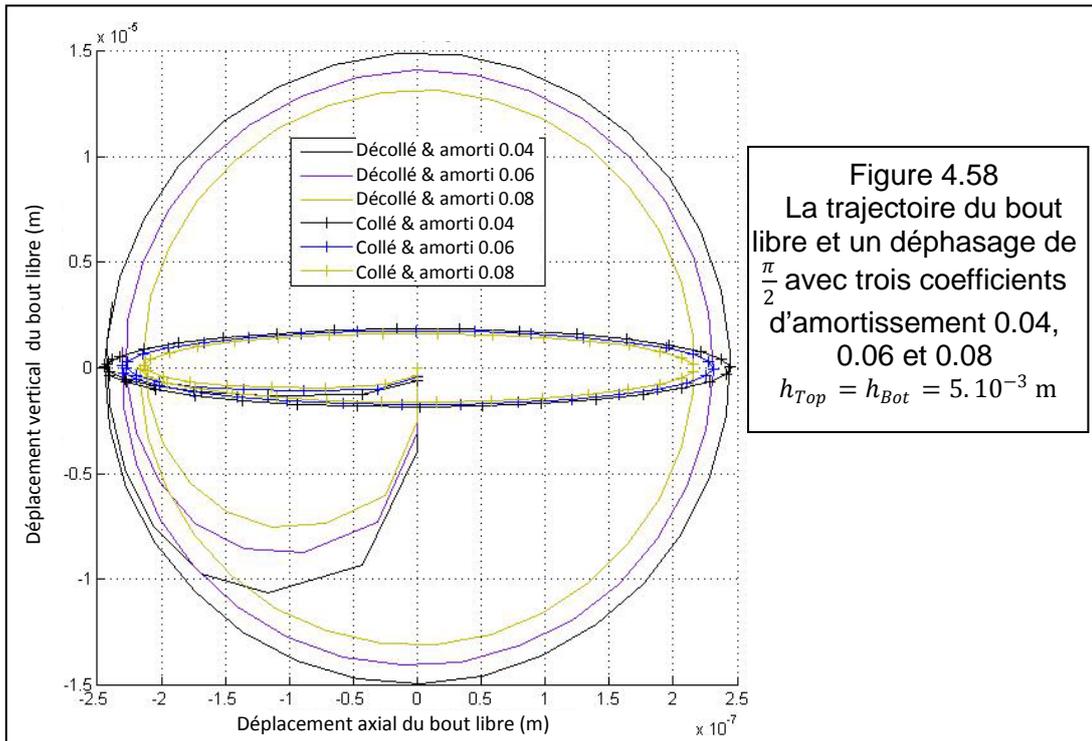
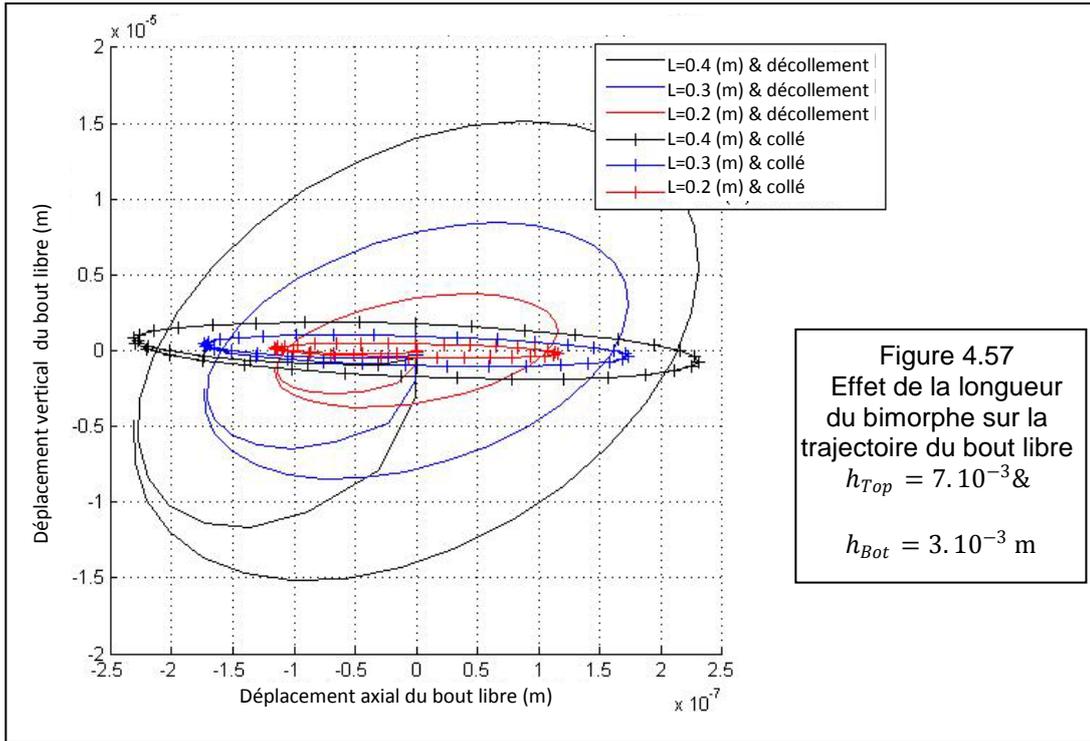


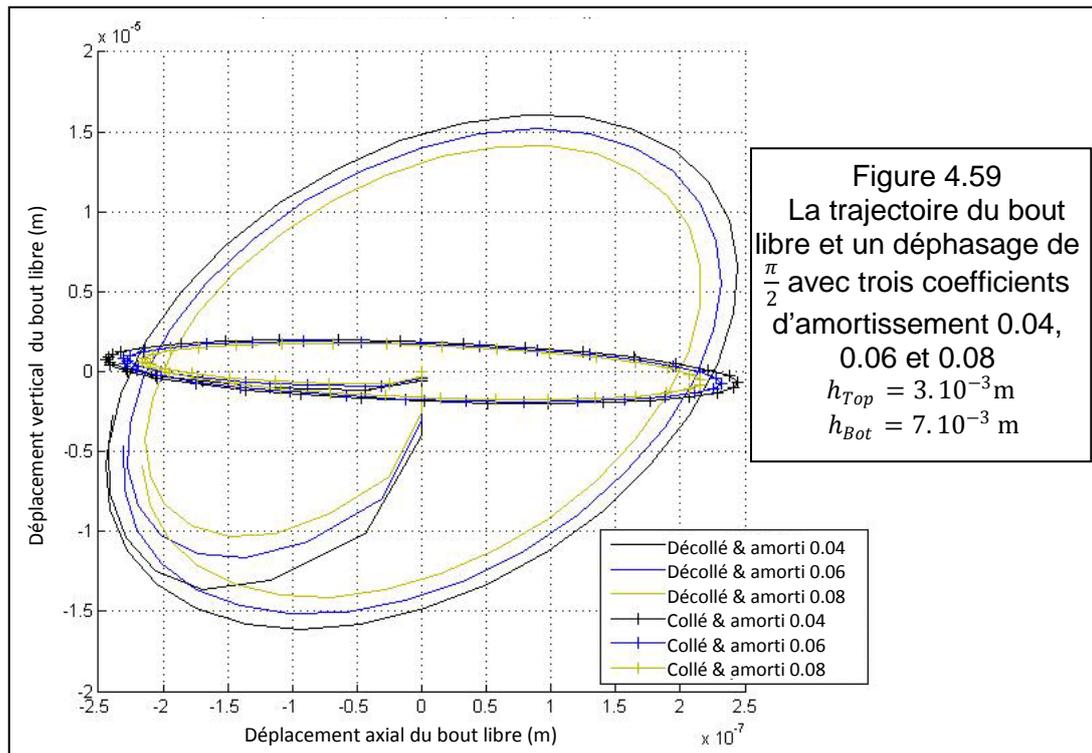
Les Figures 4.52,...,54 représentent le déplacement vertical de poutres soumises à un chargement électrique harmonique, la poutre ayant une zone de décollement donne une actuation plus importante en son bout libre qu'une poutre parfaitement collé, on peut ressentir l'effet de l'amortissement structural sur le comportement de

la poutre, car une poutre avec un coefficient d'amortissement élevé produit une actuation. La distribution de l'épaisseur (entre la couche supérieure et inférieure) n'influe pas le comportement observé.

Dans ce qui suit, nous traiterons les effets du décollement sur la trajectoire du bout libre de la poutre :







Les Figures (4.55-59) représentent la trajectoire du bout libre de la poutre sous l'effet de plusieurs paramètres dont l'amortissement structural, la longueur de la poutre ainsi que la distribution de l'épaisseur entre les deux couches. On observe des trajectoires symétriques pouvant être produites relativement à la distribution de l'épaisseur, donc en inversant la distribution des épaisseurs on inverse la forme de la trajectoire résultante, tout en maintenant les valeurs maximales et minimales constantes. Le décollement affecte la forme de la trajectoire et accentue l'actuation dans la direction verticale, la longueur de la poutre n'affecte pas la forme de cette trajectoire, les mêmes observations peuvent être tirées concernant l'amortissement structural. Les changements de déphasage entre les tensions appliquées sur les couches supérieure et inférieure donnent de nouvelles trajectoires.

#### 4.5. Etude de plaque piézoélectrique :

Vu l'importance et le volume du travail concernant les poutres, on s'est limité, pour l'étude des plaques, à quelques applications sous le logiciel ANSYS®.

##### 4.5.1. Fréquences et modes propres :

Pour cela on a modélisé une plaque (Figure 4.60), dont les caractéristiques du matériau sont les mêmes que celles utilisées pour les poutres (paragraphe 3.4.2.2).

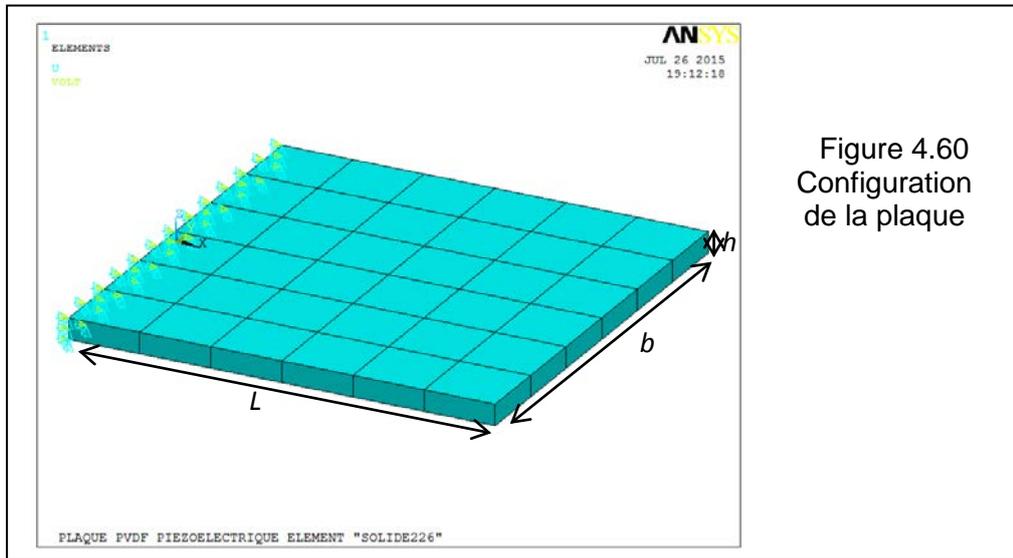


Figure 4.60  
Configuration  
de la plaque

La Figure (4.61) illustre les différents modes propres relatifs aux huit premières fréquences propres de la plaque. Les dimensions étant  $L = 0.1, b = 0.1, h_{Top} = h_{Bot} = 0.025$  m.

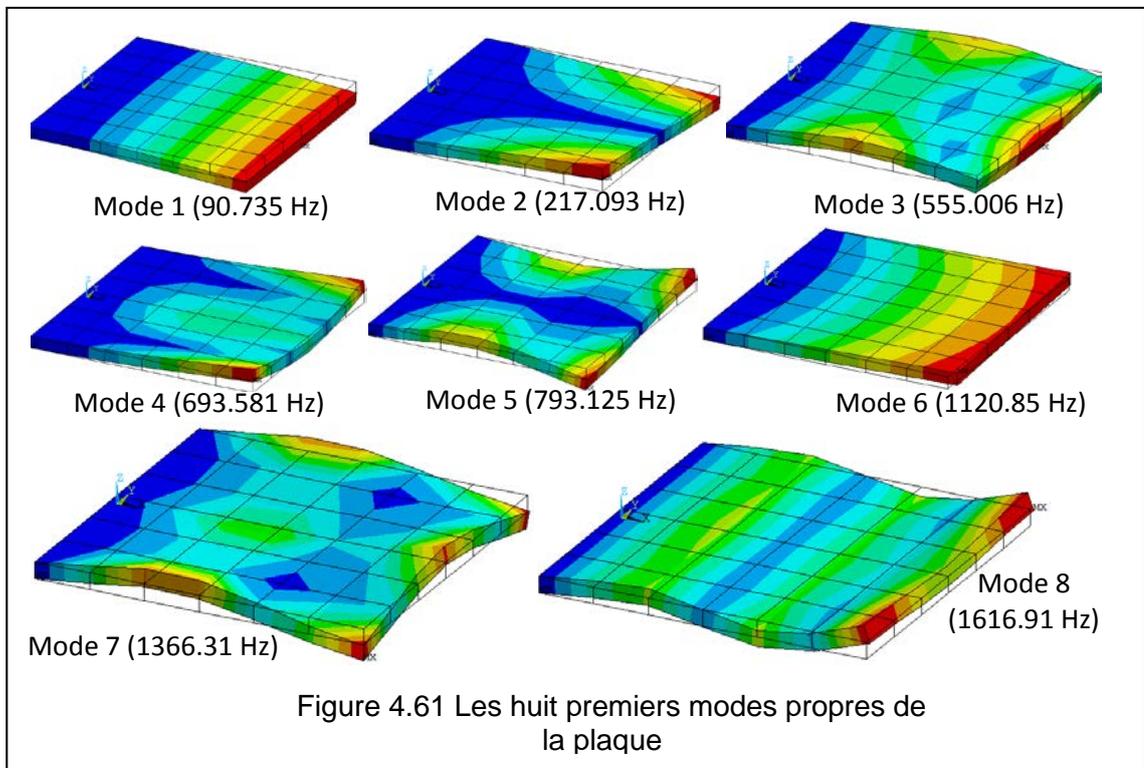


Figure 4.61 Les huit premiers modes propres de  
la plaque

4.5.2. Etude de cas :

A présent, pour étudier l'effet de la géométrie sur l'actionnement dans les plaques piézoélectriques on prend en considération quelques paramètres, à savoir, la taille des électrodes situées sur les faces supérieure et inférieure de la plaque (Figure 4.62).

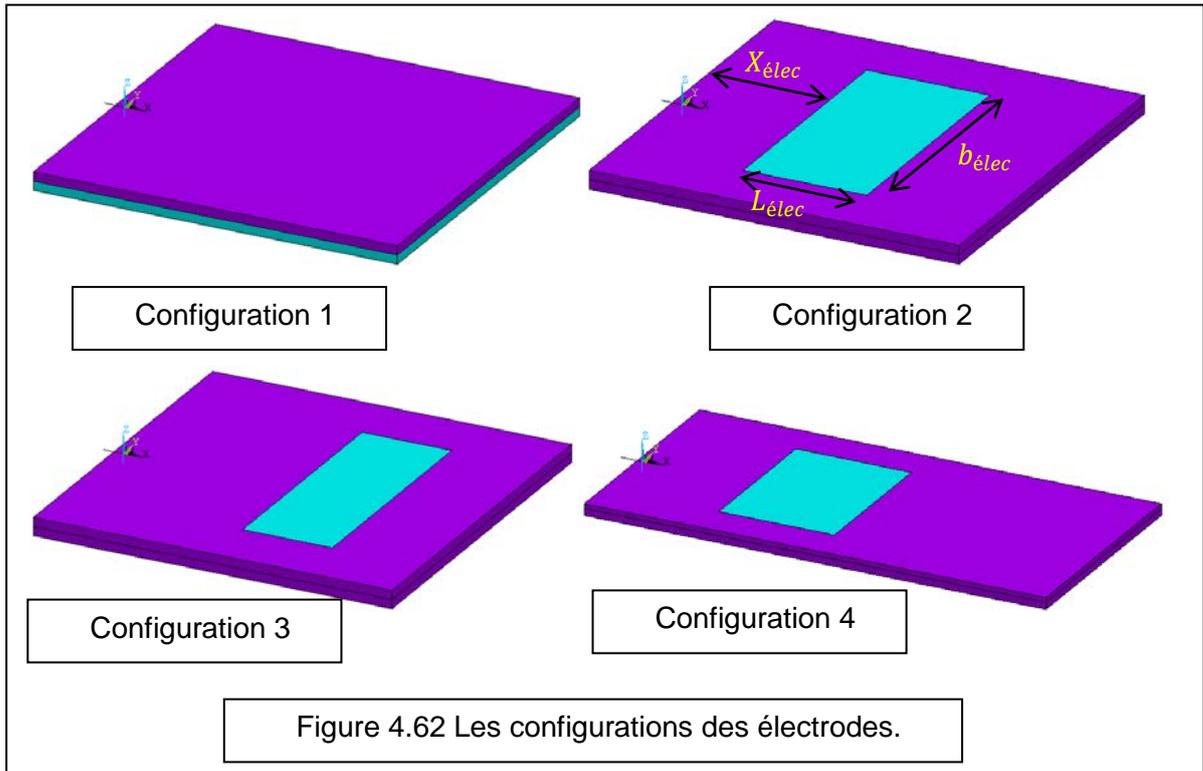


Figure 4.62 Les configurations des électrodes.

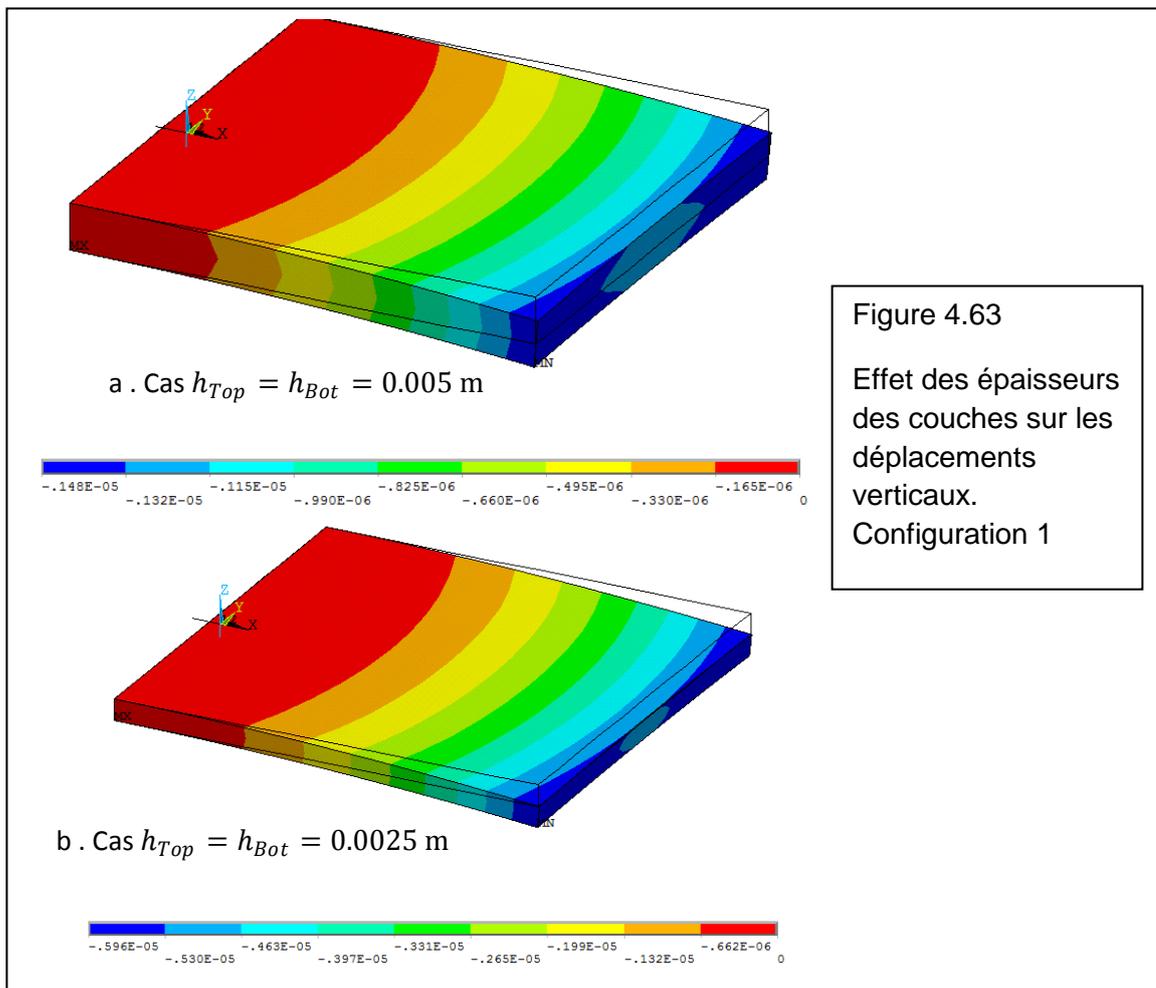
Les quatre configurations de la Figure (4.62) illustrent les emplacements ainsi que la taille des électrodes par rapport à la plaque entière, de sorte à ce que ces dimensions soient calculées en rapport avec les dimensions globales de la plaque, avec :

- $X_{elec} = 0, L_{elec} = L$  et  $b_{elec} = b$  Pour la Configuration 1
- $X_{elec} = \frac{L}{3}, L_{elec} = \frac{L}{2}$  et  $b_{elec} = \frac{2b}{3}$  Pour la Configuration 2
- $X_{elec} = \frac{L}{2}, L_{elec} = \frac{L}{4}$  et  $b_{elec} = \frac{2b}{3}$  Pour la Configuration 3
- $X_{elec} = \frac{L}{4}, L_{elec} = \frac{L}{4}$  et  $b_{elec} = \frac{2b}{3}$  Pour la Configuration 4

L'application d'un potentiel électrique sur les deux électrodes d'une valeur constante de  $V^{Top} = 100 \text{ V}$  et  $V^{Bot} = -100 \text{ V}$  donne pour chaque configuration les valeurs suivantes.

4.5.2.1. Configuration 1 :

Etant donné que la première configuration indique que la forme de l'électrode représente la totalité de la surface supérieure et inférieure de la plaque les résultats sont :



4.5.2.2. Configuration 2 :

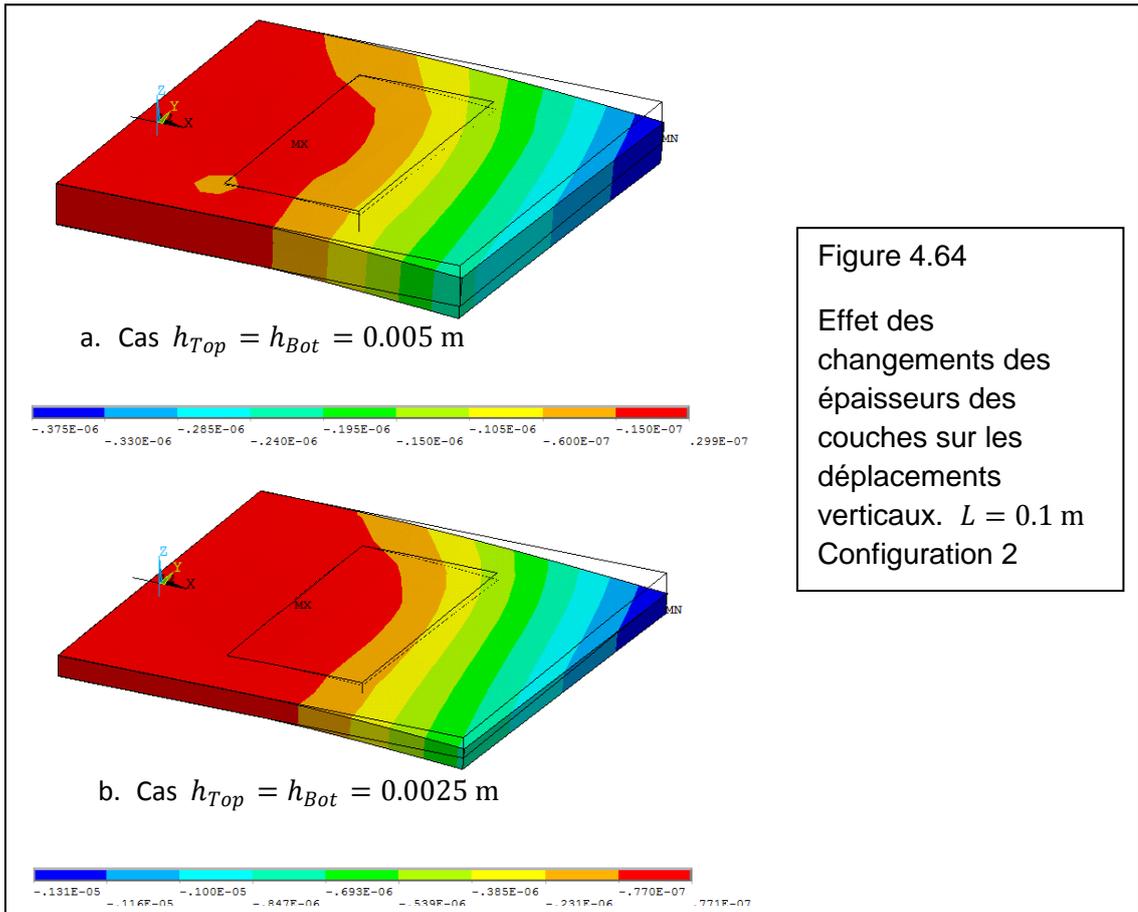


Figure 4.64  
Effet des changements des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux.  $L = 0.1$  m Configuration 2

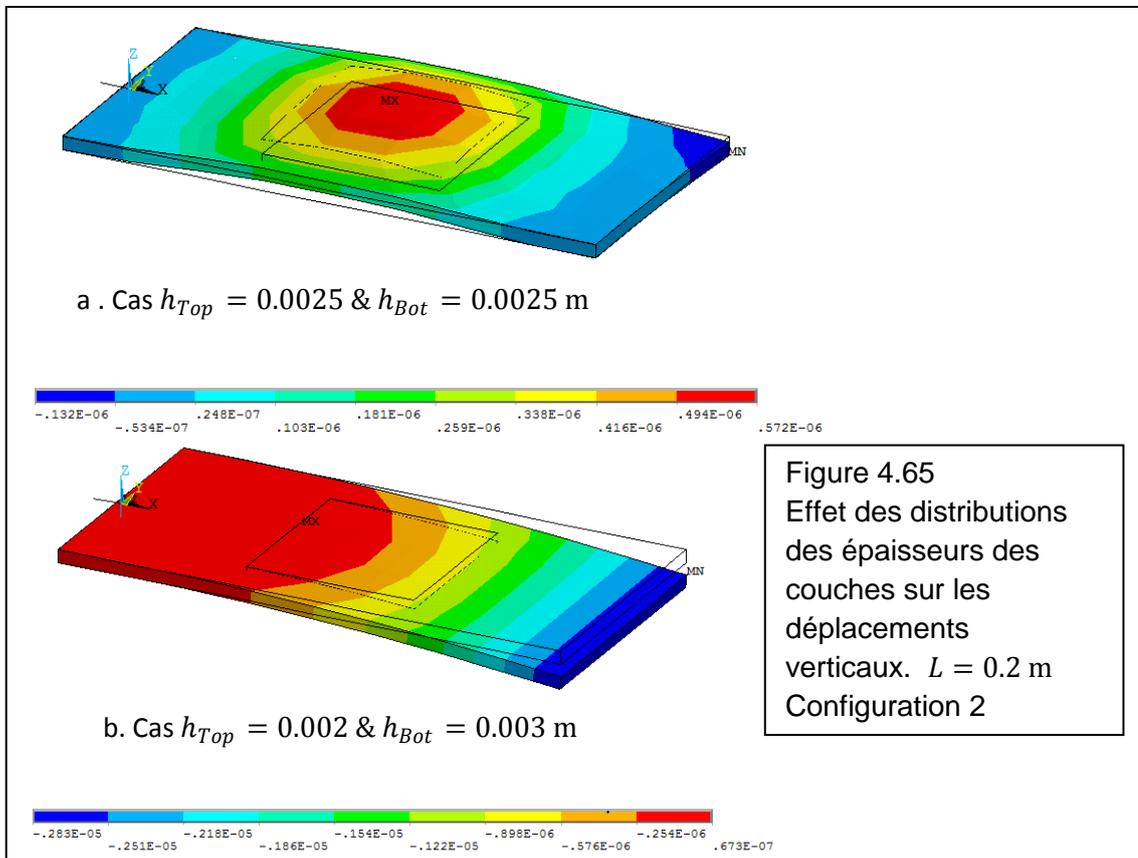


Figure 4.65  
Effet des distributions des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux.  $L = 0.2$  m Configuration 2

4.5.2.3. Configuration 3 :

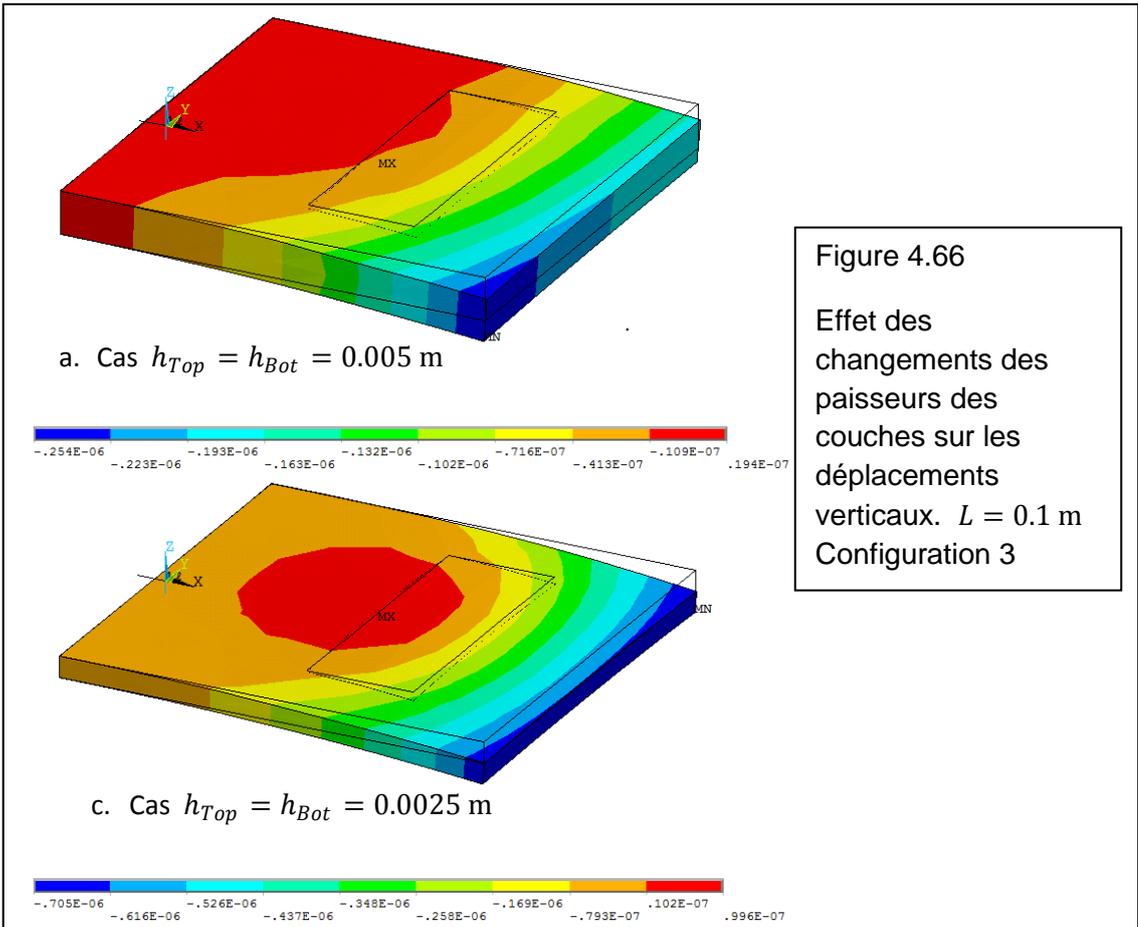


Figure 4.66  
Effet des changements des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux.  $L = 0.1$  m Configuration 3

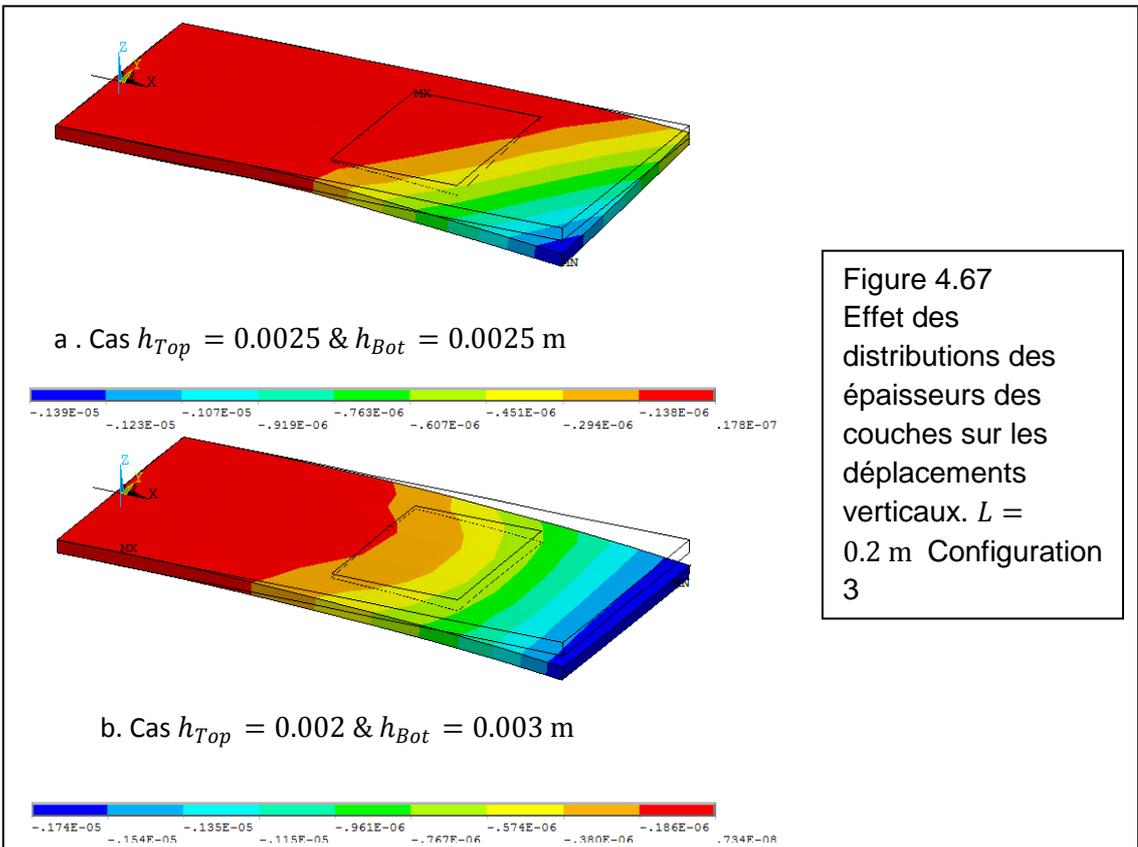


Figure 4.67  
Effet des distributions des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux.  $L = 0.2$  m Configuration 3

4.5.2.4. Configuration 4 :

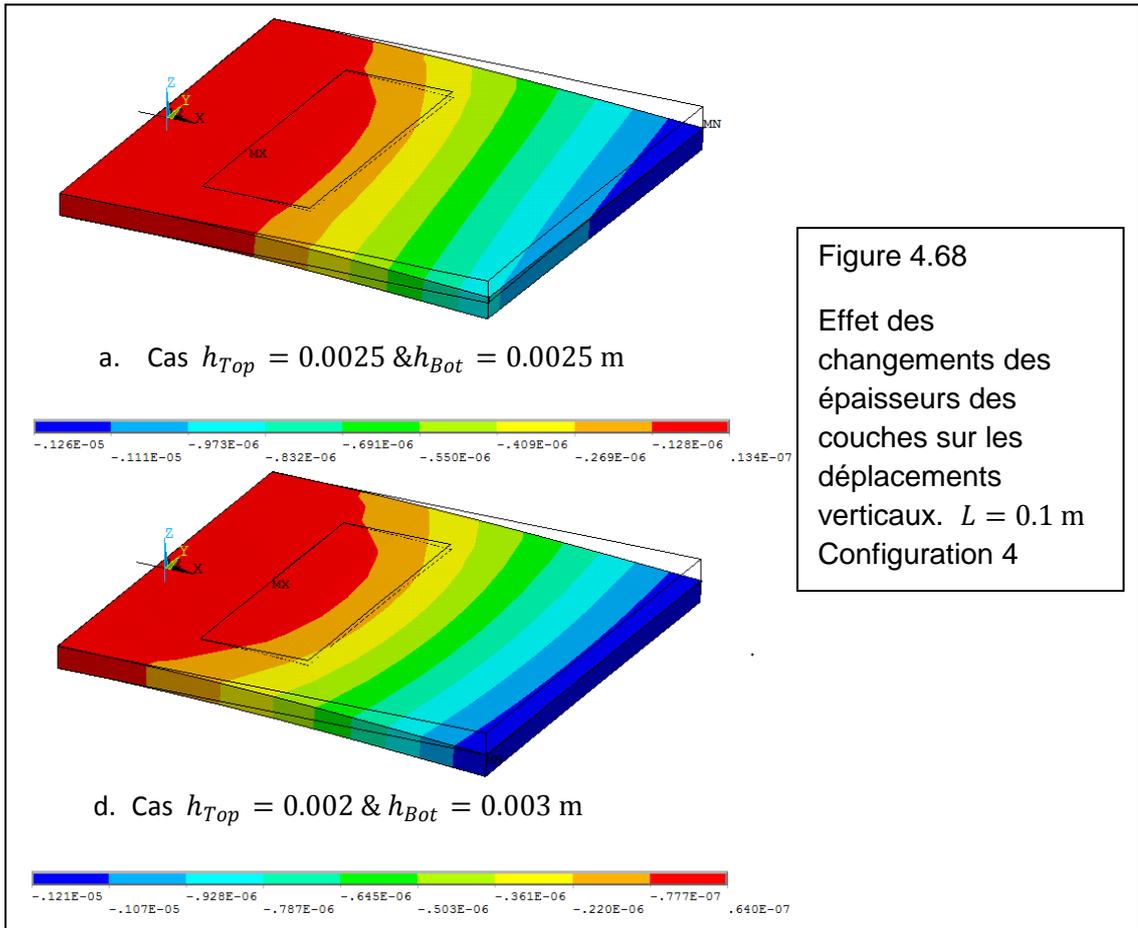


Figure 4.68  
Effet des changements des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux.  $L = 0.1$  m Configuration 4

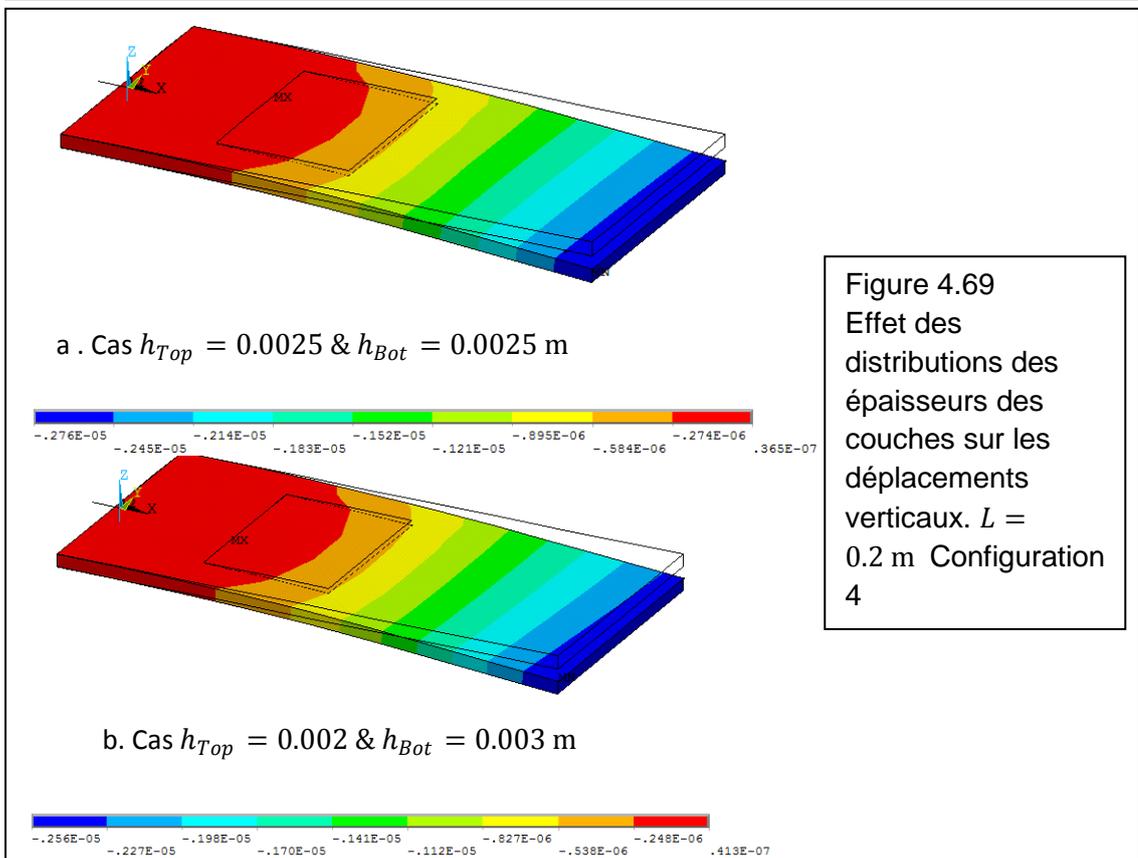


Figure 4.69  
Effet des distributions des épaisseurs des couches sur les déplacements verticaux.  $L = 0.2$  m Configuration 4

D'après les résultats des simulations sur les électrodes et les épaisseurs présentées dans le cas des plaques, on observe que :

- L'augmentation de l'épaisseur de la plaque provoque une diminution du déplacement vertical, donc une perte en matière d'actuation.
- La position de l'électrode influe sur la qualité de l'actuation, car chaque fois que l'électrode se situe près du bout libre on perd en actuation.
- La taille de l'électrode procure un gain dans l'actuation, les grandes électrodes actionnent plus que des électrodes plus petites.
- On peut accroître l'actuation avec des plaques ayant de grandes longueurs.
- On peut améliorer l'actuation en utilisant des couches inférieures plus épaisses, tout en gardant l'épaisseur totale de la plaque inchangée.
- Des électrodes près du bout libre donnent moins d'actuation que celles situées près de l'encastrement.

## CONCLUSION

Dans ce travail on a présenté une étude théorique et des applications numériques de structures en matériaux piézoélectriques qui se présentent sous forme de multicouches (principalement des bicouches). Cette étude repose essentiellement sur des théories et des hypothèses vérifiées.

Après un bref aperçu sur les travaux scientifiques accumulés dans le domaine de la piézoélectricité ainsi que son application, l'introduction, présentée en chapitre I, donne un aperçu général sur la structure globale de cette thèse.

Au chapitre II, on a établi les modèles mathématiques ainsi que les hypothèses liées à l'application des matériaux piézoélectriques sur des structures formées essentiellement par des poutres (en premier lieu) et des plaques bicouches (en deuxième lieu) en mettant en évidence quelques aspects comme l'amortissement structural, l'effet du changement de la température ambiante, l'effet du cisaillement (poutre de Timoshenko et plaque de Mindlin), et bien sûr le couplage électromécanique existant au sein des matériaux piézoélectriques.

Le chapitre III est consacré à l'étude numérique, à l'application et à la modélisation par éléments finis des modèles présentés au chapitre II. La modélisation a été finalisée par l'obtention des différentes matrices élémentaires, en l'occurrence, la matrice masse (ou inertie), la matrice rigidité, la matrice diélectrique, la matrice des couplages électromécaniques et les vecteurs des charges thermiques. L'obtention des équations de mouvements, après élaboration

de la matrice de dissipation, était suivie par la résolution des systèmes d'équations de mouvement en appliquant la méthode de Newmark.

Les résultats ainsi que leurs analyses ont été présentés en chapitre IV. Ces résultats obtenus soit par la programmation de codes sous le logiciel MATLAB<sup>®</sup> soit par l'utilisation d'un logiciel spécialisé dans la simulation numérique et les éléments finis ANSYS<sup>®</sup>, sont confrontés à ceux de la littérature afin de pouvoir vérifier leur exactitude. Un nouvel aspect a été introduit dans ce chapitre, le décollement entre les couches formant les bimorphes. Ce défaut traité présente un problème majeur rencontré lors de la fabrication des bicouches. L'originalité de ce travail réside dans le fait que l'étude du décollement et de ses paramètres (longueur, localisation) permet de caractériser les structures présentant ce type de défauts. Les principales observations faites dans cette étude sont :

- L'amortissement structural stabilise la structure et n'influe pas sur la valeur de sa réponse, mais il influe sur le temps ainsi que la forme.
- La trajectoire de l'actuation est affectée par le déphasage de la tension entre les couches. On peut l'améliorer en diminuant l'épaisseur du bimorphe, leur rapport provoque un effet symétrique sur cette trajectoire.
- La trajectoire diminue avec l'augmentation de l'amortissement structural, ce qui induit une perte dans l'actuation.
- Un champ de déplacement axial se crée au niveau du décollement qui s'accroît en présence du cisaillement.
- La longueur du décollement influe le champ des déplacements axiaux, l'augmentation des longueurs provoque une augmentation des champs axiaux.
- L'augmentation de la température ambiante n'influe pas les champs axiaux.
- Les conditions aux limites accentuent l'effet du décollement si ce dernier se situe près de l'encastrement.
- L'actuation sous un champ électrique harmonique s'accroît en présence du décollement, et sa forme ne s'affecte pas par la longueur de la structure.

Des recherches sur les coques et leurs applications [63,64,65] ont révélé que ,de manière générale, ces structures peuvent être assimilées, sous des

conditions bien définies, à des éléments plaques. De manière analogue aux études abordées dans cette thèse, en posant les conditions nécessaires, on peut procéder à l'étude de coques.

Vu le volume de la thèse, l'importance et la diversité des résultats obtenus, notre recherche s'est limitée aux poutres, barres et plaques.

Pour des futures recherches, on peut envisager l'application ainsi que le dimensionnement d'actionneurs à base de matériaux piézoélectriques formés par des poutres et des plaques étudiées dans ce travail.

## ANNEXE A

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 \\ & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & 0 & 0 \\ & & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 \\ & & & H_{44} & H_{45} & H_{46} & 0 & 0 \\ & & & & H_{55} & H_{56} & 0 & 0 \\ & & & & & H_{66} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & & & H_{77} & H_{78} \\ & & & & & & & H_{88} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{N}_{j,\xi}(H_{11}\bar{N}_{i,\xi} + H_{13}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{31}\bar{N}_{i,\xi} + H_{33}\bar{N}_{i,\eta}) & \bar{N}_{j,\xi}(H_{13}\bar{N}_{i,\xi} + H_{12}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{33}\bar{N}_{i,\xi} + H_{32}\bar{N}_{i,\eta}) & 0 \\ \bar{N}_{j,\eta}(H_{21}\bar{N}_{i,\xi} + H_{23}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\xi}(H_{31}\bar{N}_{i,\xi} + H_{33}\bar{N}_{i,\eta}) & \bar{N}_{j,\eta}(H_{23}\bar{N}_{i,\xi} + H_{22}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\xi}(H_{33}\bar{N}_{i,\xi} + H_{32}\bar{N}_{i,\eta}) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{j,\xi}(H_{77}\bar{N}_{i,\xi} + H_{78}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{78}\bar{N}_{i,\xi} + H_{88}\bar{N}_{i,\eta}) \\ -z\bar{N}_{j,\xi}(H_{31}\bar{N}_{i,\xi} + H_{33}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{51}\bar{N}_{i,\xi} + H_{53}\bar{N}_{i,\eta}) - \bar{N}_{j,\xi}(H_{61}\bar{N}_{i,\xi} + H_{63}\bar{N}_{i,\eta}) & -z\bar{N}_{j,\xi}(H_{33}\bar{N}_{i,\xi} + H_{32}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{53}\bar{N}_{i,\xi} + H_{52}\bar{N}_{i,\eta}) - \bar{N}_{j,\xi}(H_{63}\bar{N}_{i,\xi} + H_{62}\bar{N}_{i,\eta}) & -\bar{N}_{j,\xi}(H_{78}\bar{N}_{i,\xi} + H_{88}\bar{N}_{i,\eta}) \\ z\bar{N}_{j,\eta}(H_{31}\bar{N}_{i,\xi} + H_{33}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\xi}(H_{41}\bar{N}_{i,\xi} + H_{43}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{61}\bar{N}_{i,\xi} + H_{63}\bar{N}_{i,\eta}) & z\bar{N}_{j,\eta}(H_{33}\bar{N}_{i,\xi} + H_{32}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\xi}(H_{43}\bar{N}_{i,\xi} + H_{42}\bar{N}_{i,\eta}) + \bar{N}_{j,\eta}(H_{63}\bar{N}_{i,\xi} + H_{62}\bar{N}_{i,\eta}) & \bar{N}_{j,\xi}(H_{77}\bar{N}_{i,\xi} + H_{78}\bar{N}_{i,\eta}) \\ \bar{N}_{j,\xi}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{13} + \bar{N}_{i,\eta}H_{15} - \bar{N}_{i,\xi}H_{16}) + \bar{N}_{j,\eta}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{33} + \bar{N}_{i,\eta}H_{35} - \bar{N}_{i,\xi}H_{36}) & \bar{N}_{j,\xi}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{13} + \bar{N}_{i,\xi}H_{14} + \bar{N}_{i,\eta}H_{16}) + \bar{N}_{j,\eta}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{33} + \bar{N}_{i,\xi}H_{34} + \bar{N}_{i,\eta}H_{36}) \\ \bar{N}_{j,\eta}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{23} + \bar{N}_{i,\eta}H_{25} - \bar{N}_{i,\xi}H_{26}) + \bar{N}_{j,\xi}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{33} + \bar{N}_{i,\eta}H_{35} - \bar{N}_{i,\xi}H_{36}) & \bar{N}_{j,\eta}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{23} + \bar{N}_{i,\xi}H_{24} + \bar{N}_{i,\eta}H_{26}) + \bar{N}_{j,\xi}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{33} + \bar{N}_{i,\xi}H_{34} + \bar{N}_{i,\eta}H_{36}) \\ -\bar{N}_{j,\xi}H_{78}\bar{N}_{i,\xi} - \bar{N}_{j,\eta}H_{88}\bar{N}_{i,\eta} & \bar{N}_{j,\xi}H_{77}\bar{N}_{i,\xi} + \bar{N}_{j,\eta}H_{78}\bar{N}_{i,\eta} \\ -z\bar{N}_{j,\xi}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{33} + \bar{N}_{i,\eta}H_{35} - \bar{N}_{i,\xi}H_{36}) + \bar{N}_{j,\eta}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{53} + \bar{N}_{i,\eta}H_{55} - \bar{N}_{i,\xi}H_{56}) - \bar{N}_{j,\xi}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{63} + \bar{N}_{i,\eta}H_{65} - \bar{N}_{i,\xi}H_{66}) + \bar{N}_{j,\eta}H_{88}\bar{N}_{i,\eta} & -z\bar{N}_{j,\xi}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{33} + \bar{N}_{i,\xi}H_{34} + \bar{N}_{i,\eta}H_{36}) + \bar{N}_{j,\eta}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{53} + \bar{N}_{i,\xi}H_{54} + \bar{N}_{i,\eta}H_{56}) - \bar{N}_{j,\xi}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{63} + \bar{N}_{i,\xi}H_{64} + \bar{N}_{i,\eta}H_{66}) - \bar{N}_{j,\eta}H_{78}\bar{N}_{i,\eta} \\ z\bar{N}_{i,\eta}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{33} + \bar{N}_{i,\eta}H_{35} - \bar{N}_{i,\xi}H_{36}) + \bar{N}_{j,\xi}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{43} + \bar{N}_{i,\eta}H_{45} - \bar{N}_{i,\xi}H_{46}) + \bar{N}_{i,\eta}(-z\bar{N}_{i,\xi}H_{63} + \bar{N}_{i,\eta}H_{65} - \bar{N}_{i,\xi}H_{66}) - \bar{N}_{j,\eta}H_{78}\bar{N}_{i,\eta} & z\bar{N}_{i,\eta}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{33} + \bar{N}_{i,\xi}H_{34} + \bar{N}_{i,\eta}H_{36}) + \bar{N}_{j,\xi}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{43} + \bar{N}_{i,\xi}H_{44} + \bar{N}_{i,\eta}H_{46}) + \bar{N}_{i,\eta}(z\bar{N}_{i,\eta}H_{63} + \bar{N}_{i,\xi}H_{64} + \bar{N}_{i,\eta}H_{66}) + \bar{N}_{j,\eta}H_{77}\bar{N}_{i,\xi} \end{bmatrix}$$

La matrice des inerties  $[\bar{M}]$ :



## ANNEXE B

## LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

$L, b, h_{Top}, h_{Bot}$	Longueur, largeur, épaisseur (supérieur / inférieur)	en (m)
$E_i$	Champ électrique	en (V. m <sup>-1</sup> )
$D_i$	Déplacement électrique	en (C. m <sup>-2</sup> )
$U, T$	Energies (déformation / cinétique)	en (J)
$[M]^e, [C]^e, [K]^e$	Matrices élémentaires (masse/amortissement/rigidité)	
$Q_{ijkl} / Q_{pq}$	Coefficients d'élasticité (notation tensoriel/de Voigt)	en (N. m <sup>-2</sup> )
$[N]$	Matrice des fonctions de forme	
$E, G$	Module d'élasticité (Young/cisaillement)	en (Pa)
$p_i$	Coefficients pyroélectriques	en (C. K <sup>-1</sup> . m <sup>-2</sup> )
$\{q\}$	Vecteur des coordonnées généralisées	
$u, v, w$	Déplacements suivant respectivement $ox, oy, oz$	en (m)
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes	en (m)
$\psi$	Rotation de la fibre moyenne	en (rad)
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) / (\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz})$	Déformations (axiales/cisaillement)	en (%)
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) / (\tau_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{yz})$	Contraintes (normales/tangentielles)	en (N. m <sup>-2</sup> )
$e_{ijk} / e_{pk}$	Coefficients piézoélectriques (notation tensoriel/de Voigt)	en (N. m <sup>-2</sup> )
$\lambda_i$	Modules thermiques	en (N. K <sup>-1</sup> . m <sup>-2</sup> )
$\bar{\varepsilon}_{ik}$	Permittivité	en (C. V <sup>-1</sup> . m <sup>-1</sup> )
$\rho$	Masse volumique	en (Kg. m <sup>-3</sup> )
$\alpha$	Coefficient d'expansion thermique	en (°C <sup>-1</sup> )

---

$\phi$	Potentiel des électrodes	en (V)
$\Theta$	Changement de température	en (°C)
$\xi, \eta$	Coordonnées naturelles	
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$	Coefficients d'amortissement de Rayleigh	

## REFERENCES

1. P. De Boe. "Les éléments piézo-laminés appliqués à la dynamique des structures". Thèse de Doctorat de l'université de Liège (2003).
2. A. Mukherjee, A. Saha Chaudhuri "Nonlinear dynamic response of piezolaminated smart beams" (2005). *Computers and Structures*. V. 83, 1298–1304.
3. A. Nikkhoo: "Investigating the behavior of smart thin beams with piezoelectric actuators under dynamic loads". *Mechanical Systems and Signal Processing*. V.45 (2014) 513-530.
4. M. Rahmoune, D. Osmont, "Classic finite elements for simulation of piezoelectric smart structures". *Mechanika* Nr 6- 86. (2010) 50-57.
5. Y.S. Li, W.J. Feng and Z.Y. Cai "Bending and free vibration of functionally graded piezoelectric beam based on modified strain gradient theory". *Composite Structures*. V. 115 (2014) 41-50.
6. Y-g, ZHOU, Y-m, CHEN and H-j, DING "Analytical modeling of sandwich beam for piezoelectric bender elements". *Applied Mathematics and Mechanics*. V. 28(12). (2007), 1581-1586.
7. A. Donoso and O. Sigmund "Optimization of piezoelectric bimorph actuators with active damping for static and dynamic loads" *Struct Multidisc Optim*, V. 38 (2009), 171-183.
8. Liang Wang, Rui-xiang Bai et Haoran Chen, "Analytical modeling of the interface crack between a piezoelectric actuator and an elastic substrate considering shear effects" *International Journal of Mechanical Sciences*, V. 66 (2013) 141–148.
9. C. Jin and X. Wang "Analytical modelling of the electromechanical behaviour of surface-bonded piezoelectric actuators including the adhesive layer", *Engineering Fracture Mechanics*, V. 78, (2011) 2547–2562.

10. X. LIU, R. CHEN and L. ZHU, "Energy Conversion Efficiency of Rainbow Shape Piezoelectric Transducer", *Chinese Journal of Aeronautics*, V. 25 (2012), 691-697.
11. A. Hai, A. Weiguang, Y. Duohe and W. Binsheng, "Static Force Reliability Analysis of Truss Structure with Piezoelectric Patches Affixed to Its Surface", *Chinese Journal of Aeronautics*, V. 22, (2009) 22-31.
12. A. Mahieddine, J. Pouget and M. Ouali "Modeling and analysis of delaminated beams with integrated piezoelectric actuators" *Comptes Rendus Mécaniques*, V. 338, (2010) 283–289.
13. V. Y. Perel and A. N. Palazotto "Finite element formulation for dynamics of delaminated composite beams with piezoelectric actuators" *International Journal of Solids and Structures*, V. 39 (2002), 4457–4483.
14. Robert Dunsch and Jean-Marc Breguet "Unified mechanical approach to piezoelectric bender modelling". *Sensors and Actuators A*. V.134-2, (2007) 436-446.
15. M. Arafa, O. Aldraihem and A. Baz "Modelling and characterisation of a linear piezomotor" *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. V. 0 (2009). DOI: 10.1177/1045389X09343022. P 1-9.
16. R. Lučinskis, D. Mažeika, T. Hemsel and R. Bansevicius "The experimental research of piezoelectric actuator with two vectors of polarization direction", *Mechanika*, V. 2 (82) (2010). 50-57.
17. Y-g, Zhou, Y-m, Chen and H-j, Ding "Analytical modeling and free vibration analysis of piezoelectric bimorphs". *Journal of Zhejiang University SCIENCE*. V. A6(9). (2005), 938-944. Doi:10.1631/jzus.2005.A0938.
18. A. Fernandes and J. Pouget, "Analytical and numerical approaches to piezoelectric bimorph" *International Journal of Solids and Structures*, V. 40 (2003). 4331–4352.
19. C. Poizat and A. Benjeddou, "on analytical and finite element modelling of piezoelectric extension and shear bimorphs". *Computers and Structures*. V. 84 (2006) 1426–1437.
20. D. Mažeika and R. Bansevicius "Study of resonant vibrations shapes of the beam type piezoelectric actuator with preloaded mass", *Mechanika*. V.2(76), (2009), 33-37.
21. S. Avdiaj, J. Setina and N. Šyla. "Modelling of the piezoelectric effect using the finite element method (FEM)". *Materials and technology*. V. 43 (2009) 6, 283–291.
22. N-T. Nguyen and K. J. Yoon "Actuation Displacement of Unimorph Piezoelectric Actuators with External Loading". *Journal of the Korean Physical Society*, Vol. 51, (2007), S11-S15.

23. R. Merry, R. van de Molengraft and M. Steinbuch "Modeling of a walking piezo actuator". *Sensors and actuators A*. V162 (2010). 51-60.
24. A. Mahieddine and M. Ouali "Finite element formulation of a beam with piezoelectric patch". *Journal of engineering and applied sciences*, V. 3(10). (2008) .803-807.
25. V. Rovenski and H. Abramovich, "Behavior of Piezoelectric Beams under Axially Non-uniform Distributed Loading". *Journal of Elasticity*. V. 88(2007). 223–253. DOI 10.1007/s10659-007-9132-2.
26. T- M. Badri Albarody and Hussain H. Al-Kayiem, "Dynamic analysis of laminated composite thermo-magneto-electro-elastic shells", *Journal of Mechanical Science and Technology*. V. 28 (12) (2014), 4877-4891.
27. J. Jovanova, V. Gavriloski, M. Djidrov and G. Tasevski, "Model Based Vibration Control of Smart Flexible Structure Using Piezoelectric Transducers". *FME Transaction*. V 43 (2015), 70-75, ISSN: 1451-2092.
28. Y-S. Lee, "Comparison of collocation strategies of sensor and actuator for vibration control", *Journal of Mechanical Science and Technology*. V.25 (1) (2011) 61-68.
29. A. Kokkinopoulos, G. Vokas and P. Papageorgas, " Energy harvesting implementing embedded piezoelectric generators – The potential for the Attiki Odos traffic grid". *TerraGreen 13 International Conference 2013 - Advancements in Renewable Energy and Clean Environment*. *Energy Procedia* 00 (2011) 000–000.
30. I. Ecsedi "Dynamic equilibrium equations of linear piezoelectric Euler–Bernoulli beams". *Mechanics Research Communications* . V. 36 (2009) 175–182.
31. Y. Xu and D. Zhou "Two-dimensional analysis of simply supported piezoelectric beams with variable thickness". *Applied Mathematical Modelling* . V. 35 (2011) 4458–4472.
32. D. U. Kong, B. R. Son, S-J. Moon and D-H. Lee. "Miniature robot having multiple legs using piezo-legs having two degrees of freedom". United States, Patent application Publication. Pub N° US/2014/0305716 A1.
33. C. Maurini, J. Pouget and S. Vidoli, "Distributed piezoelectric actuation of a bistable buckled beam". *European Journal of Mechanics A/Solids* . V. 26 (2007), 837–853.

34. A. Magnusson, M. Ristinmaa, and C. Ljung,. "Behaviour of the extensible elastica solution". *International Journal of Solids and Structures*. V. 38 (2001), 8441–8457.
35. D. W. Coffin and F. Bloom. "Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam". *International Journal of Non-Linear Mechanics*. V.34 (1999), 935–947.
36. E.F. Crawley and E.H. Anderson. "Detailed models of piezoceramic actuation in beams". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. V. 1 (1999), 12–25.
37. C. Maurini, J. Pouget and F. dell'Isola. On a model of layered piezoelectric beams including transverse stress effect. *International Journal of Solids and Structures*. V. 41. (2004), 4473–4502.
38. A. Mahieddine, "Effets de la piézoélectricité et de l'amortissement structural dans le cas des poutres, des coques et des plaques. Contrôle actif. ", Thèse de Doctorat de l'université de l'USTO Mohamed Boudiaf, Oran Avril (2011).
39. A. Faiz, "amortissement vibratoire et anéchoïsme par traitement non-linéaire d'éléments piézoélectriques". Thèse de Doctorat de L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon Mai (2006).
40. R. Wood, R. Nagpal and G. Y. Wei, "Flight of the Robobees". *Scientific American*. V. 308, (2013) 60 – 65.
41. V. Piefort, "Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures". Thèse de Doctorat de sciences appliquées de L'Université libre de Bruxelles (2001).
42. F. Pigache. "Modélisation causale en vue de la commande d'un translateur piézoélectrique plan pour une application haptique". Thèse de Doctorat de L'Université des sciences et technologies de Lille. (2005).
43. S. Ghorbal. "Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques: expérimentations, simulations et corrélations". Thèse de Doctorat de l'institut supérieur de mécanique de Paris. (2009).
44. A. Cherif. "Optimisation du transformateur piézoélectrique. Application : Contrôle semi-passive des vibrations". Thèse de Doctorat en sciences de l'université Ferhat Abas de Sétif. (2009).
45. E. Boyere, "Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire". Code\_Aster Clé : R5.05.04. (2009) 1-13.
46. A. Seghir, "Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure Application à l'étude des barrages poids en béton". Thèse en cotutelle de

- Doctorat en Sciences de l'Université de Béjaia et de Doctorat de l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée (2010).
47. Caignot, "Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales". Thèse de Doctorat de l'école normale supérieure de Cachan. (2009).
48. J. Piranda, "Analyse Modale expérimentale". Techniques d'ingénieurs, Traité Mesures et contrôles, R6 180. (2001). 1-29.
49. S. Adhikari. "Damping Models for Structural Vibration". Thèse de Ph-Doctorat de l'université de Cambridge. (2000).
50. S. Sayyad. "Comparison of various shear deformation theories for the free vibration of thick isotropic beams". International journal of civil and structural engineering. V. 2 (1). (2011). 85-97.
51. J. Courbon. "Théorie de l'élasticité". techniques de l'ingénieur, traité science fondamentales. A 305. (1979) 1-31.
52. C. Piozat and A. Bendjeddou "On analytical and finite element modelling of piezoelectric extension and shear bimorphs". Computers and Structures. V. 84 (2006), 1426–1437.
53. J. G. Smith, S. I. Dalke and T. K. Cooney. "the constituent equations of piezoelectric bimorphs". Sensors and Actuators. V 28 (1991) 41-61.
54. J. M. Barthelot. "Mécanique des matériaux et structures composites". ISMANS, Institut supérieur des Matériaux et mécaniques avancés, le Mans (2010).
55. J. L. Batoz et G. Dhatt. "Modélisation de structures par éléments finis. Volume 1 : solides élastiques". Editions Hermès 1995.
56. A. Zemirline, M. Ouali et A. Mahieddine. "Static Study of Piezoelectric Bimorph Beams with Delamination Zone" International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering Vol: 8, No:12, (2014) 2052-2055.
57. A. Zemirline, M. Ouali et A. Mahieddine. "Study of the Delamination in the Case of Piezoelectric Bimorph Beams "Static Behavior". Arabian Journal for Science and Engineering. V.40. (2015). 2747–2761, (DOI) 10.1007/s13369-015-1754-2.
58. A. Zemirline, M. Ouali et A. Mahieddine. "Dynamic behavior of piezoelectric bimorph beams with a delamination zone". Steel and Composite Structures V. 19, No. 3 (2015) 759-776. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.19.3.759>

59. M. Chervreuil. "Sur une nouvelle approche en calcul dynamique transitoire, incluant les basses et moyennes fréquences". Thèse de Doctorat de l'école nationale supérieure de Cachan (2005).
60. V. Jaumoulié. "Dynamique Des Structures `A Interfaces Non Linéaires Extension Des Techniques De Balance Harmonique" Thèse de Doctorat de l'école centrale de Lyon (2011).
61. J-C, Craveur, "modélisation des structures calcul par éléments finis". Dunod 2eme edition 2001.
62. J-F. Capsal "Elaboration Et Analyse Des Proprietes Physiques De Nanocomposites Hybrides Ferroelectriques" Thèse de Doctorat de l'université de "Toulouse III - Paul Sabatier ". (2008).
63. V.Y. Perel, and A.N. Palazotto, "Finite element formulation for dynamics of delaminated composite beams with piezoelectric actuators" International Journal of Solids and Structures V.39, (2002), 4457–4483
64. G. V. Kumar, S. Raja, K. B. Prassana et V. Sudha, "Finite element analysis and vibration control of a deep composite cylindrical Shell using MFC actuators". Smart materials research V (2012). Doi: 10.11.55/2012/513271.
65. V. Piefort et A. Premont, "modeling of smart piezoelectric shell structures with finite elements". ISMA 25, Leuven, Belguim. Sept 2000.
66. T. Nestorovic, S. Shabadi, D. Marinkovic et M. Trajkov. "modelling of piezoelectric smart structures by implementation of user defined shell finite element". Facta Universitatis Sries: Mechanical engineering. V. 11, N°1(2013). 1-12.

#### Liens Internet utiles

- L 1. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Piezoelectricite> Consulté le 23.10.2015
- L 2. [http://www.eco-energie.ch/cms/index.php?option=com\\_content&view=article&id=96:agora-energy&catid=17:news&Itemid=111](http://www.eco-energie.ch/cms/index.php?option=com_content&view=article&id=96:agora-energy&catid=17:news&Itemid=111) Consulté le 23.10.2015
- L 3. [http://www.geniemeca.fpms.ac.be/Recherche/recherche\\_piezoelectrique.htm](http://www.geniemeca.fpms.ac.be/Recherche/recherche_piezoelectrique.htm) Consulté le 23.10.2015
- L 4. <http://substance.etsmtl.ca/festo-devoile-ses-nouveaux-insectes-bioniques/> Consulté le 23.10.2015
- L 5. [http://www.nature.com/scientificamerican/journal/v308/n3/box/scientificamerican0313-60\\_BX1.html](http://www.nature.com/scientificamerican/journal/v308/n3/box/scientificamerican0313-60_BX1.html) Consulté le 23.10.2015

L 6. <http://technologie.joueb.com/news/proteus-le-nano-robot> Consulté le 23.10.2015

L 7. [https://en.wikipedia.org/wiki/Raymond\\_D.\\_Mindlin](https://en.wikipedia.org/wiki/Raymond_D._Mindlin) Consulté le 23.10.2015

L 8. [https://en.wikipedia.org/wiki/Mindlin%E2%80%93Reissner\\_plate\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Mindlin%E2%80%93Reissner_plate_theory)  
Consulté le 23.10.2015