

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA1**

**Faculté de technologie**

Département de mécanique

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

En Génie mécanique

Spécialité : construction mécanique

**INTEGRATION DES NOUVELLES TECHNIQUES**

**DANS L'ANALYSE MODALE DES STRUCTURES.**

Par

**Nasreddine BENYOUCEF**

Devant le jury composé de :

M.OUALI	Professeur	USD de Blida	Président
H.ZAHLOUL	Professeur	U .de Chlef	Examineur
M.TEMMAR	M.C.A	USD de Blida	Examineur
Abdelkrim AIAD	Professeur	USD de Blida	Rapporteur

Blida 2016

## ملخص

البحث المتأنى و المستمر لتحسين النوعية في كل المجالات المتعلقة بالميكانيك تؤدي بالمصممين على العمل من اجل الفهم الجيد أو توقع لتصرف البنيات التي تخضع لظروف عمل قاسية. السلوك التحريكي له أهمية خاصة و في هذا الإطار، فان معرفة الخصائص الذاتية للبنيات، ونعني بها الذبذبات النوعية، الأشكال النمطية و معاملات التخماد، مهم جدا. هذه الخصائص يكون تحديدها بالتحليل النمطي الذي يعتبر أداة فعالة إن على المستوى النظري أو التجريبي. إن الأبحاث لا تتوقف عن التطور في هذا الميدان و تقنيات جديدة مقترحة. نذكر، من بينها، التحليل النمطي العملي و التحليل النمطي الافتراضي والذان يختلفان عن التحليل النمطي التقليدي بمقارباتهما، معطياتهما وفرضياتهما. الهدف من هذه المذكرة هو إدخال مفاهيم التحليل النمطي العملي و تطبيقه عن طريق نماذج لجمل ميكانيكية بسيطة نسبيا. و قد تمت مطابقة النتائج المتحصل عليها بالتحليل النمطي التقليدي ومحاسن و مساوئ المقاربتين وضعت تحت الدراسة.

## RESUME

La recherche constante de l'amélioration de la qualité dans tous les domaines où intervient la mécanique conduit les concepteurs à œuvrer pour une meilleure connaissance ou prédiction du comportement des structures soumises à des conditions sévères de fonctionnement. Le comportement dynamique jouit d'un intérêt particulier et dans ce cadre, la connaissance des propriétés intrinsèques des structures, à savoir les fréquences propres, les déformées modales et les facteurs d'amortissement, est très importante. Ces propriétés sont déterminées par une analyse modale qui s'avère un outil très efficace aussi bien au niveau théorique qu'expérimental. Les recherches ne cessent d'évoluer dans ce domaine et des techniques nouvelles sont proposées. On cite, entre autres, l'analyse modale opérationnelle et l'analyse modale virtuelle qui se distinguent de l'analyse traditionnelle par leurs approches, données et hypothèses. L'objet de ce mémoire est d'introduire les concepts de l'analyse modale opérationnelle et son application à travers des exemples de systèmes mécaniques relativement simples. Une confrontation des résultats obtenus avec ceux de l'analyse classique est menée et les avantages et inconvénients de chacune des deux approches sont mis en évidence.

## **ABSTRACT**

The constant search for improving the quality in all areas involving mechanics led designers to work for a better knowledge or prediction of the behaviour of structures subjected to severe operating conditions. Dynamic behaviour is of particular interest and in this context, the knowledge of the intrinsic properties of structures, namely the eigenfrequencies, the mode shapes and damping factors, is very important. These properties are determined by a modal analysis which is a very effective tool as well as experimental-theoretical level. Researchs are constantly evolving in this field and new techniques are proposed such as operational modal analysis and virtual modal analysis which differ from the traditional analysis in approaches, data and assumptions. The purpose of this work is to introduce the concepts of operational modal analysis and its application through examples of relatively simple mechanical systems. A comparison of the obtained results with those of classical analysis is conducted and the advantages and disadvantages of both approaches are highlighted.

## **REMERCIEMENT**

Les travaux exposés dans ce mémoire ont été menés sous la direction du professeur A. AïAD au sein du département de Mécanique. Je tiens à le remercier vivement pour son aide, ses conseils, ses orientations et sa patience.

J'exprime ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à tous les enseignants qui m'ont suivi durant l'année théorique de Magister.

Je remercie le professeur M. Ouali qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance ainsi que le professeur H. Zahloul et Mr M. Temmar pour leur disponibilité et pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur soutien en particulier Mr M. Latef qui m'a beaucoup aidé dans la partie programmation et Mr H. Osmani pour sa grande disponibilité.

Enfin j'adresse une pensée particulière à mes défunts parents pour leurs sacrifices et l'éducation qu'ils m'ont inculquée sans oublier mon épouse pour sa patience ainsi que mes chers enfants Rahil, Abdellah et Youcef.

# TABLE DES MATIERES

## CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE .....	11
-----------------------------	----

## CHAPITRE 2

GENERALITES SUR LES VIBRATIONS DES STRUCTURES .....	15
---	----

2.1 Introduction .....	15
------------------------	----

2.2 Nécessité .....	16
---------------------	----

2.3 Possibilités .....	16
------------------------	----

2.4 Méthodes d'identification et analyse modale .....	17
---	----

2.5 Modélisation et grande structures .....	19
---	----

2.6 Concepts Fondamentaux .....	20
---------------------------------	----

2.7 Systèmes continus/ Système discrets .....	20
---	----

2.7.1 Système discrets .....	20
------------------------------	----

2.7.2 Systèmes Continus .....	21
-------------------------------	----

2.8 Systèmes Conservatifs et Systèmes dissipatifs .....	21
---	----

2.8.1 Modélisation et mise en équations .....	21
---	----

2.8.2 Modélisation de l'amortissement .....	23
---	----

2.8.2.1 Le modèle d'amortissement visqueux (linéaire, proportionnel) .....	23
--	----

2.8.2.2 Le modèle d'amortissement hystérétique (interne) .....	24
--	----

2.8.3 Le système dissipatif (amorti)/Le système conservatif (non amorti)....	25
--	----

2.8.4 Amortissement (visqueux) équivalent .....	26
---	----

## CHAPITRE 3

ANALYSE MODALE CLASSIQUE .....	28
--------------------------------	----

3.1 Introduction .....	28
------------------------	----

3.2 Analyse Modale .....	28
--------------------------	----

3.2.1 Définition .....	28
------------------------	----

3.2.2 Présentation .....	29
--------------------------	----

3.3 Le modèle modale .....	31
----------------------------	----

3.4 Modes réels et complexes .....	31
3.5 Domaine temporel et domaine fréquentiel .....	32
3.5.1 Résolution par approche fréquentielle direct .....	33
3.5.2 Résolution par approche modale .....	33
3.5.2.1 Théorème de superposition .....	33
3.5.2.2 Approche modale .....	34
3.6 Système à un seul degré de liberté (1ddl) .....	35
3.7 Système a plusieurs degrés de liberté (nddl) .....	37
3.7.1 Méthode de la base modale .....	37
3.7.2 Calcul de la réponse dynamique .....	40
3.7.2.1 Résolution par la méthode de superposition modale .....	41
3.7.2.2 Résolution par projection dans l'espace d'état .....	42
3.8 Etude d'un système amorti .....	43
3.8.1 Analyse modale expérimentale .....	43
3.8.2 Fonctions de transfert .....	44
<b>CHAPITRE 4</b>	
<b>ANALYSE MODALE OPERATIONNELLE .....</b>	<b>50</b>
4.1 Introduction .....	50
4.2 Définition .....	50
4.3 Limitations de l'analyse modale classique .....	50
4.4 Principe de la Technique d'analyse modale opérationnelle .....	51
4.5 Motivations .....	52
4.6 Avantage d'employer l'analyse modale opérationnelle .....	52
4.7 Limitations .....	54
4.8 Domaines d'application .....	54
4.8.1 Essai non destructif .....	54
4.8.2 Détection des endommagements .....	54
4.8.3 Détection de niveau de vibrations .....	55
4.8.4 Analyse de fatigue .....	55

4.9 Les instruments de mesures et appareillages.....	55
4.9.1 L'excitation .....	55
4.9.2 Capteurs de vibrations .....	56
4.9.3 Acquisition des données .....	57
4.9.4 Traitement du signal .....	57
4.10 Méthodes d'identification en (OMA) .....	58
4.11 Méthode de puissance spectrale .....	59
4.11.1 L'énoncé de la méthode .....	79
4.11.2 Identifications des paramètres modaux par la méthode de puissance spectrale .....	61
CHAPITRE 5	
APPLICATIONS ET RESULTATS .....	64
5.1 Introduction .....	64
5.2 Les critères .....	64
5.3 Etapes à suivre .....	64
5.3.1 Définition du modèle .....	65
5.3.2 Exploitations des résultats .....	65
5.4 Applications .....	65
5.4.1 Application 1 : Système a 1ddl amorti libre .....	66
5.4.2 Application 2 : Système a 2ddl libre amorti .....	69
5.4.3 Application 3 : Système a 4ddl libre amorti .....	74
5.4.4 Application 4 : une barre encastrée-libre amortie.....	83
5.4.5 Application 5 : une poutre encastrée-encastrée non amortie. ....	88
CONCLUSION ET PERSPECTIVES .....	100
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS.....	102
BIBLIOGRAPHIE .....	104
Annexe.....	110

## LA LISTE DES GRAPHIQUES, TABLEAUX ET ILLUSTRATIONS

### 1- Les Figures :

Figure 2.1 : Classification des techniques d'identification modale.....	18
Figure 2.2 : Principes d'identification de défauts selon Staszewski.....	19
Figure 2.3 : Système à 2 ddl forcé. ....	21
Figure 2.4 : Système conservatif (1ddl). ....	26
Figure 3.1 : Système dissipatif (à 1ddl). ....	35
Figure 3.2 : Spectre d'une fonction de transfert. ....	45
Figure 3.3 : Protocole d'identification modale.....	45
Figure 3.4 : Module et phase des 3 FRF. ....	46
Figure 3.5 : Déformées modales des 3 premiers modes ....	49
Figure 4.1 : Principe de l'OMA. ....	53
Figure 4.2 : Capteur uni axial ....	56
Figure 4.3 : Capteur triaxial ....	56
Figure 4.4 : Le système d'acquisition ....	57
Figure 4.5 : Système d'acquisition et d'analyse des données ....	58
Figure 4.6 : Enregistrement en temps. ....	60
Figure 4.7 : Densité spectrale de puissance, PSD. ....	60
Figure 4.8 : Méthode de puissance spectrale.....	62
Figure 5.1 : Système a 1ddl amorti libre ....	66
Figure 5.2 : La réponse $x(t)$ . ....	67
Figure 5.3 : FFT de $x(t)$ . ....	67
Figure 5.4 : PSD de $x(t)$ . ....	68
Figure 5.5 : Système a 2ddl amorti libre ....	69



Figure 5.6 : Les réponses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ .	70
Figure 5.7 : FFT de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ .	71
Figure 5.8 : PSD de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ .	72
Figure 5.9 : Système a 4ddl amorti libre.	74
Figure 5.10 : La réponse $x_1(t)$ .	75
Figure 5.11 : La réponse $x_2(t)$ .	75
Figure 5.12 : La réponse $x_3(t)$ .	76
Figure 5.13 : La réponse $x_4(t)$ .	76
Figure 5.14 : FFT de la réponse $x_1(t)$ .	77
Figure 5.15 : FFT de la réponse $x_2(t)$ .	77
Figure 5.16 : FFT de la réponse $x_3(t)$ .	78
Figure 5.17 : FFT de la réponse $x_4(t)$ .	78
Figure 5.18 : PSD de $x_1(t)$ .	79
Figure 5.19 : PSD de $x_2(t)$ .	79
Figure 5.20 : PSD de $x_3(t)$ .	80
Figure 5.21 : PSD de $x_4(t)$ .	80
Figure 5.22 : Barre encasté-libre amortie	83
Figure 5.23 : Les réponses $x_1(t)$ et $x_2(t)$	84
Figure 5.24 : FFT de $x_1(t)$ et $x_2(t)$	85
Figure 5.25 : PSD de $x_1(t)$ et $x_2(t)$	86
Figure 5.26 : une poutre bi-encastée non amortie.	88
Figure 5.27 : La réponse $x_1(t)$ de la poutre bi-encastée.	90
Figure 5.28 : La réponse $r_1(t)$ de la poutre bi-encastée.	90
Figure 5.29 : La réponse $x_2(t)$ de la poutre bi-encastée.	91

Figure 5.30 : La réponse $x_2(t)$ de la poutre bi-encastree.....	91
Figure 5.31 : La réponse $x_3(t)$ de la poutre bi-encastree.....	92
Figure 5.32 : La réponse $r_3(t)$ de la poutre bi-encastree.....	92
Figure 5.33 : FFT de $x_1(t)$ de la poutre bi-encastree.....	93
Figure 5.34 : FFT de $r_1(t)$ de la poutre bi-encastree.....	93
Figure 5.35 : FFT de $x_2(t)$ de la poutre bi-encastree.....	94
Figure 5.36 : FFT de $r_2(t)$ de la poutre bi-encastree.....	94
Figure 5.37 : FFT de $x_3(t)$ de la poutre bi-encastree.....	95
Figure 5.38 : FFT de $r_3(t)$ de la poutre bi-encastree.....	95
Figure 5.39 : PSD de $x_1(t)$ de la poutre bi-encastree.....	96
Figure 5.40 : PSD de $r_1(t)$ de la poutre bi-encastree.....	96
Figure 5.41 : PSD de $x_2(t)$ de la poutre bi-encastree.....	97
Figure 5.42 : PSD de $r_2(t)$ de la poutre bi-encastree.....	97
Figure 5.43 : PSD de $x_3(t)$ de la poutre bi-encastree.....	98
Figure 5.44 : PSD de $r_3(t)$ de la poutre bi-encastree.....	98

## 2- Les Tableaux :

Tableau 3.1 : Dénomination normalisée de la fonction de transfert.....	44
Tableau 4.1 : Récapitulation de la relation entre l'analyse modale opérationnelle (AMO) et l'analyse modale classique.....	63
Tableau 5.1 : Les caractéristiques du système selon PSD.....	68
Tableau 5.2 : Comparaison des résultats entre les deux méthodes.....	69
Tableau 5.3 : Les caractéristiques du système selon PSD.....	73

Tableau 5.4 : Les caractéristiques du système selon [216].	73
Tableau 5.5 : Comparaison entre les deux méthodes.	73
Tableau 5.6 : Les caractéristiques modales du système selon PSD.	81
Tableau 5.7 : Les caractéristiques modales du système selon [16].	81
Tableau 5.8 : Comparaison entre les deux méthodes.	82
Tableau 5.9 : les caractéristiques de la barre selon PSD.	87
Tableau 5.10 : les caractéristiques du système selon [Gmur].	87
Tableau 5.11 : comparaison entre les deux méthodes.	87
Tableau 5.12 : comparaison des fréquences propres issues des deux méthodes.	99
3- <u>Les illustrations</u> :	
Illustration 3.1	35
Illustration 3.2	45

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION GENEALE

Depuis longtemps, les chercheurs ont pris conscience de l'importance des effets des vibrations et des chocs mécaniques, le comportement des structures, le bien-être et la sante des individus [1]. Les vibrations peuvent être un symptôme de défaut de fonctionnement, de dimensionnement ou généralement un signal de danger ; mais d'autre part les vibrations peuvent être un phénomène utile : passoirs vibrants, les mélangeurs, sont des exemples les plus évidents [2].

Le but de la dynamique des structures est l'étude du comportement des structures soumises à des vibrations ou aux chocs [3]. Mais avant de confronter les problèmes causés par les vibrations et remédier à toute anomalie dans une structure vibrante amortie ou non, il faut déduire ses caractéristiques modales [4]. L'analyse modale a pour but d'extraire ces caractéristiques à partir de l'expérimentation ou l'analytique. La technique a été développée d'abord dans l'industrie aéronautique dans les années 40 et est devenue très utilisée dans le domaine technologique à partir des années 70. L'analyse modale est très largement appliquée à nos jours [5], car elle représente une méthode efficace et rapide, mettant en œuvre des moyens non couteux [6].

À partir des techniques simples de surveillance, l'analyse modale est devenue une approche « standard » dans le développement de produit mécanique ; commençant du modèle modal, des améliorations peuvent être prévues et la structure peut être optimisée [7].

D'autre part, l'analyse modale classique dite traditionnelle (expérimentale et analytique), malgré son évolution connaît plusieurs limitations [8]; à savoir :

- l'exigence de connaître l'excitation (entrée) pour évaluer les fonctions de réponse en fréquences(FRF) ou les fonctions de réponse d'impulsion (IRF). Dans certains cas, l'excitation des structures de grandes tailles est difficile sinon impossible.

- les conditions de fonctionnement sont souvent différentes de celles adoptées dans les essais car l'analyse modale classique est conduite des fois dans un environnement de laboratoire.

- les conditions aux limites sont simulées parce que des essais sont habituellement effectués sur des modèles au lieu des systèmes réels.

De plus ,les grandes structures subissent souvent des charges naturelles difficilement mesurables et les méthodes d'identification modale traditionnelles sont basées sur des essais durant lesquels on connaît la force d'excitation et on mesure les fonctions de transfert (voir chapitre 3)[9] ;c'est pourquoi, depuis le début des années 90 la communauté de génie civil et de mécanique est orientée vers une nouvelle technique dite analyse modale opérationnelle(AMO), également appelée analyse modale ambiante, avec des applications sur plusieurs structures, y compris des bâtiments ,des ponts ,des avions et des structures tournantes. L'AMO emploie des mesures de réponses structurales de l'excitation ambiante pour extraire les caractéristiques modales.

Dans cette technique les paramètres modaux sont estimés à partir des données de réponse sans connaître la force d'excitation.

La méthode est particulièrement utilisée pour l'évaluation des paramètres modaux des grandes structures ou l'excitation artificielle et la détermination des forces externes présentent un problème à cause des dimensions des structures, leurs formes ou leurs endroits (structures mécaniques, génie civil, etc....).

La force d'entrée doit satisfaire des conditions spécifiques, c'est une excitation stationnaire de bruit blanc [10] ; comme par exemple le vent sur les édifices, les surcharges sur les ponts et les vibrations sur les grandes machines.

L'avantage remarquable de ce procédé comparé à l'analyse modale standard (classique) est que la technique de mesure est basée sur la réponse de la structure sous des forces dites d'opération (bruit blanc).

D'autres avantages de cette méthode sont son prix d'exécution très bas et le fait qu'elle ne demande pas un arrêt de l'opération [11].

L'objet de ce mémoire s'inscrit dans le cadre général de l'analyse modale et principalement l'identification des paramètres modaux d'une structure avec l'analyse modale opérationnelle, en comparant les résultats obtenus par cette dernière avec ceux obtenus par l'analyse modale expérimentale (AME) et l'analyse modale théorique (AMT) tirés de la littérature, et que la méthode utilisée s'appelle « la méthode de puissance spectrale ».

Le mémoire est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre est une introduction générale du sujet, où on parle de l'évolution de l'analyse modale opérationnelle.

Dans le second chapitre on présentera les principes fondamentaux des vibrations et les différents systèmes de modélisation, comme introduction de l'analyse modale classique.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse modale classique (traditionnelle) ou nous expliciterons les outils théoriques employés pour déterminer les caractéristiques modales d'un système discret à 1ddl ou plusieurs ddl, d'où la fonction de transfert doit être déterminée en connaissant l'entrée (l'excitation) et la sortie (la réponse). On termine cette partie par des illustrations pour bien fixer les idées.

Avant d'entamer nos applications; le quatrième chapitre est consacré à la technique d'AMO qui est le noyau de notre travail ; on va définir l'AMO, ses applications et la méthode utilisée, cette dernière dite méthode de puissance spectrale; dont les pics apparaissent dans le spectrogramme du spectre du signal de la réponse sont très importants pour la détermination des paramètres modaux d'une structure en vibration.

Le cinquième chapitre est consacré à des applications sur des systèmes mécaniques discrets et continus relativement simples.

Le but de ces applications est d'illustrer l'AMO et de mettre en évidence, de manière perceptible, ses avantages par rapport à l'analyse modale classique à travers des exemples simples dont on pourra vérifier aisément les résultats par une confrontation avec des résultats existants.

Nous finirons notre travail par une conclusion générale qui résume le contenu de mémoire et précisément les résultats issus des applications choisies et leurs validations. Des idées ont été proposées comme perspectives dans le but de développer la méthode étudiée pour terminer notre tâche.

## CHAPITRE 2

### GÉNÉRALITÉS SUR LES VIBRATIONS DES STRUCTURES

#### 2.1 Introduction :

L'étude présentée dans ce mémoire se limite aux systèmes mécaniques linéaires, et l'objectif de ce premier chapitre est de définir les notions de base des vibrations de ces systèmes et les différents phénomènes liés à la linéarité.

Les vibrations ont des origines diverses, un mauvais dimensionnement ou un vieillissement d'une installation provoque des problèmes vibratoires.

La plus part des structures mécaniques rencontrent des problèmes de vibrations. Les sollicitations de l'environnement; les effets dynamiques de fonctionnement de la structure et les influences climatiques sont des facteurs parmi plusieurs autres qui produisent des changements de caractéristiques mécanique de la structure; ou les conditions aux limites. Ces changements modifient le comportement global d'où la réponse de la structure est perturbée [12]. Mais aucune solution définitive n'est adoptée ; donc le chercheur par son expérience va mesurer un ensemble de réponses de la structure sous l'étude. L'analyse de ces réponses permettra de faciliter le diagnostic et d'instaurer une solution adéquate [13].

Dans tous les cas, la détection de niveaux vibratoires élevés entraîne un arrêt de production, d'où la recherche et la mise en place de solution ont un impact important sur la qualité du service et le rendement.

Pour les vibrations linéaires, la gamme de techniques ou de logiciels dédiés à l'étude expérimentale ou numérique est très large et permet de traiter un grand nombre de problèmes de structures ou de rayonnement acoustique; l'analyse modale en particulier constitue un outil puissant et largement utilisé. En linéaire, les concepts théoriques sont clairs et de nombreux outils classiques sont bien maîtrisés et disponibles sur le marché [14].



Finalement, une solution spécifique doit être apportée rapidement pour permettre le bon fonctionnement des installations [12].

## 2.2 Nécessité d'un diagnostic :

Dans le cas d'un problème de vibrations, il est nécessaire d'entamer un diagnostic complet, en estimant la qualité des matériaux utilisés dans la construction de la structure, leur vieillissement voir leur endommagement [15]. Cependant, la détection de la défaillance et le temps de l'évolution de la gravité de cette dernière sont deux objectifs importants des maintenanciers [16].

Pour remédier a un problème vibratoire après sa détection, deux solutions sont envisagées suivant la nature du probleme [12] :

- une étude complète de la structure, sur la base d'un modèle numérique recalé par rapport au comportement expérimental. Ce modèle ne fournit qu'un nombre limité d'informations et la taille des calculs réalisables est aussi limitée [15]. Pour cette raison plusieurs modifications sont étudiées, jusqu'a mettre fin au problème. Ce type d'étude est long.

- une étude d'un problème qui se pose plus ponctuellement et qui nécessite parfois un arrêt du processus de fonctionnement pour traiter ce type de situation. Il faut réagir rapidement et les modifications ainsi proposées ne cherchent pas à être générales, et autorisent la reprise de fonctionnement de la structure dans les plus bref délais et les meilleures conditions de sécurité [12].

## 2.3 Possibilités :

La réalisation d'études complètes de ces problèmes de vibrations est maintenant bien maitrisée et les méthodes des analyses modales disposent d'outils expérimentaux et numériques adaptés permettant de prédire correctement l'effet de modification sur la structure lorsqu'un modèle prédictif, expérimental ou numérique, est disponible. Plusieurs logiciels d'analyse expérimentale proposent des solutions en s'appuyant sur les analyses réalisées sur la structure [12].

L'analyse modale englobe l'ensemble des techniques permettant de déterminer les caractéristiques dynamiques des structures mécaniques à savoir : les fréquences propres, les facteurs d'amortissement et les déformées modales.

Ces techniques se répartissent suivant plusieurs approches:

-des approches analytiques formant ce que nous appelons l'analyse modale analytique (AMT) [17] ou numérique(AMN) [1].

-des techniques expérimentales constituant l'ensemble de l'analyse modale expérimentale (AME) [17]

-Un procédé, qui permet d'extraire des paramètres modaux d'une structure en condition de fonctionnement; c'est l'analyse modale opérationnelle (AMO)[10]

-l'analyse modale virtuelle, c'est-à-dire faire une simulation complète d'un test de l'analyse modale expérimentale sur un ordinateur, y compris la structure d'essai, l'instrumentation, l'acquisition de données et l'identification des paramètres modaux [18].

#### 2.4 Méthodes d'identification et analyse modale :

Les méthodes qui peuvent être appliquées pour résoudre le problème du couplage des systèmes vibrants sont principalement issues de la problématique des basses fréquences [19].Ce domaine de recherche est très riche ;les vibrations recueillies lors des tests de mesures sont porteuses d'informations sur l'état de fonctionnement de la structure analysée [20]. On peut distinguer deux pôles importants : les méthodes robustes d'analyse modale qui permettent d'identifier les paramètres modaux (fréquences amortissement et déformée à chaque résonance) présentés en figure2.1 inspirée de Maia et al [21] ; et les travaux qui se basent sur ces indicateurs modaux pour identifier les défauts (structuraux ou d'assemblages) [19].

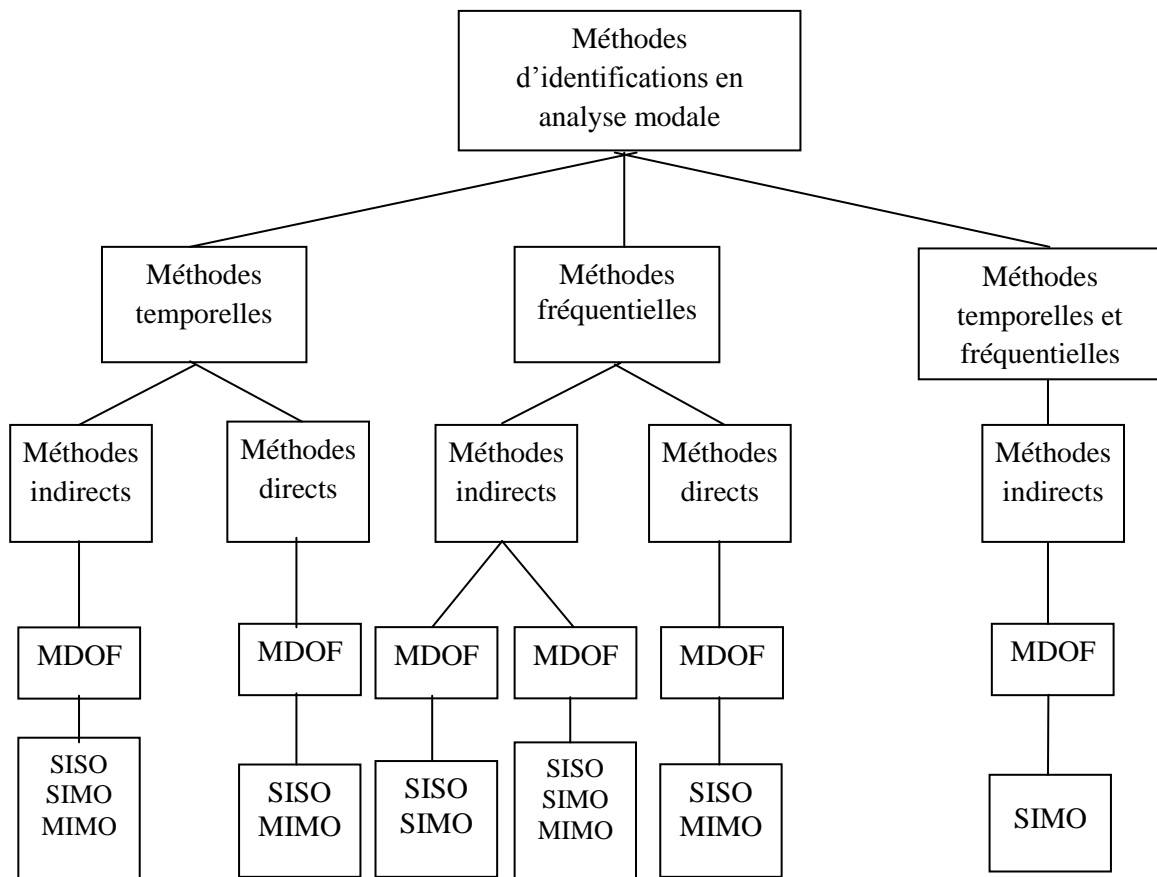


Figure 2.1 : Classification des techniques d'identification modale.

SISO : une entrée - une sortie (single input-single output)

SIMO : une entrée - multiples sorties (single input-multi output)

MIMO : multiples entrées - multiples sorties (multi input-multi output).

La figure 2.2 [13] résume les différents principes basés sur la dynamique des structures dans le domaine de l'identification de défauts. La lecture de ce graphique peut se voir comme une introduction aux problèmes d'identification de défauts par méthode vibratoire [13].

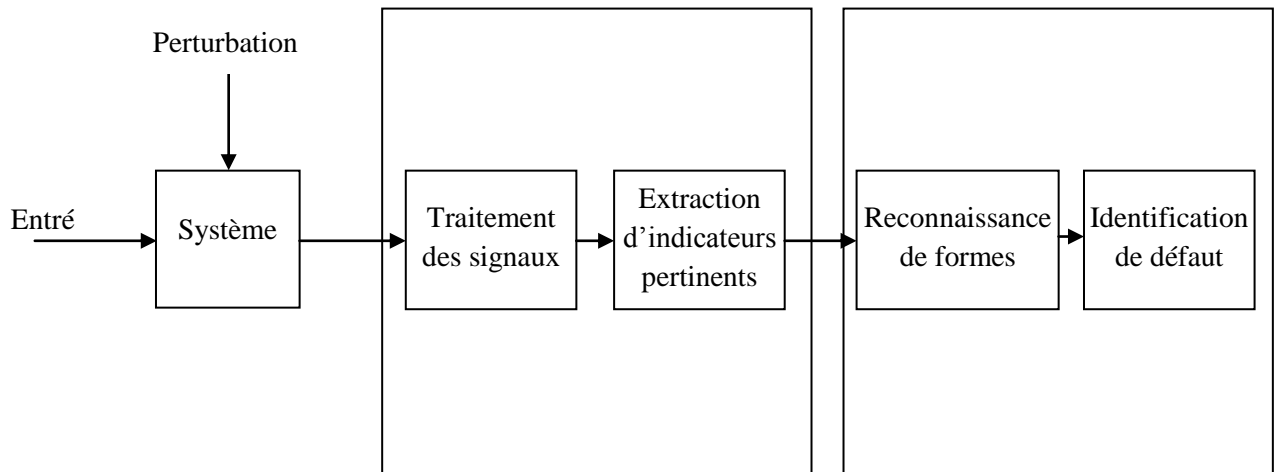


Figure 2.2 : Principes d'identification de défauts selon Staszewski.

Certains travaux essaient de lier les deux pôles. On peut citer les travaux initiaux d'Adams et al ou de Richardson [13] sur la corrélation des défauts sur les structures, avec l'apparition de changement dans les paramètres modaux.

Ce dernier auteur est d'ailleurs à l'origine de l'analyse modale expérimentale avec Formenti. En effet, ils développèrent les outils de lissage de courbes (complexe exponentiel, algorithme de Prony) pour estimer les déformées modales, algorithmes en suite implémentés dans SDT (Structural Dynamics Toolbox), une boîte à outils MATLAB permettant d'établir la corrélation entre modèle 3D (éléments finis) et analyse modale expérimentale ; la présentation plus détaillée des méthodes d'analyse modale est dans le chapitre suivant.

### 2.5 Modélisation et grande Structures :

Les grandes structures (Aérospatiales, Ferroviaires, Navales, Automobile, etc.....) et de géométrie complexe sont trop importantes pour que leur comportement puisse être analysé de façon globale par des méthodes d'approximation classique type Rayleigh, Ritz ou Galerkin [17].

Pour remédier aux insuffisances de ces méthodes classiques, et vu l'exigence accrue de réaliser des structures de plus en plus fiables, de nombreux niveaux de complexité peuvent être atteints grâce aux nouvelles techniques de modélisation, sur la base du modèle choisi et les paramètres injectés dans ce dernier [15].

La mise en équations de solides rigides reliés par des éléments flexibles (de raideurs connues) est des amortisseurs (de constantes données) fournit une modélisation exacte du système. Ses formulations sont générales mais ses résultats analytiques se limitent à des cas élémentaires, car, les vibrations d'une structure plus complexes, admettant un nombre élevé de (ddl), nécessite une méthode générale, modulable et programmable [13]. On utilise aujourd'hui la méthode des éléments finis(MEF) qui s'avère d'un très grand apport aussi bien dans le calcul des structures que dans d'autres domaines comme les problèmes de thermique ou de mécanique des fluides [17].

## 2.6 Concepts fondamentaux :

Avant de commencer la présentation et l'introduction de la méthode proposée (AMO), les relations de base et les concepts fondamentaux liés aux méthodes de l'analyse modale classique (expérimentale et théorique) sont rappelés dans le chapitre suivant, ce qui permet de préciser les notions et les notations

Le formalisme utilisé suppose que le problème continu a été discrétisé. On suppose dès lors que la modélisation introduite par cette étape permet de rendre correctement le comportement dynamique de la structure étudiée [12].

## 2.7 Systèmes continus / Système discrets :

### 2.7.1 Systèmes discrets :

Les plus rencontrés sont [22] :

- Les systèmes naturellement (ou volontairement) discrets.
- Les systèmes de solides rigides.
- Les treillis.

La nature discrète de ces problèmes permet de pousser relativement loin l'étude, surtout lorsque le nombre de paramètres est limité.

### 2.7.2 Systèmes Continus:

Les systèmes continus sont rencontrés en:

- Mécanique des milieux déformables solides.
- Mécanique des milieux continus fluides.
- Thermique des milieux continus (fluides ou solides).
- Vibration des milieux continus (fluides ou solides).

Les problèmes traités analytiquement, sont généralement unidimensionnels ou bien de géométrie simple. Pour pouvoir traiter de situations réelles de géométries complexes bi ou tridimensionnelles il est indispensable de passer par une première étape qui transforme un système continu en un système discret à l'aide d'une première forme d'approximation : la discrétisation (les deux autres sont la linéarisation et l'intégration numérique)

### 2.8 Systèmes Conservatifs et Systèmes dissipatifs:

#### 2.8.1 Modélisation et mise en équations:

Pour un système à 2 ddl (figure 2.3), les équations de mouvement sont [23], [24]:

$$\sum F_{i=} m_i \ddot{x}_i \quad ; \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

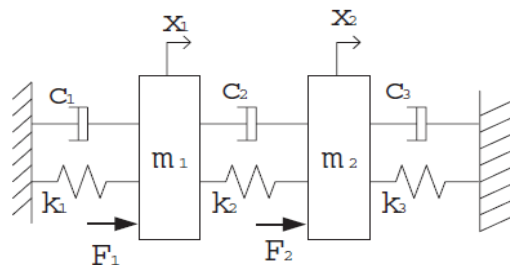


Figure 2.3 : Système à 2 ddl forcé.

$$\begin{cases} i = 1: m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = F_1(t) \\ i = 2: m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = F_2(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

On obtient deux (02) équations différentielles couplées (2.2) ; les termes de couplage sont  $k_2$  et  $c_2$ .

(2.2) s'écrit sous forme globale (matricielle) suivante:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Le système d'équation (2.3) devient :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.4)$$

Où :

$[M]$ : Matrice de masse (inerties).

$[C]$ : Matrice d'amortissement

$[K]$ : Matrice de rigidités

$\{x(t)\}$  : Vecteur des déplacements

$\{\dot{x}(t)\}$  : Vecteur des vitesses

$\{\ddot{x}(t)\}$ : Vecteur des accélérations

$\{f(t)\}$ : Vecteur des efforts extérieurs (sollicitations)

Remarque:

-pour un système à 1 ddl la formule (2.4) s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.5)$$

-pour un système à  $n$  ddl la formule (2.4) ne change pas de forme sauf que les matrices  $[M]$  ;  $[C]$  et  $[K]$  sont de taille  $(n \times n)$  et les vecteurs  $\{\ddot{x}(t)\}$  ;  $\{\dot{x}(t)\}$  ;  $\{x(t)\}$  et  $\{f(t)\}$  sont de taille  $(n \times 1)$ .

L'équation générale régissant le mouvement d'un système à  $n$  ddl amorti soumis à des sollicitations extérieures s'écrit sous la forme de (2.4)

Les trois matrices structurelles  $[M]$ ,  $[K]$  et  $[C]$  sont symétriques, la matrice de masse  $[M]$  peut être définie positive ou strictement positive si elle est construite à partir d'un modèle consistant au sens énergétique [1].

### 2.8.2 Modélisation de l'amortissement:

Les analyses dynamiques linéaires et non linéaires, pour l'étude de la réponse vibratoire avec une excitation en force ou en mouvement imposé ou pour l'analyse modèle complexe, nécessitent d'ajouter des caractéristiques d'amortissement mécaniques de rigidité et de masse [25]. C'est le cas de tout système réel, où les vibrations résultent d'un transfert alternatif entre énergie cinétique et potentielle, c'est à dire une présence de dissipation qui a des effets complexes : effet amortissant dans les zones d'amplification proches des phénomènes de résonance, effet amplifiant dans les zones d'atténuation [26].

On dispose de plusieurs modélisations classique, applicables à tous les types d'élément finis disponibles [25], [17].

Parmi les types d'amortissement on cite :

#### 2.8.2.1 Le modèle d'amortissement visqueux (linéaire, proportionnel) :

Le modèle d'amortissement visqueux est le plus couramment utilisé [25] il correspond comme tout genre d'amortissement à la modélisation d'une énergie dissipée [25], [27]. Dans le cadre de l'hypothèse d'amortissement visqueux proportionnel « global », la forme de « Rayleigh » (2.6) est souvent utilisée, cela consiste à écrire la matrice d'amortissement  $[C]$  sous la forme [1], [17], [25]:

$$[C] = \alpha[K] + \beta [M] \quad (2.6)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les facteurs de proportionnalité entre les matrices de masse  $[M]$  et de rigidité  $[K]$  d'une part et la matrice de dissipation (d'amortissement)  $[C]$  d'autre part [1]. Ces coefficients sont déterminés expérimentalement [17], [27].

De ce fait, nous pouvons conserver la propriété d'orthogonalité des modes par rapport à la matrice d'amortissements. Cette propriété est fondamentale car elle permet d'utiliser l'analyse modale comme base de la réponse [27].



On en déduit l'écriture du coefficient de l'amortissement  $C_i$  pour le  $i^{\text{ème}}$  mode [28] :

$$C_i = 2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \quad (2.7)$$

Soit :

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (2.8)$$

La matrice  $[C]$  se réduit souvent à :

$$[C] = \alpha [K] \quad (2.9)$$

Car l'amortissement est plus lié à la rigidité qu'à l'inertie.

### 2.8.2.2 Le modèle d'amortissement hystérétique (interne):

Dit aussi « amortissement structural ». Le coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta$  est déterminé à partir d'un essai sous chargement cyclique harmonique à la pulsation  $\omega$  pour lequel on obtient une relation contrainte-déformation qui permet de définir [26] :

- L'énergie dissipée par cycle sous la forme :

$$E_c = \int \sigma d\varepsilon \quad (2.10)$$

- Le module de Young complexe  $E^*$ :

$$E^* = E_1 + jE_2 = E_1(1 + j\eta) \quad (2.11)$$

Tel que :

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (2.12)$$

$$D'où \begin{cases} E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \varphi = \text{partie réelle} \\ E_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \varphi = \text{partie imaginaire} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\eta = \frac{E_2}{E_1} = \operatorname{tg} \varphi : \text{Facteur de dissipation [25].} \quad (2.14)$$

En fin ; la popularité de l'amortissement proportionnel (amortissement de Rayleigh) dans les systèmes non tournants (ou les systèmes gyroscopiques à l'arrêt) réside dans le fait que la structure possède alors des modes vibratoires

réels et que le système d'équations différentielles (2.4) puisse être découplé. La génération de la matrice des pertes (amortissement)  $[C]$  présente en réalité de sérieuses difficultés en raison du manque d'information relative aux mécanismes et niveaux d'amortissement dans les structures rencontrées dans la pratique [1].

En pratique on utilise souvent l'amortissement visqueux équivalent ; le critère d'équivalence de deux (02) types d'amortissements différents est exprimé par l'équivalence (égalité) des énergies dissipées par chaque type d'amortissement. On utilise souvent la forme de « Rayleigh » (2.6) [23].

### 2.8.3 Le système dissipatif (amorti) / Le système conservatif (non amorti) :

Dans de nombreux domaines industriels, l'analyse modale d'une structure ou d'un composant mécanique peut être souvent limitée à l'étude de son régime conservatif (libre). Cette simplification, justifiée par la faible influence des amortissements sur les pulsations propres, facilite en outre les développements mathématiques de même que les calculs numériques [1]. Donc ; les modèles analytiques sont souvent définis à partir d'hypothèses concernant les propriétés inertielles et élastiques du système et se résument à la construction d'une matrice de masse  $[M]$  et d'une matrice de rigidité  $[K]$  en occultant l'amortissement [17] représenté par la matrice  $[C]$  dans la formule (2.4).

L'omission de ce dernier (l'amortissement) (figure 2.4 : système conservatif à 1ddl) conduit à la forme la plus simple des équations du mouvement (équation matricielle) de la structure ainsi modélisée ; et à partir de la formule (2.4) ; on obtient [1], [17]:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = F(t) \quad (2.15)$$

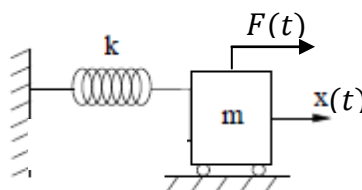


Figure 2.4 : Système conservatif (1ddl).

Cette équation est résolue en tenant compte des conditions aux limites cinématiques du problème [17]. Et les solutions cherchées pour cette équation sont régies par une même loi temporelle et sont de type harmonique si l'excitation  $F(t)$  est harmonique [1].

Mais lorsqu'on cherche à tenir compte de l'amortissement, c.à.d. si la structure mécanique est dissipative par un mécanisme d'amortissement interne ou externe de type visqueux (équivalent) [1] avec une formulation représentative de la matrice de perte  $[C]$  on doit émettre des hypothèses plus ou moins réalistes sur cette dernière [17], dans ce cas le comportement du système est régi par les équations différentielles (2.4) [1]

#### 2.8.4 Amortissement (visqueux) équivalent :

Les vibrations dans un système mécanique résultent d'un transfert alternatif entre énergie cinétique et potentielle qui, sans dissipation, perdure. En présence de dissipation, et c'est le cas de tout système réel, les amplitudes du mouvement convergent jusqu'à l'équilibre dynamique dans le cas d'un système forcé ; jusqu'à l'équilibre statique dans le cas d'un système libre [26].

Dans les mécanismes dissipateurs d'énergie on admet le plus souvent, pour l'analyse vibratoire, que l'amortisseur présente un comportement visqueux caractérisé par une constante de proportionnalité d'amortissement  $C$  par ce que [29] :

- le traitement des équations différentielles est plus simple.
- le facteur d'amortissement relatif de la dissipation structurelle est pratiquement assez petit pour que le comportement hystérétique des matériaux puisse être assimilé à un comportement visqueux.

Aussi, la modélisation de l'énergie dissipée dans un système par un amortisseur visqueux équivalent se révèle très utile et satisfaisante dans la pratique, tant que les cycles de sollicitations sont d'amplitude faible à modérées.

Lorsque l'amplitude de la déformation croit, cette modélisation se relève inappropriée car les mécanismes d'une dissipation mis en jeu ont pour origine les

déformations plastiques du système et sont très éloignés d'une dissipation visqueuse ; cette stratégie donc est appropriée a la prédiction du comportement de structures qui restent élastiques [30].

L'énergie dissipée au cours d'un cycle par l'amortisseur linéaire est donnée par

$$E_c = \oint F_0 du = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (c\dot{u}) \dot{u} dt = \pi c \bar{\omega} u_{max}^2 \quad (2.16)$$

Tel que :  $F_0$  : Force développée par l'amortisseur.

$\dot{u}$  : Vitesse relative des deux extrémités.

$u$  : Solution permanente.

$\bar{\omega}$  : Fréquence (réelle).

$c$  : Constante de proportionnalité (amortissement).

Écrivant que cette énergie est égale à l'énergie  $E_d$  dissipée par le système, la constante d'amortissement équivalente  $c_{eq}$  est donnée par [31] :

$$c_{eq} = \frac{E_d}{\pi \bar{\omega} u_{max}^2} \quad (2.17)$$

Alors, la description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée ( $E_d$ ) dans un cycle de vibration du système est égale à l'énergie dissipée ( $E_c$ ) dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement [26].

## CHAPITRE 3

### ANALYSE MODALE CLASSIQUE

#### 3.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous étudierons analytiquement le comportement vibratoire d'une structure mécanique et l'extraction de ces paramètres modaux, à travers leurs fonctions de réponse en fréquence.

Nous aborderons d'abord le traitement d'un model à 1ddl puis à plusieurs ddl. Une fois la mise en équations faite, par l'écriture de l'équation dynamique ainsi que les conditions aux limites, et des solutions analytiques seront recherchées de façon exacte si le système traité est un peu simple, mais ce n'est évidemment pas toujours le cas. D'où la nécessité de la discrétisation de la structure complexe et qui se limite à une forme (de discrétisation) très employée de manière industrielle.

#### 3.2 Analyse Modale :

L'identification (ou l'extraction) des paramètres modaux à partir des capteurs (Forces en entrée, accélérations en sorties) est un processus complexe. Deux approches sont généralement utilisées : l'approche temporelle et l'approche fréquentielle, cette dernière est la plus utilisée (estimation de la réponse en fréquence, FRF). L'approche temporelle est basée, elle, sur la création d'une matrice de convolution (qui résout les problèmes de l'approche fréquentielle) mais est sujette à un mauvais conditionnement car la réponse impulsionnelle est souvent instable [13].

##### 3.2.1 Définition :

L'analyse modale permet d'établir un modèle de comportement vibratoire d'une structure en basses fréquences (de quelques Hz jusqu'à quelques centaines de Hz) en identifiant par la mesure les trois paramètres modaux (les fréquences propres, vecteurs propres (déformées modales) et amortissements modaux) d'un système. On peut construire un modèle analytique qui pourra être employé en simulation pour connaître le comportement dynamique de ce système dans

d'autres cas pratiques [13]. L'analyse modale se distingue nettement du fait de sa rapidité et de son coût, c'est-à-dire mettre en œuvre des moyens modestes [6].

En hautes et moyennes fréquences, la densité de modes est souvent trop importante pour que cette méthode soit applicable. Ces considérations dépendent de la complexité du problème étudié : pour une plaque, le domaine d'utilisation de l'analyse modale est beaucoup plus large que pour une voiture ou un avion, par exemple.

L'analyse modale est basée sur quelques hypothèses [13]:

1- Le système est linéaire dans la gamme des amplitudes étudiées.

2-Le système, s'il est continu, peut se représenter par un système discret où les paramètres sont exprimés pour chaque nœud du maillage (nombre de ddl,  $ddl_{total} = \text{nombre des nœuds} \times \text{nombre de ddl par nœud}$ ).

3-L'amortissement (qui correspond à la modélisation d'une énergie dissipée proportionnelle à la vitesse) est supposé proportionnel à la rigidité et à la masse (voir l'équation 2.6). Avec cette hypothèse simplificatrice, on définit l'amortissement visqueux « global », et on diagonalise aisément la matrice [C] et découpler les équations du système [23].

4-Pour des modes clairement identifiés, la méthode de comparaison à une somme de systèmes à 1 ddl est facile à appliquer.

Nous nous intéresserons, ici, à la comparaison des deux méthodes d'analyse modale, l'analyse modale expérimentale et l'analyse modale numérique, puis nous essayons d'intégrer une nouvelle classe d'analyse modale : l'analyse modale opérationnelle (AMO).

### 3.2.2 Présentation :

Le travail à partir de mesures de déformées modales par analyse modale expérimentale peut se justifier d'une manière théorique et pratique. Théoriquement, les outils de modélisation numériques peuvent permettre de modéliser tout système mécanique. Cela permet de plus d'étudier tous les cas possibles [13].

Cette modélisation passe par la discrétisation de la structure, un modèle mathématique est alors établi, et conduit à un système d'équations dont la solution est plus ou moins représentative du comportement réel de la structure [23].

Le concepteur souhaite déduire les modes de vibrations des caractéristiques de la structure, qu'elle présente un amortissement ou non, puis calcule les niveaux de réponse dans la gamme de fréquences explorées. Pour les structures complexes, cette démarche est impossible sans simplifications drastiques, et il doit se questionner sur la validité de sa modélisation. Il sera donc amené naturellement à confronter la réponse de son modèle avec la réponse de la structure. Si cette comparaison ne marche pas, il pourrait balayer les différentes caractéristiques de son modèle. Cette démarche fastidieuse risque fort ne pas aboutir [31].

La modélisation faisant appel aux techniques d'approximation mène en général, et quelle que soit l'approche utilisée, à un système d'équations algébriques de taille plus ou moins grande suivant l'importance et la complexité de la structure.

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est largement utilisée dans ce domaine.

Le principe est subdiviser la structure en un ensemble d'éléments de forme simple et de dimensions finies [23]

L'Analyse des vibrations dans les structures mécaniques devra ainsi porter sur trois facteurs essentiels :

1-L'environnement vibratoire (les forces extérieures).

2-La structure elle-même.

3-La réponse de la structure due aux forces extérieures.

Ainsi l'étude du comportement vibratoire d'une structure quelconque dans la plupart des cas passe par deux étapes principales :

a. Vibrations libres : la détermination des caractéristiques modales de la structure, c'est l'analyse modale.

b. Vibrations forcées : l'analyse de la réponse de la structure (en fréquence ou temporelle) suite à un environnement (force d'excitation extérieur), c'est l'analyse dynamique [32].

❖ Remarque :

L'analyse dynamique ne peut pas être entreprise sans avoir effectué au préalable une analyse modale.

### 3.3 Le modèle modale :

Les modes sont des propriétés inhérentes d'une structure, et qui sont déterminées par les propriétés du matériau (masse, amortissement et rigidité), et les conditions aux limites de la structure. Chaque mode est défini par la fréquence naturelle (modale ou résonance), l'amortissement modal et la déformé modale. Si un changement de propriétés ou de conditions aux limites se produit, ces modes changent. Pour l'instant, si une masse est ajoutée à la structure, elle va vibrer d'une manière différente. Pour comprendre ceci, on va parler de deux concepts, les systèmes à 1ddl et à n ddl [24].

### 3.4 Modes réels et complexes :

La présence du second terme (amortissement)  $[c]$  dans les équations de mouvement (2.4) complique leur résolution. Deux démarches sont alors possibles [9] :

- écarter ce terme d'amortissement dans l'obtention des modes, et réintroduire pour la superposition modale. C'est l'approche « mode réel » ; qui conduit à des composantes modales réelles facilement utilisables et interprétables mais qui complique la superposition modale
- Conserver ce terme d'amortissement, C'est l'approche « mode complexes », on obtient des composantes modales complexes ce qui ne facilite pas l'interprétation des déformées.

La pratique courante est d'utiliser les modes réels. Les modes complexes sont réservés aux structures fortement amorties pour lesquels les modes réels peuvent conduire à des erreurs importantes. En fait, on cherche à travailler avec une



matrice [c] diagonale. L'hypothèse la plus courante est attribuée à Rayleigh (voir modélisation de l'amortissement)

Le mode amorti se définit par deux grandeurs :

- Sa pseudo-pulsation propre :

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.1)$$

Où  $\omega_0$  est la pulsation naturelle (pulsation propre du système non amorti)

- Son facteur amortissement :  $\xi$

### 3.5 Domaine temporel et domaine fréquentiel :

On peut décider de résoudre le système (S) soit en restant dans le domaine temporel, soit en passant dans le domaine fréquentiel [9]. Ces deux modes communiquent grâce à la transformée de Fourier et son inverse.

$$\begin{array}{l} \text{Et :} \quad F(t) \xleftarrow{\text{Fourier}} \quad \xrightarrow{\text{Fourier}} F(\omega) \\ \quad \quad X(t) \xleftarrow{\text{Fourier}} \quad \xrightarrow{\text{Fourier}} X(\omega) \end{array}$$

Dans le domaine temporel, toute excitation  $F(t)$  est décomposée en impulsion. L'hypothèse de linéarité du comportement structural permet d'exprimer la réponse  $X(t)$  à l'excitation  $F(t)$  comme somme des réponses aux impulsions  $F(t_i)$ . On note  $h(t)$  la réponse de la structure à une impulsion à l'instant  $t=0$ . La réponse  $X(t)$  cherchée est alors égale à :

$$X(t) = \int_{-\infty}^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

Avec  $h(t)$  réponse dite impulsionnelle qui a pour expression

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_a t \quad (3.3)$$

Cette résolution temporelle nécessite donc le calcul d'une intégrale de convolution, dite intégrale de Duhamel.

Dans le domaine fréquentiel, toute excitation  $F(t)$  peut être représentée par sa transformée de Fourier  $F(\omega)$ . L'hypothèse de linéarité permet de dire que la réponse  $X(\omega)$  à l'excitation  $F(\omega)$  est donnée par la réponse à chaque  $\omega$ . Il suffit

donc de connaître la réponse de la structure à une excitation sinus pour tout  $\omega$  dans l'excitation. On note  $H(\omega)$  la réponse de la structure à une excitation  $F(t)$  tel que

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (3.4)$$

Alors 
$$X(\omega) = [H(\omega)].F(\omega) \quad (3.5)$$

On appelle  $H(\omega)$  fonction de transfert ou FRF (fonction de réponse en fréquence). C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h(t)$ . Ainsi, les réponses de la structure se déduisent des excitations en les multipliant par les fonctions de transfert.

L'approche fréquentielle présente l'avantage de ne faire intervenir qu'un simple produit au lieu d'une intégrale de convolution.

### 3.5.1 Résolution par approche fréquentielle directe :

Toute fonction de transfert est à déterminer fréquence par fréquence. L'approche directe consiste à déduire directement les FRFs des propriétés physiques de la structure, c'est à dire des matrices  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$ . Cela implique donc d'inverser une matrice de taille égale aux nombres de ddl de la structure, ce qui peut être très lourd pour les modèles industriels. D'où l'intérêt de l'approche modale.

### 3.5.2 Résolution par approche modale :

#### 3.5.2.1 Théorème de superposition :

Si  $x_1(t)$  est solution de l'équation (2.5) et si  $x_2(t)$  l'est également, alors [33] :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3.6)$$

Est aussi solution de (2.5) :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

Implique :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3.8)$$

Avec :  $F = F_1 + F_2 \quad (3.9)$

Le théorème de superposition tient du fait que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est linéaire. Dans le cas d'une équation différentielle non linéaire ; il ne s'applique plus.

### 3.5.2.2 Approche modale :

Elle consiste à résoudre d'abord les équations du mouvement sans excitation, dont les solutions permettent d'écrire la fonction de transfert sous la forme [9] :

$$H(\omega) = \sum_k H_k(\omega) \quad (3.10)$$

Chaque contribution  $H_k$  est un mode propre de la structure, d'où la technique de superposition modale ou de recombinaison modale.

Mathématiquement, il y'a autant de modes propres que de ddl. Cependant l'approche modale n'a d'intérêt que si seul un petit nombre d'entre eux contribuent de manière significative. C'est le cas par exemple du domaine « basse fréquence » où seuls les premiers modes interviendront (ceux dont la fréquence associée appartient à la bande d'excitation)

Pour schématiser, l'analyse par superposition modale se décompose en trois étapes :

- détermination des matrices présentant les propriétés de masse, de raideur et d'amortissement.

- recherche des modes propres par résolution d'un problème homogène aux valeurs propres.

- détermination des fonctions de transfert par superposition modale.

### 3.6 Système à un seul degré de liberté amorti (1ddl)

Un système dynamique ayant un seul degré de liberté à comme modèle le chariot indiqué dans la figure 3.1.

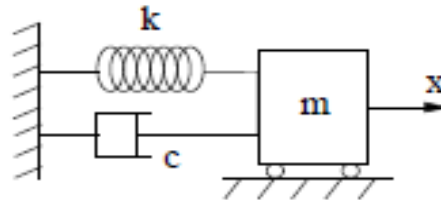


Figure 3.1 : Système dissipatif (à 1ddl).

L'équation du mouvement du système aura la forme de l'équation (2.5).

En cas d'excitation harmonique (3.4), la solution de l'équation (2.5) (avec deuxième membre) prend la forme :

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) \quad (3.11)$$

Tel que  $x_g(t)$  est la solution générale en cas d'un système libre amorti (équation (2.5) sans second membre), donc :

$$x_g(t) = X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \varphi). \quad (3.11a)$$

Et  $x_p(t)$  est la solution particulière, en cas d'un système forcé (2.5) donc :

$$x_p(t) = A \sin(\omega t + \Omega). \quad (3.11b)$$

Alors :  $x(t) = X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \varphi) + A \sin(\omega t + \Omega) \quad (3.12)$

Pour  $t$  suffisamment grand,  $x_g(t)$  tend vers zéro(0) (régime transitoire), c.à.d. on a un régime permanent :

$$x(t) \simeq x_p(t) \quad (3.13)$$

- Illustration 3.1 : système a 1ddl

On a un système à 1ddl comme le montre la figure 3.1, masse-ressort-amortisseur.

$$m = 20 \text{ [kg]}; k = 8000 \text{ [N/m]}; c = 130 \text{ [N.s/m]}.$$

$$F(t) = 24 \sin(15t) \text{ [N]}; C.I : x(0) = 0 \text{ m}; \dot{x}(0) = 100 \text{ mm/s}$$

D'après (2.5) on écrit l'équation du mouvement :

$$20\ddot{x} + 130\dot{x} + 8.10^3 x = 24 \sin 15t$$

$$\ddot{x} + 6,5 \dot{x} + 4.10^2 x = 1,2 \sin 15t$$

1) Détermination des caractéristiques du système :

Solution de l'équation :

$$\ddot{x} + 6,5 \dot{x} + 4.10^2 x = 0$$

On note :

$$c_{cr} = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Donc la dernière équation prend la forme générale :

$$\ddot{x} + 2\omega_0\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

D'où la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur d'amortissement  $\xi$  sont :

$\omega_0^2 = 4.10^2$  d'où  $\omega_0 = 20 \text{ rd/s}$  et  $2\omega_0\xi = 6,5$  , d'où le facteur d'amortissement  $\xi=0.1625$ .

On a aussi la pseudo-pulsation (pulsation propre-amortie) :

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Donc après calcul :  $\omega_a = 19,73 \text{ rd/s}$

Alors la solution générale est :  $x_g(t) = X e^{-3,25t} . \sin(19,7t + \varphi)$

En utilisant les C.I on trouve :  $X = 5,076 \text{ [mm]}; \varphi = 0 \text{ [rd]}$

$$\text{donc: } x_g(t) = 5,076.10^{-3} e^{-3,25t} . \sin 19.7 t \text{ [mm]}$$

2) Détermination de la solution particulière :

$$x_p(t) = A \cdot \sin(\omega t + \Omega)$$

La fonction de transfert s'écrit [118] :  $H(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + j\omega c}$

$$H(\omega) = \frac{1}{(8000 - 20 \cdot 15^2) + j15 \cdot 130}$$

$$|H(\omega)| = 0,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\arg(H(\omega)) = -29,1^\circ \approx -\frac{\pi}{6}$$

D'où  $|A| = |H(\omega)| \cdot |F|$ ,

$$|A| = 0,006 \text{ m} .$$

Et  $x_p(t) = 6 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(15t - \frac{\pi}{6})$

La solution (3.12) est :

$$x(t) = 5,076 \cdot 10^{-3} e^{-3,25t} \cdot \sin 19,7 t + 6 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(15t - \frac{\pi}{6}) [m]$$

### 3.7 Système à plusieurs degrés de liberté (n ddl) :

Une structure quelconque peut être considérée comme système vibrant, à plusieurs degrés de libertés seulement dans le cas qu'on peut supposer les masses comme concentrées dans un nombre précis de section. Donc, une structure réelle possède une infinité de ddl, par discrétisation on peut avoir  $n$  ddl [3], [14].

#### 3.7.1 Méthode de la base modale :

Une des méthodes élégantes de résolution d'un système à  $n$  degré de liberté est la méthode de la base modale qui consiste à ramener le problème d'un système de  $n$  ddl de  $n$  équations couplées, à un système de  $n$  équations à 1ddl découplées.

1/En normalisant l'équation du mouvement par rapport à la masse.

2/En réalisant une transformation de coordonnées pour se placer dans la base modale ou les équations du mouvement sont découplées.

Revenons à l'équation (2.4) et on prend la transformation de Laplace de cette équation, tel que :  $x(t) = X(s)e^{st}$  (3.13)

$$\text{D'où : } (S^2[M] + s[c] + [k])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.14)$$

Avec :  $C.l=0$

$S$  : variable de Laplace

$\{X(s)\}$  : Transformé de Laplace de  $\{x(t)\}$

$\{F(s)\}$  : Transformé de Laplace de  $\{F(t)\}$

$$\text{On pose : } [Z(s)] = S^2[M] + S[C] + [K] \quad (3.15)$$

L'équation (3.14) s'écrit :

$$[Z(S)].\{X(S)\} = \{F(S)\} \quad (3.16)$$

$[Z(S)]$  : Matrice caractéristique du système ; s'appelle matrice de rigidité dynamique [24].

La matrice  $H(S)$  est la matrice de transfert entre le déplacement et la force d'excitations extérieur [24], donc :

$$\{X(S)\} = [H(S)].\{F(S)\} \quad (3.17)$$

$$\text{Alors : } H(S) = Z^{-1}(S) \quad (3.18)$$

$$\text{Implique que : } H(S) = \frac{\text{Adjoint } [Z(S)]}{\det [Z(S)]} = \frac{[N(S)]}{\det [Z(S)]} \quad (3.19)$$

Rappelons que  $[M]$  et  $[K]$  sont deux matrices symétriques.

Les éléments de la matrice  $[H(S)]$  sont de la forme générale :

$$h_{ij} = \frac{N_{ij}}{\det [Z(S)]} \quad (3.20)$$

Donc on distingue deux définitions :

$[H(S)]$  : Matrice de Transfert

$h_{ij}$  : Fonction de Transfert

❖ Remarque : pour un système à 1ddl :

$$H(S) = \frac{1}{Z(S)} \quad (3.21)$$

Donc on obtient  $H(S)$  sous la forme:

$$H(S) = \frac{1}{ms^2 + CS + k} = \frac{1}{s^2 + 2\varepsilon\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.22)$$

L'équation  $z(s)=0$  c'est l'équation caractéristique du système au régime libre et ses solutions sont sous la forme complexe suivante :

$$S_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0 \quad (3.23)$$

Si on pose :

$$s_{1,2} = -\sigma \mp j\omega_a \quad (3.24)$$

de tel façon que :

$$\omega_0^2 = \omega_a^2 + \sigma^2 \quad (3.24a)$$

et  $\sigma = \xi\omega_0 \quad (3.24b)$

On pose  $S_1=P$  ; et puisque  $S_2=S_1^*$  donc  $S_2=P^*$ , d'où la notion de pôle de la fonction de transfert  $H[S]$  intervienne tel que  $P$  et  $P^*$  des pôles qui représentent les racines de l'équation  $Z(S) = 0$ . Alors, on peut écrire

$$Z(S) = (S - P)(S - P^*) \quad (3.25)$$

Par conséquent  $H(S) = \frac{1/m}{(S-P)(S-P^*)} \quad (3.26)$

Et aussi  $H(S) = \frac{R}{S-P} + \frac{R^*}{S-P^*} \quad (3.27)$

Une autre notion intervient c'est la notion de résidus  $R$  et  $R^*$  qui sont des quantités complexes correspondant à  $P$  et  $P^*$ .



❖ Remarque :

\*Les pôles désignent les valeurs propres.

\*Les résidus désignent les amplitudes des modes propres.

On peut conclure que les caractéristiques modales peuvent être extraites à partir de la fonction de transfert pour 1ddl, ce qui est valable pour un système de nddl, avec l'analogie suivante :

$$\begin{array}{l}
 1ddl \longrightarrow nddl \\
 H(S) \longrightarrow [H(S)] \\
 H(\omega) \longrightarrow [H(\omega)] \\
 R, R^* \longrightarrow [R], [R^*] \\
 P, P^* \longrightarrow P_k, P_k^*; \quad k=1, n
 \end{array}$$

Donc à partir de l'équation (2.4), où M, K et C sont respectivement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement de la structure, x le vecteur des déplacements, inconnus et fonction du temps, de la structure (degré de liberté) et F le vecteur des chargements extérieurs connus fonction du temps de la structure ; l'analyse dynamique linéaire permet donc de déterminer les déplacements, contraintes, vitesses et accélérations en fonction du temps pour une structure sollicitée dynamiquement [20].

### 3.7.2 Calcul de la réponse dynamique :

La recherche des solutions de l'équation générale (2.4) nécessite au préalable la recherche des modes propres de vibration de la structure. Ces modes sont les N solutions du système:

$$([K] - \lambda [M])X = 0 \quad (3.28)$$

Où  $\lambda = \omega^2$  et X est le vecteur propre associé.

De nombreux algorithmes existent pour déterminer les valeurs et vecteurs propres d'un tel problème élastique.

La connaissance des modes propres permet alors de calculer la réponse dynamique de la structure. Nous présentons ici quelques principes de résolution de cette équation et ce suivant la nature de l'espace de projection.

### 3.7.2.1 Résolution par la méthode de superposition modale :

Cette méthode est intéressante car elle permet la prise en compte des amortissements définis approximativement (de 1 à 5 %) et leurs réajustements à posteriori par identification des résultats de mesure dynamique. Elle s'applique particulièrement bien aux structures faiblement amorties telles que les bâtis de machine. Dans la suite, les amortissements seront considérés visqueux, c'est à dire proportionnels. Cette méthode consiste à résoudre l'équation (2.4) dans la base modale ou dans une base modale tronquée. Ce changement de base est procédé par une transformation de coordonnées tel que

$$x(t) = [\psi]q(t) \quad (3.29)$$

Qui permet d'écrire le nouveau système :

$$[\mu]\ddot{q}(t) + [c]\dot{q} + [\gamma]q = f(t) \quad (3.30)$$

Avec  $[\psi]$  : matrice modale.

$q(t)$  : Coordonnée modale.

$x(t)$  : Coordonné physique.

Où  $[\mu]$  représente la matrice diagonale des masses généralisées,  $[c]$  la matrice d'amortissement modale généralement pleine,  $[\gamma]$  la matrice diagonale des rigidités généralisées,  $f(t)$  le vecteur des forces modales.

A ce stade, le système d'équations est généralement couplé par les termes non diagonaux de la matrice d'amortissement. Pour découpler ce système, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires :

- hypothèse d'amortissement proportionnel de Rayleigh (relation (2.6)).

Cette loi présente l'intérêt d'être simple mais non représentative pour des structures complexes.

Les pulsations du système amorti sont peu différentes du système non amorti

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.31)$$

### 3.7.2.2 Résolution par projection dans l'espace d'état :

L'analyse par variables d'état est une approche moderne d'étude des systèmes née dans les années 60. Les représentations d'état sont à l'origine de méthodes puissantes d'analyse des systèmes facilement adaptables aux calculateurs numériques. Un des points forts des représentations d'état est leur adaptabilité au cas des systèmes non-linéaires, non stationnaires qu'ils soient continus ou discrets [33].

Une très grande classe de systèmes physiques, biologiques, économiques, etc. qui nous entourent peuvent être décrits par une équation différentielle du type [34]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.32)$$

Sous l'hypothèse que le temps  $t$  dans lequel évolue le système est continu. Le vecteur  $u(t)$  est l'entrée (excitation) du système. Sa valeur peut être choisie arbitrairement pour tout  $t$ . Le vecteur  $y(t)$  est la sortie (réponse) du système et peut être mesuré avec une certaine précision. Le vecteur  $x(t)$  est appelé état du système. Comme nous l'illustrerons dans la suite, il représente la mémoire du système, c'est-à-dire, l'ensemble des informations dont le système a besoin pour prédire son propre avenir, pour une entrée  $u(t)$  connue. La première des deux équations de (3.32) s'appelle équation d'évolution. Il s'agit d'une équation différentielle qui permet de savoir vers où va se diriger l'état  $x(t)$  sachant sa valeur à l'instant présent  $t$  et l'excitation  $u(t)$  que nous sommes en train d'exercer. La deuxième équation s'appelle équation d'observation. Elle permet de calculer le vecteur réponse  $x(t)$ , connaissant l'état et l'excitation à l'instant  $t$ . Attention, contrairement à l'équation d'évolution, cette équation n'est pas une équation

différentielle car elle ne fait pas intervenir les dérivées. Les équations (3.32) forment la représentation d'état du système.

### 3.8 Etude d'un système amorti :

L'équation d'un système amorti forcé est de la forme de (2.4).

$$\text{On introduit l'identité :} \quad [M] \{\dot{x}\} = [M] \{\dot{x}\} \quad (3.33)$$

$$\text{et on introduit également le vecteur : } \{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

dit vecteur d'état.

Les systèmes matriciels (2.4) et (3.33) s'écrivent sous forme globale :

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

D'où :

$$[M^*] \{y(t)\} + [K^*] \{y(t)\} = [f^*] \quad (3.36)$$

On passe ainsi d'un espace à  $n$  dimensions (équation 2.4) à un espace de  $2n$  dimensions (3.36) d'où on se trouve dans un espace d'état.

Une solution générale au système d'équations (3.36) est de la forme  $\{y\} = \{Y\}e^{\lambda t}$ , cette solution posée conduit à un problème aux valeurs propres (un système libre) correspondant à l'équation :

$$([M^*]^{-1}[K^*] - \lambda[I]) \{y\} = 0 \quad (3.37)$$

Les solutions de ce problème sont au nombre  $(2n)$  et apparaissent par paires complexes conjuguées.

#### 3.8.1 Analyse modale expérimentale :

L'analyse modale expérimentale a pour but de déterminer les caractéristiques modales d'une structure à partir des données mesurées lors d'essais dynamiques [20]. A l'issue de cette analyse, on dispose des modes propres dans la bande de fréquences d'analyse, de la pulsation propre complexe, du vecteur propre associé (déformée propre), et des amortissements modaux ou de la matrice d'amortissement avec ses termes éventuellement non diagonaux.

### 3.8.2 Fonctions de transfert :

Les outils décrits dans cette partie vont nous permettre d'identifier les caractéristiques physiques des structures à surveiller dans le but de prévenir des défauts, mais aussi de modifier éventuellement la structure des machines, en y appliquant des raidisseurs ou en assouplissant certaines parties.

La propagation des vibrations d'une partie de la structure entre la source d'excitation et le point de mesure, peut être caractérisée par une fonction de transfert dont les dénominations normalisées (ISO 7626) sont rappelées dans le tableau (3.1) [20] .

Tableau 3.1 : Dénomination normalisée de la fonction de transfert

Relation	Déplacement / force	Force/ déplacement	vitesse/ force	Force/vitesse	Accélération/ force	Force/ accélération
Dénomination	Compliance	Raideur dynamique	Mobilité	Impédance	Accélérance	Masse dynamique

S'il y a plusieurs sources et points de mesure, on parlera d'un modèle MIMO (Multi Input Multi Output) qui sera caractérisé par une matrice de transfert. Cette matrice de transfert est pleine et complexe et caractérisera la dénomination de la structure. Supposons que la structure étudiée soit instrumentée des capteurs, des excitateurs, et qu'on lui applique successivement une configuration de forces  $F_i$  linéairement indépendantes de la pulsation, alors, si on note  $X_i$  les déplacements correspondants, nous obtenons :

$$X(\omega) = H(\omega).F(\omega) \quad (3.38)$$

Où  $H(\omega)$  est la matrice des fonctions de transfert de dimension  $(n \times m)$  et  $X(\omega)$  est le vecteur des réponses de dimension  $(n \times 1)$ ,  $F(\omega)$  est le vecteur excitation de dimension  $(m \times 1)$ .

La figure 3.2 [16] représente une fonction de transfert où il est possible de distinguer principalement trois régions :



Les mesures des déplacements aux points 1, 2 et 3 sont transmises à un analyseur qui affiche le graphique de la figure 3.4.

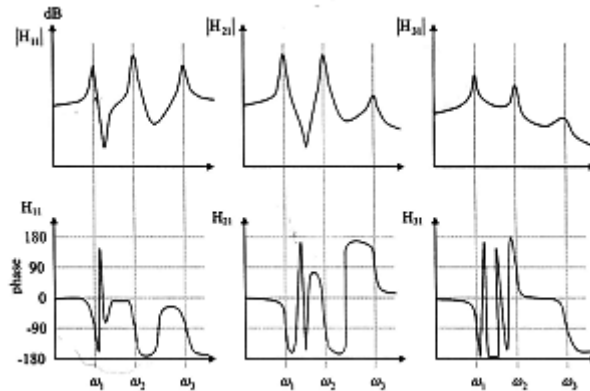


Figure 3.4 : Module et phase des 3 FRF

On repère sur la partie du haut, les variations du module de la FRF  $|H|$ , en échelle logarithmique (en dB). Les variations de l'argument (phase) de  $H$  sont en bas, pour une certaine gamme de pulsation de l'excitation d'amplitude  $F$ .

On pose :  $\{X\} = [H(\omega)]\{F\}$ , où  $[H(\omega)]$  est la matrice de réceptance. On relève pour le premier accéléromètre :

$|H_{11}(\omega_1)| = 0.423$ , à la pulsation du premier mode  $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ , et les deux pulsations à -3 dB autour du fondamental :  $|H_{11}(\omega_{a1})| = |H_{11}(\omega_{b1})| = \frac{|H_{11}(\omega_1)|}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega_{a1} = 9.85 \text{ rad/s}$ , et  $\omega_{b1} = 10.05 \text{ rad/s}$

De même pour le deuxième et le troisième modes :

$|H_{11}(\omega_2)| = 0.655$  à  $\omega_2 = 20 \text{ rad/s}$ , et les deux pulsations à -3 dB autour de ce mode :

$|H_{11}(\omega_{a2})| = |H_{11}(\omega_{b2})| = \frac{|H_{11}(\omega_2)|}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega_{a2} = 19.8 \text{ rad/s}$ , et  $\omega_{b2} = 20.2 \text{ rad/s}$

$|H_{11}(\omega_3)| = 0.174$  à  $\omega_3 = 32 \text{ rad/s}$ , et les deux pulsations à -3 dB autour de ce mode :

$|H_{11}(\omega_{a3})| = |H_{11}(\omega_{b3})| = \frac{|H_{11}(\omega_3)|}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega_{a3} = 30.8 \text{ rad/s}$ , et  $\omega_{b3} = 34 \text{ rad/s}$

Pour le deuxième accéléromètre, on relève :

$$|H_{21}(\omega_1)| = 0.971, |H_{21}(\omega_2)| = 0.687, |H_{21}(\omega_3)| = 0.124$$

Pour le troisième accéléromètre, on relève :

$$|H_{31}(\omega_1)| = 2.371, |H_{31}(\omega_2)| = 2.126, |H_{31}(\omega_3)| = 0.707$$

La structure admet 3 modes entre 0 et 40  $rad/s$ , identifiés par les trois pics des modules des FRF, de pulsation  $\omega_1 = 10 rad/s$ , et  $\omega_2 = 20 rad/s$ ,  $\omega_3 = 32 rad/s$ . On vérifie qu'à ces pulsations correspond une phase de FRF de  $90^\circ$  ou de  $-90^\circ$  (modulo  $180^\circ$ ).

Le facteur d'amortissement est obtenu par la méthode de la demi puissance (-3 dB) autour de  $\omega = \omega_r$  ( $\omega_{ieme}$  mode).

Soit,

$$\xi_1 = \frac{\omega_{b1} - \omega_{a1}}{2\omega_1} = \frac{10.05 - 9.85}{20} = 0.01$$

$$\xi_2 = \frac{\omega_{b2} - \omega_{a2}}{2\omega_2} = \frac{20.2 - 19.8}{40} = 0.01$$

$$\xi_3 = \frac{\omega_{b3} - \omega_{a3}}{2\omega_3} = \frac{34 - 30.8}{64} = 0.019$$

❖ Remarque : on peut trouver les mêmes résultats à partir de  $|H_{21}|$  ou  $|H_{31}|$ , ce qui permet d'obtenir une valeur plus précise moyennant les 3 résultats.

Si l'amortissement est proportionnel (à la rigidité et à la masse), les composantes  $P_{jr}$  du vecteur de forme  $\psi_r$  (avec  $j$  numéro de capteur et  $r$  mode de vibration) sont réelles et les signes de leurs composantes sont donnés par le signe de la phase correspondante. Si l'amortissement est non proportionnel,  $P_{jr}$  est complexe et nous ne déterminerons ainsi que son module.

En effet, en connaissant le nombre de pôles qui caractérisent la structure, on peut trouver les paramètres modaux en identifiant le modèle à fraction partielle (MFP) :



$$H(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{\omega - p_k} + \frac{R_k^*}{\omega - p_k^*} \quad (3.39)$$

Ainsi, on décompose la fonction de transfert (identifiée en minimisant l'erreur entre la FRF et le quotient de polynôme en  $\omega$ ) en éléments simples. Cette décomposition laisse apparaître dans les pôles  $p$  et  $p^*$  du modèle à fraction partielle, les 2 premiers paramètres modaux :  $p = -\xi_k - j\omega_k$ . En effet, sa partie réelle représente l'amortissement et sa partie imaginaire nous renseigne sur la pulsation naturelle amortie du système. Le résidu  $R_k$  est un nombre qui rend compte de la force du mode. C'est un concept mathématique qui est un indicateur de la déformée modale.

$$H(\omega \rightarrow \omega_k) \approx \frac{R_k}{\xi_k} \quad (3.40)$$

On montre que le résidu pour un mode particulier  $k$  est proportionnel au produit du déplacement modal à 1 ddl  $i$  par le déplacement modal à l'excitation  $j$  :

$$R_{ij}^k = \frac{P_{ik}P_{jk}}{2j\omega_k} \quad (3.41)$$

On peut remarquer que la partie imaginaire de  $H(\omega)$  contient deux informations essentielles, l'amplitude et la direction.

Ainsi, on obtient le vecteur de forme  $\psi_1$  du premier mode à partir des relations suivantes :

$$|P_{j1}P_{k1}| = 2\xi_1\omega_1^2 |H_{jk}(\omega_1)|.$$

$$P_{11}^2 = 2\xi_1\omega_1^2 |H_{11}(\omega_1)| = 0.846, \text{ phase négative, } P_{11} = -0.920$$

$$|P_{21}P_{11}| = 2\xi_1\omega_1^2 |H_{21}(\omega_1)| = 0.846, \text{ phase négative, } P_{21} = -0.920$$

$$|P_{31}P_{11}| = 2\xi_1\omega_1^2 |H_{31}(\omega_1)| = 4.633, \text{ phase négative, } P_{31} = -0.920$$

Soit :

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} -0.920 \\ -1.993 \\ -5.036 \end{pmatrix}$$

de meme pour le deuxième mode :

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} -2.289 \\ -2.401 \\ 7.430 \end{pmatrix}$$

et pour le troisième mode :

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} -4.221 \\ 3 \\ -17.151 \end{pmatrix}$$

en fin, les déformées modales de la poutre sont données sur la figure 3.5

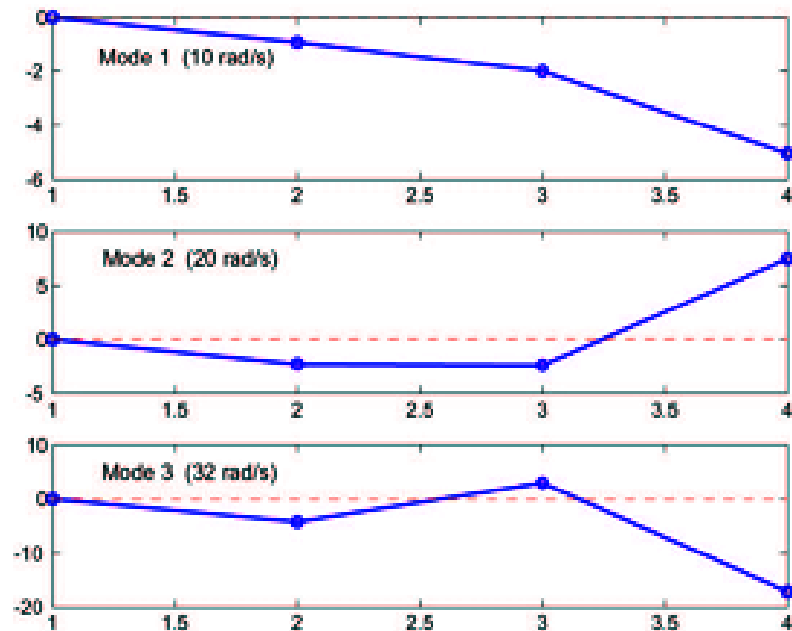


Figure 3.5 : Déformées modales des 3 premiers modes : en abscisse, l'amplitude de la déformée non normalisée, en ordonnée, la position des accéléromètres.

## CHAPITRE 4

### **ANALYSE MODALE OPÉRATIONNELLE**

#### 4.1 Introduction :

Une des ambitions des chercheurs sur la dynamique des structures est de contribuer à rendre les analyses dynamiques (en particulier les analyses de vibration) plus performantes en pratique. Cela signifie d'un côté d'améliorer les méthodes de mesures expérimentales des vibrations pour être aussi proche que possible de la réalité, et d'un autre côté d'améliorer les méthodes numériques nécessaires pour résoudre les modèles dynamiques de grande taille [36].

Dans ce but, une nouvelle technique émerge après plusieurs décennies de domination des méthodes d'analyse modale classique. Cette nouvelle technologie modale est capable d'estimer les mêmes paramètres modaux que les techniques connues traditionnelles, mais diffère de ces dernières par le fait qu'elle est basée seulement sur les réponses au lieu du couple excitation-réponse [37].

#### 4.2 Définition :

L'analyse modale expérimentale traditionnelle nécessite la connaissance des forces d'excitation pour estimer les paramètres modaux d'une structure. L'analyse modale opérationnelle n'est pas contrainte par cette exigence [38]. Donc, dans l'analyse modale opérationnelle l'identification modale est basée sur des réponses de vibration seulement, et les différentes techniques d'identification sont employées [39].

#### 4.3 Limitations de l'analyse modale classique :

L'analyse modale classique fait l'outil essentiel de l'analyse des vibrations pour la détermination des caractéristiques modales, mais connaît un certain nombre de restrictions qui limitent son efficacité dans quelques situations. La première difficulté est que la structure d'essai est en état statique, d'où l'exigence de la source d'excitation d'entrée contrôlable [40]. Aussi, les différents matériels de prototypes peuvent changer ; ces prototypes sont des modèles de laboratoire,

alors il peut être difficile de simuler les conditions aux limites réelles [41] telles que souvent rencontrées lors de la mise en fonction de la structure. La deuxième grande limitation est des fois difficile d'exercer une force artificielle sur la structure, d'où l'exigence du matériel si on veut avoir cette excitation.

On peut citer aussi quelque autres problèmes de détail rencontrés pendant l'expérience, comme [13] :

Pour le marteau d'impact, on a du bruit de mesure (essai très court), la résolution fréquentielle limitée et les problèmes sur les structures non linéaires.

Pour le pot vibrant ; fixer le shaker à un point de référence unique, ajout de masse locale (pot) ou de rigidité locale (capteur de force dans la direction de l'excitation).

#### 4.4 Principe de la technique d'analyse modale opérationnelle :

Les méthodes d'analyse modale classique permettent l'identification des paramètres structuraux à partir de la réponse et de la sollicitation ; tandis qu'une méthode d'analyse modale dite opérationnelle elle permet des mesures en environnement opérationnel [42], et est basée seulement sur les réponses de la structure étudiée [11], en conditions de fonctionnement [43].

Cette Technique expérimentale qui utilise les forces ambiantes ou d'opération comme des sources d'excitations, est appliquée au lieu des méthodes classiques en profitant des conditions d'opération actuelles. Pour certaines structures de mécanique (et de génie civil), il est parfois très difficile d'utiliser une force externe connue à cause des dimensions des structures, leur forme ou leur endroit. Les excitations sont alors exercées par des forces ambiantes ou forces d'opération [39], [11]. Par exemple une voiture roulant sur une route ou une éolienne en rotation ou des grandes machines en vibrations sont des structures soumises à des excitations plus ou moins fortes et leurs caractéristiques modales peuvent se déduire des mesures de réponses sans nécessiter la mesure des forces d'excitation [36].

L'analyse modale opérationnelle considère que l'excitation est parfaitement aléatoire et estime les paramètres modaux à partir de cette hypothèse mais les techniques d'AMO sont encore d'application pour autant que les fréquences des sollicitations harmoniques soient bien différentes des fréquences propres du système que l'on veut identifier [36].

Les méthodes d'analyse modale classiques sont traitées dans le domaine fréquentiel, les techniques d'analyse modale en opération sont presque toutes réalisées avec des conditions réelles et dans le domaine temporel [11].

#### 4.5 Motivations :

Dans les dernières années, de nouvelles et puissantes méthodes pour l'analyse et la conception statique et dynamique des structures ont été développées. En particulier la méthode E.F [8], mais aussi une autre méthode dite AMO, vu le développement de nouveaux matériaux à rendement élevé et la complexité croissante des structures.

Les essais de l'AMO ont commencé dans le domaine de génie civil, par ce qu'il est difficile et cher d'exciter artificiellement des constructions telles que des bâtiments, des ponts ou des barrages afin d'obtenir la force d'entrée nécessaire pour exciter les modes de la structure qui est soumise au trafic ou bien au vent, l'AMO s'est élargie aux autres domaines, comme la mécanique et l'aérospatiale. Une autre motivation concerne la surveillance continue de l'état de santé (comportement) de structure car l'AMO utilise les forces ambiantes qui sont des forces liées à l'environnement de fonctionnement de la structure [44].

#### 4.6 Avantages d'employer l'analyse modale opérationnelle :

Pourquoi l'AMO? [45], [39].

1-Vrais état de laboratoire  $\neq$  Les conditions de fonctionnement.

- La réponse mesurée est représentative des vraies conditions de fonctionnement de la structure.
- Non –linéarités (effets non linéaires sont linéarisés [7], autour du point fonctionnant).

- Changements « structuraux ».
- Influence de l'environnement.

## 2 - Raisons pratiques.

- Incapacité de mesure des forces d'entrée.
- L'installation est simple, franche et rapide, car seulement des accéléromètres sont utilisés.
- tester sans détruire et sans déplacer la structure étudiée

3 - Surveillance continue de santé de la structure et détection d'endommagements.

4 - Le temps d'arrêt, de fonctionnement de la structure testée, coûteux peut être réduit faisant l'essai in-situ pendant l'opération normale. Aucune interruption de fonctionnement.

5 - Utilisation prolongée des données disponibles.

On peut donc résumer et schématiser la méthode d'AMO comme suit

- Identification des paramètres modaux (Fréquences propres, l'amortissement et les déformées modales) d'une structure pendant les conditions de fonctionnement.
- Des modes locaux et globaux peuvent être clairement identifiés comme résultat du même essai.
- Analyse modale opérationnelle = identifiant  $H$  (figure 4.1)

Basé sur la réponse  $x$ .

Sans connaître l'excitation  $F$ .

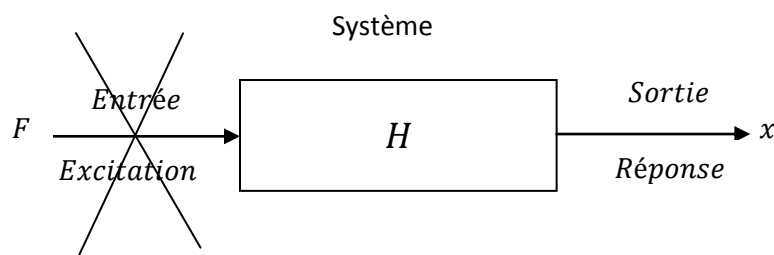


Figure 4.1 : Principe de l'AMO

#### 4.7 Les limitations :

L'AMO est fondée sur l'hypothèse que les entrées sont un bruit blanc gaussien, caractérisé par un spectre plat (moyenne nulle), et aléatoire dans un environnement ambiant incontrôlable. Cette hypothèse a une conséquence sur la manière avec laquelle on traite les informations acquise, car l'expérience connaît [44] :

- 1) un superflu d'informations.
- 2) manque de clarté dans l'identification des modes.
- 3) la quantité des données requises est très élevée.
- 4) des modes sont uniformément excités et extraits en utilisant les procédures appropriées. Cependant, cette prétention mène à quelques inconvénients [8] :
  - des facteurs modaux de participation ne peuvent pas être calculés.
  - extraire sûrement des paramètres modaux peut être difficile en présence de faux harmoniques au voisinage des fréquences propres de la structure.

#### 4.8 Domaines d'application :

L'analyse modale opérationnelle est devenue un choix normal de la technologie pour fournir l'information structurale, et ses applications sont progressivement entrain de toucher plusieurs domaines, on parle de :

##### 4.8.1 Essai non destructif :

C'est la surveillance de santé d'une structure au cours du temps (surveillance de santé structurale (SSS) ou structural health monitoring (SHM)) puisqu'on observe la structure pendant le service, et aucun autre outil modal ne peut le faire sauf l'AMO [13], [37], [21].

##### 4.8.2 Détection des endommagements :

La détection des défauts pendant le fonctionnement des structures de grandes dimensions et complexes [37] est basée sur le changement des caractéristiques vibratoires de la structure [13], et l'AMO est devenue un outil préféré de cette

tache, car elle la fait continuellement dans le temps sans nécessité d'une excitation artificielle. La recherche est encore étendue dans ce secteur combinant l'analyse modale, les ultrasons et l'émission acoustique, l'analyse énergétique statistique et réseaux neurones [37], [13].

#### 4.8.3 Détection de niveau de vibrations :

L'amplitude des vibrations ambiantes est presque faible [21], mais si le niveau de vibrations doit être mesuré dans des endroits où aucune mesure ne peut être faite [37], c.-à-d. l'endroit est inaccessible, l'AMO peut le faire. On obtient les coordonnées modales ou la réponse modale.

#### 4.8.4 Analyse de fatigue :

Les méthodes expérimentales employées qui prennent en considération la rigidité et l'amortissement de la structure permettent d'accéder à la connaissance des propriétés viscoélastiques [6]. Car, un contrôle régulier et ordinaire peut être optimisé comme une évaluation valable de fatigue [37].

L'identification des paramètres élastiques ( $E$  et  $\gamma$ ) est alors effectuée pour chaque résonance, par calage des fréquences propres calculées sur les fréquences propres mesurées [6].

### 4.9 Les instruments de mesures et appareillages :

#### 4.9.1 L'excitation :

Dans l'analyse modale opérationnelle, on n'a pas besoin de connaître l'excitation [46]. La source force des vibrations peut être la force d'opération de la structure [11]. Elle est considérée comme une excitation parfaitement aléatoire dont les paramètres modaux sont estimés à partir de cette hypothèse [39]. Il faut noter la difficulté que l'excitation n'est pas unique. Il y a toujours d'autres sources de forces qui peuvent faire vibrer la structure ou influencer la sensibilité du capteur. On peut compter les chocs et les bruits ambiants [11].

Généralement, les structures sont soumises à une combinaison d'excitation aléatoire et harmonique [10]. Puisque l'analyse modale opérationnelle considère



l'excitation comme aléatoire, elle identifiera les excitations harmoniques comme des modes virtuels ayant un amortissement nul [43].

#### 4.9.2 Capteurs de vibrations :

Les capteurs les plus utilisés sont des accéléromètres de type piézoélectrique. Ils ne demandent pas une alimentation électrique et s'opèrent dans une large gamme de fréquence. Ils se trouvent toujours avec un système de mesure compatible [11].

Les mesures sont effectuées pour divers degrés de liberté (ddl) à l'aide de capteurs à réponse fixe ou non et d'un capteur de référence. Elles ne font intervenir ni pots vibrants ni marteaux d'impulsion puisqu'elles utilisent les forces d'excitation ambiantes [48].

L'indice principal des capteurs pour les vibrations des structures est d'abord la gamme des fréquences mesurables. Les fréquences naturelles importantes sont de type fréquences basses (moins de 100Hz). Les modes structuraux principaux sont souvent les cinq à huit premiers modes. Donc, il faut utiliser les capteurs de gamme convenable.

Le deuxième indice est la sensibilité des capteurs. C'est le rapport du signal électrique à la grandeur mécanique du capteur [mV/g].

Le poids des capteurs est aussi important dans ce cas, car il faut assurer une attache parfaite des capteurs à la structure, capteur léger (figure4.2) et capteur lourd (figure4.3) [11].



Figure 4.2 capteur uni axial



Figure 4.3 capteur triaxial

#### 4.9.3 Acquisition des données :

L'acquisition des données (figure 4.4) [48] demande d'abord une conversion A/D (analogique au numérique). Des données numériques pures qui ne sont que des signaux de durée déterminée sont initialement stockées enregistrées puis analysées.

Les données en accélération (des signaux) sont traitées par des méthodes différentes pour identifier les caractéristiques de la structure. Elles traversent peut-être des fenêtres (Hanning, cosine,.....) pour l'analyse de la FFT spectrale. Elles peuvent aussi être traitées par des méthodes d'analyse numérique.

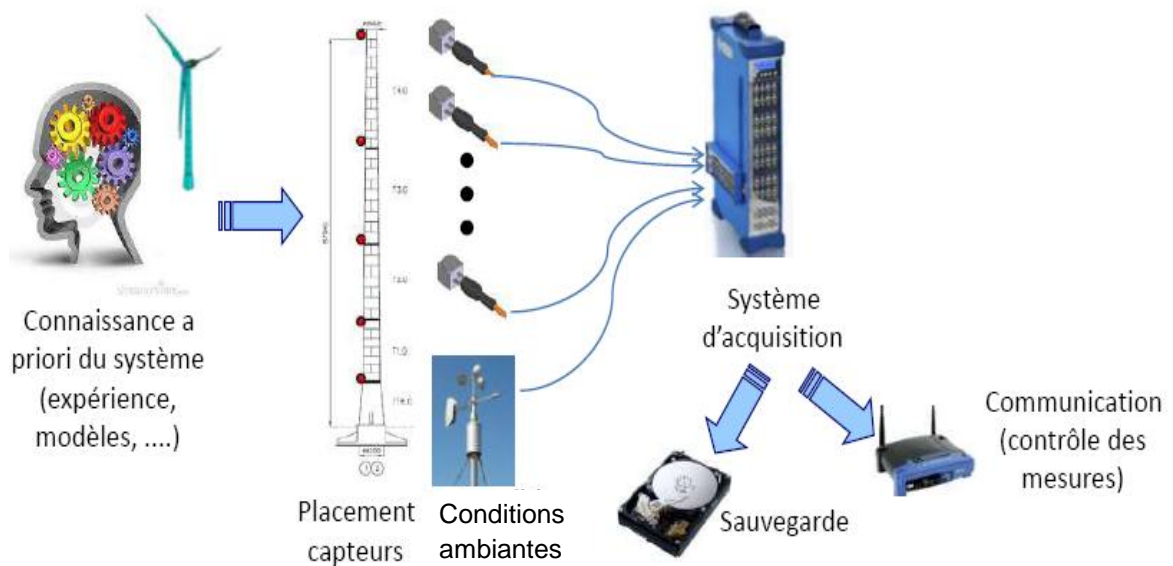


Figure 4.4 le système d'acquisition

#### 4.9.4 Traitement du signal :

Le conditionneur des signaux est plus important car les signaux des capteurs sont toujours très bas. Les conditionneurs sont souvent des amplificateurs en charge qui peuvent faire un anti-aliasing, un passe bas pré-filtrage du signal et qui permet une utilisation de long câblage. Quelques systèmes fournissent aussi l'intégration analogique aux vitesses ou déplacement. Les amplificateurs sont des multicanaux pour enregistrer les signaux de plusieurs capteurs [11] (figure4.5) [49].

On tient à dire qu'il y a deux familles d'approche de traitement de signal. Les signaux enregistrés sont étudiés dans le domaine fréquentiel par transformées de Fourier (c'est les méthodes des pointés des pics et ses dérivés). Une autre approche plus mathématique vient à l'origine du régime électrique. Elle utilise la théorie de l'analyse des systèmes et s'appelle «identification des systèmes». Elle vise à déterminer les caractéristiques d'un système dont on ne connaît pas les propriétés physiques en les décomposant en réponses impulsionnelles (IRF), c'est à dire en modes [15].

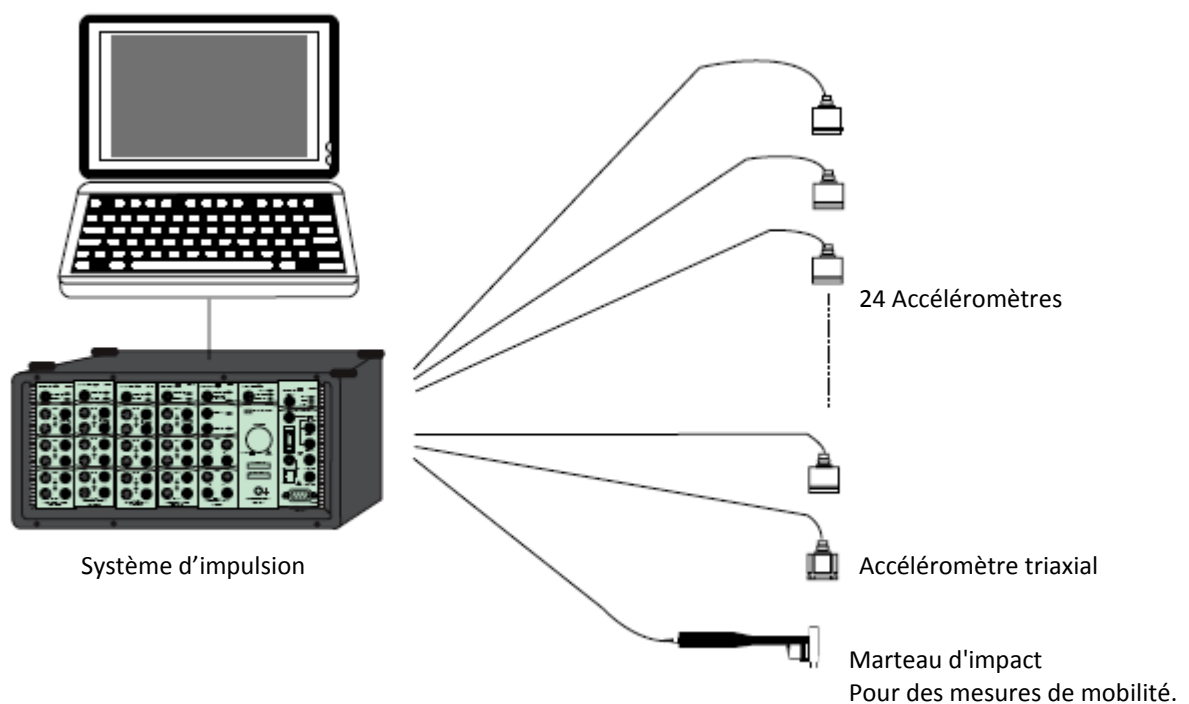


Figure 4.5 système d'acquisition et d'analyse des données

#### 4.10 Méthodes d'identification en (AMO) :

Les méthodes d'identification modale traditionnelle sont basées sur les essais durant lesquels on connaît la force d'excitation et durant lesquels on mesure des fonctions de transfert. Néanmoins les conditions réelles de rechargement (excitations) auxquelles la structure est soumise sont souvent différentes de celles appliquées en laboratoires [9].

On parle un peu plus sur cette importante partie car elle est l'aiguille de la technique d'analyse modale opérationnelle, l'excitation est aléatoire et est

composée d'une large gamme de fréquence. Pour simplifier, donc on suppose que cette excitation est un bruit blanc gaussien [43] d'où le développement d'une nouvelle technique d'analyse modale dite opérationnelle.

Un des moyens les plus utilisés dans l'industrie consiste à calculer les autospectres et spectres croisés et d'y relever les pics.

C'est la technique dite de pointé des pics (peak picking) mais il existe plusieurs méthodes d'analyse modale opérationnelle. On distingue deux groupes principaux, soit au domaine fréquentiel soit au domaine temporel [11], [38].

Dans le domaine fréquentiel, la méthode de puissance spectrale (pointé des pics) est la méthode de base. Elle sera l'outil principal de nos calculs.

Dans le domaine temporel, les méthodes sont souvent paramétriques et peuvent être divisées en deux branches. Il y a des méthodes qui tendent à s'accorder la fonction de corrélation des réponses ou la fonction des impulsives. On peut citer quatre méthodes principales de ce type comme la méthode Ibrahim (ITD) la méthode (LSCE) (least square complexe exponentiel) (moindre carrés complexes exponentiels), la méthode de sous-espace et naturel excitation technique (NEXT) [50], [9].

La deuxième branche concerne des méthodes utilisant un modèle mathématique approprié pour s'adapter aux réponses de la structure (les paramètres caractéristiques de la structure sont identifiés des méthodes d'identification comme les moindres carrés). On peut, noter les méthodes d'auto régressive (AR), auto régressive a moyen mobile (ARMA) ou le modèle d'espace d'état [50], [11], [38],[51].

#### 4.11 Méthodes de puissance spectrale :

##### 4.11.1 Enoncé de la méthode:

Cette méthode est connue comme la méthode la plus simple pour déterminer les paramètres dynamiques d'une structure.

L'idée de cette méthode se base sur le principe de résonance [11], elle consiste à faire passer les signaux  $x(t)$  enregistrés dans le domaine fréquentiel, puis de

s'intéresser aux caractéristiques des pics dans le spectre : fréquence, amplitude et largeur du pic [15]. Quand la fréquence de l'excitation tend vers la fréquence propre de structure, l'énergie devient maximale.

On parle de spectre indifféremment pour le résultat de deux traitements mathématiques, la transformée de Fourier  $X(f)$  :

$$X(f) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-2j\pi f t} dt \quad (4.1)$$

Avec  $j^2 = -1$ , et la densité spectrale de puissance  $S_{xx}(f)$  (DSP ou power spectral density PSD) (figure 4.6 et figure 4.7) [15].

$$S_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) x(t + \tau) e^{-2j\pi f t} dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X^*(f, T) X(f, T)] \quad (4.2)$$

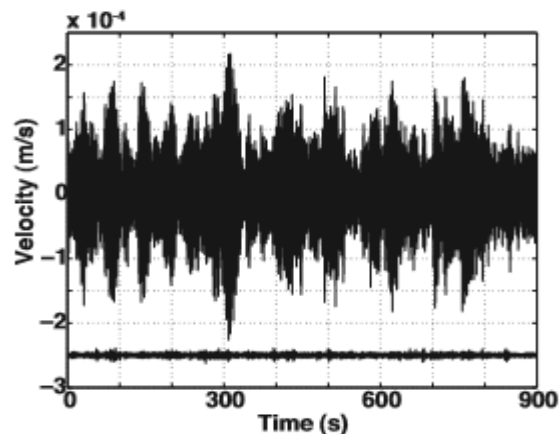


Figure 4.6 : Enregistrement en temps

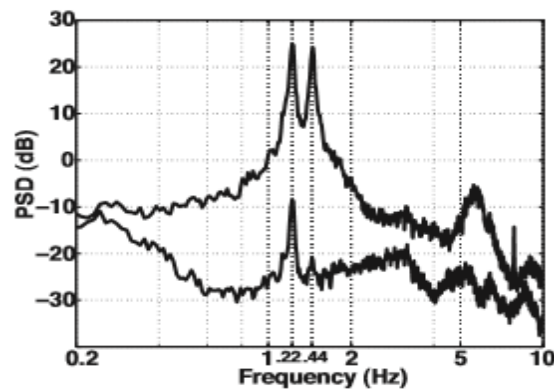


Figure 4.7 : Densité spectrale de puissance, PSD

Avec  $X(f, T)$  la transformée de Fourier de  $x$  sur l'intervalle  $[0, T]$  et  $*$  le complexe conjugué. Par abus, nous écrirons :

$$S_{xx}(f) = X^*(f) X(f) \quad (4.3)$$

Leurs estimations et leurs expressions mathématiques sont assez proches les unes des autres puisque l'amplitude de la PSD est transformé de Fourier du carré du signal, mais la PSD a pour avantage de représenter l'énergie contenue à chaque fréquence, C'est physiquement plus proche de ce qui doit être considéré pour caractériser un mode. Le spectre est alors plus lisse pour le même nombre de points. La valeur d'amplitude est donnée habituellement en décibels (dB) [15] :

$$S_{xx}^{dB}(f) = 10 \log\left(\frac{|S_{xx}(f)|}{S_0}\right) \quad (4.4)$$

#### 4.11.2 Identifications des paramètres modaux par la méthode de puissance spectrale :

En observant le spectrogramme (figure 4.8) [11], on a  $P_i$  la puissance d'un pic, alors :

- 1) La fréquence propre  $\omega_i$ : est la fréquence correspondante à  $P_i$
- 2) L'amortissement  $\xi_i$ : Correspondant à la fréquence  $\omega_i$  est calculé par la méthode utilisée PSD.

Si  $\omega_i^-$  et  $\omega_i^+$  sont les fréquences à la moitié de l'amplitude d'un pic à la fréquence  $\omega_i$ , le taux d'amortissement

$$\xi_i = \frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{2\omega_i} \quad (4.5)$$

- 3) Les déformées modales : Les pics correspondent aux fréquences propres (fréquences de résonance) et l'amplitude est approximativement proportionnelle au vecteur propre.

Donc les formes modales sont calculées à partir des rapports d'amplitudes des pics aux différents points de la structure.

En conclusion, le pointé de pics (méthode de puissance spectrale) permet d'obtenir facilement et rapidement les fréquences, les déformées et éventuellement l'amortissement d'une structure à partir d'enregistrements de vibration ambiantes mais seulement si les modes ne sont pas trop proches.

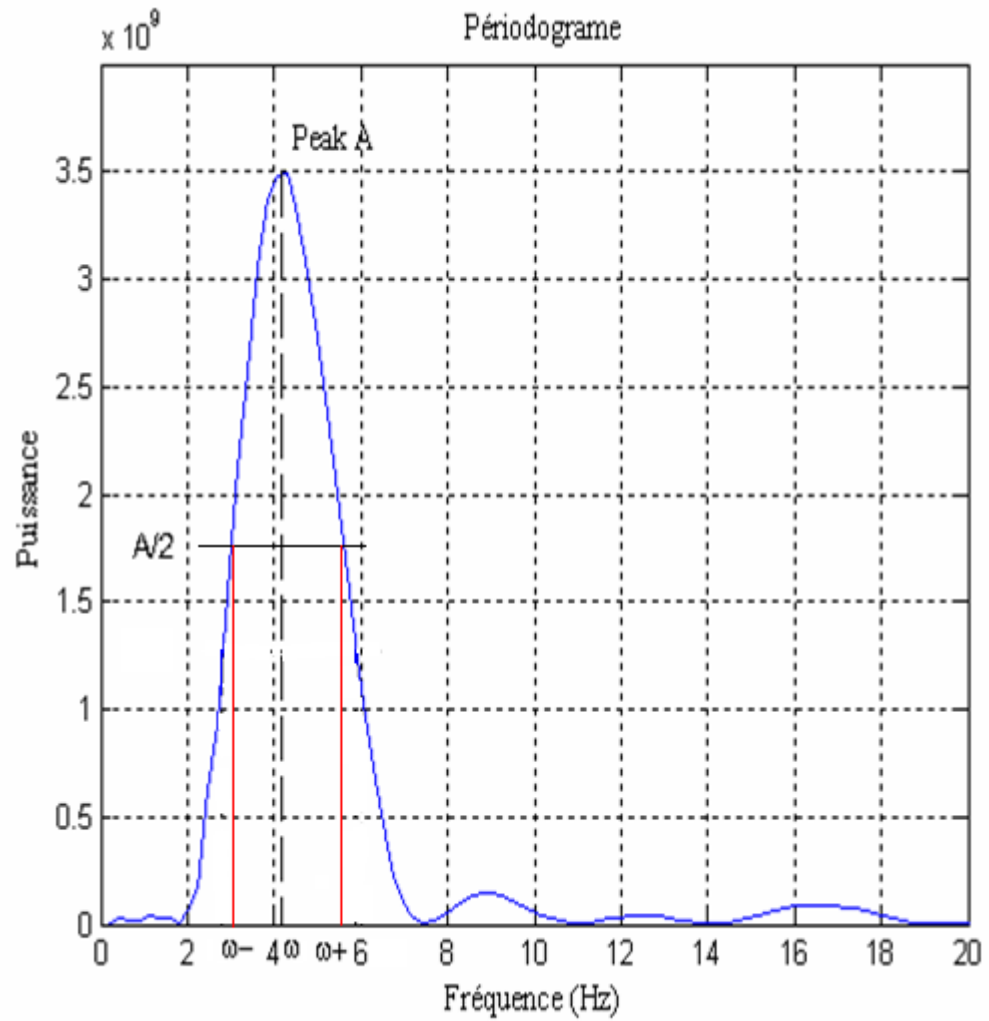


Figure 4.8: Méthode de puissance spectrale

Tableau 4.1 : Récapitulation de la relation entre l'analyse modale opérationnelle (AMO) et l'analyse modale classique:

Analyse modale classique	Analyse modale opérationnelle (AMO)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• mesure de l'entrée: excitation artificielle du système mécanique.</li> <li>• réponse impulsionnelle (en Temps).</li> <li>• fonction de transfert <math>H=X/F</math> (en Fréquence).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• l'entrée n'est pas mesurée mais elle est supposée aléatoire en temps et en espace, de moyenne nulle et blanche en fréquence</li> <li>• fonctions de corrélation entre les Signaux.</li> <li>• spectres de puissance (autospectres et spectres croisés) (unités linéaires) (unités énergétiques)</li> </ul>

Hypothèse commune principale: le système est linéaire et stationnaire



## CHAPITRE 5

### APPLICATIONS ET RESULTATS

#### 5.1 Introduction :

Dans le but de présenter et d'exploiter l'approche modale, en utilisant la technique de l'analyse modale opérationnelle et par conséquent la méthode choisie ; celle dite méthode de la puissance spectrale, nous allons consacrer ce chapitre ; pour l'appliquer avec toutes ces hypothèses sur des modèles de structures de tailles et de natures différentes.

Les applications choisies, ont pour but la validation des résultats obtenus par l'AMO, en les comparants avec ceux tirés de la littérature.

Les réponses obtenues par MATLAB comme des signaux, vont être transformés directement à un spectre de puissance, passant par la transformée de FOURIER. Le pointé de pics rendre facile la lecture de la valeur de la fréquence propre et l'amortissement du mode considéré, à partir du periodogramme de spectre de la puissance du signal de sortie.

#### 5.2 Les critères:

Avant de commencer, il faut bien supposer que les modèles présentés correspondent aux deux hypothèses principales de l'approche analyse modale opérationnelle tel que :

- 1) Le système est considéré dissipatif (cas réel)
- 2) Le système est libre, pour déterminer les caractéristiques modales naturelles, ainsi pour considérer que le système doit être soumis à un bruit blanc.

#### 5.3 Étapes à suivre:

En vu de mettre en évidence les performances et les limites de la procédure entamée (AMO) et pour faire les conclusions nécessaires, les applications de validation vont respecter les étapes suivantes :

- \_ donner une définition du modèle proposé.
- \_ donner les différentes étapes de calcul.
- \_ s'intéresser aux résultats et aux commentaires de ces derniers.

### 5.3.1 Définition du modèle:

Les modèles analytiques proposés pour comparer les résultats obtenus de la littérature et les résultats obtenus par l'AMO, nécessite la détermination :

- des caractéristiques physiques ( $m$ ,  $k$ ,  $c$ ).
- de l'excitation extérieure et des liaisons.

À partir de ces données, via un programme dans l'environnement MATLAB, nous obtiendrons les réponses de chaque système pour obtenir le spectre de ces dernières.

### 5.3.2 Exploitation des résultats :

Après l'obtention des résultats à l'aide d'un outil numérique, nous exploitons la réponse du système étudié, un signal (réponse) temporel qui va être transféré en domaine fréquentiel par la transformée de Fourier (FFT), puis par la fonction PSD (sous MATLAB) ; pour avoir un spectrogramme représentant le spectre de la puissance de signal de la sortie. En deuxième lieu, de ce graphe on tire les résultats concernant les caractéristiques modales de la structure, en observant les pics, comme a été expliqué avant (chapitre 4).

## 5.4 Applications:

Pour toutes les applications, on adoptera les définitions suivantes :

$\omega_{ni}$  : la fréquence propre du système étudié pour le mode d'ordre  $i$  par résolution numérique (ou analytique), par les formules (3.24a) et (3.24b) ; ou directement tirée de la littérature.

$\omega_{0i}$  : la fréquence propre du système pour le mode d'ordre  $i$ , par la méthode PSD à la puissance  $P_i$  du pic  $i$  .

$\omega_{0i}^- ; \omega_{0i}^+$  : les fréquences correspondantes a la demi puissance ( $P_i/2$ )

$\xi_{ni}$  : facteur d'amortissement du mode  $i$  , par la méthode analytique, on utilise les formules (3.24a) et (3.24b) ; ou directement tirée de la littérature.

$\xi_i$  : facteur d'amortissement du mode, par la méthode PSD, on utilise la formule (4.5).

5.4.1 Application 1 : Système a 1ddl amorti libre (figure 5.1).

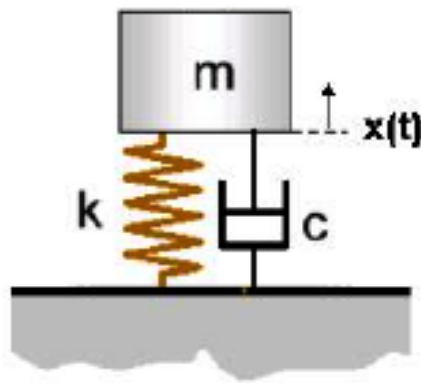


Figure 5.1 Système a 1ddl amorti libre

D'après l'illustration 3.1 la réponse du système amorti libre dans le domaine temporel est  $x(t) = 5,076 \cdot 10^{-3} e^{-3,25t} \cdot \sin 19.7 t$ . (5.1)

Le programme conçu sous MATLAB pour construire le tracé des graphes de  $x(t)$  (5.1) comme un signal de sortie (figure 5.2), de FFT de  $x(t)$  (figure 5.3) et finalement le spectrogramme de la puissance spectrale (figure 5.4)

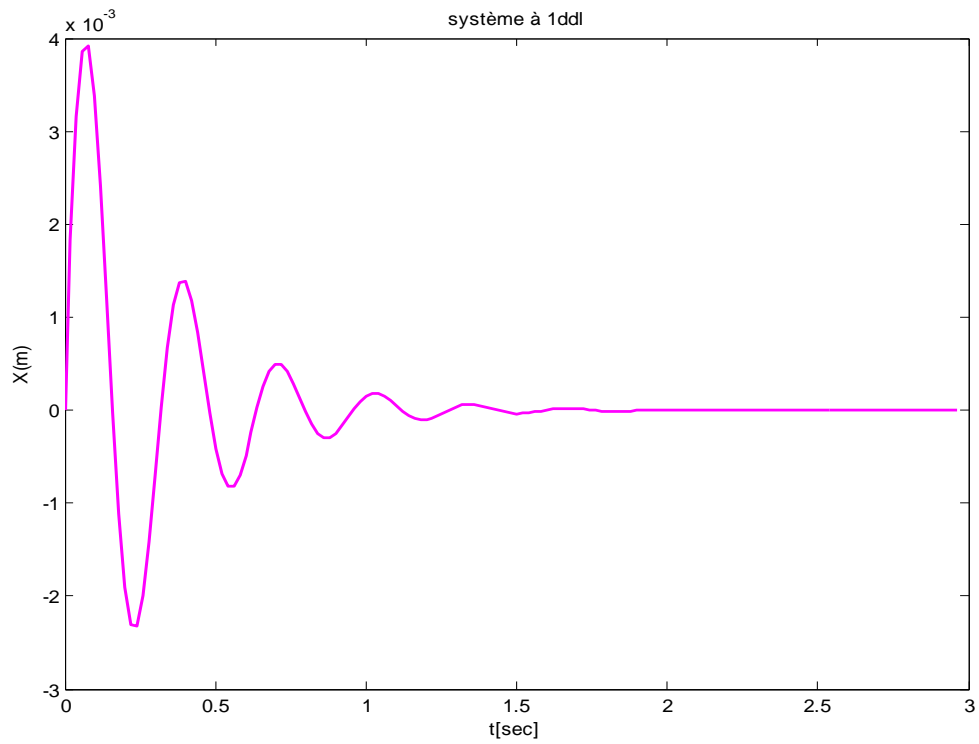


Figure 5.2 : Représentation temporelle de la réponse  $x$ .

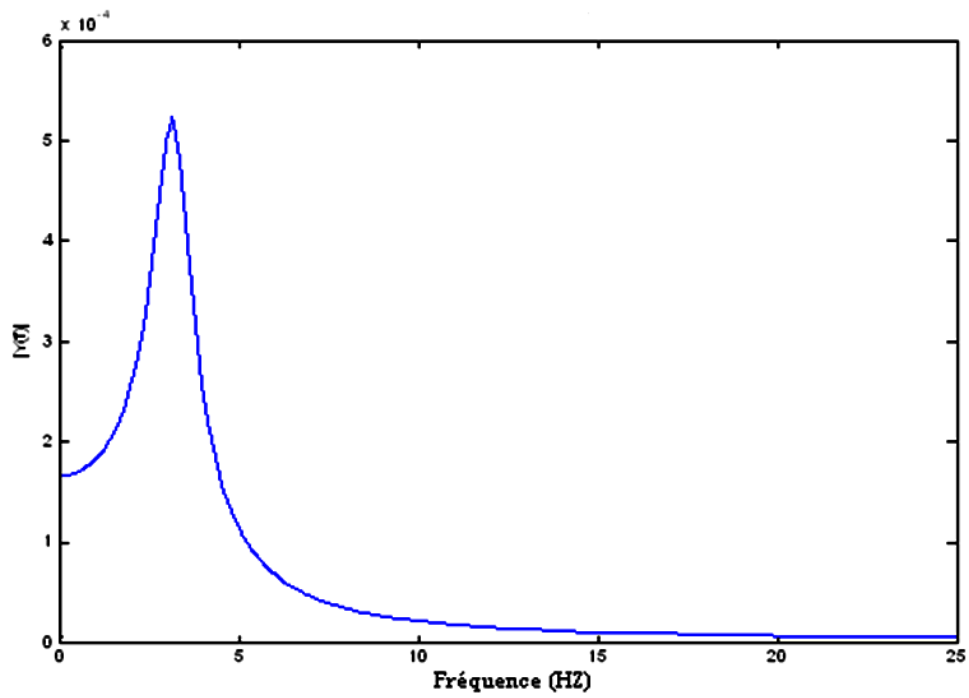


Figure 5.3 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x$ .

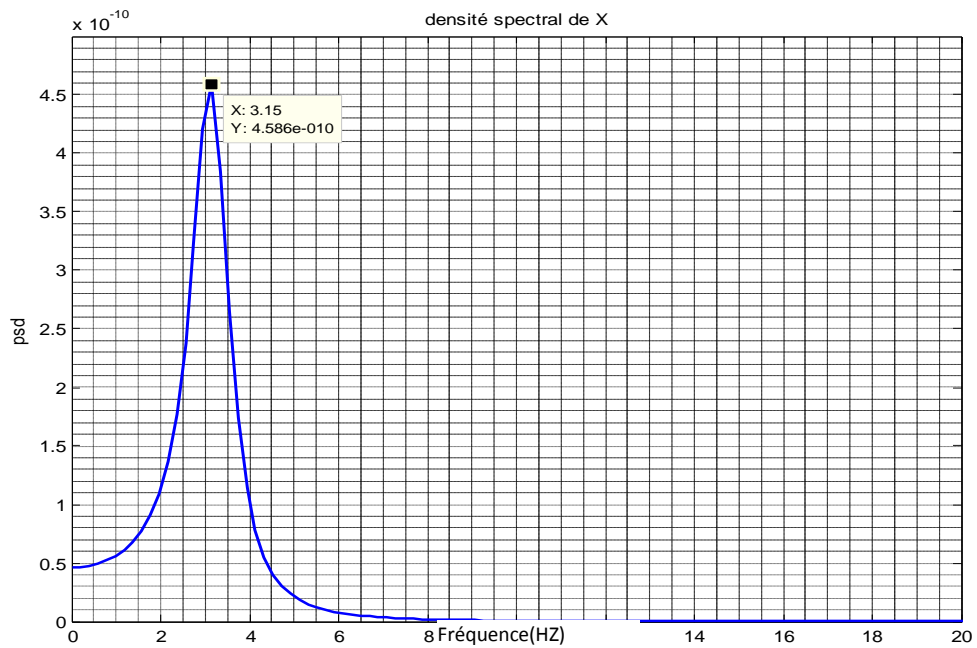


Figure 5.4 : Le spectrogramme(PSD) de la réponse  $x$ .

### Résultats :

Suivant le formalisme déclaré dans la section (4.4) on a :

- ✓ A partir du graphe (la méthode de la puissance spectrale PSD) :

Tableau 5.1 : les caractéristiques du système par la méthode PSD (AMO).

$P_i[dB]$	$P_i/2[dB]$	$f_0[Hz]$	$\omega_0[rd/s]$	$\omega_{01}^- [rd/s]$	$\omega_{01}^+ [rd/s]$	$\xi$
$4,589 \cdot 10^{-10}$	$2,293 \cdot 10^{-10}$	3.15	19,79	15,83	22,55	0,1699

- ✓ À partir du modèle analytique (illustration2.1) :  $\omega_{0n} = 20 \frac{rd}{s}$ ;  $\xi = 0,1625$

Tableau 5.2 : comparaison des résultats entre les deux méthodes

	Méthode analytique	Méthode PSD	Ecart %
$\omega_0 [rd/s]$	20	19.79	1%
$\xi$	0.1625	0.1679	4,5%

Commentaire :

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont proches, et la PSD à partir de son graphe montre clairement que le mode est à 19.79 rd/s, et ce résultat est cohérent à celui donné par la méthode analytique qui est de 20rd/s dont l'écart est de 1%. Au même titre on a l'amortissement qui est aussi stable avec un écart de 4,6% entre les deux valeurs des deux méthodes. Dans tous les cas l'écart est négligeable.

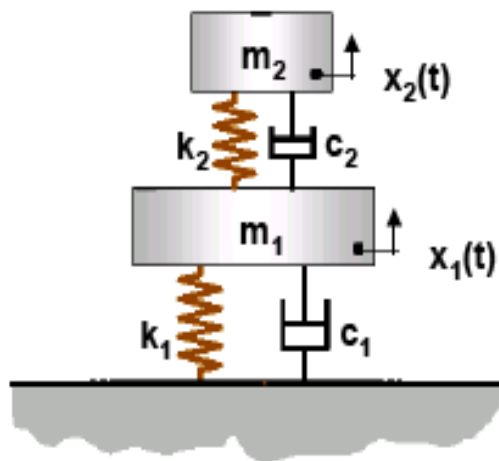
5.4.2 Application 2 : Système a 2ddl libre amorti (amortissement proportionnel).

Figure 5.5 Système a 2ddl amorti libre

Le système proposé a deux masses  $m_1 = 9Kg, m_2 = 1Kg$ , deux ressorts  $k_1 = 24 N/m, k_2 = 3 N/m$ ; et deux amortisseurs  $c_1 = 2.4 Ns/m, c_2 = 0.3 Ns/m$  comme la figure 5.5 l'indique.

Avec :  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.1$  (coefficient de Rayleigh)

Et les conditions initiales :  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = 0$ .

D'après le système d'équations différentielles (2.2) (système dissipatif libre) les équations de mouvement sont :

$$\begin{cases} 9\ddot{x}_1 + 2.7\dot{x}_1 + 27x_1 - 0.3\ddot{x}_2 - 3x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 0.3\dot{x}_2 + 3x_2 - 0.3\dot{x}_1 - 3x_1 = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

La forme matricielle du système (5.2) est :

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.7 & -0.3 \\ -0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

A partir de (5.2) le programme sous MATLAB est conçu pour le calcul des deux réponses  $x_1$  et  $x_2$  du système proposé, avec leurs graphes en fonction de temps. Ainsi que l'obtention des graphes de leurs FFT et PSD.

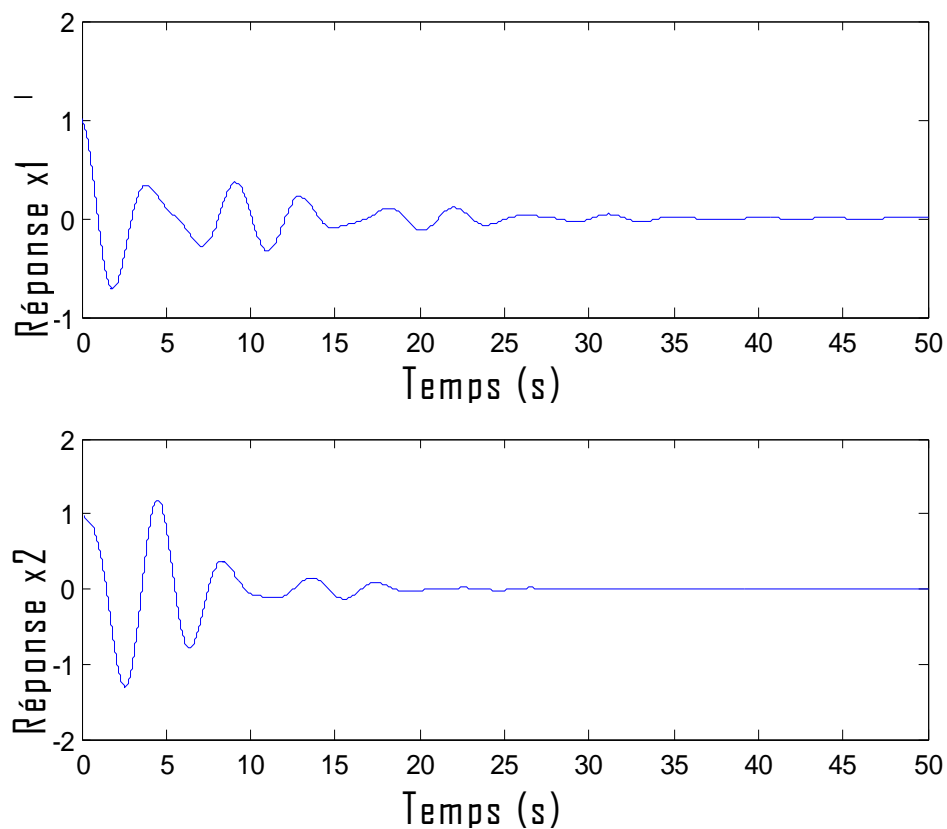


Figure 5.6 : Représentation temporelle des réponses  $x_1$  et  $x_2$ .

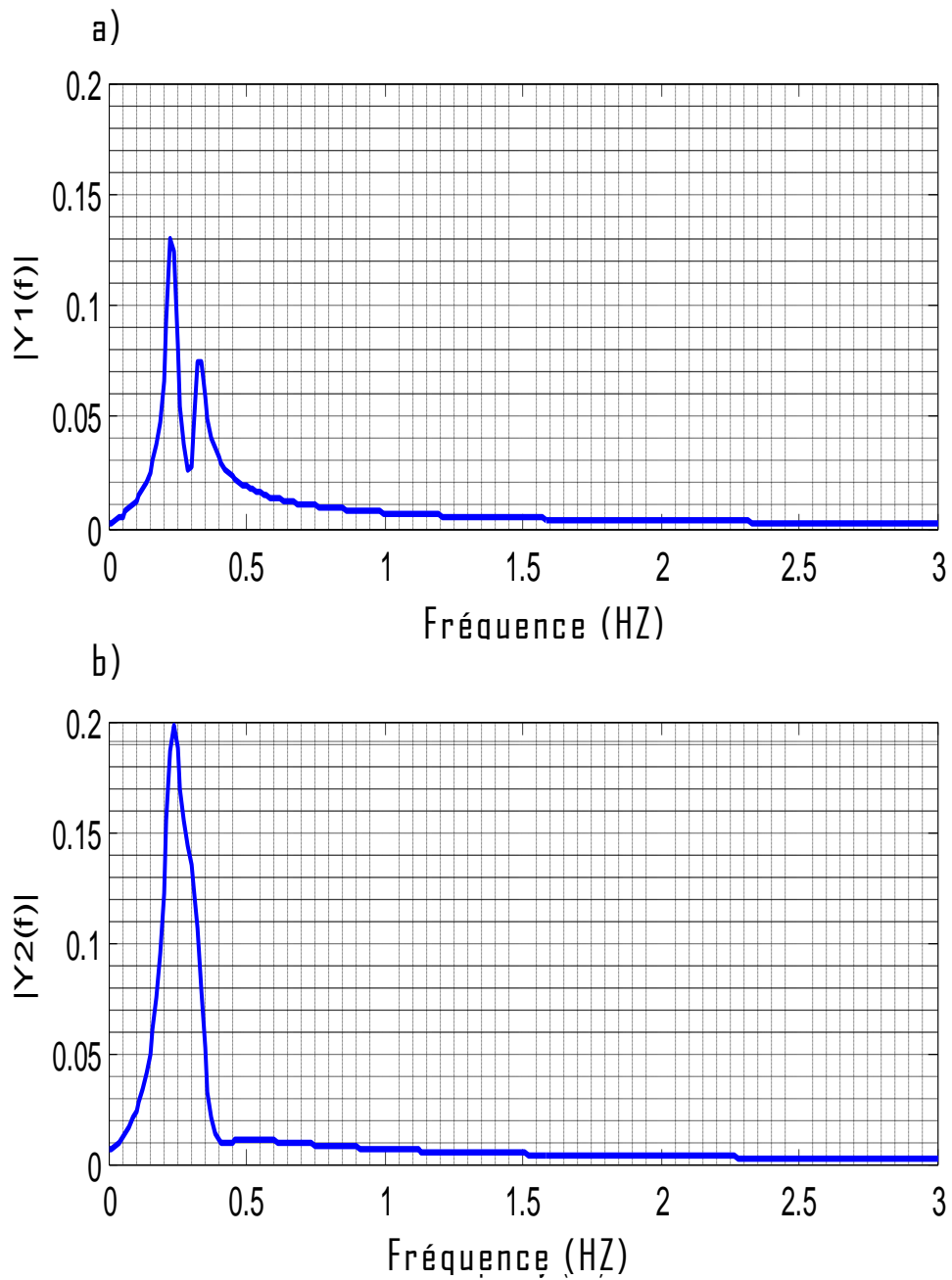


Figure 5.7 : **a)**- Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_1$ .

**b)**- Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_2$ .



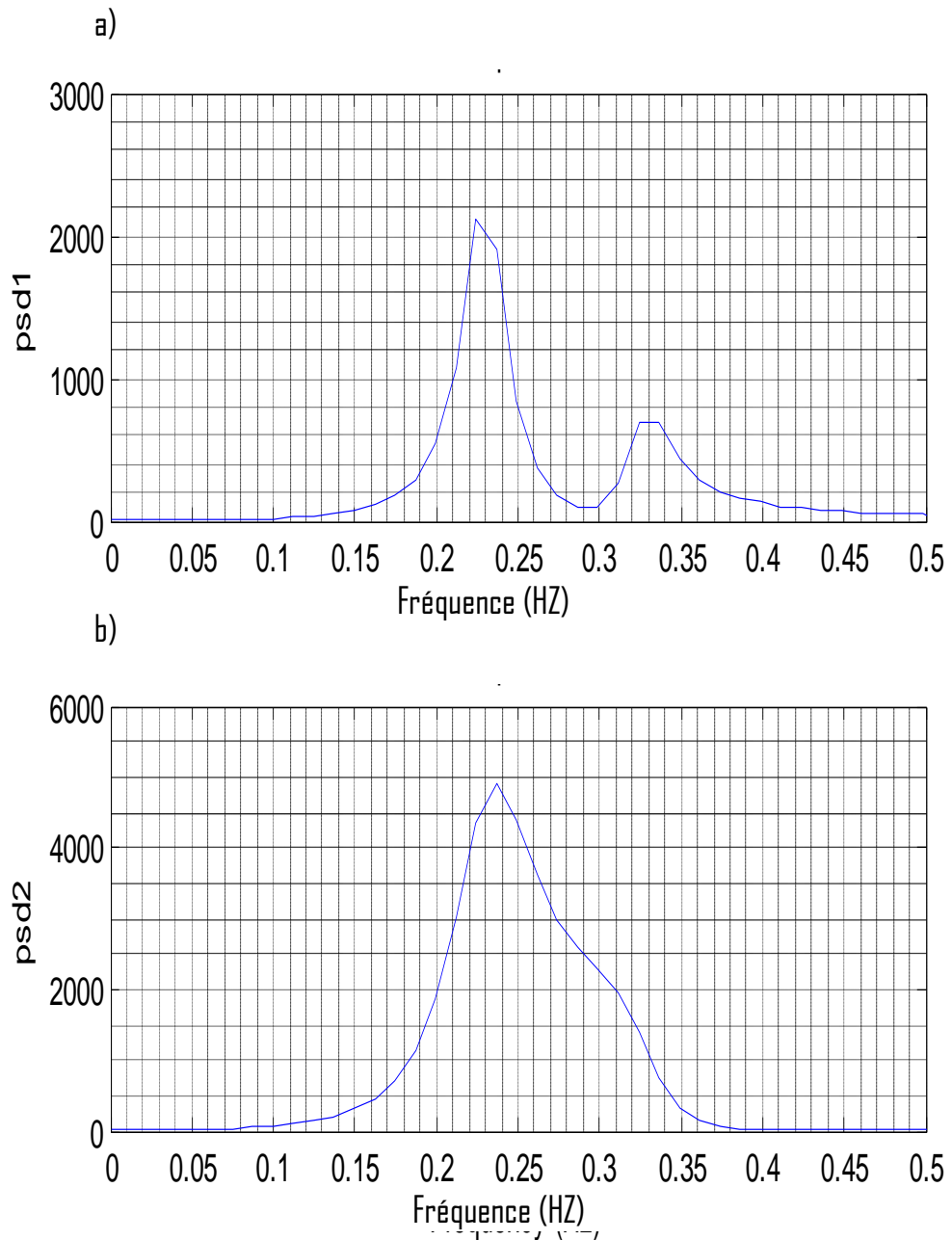


Figure 5.8 : **a)**- Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $x_1$ .

**b)**- Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $x_2$ .

Résultats :

- ✓ Suivant le formalisme déclaré dans la section (4.4), et à partir des graphes de PSD (figures 5.8 : a et b) on peut dresser le tableau 5.3.

Tableau 5.3 : les caractéristiques du système à partir de la méthode PSD (AMO).

	$P_i[dB]$	$P_i/2[dB]$	$f_{0i}[Hz]$	$\omega_{0i}[rd/s]$	$\omega_{0i}^- [rd/s]$	$\omega_{0i}^+ [rd/s]$	$\xi_i$
Mode 1	2113	1056.5	0.224	1.41	1.357	1.570	0.0754
Mode2	701.3	350.65	0.330	2.07	1.979	2.199	0.0530

- ✓ La résolution analytique du système (5.2) tirée de [52] donne les résultats du tableau 5.4.

Tableau 5.4 : les caractéristiques du système par la méthode analytique.

	$f_n[Hz]$	$\omega_n[rd/s]$	$\xi_n$
Mode1	0.224	1.41	0.0707
Mode2	0.316	1.99	0,050

Tableau 5.5 : comparaison entre les deux méthodes.

		Méthode analytique	Méthode PSD	Ecart %
$\omega_0[rd/s]$	Mode1	1.41	1.41	0
	Mode2	1.99	2.07	4
$\xi$	Mode1	0.707	0.0754	6.73
	Mode2	0.050	0.053	6

Commentaire :

On peut clairement voir sur les spectrogrammes (figure 5.8 : a et b) de spectre de la densité de puissance l'existence de deux modes dans le rang de fréquence 0-3 rd/s, c'est adéquat avec les résultats de la méthode analytique [52].

On voit aussi que le premier mode est plus excité, et a une puissance maximale à la fréquence 1.41rd/s, l'autre mode est à la fréquence 2.07rd/s.

Ces résultats sont identiques avec ceux obtenus par la méthode analytique [52], dont l'écart ne dépasse pas les 4%.

Pour les amortissements, les deux modes donnent des valeurs proches par la méthode AMO, à celles données par la méthode analytique, avec un écart acceptable de 6% au maximum.

En fin la méthode AMO (en utilisant PSD) donne de très bons résultats comparativement avec l'analytique.

#### 5.4.3 Application 3 : Système a 4ddl libre amorti (amortissement non proportionnel).

Système composé de quatre masses  $m_1, m_2, m_3$  et  $m_4$ , quatre ressorts  $k_1, k_2, k_3, k_4$  et quatre amortisseurs  $c_1, c_2, c_3, c_4$  (figure 4.7).

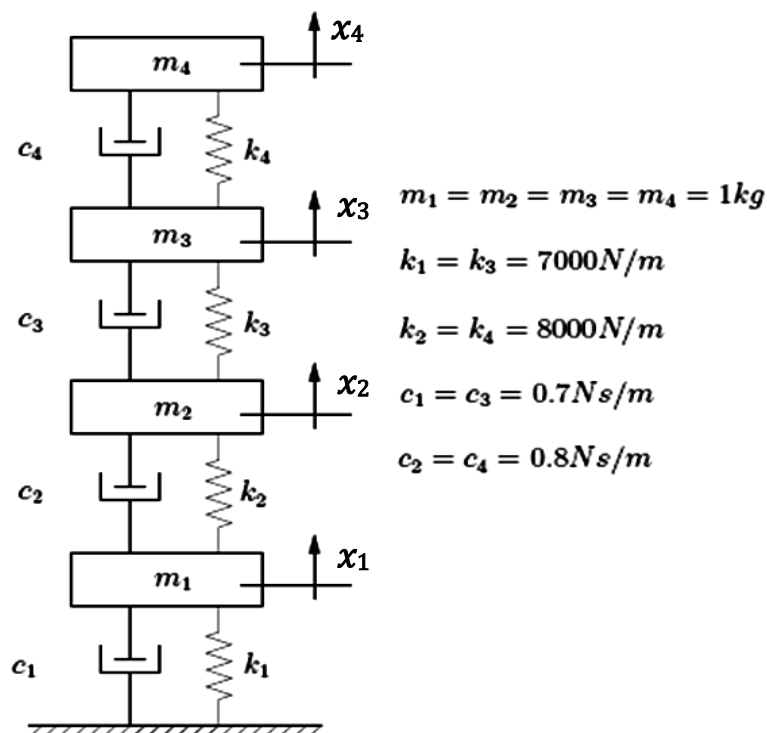


Figure 5.9 : Système a 4ddl amorti libre.

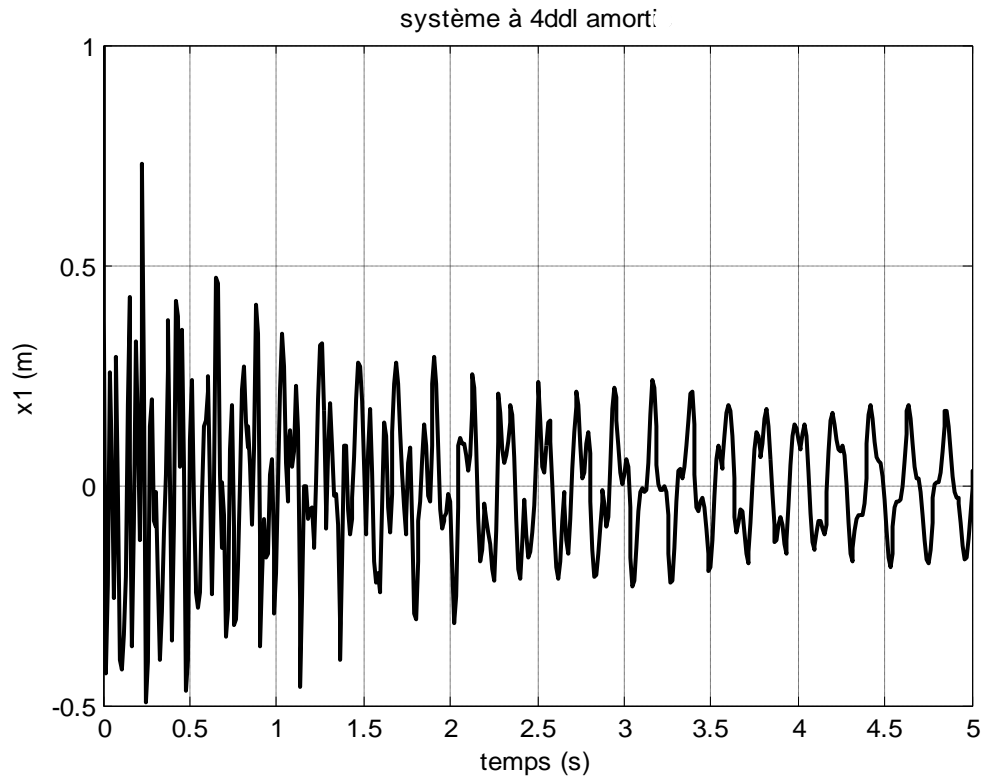


Figure 5.10 : Représentation temporelle de la réponse  $x_1$ .

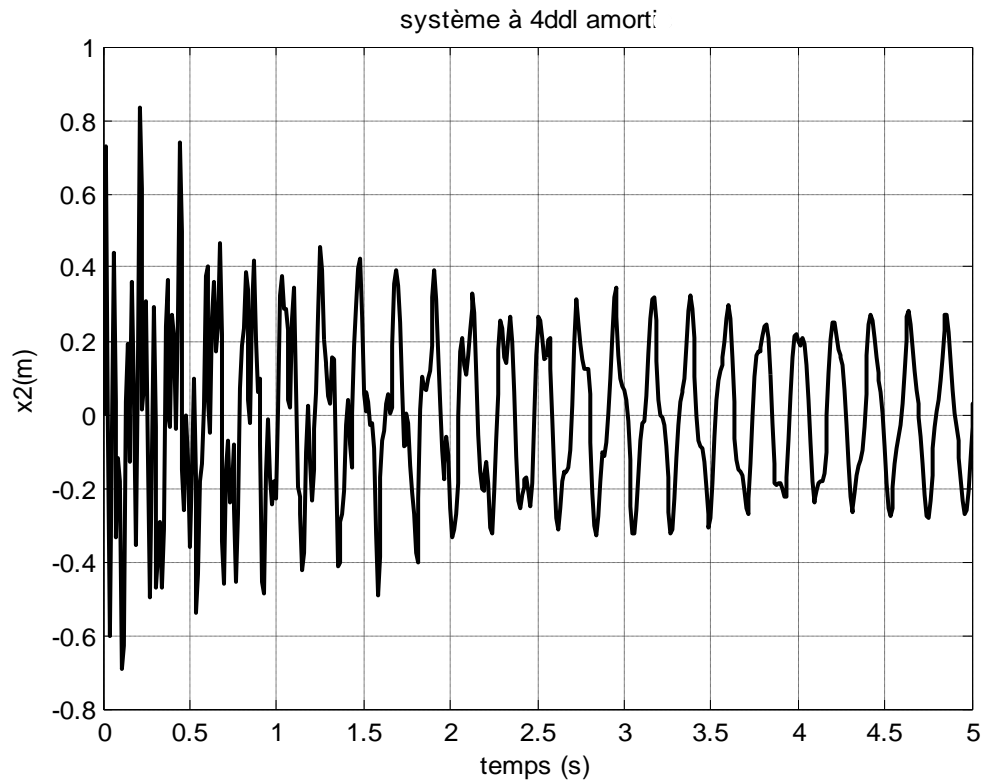


Figure 5.11 : Représentation temporelle de la réponse  $x_2$ .

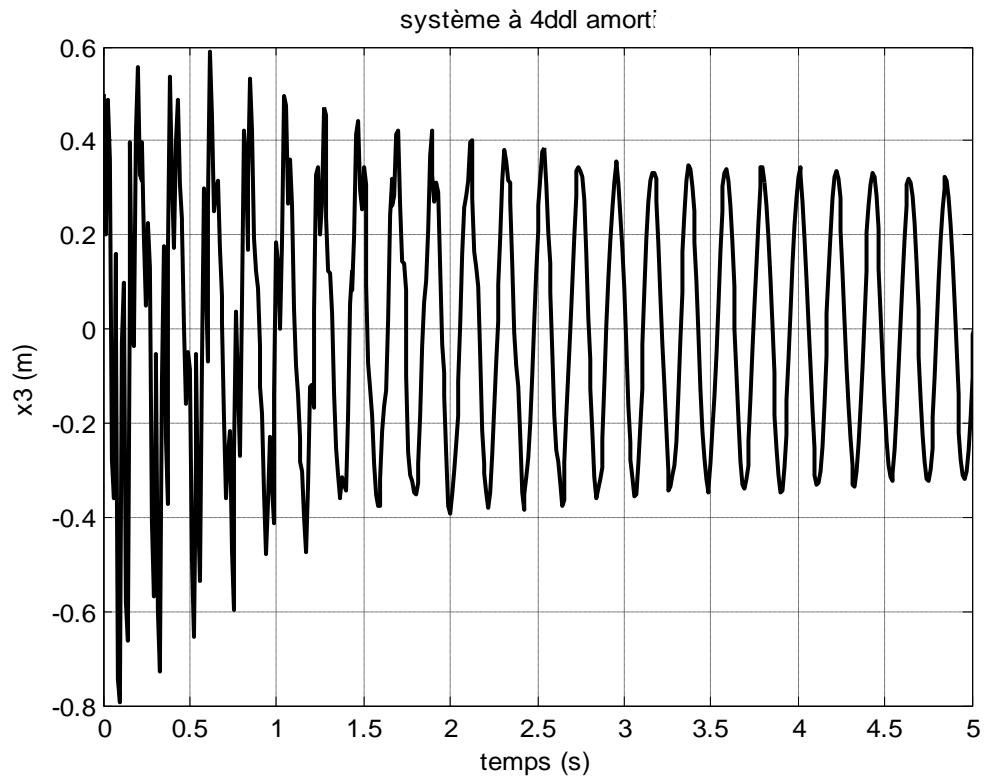


Figure 5.12 : Représentation temporelle de la réponse  $x_3$ .

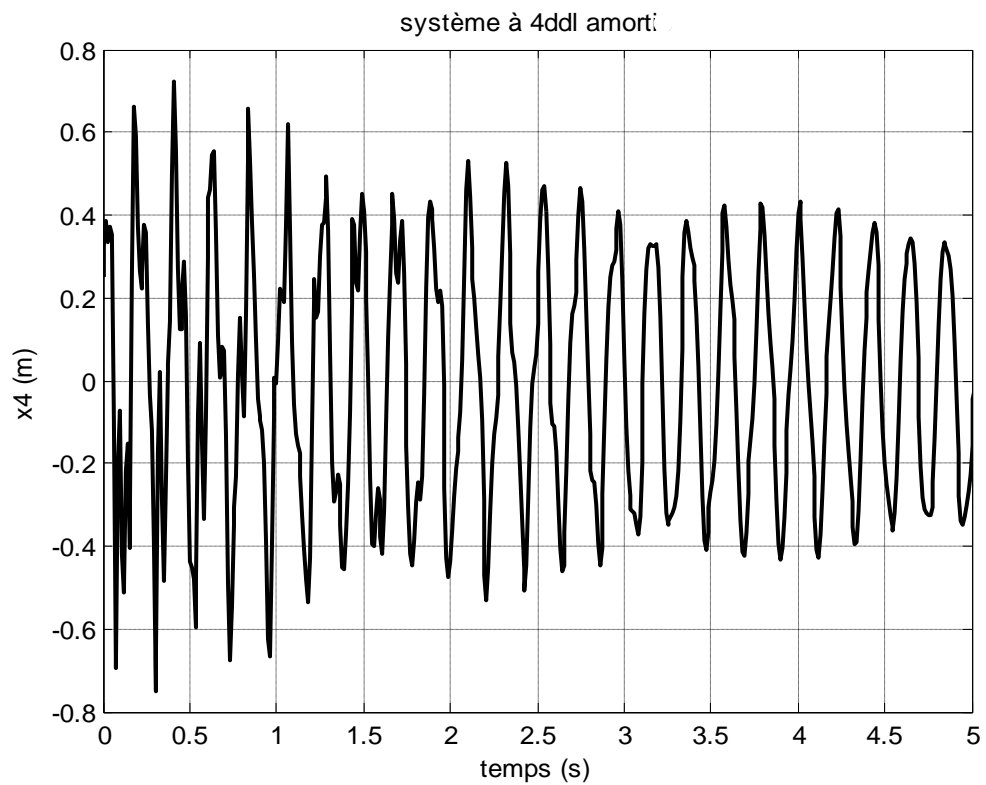


Figure 5.13 : Représentation temporelle de la réponse  $x_4$ .

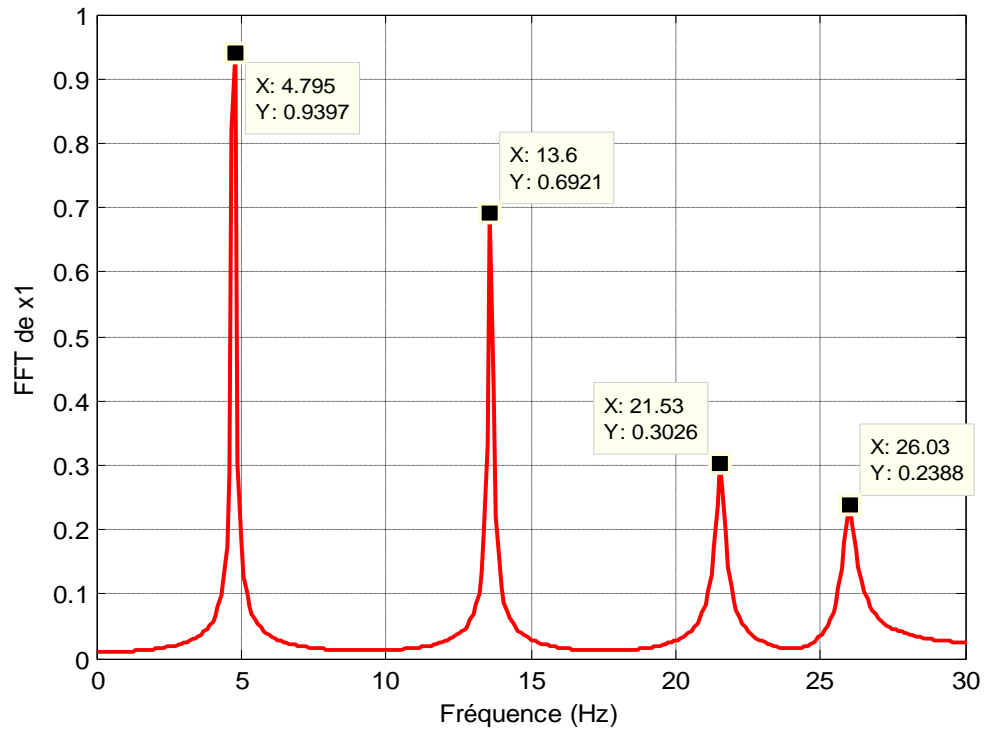


Figure 5.14 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_1$ .

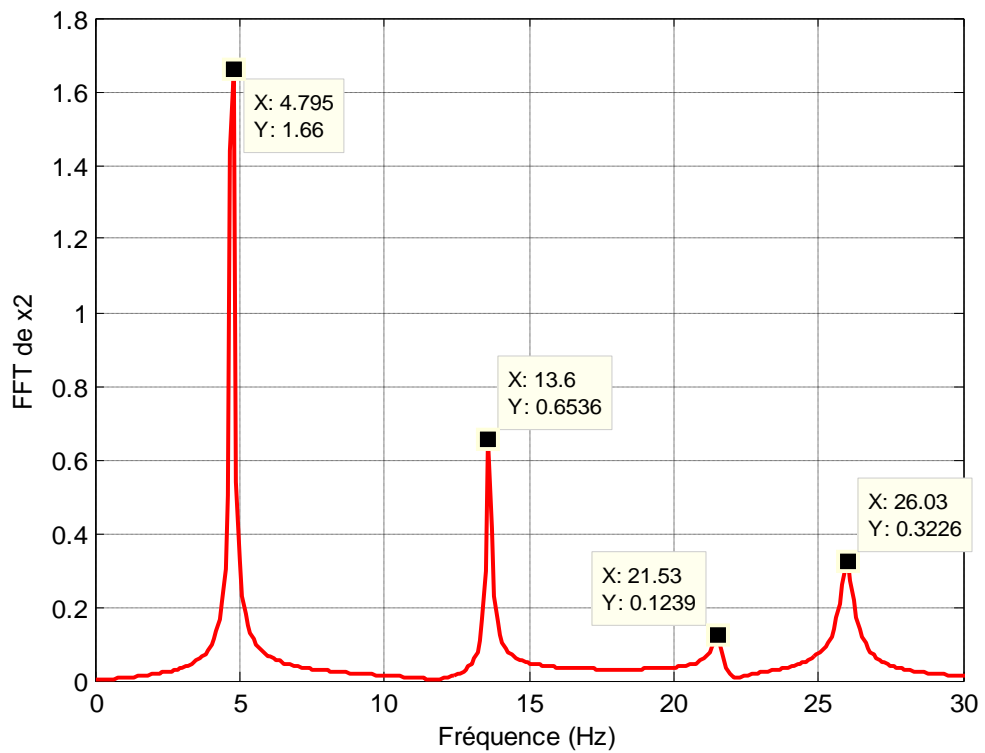


Figure 5.15 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_2$ .

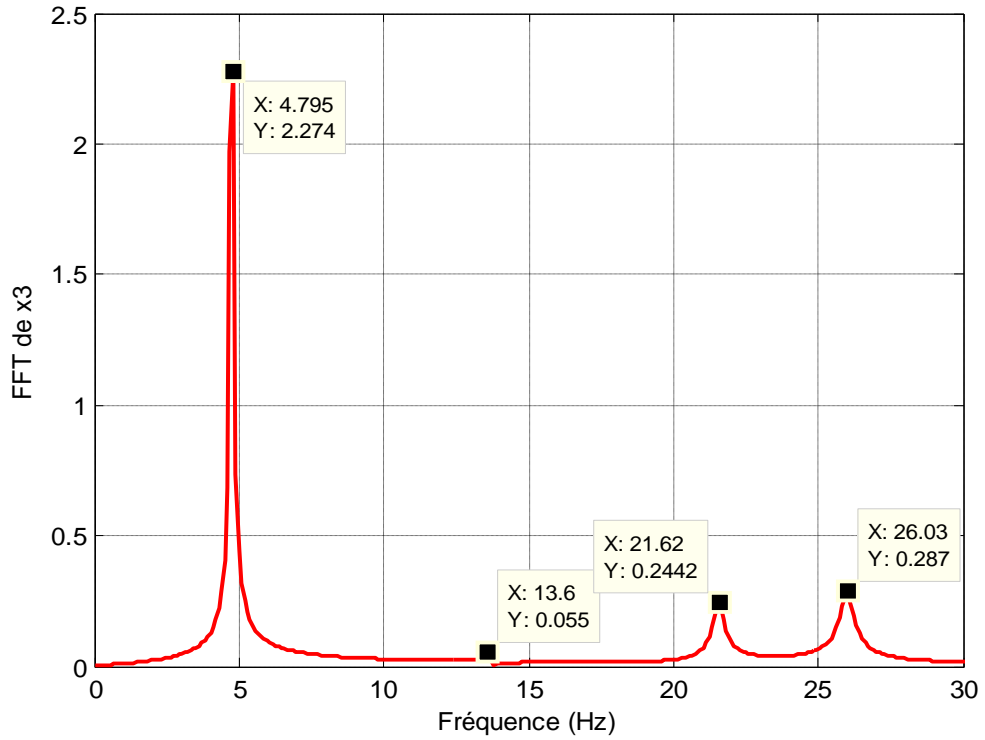


Figure 5.16 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_3$ .

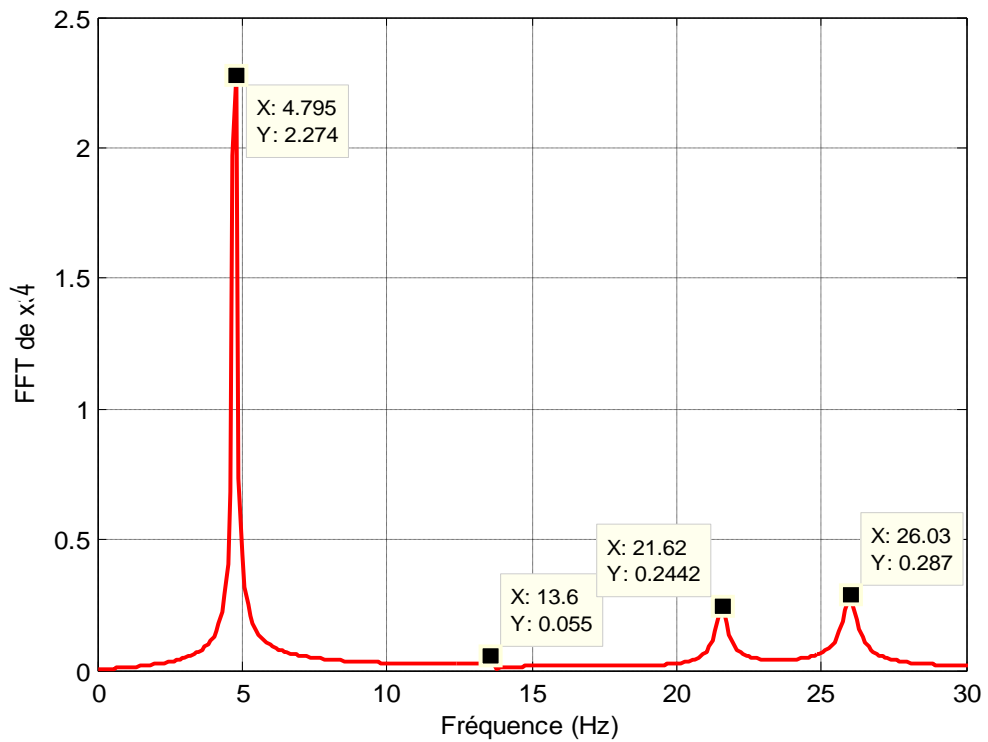


Figure 5.17 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_4$ .

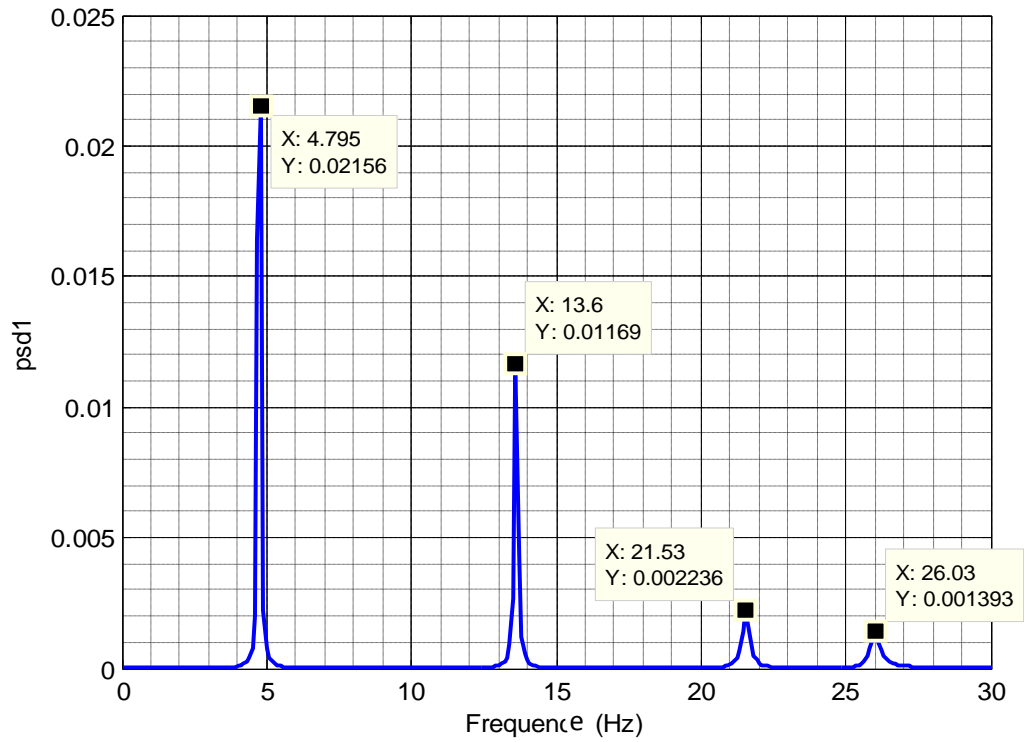


Figure 5.18 : Le spectrogramme(PSD) de la réponse  $x_1$ .

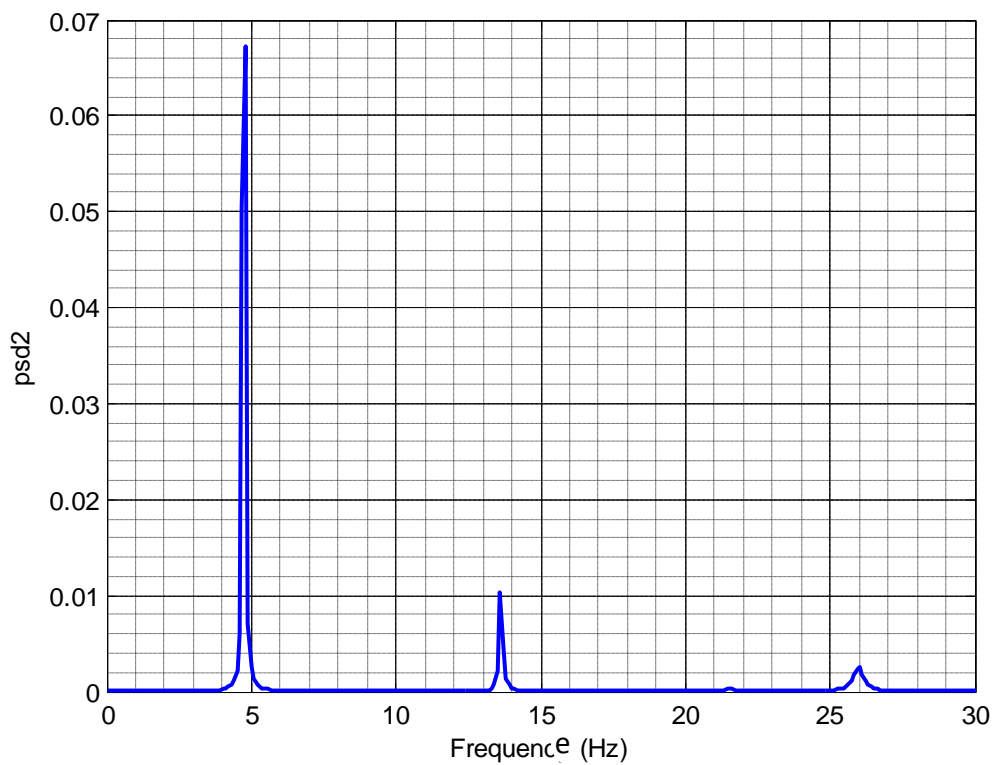


Figure 5.19 : Le spectrogramme(PSD) de la réponse  $x_2$ .



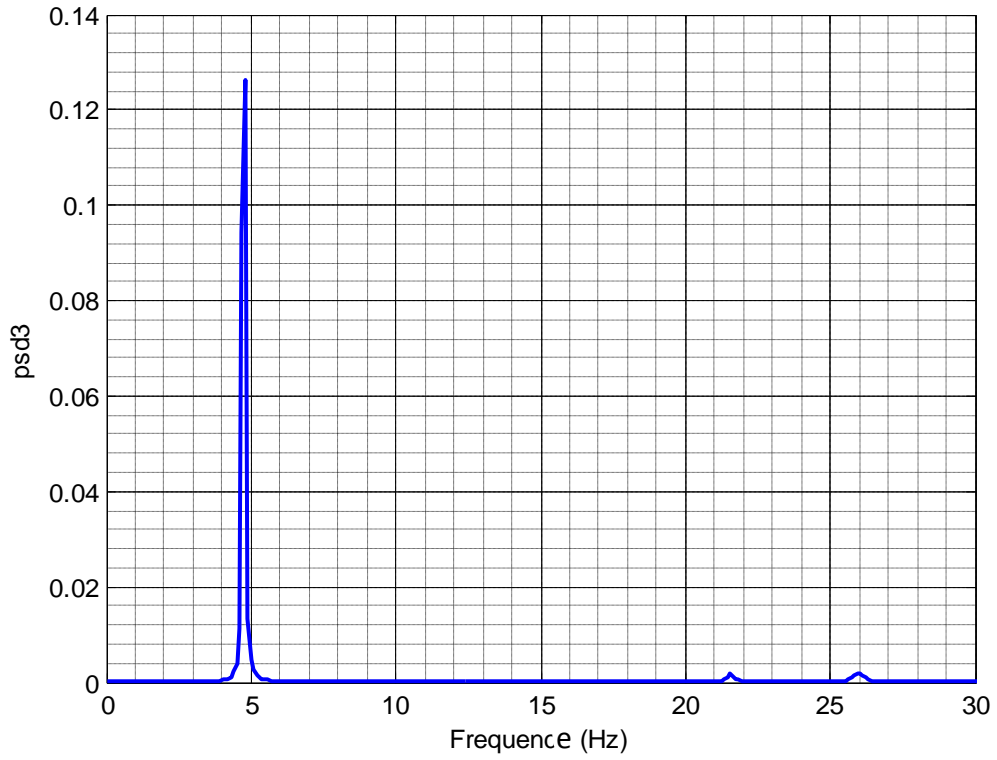


Figure 5.20 : Le spectrogramme(PSD) de la réponse  $x_3$ .

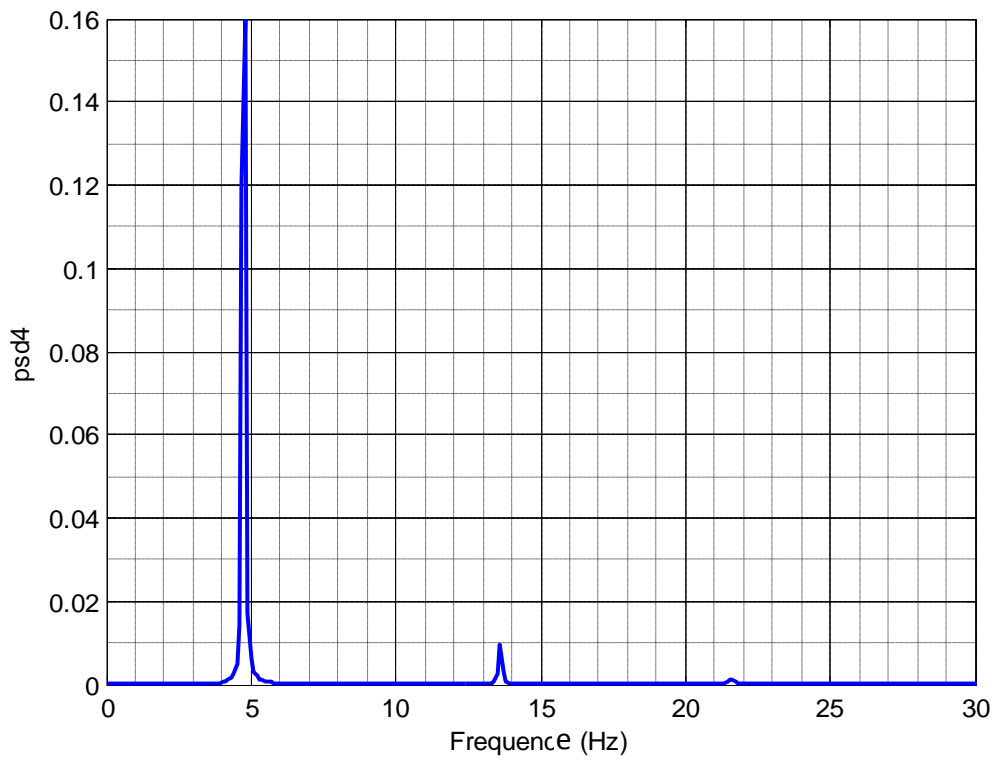


Figure 5.21 : Le spectrogramme(PSD) de la réponse  $x_4$ .

Résultats :

- ✓ Suivant le formalisme déclaré dans la section (4.4), et à partir d'un des graphes des figures 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 (la méthode de la puissance spectrale PSD) on peut dresser le tableau 5.6.

Tableau.5.6: les caractéristiques modales du système par la méthode PSD(AMO).

	$P_i[dB]$	$P_i/2[dB]$	$f_{0i}[Hz]$	$\omega_{0i}[rd/s]$	$\xi_i$
Mode 1	0.02158	0.01079	4.795	30.127	1.56
Mode2	0.01169	0.00584	13.6	85.451	0.43
Mode3	0.00223	0.00111	21.53	135.276	0.64
Mode4	0.00139	0.00069	26.03	163.551	0.75

- ✓ Les résultats par la méthode analytique [21] sont mentionnés dans le tableau 5.7.

Tableau 5.7 : les caractéristiques modales du système par la méthode analytique.

	$f_{0n}[Hz]$	$\omega_{0n}[rd/s]$	$\xi_n$
Mode1	4.739	29.776	0.15
Mode2	13.590	85.388	0.43
Mode3	21.514	135.176	0.67
Mode4	25.976	163.212	0.75

Tableau 5.8 : comparaison entre les deux méthodes.

		Méthode analytique	Méthode PSD	Ecart %
$\omega_0 [rd/s]$	Mode1	29.776	30.127	1.10
	Mode2	85.388	85.451	0.07
	Mode3	135.176	135.276	0.07
	Mode4	163.212	163.551	0.20
$\xi$	Mode1	0.15	1.56	/
	Mode2	0.43	0.43	0
	Mode3	0.67	0.64	4.47
	Mode4	0.75	0.75	0

Commentaire :

Sur le spectrogramme (figure 5.18 et figure 5.19) on a quatre modes de vibrations dans la gamme de fréquences  $0-170rd/s$  ; dont on voit que le premier mode est le plus excité avec une puissance maximale, le troisième et le quatrième mode sont les moins excités avec une puissance minimale pour le quatrième.

D'après le tableau 5.8 récapitulatif la méthode AMO(en utilisant PSD) donne de très bons résultats, en les comparant avec ceux tirés de [21]; ou on constate que les pulsations des modes par ordre sont  $30.127rd/s$  ;  $85.457rd/s$  ;  $135.276rd/s$  et  $163.551rd/s$  avec des écarts proches de 0.

C'est-à-dire que les résultats des fréquences sont cohérents pour les deux méthodes.

Les taux d'amortissement qui sont calculés à partir de l'acuité des pics par la méthode de mi puissance sont stables et plus fiables car ils coïncident avec les résultats tirés de [21] sauf le premier mode le taux diverge. Dans les trois derniers modes l'écart est entre 0 et 4.5%, d'où on peut dire que la méthode de l'AMO est très efficace pour déterminer les caractéristiques modales.

#### 5.4.4 Application 4 : une barre encastrée-libre amortie.

Le but de cette application est l'analyse du comportement dynamique au régime libre (analyse modale) d'une barre prismatique encastré-libre amortie (figure 5.22). La barre est considérée avec les caractéristiques géométriques et physiques suivantes :

- longueur  $\ell = 1\text{m}$ ,
- section  $A = 0.0001\text{ m}^2$ ,
- module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$ ,
- masse volumique  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$
- constante d'amortissement  $c = 600\text{ kg/s}$

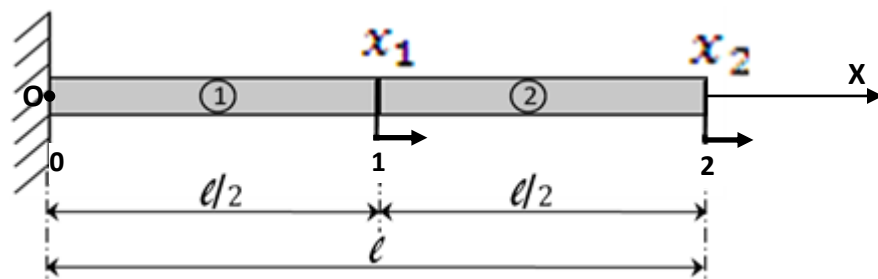


Figure 5.22 : barre encastré-libre amortie

En admettant que cette barre soit discrétisée en deux éléments finis à trois points nodaux équidistants 0, 1 et 2 et que les déplacements latéraux sont négligeables. On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les déplacements nodaux axiaux (longitudinaux) des points 1 et 2 selon l'axe (OX).

Le programme sous MATLAB est conçu pour le calcul des deux réponses  $x_1$  et  $x_2$  de la barre, avec leurs graphes en fonction de temps. Ainsi que l'obtention des graphes de leurs FFT et PSD.

La comparaison et confrontation de nos résultats sont faites avec les résultats obtenus de [1] (pour la théorie des poutres voir annexe et pour plus de détails voir [1] et [23]).

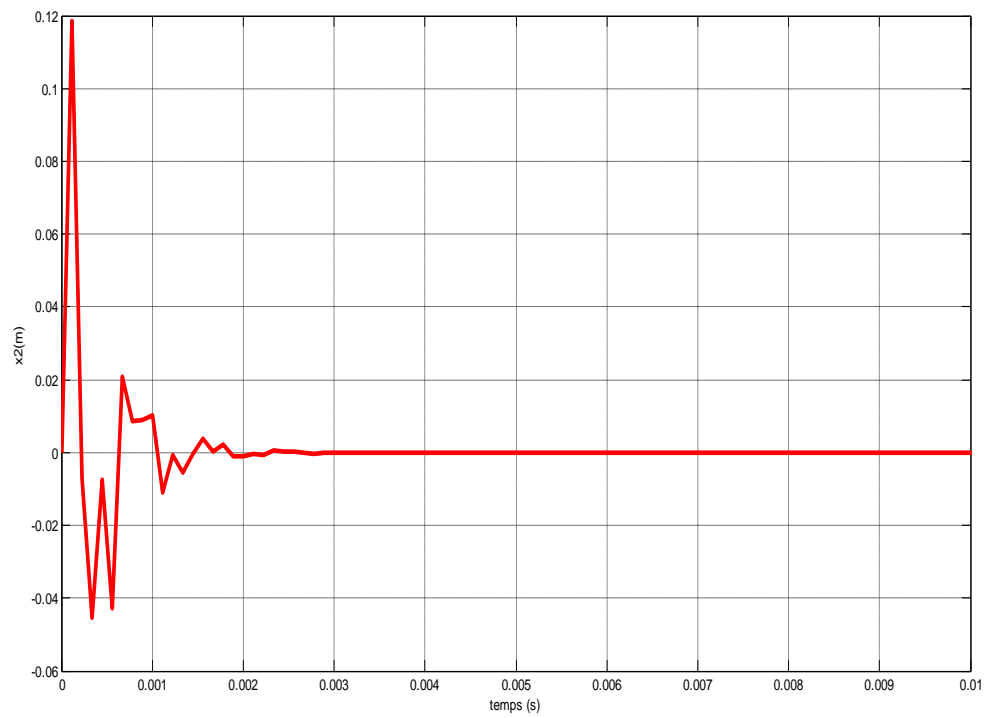
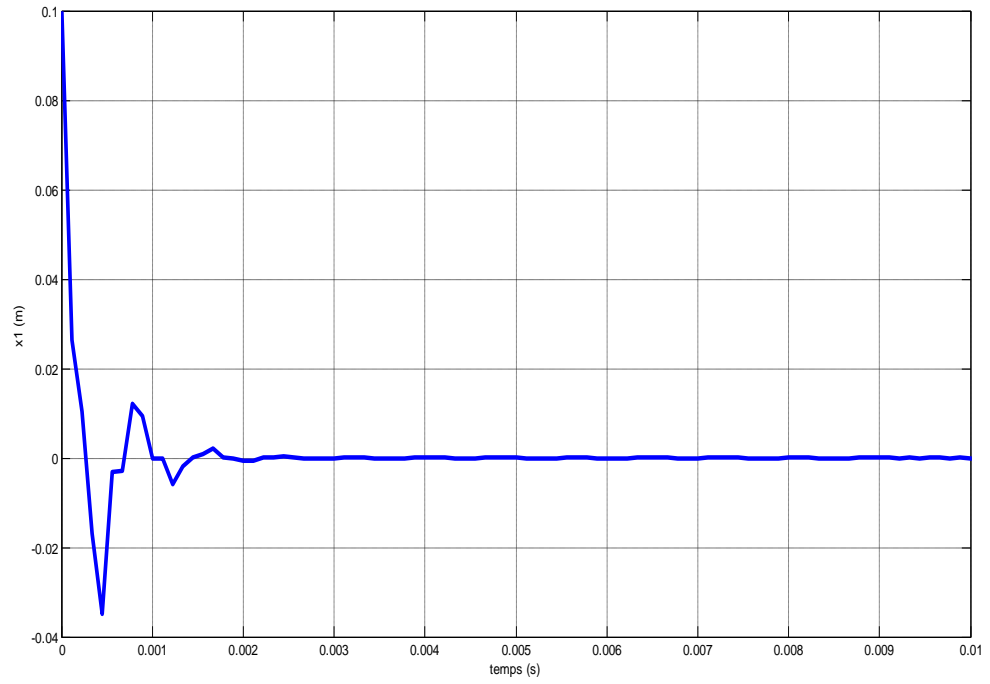


Figure 5.23 : Représentation temporelle des réponses  $x_1$  et  $x_2$ .

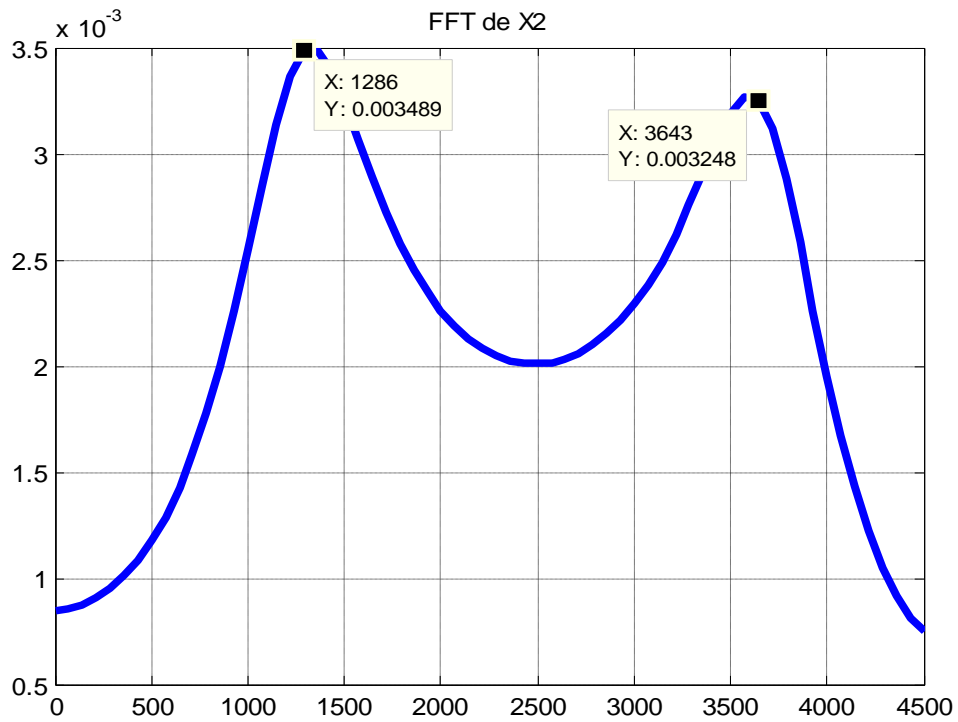
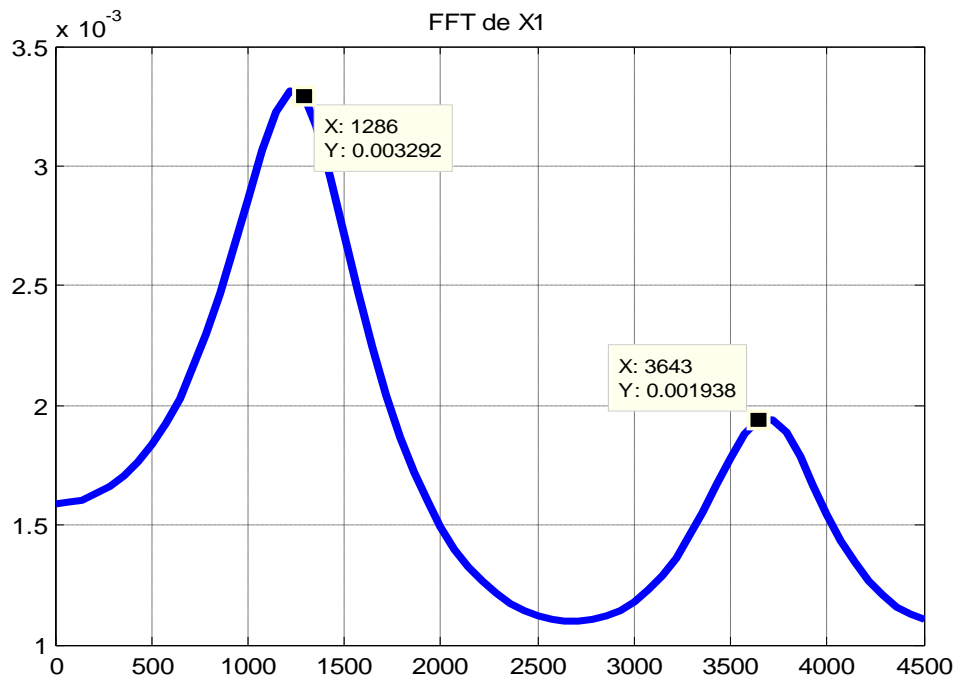


Figure 5.24 : Représentation fréquentielle (FFT) des réponses  $x_1$  et  $x_2$ .

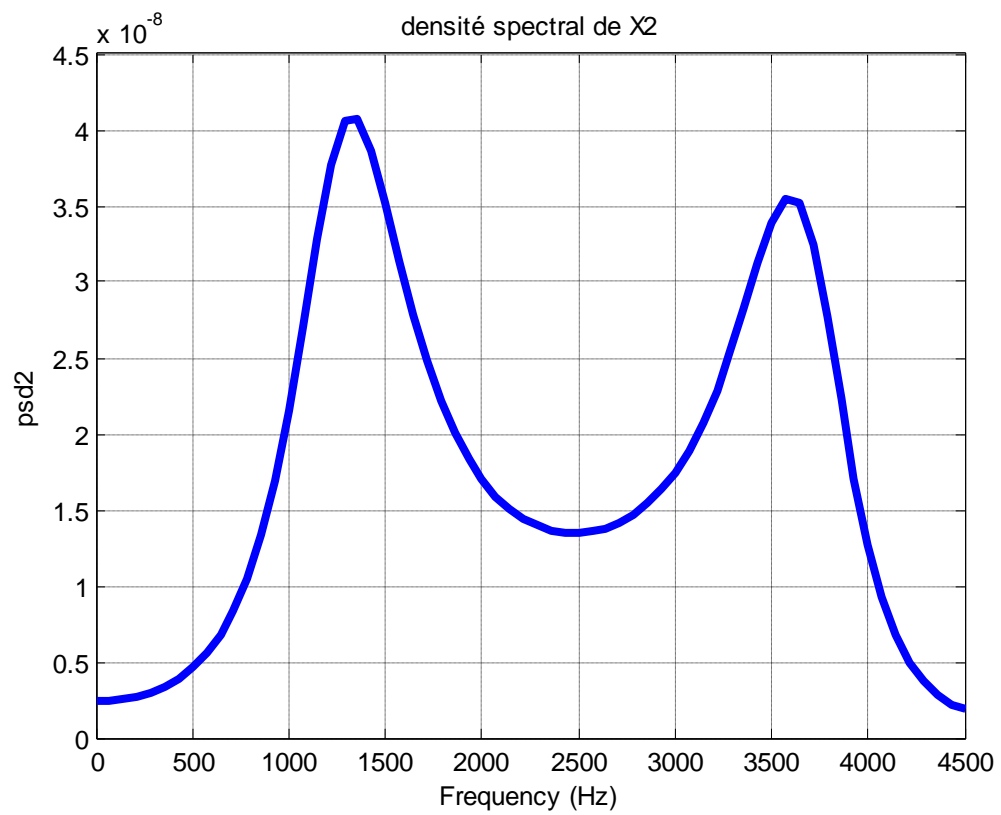
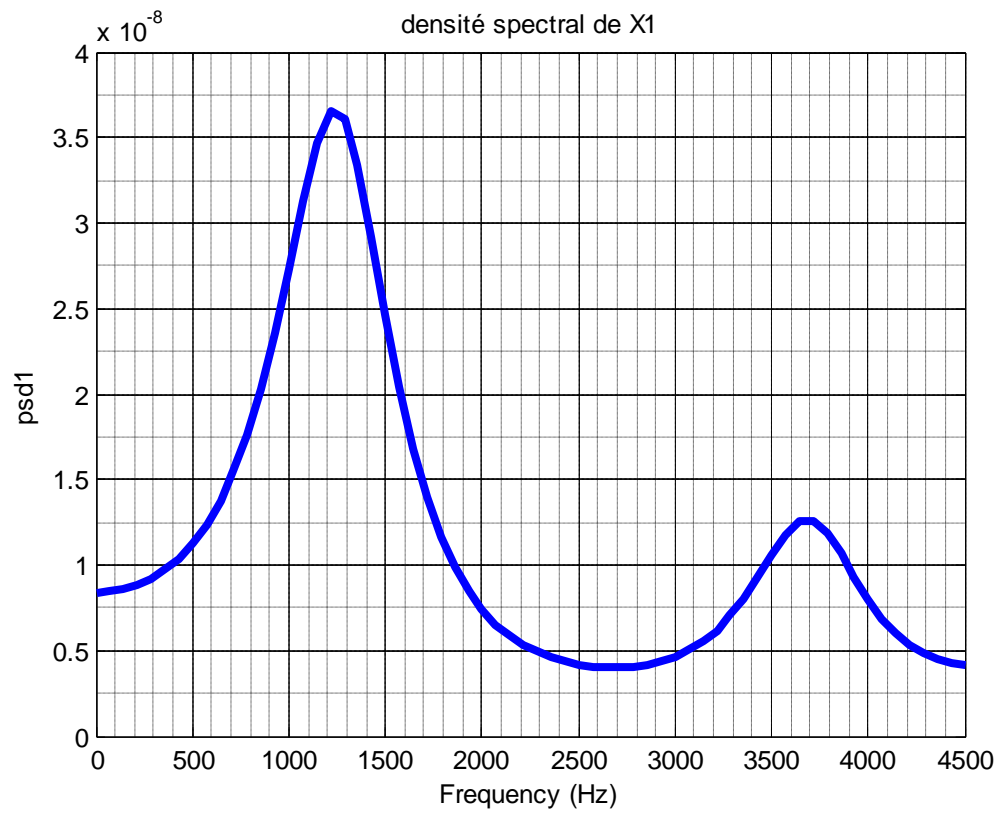


Figure 5.25 : Les spectrogrammes (PSD) des réponses  $x_1$  et  $x_2$ .

Résultats :

- ✓ Suivant le formalisme déclaré dans la section (4.4), et à partir des graphes (la méthode de la puissance spectrale PSD) on a :

Tableau 5.9 : les caractéristiques modales de la barre par la méthode PSD (AMO).

	$P_i[dB]$	$P_i/2[dB]$	$f_{0i}[Hz]$	$\omega_{0i}[rd/s]$	$\xi_i$
Mode 1	$3.489 \times 10^{-3}$	$1.744 \times 10^{-3}$	1286	8080.17	0.301
Mode2	$3.248 \times 10^{-3}$	$1.624 \times 10^{-3}$	3643	22889	0.111

Tableau 5.10 : les caractéristiques modales de la barre par la méthode analytique tirées de [1].

	$f_n[Hz]$	$\omega_n[rd/s]$	$\xi_n$
Mode1	1290.06	7774.6	0.283
Mode2	3639.23	22750	0,100

Tableau 5.11 : comparaison entre les deux méthodes.

		Méthode analytique	Méthode PSD	Ecart %
$\omega_0[rd/s]$	Mode1	7774.6	8080.17	3.9
	Mode2	22750	22889	0.6
$\xi$	Mode1	0.283	0.301	6.54
	Mode2	0,100	0.111	11



Commentaire :

Il est clair d'après la figure 5.25 que le premier mode est excité à la fréquence 8080.17rd/s, et le deuxième mode à 22889rd/s qui sont les mêmes obtenus par Gmür [1] avec un écart proche de 0%.

Pour l'amortissement, à partir de la formule (4.5) on a obtenu comme il est montré dans le tableau 5.12 pour le 1<sup>er</sup> mode un taux de 0.301%, et pour le 2<sup>ème</sup> mode un taux de 0.111%, l'erreur pour le 1<sup>er</sup> mode est estimée à 6.54% mais un peu élevée pour le 2<sup>ème</sup> mode environ 11%.

En général les résultats obtenus par la technique de l'AMO (méthode PSD) sont encourageants en les comparant avec ceux de la méthode analytique provient de [1].

5.4.5 Application 5 : une poutre encastrée-encastrée non amortie.

L'objectif de cette application est de s'approcher de plus en plus au cas réel de l'étude de comportement d'une structure continue en régime libre pour déterminer ses caractéristiques modales par la technique de l'AMO.

L'étude est réalisée sur une poutre encastrée-encastrée non amortie (Figure 5.26). La poutre possède les caractéristiques géométriques et physiques suivantes :

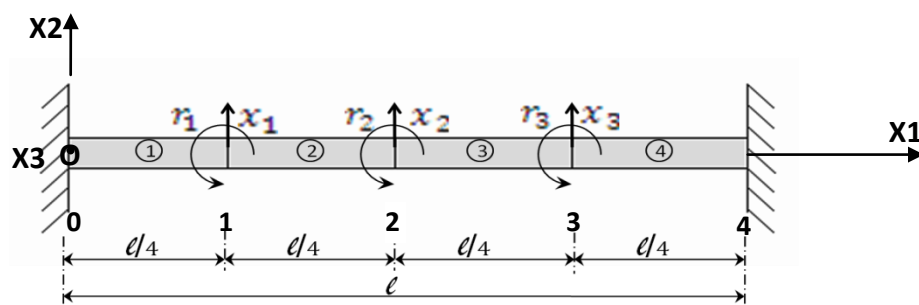


Figure 5.26 : une poutre bi-encastrée non amortie.

- longueur  $l = 1.5\text{m}$ ,
- hauteur  $h = 0.03\text{m}$ ,
- épaisseur  $e = 0.03\text{m}$ ,

[Section  $A = 0.0009\text{m}^2$ ],

- module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Pa,
- masse volumique  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>,
- moment quadratique  $I = 6.75 \times 10^{-8}$  m<sup>4</sup>,

La première étape de cette application est l'obtention de la matrice de masse [M] et la matrice de rigidité [K] via un programme numérique sous Matlab, par une discrétisation de la poutre en 4 éléments à 5 points nodaux 0,1,2,3,4 avec 6ddl, dont 3 déplacements nodaux transversaux  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  selon l'axe(OX2) ;et 3 rotations nodales  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  autour de l'axe(OX3).

La deuxième étape c'est l'élaboration d'un programme sous Matlab pour obtenir les réponses  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  ainsi que leurs graphes de FFT et PSD.

Les résultats obtenus par l'AMO en observant les pics apparaissent sur les graphes de la PSD(les graphes de 5.39 au 5.44) sont comparés avec ceux issus de la méthode numérique classique (Tableau5.12) (pour la théorie des poutres voir annexe et pour plus de détails voir [1] et [23]).

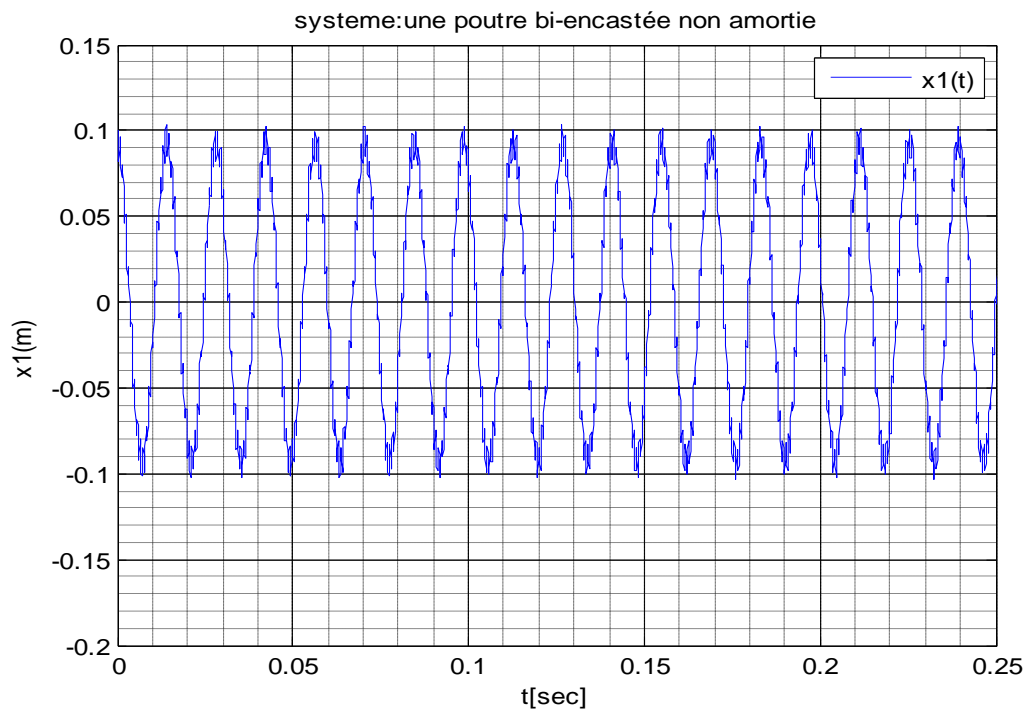


Figure 5.27 : Représentation temporelle de la réponse  $x_1$  de la poutre.

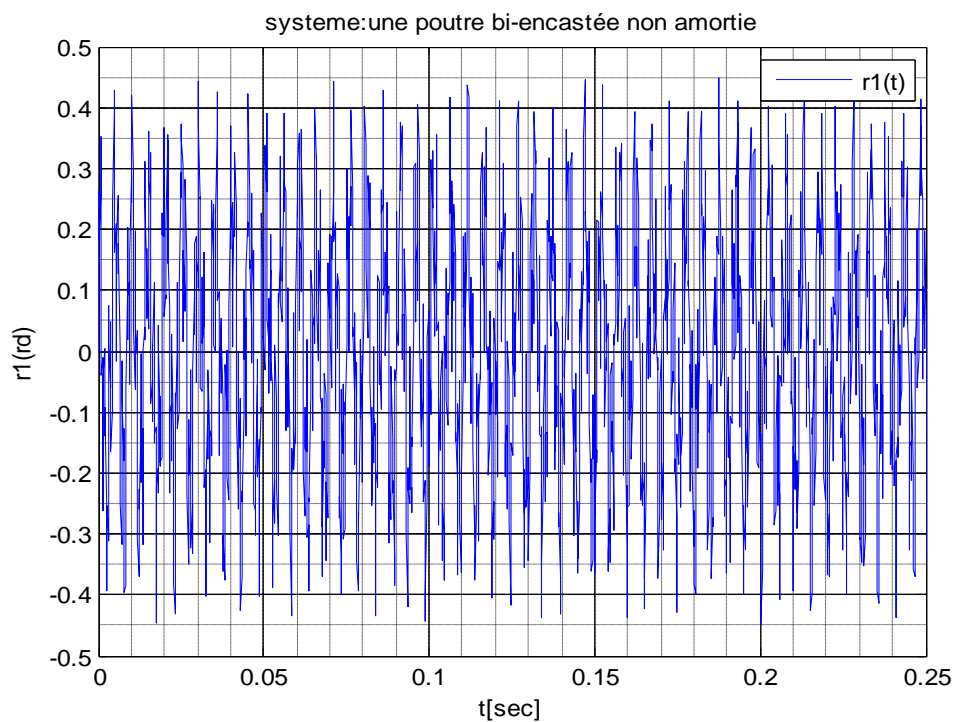


Figure 5.28 : Représentation temporelle de la réponse  $r_1$  de la poutre.

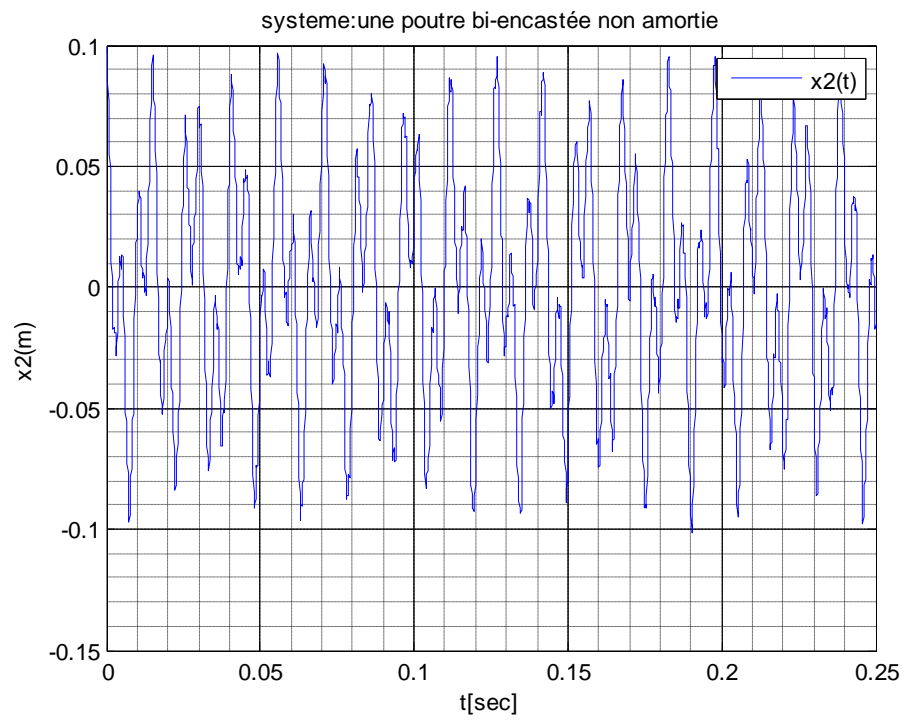


Figure 5.29 : Représentation temporelle de la réponse  $x_2$  de la poutre.

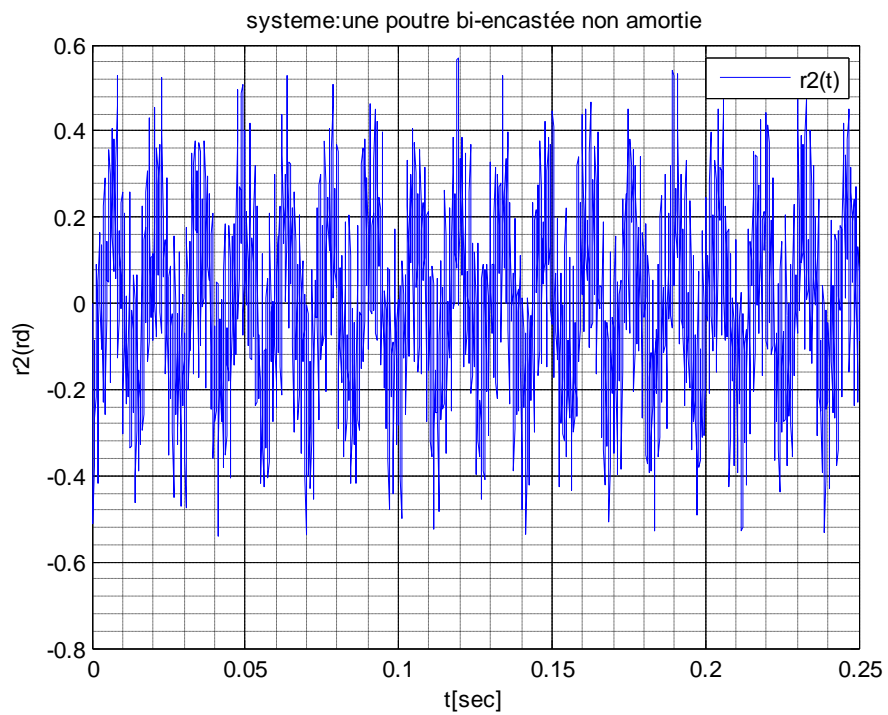


Figure 5.30 : Représentation temporelle de la réponse  $r_2$  de la poutre.

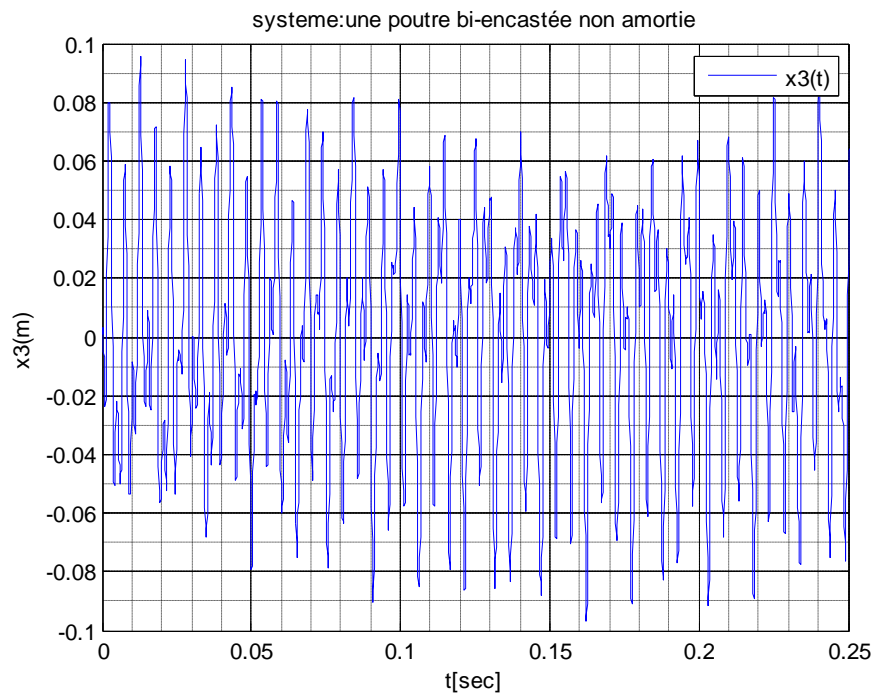


Figure 5.31 : Représentation temporelle de la réponse  $x_3$  de la poutre.

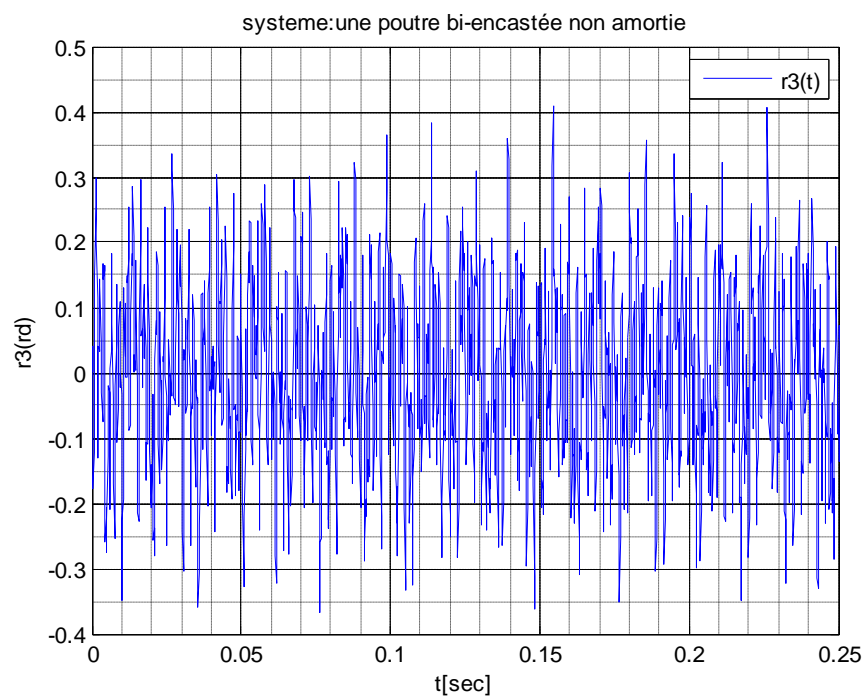


Figure 5.32 : Représentation temporelle de la réponse  $r_3$  de la poutre.

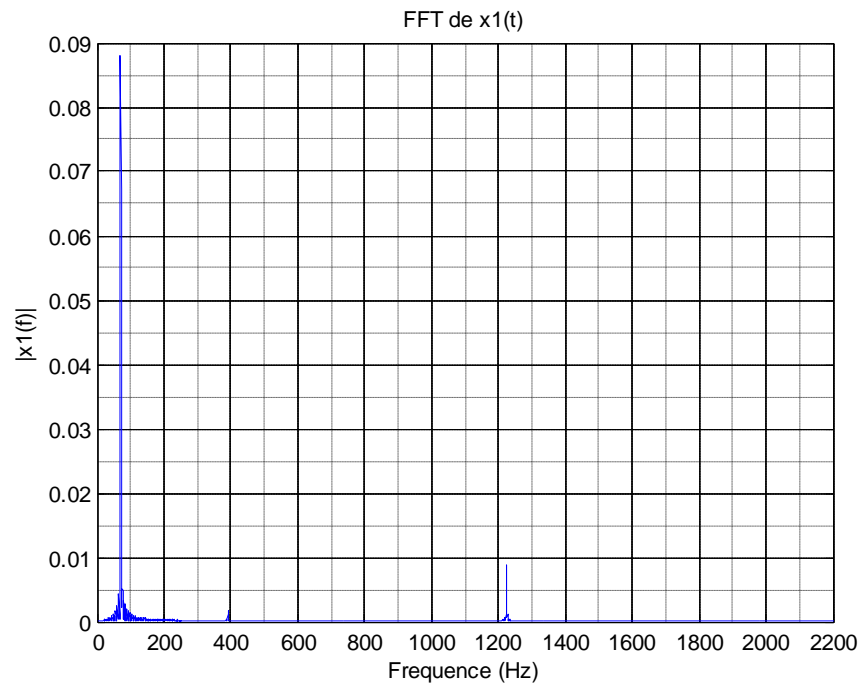


Figure 5.33 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_1$  de la poutre

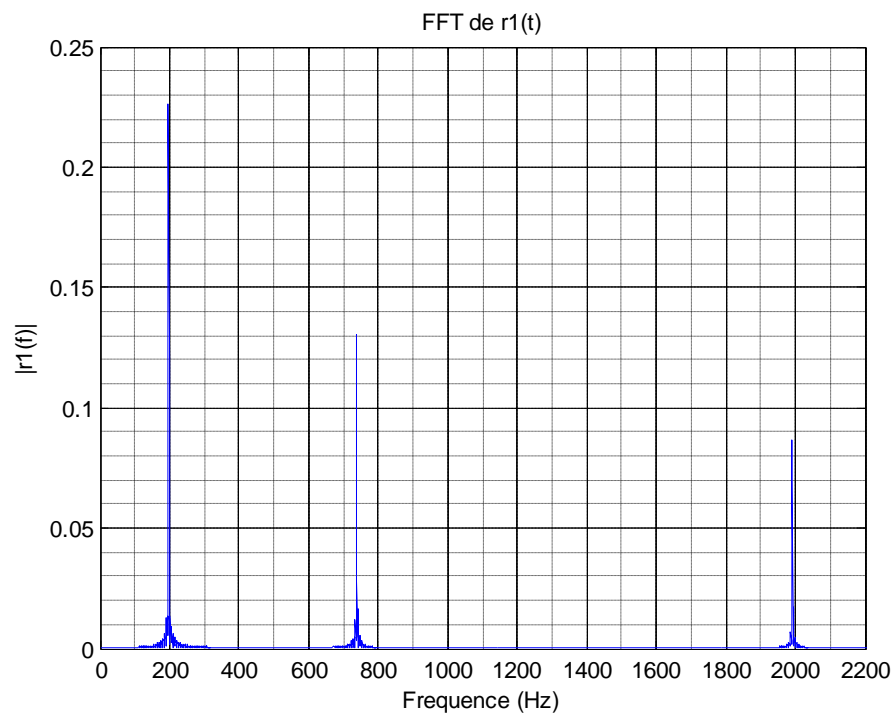


Figure 5.34 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $r_1$  de la poutre.

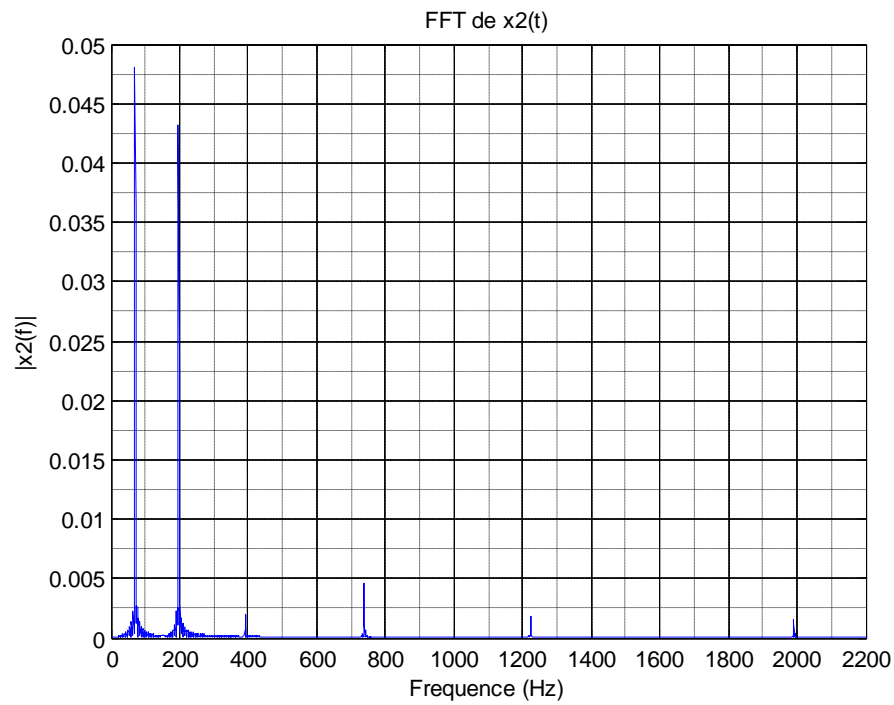


Figure 5.35 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_2$  de la poutre.

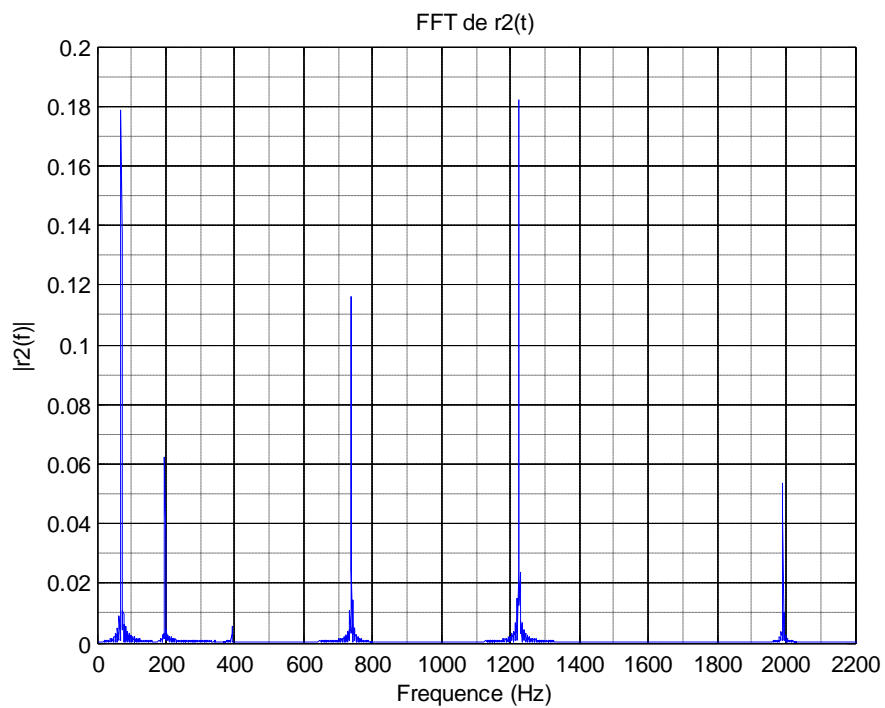


Figure 5.36 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $r_2$  de la poutre.

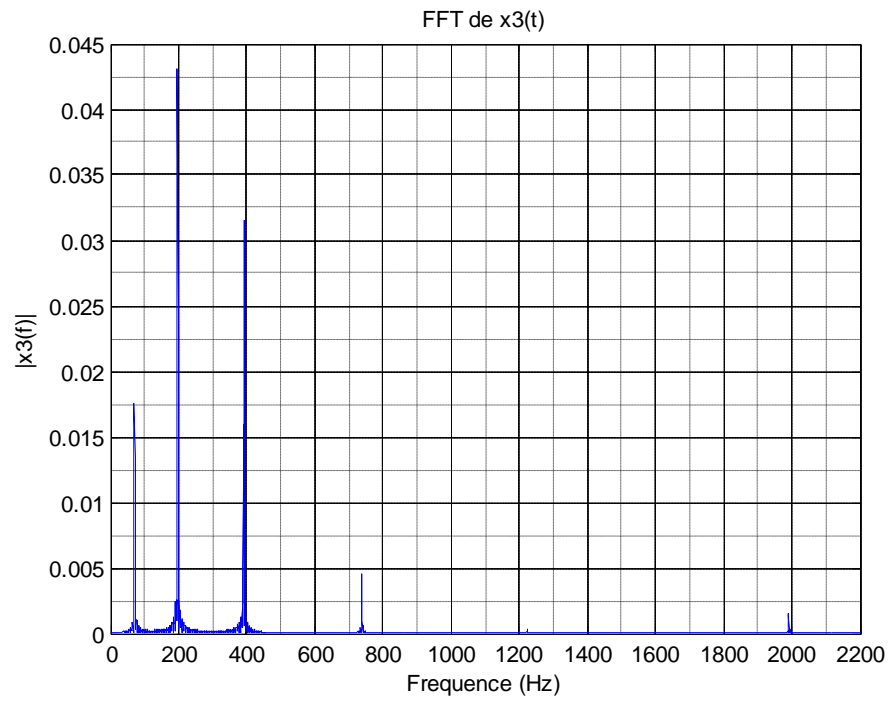


Figure 5.37 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $x_3$  de la poutre.

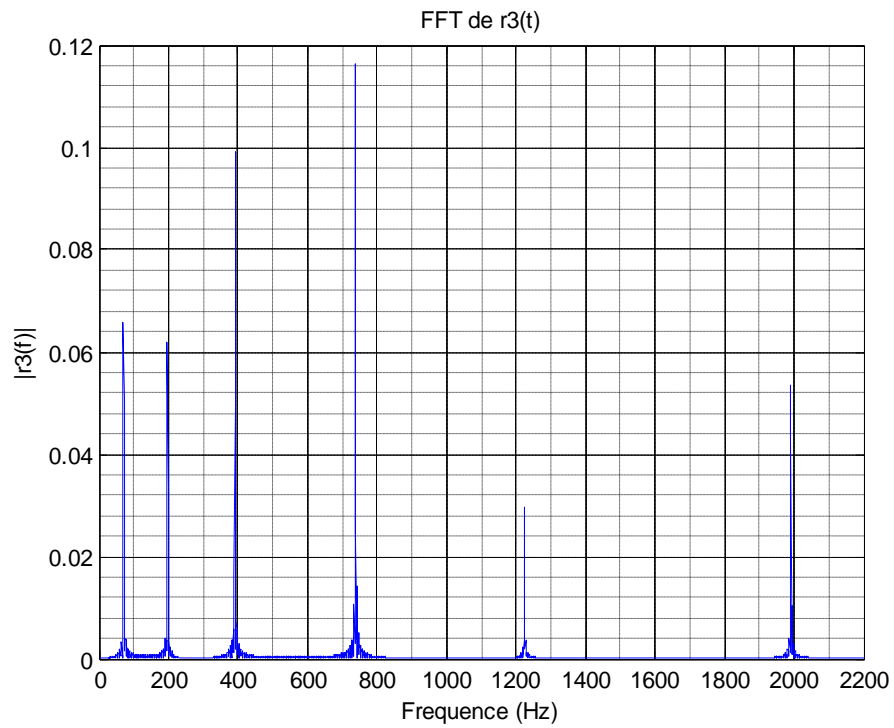


Figure 5.38 : Représentation fréquentielle (FFT) de la réponse  $r_3$  de la poutre.



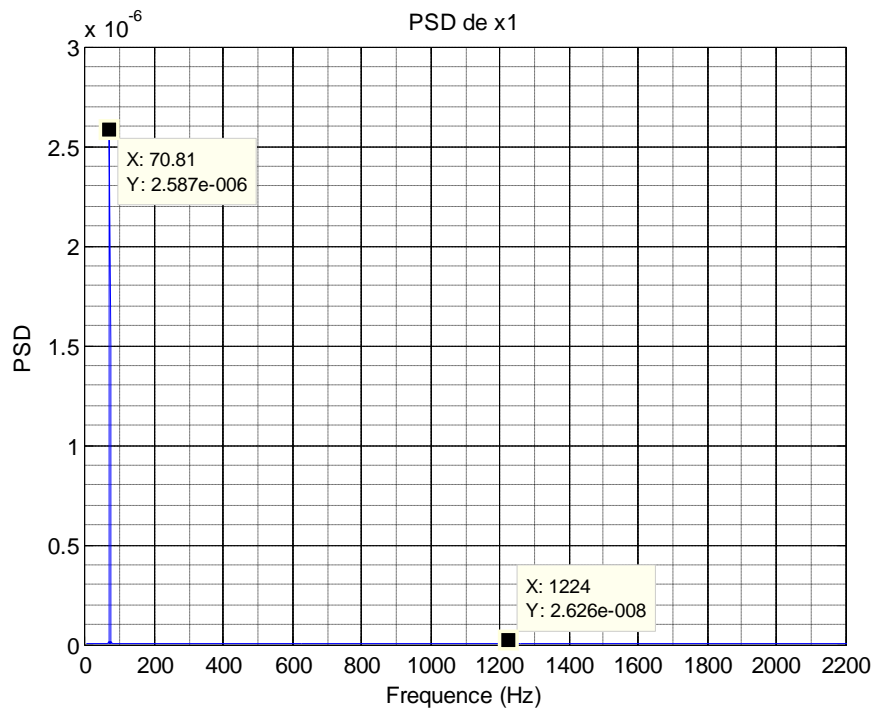


Figure 5.39 : Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $x_1$  de la poutre.

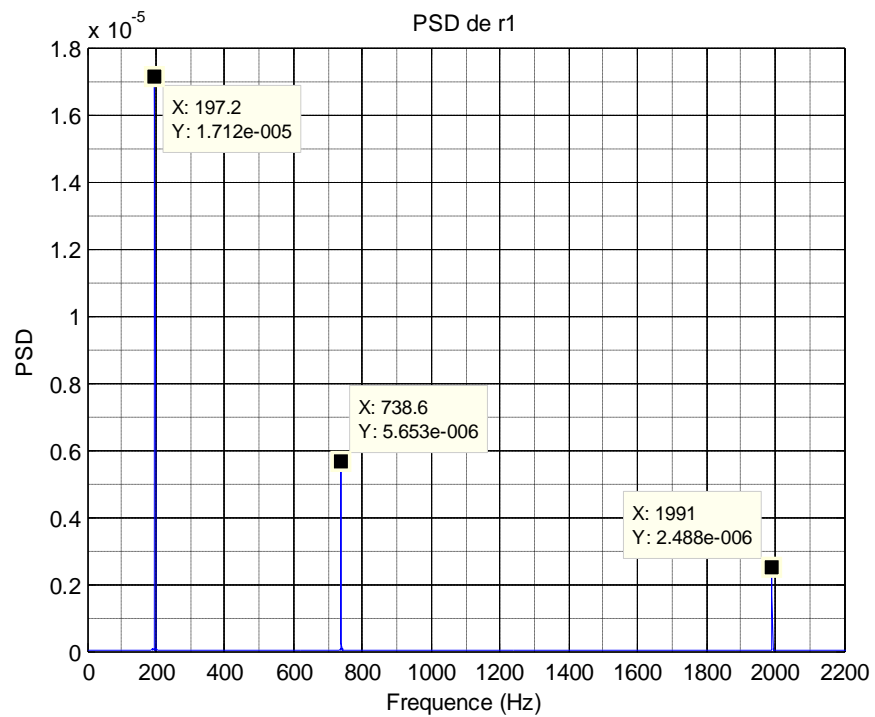


Figure 5.40 : Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $r_1$  de la poutre.

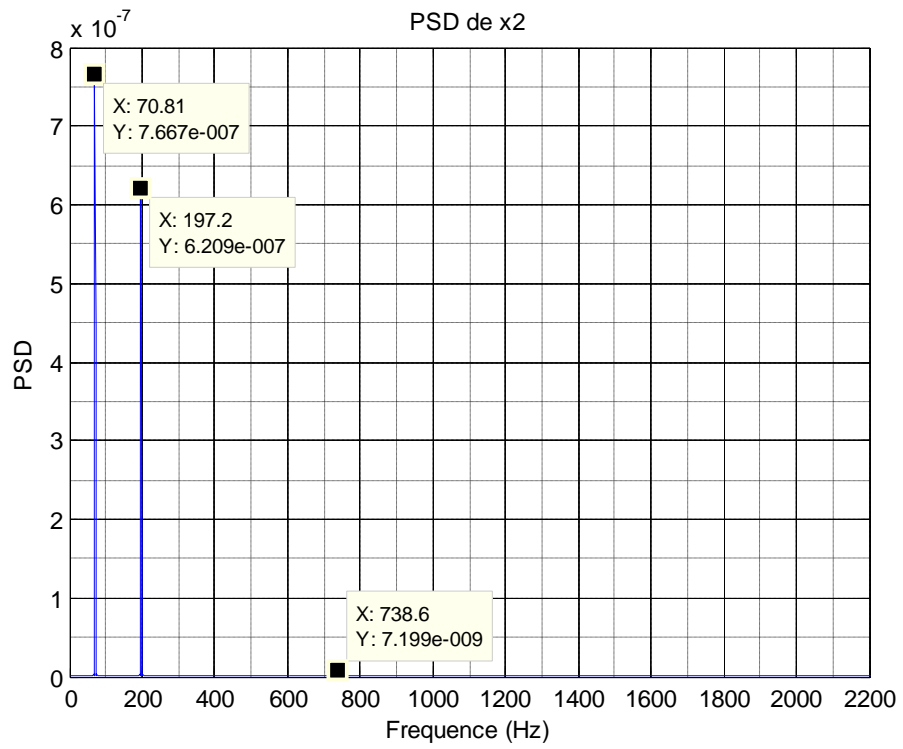


Figure 5.41 : Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $x_2$  de la poutre.

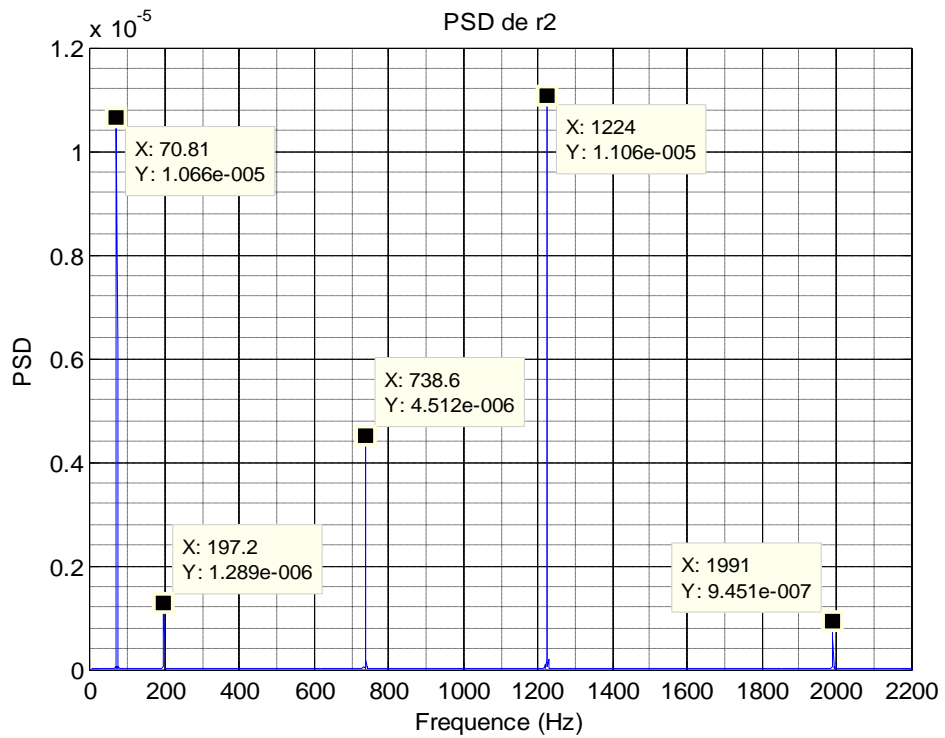


Figure 5.42 : Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $r_2$  de la poutre.

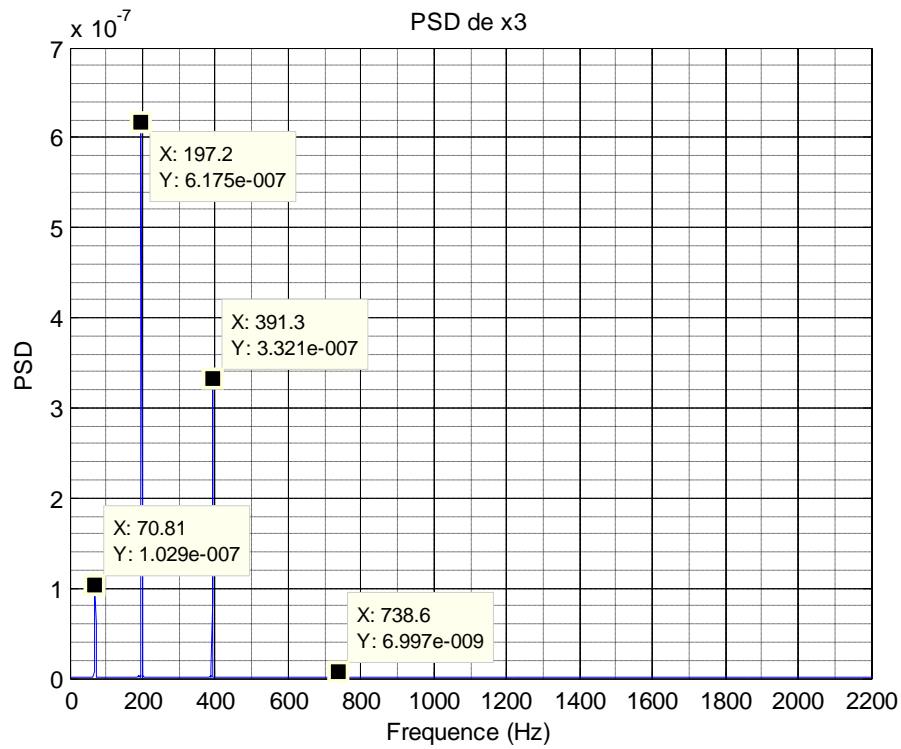


Figure 5.43 : Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $x_3$  de la poutre.

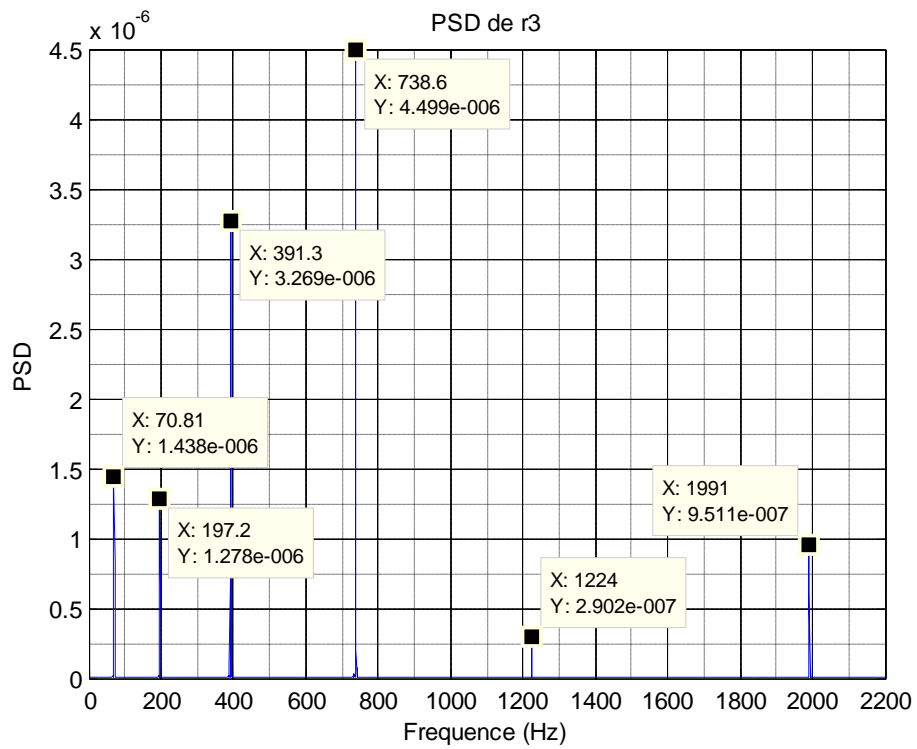


Figure 5.44 : Le spectrogramme (PSD) de la réponse  $r_3$  de la poutre.

### Résultats:

A partir des graphes de PSD des réponses de la structure (de la figures5.39 au figure5.44) nous obtiendrons les fréquences propres en observant les pics dont les pulsations correspondantes sont dressées et comparées avec celles calculées avec la méthode classique (numérique).

Tableau 5.12 : comparaison des fréquences propres issues des deux méthodes.

	$\omega_0[rd/s]$ par PSD	$\omega_0[rd/s]$ par la Méthode classique	Ecart %
Mode1	444.68	445.88	0.26
Mode2	1238.41	1238.40	0
Mode3	2455.48	2457.36	0.7
Mode4	4640.92	4648.45	0.16
Mode5	7686.72	7687.97	0
Mode6	12522.32	12387.30	1

### Conclusion :

D'après le tableau comparatif (tableau5.12) les résultats obtenus par la technique de l'AMO en utilisant la méthode de PSD sont identiques à ceux obtenus par la méthode numérique classique dont l'écart est pratiquement 0%, pour tous les modes.

## **CONCLUSION ET PERSPECTIVES**

L'analyse modale occupe une place importante dans l'étude et le suivi des structures, tant la connaissance des caractéristiques propres ou modales est impérative pour pouvoir mieux caractériser le comportement dynamique de ces structures. Dans ce cadre, l'analyse modale opérationnelle a été introduite, comme nouvelle technique, pour pallier aux insuffisances et difficultés rencontrées dans l'analyse classique.

L'objet de notre étude est de contribuer à connaître cette technique et de mettre en évidence les avantages qu'elle apporte. Elle se distingue essentiellement de par la rapidité, l'efficacité et le coût et parmi les commodités on cite :

- Contrairement à l'analyse classique, la connaissance de l'excitation n'est pas demandée et seules les données en réponses sont utilisées.
- L'analyse peut être menée sur des structures ou parties de structures d'accès difficile.
- Durant l'analyse, l'arrêt des structures en fonctionnement (ex : machines tournantes) n'est pas obligatoire.

Après une présentation des fondements théoriques, nous avons procédé à des applications relativement simples. L'approche utilisée est basée sur l'utilisation de modèles numériques assez courants dont les résultats sont comparés à des références tirées de la littérature. En parallèle, des programmes en Matlab ont été établis pour représenter le signal de la réponse du modèle étudié, dans une première étape, et pour transformer le signal de sortie en densité de spectre de puissance dans une deuxième phase. L'exploitation de cette dernière, à travers l'observation des pics, permet d'identifier les paramètres modaux recherchés.

Les modèles utilisés concernent, en premier lieu, 3 systèmes linéaires discrets respectivement à 1, 2 et 4 degrés de liberté dans lesquels l'amortissement a été pris en compte sous ses formes proportionnelle et non proportionnelle. Deux

autres modèles de systèmes continus, une barre en traction-compression et une poutre en flexion, ont été étudiés ensuite pour généraliser et conforter un peu plus l'applicabilité de l'analyse modale opérationnelle.

Il a été constaté que les résultats obtenus sont très bons et encourageants tant pour les fréquences propres que pour les facteurs d'amortissement.

Comme dans tous les domaines de la science et de la technologie, il y'a toujours matière à apprendre et à améliorer. Aussi, et comme perspectives, on peut dire que l'analyse modale opérationnelle offre des possibilités pour une meilleure compréhension du comportement dynamique des structures avec le concours :

- De l'expérimentation en environnement ambiant.
- De l'élargissement de cette technique à d'autres secteurs ou spécialités concernés par les structures.
- D'une maîtrise, en termes de potentiel et limites, des différents volets de cette technique.

## LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$[M]$ : Matrice de masse (inerties).

$[C]$ : Matrice d'amortissement

$[K]$ : Matrice de rigidités

$\{x(t)\}$  : Vecteur des déplacements

$\{\dot{x}(t)\}$  : Vecteur des vitesses

$\{\ddot{x}(t)\}$ : Vecteur des accélérations

$\{f(t)\}$ : Vecteur des efforts extérieurs (solicitation)

$m_i$  : masse de l'élément  $i$

$k_i$  : rigidité de l'élément  $i$

$c_i$  : amortissement de l'élément  $i$

$F_i$  : effort (excitation) extérieur sur l'élément  $i$

$x_i$  : déplacement (réponse) de l'élément  $i$

$\dot{x}_i$  : vitesse de l'élément  $i$

$\ddot{x}_i$  : accélération de l'élément  $i$

$E_d$  : énergie dissipée par le système

$\sigma$  : contrainte

$j$  : nombre imaginaire,  $j^2 = -1$

$\tau$  : facteur de dissipation

$\alpha, \beta$  : coefficients de RAYLIEGH

$\omega_i$  : pulsation propre du mode  $i$

$f_i$  : fréquence propre du mode  $i$

$\xi_i$  : coefficient d'amortissement du mode  $i$

$c_{eq}$  : coefficient d'amortissement équivalent

$\eta$  : coefficient d'amortissement hystérétique

$E$  : module de YOUNG

$E^*$  : module de YOUNG complexe

$E_c$  : énergie dissipée par cycle

$F_0$  : Force développée par l'amortisseur.

$\dot{u}$  : Vitesse relative des deux extrémités.

$u$  : Solution permanente.

$\bar{\omega}$  : Fréquence (réelle).

$c$  : Constante de proportionnalité (amortissement).



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] T.GMUR : Dynamique des structures –Analyse modale numérique, Presses polytechniques et universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, Suisse, 1997.
- [2] Giancarlo Genta : *Vibration Dynamics and Control*, Giancarlo Genta Politecnico di Torino, Italy ,2009.
- [3] L.Dobrescu et A.Dobrescu : *Dynamique Des Structures et Simologie de L'ingénieur* ,Université de Constantine ,Algérie ;1983.
- [4] Piet M.T. Broersen : *Automatic Autocorrelation and Spectral Analysis*, Department of Multi Scale Physics Delft University of Technology Kramers Laboratory Prins Bernhardlaan 62628 BW, Delft The Netherlands British, 2006.
- [5] V-H. Vu, M. Thomas, A.A. Lakis : *Operational Modal Analysis with time domain methods*, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada,2009.
- [6] Jean-Sébastien Dupuy, Patrick Ienny, Stéphane Corn, Loic Daridon : *Comparaison de méthodes dynamiques d'analyse du comportement mécanique de matériaux*, Ecole des Mines d'Alès 6 avenue de Clavières - 30319 Alès cedex, France 2007.
- [7] Bart CAUBERGHE : *Applied frequency-Domain System Identification in the field of experimental and operational modal analysis* ,Vrije Universiteit Brussel Faculteit Toegripsite Wetenschappen Vakgroep Werktuigkunde Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium,2004.

- [8] Carlo Rainieri and Giovanni Fabbrocino : *Operational modal analysis for the characterization of heritage structures, Structural and Geotechnical Dynamics Laboratory StreGa Department of S.A.V.A., University of Molise, Campobasso, Italy, 2011.*
- [9] Chaar Hala : *Comportement dynamique de l'avion pour différentes phases de vol, ENSTA, AIRBUS, France, 2005.*
- [10] Prasenjit Mohanty and Daniel J. Rixen : *16th ASCE Engineering Mechanics Conference July, University of Washington, Seattle, USA, 2003.*
- [11] V.H. Vu, M. Thomas et A.A. Lakis : *Le pont est-il fort ? réponse d'une technique d'analyse modale opérationnelle, École de technologie supérieure, Montréal, Québec, Canada, 2006.*
- [12] Mathieu CORUS : *Amélioration des méthodes de modification structurale par utilisation de techniques d'expansion et de réduction de modèle, ECOLE CENTRALE PARIS, France 2003.*
- [13] Joseph Morlier : *Méthodes d'analyse des déformées modales par traitement du signal pour le diagnostic in situ de structures, Université de Bordeaux ; Thèse 2005.*
- [14] Luc Jaouen : *Vibrations des milieux discrets et continus, France, 2005.*
- [15] Clotaire MICHEL : *Vulnérabilité Sismique de l'échelle du bâtiment à celle de la ville Apport des techniques expérimentales in situ, Application à Grenoble, Observatoire de Grenoble Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, France, Thèse 2007.*
- [16] Philippe ESTOCQ : *Une approche méthodologique numérique et expérimentale d'aide à la détection et au suivi vibratoire de défauts d'écaillage de roulements à billes, Université de Reims Champagne Ardenne, U.F.R de Sciences Exactes et Naturelles France, Thèse 2004.*

- [17] A.AIAD : *Recalage de modèles élément finis à partir des propriétés modales expérimentales, L'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, France, Thèse 1991.*
- [18] Andrew S. Elliott et Mark H. Richardson : *Virtual Experimental Modal Analysis (VEMA), Mechanical Dynamics, Inc. 6530 E. Virginia Street Mesa, Arizona 85215, USA, 1998.*
- [19] F.BESSAC : *Utilisation des valeurs propres et vecteurs propres de couplage pour étudier le comportement vibro-acoustique de systèmes couplés ,Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France ,Thèse 1996.*
- [20] Philippe ESTOCQ : *Une approche méthodologique numérique et expérimentale d'aide à la détection et au suivi vibratoire de défauts d'écaillage de roulements à billes, Université de Reims Champagne Ardenne, U.F.R de Sciences Exactes et Naturelles France, Thèse 2004.*
- [21] Thien-Phu LE : *Auscultation dynamique des structures \_a l'aide de l'analyse continue en ondelettes, L'école Nationale des Ponts et Chaussées, France, These 2003.*
- [22] L. CHAMPANEY : *Méthodes Numériques pour la Mécanique, Université de Versailles St-Quentin en Yvelines Département de Mécanique, France, Notes de cours, 2008.*
- [23] A.AIAD : *Cours de DDS, Universite Saad Dahleb Blida, Algérie ,cours de magistère 2006-2007.*
- [24] Patrick Guillaume : *Modal Analysis, Department of Mechanical Engineering, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050 Brussel, Belgium.*
- [25] J. PELLET : *Notice de modélisation de l'amortissement mécanique, EDF-R&D/AMA, France 2002.*

- [26] A.AL MAJID : *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire ,opérateur d'hystérésis, phénomène métrique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France ,Thèse2002 .*
- [27] G. MKANDGE : *Influence of mode dependent-Rayleigh damping on transient stress response ,Department of Mechanical Engineering, Blekinge Institute of Technologie Karlskrona, Sweden, Thèse 2007.*
- [28] Serge SAMPER: *Vibrations des structures et des systèmes mécaniques, Cours de mécanique vibratoire de POLYTECH'SAVOIE Site d'Annecy.*
- [29] Indrajit Chowdhury et al : *Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems,Department of Civil Engineering Indian Institute of Technology Kharagpur 721302, India.*
- [30] Pierre JEHEL : *Modelisation numerique des phenomenes d'amortissement par dissipation d'energie materielle dans les structures de type portique en beton arme sous seisme,l'Ecole Normale Superieure de Cachan Domaine 2009*
- [31] JM Génevaux : *Dynamique des structures : méthodes approchées, cinématiques;Analyse Modale ; Recalage de Modèle, Ensim,Université du Maine, France ,2008.*
- [32] L. Champaney : *Méthode Générale d'approximation, Ecole Supérieure des Mines de Paris, France.*
- [33] C.Vachier : *Représentation d'état et commande dans l'espace d'état, Université de Paris XII-Val de Marne, France.*
- [34] L.Jaulin : *Commande par espace d'état,France,2007.*
- [35] Luc Jaouen : *Vibrations des milieux discrets et continus, luc.jaouen@univ-lemans.fr,France,notes de cours 2005.*

- [36] Daniel Rixen : *Réduction modale et dynamique expérimentale à Delft : Nouveautés en synthèse modale et en analyse modale opérationnelle*, Delft University of Technology, Netherlands, 2007.
- [37] Svibs :What is Operational Modal Analysis Structural Vibration Solutions ,NOVI Science Park DK-9220 Aalborg East , Denmark-2007
- [38] Martin Gagnon et al: *Analyse modale opérationnelle en présence d'excitations harmoniques : étude de cas sur des composantes de turbine hydraulique*, École de Technologie Supérieure, Montréal, Québec, Canada, 2008.
- [39] Mlaursen : *Operational Modal Analysis . Type 7760 Pro, Standard and Light versions*, Brüel & Kjær, Danemark, 2007.
- [40] Bor-Tsuen Wang\_, Deng-Kai : *Modal analysis of mdof system by using free vibration response data only*, Cheng Department of Mechanical Engineering, National Pingtung University of Science and Technology, Pingtung 91201, Taiwan 2007.
- [41] Peter Avitabile :*Mecanical vibrations overview of experimental modal analysis*, University of Massachusetts Lowell,USA.
- [42] Prasenjit Mohanty et Daniel J. Rixen : *Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation*, "Journal of Sound and Vibration", 2004.
- [43] Prasenjit Mohanty, Daniel J. Rixen: *Modified ERA method for operational modal analysis in the presence of harmonic excitations*, T.U. Delft, Faculty of Design, Engineering and Production, Engineering Mechanics—Dynamics, Mekelweg 2,2628 CD Delft, The Netherlands, 2004.
- [44] Wei-Hua Hu : OPERATIONAL MODAL ANALYSIS ANDCONTINUOUS DYNAMIC MONITORING OF FOOTBRIDGES,University of Porto Portugal, 2013

- [45] Steven Pauwels – Jan Debille : *Operational Modal Analysis for aircraft and spacecraft structures*, Aerospace Testing Expo North America, USA,2005.
- [46] Mike Mains : *OPTIMISING ESTIMATORS FOR OPERATIONAL MODAL ANALYSIS*, Brüel & Kjær North America, 2005
- [47] Magazine *Brüel & Kjær* : *Analyse de déformée opérationnelle(ODS) : un outil polyvalent pour les mesures de dynamique des structures*, Danemark, 2007.
- [48] SIEMENS : *Analyse modale des structures : approches expérimentales et numériques, dBVib Montée de Malissol 38200 VIENNE,2013.*
- [49] H. Herlufsen and N. Møller *Operational Modal Analysis of a Wind Turbine Wing using Acoustical Excitation*, Brüel&Kjær, Denmark-2002.
- [50] Prasenjit Mohanty, Daniel J. Rixen : *Modified SSTD method to account for harmonic excitations during operational modal analysis, Engineering Mechanics—Dynamics, Faculty of Design, Engineering and Production, Delft University of Technology, Mekelweg 2, 2628CD Delft, The Netherlands,2004.*
- [51] Xavier Pitoiset : *Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux, Faculté des Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles ,Belgique,2001.*
- [52] Park, Jeong Gyu : *Vibration simulation using Matlab, Department Of Precision Engineering Kyoto University Kyoto, Japan, 2003.*

## Annexe.

### Equations de la dynamique des poutres :

L'équation de mouvement, déplacement  $v(x, t)$ , d'une poutre dit d'Euler-Bernouilli est décrit en détails dans [1]. Pour une poutre uniforme, les paramètres  $E$ ,  $I$  et  $m$  sont constants, la vibration libre de la poutre est gouvernée par :

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x, t) = 0 \quad (1)$$

Avec  $E$ , module d'Young en MPa,  $I$ , inertie de la section en  $m^4$  et  $m$ , masse en kg.

En posant  $c = \sqrt{\frac{EI}{m}}$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + c^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x, t) = 0 \quad (2)$$

Une solution de cette équation aux dérivées partielles est calculée en séparant les variables :  $v(x, t) = Y(x)F(t)$

d'où

$$Y(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t) + c^2 F(t) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y(x) = 0$$

Soit

$$c^2 \frac{1}{Y(x)} \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y(x) = \frac{-1}{F(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t) = 0$$

Les termes dépendant du temps et de l'espace sont séparés, l'équation peut être satisfaite si les deux cotés de l'équation sont égaux :

$$\frac{-1}{F(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t) = \omega^2 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t) + \omega^2 F(t) = 0$$

et pour les informations spatiales,

$$c^2 \frac{1}{Y(x)} \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y(x) = \omega^2 \Rightarrow \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y(x) - \lambda^4 Y(x) = 0 \quad (3)$$

En posant

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{m\omega^2}{EI} \quad (4)$$

on obtient :

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (5)$$

L'équation (3) a pour solution (système à 1 ddl) :  $Y(x) = Ce^{\phi x}$  qui impose pour (3):

$$\phi^4 = \lambda^4$$

L'équation précédente a 4 racines :  $\phi_1 = \lambda, \phi_2 = -\lambda, \phi_3 = j\lambda, \phi_4 = -j\lambda$

La solution s'écrit donc :

$$C_1 e^{\phi_1 x} + C_2 e^{\phi_2 x} + C_3 e^{\phi_3 x} + C_4 e^{\phi_4 x}$$

ou sous la forme mieux connue des mécaniciens (Euler) :

$$Y(x) = A_1 \cosh(\lambda x) + A_2 \sinh(\lambda x) + A_3 \cos(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x) \quad (6)$$