

**UNIVERSITE DE BLIDA 1**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Mathématiques**

**THÈSE DE DOCTORAT**  
**En : Mathématiques**  
**Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Thème

**Quelques Opérations sur les Graphes et leurs Effets**  
**sur la Domination Localisatrice et la Domination**  
**Totale Localisatrice**

**Par : Widad DALI**

Devant le jury composé de :

Mr. Farouk HANNANE	Professeur	U. Blida 1	Président
Mr. Mostafa BLIDIA	Professeur	U. Blida 1	Directeur de thèse
Mr. Julien MONCEL	H.D.R.	U. Toulouse 1	Co-directeur de thèse
Mr. Abdelhafid BERRACHEDI	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur
Mr. Mustapha CHELLALI	Professeur	U. Blida 1	Examineur
Mr. Hamamache KHEDDOUCI	Professeur	U. Lyon 1	Examineur
Mme. Isma BOUCHEMAKH	Professeur	U.S.T.H.B.	Invitée

Blida, le 07 Mai 2017

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Mostafa BLIDIA qui m'a accompagné et soutenu tout le long de mon travail de recherche.

Mes remerciements les plus sincères aux membres de Jury : Julien MONCEL, Farouk HANNANE, Abdelhafid BERRACHEDI, Mustapha CHELLALI, Hamamache KHEDDOUCI et Isma BOUCHEMAKH qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury et qui ont accepté d'examiner et de valoriser mon travail de doctorat.

En dernier, je remercie du fond du cœur ma mère, mon père, ma famille, mes amis et toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

# Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de la domination localisatrice et totale localisatrice. En particulier, nous examinons quelques classes de graphes critiques pour ces deux variantes de domination. Nous caractérisons les graphes critiques tels que pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L(G + e) = \gamma_L(G) + 1$  ou bien,  $\gamma_L^t(G + e) = \gamma_L^t(G) + 1$ . Encore, les graphes critiques tels que pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L^t(G + e) = \gamma_L^t(G) - 2$ . Aussi, les arbres critiques tels que pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L(T + e) = \gamma_L(T) - 1$  et les arbres critiques tels que pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L^t(T + e) = \gamma_L^t(T) - 1$ . En second, nous considérons l'indice de criticité par rapport à la suppression d'une arête et par rapport à l'ajout d'une arête pour ces deux variantes de domination. Nous déterminons les valeurs exactes de ces paramètres pour les chaînes et les cycles.

**Mots clés :** Domination, domination localisatrice, domination totale localisatrice, arête enlevée, arête ajoutée, graphes critiques, indice de criticité.

# Abstract

In this thesis, we are interested in the study of locating and locating total domination. Particularly, we examine some classes of critical graphs for these two parameters domination parameters. We characterize critical graphs such that for any edge  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L(G+e) = \gamma_L(G) + 1$  or,  $\gamma_L^t(G+e) = \gamma_L^t(G) + 1$ . Moreover, critical graphs such that for any edge  $e \in E(\overline{T})$ ,  $\gamma_L^t(G+e) = \gamma_L^t(G) - 2$ . Also, critical trees such that for any edge  $e \in E(\overline{T})$ ,  $\gamma_L(T+e) = \gamma_L(T) - 1$  or,  $\gamma_L^t(T+e) = \gamma_L^t(T) - 1$ . Secondly, we consider the criticality indices with respect to edge removal and edge addition for these two domination parameters. We determine exact values of these parameters for paths and cycles.

**Keywords :** Domination, locating domination, locating total domination, edge removal, edge addition, critical graphs, criticality index.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les Graphes et la Domination</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et Notations . . . . .	3
1.2 Aperçu sur la Domination dans les Graphes . . . . .	7
1.2.1 Historique . . . . .	7
1.2.2 Définition . . . . .	8
1.2.3 Quelques Variantes de la Domination . . . . .	9
<b>2 La Modification des Graphes et la Domination</b>	<b>14</b>
2.1 La Modification des Graphes . . . . .	14
2.1.1 Quelques Opérations sur les Graphes . . . . .	14
2.1.2 Quelques Applications Pratiques . . . . .	16
2.2 Les Graphes Critiques . . . . .	18
2.2.1 L'indice de Criticité . . . . .	20
2.3 Autres Problèmes . . . . .	21
2.3.1 Le Nombre de Bondage . . . . .	21
<b>3 La Modification des Graphes et la Domination (Totale) Localisatrice</b>	<b>24</b>
3.1 Les Graphes Critiques . . . . .	24
3.1.1 Les Graphes Sommet Critiques . . . . .	25

3.1.2	Les Graphes Arête Enlevée Critiques . . . . .	26
3.2	Le Nombre de Bondage . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Les Graphes Arête Ajoutée Critiques et la Domination (Totale) Localisatrice</b>	<b>34</b>
4.1	Préliminaires et Notations . . . . .	35
4.2	Les Graphes $\gamma_L^+, \gamma_L^{t+}$ -Arête Ajoutée Critiques . . . . .	39
4.2.1	Les Graphes $\gamma_L^+$ -Arête Ajoutée Critiques . . . . .	39
4.2.2	Les Graphes $\gamma_L^{t+}$ -Arête Ajoutée Critiques . . . . .	44
4.3	Les Graphes $\gamma_L^-, \gamma_L^{t-}$ -Arête Ajoutée Critiques . . . . .	45
4.3.1	Les Graphes $\gamma_L^{t-}$ -Arête Ajoutée Strictement Critiques . . . . .	46
4.3.2	Les Arbres $\gamma_L^-, \gamma_L^{t-}$ -Arête Ajoutée Critiques . . . . .	47
<b>5</b>	<b>L'Indice de Criticité et la Domination (Totale) Localisatrice</b>	<b>51</b>
5.1	L'Indice de Criticité . . . . .	51
5.2	L'Indice de Criticité de la Suppression d'une Arête de la Domination Localisatrice et Totale Localisatrice . . . . .	56
5.3	L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Localisatrice . . . . .	61
5.3.1	L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Localisatrice d'une Chaîne . . . . .	61
5.3.2	L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Localisatrice d'un Cycle . . . . .	73
5.4	L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Totale Localisatrice . . . . .	77
	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Table des figures

2.1	Quelques opérations sur un graphe $G$ . . . . .	16
3.1	Un arbre de la famille $\mathcal{E}$ . . . . .	26
3.2	Un graphe de la famille $\mathcal{F}$ . . . . .	27
3.3	Contre exemple du Lemme 3.1 . . . . .	28
3.4	Un graphe de la famille $\mathcal{H}$ . . . . .	30
3.5	Un arbre de la famille $\mathcal{T}$ . . . . .	33
4.1	Exemples sur l'effet de l'ajout d'une arête sur le nombre de domination localisatrice . . . . .	35
4.2	Exemples sur l'effet de l'ajout d'une arête sur le nombre de domination totale localisatrice . . . . .	36
4.3	Un graphe $G = \mathcal{G}(K', K'')$ de la famille $\mathcal{G}$ . . . . .	41
5.1	Exemple sur le calcul de l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice . . . . .	53
5.2	Exemple sur le calcul de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice . . . . .	53
5.3	Contre exemple de la Remarque 5.2 point 2 . . . . .	55
5.4	Contre exemple de la Remarque 5.3 point 4 . . . . .	56
5.5	Un unicycle graphe $M = M(n_1, c, n_2)$ . . . . .	62

# Introduction

Lorsqu'on modifie un graphe par certaines opérations telles que la suppression de sommets, la suppression ou l'ajout d'arêtes, il convient de regarder l'effet de ces modifications ou de ces opérations sur les différents invariants du graphe. Ce problème est un problème classique de la théorie des graphes qui a été largement étudié dans la littérature sous différents aspects.

En pratique, l'étude du sujet peut répondre aux problèmes de la vulnérabilité, la robustesse et la stabilité des systèmes quand certaines anomalies sont détectées au niveau de leurs composants.

Une considération importante a été accordée à l'étude des graphes pour lesquels pour toute modification du graphe parmi un ensemble de modifications identiques et possibles, le paramètre du graphe résultant change. Ces graphes sont dits critiques. Dans le cas où le paramètre du graphe résultant ne change pas, ces graphes sont dits stables.

Le concept des graphes critiques a été considéré pour la domination. Walikar et Acharya [76] étaient les premiers à avoir étudié les graphes critiques où le nombre de domination augmente suite à la suppression d'une arête arbitraire du graphe. Sumner et Blich [70] ont étudié le problème similaire, les graphes critiques où le nombre de domination diminue lorsqu'une arête arbitraire manquante est ajoutée au graphe.

Depuis, de nombreux chercheurs se sont investis dans l'étude des graphes critiques pour la domination et ses variantes. Également, ils ont traité une variété de questions liées au concept général du problème. En particulier, Van der Merwe et al. ([36, 74])



---

ont défini l'indice de criticité pour la domination totale par rapport à l'ajout d'une arête. Au sens général, l'indice de criticité est une valeur associée à un graphe qui peut exprimer sa criticité ou sa stabilité par rapport à un paramètre lors d'une modification.

Dans cette thèse, nous étudions le comportement de la domination localisatrice [67, 68] et la domination totale localisatrice [42] dans les graphes suite à la suppression d'une arête et suite à l'ajout d'une arête.

Cette thèse se compose de cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la théorie des graphes. Nous introduisons la domination ainsi que quelques variantes de la domination dans les graphes. Dans le deuxième chapitre, nous abordons le problème de la modification des graphes pour la domination et ses variantes. Un survey sur les travaux déjà réalisés autour de ce sujet et concernant la domination localisatrice et totale localisatrice sera présenté dans le troisième chapitre.

La suite de notre recherche sera détaillée dans les Chapitres 4 et 5.

Dans le Chapitre 4, nous traitons les graphes critiques pour la domination localisatrice et totale localisatrice. En premier, nous caractérisons les graphes critiques pour lesquels les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice augmentent après l'ajout d'une arête arbitraire. En second, nous examinons les différentes classes de graphes critiques où les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice diminuent lorsqu'une arête arbitraire manquante est ajoutée au graphe.

Dans le Chapitre 5, nous définissons les indices de criticité par rapport à la suppression d'une arête et par rapport à l'ajout d'une arête pour la domination localisatrice et totale localisatrice. Nous déterminons les valeurs exactes de ces paramètres pour les chaînes et les cycles.

# Chapitre 1

## Les Graphes et la Domination

Dans notre travail, nous considérons les graphes critiques et l'indice de criticité pour la domination localisatrice et totale localisatrice.

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de base de la théorie des graphes qui nous seront nécessaires pour présenter nos résultats. Aussi, nous présentons la domination ainsi que la domination localisatrice et totale localisatrice dans les graphes.

Les différentes définitions et notations employés dans ce chapitre sont inspirées des livres [4] et [40, 41].

### 1.1 Définitions et Notations

#### Graphe et Graphe Simple

Un graphe non orienté fini  $G$  est un couple  $(V, E)$ , où  $V$  est un ensemble d'éléments finis et dénombrables et  $E$  est un sous ensemble de paire d'éléments de  $V$ ,  $E \subseteq \{uv, u \in V \text{ et } v \in V\}$ .  $G$  est noté  $G = (V, E)$  ou  $G = (V(G), E(G))$ . L'ordre de  $G = (V, E)$  est  $n = |V|$ , et sa taille est  $m = |E|$ . Un graphe d'ordre  $n = 1$  est dit trivial et un graphe de taille  $m = 0$  est dit vide.

Un élément  $v \in V$  est dit sommet et un élément  $e = uv \in E$  est dit arête.

Deux sommets  $u, v$  sont dits adjacents ou voisins dans  $G$  si l'arête  $e = uv \in E$ .

Pour  $e = uv$ ,  $e$  est dite incidente aux sommets  $u, v$ , et  $u, v$  sont dits les extrémités de l'arête  $e$ .

Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité en commun.

Si l'arête  $e = uu \in E$  pour un sommet  $u \in V$ , alors  $e$  est dite boucle.

Le complémentaire d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe  $\overline{G} = (V, E(\overline{G}))$ , avec  $E(\overline{G}) = \{uv, uv \notin E\}$ .

Un  $p$ -graphe est un graphe dont le nombre d'arête entre toute paire de sommets est inférieur ou égale à  $p$ .

Un graphe simple est un 1-graphe sans boucle.

Nous considérons dans ce travail les graphes simples.

### Sommet, Voisinage d'un Sommet et degré d'un Sommet

Le voisinage ouvert d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G$  est l'ensemble de tous les sommets  $u$  voisins à  $v$  dans  $G$ , noté  $N(v)$  ou  $N_G(v)$ .

Le voisinage fermé de  $v$  est l'ensemble  $\{v\} \cup N(v)$ , noté  $N[v]$  ou  $N_G[v]$ .

Le degré de  $v$  est la cardinalité de son voisinage ouvert, noté  $deg(v)$  ou  $d_G(v)$ .

$\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V\}$  et  $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V\}$  désignent respectivement le degré minimum et le degré maximum du graphe  $G$ .

Un sommet isolé est un sommet de degré  $d_G(v) = 0$ .

Un sommet universel est un sommet de degré  $d_G(v) = n - 1$ .

Un sommet pendant est un sommet de degré  $d_G(v) = 1$ .

Le voisin d'un sommet pendant est dit un sommet support. Une arête incidente à un sommet pendant est dite une arête pendante.

$L(G)$  et  $S(G)$  désignent respectivement l'ensemble des sommets pendants et l'ensemble des sommets supports dans  $G$ , avec  $|L(G)| = l(G)$  et  $|S(G)| = s(G)$ .

L'ensemble  $L_v$  est l'ensemble des sommets pendants voisins à un sommet support  $v$ .

Lorsque  $|L_v| = 1$ ,  $v$  est dit un sommet support faible et lorsque  $|L_v| > 1$ ,  $v$  est dit un sommet support fort.

Deux sommets  $u, v$  sont des faux jumeaux dans  $G$  si  $uv \notin E$  et  $N_G(u) = N_G(v)$ .

Deux sommets  $u, v$  sont des vrais jumeaux dans  $G$  si  $uv \in E$  et  $N_G[u] = N_G[v]$ .

Soit  $S$  un sous ensemble de sommets dans  $G$ . L'ensemble  $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$  est le voisinage ouvert de  $S$  et l'ensemble  $N[S] = S \cup N(S)$  est le voisinage fermé de  $S$ .

### Sous Graphe et Graphe Partiel

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Pour les ensembles  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E(G)$  et  $E_{V'} = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V'\}$ , on définit les graphes suivants.

Le sous graphe  $H = (V', E_{V'})$  de  $G$ , engendré ou induit par  $V'$ , noté  $H = \langle V' \rangle$ .

Le graphe partiel  $H = (V, E')$  de  $G$ .

Le sous graphe partiel  $H = (V', E_{V'} \cap E')$  de  $G$ .

Un sous graphe vide est appelé stable.

Un sous graphe complet est appelé clique.

### Le Concept Minimal, Maximal, Minimum et Maximum

Soit  $\mathcal{P}$  une propriété associée à un graphe  $G = (V, E)$  et soit  $A$  un sous ensemble de  $V$  qui vérifie  $\mathcal{P}$ .

$A$  est minimal par rapport à  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas un sous ensemble  $B \subset A$  qui vérifie  $\mathcal{P}$ .  $A$  est maximal par rapport à  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas un sous ensemble  $B \supset A$  qui vérifie  $\mathcal{P}$ .

$A$  est minimum ou de taille minimale par rapport à  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas de sous ensemble  $B$  dans  $V$  qui vérifie  $\mathcal{P}$ , avec  $|B| < |A|$ .  $A$  est maximum ou de taille maximale dans  $G$  par rapport à  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas de sous ensemble  $B$  dans  $V$  qui  $B$  vérifie  $\mathcal{P}$ , avec  $|B| > |A|$ .

Un  $\pi$ -ensemble est un sous ensemble dans  $G$  de cardinalité  $\pi$  qui vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

## Chaîne, Cycle, Arbre et Connexité

Un graphe  $G = (V, E)$  dont l'ensemble des sommets est  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et l'ensemble des arêtes est  $E = \{v_i v_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$  est dit une chaîne, notée  $P_n$ . Les sommets  $u_1$  et  $u_n$  sont appelés les extrémités de  $P_n$ . La taille d'une chaîne  $P_n, m = n - 1$  est appelée la longueur de la chaîne.

Une sous chaîne induite dans  $G$  dont l'une de ses extrémités est de degré un dans  $G$  est dite chaîne terminale.

Un graphe  $G = (V, E)$  dont l'ensemble des sommets est  $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_1\}$  et l'ensemble des arêtes est  $E = \{u_n u_1\} \cup \{u_i u_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$  est dit un cycle, noté  $C_n$ . La taille d'un cycle  $C_n, m = n$  est appelée la longueur du cycle. Une arête  $e \notin E(C)$  est dite une corde.

Un graphe  $G$  est dit connexe si pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  dans  $G$ , il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$ . Une composante connexe d'un graphe  $G$  est un sous graphe connexe maximal.

La distance entre deux sommets  $u$  et  $v$ ,  $d_G(u, v)$  est la longueur minimum d'une chaîne reliant  $u$  et  $v$ .

Le diamètre d'un graphe  $G$  est  $diam(G) = \max_{u, v \in G} \{d_G(u, v)\}$ .

Une sous chaîne induite dans  $G$  dont la longueur est égale au diamètre de  $G$  est dite chaîne diamétrale.

Un arbre  $T$  est un graphe connexe sans cycle. Tout arbre  $T$  est d'ordre  $n$  et de taille  $m = n - 1$ .

## Graphes Particuliers

Un graphe complet  $K_n$  est un graphe connexe  $G = (V, E)$  tel que toute paire de sommets  $u, v$  dans  $V$  est liée par une arête  $uv$  dans  $E$ . La taille de  $K_n$  est  $m = n(n - 1)/2$ .

Un graphe multiparti complet ou  $t$ -parti complet  $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}, t \geq 2$  est un graphe connexe  $G = (V, E)$  tel que l'ensemble des sommets  $V, |V| = n_1 + n_2 + \dots + n_t$  peut

être partitionné en  $t$  stables  $N_i, i = \overline{1, t}$ , avec  $|N_i| = n_i$  et pour toute paire de sommets  $u \in N_i$  et  $v \in N_j, i \neq j, i, j = \overline{1, t}, uv \in E$ .

Un graphe biparti complet est le graphe  $K_{n_1, n_2}$ .

Une étoile est le graphe  $K_{1, n_2}$ .

Une double étoile  $S_{p, q}, p, q \geq 1$  est un graphe obtenu en reliant le sommet support d'une étoile  $K_{1, p}, p \geq 1$  au sommet support d'une étoile  $K_{1, q}, q \geq 1$ .

## 1.2 Aperçu sur la Domination dans les Graphes

### 1.2.1 Historique

L'étude la domination remonte en 1862 dans les jeux des échecs quand De Jaenisch [28] étudia le problème du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier  $n \times n$  afin de contrôler (dominer) toutes les cases de l'échiquier, c.à.d. chaque case est soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles. Sachant que les règles du jeu des échecs permettent à une reine de se déplacer soit horizontalement, verticalement ou diagonalement, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases d'un échiquier  $8 \times 8$ . Dans ce cas, le problème est appelé « le problème des cinq reines » et est considéré comme l'origine de l'étude de la domination dans les graphes.

30 ans plus tard, Rouse Ball [2] a traité la question de De Jaenish en considérant des conditions supplémentaires.

Les problèmes posés par De Jaenish ont été examinés par les frères Yaglom [78] en 1964 .

En 1958, Berge [3] introduit le nombre de domination sous l'appellation « coefficient de stabilité externe ».

En 1962, Ore [58] fut le premier à employer les appellations « ensemble dominant » et « nombre de domination » qu'il nota  $d(G)$ .

L'étude moderne de la domination dans les graphes a débuté après l'apparition

de l'article de Cockayne et Hedetniemi [21] en 1977. Les auteurs de [21] étaient les premiers à utiliser la notation  $\gamma(G)$  pour désigner le nombre de domination.

Depuis, plusieurs chercheurs se sont investis dans l'étude de la domination dans les graphes et de nouveaux types de la domination ont été introduits. Les livres de T.W. Haynes et al. [40, 41] exposent une étude complète sur les différents concepts fondamentaux de la domination, ainsi qu'un recueil d'une variété d'articles traitant de la domination et ses variantes (recherches publiées avant 1998).

### 1.2.2 Définition

On peut associer au problème des cinq reines le graphe du déplacement de la reine  $G = (V, E)$ . Notons qu'un sommet  $v \in V$  représente une case de l'échiquier  $n \times n$ , et une arête  $uv \in E(G)$  indique la possibilité du déplacement de la reine de la case  $u$  vers la case  $v$ . La résolution du problème consiste à déterminer un ensemble dominant de cardinalité minimum dans le graphe  $G$ .

**Définition 1.1.** *Un ensemble dominant dans un graphe  $G = (V, E)$  est un sous ensemble de sommets  $S$  dans  $V$  tel que tout sommet dans  $V - S$  est adjacent à au moins un sommet dans  $S$ .*

La cardinalité d'un ensemble dominant ayant la plus petite taille dans  $G$  est appelée nombre de domination, notée  $\gamma(G)$ .

Les définitions suivantes sont équivalentes à la définition 1.1.

- Un ensemble  $S \subseteq V$  est un ensemble dominant dans  $G$  si pour tout sommet  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap S| \geq 1$ .
- Un ensemble  $S \subseteq V$  est un ensemble dominant dans  $G$  si  $N[S] = V$ .

Nous présentons dans la partie suivante quelques variantes de la domination.

### 1.2.3 Quelques Variantes de la Domination

L'étude de la domination dans les graphes ne cesse d'évoluer en raison de la diversité de ses applications dans différents domaines.

Dans plusieurs applications, la domination simple ne permet pas de présenter une illustration complète du problème. Alors, il est nécessaire de combiner la domination avec d'autres propriétés de la théorie des graphes. Ce qui explique l'introduction des variantes de la domination.

#### La domination totale

Dans une des solutions du problème des cinq reines, Cokayne et al. [20] en 1980 ont remarqué que toute reine dans l'ensemble dominant de l'échiquier  $8 \times 8$  est dominée par une autre reine. Ce cas particulier a inspiré les auteurs de [20] à introduire une nouvelle variante de la domination, la domination totale.

**Définition 1.2.** *Un ensemble dominant total dans un graphe  $G$  est un dominant  $S$  tel que le sous graphe induit par  $S$  est sans sommets isolés.*

La cardinalité d'un ensemble dominant total ayant la plus petite taille dans  $G$  est appelée nombre de domination totale, notée  $\gamma_t(G)$ .

Un survey sur la domination totale dans les graphes a été présenté par Henning [43] en 2009.

Dans les problèmes où on cherche à localiser certains « intrus », comme par exemple le problème de repérer un voleur ou un saboteur, ou encore le problème de détecter les incendies, on se préoccupe de trouver l'emplacement optimal de certains dispositifs de sécurité tels que les caméras de surveillance, les alarmes d'incendie de manière à identifier efficacement ces « intrus ».

Dans ce type d'applications, on s'intéresse à étudier une classe particulière des ensembles dominants.



## La domination localisatrice

Dans le but de la prévention contre les incendies, on équipe une construction d'un système de détection d'incendie. Les appareils utilisés sont conçus de la manière suivante.

- L'appareil détecte l'incendie qui se déclenche dans la pièce où il est installé.
- L'appareil détecte (sans distinguer) tous les incendies qui se déclenchent dans toutes les pièces adjacentes à celle où il est installé, c.à.d. dans les pièces qui ont un mur en commun avec celle-ci.
- L'appareil distingue entre un incendie qui se déclenche dans la pièce où il est installé de celui qui se déclenche dans une pièce adjacente à celle-ci.

Pour des raisons de coût on veut minimiser le nombre d'appareil à installer.

On peut modéliser cette construction par un graphe  $G = (V, E)$ , où les sommets  $v \in V$  représentent les pièces de la construction, et deux sommets  $u$  et  $v$  sont voisins dans  $G$  si les deux pièces représentées par ces deux sommets sont adjacentes dans la construction.

Le problème de trouver les meilleurs emplacements pour installer ces appareils dans la construction revient à déterminer un ensemble dominant localisateur minimum dans le graphe  $G$ . La notion de la domination nous permet de savoir s'il y a un incendie dans la construction, quand à la notion de la localisation nous permet de savoir le lieu exact de l'incendie.

La domination localisatrice a été introduite par Slater [67, 68] en 1988. Avant de définir cette variante de domination nous présentons les ensembles localisateurs définis aussi par Slater [69] en 1975.

**Définition 1.3.** [67] *Un sous ensemble de sommets  $D = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est un ensemble localisateur si pour tout sommet  $v \in V$ , la  $D$ -localisation de  $v$ ,  $f(v) = (d_G(v, v_1), d_G(v, v_2), \dots, d_G(v, v_l))$  est unique.*

Autrement dit tout sommet  $v \in V$  peut être localisé d'une manière unique par rapport à sa distance de chaque sommet dans  $D$ .

On note par  $R(G)$  la taille minimum d'un ensemble localisateur dans  $G$ .

Dans la chaîne  $P_6 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ , il est simple de voir que l'ensemble  $\{v_1\}$  est un ensemble localisateur. Ainsi,  $R(P_6) = 1$ .

**Définition 1.4.** [67] *Un ensemble dominant localisateur (E.D.L.) dans un graphe  $G = (V, E)$  est un dominant  $S$  tel que pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  dans  $V - S$ , les voisinages ouverts de  $u$  et  $v$  sont différents dans  $S$  ( $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ ).*

La cardinalité d'un E.D.L. ayant la plus petite taille dans  $G$  est appelée nombre de domination localisatrice, notée  $RD(G)$  ou  $\gamma_L(G)$ .

Il est à remarquer qu'un ensemble dominant localisateur est un ensemble dominant et un ensemble localisateur. Par contre, un ensemble qui est à la fois un ensemble dominant et un ensemble localisateur n'est pas forcément un ensemble dominant localisateur.

En effet, dans la chaîne  $P_6 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ , l'ensemble  $\{v_1, v_2, v_5\}$  est à la fois un ensemble dominant et un ensemble localisateur mais il n'est pas un ensemble dominant localisateur. L'ensemble  $\{v_2, v_4, v_6\}$  est un ensemble dominant localisateur.  $\gamma_L(P_6) = 3$ .

Soit  $u, v$  deux sommets dans un graphe  $G = (V, E)$ . On pose  $d_1(u, v) = \min(2, d_G(u, v))$  et  $f_1(v) = (d_1(v, v_1), d_1(v, v_2), \dots, d_1(v, v_l))$ , avec  $l$  est un entier positif non nul.

La définition suivante est équivalente à la définition 1.4.

**Définition 1.5.** [67] *Un sous ensemble de sommets  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  dans un graphe  $G$  est un ensemble dominant localisateur si et seulement si pour toute paire de sommets distincts  $u, v$  dans  $V$ , on a  $f_1(u) \neq f_1(v)$ , et  $f_1(u) \neq (2, 2, \dots, 2), \forall u \in V$ .*

Pour tout graphe  $G$ , on a  $\gamma_L(G) \geq \max\{\gamma(G), R(G)\}$ .

La domination localisatrice a été largement examinée dans la littérature. Nous citons par exemples les références [6, 7, 10, 17, 32, 49, 66].

## Code identifiant

Un problème similaire au problème de la détection des incendies, le problème de la détection des processeurs défectueux dans un réseau multiprocesseur. Ce problème a motivé l'introduction des codes identifiants. Un code identifiant dans un graphe  $G = (V, E)$  est un dominant  $C$  où pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  dans  $V$ , les voisinages fermés de  $u$  et  $v$  sont différents dans  $C$ . Cette variante de domination a été initiée par Karpovsky et al. [55] en 1988 et a été beaucoup étudiée dans la littérature.

Les différentes applications portant sur l'étude de la protection et le contrôle dans les systèmes, ont étendu les notions de la domination localisatrice et des codes identifiants. Nous citons par exemples, les systèmes de contrôles introduits par Auger et al. [1] en 2013. (The open neighborhood locating-dominating) introduit par Seo et Slater [65] en 2010. Aussi, la domination paire localisatrice initiée par McCoy et Henning [57] en 2009 et la domination totale localisatrice que nous allons présenter ci-après.

Nous proposons un lien électronique [56] maintenu par Lobstein, qui renvoie vers une bibliographie sur les différents écrits liés aux concepts de la domination localisatrice et des codes identifiants.

## La domination totale localisatrice

Reprenons l'application de la prévention contre les incendies (voir : La domination localisatrice). Dans le but de renforcer la prévention, on suppose que les appareils utilisés ont en plus la particularité suivante.

- L'appareil peut signaler la panne d'un autre appareil qui est dans son voisinage ouvert.

Il convient alors dans cette situation de placer les appareils de sorte que chaque appareil soit lié à au moins un autre.

Motivé par cette application, Haynes et al. [42] ont défini la domination totale localisatrice en 2006. Le concept de la domination localisatrice mixte les concepts de la domination totale et de la domination localisatrice.

**Définition 1.6.** [42] *Un ensemble dominant total localisateur (E.D.T.L.) dans un graphe  $G$  est à la fois un dominant total et un dominant localisateur.*

La cardinalité d'un E.D.T.L. ayant la plus petite taille dans  $G$  est appelée nombre de domination total localisatrice, notée  $\gamma_L^t(G)$ .

Pour la chaîne  $P_6 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ , l'ensemble  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  est un ensemble dominant total localisateur.  $\gamma_L^t(P_6) = 4$ .

Pour plus d'information sur la domination totale localisatrice, voir par exemple [16, 19, 33, 44].

# Chapitre 2

## La Modification des Graphes et la Domination

Quand un paramètre de graphe est d'un intérêt pour une application pratique, il est important d'examiner le comportement de ce paramètre lorsque le graphe est modifié.

Dans ce chapitre, nous exposons quelques problèmes théoriques et quelques applications pratiques liés au concept général de la modification des graphes. Nous nous concentrons sur les graphes critiques pour la domination et ses variantes. D'autres problèmes sont également cités.

### 2.1 La Modification des Graphes

#### 2.1.1 Quelques Opérations sur les Graphes

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.  $G$  peut être modifié en un nouveau graphe  $G'$ , en effectuant des opérations sur l'ensemble des sommets  $V(G)$  ou l'ensemble des arêtes  $E(G)$ .

Dans ce qui suit, nous présentons quelques opérations sur les graphes. Nous commençons par noter les opérations simples, dites aussi les opérations de base.

**La suppression d'un sommet (Vertex deletion)**

Pour un sommet  $v \in V$ , le graphe  $G' = G - v$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $v$ . Ainsi  $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus E_v)$ , où  $E_v$  est l'ensemble des arêtes incidentes à  $v$ .

**La suppression d'une arête (Edge deletion)**

Pour une arête  $e = uv \in E(G)$ , le graphe  $G' = G - e$  ou  $G - uv$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant l'arête  $uv$ . Ainsi  $G - uv = (V, E \setminus \{uv\})$ .

**L'ajout d'une arête (Edge addition)**

Pour une arête  $e = uv \in E(\overline{G})$ , le graphe  $G' = G + e$  ou  $G + uv$  est obtenu à partir de  $G$  en ajoutant l'arête  $uv$ . Ainsi  $G + uv = (V, E \cup \{uv\})$ .

Nous notons aussi les opérations suivantes.

**La contraction d'une arête (Edge contraction)**

Pour une arête  $uv \in E(G)$ , le graphe  $G' = G/uv$  ou  $G.uv$  est obtenu à partir de  $G$  en contractant l'arête  $uv$ , c.à.d., on supprime l'arête  $uv$  et on fusionne les deux sommets  $u$  et  $v$  en un seul sommet  $w$ . Ainsi  $G/uv = ((V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}, E \setminus \{uv\})$ .

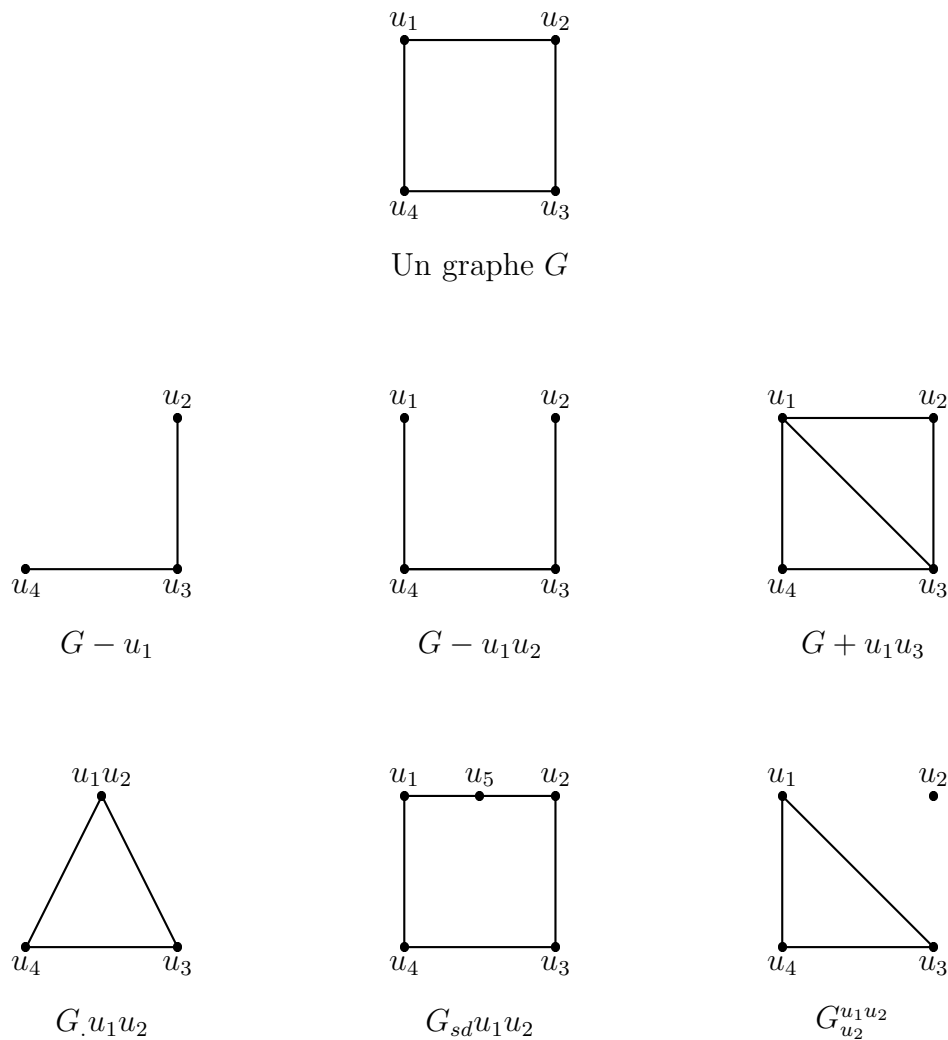
**La subdivision d'une arête (Edge subdivision)**

Pour une arête  $uv \in E(G)$ , le graphe  $G' = G_{sd}uv$  est obtenu à partir de  $G$  en subdivisant l'arête  $uv$ , c.à.d., on supprime l'arête  $uv$ , on ajoute un nouveau sommet  $w$  et on relie  $w$  aux sommets  $u$  et  $v$ . Ainsi  $G_{sd}uv = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{uv\}) \cup \{uw, vw\})$ .

**Le lifting des arêtes (Edge lifting)**

Pour deux arêtes  $uv, vw \in E(G)$  telles que  $uw \notin E(G)$ , le graphe  $G' = G_v^{uw}$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant les deux arêtes  $uv, vw$  et en ajoutant l'arête  $uw$ . Ainsi  $G_v^{uw} = (V, (E \setminus \{uv, vw\}) \cup \{uw\})$ .

Dans la figure ci-dessous, nous illustrons les diverses opérations décrites auparavant.

FIGURE 2.1 – Quelques opérations sur un graphe  $G$ 

Nous exposons dans la partie suivante des applications pratiques qui motivent l'étude théorique des problèmes de l'effet de certaines opérations sur quelques invariants de la théorie des graphes.

### 2.1.2 Quelques Applications Pratiques

La théorie des graphes peut être facilement utilisée pour modéliser les grands systèmes complexes, comme les réseaux informatiques, les réseaux de télécommunication, les circuits électroniques, les lignes de production de montage, les réseaux de pipelines et les réseaux de trafic.

De la façon la plus naturelle, l'ensemble des sommets du graphe qui représente le modèle structurel de tels systèmes, représente les composants du système et l'ensemble des arêtes du graphe (arcs, lorsque l'orientation est un facteur) représente les interactions entre ces composants.

### **Le cas de la suppression/ajout d'un sommet, d'une arête du graphe**

Dans le domaine de la conception des réseaux, notamment des réseaux télécommunication, la tolérance aux pannes (fault tolerance) est une méthode de conception qui permet l'interaction entre les nombreux composants du système même dans les conditions les plus critiques. En d'autres termes, le système ne s'arrête pas de fonctionner en présence d'une ou de plusieurs défaillances matérielles ou logicielles.

Le problème théorique qui se pose - sous le critère de la tolérance aux pannes - est l'étude de l'effet de la suppression de sommet ou arête (pannes au niveau des composants du système) sur les différents paramètres de la théorie des graphes (nombre de connectivité, diamètre, nombre de domination) qui désignent certaines performances ou exigences du système.

Autre problème à considérer - sous le critère de la tolérance aux pannes - est l'étude de l'effet de l'ajout de sommet ou arête au graphe (la redondance; avoir une sauvegarde des composants du système qui prend automatiquement la relève du composant dès qu'il tombe en panne) sur les différents paramètres de la théorie des graphes.

### **Le cas de l'ajout d'une arête du complémentaire du graphe**

Le problème de localisation des installations (the facility location problem) consiste à choisir l'emplacement optimal de certains types d'installations pour satisfaire la demande des clients ou des utilisateurs. Pour des raisons de coût, il est souhaitable de minimiser le nombre de ces installations.

Par exemple, on cherche à minimiser le nombre d'espaces de stockages à installer dans un réseau de télécommunication. Alors, on propose d'ajouter quelques liaisons entre les nœuds qui ne sont pas trop éloignés dans le réseau. Le problème théorique



qui se pose est l'étude de l'effet de l'ajout d'une arête (ajout de liaison) sur le nombre de domination (le nombre minimum d'espaces de stockage à installer).

### **Le cas de la contraction d'une arête**

Parfois l'ajout de liaison implique encore des coûts supplémentaires. Par conséquent le problème théorique qui se pose est l'étude de l'effet de la contraction d'une arête (contraction de liaison) sur le nombre de domination (le nombre minimum d'espaces de stockage à installer).

Les graphes critiques ont une application directe dans les problèmes de la conception des réseaux et la localisation des installations.

Dans la section suivante nous présentons les graphes critiques pour la domination et ses variantes.

## **2.2 Les Graphes Critiques**

Une recherche très fréquente et aussi très fructueuse dans la théorie des graphes est l'étude des graphes critiques.

La définition d'un graphe critique est variée. Elle dépend d'une propriété de graphe  $\mathcal{P}$  et d'une opération sur les graphes  $\phi$ . Un graphe  $G$  est dit critique par rapport à  $\mathcal{P}$  sous l'effet de  $\phi$ , lorsque  $G$  vérifie  $\mathcal{P}$  mais pour toute opération possible  $\phi$  sur  $G$ ,  $G$  est modifié en un graphe  $G'$  qui ne vérifie pas  $\mathcal{P}$ . Dans le cas où le graphe  $G'$  conserve la propriété  $\mathcal{P}$ ,  $G$  est dit stable.

Pour une propriété  $\mathcal{P}$  et une opération  $\phi$ , il est possible de définir plus qu'un graphe critique selon l'effet de l'opération  $\phi$  sur le paramètre de graphe  $\pi$  associé à  $\mathcal{P}$ . Par exemple, on peut définir les graphes  $\pi^-$ -critiques, si pour toute opération possible  $\phi$  sur  $G$ ,  $\pi(G') < \pi(G)$ . Ou encore, les graphes  $\pi^+$ -critiques, si pour toute opération possible  $\phi$  sur  $G$ ,  $\pi(G') > \pi(G)$ .

Le concept des graphes critiques a été introduit pour la première fois dans la fin des années 40 par Dirac [51], qui a étudié les graphes critiques par rapport au nombre

chromatique  $\chi(G)$  sous l'effet de la suppression de sommet.

Par la suite, l'étude des graphes critiques l'étude a été étendue à d'autres invariants de la théorie des graphes comme le nombre de la connectivité, le diamètre et notamment le nombre de domination.

L'étude des graphes critiques pour la domination a été minutieusement lancée dans la fin des années 70.

Walikar et Acharya [76] (1979) étaient les premiers à avoir étudié les graphes critiques pour la domination. Ils ont caractérisé les graphes arête supprimée critiques où le nombre de domination augmente suite à la suppression d'une arête arbitraire du graphe. Par la suite, Sumner et Blich [70] (1983) ont étudié le problème similaire, les graphes arête ajoutée critiques où le nombre de domination diminue lorsqu'une arête arbitraire manquante est ajoutée au graphe. Plus tard, Brigham, Chinn et Dutton [14] (1988) ont étudié les graphes sommet critique où le nombre de domination augmente suite à la suppression d'un sommet arbitraire du graphe. Une présentation détaillée sur les premiers écrits sur les graphes critiques pour la domination simple est donnée dans ([40], Chapitre 5, 16).

Dans la littérature, nous comptons de nombreuses recherches sur les graphes critiques pour la domination et ses variantes. On a été beaucoup plus attiré par l'étude des graphes critiques sous l'effet de la suppression de sommet, la suppression et l'ajout d'arête.

On distingue en général six classes de graphes critiques par rapport à un paramètre de domination  $\pi$  sous l'effet des opérations simples sur les graphes.

- Les graphes  $\pi^-$ -sommet critiques, si pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $\pi(G - v) < \pi(G)$ .
- Les graphes  $\pi^+$ -sommet critiques, si pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $\pi(G - v) > \pi(G)$ .
- Les graphes  $\pi^-$ -arête enlevée-critiques, si pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\pi(G - e) < \pi(G)$ .
- Les graphes  $\pi^+$ -arête enlevée-critiques, si pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\pi(G - e) > \pi(G)$ .

- Les graphes  $\pi^-$ -arête ajoutée-critiques, si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\pi(G + e) < \pi(G)$ .
- Les graphes  $\pi^+$ -arête ajoutée-critiques, si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\pi(G + e) > \pi(G)$ .

Nous proposons de voir les références suivantes [26, 27, 45, 46, 47], où on a étudié les graphes critiques pour la domination totale et [31], où on a traité les graphes critiques pour les code identifiants. Aussi voir [11, 29, 35, 48, 52, 61], où on a exploré les graphes critiques pour différentes variantes de domination.

En outre des graphes critiques sous l'effet des opérations de base sur les graphes, autres types de graphes critiques ont été traités pour la domination et ses variantes. Nous citons par exemples, les graphes critiques sous l'effet de la contraction d'arête, voir [15, 34, 64]. Les graphes critiques sous l'effet de la subdivision d'arête voir [62]. Encore, les graphes critiques sous l'effet du lifting d'arêtes, voir [25].

### 2.2.1 L'indice de Criticité

Afin de donner une définition précise de l'indice de criticité, nous introduisons les notions suivantes.

Pour un graphe  $G = (V, E)$  et un paramètre  $\pi(G)$ , un sommet  $v \in V(G)$  (une arête  $e \in E(G)$  ou  $e \in E(\overline{G})$ , respectivement) est dit (dite, respectivement) critique (stable, respectivement) si la suppression de  $v$  (la suppression ou l'ajout de  $e$ , respectivement) change (n'a aucun effet sur) la valeur de  $\pi(G)$ .

L'indice de criticité du sommet  $v \in V(G)$  (de l'arête  $e \in E(G)$  ou  $e \in E(\overline{G})$ , respectivement) par rapport à  $\pi(G)$  est la valeur mesurée de l'effet de la suppression de  $v$  (la suppression ou l'ajout de  $e$ , respectivement) sur  $\pi(G)$ , c.à.d., la valeur de la différence  $\pi(G) - \pi(G - v)$  ( $\pi(G) - \pi(G - e)$  ou  $\pi(G) - \pi(G + e)$ , respectivement).

L'indice de criticité de la suppression d'un sommet (la suppression ou l'ajout d'une arête, respectivement) du graphe  $G$  par rapport à  $\pi(G)$  est le ratio de la somme des valeurs des indices de criticité de tous les sommets  $v \in V(G)$  (toutes les arêtes

$e \in E(G)$  ou  $e \in E(\overline{G})$ , respectivement) sur la cardinalité de l'ensemble de ces sommets  $n$  (ces arêtes  $m$  ou  $\overline{m}$ , respectivement).

Il est direct de voir que l'indice de criticité du graphe  $G$  peut exprimer la criticité ou la stabilité de  $G$  par rapport à  $\pi(G)$  lors d'un changement bien défini.

Le concept de l'indice de criticité a été initié en 1998 par Van der Merwe et al. [74] pour la domination totale dans le cas de l'ajout d'une arête. Les auteurs de [74] ont déterminé la valeur exacte de l'indice de criticité pour les cycles. Plus tard [36] Hatting et al. ont calculé la valeur exacte de l'indice de criticité pour les chaînes d'une façon élégante.

Motivé par les travaux de [36] et [74], Bouchou et Blidia ont étudié l'indice de criticité pour la domination romaine et la domination 2-rainbow, voir respectivement [12] et [13].

Les problèmes exposés dans la section suivante peuvent être considérés comme des généralisations des problèmes présentés dans la Partie 2.1.2.

## 2.3 Autres Problèmes

### 2.3.1 Le Nombre de Bondage

Le nombre de bondage  $b(G)$  d'un graphe non vide  $G = (V, E)$  est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes  $E' \subseteq E$  pour lequel le nombre de domination du graphe partiel  $G - E'$  augmente.

En pratique, nous pouvons relier le problème théorique de déterminer le nombre de bondage d'un graphe avec le problème de l'analyse de la vulnérabilité des réseaux de télécommunication en cas de rupture de plusieurs liaisons.

L'étude du nombre du bondage dans les graphes a été initiée en 1990 par Fink et al. [30]. Bien qu'en 1983, Bauer et al. [5] ont brièvement pointé l'idée sous l'appellation (domination line-stability). Les auteurs de [5] se sont principalement focalisés sur l'étude de la notion similaire (domination stability), qui désigne le nombre minimum

de sommets à enlever d'un graphe pour déstabiliser le nombre de domination du graphe.

Des bornes exactes du nombre de bondage ont été établies pour différentes classes de graphes de structure complètement définies, comme les chaînes, les cycles, et les graphes complets ou les graphes bipartis complets. Aussi, des bornes supérieures ont été déterminées pour les arbres et les graphes dans le cas général. Voir [30].

Pour plus de résultats sur le nombre de bondage, nous invitons le lecteur à se retourner vers les références suivantes [38, 39, 71, 72, 73].

L'introduction du nombre de bondage a motivé l'étude des nombres de bondage d'autres paramètres de domination. Nous citons par exemples, les travaux de Kulli et Patwari [54] (1991) sur le nombre de bondage de la domination totale. Les travaux de Raczek [59] (2008) sur le nombre de bondage de la domination pair. De Hatting et Plummer [37] (2008) sur le nombre de bondage de la domination restreinte et de Rad et Volkmann [63] (2011) sur le nombre de bondage de la domination romaine. Dans [77] (2013), on a présente un résumé sur différents travaux des nombres de bondage de différentes variantes de la domination.

En plus du nombre de bondage, autres problèmes liés à l'étude de l'effet de la modification des graphes sur la domination et ses variantes ont été considérés dans la littérature.

Nous terminons ce chapitre par citer brièvement quelques-uns.

### **Le Nombre de Renforcement**

Dans [53], Kok et Mynhardt ont discuté la notion du duale du nombre de bondage d'un graphe, le nombre de renforcement d'un graphe.

Le nombre de renforcement  $r(G)$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes  $E' \subseteq E(\overline{G})$  pour lequel le nombre de domination du graphe partiel  $G + E'$  diminue.

### **Le Nombre de Contraction**

Dans [50], Huang et Xu ont défini le nombre de contraction pour la domination totale.

Le nombre de contraction  $ct(G)$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est le nombre minimum d'arêtes qui doivent être contractées pour diminuer le nombre de domination.

### **Le Nombre de Subdivision**

Dans [75], Arumugam et Velammal ont introduit le nombre de subdivision.

Le nombre de subdivision  $sd(G)$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est le nombre minimum d'arêtes qui doivent être subdivisées afin d'augmenter le nombre de domination.

# Chapitre 3

## La Modification des Graphes et la Domination (Totale) Localisatrice

Une recherche bibliographique sur les travaux sur les différents problèmes liés à la modification des graphes et concernant la domination localisatrice et totale localisatrice, nous discerne quelques écrits sur les graphes critiques et le nombre de bondage.

Dans ce chapitre, nous présentons un résumé sur l'ensemble de ces travaux.

### 3.1 Les Graphes Critiques

L'étude des graphes critiques par rapport à la domination localisatrice et totale localisatrice a été initiée en 2009. Deux classes de graphes critiques ont été considérées. Les graphes critiques par rapport à la suppression d'un sommet et les graphes critiques par rapport à la suppression d'une arête. Pour notre part, nous nous sommes investis dans l'étude de la classe des graphes critiques par rapport à la suppression d'une arête pour la domination localisatrice et totale localisatrice (voir [8, 9]). D'autre part, Chellali et Rad (voir [18, 60]) ont regardé les deux classes pour la domination totale localisatrice.

### 3.1.1 Les Graphes Sommet Critiques

Les graphes considérés dans cette partie sans sommets isolés.

**Théorème 3.1.** [18] *Pour tout graphe  $G = (V, E)$  et pour tout sommet  $v \in V$  tel que  $G - v$  est sans sommets isolés,  $\gamma_L^t(G) - 1 \leq \gamma_L^t(G - v)$  et  $\gamma_L^t(G - v) - \gamma_L^t(G)$  peut être arbitrairement large.*

Du fait que la valeur du nombre de domination totale localisatrice d'un graphe  $G$  peut être augmentée ou diminuée suite à la suppression d'un sommet du graphe. Il est possible de définir deux classes de graphes critiques par rapport à la suppression d'un sommet pour la domination totale localisatrice. Les graphes sommet critiques pour lesquels la suppression de tout sommet  $v \in V \setminus S(G)$  augmente le nombre de domination totale localisatrice et les graphes sommet critiques pour lesquels la suppression de tout sommet  $v \in V \setminus S(G)$  diminue le nombre de domination totale localisatrice.

Les auteurs de [18] ont examiné les graphes  $\gamma_L^t$ -sommet critiques qui vérifient que pour tout sommet  $v \in V \setminus S(G)$ ,  $\gamma_L^t(G - v) = \gamma_L^t(G) - 1$ . En particulier, ils ont caractérisé tous les arbres  $\gamma_L^t$ -sommet critiques. Nous citons quelques résultats de leur recherche.

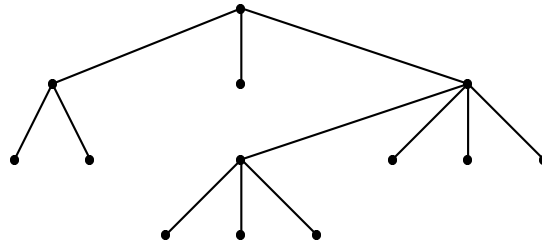
**Proposition 3.1.** [18]

- Un graphe complet  $K_n$  est  $\gamma_L^t$ -sommet critique si et seulement si  $n \geq 4$ .
- Aucune chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 3$  n'est  $\gamma_L^t$ -sommet critique.
- Un cycle  $C_n$  est  $\gamma_L^t$ -sommet critique si et seulement si  $n \equiv 1, 2[4]$ .
- Un graphe bipartie-complet  $K_{m,n}$  est  $\gamma_L^t$ -sommet critique si et seulement si  $\min \{m, n\} \geq 3$ ,  $\min \{m, n\} = 1$  ou  $\max \{m, n\} \geq 3$ .

**Définition 3.1.** Soit  $\mathcal{E}$  la famille des arbres  $T$ . Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.

- Tout sommet  $v$  dans  $T$  est un sommet support ou un sommet pendant.
- Tout sommet support dans  $T$  est au moins de degré deux.



FIGURE 3.1 – Un arbre de la famille  $\mathcal{E}$ 

**Théorème 3.2.**  *$T$  est un arbre  $\gamma_L^t$ -sommets critique si et seulement si  $T$  appartient à  $\mathcal{E}$ .*

**Théorème 3.3.** *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_L^t$ -sommets critique avec  $\gamma_L^t(G) = k$ . Alors, le diamètre de  $G$  est  $\text{diam}(G) \leq 2k - 3$  et  $\text{diam}(G) \leq 2k - 4$  pour  $k$  pair, avec  $k \geq 4$ .*

Dans ce qui suit nous considérons les graphes non vides.

### 3.1.2 Les Graphes Arête Enlevée Critiques

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe. La suppression d'une arête  $e$  dans  $E(G)$  peut augmenter comme elle peut diminuer les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice.

**Proposition 3.2.** [23] *Pour tout graphe  $G$  et pour toute arête arbitraire  $e \in E(G)$ ,  $\gamma_L(G) - 1 \leq \gamma_L(G - e) \leq \gamma_L(G) + 1$ .*

**Proposition 3.3.** [18] *Pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés et pour toute arête non pendante  $e \in E(G)$ ,  $\gamma_L^t(G) - 1 \leq \gamma_L^t(G - e) \leq \gamma_L^t(G) + 2$ .*

Des Propositions 3.2 et 3.3, nous distinguons deux classes de graphes critiques par rapport à la suppression d'une arête pour  $\pi(G) \in \{\gamma_L(G), \gamma_L^t(G)\}$ .

La classe des graphes  $\pi^+$ -arête enlevée critiques qui ont la propriété que pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\pi(G - e) = \pi(G) + 1$ .

La classe des graphes  $\pi^-$ -arête enlevée critiques qui ont la propriété que pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\pi(G - e) = \pi(G) - 1$ .

En ce qui concerne les classes des graphes  $\pi^-$ -arête enlevée critiques,  $\pi \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$ . Nous avons montré dans ([22], Chapitre 4), que les graphes complets et les graphes multipartis parties complets sous certaines conditions sont des graphes  $\gamma_L^-$  et  $\gamma_L^{t-}$ -arête enlevée critiques. Le problème de la caractérisation de ces graphes critiques reste encore ouvert à ce jour.

### Les Graphes $\gamma_L^+$ Arête Enlevée Critiques

Nous avons caractérisé les graphes  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critiques dans [9]. Avant de présenter le Théorème 3.4 de la caractérisation, nous donnons sans démonstration quelques propriétés de ces graphes et quelques définitions. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [9] et ([22], Chapitre 4).

**Proposition 3.4.** [9] Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique. Alors pour tout  $\gamma_L(G)$ -ensemble  $S$ , les ensembles  $S$  et  $V - S$  sont stables.

**Proposition 3.5.** [9] Si  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique, alors tout sommet support dans  $G$  est faible.

**Définition 3.2.** [9] Soit  $G = (V, W, E)$  un graphe biparti tel que,

- $\forall w \in W$  et  $\forall V' \subseteq N_G(w)$ , il existe un unique  $w' \in W$  tel que  $N_G(w') = V'$ .

Nous désignons par  $\mathcal{F}$  l'ensemble des graphes  $G$ .

**Observation 3.1.** [9] Un graphe  $G \in \mathcal{F}$  est construit de sorte que,

1. tout sommet support de  $G$  est faible.
2.  $V$  est l'ensemble des sommets supports de  $G$ .
3.  $V$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble.

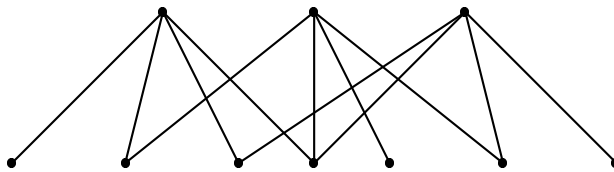


FIGURE 3.2 – Un graphe de la famille  $\mathcal{F}$

**Définition 3.3.** [6] Un GDLU est un graphe qui admet un unique ensemble dominant localisateur minimum.

**Proposition 3.6.** [22] Tout graphe dans  $\mathcal{F} \setminus P_2$  est un GDLU.

**Lemme 3.1.** [9] Si  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique d'ordre  $n \geq 3$ , alors l'ensemble des sommets supports  $S(G)$  est l'unique  $\gamma_L(G)$ -ensemble.

Notons que la réciproque du Lemme 3.1 n'est pas vraie. Un graphe  $G$  qui admet l'ensemble des sommets supports comme un unique  $\gamma_L$ -ensemble n'est pas forcément un graphe  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique. Un exemple d'un tel graphe est présenté dans la figure ci-dessous.

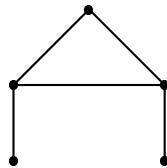


FIGURE 3.3 – Contre exemple du Lemme 3.1

**Théorème 3.4.** [9]  $G$  est un graphe connexe  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique si et seulement si  $G \in \mathcal{F}$ .

**Corollaire 3.1.** [9]  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique si et seulement si  $G$  est l'union de sommets isolés et de graphes  $G \in \mathcal{F}$ .

### Les Graphes $\gamma_L^{t+}$ Arête Enlevée Critiques

Nous avons étudié les graphes  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée critiques graphes dans [8] et ([22], Chapitre 4). Nous résumons dans ce qui suit la suite de notre étude.

**Proposition 3.7.** [22] Il n'existe aucun graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée critique  $G$  de degré minimum  $\delta(G) \geq 2$ .

Comme le concept de la domination totale localisatrice n'est pas défini pour tous les graphes partiels  $G - e$ , où  $e$  est une arête pendante du graphe  $G$ . Il s'ensuit de la Proposition 3.7 que la classe des graphes  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée critiques est vide.

Nous introduisons la classe des graphes  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critiques.

Un graphe  $G$  est dit  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critique si pour toute arête non pendante  $e \in E(G)$ ,  $\gamma_L^t(G - e) = \gamma_L^t(G) + 1$ .

**Proposition 3.8.** [8] *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critique. Alors, pour tout  $\gamma_L^t(G)$ -ensemble  $S$ , le sous graphe induit par  $V - S$  est un stable.*

**Proposition 3.9.** [8] *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critique. Alors, pour tout  $\gamma_L^t(G)$ -ensemble  $S$ , le sous graphe induit par  $S$  est une galaxie.*

La réciproque des Propositions 3.8 et 3.9 n'est pas vérifiée dans tous les cas. Remarquons que pour tout dominant total localisateur minimum  $S$  d'un cycle  $C_3$ . Le sous graphe induit par  $S$  est une étoile  $K_{1,1}$ , et le sous graphe induit par  $V - S$  est un stable. Or  $C_3$  n'est pas un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critique.

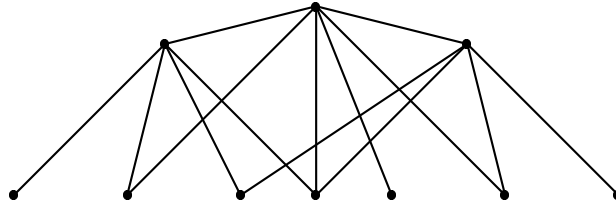
**Définition 3.4.** [8] *Soit  $H = (V, E)$  un graphe connexe tel que,*

- *$V$  peut être partitionné en deux sous ensembles  $X, Y$  de sorte que le sous graphe induit par  $X$  est une galaxie et le sous graphe induit par  $Y$  est un stable.*
- *$\forall y \in Y$  et  $\forall X' \subseteq N_H(y)$ , il existe un unique  $y'$  de  $Y$  tel que  $N_H(y') = X'$ .*
- *$\forall x \in S(H) \cap X$ ,  $N_H(x) \cap Y \neq \emptyset$ .*

*Nous désignons par  $\mathcal{H}$  l'ensemble des graphes  $H$ .*

**Observation 3.2.** [8] *Un graphe  $H \in \mathcal{H}$  est construit de sorte que,*

1.  $S(H) \subseteq X$ .
2.  $\forall x \in V(H) \setminus (S(H) \cup L(H))$ ,  $N_H(x) \cap Y = \emptyset$ .
3. *Le sous graphe induit par  $V(H) \setminus (S(H) \cup L(H))$  est stable.*
4.  $X$  est un  $\gamma_L^t(H)$ -ensemble de  $H$ .

FIGURE 3.4 – Un graphe de la famille  $\mathcal{H}$ 

**Théorème 3.5.** [8]  $G$  est un graphe connexe  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critique si et seulement si  $G \in \mathcal{H}$ .

**Corollaire 3.2.** [8]  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée faiblement critique si et seulement si toute composante connexe de  $H$  est dans  $\mathcal{H}$ .

## 3.2 Le Nombre de Bondage

Dans ([22], Chapitre 3), nous avons défini les nombres de bondage localisateur et localisateur total.

Le nombre de bondage localisateur  $b_L(G)$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes  $E' \subseteq E$  pour lequel le nombre de domination localisatrice du graphe partiel  $G - E'$  augmente.

Similairement, le nombre de bondage total localisateur  $b_L^t(G)$  d'un graphe est défini.

Il est à noter que le nombre de bondage localisateur est bien défini pour tout graphe  $G$ . Or le nombre de bondage total localisateur n'est pas défini pour tout graphe  $G$ . Du fait que la suppression d'un sous ensemble d'arêtes de  $G$  peut conduire à un graphe partiel  $H$  avec  $\gamma_L^t(H) \leq \gamma_L^t(G)$  ou  $\delta(H) = 0$ . Tout graphe  $G$  dont le nombre de bondage total localisateur  $b_L^t(G)$  ne peut pas être défini est dit  $\gamma_L^t$ -fortement stable.

Nous exposons dans ce qui suit les résultats les plus importants que nous avons obtenus de notre étude des paramètres  $b_L(G)$  et  $b_L^t(G)$ . Nous commençons par donner les valeurs exactes du  $b_L(G)$  et  $b_L^t(G)$  pour certaines classes de graphes de structure particulières.

### Valeurs Exactes du Nombre de Bondage Localisateur

**Proposition 3.10.** [22] *Le nombre de bondage localisateur d'une chaîne  $P_n$ ,  $n \geq 2$  est*

$$b_L(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 3[5] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Corollaire 3.3.** [22] *Le nombre de bondage localisateur d'un cycle  $C_n$ ,  $n \geq 3$  est*

$$b_L(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 3[5] \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 3.11.** [22] *Le nombre de bondage localisateur d'un graphe complet  $K_n$ ,  $n \geq 2$  est  $b_L(K_n) = n(n-1)/2$ .*

**Théorème 3.6.** [22] *Le nombre de bondage localisateur d'un graphe  $t$ -partie complet  $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ ,  $t \geq 2$  tel que  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$  est*

$$b_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} n_2(n_1 - 1) & \text{si } t = 2 \text{ et } n_1 \geq 2 \\ n_1 \sum_{i=2}^t n_i & \text{si } t \geq 3 \text{ et } n_1 \geq 2 \\ n_2 & \text{si } t = 2 \text{ et } n_1 = 1 \\ \min\left\{m \sum_{i=m+1}^t n_i + m(m-1)/2, \right. \\ \left. (n_{m+1} - 1) \sum_{i=1, i \neq m+1}^t n_i\right\} & \text{si } t \geq 3, n_m = 1, n_{m+1} \geq 2 \text{ et } 1 \leq m < t. \end{cases}$$

### Valeurs Exactes du Nombre de Bondage Total Localisateur

**Proposition 3.12.** [22] *Le nombre de bondage total localisateur d'une chaîne  $P_n$ ,  $n \geq 2$  est*

$$b_L^t(P_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{2, 3\} \\ 2 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Corollaire 3.4.** [22] *Le nombre de bondage total localisateur d'un cycle  $C_n$ ,  $n \geq 3$  est*

$$b_L^t(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3 \\ 3 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 3.13.** [22] *Le nombre de bondage total localisateur d'un graphe complet  $K_n$  d'ordre pair  $n$ ,  $n \geq 4$  est  $b_L^t(K_n) = n(n-2)/2$ .*

Dans ce qui suit nous donnons des bornes supérieures du  $b_L(G)$  pour les arbres et pour les graphes de structure générale.

### Bornes Supérieures du Nombre de Bondage Localisateur

**Théorème 3.7.** [22] *Si  $T$  est un arbre non trivial, alors  $b_L(T) \leq \Delta(T)$ .*

Il s'ensuit du Théorème 3.7 le corollaire suivant.

**Corollaire 3.5.** [22] *Si  $T$  est un arbre non trivial avec  $l(T)$  sommets pendants, alors  $b_L(T) \leq l(T)$ .*

Du Corollaire 3.5,  $b_L(T) \leq l(T)$  pour tout arbre  $T$ . Cette borne n'est pas atteinte pour tous les arbres.

**Proposition 3.14.** [22]  *$b_L(T) = l(T)$  si et seulement si  $T$  est une chaîne  $P_n$ ,  $n \equiv 3[5]$  ou  $T$  est une étoile  $K_{1,n}$ ,  $n \geq 2$ .*

**Observation 3.3.** [22] *Soit  $G$  un graphe tel que tout graphe partiel  $H$  de  $G$  vérifie  $\gamma_L(H) \geq \gamma_L(G)$ . Si  $k$  arêtes peuvent être enlevées de  $G$  pour obtenir un graphe partiel  $H$  avec  $b_L(H) = 1$ , alors  $b_L(G) \leq k + 1$ .*

**Théorème 3.8.** [22] *Si  $G = (V, E)$  est un graphe tel que tout graphe partiel  $H$  vérifie  $\gamma_L(H) \geq \gamma_L(G)$ , alors  $b_L(G) \leq \min_{uv \in E} \{deg(u) + deg(v) - 1\}$ .*

**Corollaire 3.6.** [22] *Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés tel que tout graphe partiel  $H$  vérifie  $\gamma_L(H) \geq \gamma_L(G)$ , alors  $b_L(G) \leq \delta(G) + \Delta(G) - 1$ .*

## Les Arbres $\gamma_L^t$ -Fortement Stables

Comme il n'est pas simple de déterminer des bornes supérieures du nombre de bon-dage total localisateur pour les arbres. Nous donnons une caractérisation constructive des arbres  $\gamma_L^t$ -fortement stables.

L'opération suivante nous permet d'introduire la famille des arbres  $\gamma_L^t$ -fortement stables.

- **Opération  $\mathcal{I}$**  : Joindre un sommet support  $s$  à un autre sommet support  $s'$  par l'arête  $ss'$ .

**Définition 3.5.** [22] Soit  $\mathcal{T}$  la famille des arbres définie comme suit,

$\mathcal{T} = \{\text{Étoile}, T \mid T \text{ est construit à partir de deux arbres } K \text{ et } S \text{ de } \mathcal{T} \setminus \{P_2\} \text{ par l'opération } \mathcal{I}\}.$

**Observation 3.4.** [22] Un arbre  $T \in \mathcal{T}$  est construit de sorte que,

1.  $V(T) \setminus (S(T) \cup L(T)) = \emptyset.$
2.  $\gamma_L^t(T) = l(T).$
3. Tout sommet support d'un arbre  $T \neq P_2$  est fort.
4.  $T - uv$  a deux composantes connexes  $T_u, T_v$  dans  $\mathcal{T} \setminus \{P_2\}$ , pour toute arête non pendante  $uv$  de  $T$ .

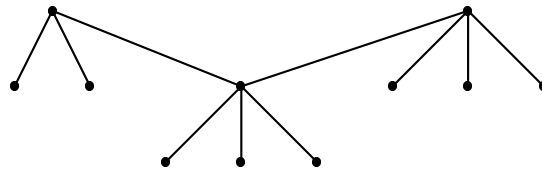


FIGURE 3.5 – Un arbre de la famille  $\mathcal{T}$

**Théorème 3.9.** [22]  $T$  est un arbre  $\gamma_L^t$ -fortement stable si et seulement si  $T$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

Remarquons que l'intersection des familles des arbres  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{T}$  n'est pas vide. En effet, tout arbre  $T \in \mathcal{E} \cap \mathcal{T}$  est à la fois  $\gamma_L^t$ -sommet critique et  $\gamma_L^t$ -fortement stable.



# Chapitre 4

## Les Graphes Arête Ajoutée

### Critiques et la Domination

### (Totale) Localisatrice

Dans ce chapitre, nous étudions les graphes critiques par rapport à l'ajout d'une arête pour la domination localisatrice et totale localisatrice.

D'abord, nous caractérisons la famille des graphes critiques pour lesquels le nombre de domination localisatrice augmente après l'ajout d'une arête arbitraire manquante au graphe. Nous prouvons que cette famille de graphes est également la famille de tous les graphes critiques pour lesquels le nombre de domination totale localisatrice augmente suite à l'ajout d'une arête arbitraire manquante au graphe. Après, nous caractérisons les graphes critiques pour lesquels le nombre de domination totale localisatrice diminue de deux lorsqu'une arête arbitraire est ajoutée. Enfin, nous caractérisons les arbres critiques pour lesquels les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice diminuent d'un lorsqu'une arête arbitraire est ajoutée.

Les principaux résultats présentés dans ce chapitre sont apparus dans [24].

## 4.1 Préliminaires et Notations

Contrairement à d'autres variantes de la domination (telles que la domination simple et la domination totale) où l'ajout d'une arête ne peut que diminuer le nombre de domination. L'ajout d'une arête peut diminuer comme il peut augmenter les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice.

Dans les figures ci-dessous, nous donnons des exemples de graphes où les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice diminuent, augmentent et restent inchangés suite à l'ajout d'une arête.

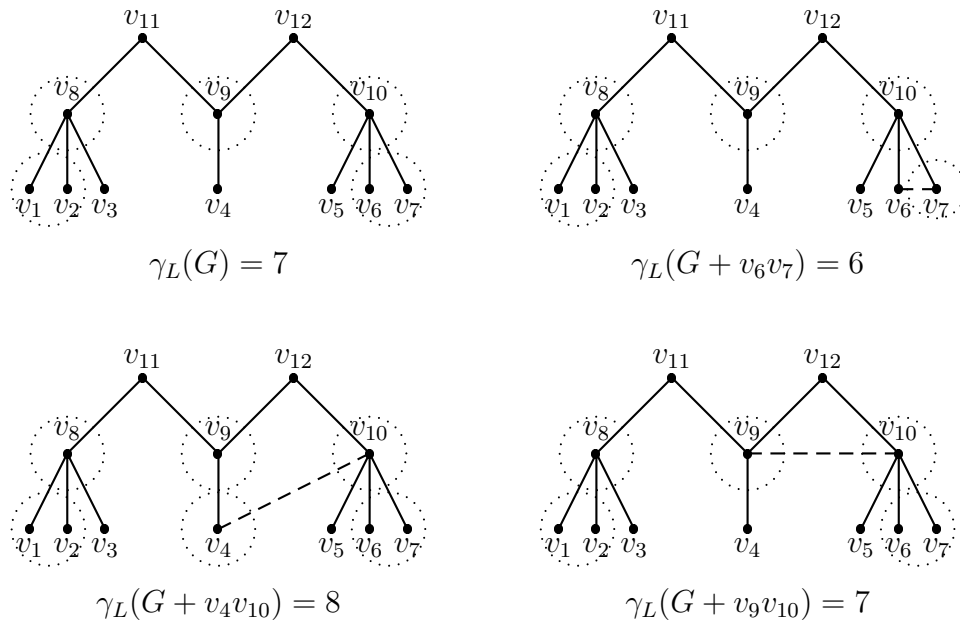


FIGURE 4.1 – Exemples sur l'effet de l'ajout d'une arête sur le nombre de domination localisatrice

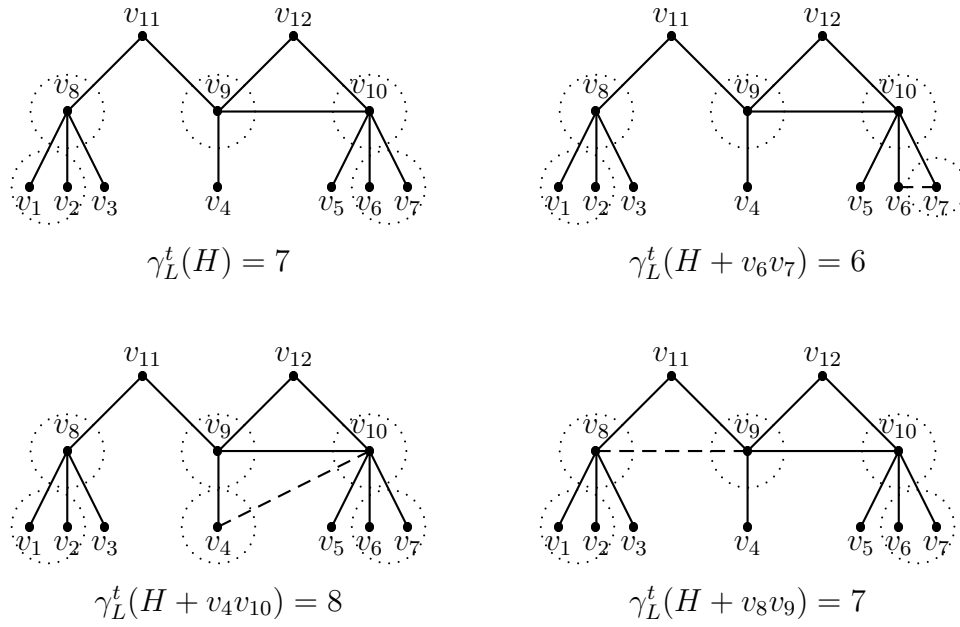


FIGURE 4.2 – Exemples sur l’effet de l’ajout d’une arête sur le nombre de domination totale localisatrice

Les deux résultats suivants nous donnent les bornes inférieures et supérieures de l’effet de l’ajout d’une arête sur les nombres de domination localisatrice et totale localisatrice.

**Proposition 4.1.** *Pour tout graphe  $G = (V, E)$  et pour toute arête arbitraire  $uv \notin E(G)$ ,  $\gamma_L(G) - 1 \leq \gamma_L(G + uv) \leq \gamma_L(G) + 1$ .*

**Preuve.** Considérons graphe  $G = (V, E)$  et une arête  $uv$  qui n’appartient pas à  $E(G)$ . En premier, soit  $S$  un  $\gamma_L$ -ensemble du graphe  $G = (V, E)$ . Si les deux extrémités de  $uv$  sont dans  $S$  ou  $V - S$ , alors  $S$  est un *EDL* du graphe  $G + uv$ . Donc, sans perte de généralité, supposons que  $u \in S$  et  $v \notin S$ . Clairement,  $S \cup \{v\}$  est un *EDL* du graphe  $G + uv$ . Il s’ensuit que  $\gamma_L(G + uv) \leq \gamma_L(G) + 1$ .

En second, soit  $S'$  un  $\gamma_L$ -ensemble du graphe  $G + uv$ . Si  $u, v \in S'$  ou  $u, v \in V - S'$ , alors  $S'$  est un *EDL* du graphe  $G$ . Ainsi, sans perte de généralité, supposons que  $u \in S'$  et  $v \in V - S'$ . Clairement,  $S' \cup \{v\}$  est un *EDL* du graphe  $G$ . Il résulte que  $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G + uv) + 1$ . ■

**Proposition 4.2.** *Pour tout graphe  $G = (V, E)$  sans sommets isolés et pour toute arête arbitraire  $uv \notin E(G)$ ,  $\gamma_L^t(G) - 2 \leq \gamma_L^t(G + uv) \leq \gamma_L^t(G) + 1$ .*

**Preuve.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe sans sommets isolés et soit  $uv$  une arête qui n'appartient pas à  $E(G)$ . Considérons un  $\gamma_L^t(G)$ -ensemble  $S$ . Si l'un des ensembles  $S$  ou  $V - S$  contient à la fois  $u$  et  $v$ , alors  $S$  est un *EDTL* du graphe  $G + uv$ . Sans perte de généralité, supposons alors que  $S$  contient  $u$  et  $V - S$  contient  $v$ . Cependant,  $S \cup \{v\}$  est un *EDTL* du graphe  $G + uv$ . D'où,  $\gamma_L^t(G + uv) \leq \gamma_L^t(G) + 1$ .

Dans ce qui suit, nous considérons un  $\gamma_L^t(G + uv)$ -ensemble  $S'$ . Nous avons trois cas à distinguer. Le premier cas,  $S'$  ne contient aucun des sommets  $u$  et  $v$ . Dans ce cas, il est clair de voir que  $S'$  est un *EDTL* du graphe  $G$ . Le deuxième cas,  $S'$  contient exactement l'un des sommets  $u$  et  $v$ , disons que  $u \in S'$  et  $v \in V - S'$ . Comme  $G$  est un graphe sans sommets isolés, forcément  $v$  admet au moins un autre voisin différent de  $u$  dans  $G + uv$ . Notons par  $w$  un tel voisin. Si  $w \in S'$ , alors  $S' \cup \{v\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$ . Sinon,  $S' \cup \{w\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$ . Le troisième cas,  $S'$  contient les deux sommets  $u$  et  $v$ . Du fait que  $G$  est un graphe sans sommets isolés, alors  $u, v$  sont au moins de degré deux dans  $G + uv$ . Soient  $u'$  et  $v'$ , respectivement, les deux voisins de  $u$  et  $v$  dans  $G - \{u, v\}$ . D'abord, supposons que  $u'$  et  $v'$  sont contenus dans  $S'$ . Alors,  $S'$  est un *EDTL* du graphe  $G$ . Après, supposons que  $u'$  et  $v'$  sont contenus dans  $V - S'$ . Alors,  $S' \cup \{u', v'\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$ . Enfin, sans perte de généralité, supposons que  $u' \in S'$  et  $v' \in V - S'$ . Alors,  $S' \cup \{v'\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$ . Par conséquent,  $\gamma_L^t(G) \leq \gamma_L^t(G + uv) + 2$ . ■

Nous rappelons que pour un paramètre de domination  $\pi$  associé à un graphe  $G$  et pour une opération bien définie  $\phi$  sur  $G$  telle que la suppression d'un sommet, la suppression ou l'ajout d'une arête.  $G$  est dit critique, si pour toute opération possible  $\phi$  sur  $G$ ,  $G$  est modifié en un graphe  $G'$  avec  $\pi(G') \neq \pi(G)$ .

Dans les Proposition 4.1 et 4.2, nous avons prouvé que l'ajout d'une arête peut augmenter les nombres de domination localisatrice  $\gamma_L(G)$  et totale localisatrice  $\gamma_L^t(G)$  par un. Comme il peut diminuer le nombre de domination localisatrice  $\gamma_L(G)$  par un et

le nombre de domination totale localisatrice  $\gamma_L^t(G)$  par au plus deux. Nous spécifions alors par graphe critique tout graphe dont les nombres  $\gamma_L(G)$  et  $\gamma_L^t(G)$  diminuent ou augmentent par un, et par graphe strictement critique tout graphe dont le nombre  $\gamma_L^t$  diminue par plus d'un.

Ainsi, les définitions d'un graphe critique par rapport à la domination (totale) localisatrice dans le cas de l'ajout d'une arête peuvent être formulées comme suit.

**Définition 4.1.** *Soit  $G$  un graphe.  $G$  est dit,*

- $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L(G + e) = \gamma_L(G) + 1$ .
- $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L(G + e) = \gamma_L(G) - 1$ .

**Définition 4.2.** *Soit  $G$  un graphe sans sommet isolé.  $G$  est dit,*

- $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L^t(G + e) = \gamma_L^t(G) + 1$ .
- $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critique si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L^t(G + e) = \gamma_L^t(G) - 1$ .
- $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\gamma_L^t(G + e) = \gamma_L^t(G) - 2$ .

Nous terminons cette section par quelques résultats connus qui nous seront utiles dans le développement des résultats des sections suivantes.

**Lemme 4.1.** [67] *Soient  $G$  un graphe et  $u, v$  des jumeaux de  $G$ . Alors, tout  $\gamma_L(G)$ -ensemble  $S$  contient  $u$  ou  $v$ .*

Nous désignons par  $S(G)$  l'ensemble de tous les sommets supports d'un graphe  $G$  et par  $L_v$  l'ensemble de tous les sommets pendants adjacents à un sommet  $v$  dans  $S(G)$ .

**Observation 4.1.** [10] *Soit  $G$  un graphe. Alors,*

1. *il existe un  $\gamma_L(G)$ -ensemble qui contient l'ensemble  $S(G)$ ,*
2. *tout  $\gamma_L(G)$ -ensemble contient au moins  $|L_v|$  sommets du sous ensemble  $\{v\} \cup L_v$ .*

**Observation 4.2.** [8] Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés. Alors, tout  $\gamma_L^t(G)$ -ensemble contient l'ensemble  $S(G)$  et au moins  $|L_v|$  sommets du sous ensemble  $\{v\} \cup L_v$ .

## 4.2 Les Graphes $\gamma_L^+, \gamma_L^{t+}$ -Arête Ajoutée Critiques

### 4.2.1 Les Graphes $\gamma_L^+$ -Arête Ajoutée Critiques

Nous commençons cette partie par donner quelques propriétés des graphes  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critiques.

**Observation 4.3.** Si  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique, alors  $G$  est d'ordre supérieur ou égale à 4.

**Proposition 4.3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique et soit  $S$  un  $\gamma_L(G)$ -ensemble. Alors, les sous graphes  $S$  et  $V - S$  sont des cliques.

**Preuve.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique et soit  $S$  un  $\gamma_L(G)$ -ensemble. Supposons que  $S$  ou  $V - S$  n'est pas une clique. Alors, il existe au moins deux sommets non adjacents  $u$  et  $v$  dans  $S$  ou  $V - S$ . Ainsi,  $S$  est un *EDL* du graphe  $G + uv$ . D'où,  $\gamma_L(G + uv) \leq \gamma_L(G)$ . Ce qui contredit le fait que  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique. ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3.

**Corollaire 4.1.** Il n'existe aucun graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique de diamètre  $\text{diam}(G) \geq 3$ .

**Proposition 4.4.** Si  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique, alors  $G$  est de degré minimum  $\delta(G) \geq 2$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique  $G$  avec  $\delta(G) = 1$ . Alors, l'ensemble des sommets  $V$  contient au moins un sommet pendant  $v$  et un sommet support  $u$ . D'après l'Observation 4.1 point 1, il existe un  $\gamma_L(G)$ -ensemble

$S$  qui contient  $u$ . D'autre part, d'après l'Observation 4.3, on a  $n(G) \geq 4$ . Donc,  $V$  contient au moins deux autres sommets différents de  $u$  et  $v$ . Comme  $S$  et  $V - S$  sont des cliques (voir la Proposition 4.3) et comme  $d_G(v) = 1$ , il s'ensuit que  $v \in V - S$  avec  $V - S = \{v\}$ . D'où,  $S = V - \{v\}$ . Par conséquent, pour tout sommet  $w$  dans  $S$  qui est différent de  $u$ ,  $S$  est un  $EDL$  du graphe  $G + vw$ . Ainsi,  $\gamma_L(G + vw) \leq \gamma_L(G)$ . Ce qui contredit le fait que  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique. ■

De la Proposition 4.4, nous déduisons le résultat suivant.

**Corollaire 4.2.** *Il n'existe aucun arbre  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique.*

Dans le but de donner la caractérisation de tous les graphes  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critiques, nous introduisons la famille des graphes suivante.

**Définition 4.3.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe dont le sous ensemble des sommets  $V$  peut être partitionné en deux cliques disjointes  $K'$  et  $K''$ . Pour tout sommet  $v$  dans  $K''$ , les conditions suivantes sont vérifiées.*

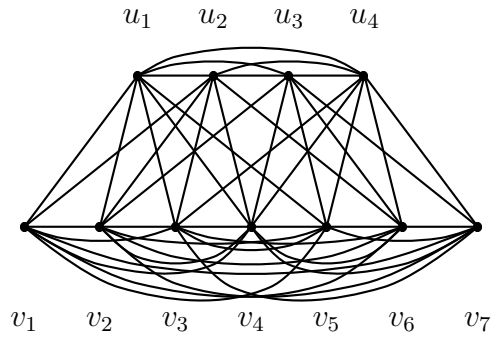
- $N_G(v) \cap K' \neq \emptyset$ .
- Pour tout sommet  $w$  dans  $K''$  différent de  $v$ ,  $N_G(w) \neq N_G(v)$ .
- Pour tout sommet  $u$  dans  $K'$  non adjacent à  $v$ , il existe un unique sommet  $w$  dans  $K''$  tel que,  $N_G(w) = N_G(v) \cup \{u\}$ .

Un tel graphe sera noté  $G = \mathcal{G}(K', K'')$ , et la famille des graphes  $G = \mathcal{G}(K', K'')$  sera notée  $\mathcal{G}$ .

**Observation 4.4.** *Soit  $G = \mathcal{G}(K', K'')$  un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . Alors,*

1.  $K'$  est un ensemble dominant localisateur de  $G$ ,
2.  $K''$  contient un unique sommet universel.

Dans la Figure 4.3, le graphe  $G = \mathcal{G}(K' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, K'' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\})$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . Observons que  $K''$  contient un unique sommet universel  $v_4$ .


 FIGURE 4.3 – Un graphe  $G = \mathcal{G}(K', K'')$  de la famille  $\mathcal{G}$ 

Le lemme suivant permet de décrire un ensemble dominant localisateur dans un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ .

**Lemme 4.2.** *Soient  $G = \mathcal{G}(K', K'')$  un graphe de la famille  $\mathcal{G}$  et  $S$  un  $\gamma_L(G)$ -ensemble. Alors,*

- $|S| = |K'|$ ,
- $G = \mathcal{G}(S, V - S)$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ .

**Preuve.** Soit  $G = \mathcal{G}(K', K'')$  un graphe de  $\mathcal{G}$ . Considérons un  $\gamma_L$ -ensemble  $S$  de  $G$ . Si  $S = K'$ , alors le résultat est trivial. Nous supposons alors que  $S \neq K'$ . D'après l'Observation 4.4 point 1,  $K'$  est un ensemble dominant localisateur de  $G$ . Donc,  $K'$  n'est pas contenu dans  $S$ . Nous pouvons donc supposer qu'il existe au moins un sommet  $u$  qui est dans  $K'$  et qui n'est pas dans  $S$ . Nous appelons par  $M$  l'ensemble de tous les sommets qui sont dans  $K'$  et qui ne sont pas dans  $S$ . Clairement,  $M \subseteq V - S$ .

Supposons que  $M$  contient un sommet universel  $u$ . Notons que si un tel sommet existe, alors il est unique. Dans le cas contraire, nous obtenons une contradiction avec le fait que  $S$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble. D'après l'Observation 4.4 point 2,  $K''$  contient un unique sommet universel  $v$ . Le Lemme 4.1 implique que  $v$  est dans  $S \cap K''$ . Remplaçons  $u$  par  $v$ . Cependant, sans perte de généralité, nous pouvons assumer que tout sommet universel appartenant à  $K'$  est dans  $S \cap K'$ . Ce qui veut dire que tout sommet  $u_i \in M$  est de degré  $d_G(u_i) \leq n - 2$ .



Considérons un sommet  $u_i \in M$ .  $u_i$  n'est pas adjacent à au moins à un sommet  $v_{i1} \in K''$ . Par construction, il existe un unique sommet  $w_{i1} \in K''$  qui vérifie  $N_{K'}(w_{i1}) = N_{K'}(v_{i1}) \cup \{u_i\}$ . Observons que  $v_{i1}$  et  $w_{i1}$  ont le même voisinage dans  $G \setminus \{u_i\}$ . Donc,  $S$  contient au moins  $\sum_{i=1, \dots, |M|} l_i$  sommets de  $K''$ , où  $l_i$  est le nombre de sommets non adjacents à un sommet  $u_i \in M$ . On a  $|S| = |S \cap K'| + |S \cap K''|$  et  $|K'| = |S \cap K'| + |M|$ . Comme  $|S| \leq |K'|$ , il s'ensuit que  $|S \cap K''| \leq |M|$ . Par conséquent,  $S$  contient exactement  $|M|$  sommets de  $K''$ ,  $|S \cap K''| = |M|$ . Donc, pour tout indice  $i, l_i = 1$ . Ce qui veut dire que tout sommet  $u_i \in M$  est exactement de degré  $d_G(u_i) = n - 2$ .

Soient  $v_i$  l'unique sommet dans  $K''$  qui n'est pas voisin à  $u_i$  et  $w_i$  l'unique sommet dans  $K''$  tel que  $N_{K'}(w_i) = N_{K'}(v_i) \cup \{u_i\}$ . Montrons que  $v_i$  est de degré  $d_G(v_i) = n - 2$ . Supposons le contraire, alors il existe au moins un autre sommet  $u'_i$  différent de  $u_i$  et qui n'est pas voisin à  $v_i$ .  $v_i \in K' \setminus N_{K'}(v_i)$ . Par construction, il existe un unique sommet  $w'_i \in K'' \setminus \{w_i\}$  tel que  $N_{K'}(w'_i) = N_{K'}(v_i) \cup \{u'_i\}$ . Clairement,  $w'_i$  n'est pas adjacent à  $u_i$ . Contradiction avec le fait que  $d_G(u_i) = n - 2$ . Ainsi,  $d_G(v_i) = n - 2$ , avec  $u_i$  est l'unique sommet non adjacent à  $v_i$ .

Par conséquent, pour tout sommet  $u_i \in M$ , il correspond un unique sommet  $v_i \in K''$  tel que  $u_i$  et  $v_i$  forment une paire de sommets jumeaux dans  $G$ . Notons par  $N$  l'ensemble des sommets  $v_i$ . Évidemment,  $|N| = |M|$ . Le Lemme 4.1 implique que  $N \subseteq S$ . Donc,  $S \cap K'' = N$ . Mais,  $S = (K' \setminus M) \cup (S \cap K'')$ . Ainsi,  $S = (K' \setminus M) \cup N$  et  $V - S = M \cup (K'' \setminus N)$ . Par conséquent,  $|S| = |K'|$  et  $|V - S| = |K''|$ . De plus, du fait que les sommets de  $M$  sont jumeaux avec les sommets de  $N$ . Il s'ensuit que  $S$  et  $V - S$  sont des cliques. Nous concluons alors que  $G = \mathcal{G}(S, V - S)$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . ■

À présent, nous pouvons donner la caractérisation des graphes  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critiques.

**Théorème 4.1.** [24]  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée si et seulement si  $G$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ .

**Preuve.** Considérons un graphe  $G$  de la famille  $\mathcal{G}$ . Nous montrons que  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique. Soit  $S$  un  $\gamma_L(G)$ -ensemble. D'après le Lemme 4.2,  $G = \mathcal{G}(S, V - S)$  est un graphe  $G$  de la famille  $\mathcal{G}$ . Par construction, les ensembles  $S$  et  $V - S$  sont des cliques. Alors, sans perte de généralité, pour une paire de sommets non adjacents  $u$  et  $v$  dans le graphe  $G$ , nous pouvons supposer que  $u \in S$  et  $v \in V - S$ . Ainsi, selon la Définition 4.3, il existe un unique sommet  $w \in V - S$  qui vérifie  $N_S(w) = N_S(v) \cup \{u\}$ . Considérons le graphe  $G + uv$ . Nous avons  $S \cup \{v\}$  est un  $EDL$  du graphe  $G + uv$  et donc,  $\gamma_L(G + uv) \leq \gamma_L(G) + 1$ . Montrons que  $\gamma_L(G + uv) \geq \gamma_L(G) + 1$ . Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un  $\gamma_L(G + uv)$ -ensemble  $S'$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L(G)$ . Par construction, observons que les sommets  $v$  et  $w$  sont des jumeaux dans le graphe  $G + uv$ . Du Lemme 4.1 découle deux cas. Le premier cas, les deux sommets  $v$  et  $w$  sont dans  $S'$ . Le deuxième cas, l'un des sommets  $v$  et  $w$  est dans  $S'$ , disons que  $v \in S'$  et  $w \in V - S'$ .

En premier, considérons les cas où  $v, w \in S'$  ou  $v \in S'$  et  $w \in V - S'$ , avec  $u \in S'$ . Nous avons alors,  $S'$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble qui n'est pas une clique. Contradiction avec le Lemme 4.2.

En second, considérons le cas où  $v \in S'$  et  $w \in V - S'$ , avec  $u \in V - S'$ . Remplaçons  $v$  par  $w$ . Nous avons alors,  $(S' \cup \{w\}) \setminus \{v\}$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble, avec  $V - ((S' \cup \{w\}) \setminus \{v\})$  qui n'est pas une clique. Contradiction avec le Lemme 4.2.

En dernier, considérons le cas où  $v, w \in S'$ , avec  $u \in V - S'$ . Comme  $v, w \in S'$ ,  $V - S'$  contient nécessairement un unique sommet  $v'$  tel que le voisinage de  $v'$  dans  $G + uv$  est  $N_{S'}(v') \setminus \{v\} = N_{S'}(v)$  ou  $N_{S'}(v') \setminus \{w\} = N_{S'}(w)$ . Sans perte de généralité, soit  $N_{S'}(v') \setminus \{v\} = N_{S'}(v)$ . Si  $v' \neq u$ , alors  $(S' \cup \{v'\}) \setminus \{v\}$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble, avec  $V - ((S' \cup \{v'\}) \setminus \{v\})$  qui n'est pas une clique. Si  $v' = u$ , alors  $(S' \cup \{u\}) \setminus \{w\}$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble qui n'est pas une clique. Ce qui contredit le Lemme 4.2.

Par conséquent,  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique.

Nous considérons dans ce qui suit un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique  $G = (V, E)$ . Nous montrons que  $G$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . Soit  $S$  un  $\gamma_L(G)$ -ensemble. Selon

la Proposition 4.3, les ensembles  $S$  et  $V - S$  sont des cliques. Donc, le sous ensemble des sommets  $V$  peut être partitionné en deux cliques disjointes  $S$  et  $V - S$ . Considérons un sommet  $v \in V - S$ . Du fait que  $S$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble, nécessairement  $N_G(v) \cap S \neq \emptyset$ . Aussi, pour tout sommet  $w$  dans  $V - S$  différent de  $v$ , clairement  $N_G(w) \neq N_G(v)$ . Soit  $u$  un sommet dans  $S$  non adjacent à  $v$ . Supposons qu'il n'existe aucun sommet  $w$  dans  $V - S$  tel que,  $N_G(w) = N_G(v) \cup \{u\}$ . Alors,  $S$  est un  $EDL$  du graphe  $G + uv$ . Donc,  $\gamma_L(G + uv) \leq \gamma_L(G)$ , contradiction avec le fait que  $G$  est un graphe  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique. Ainsi,  $w$  existe et  $w$  est unique dans  $V - S$ . Donc, toutes les conditions de la Définition 4.3 sont vérifiées. Par conséquent,  $G = \mathcal{G}(S, V - S)$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . ■

## 4.2.2 Les Graphes $\gamma_L^{t+}$ -Arête Ajoutée Critiques

Dans cette partie nous caractérisons tous les graphes  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critiques. Nous donnons d'abord deux résultats simples qui nous seront utiles dans la démonstration du théorème de la caractérisation.

Comme le concept de la domination totale localisatrice n'est défini que pour les graphes sans sommets isolés. Les graphes considérés dans cette partie sont des graphes de degré minimum  $\delta(G) = 1$ .

**Observation 4.5.** *Pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma_L^t(G) \geq \gamma_L(G)$ .*

**Observation 4.6.** *Si  $G$  admet un  $\gamma_L(G)$ -ensemble  $S$  tel que le sous graphe induit par  $S$  ne contient pas de sommets isolés, alors  $\gamma_L^t(G) = \gamma_L(G)$ .*

**Corollaire 4.3.** *Soit  $G = \mathcal{G}(K', K'')$  un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . Alors,  $\gamma_L^t(G) = \gamma_L(G)$ .*

Le Corollaire 4.3 est une conséquence immédiate du Lemme 4.2 et de l'Observation 4.6.

Le théorème suivant montre que la famille des graphes  $\mathcal{G}$  définie dans la Partie 4.2.1 est la famille de tous les graphes  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critiques.

**Théorème 4.2.** [24]  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique si et seulement si  $G$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ .

**Preuve.** D'abord, nous montrons la condition suffisante. Soit  $G$  un graphe de la famille  $\mathcal{G}$  et soit  $uv$  une arête qui n'appartient pas à  $E(G)$ . Le Théorème 4.1 implique que  $\gamma_L(G + uv) = \gamma_L(G) + 1$ . Il résulte de l'Observation 4.5 que  $\gamma_L^t(G + uv) \geq \gamma_L(G + uv) = \gamma_L(G) + 1$ . D'après le Corollaire 4.3, on a  $\gamma_L^t(G) = \gamma_L(G)$ . D'où,  $\gamma_L^t(G + uv) \geq \gamma_L^t(G) + 1$ . Ainsi, selon la Proposition 4.2, on a  $\gamma_L^t(G + uv) = \gamma_L^t(G) + 1$ . Par conséquent,  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique.

Maintenant, nous montrons la condition nécessaire. Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique et soit  $S$  un  $\gamma_L^t(G)$ -ensemble. Il est clair de voir que les ensembles  $S$  et  $V - S$  sont des cliques. Dans le cas contraire, pour toute paire de sommets non adjacents  $u$  et  $v$  dans  $S$  ou  $V - S$ , on a  $\gamma_L^t(G + uv) \leq \gamma_L^t(G)$ . Ce qui contredit le fait que  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique. Donc, le sous ensemble des sommets  $V$  peut être partitionné en deux cliques disjointes  $S$  et  $V - S$ . Soit  $v \in V - S$ . Comme  $S$  est un  $\gamma_L^t(G)$ -ensemble, clairement la première et la deuxième condition de la Définition 4.3 sont vérifiées. Supposons que la troisième condition de la Définition 4.3 n'est pas vérifiée. Alors,  $S$  est un  $EDTL$  du graphe  $G + uv$ . Ainsi,  $\gamma_L^t(G + uv) \leq \gamma_L^t(G)$ . Ce qui contredit le fait que  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique. Donc, toutes les conditions de la Définition 4.3 sont vérifiées. Par conséquent,  $G = \mathcal{G}(S, V - S)$  est un graphe de la famille  $\mathcal{G}$ . ■

### 4.3 Les Graphes $\gamma_L^-, \gamma_L^{t-}$ -Arête Ajoutée Critiques

Dans cette section nous étudions les graphes critiques dont le nombre de domination (totale) localisatrice diminue lorsqu'une arête arbitraire est ajoutée.

En premier, nous caractérisons les graphes  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critiques. Ensuite, nous caractérisons les arbres  $\gamma_L^-, \gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critiques.

### 4.3.1 Les Graphes $\gamma_L^{t-}$ -Arête Ajoutée Strictement Critiques

Les graphes considérés dans la partie suivante sont des graphes sans sommets isolés.

**Lemme 4.3.** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique et  $uv$  une arête qui n'appartient pas à  $E(G)$ . Alors, pour tout  $\gamma_L^t(G + uv)$ -ensemble  $S'$ ,  $u, v$  sont dans  $S'$  et  $u, v$  sont isolés dans  $S' \setminus \{u, v\}$ .*

**Preuve.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique et soit  $uv \notin E(G)$ . Pour un  $\gamma_L^t(G + uv)$ -ensemble  $S'$ , nous discutons les cas suivants.

**1<sup>er</sup> cas.** Les deux sommets  $u$  et  $v$  sont dans  $V - S'$ . Alors,  $S'$  est un *EDTL* du graphe  $G$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L^t(G) - 2$ , une contradiction.

**2<sup>ème</sup> cas.** Les deux sommets  $u$  et  $v$  sont dans  $S'$ , et  $u$  et  $v$  ne sont pas isolés dans  $S' \setminus \{u, v\}$ . Alors,  $S'$  est un *EDTL* du graphe  $G$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L^t(G) - 2$ , une contradiction.

**3<sup>ème</sup> cas.** Les deux sommets  $u$  et  $v$  sont dans  $S'$ , et l'un des sommets  $u$  et  $v$  n'est pas isolé dans  $S' \setminus \{u, v\}$ , disons que  $u$  n'est pas isolé dans  $S' \setminus \{u, v\}$ . Comme  $G$  est un graphe sans sommets isolés,  $v$  admet au moins un autre voisin  $w$  différent de  $u$ . Par conséquent,  $w \in S'$ . Ainsi,  $S' \cup \{w\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L^t(G) - 1$ , une contradiction.

**4<sup>ème</sup> cas.** L'un des sommets  $u$  et  $v$  est dans  $S'$ , disons que  $u \in S'$  et  $v \in V - S'$ . Puisque  $G$  est un graphe sans sommets isolés,  $v$  admet au moins un autre voisin  $w$  différent de  $u$ . Soit  $w \in S'$ . Alors,  $S' \cup \{v\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L^t(G) - 1$ , une contradiction. Donc,  $w \notin S'$ . Comme  $N_{S'}(w) \neq \emptyset$ ,  $S' \cup \{w\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L^t(G) - 1$ , une contradiction.

D'où, la propriété est vraie. ■

**Lemme 4.4.** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique, alors  $G$  ne contient aucune sous chaîne induite  $P_k$  de longueur  $k \geq 3$ .*

**Preuve.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique et soit  $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$  une sous chaîne induite dans  $G$ . Supposons que  $n \geq 3$ . Alors,  $v_1v_3 \notin E(G)$ . considérons un  $\gamma_L^t(G + v_1v_3)$ -ensemble  $S'$ . D'après le Lemme 4.3,  $v_1, v_3 \in S'$  et  $v_2 \notin S'$ . Il s'ensuit que  $S' \cup \{v_2\}$  est un *EDTL* du graphe  $G$  de cardinalité  $|S'| \leq \gamma_L^t(G) - 1$ , une contradiction. ■

Nous terminons cette partie par donner une caractérisation des graphes  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critiques.

**Théorème 4.3.**  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique si et seulement si  $G$  est l'union des chaînes  $P_2$ .

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique. Notons que  $G$  est un graphe non complet. Par conséquent, d'après le Lemme 4.4, toute composante connexe du graphe  $G$  est de diamètre 1. Donc,  $G$  est l'union de cliques  $K_n, n \geq 2$ . Cependant, il est simple de déduire qu'uniquement l'union des chaînes  $P_2$  est un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique.

Soit  $G$  l'union de  $k$  chaînes  $P_2$ , avec  $k$  est un entier positif et  $k \geq 2$ . Alors,  $\gamma_L^t(G) = 2k$ . Clairement, pour toute arête arbitraire  $e \notin E(G)$ ,  $\gamma_L^t(G + e) = 2k - 2$ . Ainsi,  $G$  est un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique. ■

### 4.3.2 Les Arbres $\gamma_L^-, \gamma_L^{t-}$ -Arête Ajoutée Critiques

La résolution du problème de la caractérisation des graphes  $\gamma_L^-, \gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critiques permet d'achever la question des graphes critiques par rapport à l'ajout d'une arête pour la domination localisatrice et totale localisatrice.

Le problème étant difficile, nous nous contentons dans notre recherche de donner la caractérisation arbres  $\gamma_L^-$  et  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critiques.

Le résultat suivant nous sera utile pour prouver le théorème de la caractérisation.

**Lemme 4.5.** Soit  $T$  un arbre  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critique et soit  $S(T)$  l'ensemble des sommets supports de  $T$ . Alors,

- toute composante connexe du sous graphe induit par  $S(T)$  est un sommet isolé ou une chaîne  $P_2$ ,
- pour toute paire de sommets supports non adjacents  $u$  et  $v$  dans  $S(T)$ , au moins l'un des sommets  $u$  et  $v$  est un sommet support faible et isolé dans le sous graphe induit par  $S(T)$ .

**Preuve.** Soient  $T$  un arbre  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critique et  $S(T)$  l'ensemble des sommets supports de  $T$ . Montrons d'abord la première propriété. Supposons que le sous graphe induit par  $S(T)$  contient une chaîne  $P_3 = uvw$ . Considérons le graphe  $T + uv$ . D'après l'Observation 4.2 point 1, il existe un  $\gamma_L^t(T + uv)$ -ensemble  $S'$  qui contient les sommets supports  $u, v$  et  $w$ . Ainsi,  $S'$  est un *EDTL* de l'arbre  $T$  de cardinalité  $\gamma_L^t(T) - 1$ , une contradiction. Par conséquent, toute composante connexe du sous graphe induit par  $S(T)$  est un sommet isolé ou une chaîne  $P_2$ .

Pour prouver la deuxième propriété, nous procédons par l'absurde. Nous discutons les cas suivants.

**1<sup>er</sup> cas.** Les deux sommets supports  $u$  et  $v$  sont des sommets supports forts. Alors,

$|L_u| \geq 2$  et  $|L_v| \geq 2$ . Ainsi, d'après l'Observation 4.2, il existe un  $\gamma_L^t(T + uv)$ -ensemble  $S'$  qui contient  $u, v$  et au moins un sommet pendant  $u' \in L_u$  et un sommet pendant  $v' \in L_v$ . Clairement,  $S'$  est un *EDTL* de l'arbre  $T$  de cardinalité  $\gamma_L^t(T) - 1$ , une contradiction.

**2<sup>ème</sup> cas.** Les deux sommets supports  $u$  et  $v$  sont des sommets supports faibles et non isolés dans  $S(T)$ . Alors, il existe un sommet  $u' \in S(T)$  adjacent à  $u$  et un sommet  $v' \in S(T)$  adjacent à  $v$ . Ainsi, d'après l'Observation 4.2 point 1, il existe un  $\gamma_L^t(T + uv)$ -ensemble  $S'$  qui contient  $u', u, v$  et  $v'$ . Clairement,  $S'$  est un *EDTL* de l'arbre  $T$  de cardinalité  $\gamma_L^t(T) - 1$ , une contradiction.

**3<sup>ème</sup> cas.** Sans perte de généralité,  $u$  est un sommet support fort et  $v$  est un sommet support faible mais non isolé dans  $S(T)$ . Alors,  $|L_u| \geq 2$  et  $v$  est adjacent à

au moins à un sommet  $v' \in S(T)$ . Ainsi, d'après l'Observation 4.2, il existe un  $\gamma_L^t(T + uv)$ -ensemble  $S'$  qui contient  $u, v, v'$  et au moins un sommet pendant  $u' \in L_u$ . Clairement,  $S'$  est un *EDTL* de l'arbre  $T$  de cardinalité  $\gamma_L^t(T) - 1$ , une contradiction.

La deuxième propriété est vraie. ■

Le théorème suivant nous donne la condition suffisante et nécessaire pour qu'un arbre soit  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique. Aussi, il nous montre que tout arbre  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique est un arbre  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique et l'inverse est vrai.

**Théorème 4.4.** [24] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 3$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a)  $T$  est un arbre  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique,
- (b)  $T$  est un arbre  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critique,
- (c)  $T$  est une étoile  $K_{1,p}$ , avec  $p \geq 3$  ou une double étoile  $S_{p,q}$ , avec  $p, q \geq 2$ .

**Preuve.** Pour prouver les équivalences entre les assertions (a), (b) et (c) il suffit de prouver les équivalences (a)  $\Leftrightarrow$  (c) et (b)  $\Leftrightarrow$  (c).

(a)  $\Rightarrow$  (c). Soit  $T$  un arbre  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique. Afin de montrer que  $T$  est une étoile  $K_{1,p}$ ,  $p \geq 3$  ou une double étoile  $S_{p,q}$ ,  $p, q \geq 2$ . Nous montrons que les sommets supports de l'arbre  $T$  sont adjacents deux à deux. Supposons qu'il existe une paire de sommets supports non adjacents  $u$  et  $v$ . D'après l'Observation 4.1 point 1, il existe un  $\gamma_L(T + uv)$ -ensemble  $S'$  qui contient les sommets supports  $u$  et  $v$ . Donc,  $S'$  est un *EDL* de l'arbre  $T$ . D'où,  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T + uv) = \gamma_L(T) - 1$ , une contradiction. Par conséquent, l'ensemble des sommets supports de  $T$  sont adjacents deux à deux. Une simple vérification nous montre que  $T$  est une étoile  $K_{1,p}$ ,  $p \geq 3$  ou une double étoile  $S_{p,q}$ ,  $p, q \geq 2$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Soit  $T$  une étoile  $K_{1,p}$ ,  $p \geq 3$  ou une double étoile  $S_{p,q}$ ,  $p, q \geq 2$ . Nous avons  $\gamma_L(K_{1,p}) = p$  et  $\gamma_L(S_{p,q}) = p + q$ . Pour une arête  $uv \notin E(T)$ , nous vérifions que



$\gamma_L(K_{1,p} + uv) = p - 1$  et  $\gamma_L(S_{p,q} + uv) = p + q - 1$ . Ainsi,  $\gamma_L(T + uv) = \gamma_L(T) - 1$ .  $T$  est un arbre  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Soit  $T$  un arbre  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée critique. Nous distinguons entre les deux sous cas suivants.

**1<sup>er</sup> cas.**  $diam(T) \leq 3$ . Dans ce cas, il est simple de vérifier qu'uniquement les étoiles

$K_{1,p}$ ,  $p \geq 3$  et les doubles étoiles  $S_{p,q}$ ,  $p, q \geq 2$  sont des arbres  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée critiques.

**2<sup>me</sup> cas.**  $diam(T) \geq 4$ . Soit  $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{d-1}, v_d$ ,  $d = diam(T)$  une chaîne dia-

métrale de l'arbre  $T$ . Puisque les sommets  $v_0$  et  $v_d$  sont des sommets pendants et les sommets  $v_1$  et  $v_{d-1}$  sont des sommets supports non adjacents. Sans perte

de généralité, d'après le Lemme 4.5, nous supposons que  $v_1$  est un sommet support faible et isolé dans le sous graphe induit par  $S(T)$ . Comme  $T$  est un arbre

$\gamma_L^t$ -arête ajoutée critique,  $\gamma_L^t(T + e) = \gamma_L^t(T) - 1$  pour toute arête  $e \notin E(T)$ .

En particulier, pour l'arête  $e = v_0v_2$ . Considérons le graphe  $T + v_0v_2$ . Nécessai-

rement, tout  $\gamma_L^t(T + v_0v_2)$ -ensemble  $S'$  contient exactement deux sommets dans

$\{v_0, v_1, v_2\}$ . Nous pouvons donc supposer que  $S'$  contient  $v_1$  et  $v_2$ . Sinon, nous

remplaçons  $v_0$  par  $v_1$  ou  $v_0$  par  $v_2$ . Il est clair de voir que  $S'$  est un *EDTL* de

l'arbre  $T$ . D'où,  $\gamma_L^t(T) \leq \gamma_L^t(T + v_0v_2) = \gamma_L^t(T) - 1$ , une contradiction. Par consé-

quent, il n'existe aucun  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée critique  $T$  de diamètre  $diam(T) \geq 4$ .

(c)  $\Rightarrow$  (b). Soit  $T$  une étoile  $K_{1,p}$ ,  $p \geq 3$  ou une double étoile  $S_{p,q}$ ,  $p, q \geq 2$ . Nous

avons  $\gamma_L^t(K_{1,p}) = p$  et  $\gamma_L^t(S_{p,q}) = p + q$ . Pour toute arête arbitraire  $uv \notin E(T)$ , nous

pouvons vérifier que  $\gamma_L^t(K_{1,p} + uv) = p - 1$  et  $\gamma_L^t(S_{p,q} + uv) = p + q - 1$ . Ainsi,

$\gamma_L^t(T + uv) = \gamma_L^t(T) - 1$ .  $T$  est un arbre  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique. ■

# Chapitre 5

## L'Indice de Criticité et la Domination (Totale) Localisatrice

Dans ce chapitre, nous définissons les indices de criticité par rapport à la suppression d'une arête et par rapport à l'ajout d'une arête pour la domination localisatrice et totale localisatrice.

Déterminer la valeur de l'indice de criticité d'un graphe de structure général peut être un problème difficile. Notre étude sera donc restreinte sur certaines classes de graphes de structure simples comme les chaînes et les cycles.

Les principaux résultats présentés dans ce chapitre sont apparus dans [23].

### 5.1 L'Indice de Criticité

Nous commençons par introduire les indices de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête pour la domination localisatrice.

**Définition 5.1.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe non vide. L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice d'une arête  $e \in E(G)$  est  $ci_L^-(e) = \gamma_L(G) - \gamma_L(G - e)$ .

**Définition 5.2.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe non complet. L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice d'une arête  $e \in E(\overline{G})$  est  $ci_L^+(e) = \gamma_L(G) - \gamma_L(G + e)$ .

**Définition 5.3.** L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice d'un graphe non vide  $G$  est  $ci_L^-(G) = \sum_{e \in E(G)} ci_L^-(e) / |E(G)|$ .

**Définition 5.4.** L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice d'un graphe non complet  $G$  est  $ci_L^+(G) = \sum_{e \in E(\overline{G})} ci_L^+(e) / |E(\overline{G})|$ .

Similairement, nous définissons les indices de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice d'une arête  $e$ . Notés respectivement  $ci_L^{t-}(e)$  et  $ci_L^{t+}(e)$ . Aussi, les indices de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice d'un graphe  $G$ . Notés respectivement  $ci_L^{t-}(G)$  et  $ci_L^{t+}(G)$ .

Il est à noter que l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice est défini pour tout graphe  $G$ . Par contre, l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination totale localisatrice n'est pas défini pour tout graphe  $G$ . En effet la domination totale localisatrice n'est pas définie pour les graphes avec sommets isolés, donc l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination totale localisatrice d'une arête pendante n'est pas défini, et d'où l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination totale localisatrice d'un graphe  $G$  de degré minimum  $\delta(G) \leq 1$  n'est pas défini.

Dans les Figures 5.1 et 5.2, nous illustrons quelques exemples simples sur le calcul des indices de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice et totale localisatrice.

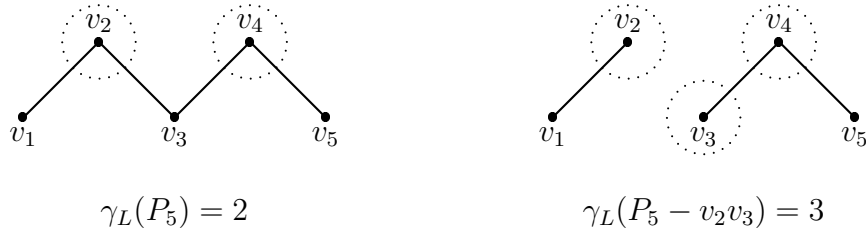


FIGURE 5.1 – Exemple sur le calcul de l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice

Pour la chaîne  $P_5 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ,  $ci_L^-(v_2v_3) = \gamma_L(P_5) - \gamma_L(P_5 - v_2v_3) = -1$ .  
L'arête  $v_2v_3$  est critique par rapport à  $\gamma_L(G)$ .

Nous vérifions que  $ci_L^-(v_i v_j) = -1$  pour toute arête  $v_i v_j \in E(P_5)$ . Donc,  $ci_L^-(P_5) = \sum_{e \in E(P_5)} ci_L^-(e) / |E(P_5)| = -4/4 = -1$ .

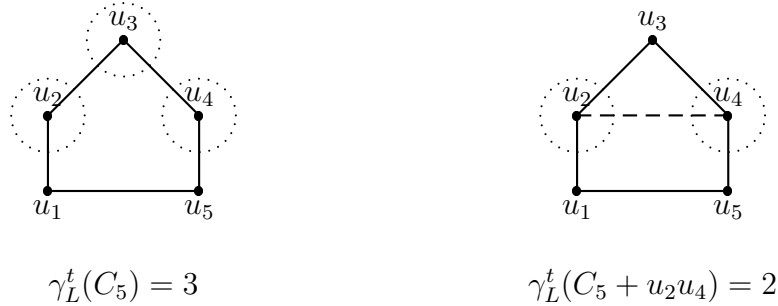


FIGURE 5.2 – Exemple sur le calcul de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice

Pour le cycle  $C_5 = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_1$ ,  $ci_L^{t+}(u_2u_4) = \gamma_L^t(C_5) - \gamma_L^t(C_5 + u_2u_4) = 1$ .  
L'arête  $u_2u_4$  est critique par rapport à  $\gamma_L^t(G)$ .

Nous vérifions que  $ci_L^{t+}(e) = 1$  pour toute arête  $e \in E(\overline{C_5})$ . Ainsi,  $ci_L^{t+}(C_5) = \sum_{e \in E(\overline{C_5})} ci_L^{t+}(e) / |E(\overline{C_5})| = 5/5 = 1$ .

Nous traduisons dans ce qui suit les valeurs des indices de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice et totale localisatrice d'un graphe  $G$  selon les concepts des graphes critiques et graphes stables.

**Remarque 5.1.** *Pour tout graphe  $G$  (sans sommets isolés, respectivement) et pour toute arête  $e \in E(G)$ ,*

1.  $ci_L^-(e) \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $ci_L^{t-}(e) \in \{-2, -1, 0, 1\}$  et  $ci_L^-(G), ci_L^{t-}(G) \in [-1, 1]$ .
2.  $G$  est  $\gamma_L$ -arête enlevée stable ( $\gamma_L^t$ -arête enlevée stable, respectivement), alors  $ci_L^-(G) = 0$  ( $ci_L^{t-}(G) = 0$ , respectivement).
3.  $G$  est  $\gamma_L^+$ -arête enlevée critique ( $\gamma_L^{t+}$ -arête enlevée critique, respectivement) si et seulement si  $ci_L^-(G) = -1$  ( $ci_L^{t-}(G) = -1$ , respectivement).
4.  $G$  est  $\gamma_L^-$ -arête enlevée critique ( $\gamma_L^{t-}$ -arête enlevée critique, respectivement) si et seulement si  $ci_L^-(G) = 1$  ( $ci_L^{t-}(G) = 1$ , respectivement).

**Remarque 5.2.** *Pour tout graphe  $G$  et pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,*

1.  $ci_L^+(e) \in \{-1, 0, 1\}$  et  $ci_L^+(G) \in [-1, 1]$ .
2.  $G$  est  $\gamma_L$ -arête ajoutée stable, alors  $ci_L^+(G) = 0$ .
3.  $G$  est  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique si et seulement si  $ci_L^+(G) = -1$ .
4.  $G$  est  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique si et seulement si  $ci_L^+(G) = 1$ .

Pour la chaîne  $P_5 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ , nous vérifions que  $ci_L^+(v_1v_4) = ci_L^+(v_2v_5) = -1$  et  $ci_L^+(v_iv_j) = 0$  pour toute arête  $v_iv_j \in E(\overline{P_5}) \setminus \{v_1v_4, v_2v_5\}$ . Ainsi,  $ci_L^+(P_5) = \sum_{e \in E(\overline{P_5})} ci_L^+(e) / |E(\overline{P_5})| = -2/6 = -1/3$ . Donc,  $P_5$  n'est pas un graphe  $\gamma_L$ -arête ajoutée stable. Aussi,  $P_5$  n'est pas un graphe  $\gamma_L^-$  ou  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critique.

Comme contre exemple de l'inverse de la Remarque 5.2 point 2. Nous considérons le graphe  $G = G_1$  joint  $G_2$ , avec  $G_1 = \mathcal{G}(K', K'')$ , où  $K' = \{v_1, v_2, v_3\}$  et  $K'' = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$  et  $G_2 = K_{1,3}$  (voir la Figure 5.3). Nous avons  $ci_L^+(G) = 0$ , or que  $G$  n'est pas un graphe  $\gamma_L$ -arête ajoutée stable.

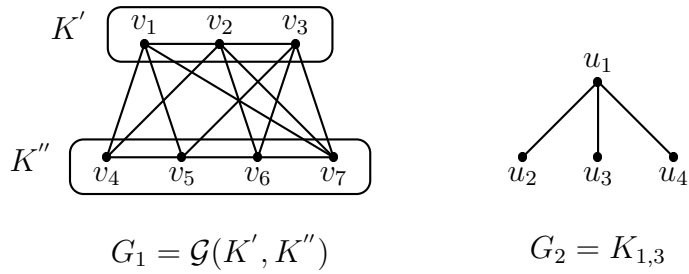


FIGURE 5.3 – Contre exemple de la Remarque 5.2 point 2

**Remarque 5.3.** *Pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés et pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,*

1.  $ci_L^{t+}(e) \in \{-1, 0, 1, 2\}$  et  $ci_L^{t+}(G) \in [-1, 2]$ .
2.  $G$  est  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée stable, alors  $ci_L^{t+}(G) = 0$ .
3.  $G$  est  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique si et seulement si  $ci_L^{t+}(G) = -1$ .
4.  $G$  est  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critique, alors  $ci_L^{t+}(G) = 1$ .
5.  $G$  est  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique si et seulement si  $ci_L^{t+}(G) = 2$ .

Pour le cycle  $C_5$ , nous vérifions que  $ci_L^{t+}(e) = 1$  pour toute arête  $e \in E(\overline{C_5})$ . Ainsi,  $ci_L^{t+}(C_5) = \sum_{e \in E(\overline{C_5})} ci_L^{t-}(e) / |E(\overline{C_5})| = 5/5 = 1$ . Donc,  $C_5$  n'est pas un graphe  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée stable. Aussi,  $C_5$  n'est pas un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique ou  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée strictement critique. Par contre,  $C_5$  est un graphe  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critique.

L'inverse de la Remarque 5.3 point 4 n'est pas vrai dans le cas général. Pour le graphe  $G = P_2 \cup P_2 \cup H_1$  (voir la Figure 5.4), nous avons  $ci_L^{t+}(G) = 1$ , or que  $G$  n'est pas un graphe  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critique.

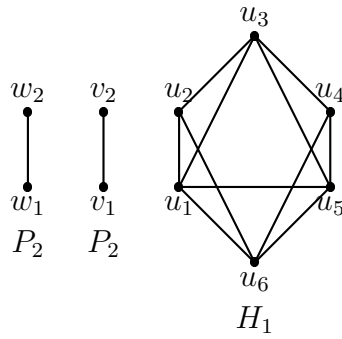


FIGURE 5.4 – Contre exemple de la Remarque 5.3 point 4

Aussi, comme contre exemple de l'inverse de la Remarque 5.3 point 2. Nous considérons le graphe  $G = G_1$  joint  $G_2$  (voir la Figure 5.3). Nous avons  $ci_L^{t+}(G) = 0$ , or que  $G$  n'est pas un graphe  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée stable.

Nous concluons cette section par deux théorèmes connus qui nous seront utiles pour prouver les principaux résultats de ce chapitre.

**Théorème 5.1.** [67] *Pour toute chaîne  $P_n, n \geq 2$  et pour tout cycle  $C_n, n \geq 3$ ,*

$$\gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n) = \lceil 2n/5 \rceil.$$

**Théorème 5.2.** [42] *Pour toute chaîne  $P_n, n \geq 2$  et pour tout cycle  $C_n, n \geq 3$ ,*

$$\gamma_L^t(P_n) = \gamma_L^t(C_n) = \begin{cases} 2\lceil n/4 \rceil - 1 & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 2\lceil n/4 \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 5.2 L'Indice de Criticité de la Suppression d'une Arête de la Domination Localisatrice et Totale Localisatrice

Nous résumons dans cette section la suite de notre étude de l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice et totale localisatrice dans

les chaînes et les cycles.

### L'Indice de Criticité de la Suppression d'une Arête de la Domination Localisatrice d'une Chaîne

Soit  $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$  une chaîne non trivial. En supprimant une arête  $v_i v_{i+1}$ , avec  $1 \leq i \leq n - 1$  de la chaîne  $P_n$ , nous obtenons deux chaînes  $P_i$  et  $P_{n-i}$ . Ainsi, du Théorème 5.1 découle l'Observation 5.1, et d'où le Corollaire 5.1.

**Observation 5.1.** *Soit  $P_n$  est une chaîne non trivial. Alors pour toute indice  $i$ , avec  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $\gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \gamma_L(P_i) + \gamma_L(P_{n-i}) = \lceil \frac{2i}{5} \rceil + \lceil \frac{2(n-i)}{5} \rceil$ .*

**Corollaire 5.1.** *Si  $P_n$  est une chaîne non trivial, alors pour toute indice  $i$ , avec  $1 \leq i \leq n - 1$ ,*

$$\gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{5} \rceil & \text{si } i \equiv 0[5] \\ \lceil \frac{2n+3}{5} \rceil & \text{si } i \equiv 1[5] \\ \lceil \frac{2n+1}{5} \rceil & \text{si } i \equiv 2[5] \\ \lceil \frac{2n+4}{5} \rceil & \text{si } i \equiv 3[5] \\ \lceil \frac{2n+2}{5} \rceil & \text{si } i \equiv 4[5]. \end{cases}$$

Le théorème suivant nous donne la valeur exacte de l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice d'une chaîne non trivial  $P_n$ .

**Théorème 5.3.** [23] *Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 2$ . Alors,*

$$ci_L^-(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{-4n}{5(n-1)} \rceil & \text{si } n \equiv 0[5] \\ \lceil \frac{-1}{5} \rceil & \text{si } n \equiv 1[5] \\ \lceil \frac{-(3n-1)}{5(n-1)} \rceil & \text{si } n \equiv 2[5] \\ 0 & \text{si } n \equiv 3[5] \\ \lceil \frac{-2(n+1)}{5(n-1)} \rceil & \text{si } n \equiv 4[5]. \end{cases}$$

**Preuve.** En utilisant le Théorème 5.1 et le Corollaire 5.1, nous calculons la valeur  $ci_L^-(e_i)$  d'une arête  $e_i = v_i v_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$  de la chaîne  $P_n$ .



Pour  $i \equiv 0[5]$ .

$$ci_L^-(v_i v_{i+1}) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil - \lceil \frac{2n}{5} \rceil = 0 \text{ pour } n \equiv 0, 1, 2, 3, 4[5].$$

Pour  $i \equiv 1[5]$ .

$$ci_L^-(v_i v_{i+1}) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil - \lceil \frac{2n+3}{5} \rceil = \begin{cases} -1 & \text{pour } n \equiv 0[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 1[5] \\ -1 & \text{pour } n \equiv 2[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 3[5] \\ -1 & \text{pour } n \equiv 4[5]. \end{cases}$$

Pour  $i \equiv 2[5]$ .

$$ci_L^-(v_i v_{i+1}) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil - \lceil \frac{2n+1}{5} \rceil = \begin{cases} -1 & \text{pour } n \equiv 0[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 1[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 2[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 3[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 4[5]. \end{cases}$$

Pour  $i \equiv 3[5]$ .

$$ci_L^-(v_i v_{i+1}) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil - \lceil \frac{2n+4}{5} \rceil = \begin{cases} -1 & \text{pour } n \equiv 0[5] \\ -1 & \text{pour } n \equiv 1[5] \\ -1 & \text{pour } n \equiv 2[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 3[5] \\ -1 & \text{pour } n \equiv 4[5]. \end{cases}$$

Pour  $i \equiv 1[5]$ .

$$ci_L^-(v_i v_{i+1}) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n - v_i v_{i+1}) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil - \lceil \frac{2n+2}{5} \rceil = \begin{cases} -1 & \text{pour } n \equiv 0[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 1[5] \\ -1 & \text{pour } n \equiv 2[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 3[5] \\ 0 & \text{pour } n \equiv 4[5]. \end{cases}$$

Par conséquent, le modèle des valeurs  $ci_L^-(e_i), 1 \leq i \leq n-1$  qui correspond au modèle des arêtes

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_1 e_2 e_3 e_4, & e_5 e_6 e_7 e_8 e_9, \dots, e_{n-5} e_{n-4} e_{n-3} e_{n-2} e_{n-1} & \text{pour } n \equiv 0[5] \\ e_1 e_2 e_3 e_4, & e_5 e_6 e_7 e_8 e_9, \dots, e_{n-6} e_{n-5} e_{n-4} e_{n-3} e_{n-2}, e_{n-1} & \text{pour } n \equiv 1[5] \\ e_1 e_2 e_3 e_4, & e_5 e_6 e_7 e_8 e_9, \dots, e_{n-7} e_{n-6} e_{n-5} e_{n-4} e_{n-3}, e_{n-2} e_{n-1} & \text{pour } n \equiv 2[5] \\ e_1 e_2 e_3 e_4, & e_5 e_6 e_7 e_8 e_9, \dots, e_{n-8} e_{n-7} e_{n-6} e_{n-5} e_{n-4}, e_{n-3} e_{n-2} e_{n-1} & \text{pour } n \equiv 3[5] \\ e_1 e_2 e_3 e_4, & e_5 e_6 e_7 e_8 e_9, \dots, e_{n-9} e_{n-8} e_{n-7} e_{n-6} e_{n-5}, e_{n-4} e_{n-3} e_{n-2} e_{n-1} & \text{pour } n \equiv 4[5]. \end{array} \right.$$

est,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -1 & -1 & -1 & -1, & 0 & -1 & -1 & -1 & -1, & \dots, & 0 & -1 & -1 & -1 & -1, & \text{pour } n \equiv 0[5] \\ 0 & 0 & -1 & 0, & 0 & 0 & 0 & -1 & 0, & \dots, & 0 & 0 & 0 & -1 & 0, & 0 & \text{pour } n \equiv 1[5] \\ -1 & 0 & -1 & -1, & 0 & -1 & 0 & -1 & -1, & \dots, & 0 & -1 & 0 & -1 & -1, & 0 & -1 & \text{pour } n \equiv 2[5] \\ 0 & 0 & 0 & 0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, & \dots, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, & 0 & 0 & 0 & \text{pour } n \equiv 3[5] \\ -1 & -0 & -1 & 0, & 0 & -1 & 0 & -1 & 0, & \dots, & 0 & -1 & 0 & -1 & 0, & 0 & -1 & 0 & -1 & \text{pour } n \equiv 4[5]. \end{array} \right.$$

Ceci implique que pour  $n \equiv 0[5]$ ,

$$ci_L^-(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} ci_L^-(e_i) / |E(P_n)| = -4 \lceil \frac{n-1}{5} \rceil / (n-1) = \frac{-4n}{5(n-1)}.$$

Pour  $n \equiv 1[5]$ ,

$$ci_L^-(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} ci_L^-(e_i) / |E(P_n)| = -\lceil \frac{n-1}{5} \rceil / (n-1) = \frac{-1}{5}.$$

Pour  $n \equiv 2[5]$ ,

$$ci_L^-(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} ci_L^-(e_i)/|E(P_n)| = -(3\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor + 1)/(n-1) = \frac{-(3n-1)}{5(n-1)}.$$

Pour  $n \equiv 3[5]$ ,

$$ci_L^-(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} ci_L^-(e_i)/|E(P_n)| = 0.$$

Pour  $n \equiv 4[5]$ ,

$$ci_L^-(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} ci_L^-(e_i)/|E(P_n)| = -2\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor/(n-1) = \frac{-2(n+1)}{5(n-1)}.$$

La preuve est complète. ■

Il s'ensuit respectivement de la Remarque 5.1 point 2 et 4, et du Théorème 5.3 les corollaires suivants.

**Corollaire 5.2.** *Une chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 2$  est  $\gamma_L$ -arête enlevée stable si et seulement si  $n \equiv 3[5]$ .*

**Corollaire 5.3.** *Aucune chaîne  $P_n$  n'est  $\gamma_L^-$ -arête enlevée critique.*

## L'Indice de Criticité de la Suppression d'une Arête de la Domination Totale Localisatrice d'une Chaîne

Comme l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination totale localisatrice n'est défini que pour les graphes  $G$  avec  $\delta(G) \geq 2$ . L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination totale localisatrice d'une chaîne  $P_n$  ne peut être calculé.

## L'Indice de Criticité de la Suppression d'une Arête de la Domination Localisatrice et Totale Localisatrice d'un Cycle

Nous terminons cette section par donner les valeurs exactes de l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la domination localisatrice et totale localisatrice d'un

cycle.

**Théorème 5.4.** [23] Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n \geq 3$ . Alors,

- $ci_L^-(C_n) = 0$ .
- $ci_L^{t-}(C_n) = 0$ .

**Preuve.** Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n \geq 3$  et soit  $e \in E(C_n)$ . D'après le Théorème 5.1,  $ci_L^-(e) = \gamma_L(C_n) - \gamma_L(P_n) = 0$ . Par conséquent,  $ci_L^-(C_n) = \sum_{e \in E(C_n)} ci_L^-(e)/|E(C_n)| = 0$ .

D'autre pat, d'après le Théorème 5.2,  $ci_L^{t-}(e) = \gamma_L^t(C_n) - \gamma_L^t(P_n) = 0$ . Il résulte que  $ci_L^{t-}(C_n) = \sum_{e \in E(C_n)} ci_L^{t-}(e)/|E(C_n)| = 0$ . ■

Il s'ensuit de la Remarque 5.1 point 2 et du Théorème 5.4 le corollaire suivant.

**Corollaire 5.4.** Tout cycle  $C_n, n \geq 3$  est  $\gamma_L$ -arête enlevée stable et  $\gamma_L^t$ -arête enlevée stable.

## 5.3 L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Localisatrice

Dans cette section nous présentons la suite de notre étude de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice.

L'observation suivante nous sera utile par la suite.

**Observation 5.2.** [6] Si  $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$  est une chaîne d'ordre  $n = 5k$  pour un entier positif  $k \geq 1$ , alors il existe un unique  $\gamma_L$ -ensemble  $S$  de  $P_n$ , avec  $S = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{v_{5i+2}, v_{5i+3}\}$ .

### 5.3.1 L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Localisatrice d'une Chaîne

Afin de déterminer la valeur exacte de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête d'une chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 3$ ,  $ci_L^+(P_n)$ , nous donnons les définitions suivantes.

Une 5-chaîne terminale dans un graphe  $G$  est une chaîne  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  tel que  $d_G(v_0) \geq 2$ ,  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = 2$  et  $d_G(v_5) = 1$ .

Soit  $C_c = u, u_1, \dots, u_{c-2}, v, u$  un cycle de longueur  $c \geq 3$  et soient  $P_{n_1}$  et  $P_{n_2}$  deux chaînes d'ordre  $n_1, n_2 \geq 1$ . Un unicycle graphe  $M(n_1, c, n_2)$  d'ordre  $n(M) = n_1 + c + n_2$  est un graphe qui peut être obtenu à partir du cycle  $C_c$ , en attachant l'extrémité  $u'$  de la chaîne  $P_{n_1}$  au sommet  $u$  et l'extrémité  $v'$  de la chaîne  $P_{n_2}$  au sommet  $v$ .

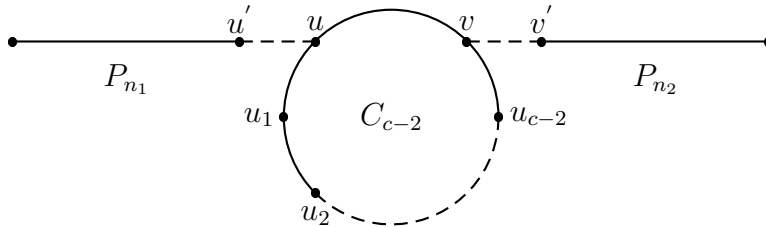


FIGURE 5.5 – Un unicycle graphe  $M = M(n_1, c, n_2)$

Nous décrivons maintenant deux simples opérations sur les graphes qui vont nous simplifier par la suite le calcul de  $ci_L^+(P_n)$ .

- **Opération Chaîne A :** Supprimer les sommets  $v_1, v_2, v_3, v_4$  et  $v_5$  d'une 5-chaîne terminale.
- **Opération Cycle A :** Supprimer les sommets  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$  d'un cycle  $C_c = u, u_1, \dots, u$  de longueur  $c \geq 8$  et ajouter l'arête  $uu_6$ .

Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 3$  et soit  $uv$  une arête arbitraire qui n'appartient pas à  $E(P_n)$ . Notons par  $H_1$  l'unicycle graphe  $P_n + uv$ , obtenu à partir de la chaîne  $P_n$  en ajoutant l'arête  $uv$ .

**Lemme 5.1.** *Si  $H_{i+1}$  est un unicycle graphe obtenu à partir d'un unicycle graphe  $H_i, i \geq 1$  par l'Opération Chaîne A, alors  $\gamma_L(H_{i+1}) = \gamma_L(H_i) - 2$ .*

**Preuve.** En premier, soit  $S'$  un  $\gamma_L(H_{i+1})$ -ensemble. Alors,  $S' \cup \{v_2, v_4\}$  est un EDL de  $H_i$ . Ainsi,  $\gamma_L(H_i) \leq \gamma_L(H_{i+1}) + 2$ . D'où,  $\gamma_L(H_{i+1}) \geq \gamma_L(H_i) - 2$ .

En second, soit  $S$  un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient le minimum de sommets en commun avec  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Par conséquent,  $v_5 \notin S$  et  $v_4 \in S$ . Aussi,  $v_3 \notin S$  et  $v_2 \in S$ . Supposons que  $v_1 \in S$ .

- Si  $v_0 \in S$ , alors  $S \setminus \{v_1\}$  est un *EDL* de  $H_i$  de cardinalité  $|S| - 1$ , une contradiction.
- Si  $v_0 \notin S$ , alors  $(S \setminus \{v_1\}) \cup \{v\}$  est un *EDL* de  $H_i$  de cardinalité  $|S|$ . Donc,  $(S \setminus \{v_1\}) \cup \{v\}$  est un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient moins de sommets en commun avec  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  que  $S$ , une contradiction.

Ainsi,  $v_1 \notin S$ . Alors,  $S \setminus \{v_2, v_4\}$  est un *EDL* de  $H_i$ . D'où,  $\gamma_L(H_{i+1}) \leq \gamma_L(H_i) - 2$ .

■

**Lemme 5.2.** *Si  $H_{i+1}$  est un unicycle graphe obtenu à partir d'un unicycle graphe  $H_i, i \geq 1$  d'ordre  $n \not\equiv 3[5]$  par l'Opération Cycle A, alors  $\gamma_L(H_{i+1}) = \gamma_L(H_i) - 2$ .*

**Preuve.** Soit  $S'$  un  $\gamma_L(H_{i+1})$ -ensemble. Si  $u$  et  $u_6$  sont tous les deux dans  $S'$  ou  $V - S'$ , alors  $S' \cup \{u_2, u_4\}$  est un *EDL* de  $H_i$ . Sans perte de généralité, soient  $u \in S'$  et  $u_6 \notin S'$ . Alors,  $S' \cup \{u_3, u_5\}$  est un *EDL* de  $H_i$  dans le cas où  $N_S(u_6) = \{u\}$ , et  $S' \cup \{u_2, u_5\}$  est un *EDL* de  $H_i$  dans le cas où  $N_S(u_6) = \{u, u_7\}$ . D'où, dans les deux cas,  $\gamma_L(H_{i+1}) \geq \gamma_L(H_i) - 2$ .

Dans ce qui suit, nous considérons un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble  $S$  qui contient le minimum de sommets dans  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ . Ainsi,  $2 \leq |S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}| \leq 3$ .

Supposons que  $|S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}| = 3$ . Sans perte de généralité, nous pouvons assumer que  $u_1, u_3$  et  $u_5$  sont dans  $S$ . Si  $u \notin S$ , alors  $(S \setminus \{u_1\}) \cup \{u\}$  est un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient moins de sommets dans  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  que  $S$ , une contradiction. Donc,  $u \in S$ . Puisque  $S \setminus \{u_1\}$  n'est pas un *EDL* de  $H_i$ , il existe un unique sommet  $w \in V - S$  tel que  $N_S(w) = \{u\}$ . Par conséquent,  $(S \setminus \{u_1\}) \cup \{w\}$  est un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient moins de sommets dans  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  que  $S$ , une contradiction.

Il s'ensuit que  $|S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}| = 2$ . Nous distinguons les cas suivants.

**1<sup>er</sup> cas.**  $S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = \{u_2, u_4\}$ . Si  $u, u_6 \in S$  ou  $u, u_6 \in V - S$ , alors  $S \setminus \{v_2, v_4\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ . Si  $u \in S$  et  $u_6 \notin S$ , alors  $u_7 \in S$ . Nous devons distinguer entre les deux sous cas suivants.

**1<sup>er</sup> sous cas.**  $d_{H_i}(u_7, v) > 1$  ou  $d_{H_i}(u_7, v) \leq 1$  et  $v \in S$ . Clairement,  $S \setminus \{v_2, v_4\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ .

**2<sup>ème</sup> sous cas.**  $d_{H_i}(u_7, v) = 1$  et  $v \notin S$ . Soit  $u'$  l'extrémité de la chaîne  $P_{n_1}$  qui est attaché à  $u$ , et soit  $v'$  l'extrémité de la chaîne  $P_{n_2}$  qui est attaché à  $v$ . Si  $u' \in S$ , alors  $(S \setminus \{u, u_2, u_4\}) \cup \{v\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ . Si  $v' \in S$ , alors  $S \setminus \{u_2, u_4\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ . Soit  $v', u' \notin S$ . On a  $n(H_i) = n_1 + 9 + n_2$ , avec  $n(H_i) \equiv 3[5]$ . Ainsi,  $n_1 + n_2 \equiv 4[5]$  et donc,  $(n_1, n_2) \equiv (k_1, k_2) \in \{(0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$ . À partir du Théorème 5.1, il est simple d'obtenir un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient  $\{u, u_2, u_4, u_7\}$  et au moins l'un des sommets  $u'$  et  $v'$ .

Maintenant, soient  $u \notin S$  et  $u_6 \in S$ . Si  $v \notin S$  ou  $d_{H_i}(u_7, v) > 1$  ou  $d_{H_i}(u_7, v) = 0$  et  $v \in S$ , alors  $S \setminus \{u_2, u_4\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ . Si  $d_{H_i}(u_7, v) = 1$  et  $v \in S$ , alors par le même raisonnement utilisé dans la preuve du 2<sup>ème</sup> sous cas précédent, il est simple d'obtenir un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient  $\{u_2, u_4, u_6, v\}$  et au moins l'un des sommets  $u'$  et  $v'$ .

D'où,  $\gamma_L(H_i) \leq \gamma_L(H_{i+1}) - 2$ .

**2<sup>ème</sup> cas.**  $S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = \{u_2, u_5\}$ . Donc,  $u$  doit être dans  $S$ , car sinon  $S$  n'est pas un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble, et  $v_6$  doit être dans  $V - S$ , car sinon nous pouvons remplacer  $u_5$  par  $u_4$ , ce qui revient au 1<sup>er</sup> cas. Par conséquent,  $u_7 \in S$ . Si  $d_{H_i}(u_7, v) > 1$  ou  $d_{H_i}(u_7, v) \leq 1$  et  $v \in S$ , alors  $S \setminus \{u_2, u_5\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ . Si  $d_{H_i}(u_7, v) = 1$  et  $v \notin S$ , alors par le même raisonnement utilisé dans la preuve du 2<sup>ème</sup> sous cas du 1<sup>er</sup> cas, il est simple d'obtenir un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient  $\{u, u_2, u_5, u_7\}$  et au moins l'un des sommets  $u'$  et  $v'$ .

D'où,  $\gamma_L(H_i) \leq \gamma_L(H_{i+1}) - 2$ .

**3<sup>ème</sup> cas.**  $S \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{v_3, v_5\}$ . Donc,  $u$  doit être dans  $S$ , car sinon

$S$  n'est pas un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble, et  $v_6$  doit être dans  $V - S$ , car sinon nous pouvons remplacer  $u_3$  par  $u_2$  et  $u_5$  par  $u_4$ , ce qui revient au 1<sup>er</sup> cas. Aussi,  $v_7$  doit être dans  $V - S$ , car sinon nous pouvons remplacer  $u_3$  par  $u_2$ , ce qui revient au 2<sup>ème</sup> cas. Par conséquent,  $S \setminus \{u_3, u_5\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$  et donc,  $\gamma_L(H_i) \leq \gamma_L(H_{i+1}) - 2$ .

**4<sup>ème</sup> cas.**  $S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = \{u_1, u_4\}$ . Donc,  $u_6$  doit être dans  $S$ , car sinon  $S$  n'est pas un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble, et  $u$  doit être dans  $V - S$ , car sinon nous pouvons remplacer  $u_1$  par  $u_2$ , ce qui revient au 1<sup>er</sup> cas. Comme  $u, u_2, u_3 \in V - S$  avec  $u_1 \in S$ , et puisque  $S$  est un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble,  $u$  est adjacent à un autre sommet  $w \in S$  différent de  $u_1$ . Si  $w = u'$ , alors  $S \setminus \{u_1, u_4\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ . Si  $w = v$ , alors dans le cas où  $d_{H_i}(u_7, v) > 1$  ou  $d_{H_i}(u_7, v) = 0$ ,  $S \setminus \{u_1, u_4\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$ , et dans le cas où  $d_{H_i}(u_7, v) = 1$ , par le même raisonnement utilisé dans la preuve du 2<sup>ème</sup> sous cas du 1<sup>er</sup> cas, il est simple d'obtenir un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble qui contient  $\{v, u_1, u_4, u_6\}$  et au moins l'un des sommets  $u'$  et  $v'$ .

D'où,  $\gamma_L(H_i) \leq \gamma_L(H_{i+1}) - 2$ .

**5<sup>ème</sup> cas.**  $S \cap \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = \{u_1, u_3\}$ . Donc,  $u_6$  doit être dans  $S$ , car sinon  $S$  n'est pas un  $\gamma_L(H_i)$ -ensemble, et  $N_S[v] \neq \emptyset$ , car sinon nous pouvons remplacer  $u_3$  par  $u_4$ , ce qui revient au 4<sup>ème</sup> cas. Ainsi,  $S \setminus \{u_1, u_3\}$  est un *EDL* de  $H_{i+1}$  et donc,  $\gamma_L(H_i) \leq \gamma_L(H_{i+1}) - 2$ .

Les autres cas peuvent se ramener aux cinq cas précédents. ■

**Lemme 5.3.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ . Alors, pour toute arête  $uv \in E(\overline{P_n})$ ,  $\gamma_L(P_n) \leq \gamma_L(P_n + uv) \leq \gamma_L(P_n) + 1$ .

**Preuve.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 3$  et soit  $uv$  une arête dans  $E(\overline{P_n})$ . Supposons que  $\gamma_L(P_n + uv) < \gamma_L(P_n)$ . D'après la Proposition 4.1,  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) - 1$ . Soit  $S$  un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_n + uv$ . Donc,  $S$  contient exactement l'un des sommets  $u$  et  $v$ , car sinon  $\gamma_L(P_n) \leq |S| = \gamma_L(P_n) - 1$ , une contradiction. Sans perte de généralité, supposons que  $u \notin S$  et  $v \in S$ .

Soient  $P_{n_1}$  et  $P_{n_2}$  les deux chaînes obtenues à partir de  $P_n + e$  en supprimant le



sommet  $u$ , avec  $v \in P_{n_2}$ . Comme  $u \notin S$ ,  $S \cap V(P_{n_1})$  est un  $EDL$  de  $P_{n_1}$  et  $S \cap V(P_{n_2})$  est un  $EDL$  de  $P_{n_2}$ . Le Théorème 5.1 implique que,

$$\begin{aligned} |S| &= |S \cap V(P_{n_1})| + |S \cap V(P_{n_2})| \\ &\geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil \end{aligned}$$

Notons que  $n = n_1 + n_2 + 1$ .

1<sup>er</sup> cas. Si  $n \equiv 0[5]$ , alors  $n = 5k$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif.  $\gamma_L(P_n) = 2k$  et  $\gamma_L(P_n + e) = 2k - 1$ . Dans ce cas, nous avons  $n_1 + n_2 \equiv 4[5]$ .

- Si  $n_1 \equiv 0[5]$  et  $n_2 \equiv 4[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 4[5]$  et  $n_2 \equiv 0[5]$ ), alors  $|S| = 2k - 1 = \frac{2n}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n}{5} - 1 \geq \frac{2n_1}{5} + \frac{2n_2+2}{5} = \frac{2n}{5}$ , une contradiction.
- Si  $n_1 \equiv 1[5]$  et  $n_2 \equiv 3[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 3[5]$  et  $n_2 \equiv 1[5]$ ), alors  $|S| = 2k - 1 = \frac{2n}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n}{5} - 1 \geq \frac{2n_1+3}{5} + \frac{2n_2+4}{5} = \frac{2n}{5} + 1$ , une contradiction.
- Si  $n_1 \equiv 2[5]$  et  $n_2 \equiv 2[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 2[5]$  et  $n_2 \equiv 2[5]$ ), alors  $|S| = 2k - 1 = \frac{2n}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n}{5} - 1 \geq \frac{2n_1+1}{5} + \frac{2n_2+1}{5} = \frac{2n}{5}$ , une contradiction.

2<sup>ème</sup> cas. Si  $n \equiv 1[5]$ , alors  $n = 5k + 1$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif.  $\gamma_L(P_n) = 2k + 1$  et  $\gamma_L(P_n + e) = 2k$ . Dans ce cas, nous avons  $n_1 + n_2 \equiv 0[5]$ .

- Si  $n_1 \equiv 0[5]$  et  $n_2 \equiv 0[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 0[5]$  et  $n_2 \equiv 0[5]$ ), alors  $|S| = 2k = \frac{2n-2}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n}{5} - 1 \geq \frac{2n_1}{5} + \frac{2n_2}{5} = \frac{2n-2}{5}$ . Cependant, d'après l'Observation 5.2,  $S \cap V(P_{n_1})$  est l'unique  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_{n_1}$  de cardinalité  $\frac{2n_1}{5}$ , et  $S \cap V(P_{n_2})$  est l'unique  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_{n_2}$  de cardinalité  $\frac{2n_2}{5}$ . Encore, d'après l'Observation 5.2,  $S$  ne contient aucune des extrémités des chaînes  $P_{n_1}$  et  $P_{n_2}$ . Il résulte que  $N_{P_n+uv}(u) \cap S = N_{P_n+uv}(w) \cap S = \{v\}$ , où  $w$  est un voisin de  $v$ . Ceci contredit le fait que  $S$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_n + uv$ .
- Si  $n_1 \equiv 1[5]$  et  $n_2 \equiv 4[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 4[5]$  et  $n_2 \equiv 1[5]$ ), alors  $|S| = 2k = \frac{2n-2}{5} \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n-2}{5} - 1 \geq \frac{2n_1+2}{5} + \frac{2n_2+3}{5} = \frac{2n+3}{5}$ , une

contradiction.

- Si  $n_1 \equiv 2[5]$  et  $n_2 \equiv 3[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 3[5]$  et  $n_2 \equiv 2[5]$ ), alors  $|S| = 2k = \frac{2n-2}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n}{5} - 1 \geq \frac{2n_1+1}{5} + \frac{2n_2+4}{5} = \frac{2n+3}{5}$ , une contradiction.

3<sup>ème</sup> cas. Si  $n \equiv 2[5]$ , alors  $n = 5k + 2$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif.  $\gamma_L(P_n) = 2k + 1$  et  $\gamma_L(P_n + e) = 2k$ . Dans ce cas, nous avons  $n_1 + n_2 \equiv 1[5]$ .

- Si  $n_1 \equiv 0[5]$  et  $n_2 \equiv 1[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 1[5]$  et  $n_2 \equiv 0[5]$ ), alors  $|S| = 2k = \frac{2n-4}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n-4}{5} - 1 \geq \frac{2n_1}{5} + \frac{2n_2+3}{5} = \frac{2n+1}{5}$ , une contradiction.
- Si  $n_1 \equiv 2[5]$  et  $n_2 \equiv 4[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 4[5]$  et  $n_2 \equiv 3[5]$ ), alors  $|S| = 2k = \frac{2n-4}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n-4}{5} - 1 \geq \frac{2n_1+1}{5} + \frac{2n_2+2}{5} = \frac{2n+1}{5} + 1$ , une contradiction.
- Si  $n_1 \equiv 3[5]$  et  $n_2 \equiv 3[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 3[5]$  et  $n_2 \equiv 3[5]$ ), alors  $|S| = 2k = \frac{2n-4}{5} \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n}{5} - 1 \geq \frac{2n_1+4}{5} + \frac{2n_2+4}{5} = \frac{2n+6}{5}$ , une contradiction.

4<sup>ème</sup> cas. Si  $n \equiv 4[5]$ , alors  $n = 5k + 4$ , où  $k \geq 0$  est un entier positif.  $\gamma_L(P_n) = 2k + 2$  et  $\gamma_L(P_n + e) = 2k + 1$ . Dans ce cas, nous avons  $n_1 + n_2 \equiv 3[5]$ .

- Si  $n_1 \equiv 0[5]$  et  $n_2 \equiv 3[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 3[5]$  et  $n_2 \equiv 0[5]$ ), alors  $|S| = 2k + 1 = \frac{2n-3}{5} - 1 \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n-3}{5} - 1 \geq \frac{2n_1}{5} + \frac{2n_2+2}{5} = \frac{2n+2}{5}$ , une contradiction.
- Si  $n_1 \equiv 1[5]$  et  $n_2 \equiv 2[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 2[5]$  et  $n_2 \equiv 1[5]$ ), alors  $|S| = 2k + 1 = \frac{2n-3}{5} \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n-3}{5} \geq \frac{2n_1+3}{5} + \frac{2n_2+1}{5} = \frac{2n+1}{5} + 2$ , une contradiction.
- Si  $n_1 \equiv 4[5]$  et  $n_2 \equiv 4[5]$  (de même si  $n_1 \equiv 4[5]$  et  $n_2 \equiv 4[5]$ ), alors  $|S| = 2k + 1 = \frac{2n-3}{5} \geq \lceil \frac{2n_1}{5} \rceil + \lceil \frac{2n_2}{5} \rceil$ . D'où,  $\frac{2n-3}{5} \geq \frac{2n_1+2}{5} + \frac{2n_2+2}{5} = \frac{2n+2}{5}$ , une contradiction.

Il s'ensuit que  $\gamma_L(P_n) \leq \gamma_L(P_n + uv) \leq \gamma_L(P_n) + 1$  pour toute arête  $uv \in E(\overline{P_n})$ .

■

**Lemme 5.4.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ . Alors, pour toute paire de sommets non adjacents  $u, v$  dans  $P_n$  de distance  $d_{P_n}(u, v) \neq 3$ ,  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n)$ .

**Preuve.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 3$  et soit  $u, v$  deux sommets non adjacents dans  $P_n$ , avec  $d_{P_n}(u, v) \neq 3$ . Si  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ , alors d'après le Lemme 5.3,  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n)$  ou  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1$ . Supposons que  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1$ . Soit  $S$  un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_n$ . Forcément, l'un des sommets  $u$  et  $v$  est dans  $S$ , car sinon  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1 \leq |S| = \gamma_L(P_n)$ , une contradiction. Sans perte de généralité, soient  $u \notin S$  et  $v \in S$ . Comme  $d_{P_n}(u, v) \neq 3$ ,  $N_{P_n+uv}(x) \cap S \neq N_{P_n+uv}(y) \cap S$  pour tout  $x, y \in V - S$ . Donc, il est clair de voir que  $S$  est un  $EDL$  de  $P_n + uv$ . D'où,  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1 \leq |S| = \gamma_L(P_n)$ , une contradiction. ■

**Lemme 5.5.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \equiv 3[5]$ . Alors, pour toute arête  $uv \in E(\overline{P_n})$ ,  $\gamma_L(P_n) - 1 \leq \gamma_L(P_n + uv) \leq \gamma_L(P_n)$ .

**Preuve.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n = 5k + 3$ , où  $k \geq 0$  est un entier positif. Supposons qu'il existe une arête  $uv \in E(\overline{P_n})$  telle que  $\gamma_L(P_n + uv) > \gamma_L(P_n)$ . D'après la Proposition 4.1,  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1$ . Soit  $S$  un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_n$ . Clairement, l'un des sommets  $u$  et  $v$  est dans  $S$ , car sinon  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1 \leq |S| = \gamma_L(P_n)$ , une contradiction. Sans perte de généralité, soient  $u \notin S$  et  $v \in S$ . Si  $d_{P_n}(u, v) \neq 3$ , alors il est clair de voir que  $S$  est un  $EDL$  de  $P_n + uv$ , car  $N_{P_n+uv}(x) \cap S \neq N_{P_n+uv}(y) \cap S$  pour tout  $x, y \in V - S$ . D'où,  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1 \leq |S| = \gamma_L(P_n)$ , une contradiction. Soit  $d_{P_n}(u, v) = 3$ , avec  $u, x, y, v$  est la sous chaîne induite de  $P_n$ . Supposons que  $S$  n'est pas un  $EDL$  de  $P_n + uv$ . Donc,  $N_{P_n+uv}(u) \cap S = N_{P_n+uv}(y) \cap S = \{x, v\}$ . Soit  $P_{n-2}^{xy}$  la chaîne obtenue à partir de  $P_n + uv$  en supprimant  $x$  et  $y$ . Soit  $S^{xy}$  un  $\gamma_L(P_{n-2}^{xy})$ -ensemble. Il est clair de voir que  $S' = S^{xy} \cup \{y\}$  est un  $EDL$  de  $P_n + uv$ . Le Théorème 5.1 implique que  $|S'| = |S^{xy}| + 1 = 2k + 2 = |S|$ . Il s'ensuit que  $\gamma_L(P_n + uv) = \gamma_L(P_n) + 1 \leq |S| = \gamma_L(P_n)$ , une contradiction. ■

À présent, nous pouvons calculer la valeur de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice d'une chaîne  $P_n, n \geq 3$ .

**Théorème 5.5.** [23] Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 3$ . Alors,

$$ci_L^+(P_n) = \begin{cases} \frac{-4n}{5(n-1)(n-2)} & \text{si } n \equiv 0[5] \\ \frac{8(n-3)(n+2)}{25(n-1)(n-2)} & \text{si } n \equiv 3[5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.** Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 3$  et soit  $e \in E(\overline{P_n})$ . Par définition,  $ci_L^+(e) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n + e)$  et  $ci_L^+(P_n) = \sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e)/|E(\overline{P_n})|$ . Nous calculons d'abord la somme  $\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e)$ . Nous devons distinguer entre les deux cas suivants.

**1<sup>er</sup> cas.**  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ . En appliquant l'Opération Chaîne A sur l'unicyclic graphe

$H_1 = P_n + e$  et sur la suite des unicyclics graphes résultants  $H_i, i \geq 2$  autant que possible. Nous obtenons à la fin un unicyclic graphe réduit  $H_{1+(k_1+k_2)} = M(n_1, c, n_2)$  d'ordre  $n(M) = n_1 + c + n_2$ , avec  $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$  et  $c \geq 3$ .

Soient  $k_1$  et  $k_2$  les nombres de groupes de cinq sommets qui ont été supprimés de l'unicyclic graphe  $P_n + e$  pour obtenir respectivement  $P_{n_1}$  et  $P_{n_2}$  de l'unicyclic graphe réduit  $M(n_1, c, n_2)$ . Alors,

$$k_1 + k_2 = (n - n(M))/5 \tag{5.1}$$

Désignons par  $\mathcal{M}$  l'ensemble des différents unicyclics graphes réduits  $M$  résultants de la suite des unicyclics graphes  $H_i, i \geq 1$ .

Il est clair de voir que le nombre d'unicyclics graphes  $P_n + e$  qui correspond à un unicyclic graphe réduit  $M \in \mathcal{M}$  est égale au nombre des solutions non négatives de l'Équation 5.1, qui est égale à

$$\mathbb{C}_{((n-n(M))/5)+1}^1 = (n - n(M) + 5)/5$$

Posons  $ci_L^+(e) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n + e) = r, r \in \{-1, 0, 1\}$ . Il résulte du Lemme 5.1 que  $\gamma_L(P_{n_1+c+n_2}) - \gamma_L(M(n_1, c, n_2)) = r$ . Notons par  $\mathcal{M}_r$  le sous ensemble de

tous les unicycles graphes réduits  $M$  qui sont dans  $\mathcal{M}$  et pour lesquels  $ci_L^t(e) = r$ .

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e) &= \sum_{M \in \mathcal{M}} (\text{nombre des différents graphes } P_n + e \text{ correspondant à } M) \\
&= (-1) \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} \frac{n - n(M) + 5}{5} + \\
&\quad (0) \sum_{M \in \mathcal{M}_0} \frac{n - n(M) + 5}{5} + \\
&\quad (1) \sum_{M \in \mathcal{M}_1} \frac{n - n(M) + 5}{5}
\end{aligned}$$

Du Lemme 5.3, nous avons  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{-1} \cup \mathcal{M}_0$ . D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e) &= \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} (\text{nombre des différents graphes } P_n + e \text{ correspondant à } M) \\
&= -1 \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} \frac{n - n(M) + 5}{5}
\end{aligned}$$

D'autre part, du Lemme 5.4, nous avons  $\mathcal{M}_{-1} \subset \{M(n_1, 4, n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ .

Par conséquent,

- Si  $n \equiv 0[5]$ , alors  $n(M) \equiv 0[5]$ . Donc,  $\mathcal{M}_{-1} \subset \{M(n_1, 4, n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } n_1 + n_2 \equiv 1[5]\}$ . Il est simple de vérifier que  $\mathcal{M}_{-1} = \{M(0, 4, 1), M(1, 4, 0)\}$ . Remarquons que  $n(M) = 5$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_{-1}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e) &= \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} \frac{n - n(M) + 5}{5} \\
&= -2 \left( \frac{n-5+5}{5} \right) = \frac{-2n}{5}
\end{aligned}$$

- Si  $n \equiv 1[5]$ , alors  $n(M) \equiv 1[5]$ . Donc,  $\mathcal{M}_{-1} \subset \{M(n_1, 4, n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } n_1 + n_2 \equiv 2[5]\}$ . Il est simple de vérifier que  $\mathcal{M}_{-1} = \emptyset$ . Ainsi,

$$\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e) = 0$$

- Si  $n \equiv 2[5]$ , alors  $n(M) \equiv 2[5]$ . Donc,  $\mathcal{M}_{-1} \subset \{M(n_1, 4, n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } n_1 +$

$n_2 \equiv 3[5]$ . Il est simple de vérifier que  $\mathcal{M}_{-1} = \emptyset$ . Ainsi,

$$\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e) = 0$$

- Si  $n \equiv 4[5]$ , alors  $n(M) \equiv 4[5]$ . Donc,  $\mathcal{M}_{-1} \subset \{M(n_1, 4, n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } n_1 + n_2 \equiv 0[5]\}$ . Il est simple de vérifier que  $\mathcal{M}_{-1} = \emptyset$ . Ainsi,

$$\sum_{e \in E(\overline{P_n})} ci_L^+(e) = 0$$

**2<sup>ème</sup> cas.**  $n \equiv 3[5]$ . Nous appliquons l'Opération Chaîne A et l'Opération Cycle A sur l'unicycle graphe  $P_n + e, e \in E(\overline{P_n})$  et sur tous les unicycles graphes résultants de  $P_n + e$  autant que possible. Nous obtenons un unicycle graphe réduit  $M = M(n_1, c, n_2)$  d'ordre  $n(M) = n_1 + c + n_2$ , avec  $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$  et  $c \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Soient  $k_1, k_2$  et  $k_3$  les nombres de groupes de cinq sommets qui ont été supprimés de l'unicycle graphe  $P_n + e$  pour obtenir respectivement  $P_{n_1}, C_c$  et  $P_{n_2}$  de l'unicycle graphe réduit  $M(n_1, c, n_2)$ . Alors,

$$k_1 + k_2 + k_3 = (n - n(M))/5 \tag{5.2}$$

Appelons par  $\mathcal{M}$  l'ensemble des différents unicycles graphes réduits  $M$  qui ont été obtenus à partir de tous les unicycles graphes  $P_n + e, e \in E(\overline{P_n})$ . Il est clair de voir que le nombre d'unicycles graphes  $P_n + e$  qui correspond à un unicycle graphe réduit  $M \in \mathcal{M}$  est égale au nombre des solutions non négatives de l'Équation 5.2, qui est égale à

$$\mathcal{C}_{((n-n(M))/5)+2}^2 = (n - n(M) + 5)(n - n(M) + 10)/50$$

Des Lemmes 5.1 et 5.2, nous avons

$$ci_L^+(e) = \gamma_L(P_n) - \gamma_L(P_n + e) = \gamma_L(P_{n_1+c+n_2}) - \gamma_L(M(n_1, c, n_2))$$

Notons par  $\mathcal{M}_r$  le sous ensemble de tous les unicycles graphes réduits  $M$  qui sont

dans  $\mathcal{M}$  et pour lesquels  $ci_L^+(e) = r$ , avec  $r \in \{-1, 0, 1\}$ .

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E(\overline{P}_n)} ci_L^+(e) &= \sum_{M \in \mathcal{M}} (\text{nombre des différents graphes } P_n + e \text{ correspondant à } M) \\
&= (-1) \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} \frac{(n - n(M) + 5)(n - n(M) + 10)}{50} + \\
(0) \sum_{M \in \mathcal{M}_0} &\frac{(n - n(M) + 5)(n - n(M) + 10)}{50} + \\
(1) \sum_{M \in \mathcal{M}_1} &\frac{(n - n(M) + 5)(n - n(M) + 10)}{50}
\end{aligned}$$

Mais du Lemme 5.5, nous avons  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$ . D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E(\overline{P}_n)} ci_L^+(e) &= \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} (\text{nombre des différents graphes } P_n + e \text{ correspondant à } M) \\
&= \sum_{M \in \mathcal{M}_{-1}} \frac{(n - n(M) + 5)(n - n(M) + 10)}{50}
\end{aligned}$$

Notons que  $\mathcal{M}_1 \subset \{M(n_1, c, n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } c \in \{3, 4, 5, 6, 7\}, \text{ avec } n_1 + c + n_2 \equiv 3[5]\}$ . Il est simple de vérifier que  $\mathcal{M}_{-1} = \{M(0, 5, 3), M(3, 5, 0), M(0, 7, 1), M(1, 7, 0), M(2, 3, 3), M(3, 3, 2), M(1, 5, 2), M(2, 5, 1)\}$ . Remarquons que  $n(M) = 8$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_1$ . Ainsi,

$$\sum_{e \in E(\overline{P}_n)} ci_L^+(e) = \sum_{M \in \mathcal{M}_1} \frac{(n - 8 + 5)(n - 8 + 10)}{50}$$

Il nous reste à diviser la valeur de la somme  $\sum_{e \in E(\overline{P}_n)} ci_L^+(e)$  par la valeur de la taille du complémentaire de la chaîne  $P_n$ ,  $|E(\overline{P}_n)| = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . La valeur de  $ci_L^+(P_n)$  est vraie dans tous les cas. ■

Nous déduisons de la Remarque 5.2 point 2 et du Théorème 5.5 le Corollaires 5.5.

**Corollaire 5.5.** *Une chaîne  $P_n, n \geq 3$  est  $\gamma_L$ -arête ajoutée stable si et seulement si  $n \equiv 1, 2, 4[5]$ .*

### 5.3.2 L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Localisatrice d'un Cycle

Dans cette partie nous donnons la valeur exacte de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice d'un cycle  $C_n$  d'ordre  $n \geq 4$ .

Nous appelons par  $G$  le graphe obtenu à partir du cycle  $C_n$  en ajoutant une arête arbitraire  $e \in E(\overline{C_n})$ .  $G$  est formé de deux cycle  $C_{n_1}$  et  $C_{n_2}$ , avec  $n = n_1 + n_2 - 2$ .

Les deux lemmes suivants nous seront nécessaires pour déterminer la valeur de  $ci_L^+(C_n)$ .

**Lemme 5.6.** *Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n \geq 4$ . Alors, pour toute arête  $e \in E(\overline{C_n})$ ,  $\gamma_L(C_n) - 1 \leq \gamma_L(C_n + e) \leq \gamma_L(C_n)$ .*

**Preuve.** De la Proposition 4.1 nous avons la première inégalité. Vérifions la deuxième inégalité. Soit  $C_n = u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$  un cycle d'ordre  $n \geq 4$ . Si  $n = 4$ , alors il est simple de vérifier que  $\gamma_L(C_n + e) \leq \gamma_L(C_n)$  pour toute arête  $e \in E(\overline{C_n})$ . Supposons que  $n \geq 5$ . Considérons une arête  $e = u_i u_j$  qui appartient à  $E(\overline{C_n})$ . Nous montrons qu'il existe un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n$  qui est un *EDL* de  $C_n + e$ . Soit  $S = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{\gamma_L(C_n)}}\}$  un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n$ . Si  $u_i, u_j \in S$  ou  $u_i, u_j \notin S$ , alors  $S$  est un *EDL* de  $C_n + e$ . Sans perte de généralité, soient  $u_i \notin S$  et  $u_j \in S$ . Supposons que  $S$  n'est pas un *EDL* de  $C_n + e$ . Alors, sans perte de généralité, nous pouvons assumer que  $N_{C_n+e}(u_i) \cap S = N_{C_n+e}(u_{j-1}) \cap S = \{u_{i+1}, u_j\}$ . D'où,  $u_{i+1} \in S$  et  $u_{i-1}, u_{j-1} \notin S$ . Ainsi, il est clair de voir que  $S' = \{u_{i_1+1}, u_{i_2+1}, \dots, u_{i_{\gamma_L(C_n)+1}}\}$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n$ , où  $u_i, u_j \notin S$ . Par conséquent, dans tous les cas, il est possible d'obtenir un  $\gamma_L$ -ensemble  $S$  de  $C_n$  tel que  $u_i, u_j \in S$  ou  $u_i, u_j \notin S$ , avec  $S$  est un *EDL* de  $C_n + e$ . Ceci implique que  $\gamma_L(C_n + e) \leq |S| = \gamma_L(C_n)$ . ■

**Lemme 5.7.** *Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ . Alors, pour toute arête  $e \in E(\overline{C_n})$ ,  $\gamma_L(C_n + e) = \gamma_L(C_n)$ .*

**Preuve.** Soit  $C_n = u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$  un cycle d'ordre  $n \geq 4$  et soit  $uv$  une arête de  $E(\overline{C_n})$ . Supposons que  $\gamma_L(C_n + uv) \neq \gamma_L(C_n)$ . Selon le Lemme 5.6,  $\gamma_L(C_n + uv) =$



$\gamma_L(C_n) - 1$ . Soit  $S$  un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n + uv$ . Comme  $S$  est de cardinalité  $|S| < \gamma_L(C_n)$ ,  $S$  doit contenir exactement l'un des sommets  $u$  et  $v$ . Supposons que  $S$  contient  $v$ . Notons par  $P_{n-1}$  la chaîne obtenue à partir du graphe  $C_n + uv$  en supprimant le sommet  $u$ . Clairement,  $S$  est un  $EDL$  de  $P_{n-1}$ . Nous avons les cas suivants.

1<sup>er</sup> cas.  $n \equiv 0[5]$ . Alors  $n = 5k$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif. Le Théorème 5.1 implique que  $\gamma_L(C_n) = 2k$  et  $\gamma_L(P_{n-1}) = \lceil \frac{2(5k-1)}{5} \rceil = 2k \leq |S| = 2k - 1$ , une contradiction.

2<sup>ème</sup> cas.  $n \equiv 1[5]$ . Alors  $n = 5k + 1$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif. Le Théorème 5.1 implique  $\gamma_L(C_n) = 2k + 1$  et  $\gamma_L(P_{n-1}) = \lceil \frac{2(5k)}{5} \rceil = 2k \leq |S| = 2k$ . Par conséquent,  $S$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_{n-1}$ . On a  $n - 1 = 5k$ . Ainsi, d'après l'Observation 5.2,  $S$  est l'unique  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_{n-1}$  et  $S$  ne contient aucune extrémités de la chaîne  $P_{n-1}$ . D'autre part, dans le graphe  $C_n + uv$ ,  $u$  est attaché aux deux extrémités de la chaîne  $P_{n-1}$  et au sommet  $v$ . Posons  $u = u_j$ . Alors,  $N_{C_n+uv}(u) \cap S = N_{C_n+uv}(u_{j+1}) \cap S = \{u_j\}$ , ce qui contredit le fait que  $S$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n + e$ .

3<sup>ème</sup> cas.  $n \equiv 2[5]$ . Alors  $n = 5k + 2$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif. Le Théorème 5.1 implique que  $\gamma_L(C_n) = 2k + 1$  et  $\gamma_L(P_{n-1}) = \lceil \frac{2(5k+1)}{5} \rceil = 2k + 1 \leq |S| = 2k$ , une contradiction.

4<sup>ème</sup> cas.  $n \equiv 4[5]$ . Alors  $n = 5k + 4$ , où  $k \geq 0$  est un entier positif. Le Théorème 5.1 implique que  $\gamma_L(C_n) = 2k + 2$  et  $\gamma_L(P_{n-1}) = \lceil \frac{2(5k+3)}{5} \rceil = 2k + 2 \leq |S| = 2k + 1$ , une contradiction.

Par conséquent,  $\gamma_L(C_n + e) = \gamma_L(C_n)$  pour toute arête  $e \in E(\overline{C_n})$ . ■

**Lemme 5.8.** *Soit  $C_n = u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$  un cycle d'ordre  $n = 5k + 3$ , où  $k \geq 1$  est un entier positif. Alors,*

$$ci_L^+(u_1 u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 5i \text{ et } j = 5i + 2, \text{ avec } 1 \leq i \leq k \\ 1 & \text{si } j = 5i + 3 \text{ et } j = 5i + 5, \text{ avec } 0 \leq i \leq k - 1 \\ 0 & \text{si } j = 5i + 4 \text{ et } j = 5i + 6, \text{ avec } 0 \leq i \leq k - 1. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit  $C_n = u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$  un cycle d'ordre  $n = 5k + 3$ , où  $k \geq 1$ . Calculons  $ci_L^+(u_1u_j)$  pour toute arête  $u_1u_j \notin E(C_n)$ . D'abord, considérons le cas où  $j = 5i$  ou  $j = 5i + 2$  et  $1 \leq i \leq k$ . Clairement, d'après le Théorème 5.1,  $S = \bigcup_{i=1}^k \{u_{5i}, u_{5i+2}\}$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_{n-1} = u_2, \dots, u_n$  de cardinalité  $|S| = 2k + 1$ . Aussi, comme  $S$  contient  $u_2$  et  $u_{5i}, u_{5i+2}$ , avec  $1 \leq i \leq k$ , il est clair de voir que  $S$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n + u_1u_j$ . Par conséquent,  $ci_L^+(u_1u_j) = \gamma_L(C_n) - \gamma_L(C_n + u_1v_j) = 2k + 2 - (2k + 1) = 1$ .

En second, considérons le cas où  $j = 5i + 3$  ou  $j = 5i + 5$  et  $0 \leq i \leq k - 1$ . Clairement, d'après le Théorème 5.1,  $S = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{u_{5i+3}, u_{5i+5}\}$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $P_{n-1} = u_2, \dots, u_n$  de cardinalité  $|S| = 2k + 1$ . Aussi, comme  $S$  contient  $u_n$  et  $u_{5i+3}, u_{5i+5}$ , avec  $0 \leq i \leq k - 1$ , il est clair de voir que  $S$  est un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n + u_1u_j$ . Par conséquent,  $ci_L^+(u_1u_j) = \gamma_L(C_n) - \gamma_L(C_n + u_1v_j) = 2k + 2 - (2k + 1) = 1$ .

En dernier, considérons le cas où  $j = 5i + 4$  ou  $j = 5i + 6$  et  $0 \leq i \leq k - 1$ . Supposons que  $ci_L^+(u_1u_j) \neq 0$ . Ceci revient à supposer que  $\gamma_L(C_n + u_1v_j) \neq \gamma_L(C_n)$ . D'après le Lemme 5.6 et le Théorème 5.1, nous avons  $\gamma_L(C_n + u_1v_j) = \gamma_L(C_n) - 1 = 2k + 1$ . Soit  $S$  un  $\gamma_L$ -ensemble de  $C_n + u_1v_j$ .  $S$  contient l'un des sommets  $u$  et  $v$ , car sinon  $S$  est un  $EDL$  de  $C_n$  de cardinalité  $|S| < \gamma_L(C_n)$ , une contradiction. Disons que  $S$  contient  $u_1$ . Supprimons le sommet  $u_1$  et l'arête  $u_1u_2$  du graphe  $C_n + u_1v_j$ . Nous obtenons les deux chaînes  $P_{j-2} = u_2, \dots, u_{j-1}$  et  $P_{n-j+1} = u_{j+1}, \dots, u_n, u_1$ .

- Si  $j = 5i + 4$ , alors d'après le Théorème 5.1 nous avons  $|S \cap \{u_2, \dots, u_{j-1}\}| \geq \lceil \frac{2(5i+1)}{5} \rceil = 2i + 1$  et  $|S \cap \{u_{j+1}, \dots, u_n\}| \geq \lceil \frac{2(5(k-i)-1)}{5} \rceil = 2k - 2i$ . Ainsi,  $|S| \geq |S \cap \{u_2, \dots, u_{j-1}\}| + |S \cap \{u_{j+1}, \dots, u_n\}| + 1 \geq 2k + 2$ , une contradiction.
- Si  $j = 5i + 6$ , alors d'après le Théorème 5.1, nous avons  $|S \cap \{u_2, \dots, u_{j-1}\}| \geq \lceil \frac{2(5i+3)}{5} \rceil = 2i + 2$  et  $|S \cap \{u_{j+1}, \dots, u_n\}| \geq \lceil \frac{2(5(k-i)-3)}{5} \rceil = 2k - 2i - 1$ . Ainsi,  $|S| \geq |S \cap \{u_2, \dots, u_{j-1}\}| + |S \cap \{u_{j+1}, \dots, u_n\}| + 1 \geq 2k + 2$ , une contradiction.

Il s'ensuit que  $\gamma_L(C_n + u_1v_j) = \gamma_L(C_n)$ . D'où,  $ci_L^+(u_1u_j) = 0$  pour  $j = 5i + 4$  et  $j = 5i + 6$ , avec  $0 \leq i \leq k - 1$ . ■

**Théorème 5.6.** [23] Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n \geq 4$ . Alors,

$$ci_L^+(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0, 1, 2, 4[5] \\ 3/5 & \text{si } n \equiv 3[5]. \end{cases}$$

**Preuve.** Soit  $C_n, n \geq 4$  un cycle. Par définition,  $ci_L^+(C_n) = \sum_{e \in E(\overline{C_n})} ci_L^+(e) / |E(\overline{C_n})|$ , où  $|E(\overline{C_n})| = \frac{n(n-3)}{2}$ .

1<sup>er</sup> cas.  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ . Du Lemme 5.7,  $ci_L^+(e) = 0$  pour toute arête  $e \in E(\overline{C_n})$ .

Ainsi,  $ci_L(C_n) = 0$ .

2<sup>ème</sup> cas.  $n \equiv 3[5]$ . Du Lemme 5.8, pour un sommet  $u_1 \in V(C_n)$ , l'ensemble des sommets  $u_j$  dans  $\{u_3, \dots, u_{n-1}\}$  pour lequel  $ci_L^+(u_1u_j) = 0$  est  $\bigcup_{i=0}^{k-1} \{u_{5i+4}, u_{5i+6}\}$ , et est de cardinalité  $2k$ . Cependant, l'ensemble des sommets  $u_j$  dans  $\{u_3, \dots, u_{n-1}\}$  pour lequel  $ci_L^+(u_1u_j) = 1$  est  $U = V(C_n) - \bigcup_{i=0}^{k-1} \{u_{5i+4}, u_{5i+6}\}$ , et est de cardinalité  $n - 3 - 2k$ . Donc,

$$\sum_{u_j \in U} ci_L^+(u_1u_j) = n - 3 - 2k$$

Par conséquent, du fait que les sommets d'un cycles sont similaires,

$$ci_L^+(C_n) = \left( \frac{n}{2}(n - 3 - 2k) \right) / \left( \frac{n(n-3)}{2} \right) = \frac{3}{5}$$

■

Comme conséquences immédiates de la Remarque 5.2 point 2 et 3, et du Théorème 5.6, nous avons respectivement les Corollaires 5.6 et 5.7.

**Corollaire 5.6.** Un cycle  $C_n, n \geq 4$  est  $\gamma_L$ -arête ajoutée stable si et seulement si  $n \equiv 0, 1, 2, 4[5]$ .

**Corollaire 5.7.** Aucun cycle  $C_n$  n'est  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critique.

## 5.4 L'Indice de Criticité de l'Ajout d'une Arête de la Domination Totale Localisatrice

Dans cette partie nous présentons deux conjectures qui nous donnent les valeurs exactes de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice d'une chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 3$  et d'un cycles  $C_n$  d'ordre  $n \geq 4$ .

Nous commençons par donner la valeur exacte de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice d'une chaîne  $P_n, n \geq 3$ .

**Conjecture 5.1.** *Soit  $P_n$  une chaîne d'ordre  $n \geq 3$ . Alors,*

$$ci_L^{t+}(P_n) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ \frac{7(n+2)}{16(n-1)} & \text{si } n \equiv 2[4] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La Conjecture 5.2 nous donne la valeur exacte de l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la domination totale localisatrice d'un cycle  $C_n$  d'ordre  $n \geq 4$ .

**Conjecture 5.2.** *Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n \geq 4$ . Alors,*

$$ci_L^{t+}(C_n) = \begin{cases} \frac{2}{(n-3)} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ \frac{3(n-2)}{4(n-3)} & \text{si } n \equiv 2[4] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les Conjectures 5.1 et 5.2 ont bien été vérifiées pour un certain ordre  $n$ .

Nous rappelons que dans le Chapitre 4, nous avons montré que la classe des graphes  $\gamma_L^+$ -arête ajoutée critiques est identique à celle des graphes  $\gamma_L^{t+}$ -arête ajoutée critiques, et nous avons prouvé que la classe des arbres  $\gamma_L^-$ -arête ajoutée critiques est aussi la classe des arbres  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critiques.

Par contre, nous concluons des Corolaires 5.7, 5.4 que la classe des graphes  $\gamma_L^-$ -arête

ajoutée critiques est différente de la classe des graphes  $\gamma_L^{t-}$ -arête ajoutée critiques. De plus, il est simple de vérifier à partir de la Conjecture 5.2 que la classe des graphes  $\gamma_L$ -arête ajoutée stables  $\gamma_L$  est distincte de celle des graphes  $\gamma_L^t$ -arête ajoutée stables.

# Conclusion

Dans notre travail, nous avons abordé quelques problèmes liés à l'étude de l'effet de la suppression et de l'ajout d'une arête sur la domination localisatrice et totale localisatrice.

En premier, nous avons étudié les graphes critiques par rapport à l'ajout d'une arête. Nous avons d'abord caractérisé la classe des graphes critiques pour lesquels le nombre de domination localisatrice augmente après l'ajout d'une arête arbitraire manquante au graphe. Nous avons prouvé que cette classe de graphes critiques est également la classe des graphes critiques pour lesquels le nombre de domination totale localisatrice augmente suite à l'ajout d'une arête arbitraire manquante au graphe. Nous avons ensuite considéré les différentes classes de graphes critiques où le nombre de domination (totale) localisatrice diminue lorsqu'une arête arbitraire manquante est ajoutée au graphe. Nous avons caractérisé les graphes critiques où le nombre de domination totale localisatrice diminue de deux. Nous avons aussi caractérisé les arbres critiques où le nombre de domination (totale) localisatrice diminue d'un.

En second, nous avons défini l'indice de criticité pour ces deux variantes de la domination. Nous avons déterminé les valeurs exactes des indices de criticité de la suppression et de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice et totale localisatrice pour les chaînes et les cycles.

L'étude des indices de criticité de l'ajout d'une arête de la domination localisatrice et totale localisatrice, nous a conduit à déduire des graphes critiques et stables dans les chaînes et les cycles, et à comparer entre les classes de ces graphes critiques et

stables dans le cas général.

Les principaux résultats que nous avons obtenus - à savoir les théorèmes qui fournissent la caractérisation des différentes classes de graphes critiques et les théorèmes qui donnent les valeurs exactes des indices de criticité - ont fait l'objet de deux publications dans une revue de renommée internationale [23, 24].

En conclusion, dans notre recherche nous avons regardé un problème classique de la théorie des graphes « les graphes critiques ». Nous avons contribué dans la résolution de quelques questions liées à ce problème pour deux variantes de la domination « la domination localisatrice et totale localisatrice ». Les techniques que nous avons utilisées pour argumenter nos résultats sont des techniques simples de la théorie des graphes et du calcul combinatoire.

Il serait intéressant de continuer à travailler sur le sujet. Regarder d'autres classes de graphes critiques ou stables qui n'ont pas été traitées dans la littérature. Notamment, caractériser les graphes critiques où le nombre de domination (totale) localisatrice diminue suite à la suppression d'une arête, aussi suite à l'ajout d'une arête. Cela permet de présenter une étude complète des graphes critiques par rapport à la suppression d'une arête et par rapport à l'ajout d'une arête pour la domination localisatrice et totale localisatrice.

# Bibliographie

- [1] D. Auger, I. Charon, O. Hudry and A. Lebestin, Watching systems in graphs-graphs : an extension of identifying codes, *Discrete Applied Mathematics*, 161 (2013) 1674-1685.
- [2] W.W. Rouse Ball, Mathematical recreation and problems of past and present times, MacMillan, London, 1892.
- [3] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications. Methuen, Londonn, 1962.
- [4] C. Berge, Graphes et Hypergraphes, Paris Dunod, 1970.
- [5] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C.L. Suffel, Domination alteration sets in graphs, *Discrete Mathematics*, 47 (1983) 153-161.
- [6] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounes and F. Maffray, Characterizations of trees with unique locating dominating sets, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 76 (2011) 225-232.
- [7] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 39 (2007) 219-232.
- [8] M. Blidia and W. Dali, A Characterizations of Locating Total Domination Edge Critical Graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 31 (2011) 197-202.
- [9] M. Blidia and W. Dali, A Characterizations of locating-domination edge critical graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 44 (2009) 297-300.
- [10] M. Blidia, O. Favaron and R. Lounes, Locating-domination, 2-domination and independence in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 42 (2008) 309-316.



- [11] M. Blidia, M. Chellali, S. Khelifi and F. Mafray, Double domination edge removal critical graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 48 (2010) 285-299.
- [12] A. Bouchou and M. Blidia, Criticality indices of Roman domination of paths and cycles, *Australasian Journal of Combinatorics*, 56 (2013) 103-112.
- [13] A. Bouchou and M. Blidia, Criticality indices of 2-rainbow domination of paths and cycles, *Opuscula Mathematica*, 36 (5) (2016), 563-574.
- [14] R.C. Brigham, P. Z. Chinn and R.D. Dutton, Vertex domination-critical graphs, *Networks* 18 (1988), 173-179.
- [15] T. Burtona and D.P. Sumner, Domination dot-critical graphs, *Discrete Mathematics*, 306 (2006) 11-18.
- [16] M. Chellali, On locating and differentiating-total domination in trees, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 28 (2008) 383-392.
- [17] M. Chellali, M. Mimouni and P. J. Slater, On locating-domination in graphs,, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 30 (2009) 223-235.
- [18] M. Chellali and N.J. Rad, Locating-total domination critical graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 45 (2009) 227-234.
- [19] X.G. Chen, M.Y. Sohn, Bounds on the locating-total domination number of a tree, *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 769-773.
- [20] E.J. Cockayne, R.M. Dawes, and S.T. Hedetniemi, Total domination in graphs, *Networks*, 10 (1980) 211-219.
- [21] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination, *Networks*, 7 (1977) 247-261.
- [22] W. Dali, Nombres de Bondage et Graphes Critiques par rapport aux Nombres de Domination (Totale) Localisatrice, *Thèse de Magister, U.S.T.H.B*, 2009.
- [23] W. Dali and M. Blidia, Criticality indices of locating-domination of paths and cycles, *Utilitas Mathematica*, 94 (2014) 303-313.

- [24] W. Dali and M. Blidia, On locating and locating-total domination edge addition critical graphs, *Utilitas Mathematica*, 94 (2014) 199-219.
- [25] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes, M.A. Henning, Edge lifting and total domination in graphs, *J. Comb. Optim.* , 25 (2013) 47-59.
- [26] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes, M.A. Henning, Total domination critical and stable upon edge addition, *Discrete Applied Mathematics*, 310 (2010) 3446-3454.
- [27] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes, M.A. Henning, Total domination critical and stable upon edge removal, *Discrete Applied Mathematics*, 158 (2010) 1587-1592.
- [28] C.F. De Jaenisch, Trait des applications de l'analyse mathématique au jeu des Echecs, Petrograd, 1862.
- [29] M. Edwards, R.G. Gibson, M.A. Henning and T.W. Haynes, Diameter of paired domination edge-critical graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 40 (2008) 279-391.
- [30] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts, The Bondage Number of Graph, *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 47-57.
- [31] M. Frick, G.H. Frickey, C.M. Mynhardt and R.D. Skaggs, Critical Graphs With Respect to Vertex Identification, *Utilitas Mathematica*, 76 (2008).
- [32] F. Foucaud, Decision and approximation complexity for identifying codes and locating-dominating sets in restricted graph classes, *Journal of Discrete Algorithms*, 31 (2015) 48-68.
- [33] F. Foucaud and M.A. Henning, Locating-Total Dominating Sets in Twin-Free Graphs : a Conjecture, *The electronic journal of combinatorics*, 23 (3) (2016).
- [34] M. Furuya, The connectivity of domination dot-critical graphs with no critical vertices, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 34 (2014) 683-690.
- [35] P.J.P Globler and M. Mynhardt, Domination parametrers and edge-removal critical graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 231 (2001) 221-239.

- [36] J.H. Hatting, E.J. Joubert, and L.C. Van der Merwe, The Criticality Index of Total Domination of path, *Utilitas Mathematica*, 7 (2009).
- [37] J.H. Hatting and A.R. Plummer, Restrained bondage in graphs, *Discrete Mathematics*, 2007.
- [38] B.L. Hartnell and D.F. Rall, A Characterizations of trees in which no edge is essential to the domination number, *Ars. Combin.*, 33 (1992) 65-72.
- [39] B.L. Hartnell and D.F. Rall, Bounds on the bondage number of a graph, *Discrete Mathematics*, 128 (1994) 173-177.
- [40] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [41] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, Domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [42] T.W. Haynes, M.A. Henning and J. Howard, Locating and total locating sets in trees, *Discrete Applied Mathematics*, 154 (2006) 1293-1300.
- [43] M.A. Henning, A survey of selected recent results on total domination in graphs, *Discrete Mathematics*, 309 (2009) 32-63.
- [44] M.A. Henning and N.J. Rad, Locating-total domination in graphs, *Discrete Mathematics*, 160 (2012) 1986-1993.
- [45] M.A. Henning and N.J. Rad, On total domination vertex critical graphs of high connectivity, *Discrete Applied Mathematics*, 157 (2009) 1969-1973.
- [46] M.A. Henning and L.C. Van der Merwe, Proprieties of total domination edge-critical graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 158 (2010) 147-153.
- [47] M.A. Henning and L.C. Van der Merwe, The maximum diameter of total domination edge-critical graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 312 (2012) 397-404.
- [48] M.A. Henning and T.W. Haynes, The maximum diameter of paired-domination vertex critical graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 58 (4) (2008) 887-897.

- [49] I. Honkola and T. Laihonen, On locating-locating sets infinite grids, *European Journal of Combinatorics*, 27 (2006) 218-227.
- [50] J. Huang and J.M. Xu, Domination and Total Domination Contraction Numbers of Graphs, *Ars Combinatoria*, 94 (2010).
- [51] T.R. Jonsen and B. Toft, Graph Coloring Problems (Chapter 5), Wiley-Intersciences, Series in Discrete Mathematics and Optimisation, 1994.
- [52] S. Khelifi and M. Chellali, Double domination critical and stable graphs upon vertex removal, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 32 (2012) 643-657.
- [53] J. Kok and C.M. Mynhardt, Reinforcement in Graphs, *Congr. Numer.*, 29 (1990) 225-231.
- [54] V.R. Kulli and D.K. Patwari, The total bondage number of a graph *Advances in Graph Theory, Vishwa, Gulbagra* (1991) 227-235.
- [55] M. Karpovsky, K. Chakrabarty and L. Levitin, On a New Class of Codes for Identifying Vertices in Graphs, *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(2) (1998) 599-611.
- [56] A. Lobstein, <http://www.infres.enst.fr/~lobstein/bibLOCDOMetID.html>.
- [57] J. McCoy and M.A. Henning, Locating and paired-dominating sets in graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 157 (2009) 3268-3280.
- [58] O. Ore, Theory of graphs, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1962.
- [59] J. Raczek, Paired bondage number, *Discrete Mathematics*, 308 (2008) 5570-5575.
- [60] N.J. Rad, A note on  $\gamma_t^L(G)$ -vertex critical graphs, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 12 (2009) 319-322.
- [61] N.J. Rad, Critical concept for 2-rainbow domination in graphs, *Australasian journal of combinatorics*, 51 (2011) 49-60.
- [62] N.J. Rad, Domination critical graphs upon edge subdivision, *Domination critical graphs upon edge subdivision*, 87 (2013).

- [63] N.J. Rad and L. Volkmann, Roman Bondage in Graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 31 (4) (2011) 763-773.
- [64] N.J. Rad and L. Volkmann, Roman Domination Dot-critical graphs, *Graphs and Combinatorics*, 29(3)(2013) 527-533.
- [65] S.J. Seo and P.J. Slater, Open neighborhood locating-dominating sets, *Australasian Journal of Combinatorics*, 46 (2010) 109-119.
- [66] J.L. Sewell and P.J. Slater, A sharp lower bound for locating-dominating sets in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 60(2) (2014) 136-149.
- [67] P.J. Slater, Dominating and Reference Sets in Graphs, *J. Mathematical and Physical Sciences*, 22 (1988) 445-455.
- [68] P.J. Slater, Domination and Location in Acyclic Graphs, *Networks*, 17 (1987) 55-64.
- [69] P.J. Slater, Leves of trees, *Proc. of the Sixth S.E. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilitas Mach.*, (1975) 549-559.
- [70] D.P. Sumner and P. Blich, Domination Critical Graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, 34 (1983) 65-76.
- [71] U. Teschner, A conterexample to a conjecture on the bondage number of a graph, *Discrete Mathematics*, 122 (1993) 393-395.
- [72] U. Teschner, A new upper bound for the bondage number of a graphs with small domination number, *Australasian Journal of Combinatorics*, 12 (1995) 27-35.
- [73] U. Teschner, The bondage number of a graph  $G$  can be much greater that  $\Delta(G)$ , *Ars. Combin.*, 43 (1996).
- [74] L.C. Van der Merwe, C.M. Mynhardt, and T.W. Haynes, Criticality Index of Total Domination, *Congressus Numerantium*, 131 (1998) 67-73.
- [75] S. Velammal, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis, (Manonmaniam Sundaranar University) 1997.

- [76] H.B. Walikar and B.D. Acharya, Domination Critical Graphs, *Nat. Acad. Sci. Lett.*, 2 (1979) 70-72.
- [77] J.M. Xu, A Survey with Some Comments, *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Combinatorics*, (2013).
- [78] A.M. Yaglom and I.M. Yaglom, Challenging mathematical problems with elementary solution, In volume 1, *Combinatorial analyse and probability theory*, San Fransisco, 1964, Holden-Day.