REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahleb - Blida 1

Faculté des Sciences

Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Mémoire de fin d'étude

présentée pour obtenir le diplôme de

Master

Filière : Physique Spécialité : Physique théorique

Présenté par

KHALDI Ibrahim et BERKANE Moussa

Thème

Systèmes quantiques non-Hermitiens

Soutenue le : 27/10/2019

Devant le Jury :

Président :	N. Bouayed	MCA.	Univ. Blida 1
Rapporteur :	B. Khantoul	MCB.	CU. Tipaza
Examinateurs :	S.A. Yahaioui.	MCB.	Univ. Blida 1
	S. Saidani	MAA.	Univ. Blida 1

Remerciements

Nous tenons à exprimer mes plus vifs remerciements à M. B Khantoul, Maitre de conférences B au centre universitaire de Tipaza, qui fut pour nous un encadreur attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Ses conseils et encouragements resteront un moteur pour notre travail.

Nous tenons aussi à remercier vivement les membres du jury Messieurs : N. Bouayed, Maitre de conférences A, à l'université de Blida 1, S.A. Yahiaoui, Maitre de conférences B, à l'université de Blida 1, et Melle S. Saidani, Maitre assistant A, à l'université de Blida 1, d'avoir accepté de juger ce travail

Moussa et Ibrahim

Table des matières

Introduction générale

La théorie quantique permet de décrire le comportement de la matière aux très petites échelles. Cette théorie n'a pour l'heure jamais été mise en défaut et l'un des axiomes principaux de la mécanique quantique impose aux observables physiques d'être hermitiques. Cela principalement dans le but de leur assurer des valeurs propres réelles.

La découverte de la $\mathcal{PT}$-symétrie en 1998 par Bender et ses collaborateurs [1] , ouvre la porte largement sur une large classe d'Hamiltoniens qui se révèle avoir des valeurs propres réelles en étant non hermitiens. Ils ont montré qu'un Hamiltonien invariant par réflexion de l'espace et par renversement du temps possède un spectre réel si la $\mathcal{PT}$-symétrie n'est pas brisée. Cette mécanique quantique non hermitienne est considérée par beaucoup de physiciens comme l'extension de la mécanique quantique ordinaire. On parle alors de la mécanique quantique $\mathcal{PT}$ -symétrique.

La tentative de construire une théorie quantique valable à partir de tels Hamiltoniens se heurte à la non positivité du produit scalaire $\mathcal{PT}$ -symétrique. Cependant, il a été démontré que pour un système dont la symétrie $\mathcal{PT}$ est non brisée, il suffit de lui correspondre une symétrie du Hamiltonien décrite par l'opérateur $\mathcal{C}$, analogue à la conjugaison de charge dans la théorie quantique des champs. Celui-ci permet de construire, via le produit $\mathcal{CPT}$, un nouveau produit scalaire défini positif pour lequel les normes des états sont positives et l'évolution temporelle est unitaire

En 2002, on a assisté à l'extension de la $\mathcal{PT}$ -symétrie vers un nouveau concept, encore plus abstrait, appelé la pseudo-hermiticité, réalisé dans les travaux de Mostafazadeh [2, 3, 4] . Ce dernier a démontré que la pseudo-hermiticité est plus large que la $\mathcal{PT}$ -symétrie et contient les fondements élémentaires de la mécanique quantique "usuelle".

Le concept de la pseudo-Herméticité a été introduit dans les années 1940 par Dirac et Pauli

[5, 6, 7, 8, 9] , et discuté plus tard par Lee, Wick et Sudarshan [10, 11, 12, 13] , qui essayaient de résoudre les problèmes qui se posent dans la quantification de l'électrodynamique et dans d'autres théories quantiques des champs où les états de norme négative apparaissent comme une conséquence de la quantification canonique des champs. Une autre notion liée à la pseudo-hermiticité est la quasi-hermiticité, qui a été fortement discutée en 1992 par Scholtz et ses collaborateurs [14]. Ils ont montré comment construire une transformation similaire des opérateurs Hermitiens vers les opérateurs quasi-Hermitiens correspondants, sans oublier Dieudonné qui a démontré que le spèctre des Hamiltoniens Quasi-hermitien n'est pas obligatoirement réel [15].

Dans le premier chapitre de ce travail, on va présenter premièrement les symétries discrètes en mécanique quantique, plus précisément, on va étudier trois symétries très importantes en physique des particules, soient les symétries de parité $\mathcal{P}$, de renversement du temps $\mathcal{T}$ et de conjugaison de charge $\mathcal{C}$, ainsi leurs combinaisons qui sont d'un intérêt fondamental, la symétrie $\mathcal{PT}$.

On va d'abord introduire les notions mathématiques nécessaires au traitement des symétries étudiées.

Le deuxième chapitre est consacré à la présention de la nouvelle théorie quantique $\mathcal{PT}-$symétrique, est de remplacer l'herméticité par la symétrie de réflexion d'espace-temps (symétrie $\mathcal{PT}$) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique.

Dans le troisième chapitre, on aborde les définitions et les propriétés de la pseudo-hermiticité et la quasi-hermiticité avec leur comparaison accompagnees par un exemple qui traite un Hamiltonien non hermitien. On discutera aussi la meilleure condition mathématique qui assure la réalité des valeurs propres et l'unitarité d'évolution du système étudié.

Chapitre 1

Symétries discrètes en mécanique quantique

1.1 Introduction

La symétrie est une transformation laissant invariable des objet (sens géométrique ou lois), qui jouent un rôle important, non seulement dans la résolution de nombreuse problèmes en physique, mais aussi elle est la base des théories des intéractions fondamentales.

Il existe deux grandes classe de symétrie les transformations continues (rotation d'une sphère par exemple) et les transformation discrètes (symétrie du cube).

Dans ce travail, on va traiter la deuxième classe de symétrie en mécanique quantique pour laquelle il ne peut y avoir que des valeurs discrètes, plus précisement, on va étudier trois symétries très importantes : la parité, le renversement du temps et de conjugaison de charge.

On utilise les références suivantes [16, 17, 18, 19, 20] pour présenter les bases de la mécanique quantique nécessaires à la compréhension de ce travail.

1.2 Outils mathématique

1.2.1 L'espace de Hilbert

Un espace vectoriel normé $(\mathcal{H}, \|,\|)$ sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) est dit de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet. Nous nous plaçons dans tout ce qui suit, dans le cas d'un espace vectoriel complexe, tous les résultats étant immédiatement adaptables au cas réel. Pour $\boldsymbol{z} = x + iy \in \mathbb{C}\,;(x, y \in \mathbb{R})$, nous notons $\boldsymbol{z}^*$ son conjugué.

Nous rappelons que le produit scalaire $\langle , \rangle$ est défini positif, c'est-à-dire qu'il possède les propriétés suivantes pour tous $f, g, h \in \mathcal{H}$ et tout $a \in \mathbb{C}$

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle^* , \tag{1.1}$$

$$\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle , \tag{1.2}$$

$$\langle af, g\rangle = \langle g, af\rangle^* = a^* \langle g, f\rangle^* , \tag{1.3}$$

$$\langle f, f\rangle \geq 0;\ \forall f{\in}\mathcal{H}, \tag{1.4}$$

$$\langle f, f\rangle = 0 \Longrightarrow f = 0. \tag{1.5}$$

Opérateurs adjoints

Si $\hat{O}$ est un opérateur linéaire, l'opérateur adjoint de $\hat{O}$ est un opérateur linéaire, noté $\hat{O}^\dagger$, vérifiant la relation suivante

$$\left\langle \hat{O}\ \psi \mid \phi \right\rangle = \left\langle \psi \mid \hat{O}^\dagger\ \phi \right\rangle \forall \left|\phi\right\rangle ,\ \left\langle\psi\right| {\in}\mathcal{H}, \tag{1.6}$$

La relation ci-dessus définit bien l'opérateur adjoint de façon unique

$$\left(\hat{O}^\dagger\right)^\dagger = \hat{O}, \tag{1.7}$$

on a

$$\left(\hat{O}_1\hat{O}_2\right)^\dagger = \hat{O}_2^+\hat{O}_1^\dagger, \tag{1.8}$$

$$\left(\hat{O}_1+\hat{O}_2\right)^{\dagger}=\hat{O}_1^{\dagger}+\hat{O}_2^{\dagger}, \tag{1.9}$$

$$\left(\hat{O}^{\dagger}\right)^{n}=\left(\hat{O}^{n}\right)^{\dagger} \text{pour } n\in\mathbb{N}, \tag{1.10}$$

Notation de Dirac :

Pour un opérateur linéaire $\hat{O}$, on note que

$$\left\langle \psi \mid \hat{O} \mid \phi \right\rangle = \left\langle\ \hat{O}^{\dagger}\ \psi \mid \phi \right\rangle = \left\langle \psi \mid \hat{O}\ \phi \right\rangle. \tag{1.11}$$

Les opérateurs hermitiens (ou auto adjoints)

L'opérateur linéaire $\hat{O}$ est auto-adjoint ou hermétique si $\hat{O}=\hat{O}^{\dagger}$ c'est à dire si

$$\left\langle\ \hat{O}\ \psi \mid \phi \right\rangle = \left\langle\ \psi \mid \hat{O}\ \phi \right\rangle \forall \left|\phi\right\rangle,\ \left\langle\psi\right| \in \mathcal{H}. \tag{1.12}$$

Base orthonormée

Une suite de vecteurs $|V_i\rangle\in\mathcal{H}$, $i=1,2,...$ forme une base orthonormée de l'espace $\mathcal{H}$ si

$$\langle V_i \mid V_j\rangle=\delta_{ij}, \delta_{ij}=1 \text{ si } i=j\ ,\ \delta_{ij}=0 \text{ si } i\neq j \tag{1.13}$$

où tout vecteur $|\phi\rangle\in\mathcal{H}$ se décompose sous la forme :

$$|\phi\rangle=\sum_i \phi_i \left|V_i\right\rangle, \tag{1.14}$$

avec $\phi_i\in\mathbb{C}$ est une composante de cette base.

Si la suite de vecteur est infinie, on dit que l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, sinon, on dit que $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Propriétés et remarques

- L'espace des fonctions d'onde est de dimension infinie $\mathcal{H}=\mathbb{L}\in(\mathbb{R})$.

- Les composantes $\phi_i\in\mathbb{C}$ du vecteur $|\phi\rangle$ dans la base $|V_i\rangle$ sont obtenues par le produit scalaire $\phi_i=\langle V_i\mid\phi\rangle$

En effet :

$$\langle V_i \mid \phi\rangle = \sum_j \phi_j \langle V_i \mid V_j\rangle = \sum_j \phi_j \delta_{ij=}\phi_i, \tag{1.15}$$

on a alors

$$\langle \phi \mid \phi\rangle = \sum_i |\phi_i|^2 . \tag{1.16}$$

Relation de fermeture

D'après les équations (1.14) et (1.15) on a :

$$|\phi\rangle = \sum_i \left(\langle V_i \mid \phi\rangle\right) |V_i\rangle , \tag{1.17}$$

que l'on écrit de la façon suivante :

$$|\phi\rangle = \left(\sum_i |V_i\rangle \langle V_i|\right) |\phi\rangle , \tag{1.18}$$

d'où

$$\left(\sum_i |V_i\rangle \langle V_i|\right) = I. \tag{1.19}$$

Cette expression qui donnant l'opérateur identité à partir des vecteurs d'une base orthonormée, s'appelle la relation de fermeture.

Soit $\mathcal{U}$ un opérateur de l'espace de Hilbert correspondant à une transformation de symétrie, ψ et ψ' sont les fonctions d'onde décrivant le système avant et après la transformation tel que

$$\psi' = \mathcal{U}\psi, \tag{1.20}$$

avec $\mathcal{U}^+$ est l'opérateur adjoin de $\mathcal{U}$.

Si la valeur moyenne d'un operateur A est invariante par rapport à cette transformation

$$\langle \psi' |A| \varphi'\rangle = \left\langle \psi \left|\mathcal{U}^\dagger A \mathcal{U}\right| \varphi\right\rangle = \langle \psi |A| \varphi\rangle , \tag{1.21}$$

alors A commute avec $\mathcal{U}$

$$[A, \mathcal{U}] = 0, \tag{1.22}$$

et l'opérateur $\mathcal{U}$ est linéaire et unitaire

$$\mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{U}^{-1} \quad \text{et } \mathcal{U}\left(\lambda\psi\right) = \lambda\mathcal{U}\left(\psi\right), \tag{1.23}$$

ou antiunitaire (anti-linéaire et unitaire)

$$\mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{U}^{-1} \text{ et } \mathcal{U}\left(\lambda\psi\right) = \lambda^{*}\mathcal{U}\left(\psi\right). \tag{1.24}$$

Si la dynamique du système décrite par l'Hamiltonien H, est invariante sous l'action de cette transformation alors H commute avec $\mathcal{U}$

$$[H,\mathcal{U}] = 0, \tag{1.25}$$

et comme $\mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{U}^{-1}$ alors

$$H = \mathcal{U}H\mathcal{U}^{\dagger}. \tag{1.26}$$

1.2.2 Postulats de la mécanique quantique

c'est connu qu'il n'est pas possible de déterminer exactement la trajectoire des particules. On peut cependant accéder à la probabilité de trouver le système en un point donné de l'espace. Cet aspect probabiliste de la théorie quantique conduit à une formulation mathématique totalement différente de celle de la mécanique déterministe de Newton.

Postulat 1 (Définition de l'état quantique) :

Si un système quantique est défini, à l'instant t_0 fixé, par la fonction complexe $\psi(t_0) \in \mathcal{H}$ (appelée fonction d'onde) ,alors l'état du système, à l'instant t, est complètement contenue dans le vecteur normalisable $\psi(t) \in \mathcal{H}$.

Postulat 2 (Opérateur représentant une grandeur physique) :

Á toute grandeur physique mesurable A, on fait correspondre un opérateur hermitien $\hat{A}$ qui agit sur les fonctions propres $\psi\left(q,t\right)$. On dit que cet opérateur est une observable physique.

Postulat 3 (la mésure) :

Les valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}$, correspondant à une grandeur physique A, sont les seuls valeurs mesurables, c'est-à-dire la mésure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}$.

Postulat 4 (Équation de Schrödinger) :

L'opérateur Hamiltonien H d'un système est celui associé à l'énergie totale de ce système.

L'évolution dans le temps de l'amplitude $\psi(q,t)$ de probabilité est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = H\psi(q,t). \tag{1.27}$$

Postulat 5 (Probabilité d'obtention d'une valeur propre non dégénérées lors d'une mesure) :

Soit A une grandeur physique d'un système quantique, et $\hat{A}$ l'opérateur correspondant dont le spectre ne comporte que des valeurs propres non dégénérées α_n associées aux fonctions propres normées $\psi_n(q)$. Lorsqu'on mesure A l'état quelconque $\psi(q,t)$ de norme unité, la probabilité $P(\alpha_n)$ d'obtenir comme résultat de mesure la valeur n est donnée par :

$$P(\alpha_n) = |\langle\psi_n(q) \mid \psi(q,t)\rangle|^2. \tag{1.28}$$

1.3 Opérateur de parité

La parité ou symétrie $\mathcal{P}$ physiquement est équivalente à une symétrie de renversement spaciale par rapport à l'origine.

Mathématiquement la symétrie $\mathcal{P}$ correspond à remplacer toutes les coordonnées spaciales par leurs opposées

$$x \rightarrow x' = -x,$$

et puisque l'opérateur de quantité de mouvement dans l'espace de configuration a une forme comme suit

$$\widehat{p} = \frac{\hbar}{i}\hat{\nabla}_x,$$

ceci implique que l'impulsion se transforme de la manière suivante

$$p \rightarrow p' = -p,$$

et les fonctions d'onde se transforment comme suit

$$\mathcal{P}\psi(r,t) = \psi(-r,t). \tag{1.29}$$

1.3.1 Propriété de l'opérateur parité

Si on applique l'opérateur de parité deux fois successive cela va inverser deux fois l'espace et par conséquent on revient à la situation intiale

$$\mathcal{P}\mathcal{P}|r\rangle = \mathcal{P}|-r\rangle = |r\rangle, \tag{1.30}$$

donc

$$\mathcal{P}^2 = 1 \Longrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}, \tag{1.31}$$

donc, l'opérateur de parité est égale à son inverse.

Pour la deuxième propriété on calcule la quantité suivante

$$\langle\varphi(r)|\,\mathcal{P}^{\dagger}\mathcal{P}\,|\psi(r)\rangle = \langle\varphi(-r)\mid\psi(-r)\rangle,$$

l'étap suivant se fait par la définition d' un produit scalaire en mécanique quantique (espace d'Hilbert)

$$\langle\varphi(-r)\mid\psi(-r)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\varphi^*(-r)\,\psi(-r),$$

on fait le changement de variable $r' = -r$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\varphi^*(-r)\,\psi(-r) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r'\varphi^*(r')\,\psi(r'),$$

r'est une variable muette

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3r'\varphi^*(r')\,\psi(r') = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\varphi^*(r)\,\psi(r) = \langle\varphi(r)\mid\psi(r)\rangle,$$

alors

$$\langle \varphi (r)| \mathcal{P}^{+}\mathcal{P} |\psi (r)\rangle = \langle \varphi (r) \mid \psi (r)\rangle ,$$

d'où

$$\mathcal{P}^{\dagger}\mathcal{P} = 1, \tag{1.32}$$

on déduit de (1.31) et (1.32) que

$$\mathcal{P}^{\dagger} = \mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}. \tag{1.33}$$

par conséquent l'opérateur de parité est un opérateur hermitien et unitaire.

1.3.2 Vecteurs propres de l'opérateur parité

On commence par l'équation aux valeurs propres (équation carractéristique)

$$\mathcal{P}\psi (r) = \lambda\psi (r) , \tag{1.34}$$

d'où λ est une valeur propre de $\mathcal{P}$.

Après une deuxième réflexion de l'espace, la fonction d'onde reste inchangée comme (1.31)

$$\psi (r) = \lambda^{2}\psi (r) ,$$

d'où les valeurs propres sont

$$\lambda^{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1. \tag{1.35}$$

Si $\lambda = +1$ la fonction propre de $\mathcal{P}$ est paire

$$\psi (-r) = +\psi (r) , \tag{1.36}$$

et pour $\lambda = -1$ la fonction propre de $\mathcal{P}$ est impaire

$$\psi (-r) = -\psi (r) . \tag{1.37}$$

1.3.3 Commutation de l'opérateur parité avec les observables courantes

1.3.3.1 Commutation de $\mathcal{P}$ avec r et p

Les opérateurs position et impulsion se transforment sous l'action de l'opérateur parité comme suit

$$\mathcal{P}\ x\ \mathcal{P} = -x, \quad \mathcal{P}\ p\ \mathcal{P} = -p. \tag{1.38}$$

donc par définition on a

$$[\mathcal{P}, x] \neq 0, \tag{1.39}$$

$$[\mathcal{P}, p] \neq 0. \tag{1.40}$$

Alors, $\mathcal{P}$ ne commute pas avec les opérateurs de position et d'impulsion mais ils se anticommutent

$$\{\mathcal{P}, x\} = 0,$$

$$\{\mathcal{P}, p\} = 0.$$

1.3.3.2 Commutation de $\mathcal{P}$ avec H

On définit l'Hamiltonien d'un systeme quelconque à une dimention

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \tag{1.41}$$

avec $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, alors

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),$$

on calcule la quantité suivante$\mathcal{P}H\psi(x)$

$$\mathcal{P}H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{P}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x), \tag{1.42}$$

pour faire ce calcul, il suffit de savoir que le carré de l'opérateur de position x^2 est invariant sous la transformation $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}\ x^2\mathcal{P} = x^2,$$

d'où

$$\left[\mathcal{P}, x^2\right] = \left[\mathcal{P}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] = 0, \tag{1.43}$$

aussi on prend le cas ou $V(x)$ est une fonction paire de x

$$V(-x) = V(x), \tag{1.44}$$

après un calcul simple, où en utilisant (1.29), (1.43) et (1.44) , on obtient

$$\mathcal{P}H\psi(x) = H\mathcal{P}\psi(x) \Longrightarrow \mathcal{P}H = H\mathcal{P},$$

d'où $\mathcal{P}$ et H commutent

$$[\mathcal{P}, H] = 0. \tag{1.45}$$

Un système (ou des interactions) qui conserve la parité est décrit par un hamiltonien qui commute avec $\mathcal{P}$.

On note que la parité est une quantité conservé dans les interaction électromagnétique et forte par ailleurs les interaction faible ne respectent pas cette symétrie.

1.4 Opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$

En mécanique classique le renversement du temps $\mathcal{T}$ est l'analogue temporel de la réflexion de l'espace. Cette transformation ne doit pas être perçue comme une inversion de l'axe du temps impliquant simplement un retour en arrière ou plus comme inversion du mouvement qui suit la même trajectoire dans la direction opposée.

Chaque mobile a une position donnée x et une impulsion donnée p, si nous inversions la direction du temps, la position de la particule reste la mème mais son impulsion s'inverse.

En d'autre terme

$$\begin{aligned} t &\to t' = -t, \\ r &\to r' = r, \\ p &\to p' = -p. \end{aligned} \tag{1.46}$$

En mécanique quantique, on n'est pas sûr que l'opérateur renversement du temps affecte le temps au moins jusqu'à présent.

L'operateur anti-linéaire $\mathcal{T}$ a l'effet de changer les signes de l'operateur impulsion et le nombre imaginaire pure

$$\mathcal{T}\ i\ \mathcal{T}^{-1} \to -i \text{ et } \mathcal{T}\ p\ \mathcal{T} = -p, \tag{1.47}$$

tandis que l'opérateur position reste inchangé sous l'effet de l'opérateur $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{T}\ \hat{x}\ \mathcal{T} = \hat{x}. \tag{1.48}$$

1.4.1 Commutation de l'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$ avec les observables courantes

1.4.1.1 Commutation de $\mathcal{T}$ et $\widehat{r}$

On a par définition que l'opérateur r est invariant par $\mathcal{T}$, donc

$$\mathcal{T}\ x\ \mathcal{T} = x,$$

cela implique

$$[\mathcal{T}, x] = 0, \tag{1.49}$$

l'opérateur renversement du temps commute avec x.

1.4.1.2 commutation de $\mathcal{T}$ et $\widehat{p}$

Puisque l'opérateur $\mathcal{T}$ inverse l'impulsion p

$$\mathcal{T}\ \hat{p}\ \mathcal{T} = -\hat{p},$$

cela implique

$$[\mathcal{T}, \hat{p}] \neq 0, \tag{1.50}$$

l'opérateur renversement du temps se commute avec p.

1.4.2 Propriétés de l'opérateur de renversement du temps

Les propriétés de l'opérateur renversement du temps comme l'hermiticité et unitarité sont pareils à celles de l'opérateur de parité.

Avec les mêmes étapes de calcul on obtient

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\dagger} = \mathcal{T}^{-1}, \tag{1.51}$$

L'anti-unitarité de l'opérateur $\mathcal{T}$ preserve la relation de commutation $[r, p] = i\hbar$

$$\mathcal{T}\,[r, p]\,\mathcal{T}^{-} = [r, -p] = -i\hbar = [r, p]^{*}. \tag{1.52}$$

L'opérateur $\mathcal{T}$ n'est pas une observable parce qu'il est anti-lineaire et son effet à une fonction complexe est

$$\mathcal{T}\psi\,(r, t) = \psi^{*}\,(r, t)\,. \tag{1.53}$$

1.5 Opérateur conjugaison de charge

La conjugaison de charge ou l'opérateur $\mathcal{C}$ qui change une particule en son antiparticule de masse, spin, impulsion p et position x identique, mais en échange le signe de toute les autres charges (charge électrique, nombre barionique, nombre lebtonique ...).

Considérons une opération $\mathcal{C}$ qui transforme une particule en son anti-particule, donc on a

$$\begin{aligned} C\ \hat{x}\ C^{-} &= \hat{x}, \\ C\ \hat{p}\ C^{-} &= \hat{p}, \end{aligned} \tag{1.54}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\,|\psi\rangle &= \left|\overline{\psi}\right\rangle, \\ \langle\psi|\,\mathcal{C}^{+} &= \left\langle\overline{\psi}\right|, \end{aligned} \tag{1.55}$$

avec $|\psi\rangle$ est l'état quantique d'une particule et $\left|\overline{\psi}\right\rangle$ est l'état quantique de l'anti-particule.

1.5.1 Propriété de l'opérateur conjugaison de charge $\mathcal{C}$

Les deux états quantique $\langle\psi|$ et $|\psi\rangle$ doivent être normalisable de sorte que

$$\langle\psi| \mathcal{C}^{+}\mathcal{C} |\psi\rangle = \langle\overline{\psi} \mid \overline{\psi}\rangle = 1 = \langle\psi \mid \psi\rangle\,, \tag{1.56}$$

ceci implique que $\mathcal{C}$ est unitaire, d'autre sorte, en agissant deux fois l'opérateur $\mathcal{C}$ sur la paricule

$$\mathcal{C}^{2} |\psi\rangle = \mathcal{C} |\overline{\psi}\rangle = |\psi\rangle\,, \tag{1.57}$$

on voit que $\mathcal{C}^2 = 1$ donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}$.

En réunissant tout cela nous voyons que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-} = \mathcal{C}^{\dagger}, \tag{1.58}$$

Si l'Hamiltonien du système H reste invariant sous l'action de l'opérateur de conjugaison de charge $\mathcal{C}$, alors

$$[H, \mathcal{C}] = 0, \tag{1.59}$$

et si une particule est identique à sa propre antiparticule, c'est à dire, tous les nombres quantiques qui se transforment sous l'action de $\mathcal{C}$ sont nuls, alors le vecteur d'état de H est un état propre de $\mathcal{C}$ avec les valeurs propres ± 1 [21].

En mécanique quantique conventionnelle, l'opérateur $\mathcal{C}$ n'existe pas en tant qu'entité distincte, par contre il existe en mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, où on utilise la notation $\mathcal{C}$ car il a presque les mêmes propriétés que l'opérateur de conjugaison de charge. L'opérateur $\mathcal{C}$ représente l'observable qui décrit la mesure de la signature de la norme $\mathcal{PT}$.

Chapitre 2

Mécanique quantiqe $\mathcal{PT}$ -symétrique

2.1 introduction

En mécanique quantique l'état d'un système, ses niveaux d'énergies et son évolution dans le temps, sont déterminé par un opérateur Hamiltonien H. On définit l'équation stationaire de Schrödinger

$$H\psi_n(r,t) = E_n\psi_n(r,t), \tag{2.1}$$

avec E_n sont les valeurs propres de l'opérateur H, où cette dernière doit être réelle . $\psi_n(r,t)$ sont les fonctions d'onde qui nous donnent la densité de probabilité de présence d'une particule au temps t, et considéré comme une solution du système étudié.

$$\psi_n(r,t) = e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}\psi_n(r,0). \tag{2.2}$$

L'opérateur d'évolution $U(t) = e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}$ doit être unitaire, se que conserve la probalilité de présence. Pour assurer ces propriétés l'Hamiltonien H doit etre hermitien [20].

2.2 Propriétés des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques

En 1998 Bender et Boettcher par un calcul numérique ont révélé l'existence d'une classe d'Hamiltoniens non-hermitiens dont les valeurs propres sont réelles, c'est le début d'extension vers une mécanique quantique non hermitienne [1]

$$H \; = p^2 + x^2(ix)^{\nu}. \tag{2.3}$$

Il est claire que cet Hamiltonien n'est pas hermitien pour les valeurs impaires de ν, malgré ça, il possède un spectre d'énergie réel pour $\nu \geq 0$ et complexe pour $\nu \prec 0$. Ce résultat impressionnant attira les chercheurs pour trouver le secret de réalité du spectre d'énergie de cette classe d'hamiltonien. Ils ont trouvé que la cause est l'invariance des ces Hamiltoniens par une transformation appelée $\mathcal{PT}$- symétrie, plus tard ils ont découvert que cette condition n'est pas suffisante mais il faut aussi que les fonctions propres de ces Hamiltoniens soient aussi $\mathcal{PT}$ -symétrique (soient des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$) [1, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

Alors, l'idée principale de ce théorème est de remplacer la condition de l'herméticité par la symétrie $\mathcal{PT}$ qui assure la réalité des valeurs propres.

2.2.1 Propriété de l'opérateur $\mathcal{PT}$

La transformation $\mathcal{PT}$ est la composition des deux transformations de parité et de renversement du temps, c'est-à-dire, action simultanée.

L'ordre des opérations n'est pas important du fait que les deux opérateurs, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$, commutent. En combinant les propriétés précédentes, on peut écrire :

$$\mathcal{PT} \; \hat{x} \; \mathcal{PT} = -\hat{x}, \tag{2.4}$$

et

$$\mathcal{PT} \; \hat{p}\mathcal{PT} = \hat{p}. \tag{2.5}$$

En particulier, $\mathcal{PT}$ est un opérateur antilinéaire, puisque c'est le produit d'un opérateur linéaire et d'un opérateur antilinéaire

$$\mathcal{PT} \; i \; \mathcal{PT} = -i. \tag{2.6}$$

L'opérateur $\mathcal{PT}$ est hermitien puisque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ commutent entre eux :

$$(\mathcal{PT})^{\dagger} = \mathcal{T}^{\dagger}\mathcal{P}^{\dagger} = \mathcal{TP} = \mathcal{PT}, \tag{2.7}$$

d'autre part $\mathcal{PT}$ est un opérateur unitaire :

$$(\mathcal{PT})(\mathcal{PT})^{\dagger}= \mathcal{PT} \ \ \mathcal{T}^{\dagger}\mathcal{P}^{\dagger}=1, \tag{2.8}$$

donc

$$(\mathcal{PT})^{2} = 1. \tag{2.9}$$

On résume

$$\mathcal{PT} = \mathcal{PT}^{-1}= \mathcal{PT}^{+}. \tag{2.10}$$

Notons enfin que l'action de $\mathcal{PT}$ sur les fonctions d'onde $\psi(r)$ s'écrit :

$$\mathcal{PT}\psi(r) = \psi^{*}(-r). \tag{2.11}$$

On dit qu'un hamiltonien est $\mathcal{PT}$- symétrique, s'il reste invariant par la transformation $\mathcal{PT}$ c-à-d

$$H = (\mathcal{PT}) \ H \ (\mathcal{PT}), \tag{2.12}$$

d'où

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \tag{2.13}$$

2.2.2 Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique

La réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est une conséquence de la non brisure de la symétrie $\mathcal{PT}$, qui signifie que les fonctions propres de H sont simultanément fonctions propres de $\mathcal{PT}$.

Ainsi, pour construire une théorie quantique valable à partir des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques, on exige de plus que la symétrie ne soit pas brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas suffisante, car il n'existe aucun moyen pour affirmer qu'une telle symétrie d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique est brisée ou pas. Il faut tout d'abord déterminer les fonctions propres pour en tirer une conclusion. Avec cette condition supplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique

En effet, soit $\{\psi_n(x), n = 0, 1, 2..\}$, l'ensemble des fonctions propres communes à H et $\mathcal{PT}$

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \tag{2.14}$$

et

$$\mathcal{PT}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x), \tag{2.15}$$

où les valeurs propres E_n sont généralement complexes, par contre, la valeur propre λ_n de l'opérateur $\mathcal{PT}$ est toujours réelle parce qu'il est hermitien. En plus, l'Eq. (2.9) implique que

$$\lambda_n^2 = 1. \tag{2.16}$$

L'opérateur $\mathcal{PT}$ a la valeur propore $\lambda_n = 1$ si les fonctions $\psi_n(x)$ sont paires, et $\lambda_n = -1$ si les fonctions ψ_n sont impaires.

En utilisant les relation $(2.12), (2.14)$ et (2.16) on calcule

$$\begin{aligned} H\psi_n(x) &= \mathcal{PT}H\mathcal{PT}\psi_n(x), \\ &= E_n^*\lambda_n\mathcal{PT}\psi_n(x), \\ &= E_n^*|\lambda_n|^2\psi_n(x), \\ &= E_n^*\psi_n(x), \\ &= E_n\psi_n(x), \end{aligned} \tag{2.17}$$

d'où

$$E_n = E_n^*. \tag{2.18}$$

Cela nous donne la confirmation que E_n est réel pour tout Hamiltonien qui comute avec $\mathcal{PT}$.

2.3 Produit scalaire $\mathcal{PT}$ -symétrique

La question qui se pose maintenant est de savoir si les Hamiltoniens possédant une $\mathcal{PT}$ -symétrie non brisée peuvent décrire la dynamique des systèmes physiques réels. En d'autres termes, il faut vérifier que la norme d'un vecteur propre de H dans l'espace de Hilbert doit être positive, et que l'évolution au cours du temps des états propres demeure unitaire. La première permet d'interpréter la norme d'un état comme une probabilité, qui doit être défini positive, alors que la deuxième condition garantie justement l'indépendance de cette probabilité par rapport au temps. Bien entendu, ces deux caractéristiques des Hamiltoniens hermitiens sont à la base de la théorie quantique ordinaire et notamment de l'interprétation probabiliste. Elles devraient donc être satisfaites dans toute théorie d'extension de la mécanique quantique.

Pour cela, Bender et Boettcher ont définit un produit scalaire $\mathcal{PT}$ associés aux Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique, sous la relation suivante : [25, 27].

$$(f,g)_{\mathcal{PT}} = \int_c dx \left[\mathcal{PT} f(x)\right] g(x), \tag{2.19}$$

où c est un contour dans le plans complexe, et

$$\mathcal{PT} f(x) = f^*(-x), \tag{2.20}$$

Ce choix du produit scalaire $\mathcal{PT}$ nous permet de vérifier que la norme d'une fonction d'onde est une quantité indépendante du temps. Mais avec ce choix on est confronté à un problème de taille, qui est la possibilité de la non positivité de la norme des états propres d'Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique. Considérons $\psi_n(x)$ et $\psi_m(x)$, les fonctions propres de H, qui sont orthogonaux

$$\begin{aligned}(\psi_n(x), \psi_m(x))_{\mathcal{PT}} &= \int dx \left[\mathcal{PT}\psi_n(x)\right]\psi_m(x), \\ &= \int dx \psi_n^*(-x)\psi_m(x), \\ &= (-1)^n \delta_{mn}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Alors, pour $n = m$,les fonctions propres des Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique vérifient la relation suivante

$$(\psi_n(x), \psi_n(x))_{\mathcal{PT}} = (-1)^n. \tag{2.22}$$

Dans cette construction, le contour se trouve dans les lignes de Stockes, alors dans ce contexte on définit une relation de fermeture simple et inhabituelle qui est

$$\sum_{n}^{\infty}(-1)^{n}\left[\mathcal{PT}\psi_{n}(x)\right]\psi_{n}(x)=\delta(x-x)=1, \tag{2.23}$$

D'après la relation (2.22) , nous voyons que pour les valeurs impaires de n, la norme est negative, qui n'est pas conforme à la nature de la probabilité. En plus, les fonctions propres dans la relation (2.23) ne forment pas un espace d'Hilbert usuel complet [26].

Pour lever ce problème, Bender et Boettcher ont exploité une nouvelle symétrie cachée pour les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétrique, représentée par un opérateur linéaire noté $\mathcal{C}$ qui commute avec H et $\mathcal{PT}$

$$[\mathcal{C},H]=0 \qquad \text{et} \qquad [\mathcal{C},\mathcal{PT}]=0, \tag{2.24}$$

et par conséquent

$$[H,\mathcal{CPT}]=0. \tag{2.25}$$

2.3.1 Construction de $\mathcal{C}$

Bender a cherché de construire un opérateur $\mathcal{C}$ qui commute avec H et $\mathcal{PT}$, de façon que les fonctions d'onde communes à H et $\mathcal{CPT}$ n'admettent pas les anomalies précédentes [29].

On définit l'opérateur $\mathcal{C}$ dans l'espace de configuration par

$$\langle x|\,\mathcal{C}\,|y\rangle=\mathcal{C}(x,y)=\sum_{n}\psi_{n}(x)\,\psi_{n}(y)\,, \tag{2.26}$$

cet opérateur est défini en fonction des états propres $\mathcal{PT}$-symétriques de l'hamiltonien, c-à-d $\mathcal{C}$ est une fonction de H. En effet

$$[\mathcal{C},H]=0. \tag{2.27}$$

Dans l'espace de configuration la relation suivante est vérifiée

$$\int_{c}dy\mathcal{C}(x,y)\,\mathcal{C}(y,z)=\delta(x-z), \tag{2.28}$$

l'opérateur $\mathcal{C}$ est la racine carré de l'opérateur unité $\delta(x-y)$, donc les valeurs propres de cet opérateur sont ± 1

$$\mathcal{C}^2 = 1, \tag{2.29}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{C}\psi_n = (-1)^n \psi_n. \tag{2.30}$$

L'opérateur $\mathcal{C}$ n'a pas une définition unique comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$, sa définition dépend de la dynamique du système étudie, par conséquent l'opérateur $\mathcal{C}$ représente l'observable qui décrit la mesure de la signature de la norme $\mathcal{PT}$. Cependant, l'appellation "opérateur de conjugaison de charge" est introduite seulement par analogie avec la théorie des champs, car les propriétés de cet opérateur sont presque identiques à ceux de l'opérateur de la conjugaison de la charge dans la théorie quantique des champs sauf que l'opérateur $\mathcal{C}$ n'a rien à voir avec la charge des particules.

2.3.2 Produit scalaire $\mathcal{CPT}$

Après la construction de l'opérateur $\mathcal{C}$ on a tout ce qu'il nous manque pour définir le nouveau produit scalaire à partir du produit des trois opérateurs $\mathcal{C}$,$\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ [27, 31]

$$\langle f, g \rangle = \int_c dx \left[\mathcal{CPT} f(x)\right] g(x), \tag{2.31}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \psi_n(x), \psi_m(x) \rangle_{\mathcal{CPT}} &= \int dx \left[\mathcal{CPT}\psi_n(x)\right] \psi_m(x), \\ &= \delta_{nm}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

et la relation de ferméture s'écrit maintenant comme suit

$$\sum_n \left[\mathcal{CPT}\psi_n(x)\right] \psi_n(y) = \delta(x-y), \tag{2.33}$$

Le produit scalaire $\mathcal{CPT}$ et les axiomes de la mécanique quantique ne se contredisent pas, et la définition de ce produit scalaire dépend du système étudié. Cette propriété est une résultat de l'opérateur $\mathcal{C}$ qui n'est pas unique.

On termine par cette figure qui résume ce chapitre.

2.4 Exemple illustratif

Dans cet exemple, on va suivre la procédure de Bender dans l'article [31] pour un système à deux niveau, qui est représenté par l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique suivant

$$H = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

où les paramètres r, s et θ sont réels. Notez que cet Hamiltonien n'est pas hermitien

$$H \neq H^{\dagger}, \tag{2.35}$$

nous choisissons l'opérateur de parité comme

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

H est $\mathcal{PT}$ -symétrique parce que il satisfait la relation (2.12).

On utilise l'équation caractéristique pour tirer les valeurs propres

$$H \left|\psi\right\rangle = \epsilon \left|\psi\right\rangle \Longleftrightarrow (H - \epsilon I) \left|\psi\right\rangle = 0, \tag{2.37}$$

pour résoudre cette équation, on calcul le déterminant de la matrice $(H - \epsilon I)$ qui doit être nul

$$\det (H - \epsilon I) = \det \begin{pmatrix} re^{i\theta} - \epsilon & s \\ s & re^{-i\theta} - \epsilon \end{pmatrix} = 0,$$
$$\Longrightarrow \epsilon^2 - s^2 + r^2 - 2r\epsilon \cos\theta = 0,$$

en résolvant cette équation on obtient dans les deux racines suivantes

$$\varepsilon_{\pm} = r\cos\theta \pm \sqrt{s^2 - r^2 \sin\theta^2}, \tag{2.38}$$

qui sont réelles si

$$s^2 \ \geq r^2 \sin\theta^2, \tag{2.39}$$

qui représente la condition de la non brisure de symétrie $\mathcal{PT}$.

Pour faciliter le calcul on supose

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}\sin\theta, \tag{2.40}$$

donc

$$\varepsilon_{\pm} = r\cos\theta \pm s\cos\alpha. \tag{2.41}$$

Puisque H est une matrice 2x2 donc $|\psi\rangle$ a la forme suivante

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Calculons en premier lieu l'état propre $|\psi_+\rangle$ qui correspond à la valeur propre ϵ_+

$$\begin{pmatrix} re^{i\theta} - \epsilon & s \\ s & re^{-i\theta} - \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cela nous donne un système à deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(re^{i\theta} - \epsilon\right) a + sb = 0, \\ sa + \left(re^{-i\theta} - \epsilon\right) b = 0, \end{array} \right. \tag{2.43}$$

sachons que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{2.44}$$

en remplaçant (2.41) et (2.44) dans (2.43), on obtiens

$$\left\{ \begin{array}{l} (r\cos\theta + ir\sin\theta - r\cos\theta - s\cos\alpha)\, a + sb = 0, \\ sa + (r\cos\theta - ir\sin\theta - r\cos\theta - s\cos\alpha)\, b = 0. \end{array} \right.$$

On simplifie et on utilise l'équation (2.40)

$$\begin{cases} -s\left(-i\sin\alpha+\cos\alpha\right)a+sb=0, \\ sa-s\left(+i\sin\alpha+\cos\alpha\right)b=0, \end{cases} \tag{2.45}$$

d'où

$$\begin{cases} -e^{-i\alpha}a+b=0, \\ a-e^{i\alpha}b=0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Alors, on peut écrire a en fonction de b

$$a=be^{i\alpha}. \tag{2.47}$$

L'état propre $|\psi_+\rangle$ de H vérifie le $\mathcal{PT}$-produit scalaire (2.21)

$$\langle\psi_+\mid\psi_+\rangle_{PT}=\begin{pmatrix} b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=b^*a+a^*b=1. \tag{2.48}$$

D'aure part, on a

$$\mathcal{PT}\left|\psi_+\right\rangle=\begin{pmatrix} b^* \\ a^* \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

pour que les valeurs propres soient réelles la symétrie $\mathcal{PT}$ ne doit pas être brisée c'est-à-dire

$$\mathcal{PT}\left|\psi_+\right\rangle=\left|\psi_+\right\rangle, \tag{2.50}$$

$$\begin{pmatrix} b^* \\ a^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

donc

$$b^*=a \text{ et } a^*=b, \tag{2.52}$$

de (2.48) et (2.52) on obtient

$$a^2+b^2=1. \tag{2.53}$$

On remplace (2.47) dans (2.53) , on obtient

$$b = \frac{1}{\sqrt{e^{2i\alpha} + 1}}. \tag{2.54}$$

On calcule la quantité $e^{2i\alpha} + 1$ sachons que

$$-\sin^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha,$$

alors

$$\begin{aligned} e^{2i\alpha} + 1 &= e^{i\alpha}.e^{i\alpha} + 1 \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1 \\ &= \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha + 1 \\ &= 2\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha \\ &= 2\cos\alpha\ (\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= 2\cos\alpha\ e^{i\alpha}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

substituions ce résultat dans (2.54), on obtiens

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha\ e^{i\alpha}}} = \frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{2\cos\alpha}}, \tag{2.56}$$

à partir de (2.47) on trouve

$$a = e^{i\alpha}\frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{2\cos\alpha}} = \frac{e^{+\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{2\cos\alpha}}, \tag{2.57}$$

on a a et b, il suffit de remplacer pour trouver le premier ket propre $|\psi_+\rangle$ de H qui correspond à la valeur propre ϵ_+

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} \\ e^{\frac{-i\alpha}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

Pour calculer le deuxième ket propre on fait les mêmes étapes de calculs sauf le $\mathcal{PT}$-produit scalaire est négatif

$$\langle\psi_- \mid \psi_-\rangle_{PT} = -1. \tag{2.59}$$

La relation entre a et b dans le cas où la valeur propre est ϵ_-, est la suivante

$$b = -ae^{i\alpha}, \tag{2.60}$$

on utilise les Eqs.(2.60) et (2.59) ,on obtient $|\psi_-\rangle$ qui correspond à la valeur propre ϵ_-

$$|\psi_-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} e^{\frac{-i\alpha}{2}} \\ -e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

en utilisant la définition du produit scalaire $\mathcal{PT}$ -symétrique (2.19) , on trouve

$$\langle\psi_\pm \mid \psi_\pm\rangle_{\mathcal{PT}} = \pm 1, \tag{2.62}$$

et

$$\langle\psi_\pm \mid \psi_\mp\rangle_{\mathcal{PT}} = 0. \tag{2.63}$$

Pour éliminer les norme négatives des états propres, on définit l'opérateur $\mathcal{C}$ qui est donné par la formule (2.26)

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\cos\alpha} \begin{pmatrix} i\sin\alpha & 1 \\ 1 & -i\sin\alpha \end{pmatrix} . \tag{2.64}$$

Cet opérateur commute avec l'Hamiltonien H, est ses valeurs propres sont exactement les valeurs propres de $\mathcal{PT}$ pour des kets propres correspondant

$$\mathcal{C}\,|\psi_\pm\rangle = \pm\,|\psi_\pm\rangle\,, \tag{2.65}$$

$$\mathcal{PT}\,|\psi_\pm\rangle = \pm\,|\psi_\pm\rangle\,. \tag{2.66}$$

A' l'aide des Eq. (2.31) et (2.64) on définit le nouveau produit scalaire $\mathcal{CPT}$ qui a une signature positive

$$\langle\psi_\pm \mid \psi_\pm\rangle_{\mathcal{CPT}} = +1, \tag{2.67}$$

et par conséquent

$$\langle\psi_\pm \mid \psi_\mp\rangle_{\mathcal{CPT}} = 0. \tag{2.68}$$

Chapitre 3

Systèmes quantiques pseudo-hermitiens

3.1 introduction

En 2002, Ali Mustafazadeh a publié trois articles [2, 3, 4], dans lesquels, il a proposé une théorie alternative à la mécanique quantique conventionnelle, pour les Hamiltoniens non-hermitiens dont le spectre est réel. Cette théorie s'appelle la pseudo-hermiticité, et elle est plus générale que la $\mathcal{PT}$ -symétrie, où il a montré que tout Hamiltonien de spectre réel est pseudo-hermitien

3.2 Définitions et propriétés

Dans ce qui suit, nous allons introduire les définitions et les propriétés principales des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens en utilisant les références suivante [2, 3, 4, 32].

Considérant un espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$

Définition 1

Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ est dit pseudo-Hermitien (ou $\eta-$pseudo Hermitien) si et seulement si, il existe un opérateur linéaire, inversible et hermitien η tel que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\#} = \eta^{-1}\mathcal{A}^{\dagger}\eta, \tag{3.1}$$

où $A^{\#}$ dénote l'opérateur pseudo-hermitien adjoint de $\mathcal{A}$.

Définition 2

Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ *est dit quasi-Hermitien si et seulement si, il existe un opérateur linéaire, hermitian et positif* η *tel que.*

$$\eta\mathcal{A} =^{\dagger} \eta \tag{3.2}$$

Définition 3

Soit η *un opérateur linéaire* $\eta : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ *on* dit que η *est un opérateur positif et on note* $\eta \geq 0$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$,*on a* $\langle \varphi, \varphi \rangle_{\eta} \geq 0$.

Remarque

Notons que l'opérateur η *satisfaisant l'équation* (3.1) *n'est pas unique. L'ensemble de ces opérateurs est notée* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, *c'est-à-dire*

$$\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \mathcal{A}^{\dagger} = \eta\mathcal{A}\eta^{-1}, \tag{3.3}$$

3.3 Quasi-herméticité et pseudo-herméticité.

3.3.1 Le pseudo produit-scalaire

Les valeurs propres de l'hamiltonien hermétien h vérifie produit scalaire usuel

$$\langle \psi_m \psi_n \rangle = \delta mn, \tag{3.4}$$

mais les valeurs propres de l'hamiltonien pseudo-hermitien H ne vérifie pas ce produit scalaire.

Mustaphazadeh a introduire un nouveau produit scalaire appelé pseudo produit scalaire, définit positif et noté par $\langle\langle, \rangle\rangle_{\eta}$ [33, 34]

$$\langle\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle\rangle_{\eta} = \langle \varphi_m \mid \eta \mid \varphi_m \rangle = \delta_{mn}. \tag{3.5}$$

On note que ce produit scalaire est vérifié si H est pseudo-hermétien, on verra ça avec l'équation de Schrödinger

$$ih\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_n\rangle \; = \; H|\varphi_n\rangle \; , \tag{3.6}$$

en utilise les Eq. (3.5) et (3.6) on trouve

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle\varphi_m,\varphi_n\rangle\rangle_\eta \; = \; \langle\varphi_m|\,\eta H \; - \; H^+\eta\,|\varphi_n\rangle \; , \tag{3.7}$$

donc le nouveau produit scalaire est indépendant du temps ssi H est quasi-hermitien.

3.3.2 Hamiltonien quasi-hermitien

Supposant maintenant que l'Hamiltionien H est pseudo-hermétien et indépendant du temps, alors l'équation de Schrödinger (3.6) est équivalente à l'équation aux valeurs propres suivante

$$H|\psi_n\rangle \; = \; E_n|\psi_n\rangle \, , \tag{3.8}$$

alors l'équation (3.8) donne

$$(E_m^\star \; - \; E_n) \; \langle\psi_m|\,\eta\,|\psi_n\rangle \; = \; 0. \tag{3.9}$$

Cette relation implique :

- Si les valeurs Propres E_n sont complexes, alors pour $n = m$

$$(E_n^\star \; - \; E_n) \; \neq 0 \Longrightarrow \; \langle\psi_n|\,\eta\,|\psi_n\rangle \; = \; 0, \tag{3.10}$$

c'est-à-dire les normes d'états $|\ \psi_n\rangle$ s'annulent.

- Tous les états propres ψ_m et sont n-orthogonaux sauf pour $E_m = E_n$

$$E_m^\star \; \neq \; E_n \; \Longrightarrow \; \langle\psi_m|\,\eta\,|\psi_n\rangle = \; 0. \tag{3.11}$$

En particulier, les états propres associés aux valeurs propres réelles sont orthogonaux. Maintenant, supposant que l'hamiltonien H admet un ensemble bi-orthonormé de vecteurs propres $\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}$, c'est-à-dire

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad et \quad H^\dagger|\phi_n\rangle = E_n^*\ |\phi_n\rangle, \tag{3.12}$$

avec

$$\langle\phi_m|\psi_n\rangle = \delta_{mn}, \tag{3.13}$$

et

$$\sum_n |\psi_n\rangle\langle\phi_n| = 1. \tag{3.14}$$

Alors, on a

$$\langle\phi_m|H|\psi_n\rangle = E_n\delta_{mn} \quad \text{et} \quad \langle\psi_n|H^\dagger|\phi_m\rangle = E_m^*\delta_{mn}, \tag{3.15}$$

de tel sorte que, si les valeurs propres sont réelles, $E_n^* = E_n$ nous avons une condition nécessaire mais pas suffisant pour que le spectre de H soit réel

$$\langle\phi_m|H|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|H^\dagger|\phi_m\rangle, \tag{3.16}$$

en utilise la relation entre les états propres de H et $H^\dagger$ respectivement

$$|\phi_m\rangle = \eta|\psi_m\rangle, \tag{3.17}$$

ce qui nous conduit à

$$\langle\psi_n|\eta H|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|H^\dagger\eta|\psi_m\rangle, \tag{3.18}$$

c'est-à-dire

$$\eta H = H^\dagger\eta, \tag{3.19}$$

alors, tout opérateur H qui vérifie l'Eq. (3.19) est appelé opérateur quasi-hermitien. De plus, Dieudonné a montre que le spectre H n'est pas nécessairement réel, et que $H^\dagger$ n'est pas nécessairement quasi-hermitien [11]. En effet, la relation de quasi-herméticité (3.19) n'assure pas la realité du spectre de H c'est à dire, c'est une condition nécessaire mais non suffisante [29].

3.3.3 Réalité du spectre des Hamiltoniens pseudo-hermitiens

Théorème

L'Hamiltonien H a un spectre réel si et seulement si, il existe un opérateur linéaire, hermitien et inversible $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que H est pseudo-hermitien et $\eta = \rho^{+}\rho$.

Pour démontrer ce théorème, on considère la base orthonormée $\{|n\rangle\}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est à dire

$$\langle m| n\rangle \ = \delta_{mn}, , \tag{3.20}$$

et

$$\sum_n |n\rangle \langle n| \ = \ 1. \tag{3.21}$$

On définit l'Hamiltonien hermitien $h : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ comme suit

$$h \ = \ \sum_n |E_n\rangle \langle n| \ , \tag{3.22}$$

et considère un opérateur $\rho : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ défini par

$$\rho \ = \ \sum_n |\psi_n\rangle \langle n| \ , \tag{3.23}$$

il est claire que l'opérateur ρ et inversible, où ρ^{-1} est donné par

$$\rho^{-1} \ = \ \sum_n |n\rangle \langle \varphi_n| \ , \tag{3.24}$$

à partir des Eqs. (3.22), (3.23) et (3.24), il est facile de montrer que

$$\rho \ H\rho^{-1} \ \ = \ h. \tag{3.25}$$

Supposons maintenant que le spectre H soit réel, alors h est hermitien. En prenant l'adjoint des deux cotés on a

$$\rho \ H\rho^{-1} \ \ = \ h = h^{\dagger} = \left(\rho^{-1}\right)^{\dagger} \ H^{\dagger}\rho^{\dagger} \ , \tag{3.26}$$

alors

$$\begin{aligned} H = & \ \rho^{-1}\left(\rho^{-1}\right)^{\dagger} H^{\dagger}\rho\rho^{\dagger} \\ & = \left(\rho\rho^{\dagger}\right)^{-1} H^{\dagger}\rho\rho^{\dagger} \\ & = \eta^{-1}H^{\dagger}\eta, \end{aligned} \tag{3.27}$$

où

$$\eta = \rho\rho^{\dagger}. \tag{3.28}$$

Ce qui implique que H est η-pseudo-hermitien. Si on suppose maintenant que l'hermitien H est η-pseudo-hermitien, par conséquent les deux Eqs. (3.26) et (3.27) sont satisfaites.

En substituant la relation (3.25) dans l'équation aux valeurs propres de H, on trouve

$$\rho^{-1}h\rho\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\psi_n\right\rangle, \tag{3.29}$$

multiplions les deux membres de cette équation à gauche par ρ, on obtient

$$h\rho\left|\psi_n\right\rangle = E_n\rho\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\varphi_n\right\rangle, \tag{3.30}$$

alors les Hamiltoniens H et h sont iso-spectraux, et les états propres $|\psi_n\rangle$ de H et les états propres $|\varphi_n\rangle$ de h sont liés par la relation

$$\left|\varphi_n\right\rangle = \rho\left|\psi_n\right\rangle, \tag{3.31}$$

et

$$\left\langle\varphi_n\right| h\left|\varphi_n\right\rangle = \left\langle\phi_n\right| H\left|\psi_n\right\rangle = \left\langle\psi_n\right| \eta H\left|\psi_n\right\rangle, \tag{3.32}$$

où

$$\left|\phi_n\right\rangle = \eta\left|\psi_n\right\rangle = \rho^{+}\left|\varphi_n\right\rangle, \tag{3.33}$$

ce que veut dire que l'Hamiltonien H est hermitien dans le nouvau espace de Hilbert muni d'un $\eta-$produit scalaire de ses vecteurs propres $|\psi_n\rangle$.

D'autre part, l'Eq. (3.32) implique que l'Hamiltonien H est pseudo-hermitien et son spectre est réel, mais elle n'est pas suffisante pour avoir un produit scalaire positif. Donc, il est plus judicieux de choisir l'opérateur métrique η positif.

Le nouveau opérateur métrique ρ relie l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$ des vecteurs propres $|\varphi_n\rangle$ de h, à un autre espace de Hilbert $\mathcal{H}_\eta$ des vecteurs propres $|\psi_n\rangle$ de H. En plus, ρ transforme l'Hamiltonien non hermitien H en un Hamiltonien hermitien h via la relation (3.25), et transforme aussi les opérateurs position et impulsion de la manière suivante

$$X = \rho x \rho^{-1} \qquad et \qquad P = \rho p \rho^{-1}, \tag{3.34}$$

de sort que la relation de commutation canonique reste invariante

$$[x, p] = [X, P] = i\hbar, \tag{3.35}$$

et l'Hamiltonien non hermitien $H\ (x, p)$ peut s'écrire comme un Hamiltonien hermitien en fonction des nouvelles coordonnées canonique X et P

$$H\ (x, p) = \rho h\ (x, p) \rho^{-1} = h\ (\rho x \rho^{-1}, \rho p \rho^{-1}) = h\ (X, P). \tag{3.36}$$

Alors, l'opérateur métrique ρ est une transformation de l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$ à un nouveau espace de Hilbert noté par $\mathcal{H}_\eta$, où les opérateurs H, X et P ne sont pas hermitiens dans l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$, mais ils sont dans le nouveau espace de Hilbert $\mathcal{H}_\eta$, ce qui implique que H, X et P sont des observables dans $\mathcal{H}_\eta$. Par contre, les opérateurs h, x et p sont hermitiens dans l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$ et ils ne le sont pas dans $\mathcal{H}_\eta$.

Les propriétés de l'opérateur métrique η définissent la différence entre la quasi-herméticité et la pseudo-herméticité. Dans le tableau suivant nous exposons les différents cas possibles **??**

	$H^\dagger = \rho^\dagger \rho H \left(\rho^\dagger \rho\right)^{-1}$	$H^\dagger \eta = \eta H$	$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$
hermiticité de η	✓	✓	✓
inversibilité de η	✓	$\times$	✓
positivité de η	✓	✓	$\times$
$\eta-$produit scalaire	positif	positif	positif ou négatif
spectre de H	réel	réel ou complexe	réel
terminologie de H	quasi-pseudo hermitien	quasi-hermitien	pseudo-hermitien.

Si l'opérateur métrique est linéaire et positif mais non inversible, l'Hamiltonien vérifiant la condition $H^\dagger \eta = \eta H$ est appelée Hamiltonien quasi-hermitien. Tandis que, si l'opérateur métrique est linéaire, inversible et hermitien, alors la condition $H^\dagger \eta = \eta H$ peut s'écrire sous la forme $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ et dans ce cas l'Hamiltonien est pseudo-hermitien. Concernant la construction d'un opérateur métrique, la pseudo-hermiticité peut conduire à une métrique indéfinie et un produit scalaire positif ou négatif, qui est en contradiction avec la mécanique quantique, tandis que la quasi-herméticité garantit l'existence d'une métrique définie positive avec un produit scalaire positif. En ce qui concerne les propriétés spectrales de H, la pseudo-hermiticité assure la réalité du spectre, cependant dans le cas de la quasi-hérmiticité le spectre peut être réel ou complexe [32].

Il convient de souligner la caractérisation des hamiltoniens non hermitiens avec un spectre réel donné par le théorème précédent s'applique aux Hamiltoniens qui admettent un système biothonormal complet des vecteurs propres. Une généralisation de ce résultat au cas des hamiltoniens arbitraires n'est pas connue.

3.4 Relation entre la $\mathcal{PT}$-symétrie et la pseudo hermiticité

Dans cette partie, on va suivre les travaux de Mostaphazadeh [35, 36], où il a montré que la réalité du spectre des Hamiltoniens $\mathcal{PT}-$symétriques vient de leur pseudo hermiticité, c'est à dire, tout Hamiltonien $\mathcal{PT}-$symétrique, où la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée, est un hamiltonien pseudo-hermitien.

Pour trouver la relation entre la pseudo-hermiticité et la $\mathcal{PT}-$symétrique, nous écrivons l'opérateur métrique η sous la forme suivante

$$\eta = \sum_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n| , \tag{3.37}$$

et par conséquent

$$\eta^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n| , \tag{3.38}$$

d'autre part l'opérateur de parité est donné comme suit

$$\mathcal{P} = \sum_n (-1)^n |\phi_n\rangle \langle\phi_n| , \tag{3.39}$$

alors

$$\eta^{-1}\mathcal{P} = \sum_n (-1)^n |\psi_n\rangle \langle\phi_n| . \tag{3.40}$$

Dans la représentation des positions, l'opérateur $\eta^{-1}\mathcal{P}$ s'écrit comme suit

$$\langle x| \eta^{-1}\mathcal{P} |y\rangle = \sum_n (-1)^n \psi_n^* (x) \phi_n (y) . \tag{3.41}$$

Puisque nous avons considéré que la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée, alors Alors, on a

$$(-1)^n \psi_n^* (x) = \psi_n (x) , \tag{3.42}$$

et la relation (3.41) devient

$$\langle x| \eta^{-1}\mathcal{P} |y\rangle = \sum_n \psi_n (x) \phi_n (y) \tag{3.43}$$

cette relation coïncide avec l'équation (2.26) qui défini l'opérateur $\mathcal{C}$, donc

$$\eta^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{C} \tag{3.44}$$

3.5 ApplicationS des Hamiltoniens non-hermitiens

3.5.1 Etude du système à deux niveaux en cas pseudo-Hermiticité

On reprend l'exemple précédent qu'on fait pour les Hamiltonient $\mathcal{PT}-$symétrique dont l'Hamiltonien

$$H = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

et les valeurs propres sont données par

$$\epsilon_{\pm} = r\cos\theta \pm s\cos\alpha, \tag{3.46}$$

avec

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}\sin\theta. \tag{3.47}$$

En utilusant l'Eq. (3.48) , et puisque l'opérateur $\mathcal{C}$ est unitaire et hermitien, alors l'opérateur métrique est donné par

$$\eta = \mathcal{PC} = \frac{1}{\cos\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sin\alpha & 1 \\ 1 & -i\sin\alpha \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

d'où

$$\eta = \frac{1}{\cos\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

En calculant l'opérateur $\rho = \eta^{\frac{1}{2}}$, on obtient la forme suivante

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & -i\cos\frac{\alpha}{2} \\ i\cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

à partir de cette relation, on peut trouver l'Hamiltonien hermitien h correspondant à l'Hamiltonien pseudo-hermitien H, comme suit

$$h = \rho H \rho^{-1} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -s\cos\alpha \\ -s\cos\alpha & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{3.51}$$

les valeurs propres et les états propres de h sont données par

$$E_{\pm} = r\cos\theta \pm s\cos\alpha \tag{3.52}$$

et

$$\begin{aligned} |E_{+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |E_{-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.53}$$

on note que $E_{\pm} = \varepsilon_{\pm}$,c'est à dire que h et H sont iso-spectraux.

Les états propres de H sont deduits à partie de ceux de h par la relation

$$|\psi_{\pm}\rangle = \rho^{-1}|E_{\pm}\rangle, \tag{3.54}$$

donc

$$|\psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

et

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \\ -e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Les états prores de H sont orthogonaux

$$\langle\psi_{\pm}|\,\eta\,|\psi_{\mp}\rangle = 0, \tag{3.57}$$

et ils vérifient le $\eta-$pseudo scalaire

$$\langle\psi_{\pm}|\,\eta\,|\psi_{\pm}\rangle = 1 \tag{3.58}$$

par contre les états propres de h sont aussi orthogonaux et vérifient le produit scalaire usuel, alors

$$\langle E_{\pm}|\,E_{\pm}\rangle = 1, \tag{3.59}$$

et

$$\langle E_{\mp}|\,E_{\pm}\rangle = 0, \tag{3.60}$$

3.5.2 Hamiltonien pseudo-hermitien équivalent à l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique

On considère l'Hamiltonien suivant [30]

$$H = \frac{p^2}{2m} - if(x)\,p + \beta(x)\,, \tag{3.61}$$

où $f(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions réelles de x.

Il est claire que l'Hamiltonien H n'est pas hermitien, où son adjoint est donné par

$$\begin{aligned} H^\dagger &= \frac{p^2}{2m} + ipf(x) + \beta(x)\,, \\ &= \frac{p^2}{2m} + if(x)\,p + f'(x) + \beta(x)\,, \end{aligned} \tag{3.62}$$

puisque l'opérateur métrique n'est pas unique, on le prend comme suit

$$\eta = e^{\lambda(x)}, \tag{3.63}$$

pour trouver la fonction $\lambda(x)$, en utilisant les Eqs. (3.61) , (**??**), (3.63) et la relation de pseudo-hermiticité en substituant dans la relation de pseudo-hermiticité

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}, \tag{3.64}$$

pour déterminer l'éffet de l'opérateur métrique sur les opérateurs position et impulsion, on utilise la propriété suivante

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + ... \tag{3.65}$$

alors

$$\eta x \eta^{-1} = x \ \text{ et } \eta p \eta^{-1} = p + i\lambda'(x)\,, \tag{3.66}$$

alors l'Eq (3.64) devient

$$\begin{aligned} H^{\dagger} &= \frac{1}{2m}\left(p+i\lambda'\right)^2 - i\left(p+i\lambda'\right)+\beta, \\ &= \frac{1}{2m}p^2 + i\left(\frac{\lambda'}{m}-f\right)p - \frac{\lambda'^2}{2m}+\frac{\lambda''}{2m}+f\lambda'+\beta\left(x\right), \end{aligned} \tag{3.67}$$

en comparant les Eq. (3.62) et (3.67) , on trouve

$$\begin{cases} \frac{\lambda'}{m}-f=f \\ -\frac{\lambda'^2}{2m}+\frac{\lambda''}{2m}+f\lambda'=f', \end{cases} \tag{3.68}$$

la solution de ce système d'équations est

$$\lambda' = 2mf \Rightarrow \lambda = 2m\int f\left(x\right)dx, \tag{3.69}$$

alors l'opérateur métrique dans ce cas est donné par

$$\eta = \exp\left[2m\int dxf\left(x\right)\right]. \tag{3.70}$$

Pour trouver l'Hamiltonien hermitien h qui correspond l'Hamiltonien H, en utilisant la relation $\eta=\rho^{+}\rho$, et puisque η est réel, alors

$$\rho = \exp\left[m\int dxf\left(x\right)\right], \tag{3.71}$$

donc

$$\rho x\rho^{-1} = x, \tag{3.72}$$

$$\rho p\rho^{-1} = p+imf, \tag{3.73}$$

et

$$
\begin{aligned}
h &= \rho H \rho^{-1} \\
&= \frac{(p+imf)^2}{2m} - if\,(p+imf)+\beta \\
&= \frac{p^2}{2m}+\frac{m}{2}f^2+f'+\beta.
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

On note que les fonctions prores $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$ de h et H respectivement sont reliées par la relation suivante

$$
|\varphi\rangle = \exp\left[m\int dx f\,(x)\right]|\psi\rangle\,. \tag{3.75}
$$

Maintenant, prenons un exemple pour un Hamiltonien non hermitien où $f\,(x) = -\omega x$, $\beta = -\frac{\omega}{2}$ et ω est la fréquence est une fonction alors l'Hamiltonien est donné par

$$
H = \frac{p^2}{2m} - i\omega x p + \frac{\omega}{2}, \tag{3.76}
$$

alors l'Hamiltonien adjoint est donné par

$$
H^{\dagger} = \frac{p^2}{2m} + i\omega x p - \frac{\omega}{2}, \tag{3.77}
$$

et l'opérateur métrique est le suivant

$$
\eta = \exp\left[-m\omega x^2\right],
$$

donc

$$
\rho = \exp\left[-\frac{m\omega}{2}x^2\right],
$$

et

$$
\rho x \rho^{-1} = x, \tag{3.78}
$$

$$
\rho p \rho^{-1} = p - im\omega x, \tag{3.79}
$$

dans ce cas, l'expression de l'Hamiltonien hermitien équivalent h coïncide avec celle de l'oscillateur harmonique

$$h = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \tag{3.80}$$

et sa soluion de l'équation de de Schrödinger est la suivante

$$\varphi_n\left(x\right) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \tag{3.81}$$

où $H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$ est le polynome d'Hermite avec $\hbar = 1$.

La solution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien non hermitien H est donné à partir de la formule (3.81) par

$$\psi_n\left(x\right) = \rho^{-1}\varphi_n\left(x\right) = e^{\frac{m\omega}{2}x^2}\varphi_n\left(x\right). \tag{3.82}$$

On note que le spèctre d'energie est commun entre les hamiltonien h et H, et il est donné par

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{3.83}$$

3.5.3 Hamiltonien d'un Oscillateur harmonique dans un potentiel linéaire complexe

En consédirant que l'Hamiltonien H s'exprime dans ce cas sous la forme suivante [30]

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + i\lambda x, \tag{3.84}$$

où λ est un paramètre réel.

Il est claire que H n'est pas hermitien et que $H^\dagger$ est donné par

$$H^\dagger = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - i\lambda x, \tag{3.85}$$

l'Hamiltonien H soit pseudo-hermitien si et seulement s'il satisfait la relation de pseudo-hermiticité suivante

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}, \tag{3.86}$$

et puisque l'opérateur métrique n'est pas unique, on peut le prendre comme suit

$$\eta = e^{\alpha p}, \tag{3.87}$$

alors

$$\eta x \eta^{-1} = x - i\alpha \quad \text{et} \quad \eta p \eta^{-1} = p, \tag{3.88}$$

qui signifie que

$$\begin{aligned} \eta H \eta^{-1} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x - i\alpha)^2 + i\lambda (x - i\alpha) \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + i \left(\lambda - m\omega^2 \alpha\right) x + \lambda\alpha - \frac{1}{2} m\omega^2 \alpha^2, \end{aligned} \tag{3.89}$$

en comparant les relations (3.85) et (3.89) , on trouve

$$\begin{cases} \lambda - m\omega^2 \alpha = -\lambda \\ \lambda\alpha - \frac{1}{2} m\omega^2 \alpha^2 = 0, \end{cases} \tag{3.90}$$

la solution le ce système d'équations est

$$\alpha = \frac{2\lambda}{m\omega^2}, \tag{3.91}$$

alors

$$\eta = e^{\frac{2\lambda}{m\omega^2} p}, \tag{3.92}$$

et dans ce cas, la forme la plus simple de l'opérateur ρ est donnée comme suit

$$\rho = e^{\frac{\lambda}{m\omega^2} p}. \tag{3.93}$$

L'opérateur ρ commute avec l'opérateur impulsion, par contre l'action de ρ sur l'opérateur position x donne

$$\rho x \rho^{-1} = x - i \frac{\lambda}{m\omega^2}, \tag{3.94}$$

alors l'Hamiltonien hermitien correspondant

$$\begin{aligned} h &= \rho H \rho^{-1} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x - i\frac{\lambda}{m\omega^2} \right)^2 + i\lambda \left(x - i\frac{\lambda}{m\omega^2} \right) \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} \\ &= h_{osc} + \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} \end{aligned} \tag{3.95}$$

où h_{osc} est l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique. La solution de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien (3.95) est donnée par

$$\phi_n(x,t) = e^{i\frac{\lambda^2}{2m\omega^2}t} \varphi_n(x), \tag{3.96}$$

avec $\varphi_n(x)$ est la soulution de l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique et elle est donnée par la relation (3.81).

Les valeurs propres de l'Hamiltonien (3.95) sont

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}. \tag{3.97}$$

Finalement, la solution de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien non hermitien (3.84) est donnée par

$$\psi_n(x) = \rho^{-1} \phi_n(x) = e^{-\frac{\lambda}{m\omega^2}p} \phi_n(x), \tag{3.98}$$

en utilisant la propriété suivante

$$e^{\alpha p} \phi_n(x) = \phi_n(x + i\alpha), \tag{3.99}$$

alors

$$\psi_n(x) = \rho^{-1} \phi_n(x) = \phi_n \left(x - i\frac{\lambda}{m\omega^2} \right), \tag{3.100}$$

3.5.4 Oscillateur Harmonique à deux dimensions dans le potentiel $i\left[A\left(x_1+x_2\right)+B\left(p_1+p_2\right)\right]$

Dans ce cas, on étudie l'Hamiltonien non hermitien, qui représente l'oscillateur harmonique à deux dimensions dans un potentiel complexe

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)+i\left[A\left(x_1+x_2\right)+B\left(p_1+p_2\right)\right], \tag{3.101}$$

où A et B sont constants réels, x_i et p_i sont les opérateurs position et impulsion respectivement, qui satisfont aux relations de commutation standard de Heisenberg

$$\left[x_j, p_k\right]=i\delta_{ij}, \tag{3.102}$$

et

$$\left[x_j, x_k\right]=\left[p_j, p_k\right]=0, \tag{3.103}$$

où $j, k=1,2$.

Il est claire que l'Hamiltonien H n'est pas hermitien, et que

$$H^{\dagger}=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)-i\left[A\left(x_1+x_2\right)+B\left(p_1+p_2\right)\right], \tag{3.104}$$

il est claire aussi que l'Hamiltonien H n'est pas $\mathcal{PT}$-symétrique car

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT}=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)+i\left[A\left(x_1+x_2\right)-B\left(p_1+p_2\right)\right], \tag{3.105}$$

alors

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT}\neq H. \tag{3.106}$$

Maintenant, on cherche un opérateur métrique qui fait l'Hamiltonien h pseudo-hermitien

$$H^{\dagger}=\eta H\eta^{-1}, \tag{3.107}$$

nous choisissons l'opérateur métrique sous la forme

$$\eta=\exp\left[\alpha\left(p_1+p_2\right)+\beta\left(x_1+x_2\right)\right], \tag{3.108}$$

alors son inverse est

$$\eta^{-1} = \exp\left[-\beta\left(x_1 + x_2\right) - \alpha\left(p_1 + p_2\right)\right], \tag{3.109}$$

d'où

$$\eta x_j \eta^{-1} = x_j - i\alpha, \tag{3.110}$$

et

$$\eta p_j \eta^{-1} = p_j + i\beta, \tag{3.111}$$

en substituant dans la relation (3.107) , on trouve

$$\begin{aligned}\eta H \eta^{-1} &= \frac{1}{2}\left(p_1 + i\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_2 + i\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_1 - i\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2 - i\alpha\right)^2 \\ &+ i\left[A\left(x_1 + x_2 - 2i\alpha\right) + B\left(p_1 + p_2 + 2i\beta\right)\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + i\left(\beta + B\right)\left(p_1 + p_2\right) \\ &+ i\left(A + \alpha\right)\left(x_1 + x_2\right) - \beta^2 - \alpha^2 + 2A\alpha - 2B\beta.\end{aligned} \tag{3.112}$$

L'Hamiltonien H soit pseudo-hermitien si et seulement si L'éq. (3.112) est égal à L'éq. (3.104) , c'est à dire

$$\begin{aligned}H^\dagger &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - i\left[A\left(x_1 + x_2\right) + B\left(p_1 + p_2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + i\left(\beta + B\right)\left(p_1 + p_2\right) \\ &+ i\left(A - \alpha\right)\left(x_1 + x_2\right) - \beta^2 - \alpha^2 + 2A\alpha - 2B\beta,\end{aligned}$$

qui a conduit au système d'équations suivant

$$\begin{cases} \beta + B = -B \\ A - \alpha = -A \\ -\beta^2 - \alpha^2 + 2A\alpha - 2B\beta = 0, \end{cases} \tag{3.113}$$

donc $\beta = -2B$ et $\alpha = 2A$, et l'opérateur métrique devient

$$\eta = \exp\left[2A\left(p_1 + p_2\right) - 2B\left(x_1 + x_2\right)\right]. \tag{3.114}$$

On peut choisir l'opérateur ρ comme suit

$$\rho = \exp\left[A\left(p_1 + p_2\right) - B\left(x_1 + x_2\right)\right], \tag{3.115}$$

alors, l'action de ce dernier sur les opérateur position et impulsion est donné par

$$\rho x_j \rho^{-1} = x_j - iA, \tag{3.116}$$

et

$$\rho p_j \rho^{-1} = p_j - iB, \tag{3.117}$$

en substituant dans la relation qui relie l'Hamiltonien non-hermitien H pas son hamiltonien hermitien correspondent, on trouve

$$\begin{aligned} h &= \rho H \rho^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + A^2 + B^2, \end{aligned} \tag{3.118}$$

qui représente l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique à deux dimensions où $m = \omega = \hbar = 1$. L'équation de Schrödinger pour cet Hamiltonien est la suivante

$$\left[\frac{1}{2}\left(p_1^2 + x_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_2^2 + x_2^2\right)\right]\varphi\left(x_1, x_2\right) = \epsilon\varphi\left(x_1, x_2\right), \tag{3.119}$$

où $\epsilon = E_{n,m} - A^2 - B^2$. Cette dernière équation est elle-même séparable en x_1 et x_2, c'est-à-dire

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) = \chi\left(x_1\right)\xi\left(x_2\right), \tag{3.120}$$

alors

$$\frac{1}{2}\left(p_1^2 + x_1^2\right)\chi\left(x_1\right) = E_1\chi\left(x_1\right) \tag{3.121}$$

$$\frac{1}{2}\left(p_2^2 + x_2^2\right)\xi\left(x_2\right) = E_2\xi\left(x_2\right). \tag{3.122}$$

Ces dernières équations sont celles d'un oscillateur harmonique à une dimension, $\chi\left(x_1\right)$ et $\xi\left(x_2\right)$

ont la même la forme dans la relation (3.81) , et

$$\epsilon = E_1 + E_1 \quad \text{où} \;\; E_1 = n + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad E_2 = m + \frac{1}{2}, \tag{3.123}$$

alors l'énergie du système étudie est

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= \epsilon + A^2 + B^2 \\ &= n + m + 1 + A^2 + B^2. \end{aligned} \tag{3.124}$$

L'Hamiltonien non-hermitien H a le même spèctre d'énergie $E_{n,m}$, tendis que sons vecteurs propres sont donnés par

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(x_1, x_2) &= \rho^{-1} \varphi(x_1, x_2) \\ &= \exp\left[A(p_1 + p_2) - B(x_1 + x_2)\right] \chi(x_1) \xi(x_2) \\ &= \chi(x_1 + iA) \xi(x_2 + iA). \end{aligned} \tag{3.125}$$

Chapitre 4

Conclusion générale

Ce mémoire est consacré à l'étude des Hamiltoniens non-hermitiens indépendants du temps, aves des spectres réels. Après avoir introduit les outils mathématiques et les symétries discrètes en mécanique quantique, nous avons présenté la théorie quantique $\mathcal{PT}$ symétrique introduite par Carl Bender et Stefan boettcher en 1998. Cette dernière a pour objet l'étude des Hamiltoniens non-hermitiens qui restent invariants sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$, où $\mathcal{P}$ est l'opérateur parité et $\mathcal{T}$ est l'opérateur de renversement du temps. Si la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée, alors, les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques ont des valeurs propres réels, et ils sont invariants aussi sous la transformation représenter par l'opérateur de conjugaison de charge $\mathcal{C}$. Dans ce cas, le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire est défini positif. À la fin de ce chapitre, nous donnons un exemple sur les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques 2x2.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté la théorie quantique pseudo-hermitienne. Cette théorie est introduite par Ali Mostafazadeh en 2002, où il a montré que chaque Hamiltonien qui satisfait la relation $H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}$ est pseudo-hermitien, où η est l'opérateur métrique, qu'il devait être défini positif et Hermitien.

Nous avons aussi vu que la pseudo-herméticité est une condition nécessaire et suffisante pour garantir la réalité des spectres des Hamiltoniens, c'est-à-dire que chaque hamiltonien de spectre réel est pseudo-hermitien, et l'inverse est tout aussi vrai. Alors, la théorie quantique pseudo-hermitienne est plus générale que la PT-symétrie, et en particulier, les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques appartiennent à la classe des Hamiltoniens pseudo-hermitiens.

On peut résumer les résultats des deux derniers chapitres par le diagramme suivant

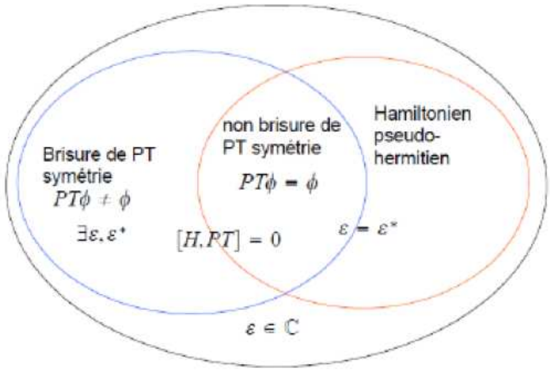

Figure 5.1 : *Diagramme de l'interaction entre la classe des Hamiltoniens pseudo − hermitians et PT − symétries* [30]

À la fin de ce chapitre nous avons donné quatre exemples des hamiltoniens pseudo-hermitiens, où nous avons trouvé la solution de l'équation de Schrödinger pour chacun et nous avons montré la réalité de son spectre.

Bibliographie

[1] C. M. Bender, S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[2] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).

[3] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 2814 (2002).

[4] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 3944 (2002).

[5] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A. **180**, 1 (1942).

[6] W. Pauli, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 (1943).

[7] S. N. Gupta, Phys. Rev. **77**, 294 (1950).

[8] S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. Lond **63**, 681 (1950).

[9] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).

[10] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. **123**, 2183 (1961).

[11] K. L. Nagy, *State Vector Spaces with Indefinite Metric Quantum Field Theory*, Noordhoff, Groningen, Netherlands, (1966).

[12] T. D. Lee, G. C. Wick, Nucl. Phys. B. **9**, 209 (1969).

[13] N. Nakanishi, Suppl. Prog. Theor. Phys. **51**, 1 (1972).

[14] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, Ann. Phys. **213**, 74 (1992).

[15] J. Dieudonné, Quasi-Hermitian operators, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Pergamon, Oxford, 115 (1961).

[16] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique quantique*, T2, Hermann, Paris, (1977).

[17] A. De Angelis, M. Pimenta, Introduction to Particle and Astroparticle Physics, Springer, (2018).

[18] D. Mcmahon, Quantum Field Theory, 1st Edition, Mc-Graw-Hill, (2008).

[19] L. Marleau, Introduction à la physique des particules, Université Laval. Québec. Canada.

[20] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, Springer, (1987).

[21] Collot, *Cours de physique des particules*, Université de Grenoble, 2007/2008.

[22] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002). Erratum Phys. Rev. Lett. **92**, 119902 (2004).

[23] C. M. Bender, The complex pendulum, Physics Reports. **315**, 27 (1999).

[24] C. M. Bender , S. Boettcher and Peter N. Meisinger, J.Math.Phys. **40**, 2201(1999).

[25] C. M. Bender, S. Boettcher, and V. M. Savage, J. Math. Phys. (N.Y) **41**, 6381 (2000).

[26] C. M. Bender and Q Wang, J. Phys. A. **34**, 3325 (2001).

[27] C. M. Bender, S. Boettcher, P. N. Meisinger and Q. Wang, Phys. Lett. A. **302**, 286 (2002).

[28] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Am. J. Phys. **71**, 1905 (2003).

[29] C. M. Bender and H. F. Jones, Phys. Lett. A **328**, 102 (2004).

[30] B. Khantoul, Mémoire de magister, Université des Frères Mentouri, Constantine (2010).

[31] C. M. Bender. Contemporary Physics **46**, 277-292 (2005).

[32] B. Khantoul, Systèmes quantiques non-hermitiens dépendants du temps, thèse de doctorat, Université de Jijel. (2018).

[33] A. Mostafazadeh, , J. Math. Phys. 46, 102108 (2005).

[34] A. Mostafazadeh, J. Phys. A : Math. Gen. 38, 3213

(2005).[35] A. Mostafazadeh, Nucl. Phys. B 640, 419 (2002).

[36] A. Mostafazadeh, J.Math. Phys. 44, 974 (2003).

Résumé:

Ce mémoire est consacré à l'étude des systèmes quantiques non-Hermitiens ayant des spectres réels.

Nous avons commencé ce mémoire par une présentation générale des outils mathématiques, postulats de la mécanique quantique et les symétries disctrètes.

Nous avons introduit ensuite la théorie quantique $\mathcal{PT}$-Symétrique, développée par C. M. Bender and S. Boettcher en1998, où ils ont montré que les spectres des Hamiltoniens invariants sous l'action d'opérateur $\mathcal{PT}$, où la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée, sont réel, et le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire est défini positif, avec $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ sont respectivement les opérateurs de parité , de renversement du temps et conjugaison de charge.

En 2002, A. Mostafazadeh a introduit la théorie quantique pseudo-Hermitienne,

où il a montré que les valeurs propres de chaque Hamiltonien satisfaisant la relation $H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}$ sont réelles et le pseudo-produit scalaire est défini positif. η est l'opérateur métrique, il est un Hermitien et inversible.

A. Mostafazadeh a montré aussi que chaque Hamiltonian $\mathcal{PT}$-symétrique, où la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée, est pseudu-hermitien.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons donné quelques applications sur les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symetriques et les Hamiltoniens pseudo-hermitiens.

Mots- clés :

Hamiltoniens non -hermitiens, $\mathcal{PT}$-symétrie, $\mathcal{CPT}$-produit scalaire, pseudo-hemiticité, opérateur métrique.

Summary:

This thesis is devoted to the study of non-Hermitian quantum systems having real spectra.

We started this thesis with a general presentation of mathematical tools, postulates of quantum mechanics and discrete symmetries.

Then, we introduced the $\mathcal{PT}$-Symmetric quantum theory, developed by C.M. Bender and S. Boettcher in 1998, where they showed that the spectra of Hamiltonians invariant under the action of the operator $\mathcal{PT}$, where the $\mathcal{PT}$-symmetry is not broken, are real, and the $\mathcal{CPT}$-inner product is positive definite, where $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ and $\mathcal{C}$ are the parity, time reversal and charge conjugation operators, respectively.

In 2002, A. Mostafazadeh introduced the pseudo-Hermitian quantum theory,

where he showed that the eigenvalues of each Hamiltonian satisfying the relation $H\dagger = \eta H \eta$ are real and the pseudo-inner product is definite positive. We note that the metric operator η is Hermitian and invertible.

A. Mostafazadeh also showed that each Hamiltonian $\mathcal{PT}$-symmetric, where the $\mathcal{PT}$ symmetry is not broken, is pseudu-Hermitian.

In the last part of this work, we have given some applications on $\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonians and pseudo-Hermitian Hamiltonians.

Keywords :

Hamiltonians non-Hermitians, PT-symmetry, CPT-scalar product, pseudo-hemiticity, metric operator.

ملخص :

هذه الأطروحة مخصصة لدراسة الأنظمة الكمومية غير هيرميسيان أطياف حقيقية.

بدأنا هذه الأطروحة بعرض عام للأدوات الرياضية، مسلمات ميكانيكا الكم والتماثلات المنفصلة.

بعد ذلك، قدمنا نظرية الكم المتماثل PT، التي طورها C.M. باندر و S. بيتشر في عام 1998، حيث أظهروا أن أطياف هاميل- طونيا ثابتًا تحت تأثير عامل PT، حيث يكون PT-سيميتري لم يتم كسره، إنه حقيقي، ومنتج CPT-إينار إيجابي ديونيت ، حيث P و T و C هي عوامل التكافؤ وانعكاس الوقت واقتران الشحن، على التوالي.

في عام 2002 ، قدم أ.مصطفى زاده نظرية الكم الزائفة هيرميسان، حيث أظهر أن القيم الذاتية لكل هاميلتوني ترضي العلاقة $H = Hy$ حقيقية والمنتج الداخلي الزائف هو ديونيت إيجابي.

نلاحظ أن العامل المتري هو هيرميسان وقابل للعكس.

أ. مصطفى زاده أظهر أيضًا أن كل هاملتونيان -PT متماثل، حيث لم يتم كسر تناظر PT، فهو شبه هرميتى.

في الجزء الأخير من هذا العمل، قدمنا بعض التطبيقات على - PT هاميلتونيون متماثلون وهاملتونيون زائفون.

الكلمات الدالة :

غير هاميلتونيين غير هرميتيين، تناظر PT، منتج عددي CPT، زائف-انسداد، عامل متري.