

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*Ministère de l'Enseignement supérieur
et de la Recherche Scientifique*



UNIVERSITE SAAD DAHLEB - BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des études spatiales

Département de construction Aéronautique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN AÉRONAUTIQUE

Option : Avionique

Thème :

**Commandes robustes PRLQR et PRLQG
dédiées à un modèle aéroélastique**

TRAVAIL REALISE PAR :

- DJAHLAT ADLENE
- TADJINE WALID

Encadré par :

Mr/ DILMI SMAIN.

Promotion : 2016/2017

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Résumé

Ce mémoire est basé sur la modélisation et le contrôle d'un système aéroélastique. Ce dernier est obtenu à partir du développement des équations de Lagrange qui nous ont permis d'introduire des incertitudes paramétriques sur le modèle nominal. Le modèle traité est une section d'aile bidimensionnelle de deux degrés de liberté et deux surfaces de commande.

L'étude dynamique est appliquée sur le model d'aile TAMU WING II soumis à des perturbations paramétriques en utilisant les commande robuste PRLQR et PRLQG (commande PRLQR avec observateur de Kalman) afin de supprimer le phénomène de flottement et améliorer les performances du système.

Le mouvement de tangage (l'angle α), de déplacement vertical (h) et les angles de déflexion des gouvernes de commande au niveau de bord de fuite et d'attaque β et γ sont les paramètres mesurés et étudiés.

Les deux lois de commande PRLQR et PRLQG sont démontrées et adaptées au système aéroélastique pour le stabiliser et augmenter ses performances.

Enfin une comparaison entre les deux commandes est faite en observant la vitesse de flottement, la réduction du niveau de vibration et la robustesse de chaque commande.

Mots clés : système aéroélastique, flottement, PRLQR, PRLQG, observateur de Kalman, aéro-servoélasticité, commande robuste, TAMU WING II.

ملخص

تتمحور هذه المذكرة حول النمذجة والسيطرة على نظام إيروإلاستيك. يتم الحصول على هذا الأخير عن طريق تطوير معادلات لاغرانج التي تسمح لنا بإدخال الإرتيابات على النموذج الأولي. يتمثل النموذج المدروس في قسم من جناح الطائرة ثنائي الأبعاد مع درجتين من الحرية وسطحين من أسطح التحكم.

تطبق الدراسة الديناميكية على نموذج الجناح TAMU WING II الذي يتعرض للاضطرابات الخارجية باستخدام أنظمة التحكم : PRLQR و PRLQG (مع ملاحظ كالمن) من أجل القضاء على ظاهرة الاهتزازات وتحسين أداء النظام.

زوايا الانحراف β و γ ، التحرك حول المحور الأفقي (زاوية α) و الإزاحة العودية (h) هي المعالم المدروسة مع المقارنة بين نظاما التحكم (PRLQR و PRLQG) وتكليفهما مع النموذج المدروس لتحقيق استقراره من خلال مراقبة سرعة ظاهرة الاهتزازات، انخفاض في مستوى الاهتزاز ومثانة كل عنصر تحكم.

الكلمات الدلالية: نظام إيروإلاستيكي، اهتزازات، PRLQR، PRLQG، ملاحظ كالمان، إيروسرفوالستستي، نظام

تحكم متين، الجناح TAMU WING II.

Abstract

This final project is based on modeling and control of an aeroelastic system. This system is obtained from the development of Lagrange equations which allowed us to introduce the parametric uncertainties on the nominal model. The model treated is a two-dimensional wing section with two control surfaces.

The dynamic study is applied to the TAMU WING II wing model subjected to parametric disturbances using the robust PRLQR and PRLQG (PRLQR control with Kalman observer) commands in order to eliminate the floating phenomenon and improve the performance of the system.

The pitch (angle α), vertical displacement (h) and the deflection angles β and γ are the parameters observed and studied.

The two control laws PRLQR and PRLQG are demonstrated and adapted to the aeroelastic system to stabilize it and increase its performance.

Finally, a comparison between the two controls is made by observing the floating speed, the reduction of the level of vibration and the robustness of each control.

Keywords: aeroelastic system, floating, PRLQR, PRLQG, Kalman observer, aeroservoelasticity, robust control, TAMU WING II.

Remerciement

Remerciement

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche de près de cinq ans. En préambule, nous voulons adresser tous nos remerciements aux personnes avec lesquelles on a pu échanger et qui nous ont aidés pour la rédaction de ce mémoire.

En commençant par remercier tout d'abord Monsieur DILMI, promoteur de ce mémoire, pour son aide précieuse et pour le temps qu'il nous a consacré.

Nous adressons aussi nos plus sincères remerciements à nos familles : nos parents et tous nos proches et amis, qui nous ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Résumé.....	I
Remerciement	III
Table des matières	IV
Nomenclature.....	VIII
Liste des tableaux et figures	X
Introduction générale.....	01
Chapitre I : Généralités	
Introduction	03
I.1 Aspect historique	02
I.2 Notion d'aéroélasticité	07
I.3. Les phénomènes d'aéroélasticité	09
I.3.1. Les phénomènes d'aéroélasticité statique.....	09
I.3.2 Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique.....	10
I.4. Le flottement.....	10
I.4.1 Caractéristique du phénomène de flottement	11
I.4.2. Les types de flottement	11
I.4.2.1. Le flottement classique	11
I.4.2.2. Le flottement de décrochage	12
I.4.2.3. La divergence	12
I.4.3. La prévention contre le flottement	12
I.5. L'aéroservoélasticité	13
I.5.1 L'observateur d'état	15
I.5.1.1. Définition.....	15
I.5.1.2. Historique.....	16
I.5.1.3. Position de problème.....	16
I.5.1.4. Architecture avec un observateur.....	16
Chapitre II : le modèle mathématique de système aéroélastique	
Introduction.....	18
II.1. Hypothèses du modèle	18
II.2. La modélisation structurelle	18
II.2.1. L'énergie potentielle	19
II.2.2. L'énergie cinétique	19

II.2.3. Les forces généralisées	20
II.3. La modélisation aérodynamique	22
II.4. Application sur le modèle d'aile TAMU WING II.....	22
II.4.1. Les paramètres de TAMU WING II	24
II.5. La représentation d'état de modèle TAMU WING II	25
II.6. Modélisation des incertitudes paramétriques	27
II.6.1. la transformation linéaire fractionnaire LFT	27
II.6.2. Le modèle mathématique du système incertain	28
II.6.3. Application numérique sur le modèle TAMU WING II	32
Conclusion.....	32

Chapitre III : Commandes PRLQR/PRLQG

Introduction	33
III.1. Étude de la contrôlabilité du système.	32
III.2. Méthode PRLQR.....	35
III.2.1. Cadre d'étude.....	35
III.2.2. Condition suffisante de robustesse	37
III.2.3. Equation de Riccati pour synthèse PRLQR	37
III.1.3.1. Méthodologie PRLQR.....	38
III.2.4. Propriétés de la synthèse PRLQR.....	38
III.1.4.1. Rôle de γ	39
III.3. Méthode PRLQG	40
III.3.1. Formulation de la méthodologie PRLQG.....	40
III.3.2. Introduction d'un observateur de Kalman.....	40
III.3.3. Dualité et analogie avec LTRE.....	42
III.3.4. Seconde formulation de la méthodologie PRLQG.....	42
III.4. Conclusion.....	43

Chapitre IV : Simulation et Interprétation

Introduction.....	44
IV.1. Modèle nominal	44
II.1.1. Simulation en boucle ouverte	44
II.1.2. Interprétation.....	47
IV. 2. Modèle incertain	48
IV.2.1. Simulation en boucle ouverte du modèle incertain.....	48

IV.2.1.1. Interprétation	49
IV.2.2. Simulation en boucle fermée	49
IV.2.2.1. Simulation avec la commande PRLQR	49
IV.2.2.1.1. Interprétation	51
IV.2.2.1.2 Le gain en vitesse.....	51
IV.2.2.1. Simulation avec la commande PRLQG	52
IV.2.2.2.1. Interprétation	53
IV.2.2.2.2 Le gain en vitesse.....	53
IV.3. Synthèse des résultats de simulation pour la commande PRLQR et PRLQG	54
IV.3.1. Analyse d'amélioration de performance.....	54
IV.3.2. Analyse de la robustesse.....	55
IV.3.3. Interprétation.....	57
Conclusion	58
Conclusion générale et perspectives.....	60
Liste des références	62
Annexe A.....	a
Annexe B.....	d
Annexe C.....	g
Annexe D.....	m

Nomenclatures

- **Lettres latines :**

Symbole	Unité
L : La force de portance	[N]
M : Le moment aérodynamique.	[kg.m ²]
T : L'énergie cinétique	[joule]
$U U$: L'énergie potentielle	[joule]
Q_J : La composante des forces extérieures qui travaillent selon deux degrés de liberté	[N]
$U_J UJ$: Le champ de déplacement	[m]
I_{cg} : Le moment de l'inertie autour du centre de gravité	[kg.m ²]
m : La masse de l'aile	[kg]
V_{cg} : La vitesse du centre de gravité	[m.s ⁻¹]
V_{ea} : La vitesse de centre élastique	[m.s ⁻¹]
δ_h : Le déplacement vertical virtuel	[m]
δ_α : Le déplacement de tangage virtuel.	[rad]
δ_{wp} : Le travail virtuel dû à la force de portance	[Nm]
δ_{wm} : Le travail virtuel dû au moment M	[Nm]
δ_w : Le travail virtuel total	[Nm]
C_h : Le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical	[Kg/s]
C_α : Le coefficient d'amortissement pour le tangage	[Kg.m ² /s]
h : Déplacement vertical.	[m]
b : Demi corde moyenne du profile d'aile	[m]
x_α : Le paramètre de déséquilibre statique	[-]
m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support	[kg]
m_w : La masse de l'aile seulement.	[Kg]
k_h : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement vertical	[N/m]
k : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage	[Nm/rad]
I_{ea} : Moment d'inertie autour de l'axe élastique.	[Kg .m ²]
$C_{l\alpha}$: La dérivée du coefficient de portance par rapport à α .	[-]
$C_{l\beta}$: La dérivée du coefficient de portance par rapport à β .	[-]
$C_{l\gamma}$: La dérivée du coefficient de portance par rapport à γ .	[-]
$C_{m\alpha}$: La dérivée du coefficient de moment par rapport à α	[-]

$C_{m\beta}$: La dérivée du coefficient de moment par rapport à β	[-]
$C_{m\gamma}$: La dérivée du coefficient de moment par rapport à γ	[-]
S : Surface de l'aile qu'on veut le contrôler.	[m]
V : Vitesse de l'écoulement	[m/s]
t : Temps	[s]
Q_h : La force généralisée selon h	[N]
Q_α : La force généralisée selon α	[N]
e : Erreur de pondération	[-]
(t) : Erreur d'observation	[-]
c_g : Centre de gravité	[-]
c_e : Le centre élastique	[-]
c_a : Centre aérodynamique	[-]

- **Lettres grecques**

Symbole	Unité
β : Angle de déflexion du volet de bord de fuite.	[rad]
γ : Angle de déflexion du volet de bord d'attaque.	[rad]
α : Angle d'incidence.	[rad]
ρ : Densité de l'air.	[/m ³]
λ : La valeur propre	[-]
ε : Coefficient d'amortissement.	[-]
ω : Fréquence d'oscillation	[rad/s]

- **Les matrices et les vecteurs :**

$x \in R^n$: Vecteur qui représente les n variables d'état (vecteur d'état).
 $y \in R^q$: Vecteur qui représente les q sorties.
 $u \in R^p$: Vecteur qui représente les p commandes.
 $A \in R^{n \times n}$: Matrice d'état du système.
 $B \in R^{n \times p}$: Matrice de commande.
 $C \in R^{q \times n}$: Matrice d'observation.
 $D \in R^{q \times p}$: Matrice d'action directe.
 F : La matrice d'amortissement

$G \in \mathbb{R}^{n \times p}$: matrice de gain de l'observateur
 K : est une matrice constante de gain de la commande
 Q : Matrice de pondération pour les variables d'état.
 R : Matrices de pondération pour les variables d'entrée.
 I : la matrice d'inertie
 E : la matrice de rigidité
 $\hat{x}(t)$: vecteur d'état estimé
 $P(t)$: est la solution de l'équation de Riccati.

- **Les fonctions :**

d : La fonction de dissipation de Rayleigh
 H : La fonction Hamiltonienne
 J : est l'index d'optimalité
 φ : La fonction de Wagner

- **Les abréviations :**

ARE : l'équation algébrique de Riccati (Algebraic Riccati Equation).
DRE : l'équation différentielle de Riccati (Differential Riccati Equation).
LCO : Oscillations du cycle limite (Limit Cycle Oscillations).
LFT : Transformation fractionnaire linéaire (Linear fractional transformation).
MIMO : Multi entrées multi sorties (Multi Input Multi Output).
LTI : temps linéaire invariant (Linear Time Invariant).
LMI : Inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities).
LTR : Récupération de transfert en boucle (Loop Transfer Recovery).
LQ : Quadratique linéaire (Linear Quadratic).
LQG : Quadratique linéaire gaussien (Linear Quadratic Gaussian).
LQR : Régulateur quadratique linéaire (Linear Quadratic Regulator).
PRLQ : Paramètre robuste quadratique linéaire (Parameter Robust Linear Quadratic).
PRLQR : Paramètre robuste régulateur quadratique linéaire (Parameter Robust Linear Quadratic Regulator).
PRLQG : Paramètre robuste Quadratique linéaire gaussien (Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian).

Liste des figures et tableaux

- Liste des figures :

Chapitre I

Figure (I.1) : Airbus A380 et sa voilure gauche.....	04
Figure (I.2) : <i>L'avion de Samuel Langley, le 8 décembre 1903, dont l'aile avant a été détruite par le phénomène de divergence</i>	05
Figure (I.3) : Fokker D-8.....	06
Figure (I.4) : Modèle montrant les déformations dues à l'aéroélasticité que peut subir un avion.....	08
Figure (I.5) : Photographie d'un Boeing 747 en vol de croisière.....	10
Figure (I.6) : <i>le saumon d'aile du MH-1521 Broussard</i>	13
Figure (I.7) : Domaine de l'aéroservoélasticité	14
Figure (I.8) : <i>organigramme de l'interaction structure-fluide-commande</i>	15
Figure (I.9) : schéma fonctionnel d'un observateur d'état	17

Chapitre II

Figure (II.1) : la géométrie de la section d'aile bidimensionnelle	19
Figure (II.2) : le modèle aéroélastique d'une section d'aile bidimensionnelle avec les deux surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite	22
Figure (II.3): A) vue de face de la section d'aile avec les deux surfaces de commande défléchir de leur positions initiales B) vue de dessus de l'aile TAMU WING II avec revêtement transparent.	23
Figure (II.4) : mise sous forme de LFT d'un processus incertain.	27

Chapitre III

Figure (III.1) : Forme standard de la synthèse PRLQR.....	40
--	----

Chapitre VI

Figure (IV.1) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical $h(m)$ et l'angle de tangage α à une vitesse de $V=10m/s$	45
Figure (IV.2) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α à une vitesse de $V=15m/s$	46

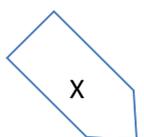


Figure (IV.3) : réponse du système incertain en boucle ouverte pour $V_1 = 13m/s$ et $V_2 = 14m/s$	48
Figure (IV.4) : la réponse de système incertain en commande PRLQR pour : le déplacement vertical h , l'angle de tangage α , pour l'angle de la déflexion des volets β et l'angle de la déflexion des volets γ à une vitesse de $V=13.954$ m/s.....	50
Figure (IV.5) : la simulation successive du déplacement vertical 'h' en plusieurs vitesses de 20m/s à 28m/s avec un pas de 2m/s.....	51
Figure (IV.6) : la réponse de système incertain en commande PRLQG pour le déplacement vertical h , l'angle de tangage α , l'angle de la déflexion des volets β et l'angle de la déflexion des volets γ à une vitesse de $V=13.954$ m/s.....	52
Figure (IV.7) : la simulation successive du déplacement vertical 'h' en plusieurs vitesses de 20m/s à 28m/s avec un pas de 2m/s	53
Figure (IV.8) : la réponse de système en utilisant la commande PRLQR et PRLQG, pour $V= 12$ m/s (a), pour $V=23$ m/s (b), pour $V=26$ m/s (c).....	54
Figure (IV.9) : domaine de stabilité pour la commande PRLQR en 3D.....	55
Figure (IV.10) : domaine de stabilité pour la commande PRLQR en 2D	56
Figure (IV. 11) : domaine de stabilité pour la commande PRLQG en 3D.....	56
Figure (IV.12) : domaine de stabilité pour la commande PRLQG en 2D.....	57

- **Liste des tableaux**

Tableau (II.1) : les paramètres de TAMU Wing II	24
Tableau (IV.1) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 10m/s$	43
Tableau (IV .2) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 15$ m/s.....	46
Tableau (IV.3) : les valeurs des gains de la commande PRLQR pour $V=13.95$ m/s, $\rho = 1$ et γ' variable	49
Tableau (IV.4) : résumé des résultats de simulation obtenus	58

Introduction générale

Introduction générale

L'aéronautique est un domaine qui n'admet pas d'erreurs car des vies humaines peuvent dépendre des moindres détails, c'est pour cela que la sécurité du transport et la fiabilité des appareils sont des facteurs d'importance majeure avant de construire n'importe quel aéronef. Le défi principal est d'éliminer toutes les situations dangereuses qui peuvent survenir au cours d'un vol.

Aujourd'hui les avions sont conçus avec des matériaux plus légers afin d'économiser le carburant et de lutter contre le problème du poids, mais ces matériaux ont des caractéristiques très spéciales. L'une de ces caractéristiques est la souplesse et la possibilité d'utilisation à des vitesses et altitudes élevées, ce qui cause des préoccupations « aéroélastiques » très importantes. [1]

Les constructeurs se focalisent beaucoup plus sur l'aspect « aéroélastique » des appareils à cause des problèmes potentiels qui peuvent être créés et qui peuvent mettre l'avion en danger. La complicité de la dynamique interne et des forces qui agissent sur un aéronef diminue les performances, ce qui peut engendrer des catastrophes.

L'instabilité des surfaces aérodynamiques dans certaines conditions de vol est très dangereuse car elle peut conduire à des destructions au niveau de la structure, cette dernière est aussi connue sous le nom de « flottement », mais la lutte contre ce phénomène est devenue possible avec la naissance du control actif. Au début les contrôleurs classiques ont été utilisés sans avoir ramené de réelles solutions. Ensuite, avec l'amélioration des méthodes de commandes et des contrôleurs plus robustes ont commencé à être utilisés. [2]

La suppression du flottement tout en conservant les performances de l'avion est un critère important chez chaque constructeur avant de lancer n'importe quel appareil, et avec l'évolution du concept d'aéroélasticité, pour pouvoir retarder ou même supprimer ce phénomène est possible. [9]

Ce mémoire présente une étude de l'utilisation d'une commande robuste afin d'éliminer ou retarder le phénomène de flottement ainsi que de stabiliser le système avec le meilleur temps de réponse possible. Les différentes métrologies de synthèse sont les techniques linéaires quadratiques de types robustesse paramétrique PRLQ. La première utilise un gain K_c de retour d'état calculé à partir de la solution de l'équation de Riccati (commande PRLQR) pour améliorer les performances et la robustesse du système ; et la deuxième est basée sur l'utilisation d'un observateur de Kalman qui diminuera le cout de la conception de la commande en éliminant beaucoup de capteurs par l'estimation des états, cela se traduit

Introduction générale

mathématiquement par l'ajout d'un second gain K_f au système. Cette commande appelée PRLQG va permettre également l'amélioration des performances et de la robustesse du système avec des caractéristiques différentes de celle de PRLQR.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est réservé à une introduction du phénomène d'aéroélasticité, il inclut l'historique du problème et quelques solutions proposées afin de lutter contre ce problème, on y introduit aussi brièvement une présentation de l'observateur d'état et de son utilisation dans le domaine de la commande active (voir par la suite commande PRLQG).

Le deuxième chapitre explique le comportement d'un système aéroélastique par des équations aéroélastiques en utilisant les équations de Lagrange. En développant la fonction de Wagner on obtient des équations à deux degrés de liberté qui seront affichées sous forme de représentation d'état pour le système nominal, ensuite et sur un modèle de TAMU WING II une application numérique est faite afin de simuler son comportement dynamique.

Le troisième chapitre est consacré entièrement à l'étude des commandes envisagées, il s'agit des commande PRLQR (Parameter Robust Linear Quadratic Regulator) et PRLQG (Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian).

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation des résultats et simulations avec l'interprétation de chaque résultat en comparant les différentes méthodes utilisées dans le calcul.

Une conclusion générale sera présentée à la fin de ce mémoire, elle résumera le travail effectué ainsi que les points qui restent à étudier et à définir dans un proche avenir.

Chapitre I :

Généralités

Introduction :

L'aéroélasticité concerne les problèmes d'interactions entre un écoulement aérodynamique et une structure souple élastique. En général le terme « aéroélasticité » recouvre l'étude des vibrations de structures dues à l'écoulement, plutôt que les déformations statiques des structures sous l'action des efforts aérodynamiques moyens. [5]

On distingue ainsi trois causes d'interactions écoulement-structure conduisant à des vibrations :

- La turbulence de l'écoulement amont, qui produit un forçage instationnaire déclenchant une réponse vibratoire de la structure. Habituellement traitée sans tenir compte du couplage écoulement-structure, cette réponse vibratoire ne peut être évitée à priori et doit être estimée.
- Le détachement de tourbillons alternés, qui engendre une force aérodynamique quasi-périodique. Si la fréquence de cette force s'approche de celle d'un mode propre de la structure, cela peut aboutir au phénomène d'accrochage où le couplage écoulement-structure devient fort. Ce mécanisme est rarement critique dans les applications aéroélectriques.
- Une vitesse moyenne de vent élevée, qui produit des efforts couplés avec le mouvement de la structure du fait de sa souplesse. Ces efforts induits par le mouvement peuvent rendre le système instable, au-delà d'une vitesse critique, par le biais de toute une panoplie de phénomènes de couplage désignés sous l'appellation générique de flottements. Ils conduisent généralement à une destruction de la structure ; il faut donc absolument les éviter. L'évaluation de la vitesse critique constitue alors l'objectif principal des études sur le flottement. [5].

Ces trois mécanismes ne sont pas indépendants : par exemple la turbulence de l'écoulement amont peut interagir avec le détachement de tourbillons alternés, le plus souvent en l'atténuant, ou bien modifier les propriétés aérodynamiques des structures ce qui change leur comportement vis-à-vis du flottement. De même si les conditions sont favorables, le détachement de tourbillons alternés peut interagir avec certains flottements et modifier sensiblement les valeurs de vitesse critique.

Les domaines concernés par l'aéroélasticité sont multiples, les principaux étant l'aéronautique et le génie civil. Mais ils constituent pourtant des communautés assez éloignées car ces deux domaines s'appliquent à des structures très différentes, typiquement le profil d'aile pour l'aéronautique et le tablier de pont pour le génie civil.

La forme d'un profil d'aile se caractérise par des formes arrondies, sans arrête vive, et une dimension longitudinale très supérieure à son épaisseur transversale. Le bord de fuite est formé de manière à produire une terminaison sans surface perpendiculaire à l'axe longitudinal. La vitesse autour des parois et dans le sillage reste peu perturbée par la présence de la structure. L'écoulement est non décollé, c'est à dire que la vitesse de l'air au voisinage des parois tend à leur rester globalement parallèle.



Figure (I.1) : Airbus A380 et sa voilure gauche

I.1. Aspect historique :

Les phénomènes aéroélastiques ont commencé au tout début à être observés par l'homme dans des concepts assez courants : en biomécanique, sur l'aile des oiseaux, sur les plantes, etc., et l'homme a peut-être résolu les problèmes aéroélastiques de manière empirique. Cependant, la première preuve de l'amélioration de l'aéroélasticité artificielle a été trouvée au 16ème siècle, où les problèmes aéroélastiques d'un moulin à vent ont été résolus de manière empirique aux Pays-Bas, par déplacement des longerons des lames de la moitié de la corde à la position quart de la corde.

Dans le domaine de l'aviation, des problèmes aéroélastiques ont surgi avec le début des essais en vol des avions. Le professeur Samuel Langley de l'institut de Smithsonian a survolé des aérodromes par des modèles réduits jusqu'à 300 mètres. Mais le modèle pleine échelle a échoué deux fois, le dernier le 8 Décembre 1903. Le Deuxième échec a généralement été considéré comme étant dû à la divergence. En 1914, Curtis a survolé l'aérodrome de Langley

avec une légère modification, avant que le problème de divergence de l'aile n'ait été résolu en théorie [5].

Neuf jours après le deuxième échec de Langley, le 17 Décembre 1903, Les frères Wright ont effectué leur vol historique. La rigidité en torsion d'aile de biplan des frères Wright était supérieure à celle de mono-aile de Langley. Etant donné que la vitesse de divergence est directement liée à la rigidité de torsion, le biplan Wright n'a pas souffert de problème de divergence.

Plus de cent ans après, le traitement des problèmes d'aéroélasticité est toujours un sujet important dans l'industrie aéronautique. En effet, pour réduire la masse et améliorer les performances des avions, la structure de ces derniers est de plus en plus légère et par conséquent de plus en plus souple. Cette souplesse croissante rend les phénomènes d'aéroélasticité de plus en plus significatifs, les problèmes aéroélastiques n'existeraient pas si la structure de l'avion était parfaitement rigide.

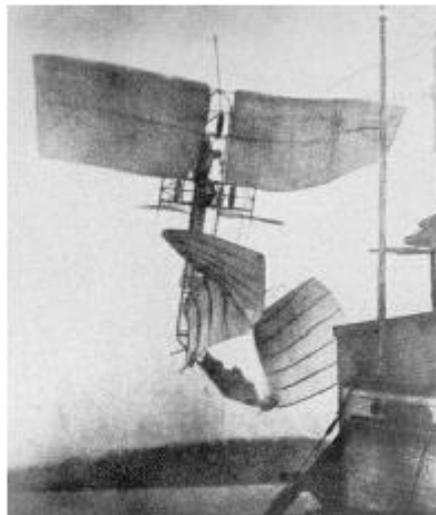


Figure (I.2) : *L'avion de Samuel Langley, le 8 décembre 1903, dont l'aile avant a été détruite par le phénomène de divergence.*

Lors de la conception et de l'utilisation des premiers avions rapides, dans les années 1920, les pilotes pionniers s'aperçurent rapidement d'un problème dû à la survitesse de leurs aéronefs. En effet, aux alentours de 200 km/h, ceux-ci subissaient le *flutter* et les vibrations qui y sont accordées jusqu'à la désintégration des avions, causant ainsi de nombreux accidents dramatiques. Afin d'éviter la destruction de leurs appareils, les pilotes renforcèrent premièrement la structure puis la rigidité des matériaux utilisés. Mais la compréhension de ce

phénomène n'intervint qu'après des recherches théoriques qui aboutirent à la découverte du couplage aéroélastique, appelé plus généralement *flutter*. [5]

Pendant la Première Guerre mondiale, les Allemands ont aussi rencontré des problèmes aéroélastiques. **Fokker D-8**(**Figure (I.3)**), un monoplan, avait de grandes performances mais a souffert de défaillances sur les ailes. Les premiers monoplans avaient une insuffisance de rigidité en torsion provoquant « le flottement » de l'aile, la divergence, le flottement des ailerons de l'aile, et la perte de l'efficacité de l'aileron. Ces problèmes sont généralement résolus par l'augmentation de la rigidité en torsion et par l'équilibrage de la masse. Toutefois, le problème dans **Fokker D-8** était légèrement différent. Après de nombreuses pertes des aéronefs et leurs meilleurs pilotes, la **Luftwaffe** a effectué des tests de résistance statique. Par ces tests de l'avion, il a été constaté que les ailes avaient assez de résistance avec un facteur de sécurité de 6. La Société Fokker a déclaré que le prototype de l'aile n'a aucune défaillance structurelle. La seule différence entre les ailes de prototype et l'aile de production était le renforcement du longeron arrière. Cela a été ordonné par la **Luftwaffe**, en raison des règlements sur les fils entretoisés des ailes paradoxalement, le renforcement des longerons arrière a déplacé vers l'arrière les axes élastiques qui ont abouti à une diminution de la vitesse de divergence, qui a finalement causé la perte des avions **Fokker D-8**.



Figure (I.3) : Fokker D-8

Pendant la période entre 1923- 1929, de nombreux phénomènes de flottement eurent lieu partout dans le monde sur différents types d'avions ; les avions de transport, les bombardiers et les avions d'attaque. Différents types de flottement ont été observés.

Avec l'augmentation des incidences de phénomène de flottement, les tests en vol de flottement sont devenus importants. Les premiers tests consistaient à pousser l'avion à sa vitesse maximale et nous espérons le meilleur. En 1935, en Allemagne, Von Schippe a utilisé

les techniques de test de résonance pendant le vol. La technique de Schippe consiste à obtenir la réponse en fréquence lorsque la vitesse augmente. Avec cette méthode, on prévoyait que le flottement se produira lorsque l'amplitude de résonance tendrait à augmenter asymptotiquement avec l'augmentation de la vitesse. Cependant, le flottement était un phénomène soudain et à cette époque la technologie exigeait aux ingénieurs de test d'être dans l'avion pour vérifier les données. Les réussites de tests sont terminées en 1938, dans le test d'un Junker JU90. Un flottement inattendu de l'aile a été rencontré. L'avion s'est écrasé avec des ingénieurs à bord [9].

Les fabricants sont devenus hésitants pour les vols d'essais de flottement, en raison de leur dangerosité. Cependant, il serait plus dangereux d'utiliser un avion, qui n'a pas été testé. Avec l'amélioration des méthodes d'essai, les appareils de communication et les moyens d'essais, les vols d'essais de flottement ont commencé à gagner l'acceptation à la fin des années 1940.

En 1960, les concepts de contrôle ont été introduits dans des modèles analytiques, suivis par des modèles de soufflerie de contrôle actif aéroélastiques qui ont été utilisés pour vérifier les modèles analytiques. Lors de la dernière moitié de cette décennie, les essais en vol de B-52 et les avions XB-70 ont été menés avec succès, ils ont démontré le concept de l'utilisation des commandes de vol pour modifier les caractéristiques dynamiques de la structure de l'aéronef. Le 2 Août 1973, un avion d'essai CCV B-52 a volé 10 nœuds plus vite que sa vitesse de flottement.

I.2. Notion d'aéroélasticité :

L'aéroélasticité étudie les vibrations des structures souples telles une aile d'avion ou un grand pont à haubans dans un écoulement d'air. Les causes de ces vibrations se séparent en deux grandes familles : [3]

- Les vibrations induites par les variations dans le temps de la vitesse de l'écoulement, présentes même lorsque la structure est immobile. C'est le cas de la turbulence atmosphérique ou des rafales de vent. On parle alors de vibrations induites par la turbulence. Il existe aussi dans le sillage de certaines formes élancées des lâchers périodiques de tourbillons qui peuvent entrer en résonance avec un mode propre de la structure. On parle dans ce cas de vibrations induites par vortex.
- Les vibrations dues à un effet de vitesse moyenne de l'air dont l'écoulement se couple avec le mouvement de la structure. Moins évidentes elles sont souvent plus dommageables.

Les vibrations induites par la turbulence résultent du fait que la vitesse du vent n'est jamais constante et qu'elle évolue aussi bien dans le temps que dans l'espace. Il s'ensuit des efforts aérodynamiques non constants qui peuvent faire vibrer une structure. Pour un avion la variation de la densité de l'atmosphère traversée par l'engin engendre une problématique similaire.

Les vibrations induites par vortex concernent essentiellement les cylindres allongés et ont été étudiées particulièrement sur le cylindre circulaire. En aéroélasticité les vibrations engendrées par le détachement de tourbillons alternés (les tourbillons de Bénard - Von Karman du nom de leurs premiers découvreurs), sont rarement dommageables même en cas de résonance. Elles peuvent en revanche accélérer la fatigue de la structure. Ce n'est pas le cas des structures offshore soumises aux courants marins, pour lesquelles les vibrations induites par vortex constituent un problème majeur.

Les vibrations induites par le mouvement sont dues à des instabilités aéroélastiques qui se déclenchent lorsque la vitesse moyenne du vent est supérieure à la vitesse critique. L'enjeu des études et recherches porte sur la détermination de cette vitesse critique, lorsqu'elle existe, et de faire en sorte qu'elle ne soit jamais atteinte. Par exemple pour un avion on s'arrange pour que cette vitesse critique soit supérieure à la vitesse atteignable par l'engin. De même pour une structure de génie civil on vérifie que la vitesse maximale du vent donnée par la météo reste inférieure à la vitesse critique.



Figure (I.4) : Modèle montrant les déformations dues à l'aéroélasticité que peut subir un avion.

I.3. Les phénomènes d'aéroélasticité :

On admet généralement que les forces fluctuantes exercées par un écoulement fluide sur une structure qui vibre sont de trois types fondamentaux :

- Les efforts quasi-périodiques produits par le détachement tourbillonnaire alterné sont quasiment indépendants du mouvement de la structure lorsque les fréquences sont différentes. En cas de résonance, il existe un couplage entre le détachement des tourbillons et les oscillations, c'est l'accrochage.
- Lorsque l'écoulement est turbulent, les fluctuations de vitesse peuvent provoquer des vibrations de faible amplitude. Le couplage de ces forces induites par la turbulence avec le mouvement de la structure est faible, voire nul.
- Comme la structure bouge, y compris par rapport à ses voisines, elle modifie l'écoulement autour d'elle, qui en retour modifie les efforts sur la structure. Il existe donc des forces de couplage aéroélastiques induites par le mouvement qui peuvent devenir très importantes.

Ces phénomènes sont classés en deux grandes familles :

I.3.1. Les phénomènes d'aéroélasticité statique :

Dans ce cas-là, la forme du système n'évolue pas au cours du temps ou du moins, durant d'assez importants intervalles de temps, le meilleur exemple à donner serait le vol en croisière. La forme de ce dernier ne varie pas au cours du temps (d'où l'appellation « statique ») et ne dépend que des contraintes aérodynamiques appliqués sur l'avion or ces contraintes ne dépendent que de la forme de l'avion. (**Figure (I.5)**).

Les phénomènes d'aéroélasticité statiques peuvent également causer l'endommagement et la rupture du système. Tout d'abord, si les déformations imposées génèrent des contraintes structurelles supérieures à celles acceptées par la structure, le système se déformera de manière irréversible (déformation plastique) ou se rompra. Ensuite, la modification de la forme de l'avion peut modifier la position du foyer aérodynamique de l'avion et donc perturber l'équilibre et la stabilité de l'avion : il est donc important de connaître la forme de l'avion en vol.



Figure (I.5) : Photographie d'un Boeing 747 en vol de croisière

Enfin, un phénomène d'aéroélasticité statique peut diverger : il s'agit alors d'une divergence statique. Dans ce cas, la position d'équilibre entre le fluide et la structure est instable : les efforts génèrent des déformations qui modifient la forme de l'avion, cette nouvelle forme provoque des efforts plus importants qui régénèrent des déformations plus grandes. L'exemple illustrant ce phénomène est l'aventure de Samuel Langley en 1903 : le mouvement de torsion des ailes avait divergé et causé leur destruction.

I.3.2. Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique :

Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique se caractérisent par une évolution dans le temps du système aéroélastique. Parmi ces phénomènes, on peut distinguer deux familles :

- Les phénomènes autodéterminés dans lesquels l'évolution du système au cours du temps est provoquée par une instabilité propre au système. Ce type de phénomène correspond au flottement.
- Les phénomènes forcés dans lesquels l'évolution temporelle du système est provoquée par une action extérieure.

I.4. Le flottement :

Le phénomène de **flottement** (ou **couplage aéroélastique**), de l'anglais *flutter* « battement des ailes », est un effet dû à la survitesse d'un avion en vol. [13]

Physiquement, ce sont des oscillations d'aile qui se produisent dans une structure flexible à travers un fluide. Ce phénomène implique les forces aérodynamiques, l'élasticité de la structure (déformation) et la dynamique des structures (mouvement du système). Ces

oscillations sont auto-entretenues et s'amplifient puisque le fluide en mouvement est susceptible de fournir de l'énergie à la structure en quantité infinie.

Quelle que soit sa construction, un avion subit des efforts en vol, mais aussi au niveau du sol, lors des roulages ou des atterrissages et des freinages. De ces efforts résultent des déformations. Celles-ci vont provoquer des contraintes qui, en vol, déforment la voilure longitudinalement (flexion du longeron) et transversalement par torsion ou vrillage (nervures et revêtement). Or, lorsque la vitesse de l'écoulement de l'air augmente autour d'une aile, la fréquence des mouvements de torsion diminue mais celle des mouvements de flexion augmente.

Il en résulte une vitesse, appelée vitesse critique, pour laquelle ces deux fréquences sont égales et provoquent des phénomènes de résonance. En mécanique, la résonance est un phénomène d'auto-amplification conduisant à la rupture. La résonance va provoquer l'amplification des mouvements de flexion et de torsion en un phénomène appelé *flottement*, qui, s'il se prolonge plus de quelques secondes à quelques dizaines de secondes, conduit à la destruction explosive de l'aile ou d'une partie aérodynamique de l'avion. [15]

I.4.1. Caractéristique du phénomène de flottement :

Le flottement est caractérisé par une vitesse anémométrique spécifique appelée vitesse de flottement. Au-dessus de la vitesse de flottement, l'amplitude d'oscillations augmente jusqu'à la défaillance de la structure. D'autre part, dans un système non-linéaire les oscillations peuvent converger à une amplitude limite avec une fréquence fixe. Ce phénomène est appelé oscillation de cycle de limite au lieu de flottement et il est stable. Cette vitesse critique appelée la vitesse de flottement a comme fonction :

- Les paramètres structuraux d'avion tel que : La géométrie, distribution de masse, distribution de rigidité, et le coefficient d'amortissement structural.
- Les paramètres de vol tel que : la vitesse anémométrique, altitude, nombre de Mach, et angle d'incidence

I.4.2. Les types de flottement :

I.4.2.1. Le flottement classique :

Le flottement classique concerne généralement les profils d'aile souples. Il résulte d'un couplage des mouvements de torsion et de flexion de l'aile dont les fréquences naturelles sont modifiées par les forces aérodynamiques. Si les fréquences de torsion et de flexion se

rejoignent pour une vitesse de vent donnée, la dynamique du système devient instable dans le sens que le mouvement sera amplifié très rapidement et conduira généralement à la destruction de l'engin. Dans ce problème, l'écart de fréquence naturelle entre le mouvement de torsion et celui de flexion est fondamental : plus celui-ci est grand, plus la vitesse critique sera grande. Cette instabilité porte également le nom d'« instabilité par confusion de fréquence ».

I.4.2.2. Le flottement de décrochage :

Le flottement de décrochage concerne les structures de génie civil souples qui ne sont a priori pas aussi bien profilées qu'une aile d'avion. Il s'agit d'une instabilité qui s'applique à un mouvement de flexion seul, ou de torsion seule. Les efforts engendrés par le vent déforment la structure. Cette déformation modifie l'écoulement d'air, qui en retour modifie la déformation, et ainsi de suite. Au-dessus d'une vitesse critique, il peut arriver que les propriétés aérodynamiques de la structure soient telles que l'énergie de ces oscillations soit captée par la structure qui n'arrive plus à la dissiper. L'amplitude vibratoire augmente progressivement. On parle alors d'« instabilité par amortissement ajouté ». Un exemple très connu est celui du pont de Tacoma qui s'est effondré en 1940 à la suite d'une instabilité de torsion du tablier. Lorsque le flottement de décrochage s'applique à un mouvement de flexion, le phénomène prend le nom de « galop ».

I.4.2.3. La divergence :

Ce phénomène se caractérise par la perte de raideur, ce qui entraîne très rapidement la destruction de la structure dont la raideur devient négative après avoir dépassé la vitesse critique, cela dit, il reste néanmoins d'une très rare occurrence.

I.4.3. LA Prévention contre du flottement :

Lors de la conception de l'avion, les ingénieurs repoussent au maximum le *flutter* en augmentant la rigidité de certaines parties de l'appareil mais il existe toujours une vitesse critique.

Afin de rester en dessous de cette vitesse critique, le pilote ne doit jamais dépasser la vitesse indiquée par un trait rouge sur son anémomètre : la *VNE* (*Velocity Never Exceed*). On notera que la *VNE* n'a strictement rien à voir avec le moteur de l'avion, les planeurs (qui n'ont pas de moteurs) peuvent donc être aussi sujets au *flottement*. [5]

De plus, la mise en place de « saumons » (poids) au bout des parties de l'avion concernées (ailes et gouvernes notamment) peut diminuer la résonance de celle-ci en modifiant son centre de gravité. Cette technique est dite d'équilibrage des gouvernes. Cette solution reste inefficace et non-rentable (ajoute du poids à la structure) et elle ne réussit pas toujours.

Au niveau de la conception, on s'aperçoit qu'il y a un rapport évident entre la vitesse critique de flottement et la rigidité de la structure ainsi que le poids. On peut augmenter la vitesse critique de flottement sans ajouter de massé important sur la structure en appliquant la technique du contrôle actif. Dans ce cas, on introduit une boucle fermée entre la réponse aéroélastique de la structure et la commande de gouverne, en appliquant une loi de contrôle constituée d'un contrôleur et d'un observateur optimal .Il est couramment admis que l'application du contrôle actif est intéressante si elle peut augmenter la vitesse critique d'au moins 13% en tenant compte des limites de saturation des forces aéro dynamiques de contrôle dues aux déflexions de gouverne, et en respectant une marge suffisante en phase et en gain. Cette dernière technique est dénommée 'aéroservoélasticité'.



Figure (I.6) : En rouge, le saumon d'aile du MH-1521 Broussard.

I.5. L'aéroservoélasticité :

Historiquement la conception des avions a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids et à l'utilisation de systèmes de commande de vol avec une réponse rapide et une grande autorité, les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion ont fait augmenter la flexibilité de la structure d'un autre côté ,les ingénieurs de la commande de vol ont développé de nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré

la performance de l'avion, la stabilité et les qualités du vol, malheureusement, ces efforts ont été généralement indépendants les uns des autres jusqu'à ce que les premières analyses aéro-servoélastiques furent effectuées. [12]

L'aéro-servoélasticité ou commande active de stabilité aéroélastique a été l'un des domaines de recherche aéronautique les plus actifs pendant les dernières années. C'est une technologie multidisciplinaire issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques qui résultent de mouvement de l'avion et les systèmes de commande de vol [2], Donc l'aéro-servoélasticité est une théorie qui traite des interactions entre :

- Les forces aérodynamiques : aéro.
- Le système de commande : servo.
- Les forces structurelles : élasticité.

On peut illustrer l'interaction de ces disciplines par la figure suivante :

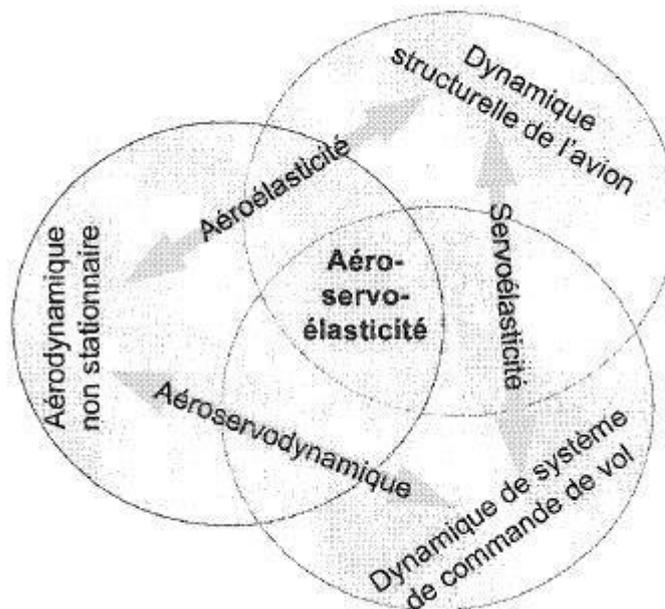


Figure (I.7) : Domaine de l'aéro-servoélasticité

Le digramme bloc d'un système aéroservoélastique est comme suit :

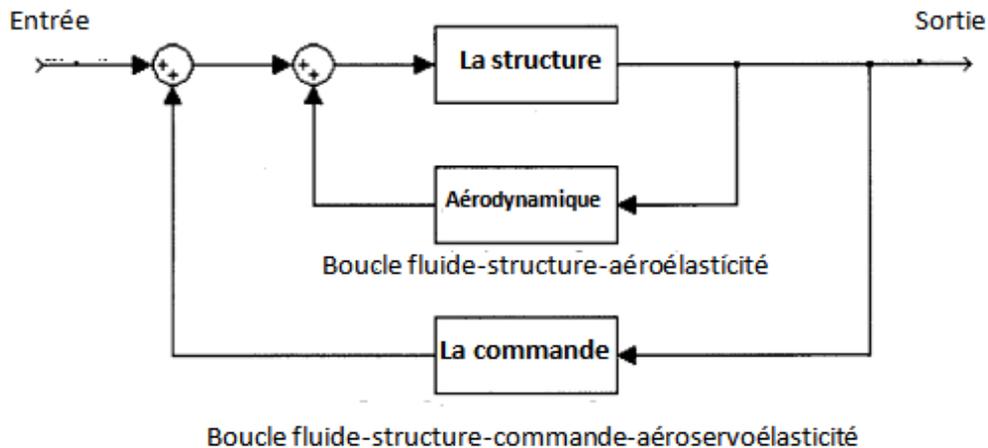


Figure (I.8) : organigramme de l'interaction structure-fluide-commande

La Figure (I.8) est le schéma fonctionnel de concept d'un système aéroservoélastique. Les deux blocs principaux qui sont à l'intérieur représentent la boucle du système aéroélastique, le bloc de contrôleur est ajouté pour former la boucle d'un système aéroservoélastique, le système pourrait être un système de multi input/multi output (MIMO).

On peut voir qu'un modèle aéroservoélastique considérera les interactions aérodynamiques inertielles, et les forces structurales qui représentent le modèle aéroélastique et avec les interactions additionnelles résultant d'inclure la dynamique de système de commande avec ce modèle aéroélastique.

L'aéroservoélasticité est le fruit de fusion de deux grandes théories s'intéressant à des aspects bien différents de la dynamique d'un avion, l'aéroélasticité d'une part porte son attention sur la nature flexible d'un avion, La dynamique du vol d'autre part considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction. Rétroaction exercée par les lois de commandes, et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion, Ce qui permet d'élargir le domaine de vol sans ajouter des masses importantes sur la structure.

I.5.1 Observateur d'état :

I.5.1.1. définition :

En automatique et en théorie de l'information, un **observateur d'état** est une extension d'un modèle représenté sous forme de représentation d'état. Lorsque l'état d'un système n'est pas

mesurable, on conçoit un observateur qui permet de reconstruire l'état à partir d'un modèle du système dynamique et des mesures d'autres grandeurs.

I.5.1.2. Historique :

La théorie de l' *observateur d'état* a tout d'abord été introduite par Kalman et Bucy pour un système linéaire dans un environnement stochastique (Filtre de Kalman-Bucy). Puis Luenberger (en) a fait une théorie générale des observateurs pour les systèmes linéaires déterministes, introduisant notamment les notions d'observateur réduit et d'observateur minimal^{3,4}. Les observateurs linéaires ont donné lieu à des travaux récents, allant vers une généralisation toujours plus poussée^{5,6}. Pour les systèmes non linéaires, le filtre de Kalman étendu⁷ reste très utilisé malgré les résultats importants obtenus récemment sur les observateurs non linéaires à grand gain. Une problématique très importante est celle de la robustesse des observateurs. Un apport fondamental est celui de Doyle et Stein, avec le procédé LTR ("Loop Transfer Recovery") dont une interprétation entièrement algébrique a pu être donnée dans le cas mono variable.

I.5.1.3. Position du problème

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

La mise en œuvre de la commande par retour d'état $u(t)$ a besoin de capteurs permettant de donner à chaque instant t une valeur approximative de l'état $x(t)$. Deux types de capteurs de natures différentes sont utilisés : Le premier est celui des *capteurs physiques*, provenant de l'instrumentation. Ces capteurs sont parfois trop coûteux ou difficiles à réaliser pour des raisons techniques. Pour cette raison, on est amené à concevoir un second type de capteurs -- des *capteurs logiciels*, appelés plus communément des *observateurs*. Ces derniers sont des algorithmes fondés sur un modèle du système et utilisant une information pertinente donnée par des capteurs physiques. Ces capteurs logiciels délivrent à chaque instant t une estimation en ligne des variables d'état non mesurées du système.

I.6.4. Architecture avec un observateur :

Si x désigne l'état (non mesuré) du système, \hat{x} représente l'estimation de l'état faite par l'observateur.

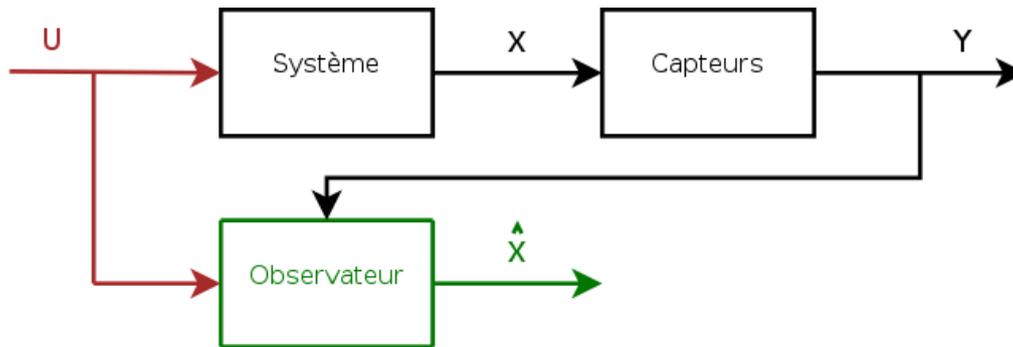


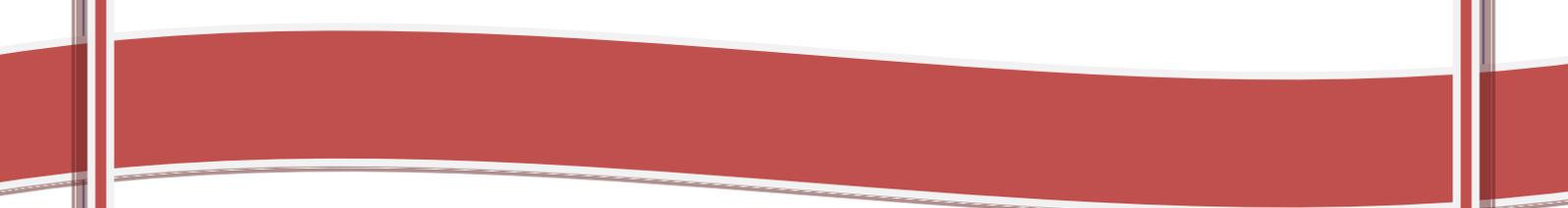
Figure (I.9) schéma fonctionnel d'un observateur d'état

L'estimation de l'état se fait en recopiant de façon virtuelle la dynamique du système en prenant en compte non seulement la commande u , mais aussi les sorties du système (les mesures) y dans le but de corriger les écarts éventuels.

Les principaux soucis en aéronautique sont liés à la stabilité et à l'efficacité des avions. Ceux-ci vont introduire la nécessité des études des interactions aéroélastiques entre les systèmes de commande active et l'avion flexible, pour assurer à l'avion de la stabilité vis-à-vis des perturbations dues aux turbulences et aux rafales ainsi aussi pour augmenter les performances des surfaces de contrôle.

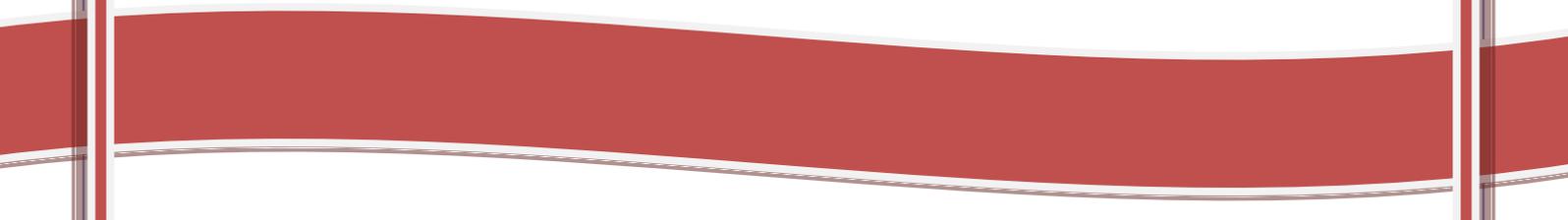
L'idée de l'utilisation des observateurs pour estimer des états peut se présenter comme un atout de très grande utilité dans la conception d'une commande active robuste avec l'avantage initial qui est la nécessité de moins de capteurs physiques.

Pour vérifier cela, nous allons tout d'abord réaliser un modèle mathématique qui traduit les phénomènes aéroélastiques par l'introduction d'incertitudes paramétriques au modèle nominal on appellera ce modèle « modèle incertain », ce dernier nous accordera une représentation plus réaliste du modèle physique.



Chapitre II :

**La modélisation
dynamique
du système**



Introduction :

Aujourd'hui la modélisation mathématique et la simulation occupent une grande partie dans la conception des avions. La combinaison des paramètres de vol, tels que la vitesse, l'altitude et différentes angles composent l'enveloppe du vol où l'avion reste stable aérodynamiquement. [10]

II.1. Hypothèses du modèle :

Afin de faciliter l'étude de notre système on effectue des hypothèses afin d'éliminer les effets physiques de faible importance, les hypothèses considérées dans notre cas sont :

- L'effet de la gravité est négligé,
- L'angle de tangage α est supposé faible,
- La force de portance L et le moment M sont calculés en régime quasi-stationnaire.

II.2. La modélisation structurelle : [22]

On utilise le model représenté dans la figure (II.1), l'aile a deux degrés de liberté, mouvement de tangage α (la torsion) et mouvement vertical h (la flexion). L'aile peut faire un mouvement de tangage autour d'un axe élastique qui est défini comme étant l'axe perpendiculaire au l'axe de cisaillement. La rigidité structurelle pour les deux mouvements est modélisée par deux ressorts de rigidité K_α et K_h respectivement, Avec :

$$K_\alpha = \sum_{i=1}^n C_i \alpha^{i-1} \text{ et } C_i \in R \quad (\text{II.1})$$

K_h : est supposé constant.

Comme montre la Figure (II.1), les points remarquables sur l'aile incluent le centre de la gravité « cg », le centre élastique « ce », et centre aérodynamique « ca ».

Les paramètres « a » et « e » sont tel que $-1 < a < 1$ et $-1 < e < 1$ déterminent la position du centre de gravité « cg » et l'axe élastique.

Le repère \vec{i} représente le repère inertiel, tandis que le repère \vec{b} est fixé à l'aile, son origine est fixé au centre élastique « ce » et orienté comme indiqué ci-dessous avec l'axe \vec{b}_1 est dirigé vers le bord d'attaque. La portance L et le moment M sont mesurés au centre aérodynamique.

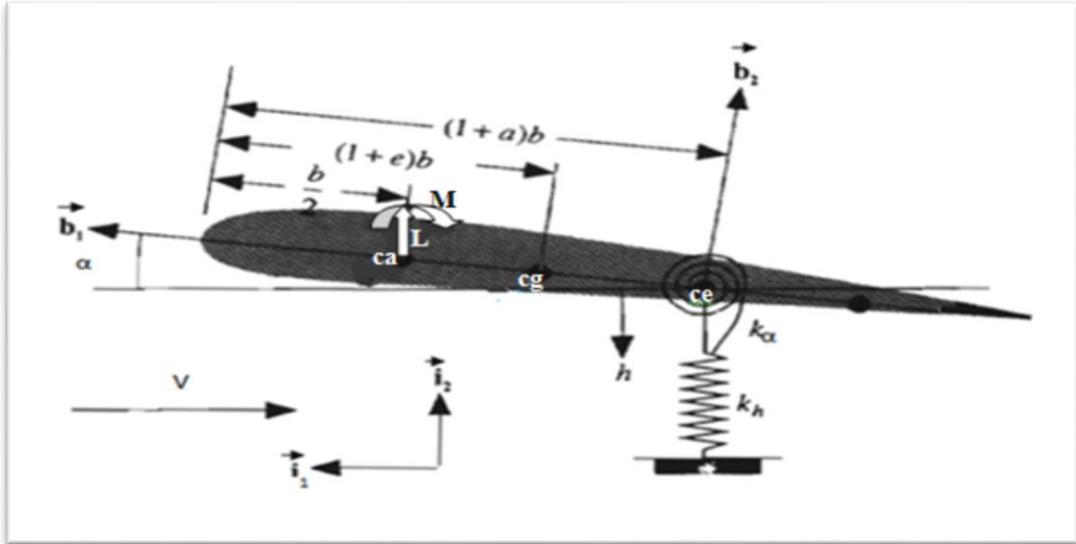


Figure (II.1) : la géométrie de la section d'aile bidimensionnelle. [22]

Les équations du mouvement vertical et de tangage peuvent être obtenues en utilisant les équations de Lagrange (voir l'annexe A) en calculant l'énergie potentielle et cinétique du système.

II.2.1. L'énergie potentielle :

L'énergie potentielle consiste entièrement en énergie élastique, elle représente seulement l'énergie élastique emmagasinée sur les deux ressorts, l'effet de la gravité est négligé. L'énergie potentielle totale est donnée par cette équation :

$$U = \frac{1}{2}K_h h^2 + \frac{1}{2}k_\alpha(\alpha)^2 \quad (\text{II.2})$$

II.2.2. L'énergie cinétique :

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m\vec{V}_{cg} \cdot \vec{V}_{cg} + \frac{1}{2}I_{cg}\dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$$\vec{V}_{cg} = \vec{V}_{ea} + \dot{\alpha} \vec{b}_3 \times b[(1+a) - (1+e)]\vec{b}_1 \quad (\text{II.4})$$

$$\vec{V}_{ea} = -h\vec{i}_2 \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 \quad (\text{II.6})$$

Donc la vitesse de centre de gravité devient :

$$\vec{V}_{cg} = -h\vec{i}_2 + \dot{\alpha} b(a-e)\vec{b}_2 \quad (\text{II.7})$$

La relation entre le repère \vec{b} et le repère \vec{l} est donnée par la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

On utilise la relation (II.8) et on suppose que l'angle de tangage est faible c-à-d que $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx 0$, pour calculer $\vec{V}_{cg} \cdot \vec{V}_{cg}$ on aura :

$$\vec{V}_{cg} \cdot \vec{V}_{cg} = \dot{h}^2 + b^2 x_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + 2bx_\alpha \dot{h}\dot{\alpha} \quad (\text{II.9})$$

Avec : $x_\alpha = (e - a)$ est le paramètre de déséquilibre statique.

On substitue la relation (II.9) dans (II.3) on obtient :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + b^2 x_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + 2bx_\alpha \dot{h}\dot{\alpha}) + \frac{1}{2}I_{cg}\dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.10})$$

La relation entre le moment d'inertie autour de l'axe élastique I_{ea} et le moment d'inertie autour de centre de gravité I_{cg} est donnée par :

$$I_{ea} = I_{cg} + mb^2 x_\alpha^2 (\cos(\alpha))^2 \cong I_{cg} + mb^2 x_\alpha^2 \quad (\text{II.11})$$

On remplace la valeur de I_{cg} dans (II.10) on trouve :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + 2x_\alpha b \dot{h}\dot{\alpha}) + \frac{1}{2}I_{ea}\dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.12})$$

II.2.3. Les forces généralisées :

Les forces généralisées sont calculées en utilisant la méthode de travail virtuel où le travail donné par un déplacement virtuel dû aux forces externes.

Le travail virtuel total effectué par la force de portance L et le moment M est donné par :

$$\delta w = Q_h \delta h + Q_\alpha \delta \alpha \quad (\text{II.13})$$

Pour calculer le déplacement virtuel dû à la force de portance, la vitesse du centre aérodynamique est nécessaire.

$$\vec{V}_{ca} = -\dot{h}\vec{l}_2 + \dot{\alpha}b \left(\frac{1}{2} + a\right) \vec{b}_2 \quad (\text{II.14})$$

Puis, le déplacement virtuel dû à la portance peut être obtenu tout simplement en remplaçant le point au-dessus de chaque variable dans l'équation (II.14) par δ devant lui :

$$\delta \vec{P}_{ca} = -\delta h \vec{l}_2 + b \delta \alpha \left(\frac{1}{2} + a\right) \vec{b}_2 \quad (\text{II.15})$$

Donc le travail virtuel dû à la force de portance est :

$$\delta w_p = L \left[-\delta h + b \left(\frac{1}{2} + a\right) \delta \alpha \right] \quad (\text{II.16})$$

La vitesse angulaire de l'aile est $\delta \vec{b}_3$ ce qui donne la rotation virtuelle due au moment :

$$\delta R_{ca} = -\delta \alpha \vec{b}_3 \quad (\text{II.17})$$

Donc le travail virtuel dû au moment M est :

$$\delta w_m = M \delta \alpha \quad (\text{II.18})$$

Le travail virtuel total effectué par la force de portance L et le moment M est donc :

$$\delta w = \delta w_p + \delta w_m = L \left[-\delta h + b \left(\frac{1}{2} + a \right) \delta \alpha \right] + M \delta \alpha \quad (\text{II.19})$$

Par correspondance de deux équations (II.13) et (II.19), les forces généralisées deviennent :

$$Q_h = -L \quad (\text{II.20})$$

$$Q_\alpha = M + x_\beta \cdot L \quad (\text{II.21})$$

Avec
$$x_\beta = b \left(\frac{1}{2} + a \right) \quad (\text{II.22})$$

Maintenant les équations du mouvement peuvent être obtenues en combinant tous les morceaux, et en utilisant les équations de Lagrange (voir **Annexe A**) comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial h} = Q_h \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial \alpha} = Q_\alpha \quad (\text{II.24})$$

Après dérivation, les équations de mouvements deviennent :

$$m \ddot{h} + m x_\alpha b \ddot{\alpha} + k_h h = -L \quad (\text{II.25})$$

$$m b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha = M \quad (\text{II.26})$$

Pour modéliser les effets de l'amortissement visqueux, la fonction de dissipation de Rayleigh utilisée est :

$$d = \frac{1}{2} C_h \dot{h}^2 + \frac{1}{2} C_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.27})$$

La relation (II.27) est incluse dans les équations de Lagrange (II.23) et (II.24) comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{h}} \right) + \frac{\partial d}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial h} = Q_h \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\alpha}} \right) + \frac{\partial d}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial \alpha} = Q_\alpha \quad (\text{II.29})$$

En substituant des équations (II.2), (II.12), (II.20), (II.21) et (II.27), dans les équations (II.28) et (II.29) on obtient finalement les équations aéroélastiques de mouvement à deux degrés de liberté pour le mouvement vertical et mouvement de tangage.

$$m \ddot{h} + m x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -L \quad (\text{II.30})$$

$$m b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} = M \quad (\text{II.31})$$

Ces deux équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$I \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (II.32)$$

Avec : $I = \begin{bmatrix} m & m x_{\alpha} b \\ m b x_{\alpha} b & I_{ea} \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} C_h & 0 \\ 0 & C_{\alpha} \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_{\alpha}(\alpha) \end{bmatrix}$

II.3. Le modèle aérodynamique : [23]

La force aérodynamique quasi stationnaire L et le moment M pour une aile avec les deux surfaces de commande de bord de fuite et de bord d’attaque (voir **Figure (II.2)**) qu’on a utilisé est comme suit :

$$L(t) = \rho V^2 b s C_{l_{\alpha}} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b s C_{l_{\beta}} \beta + \rho V^2 b s C_{l_{\gamma}} \gamma \quad (II.33)$$

$$M(t) = \rho V^2 b^2 s C_{m_{\alpha}} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b^2 s C_{m_{\beta}} \beta + \rho V^2 b^2 s C_{m_{\gamma}} \gamma \quad (II.34)$$

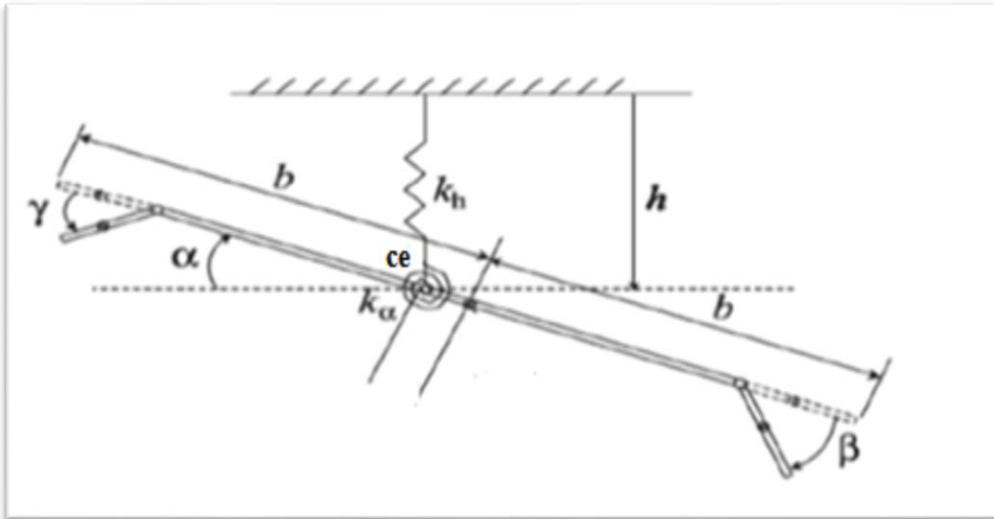


Figure (II.2) : le modèle aéroélastique d’une section d’aile bidimensionnelle avec les deux surfaces de commande de bord d’attaque et de bord de fuite. [23]

II.4. Application sur le modèle d’aile TAMU WING II : [12]

Le modèle utilisé pour notre étude est appelé TAMU WING II, il a été établi dans l’université de Texas, ce modèle est testé dans une soufflerie à faible vitesse pour étudier l’efficacité de la suppression de LCO (limite cycle oscillations) sur le système aéroélastique non linéaire.

La Figure (II.3) montre le modèle utilisé, deux servomoteurs de FUTABA S9402 actionnent les gouvernes, chaque moteur étant capable de produire un couple de 0,654 N.m à 5 V, avec des déflexions des gouvernes linéairement proportionnelles à la tension appliquée.

En outre, deux encodeurs optiques d'E2-1024-375-h sont montés sur les axes de rotation des surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite pour permettre la mesure des angles de braquages de gouverne de sorte qu'ils puissent être comparés aux entrées commandées.

La longueur des surfaces de bord d'attaque et de bord de fuite sont 15 et 20% de la longueur de la corde moyenne respectivement.

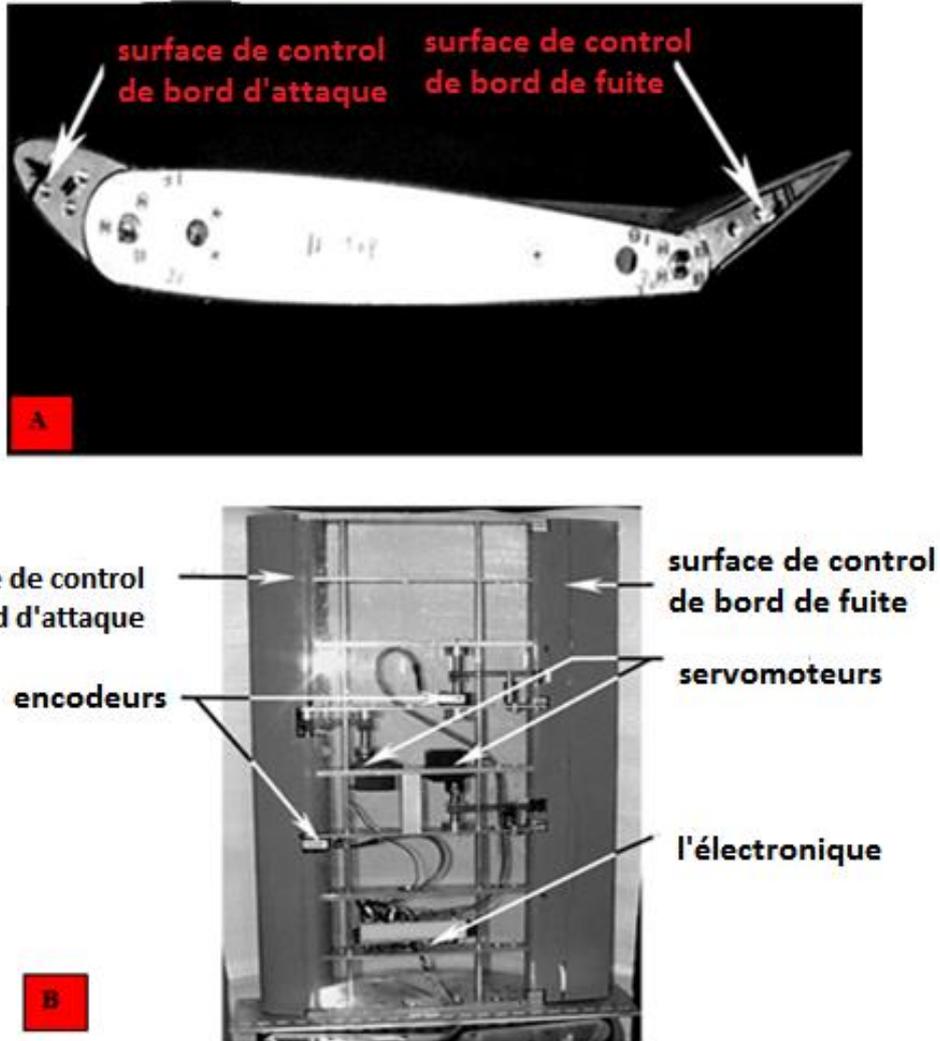


Figure (II.3) : A) vue de face de la section d’aile avec les deux surfaces de commande défléchir de leurs positions initiales. B) vue de dessus de l’aile TAMU WING II avec revêtement transparent. [12]

Les équations de mouvement (II.30) et (II.31) pour ce modèle sont données comme suit :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -L \tag{II.35}$$

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{e\alpha} \ddot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} = M \tag{II.36}$$

II.4.1. Les paramètres de TAMU WING II : [23]

Pour réaliser une application numérique sur les équations de mouvement, les valeurs utilisées sont données dans le tableau suivant :

Le paramètre	La valeur	L'unité
ρ	1.225	Kg /m ³
a	-0.6719	Sans unité
b	0.1905	m
x_α	-(0.0998 + a)	Sans unité
s	0.5945	m
k_h	2844.4	N/m
k_α	3.525	Nm/rad
C_h	27.43	Kg/s
C_α	0.0360	Kg. m ² /s
m_w	5.230	Kg
m_T	15.57	Kg
I_{ea}	0,14193	Kg m ²
C_{l_α}	6.757	Sans unité
C_{m_α}	(0.5+a) c_{l_α}	Sans unité
C_{l_β}	3.774	Sans unité
C_{m_β}	-0.6719	Sans unité
C_{l_γ}	-0.1566	Sans unité
C_{m_γ}	-0.1005	Sans unité

Tableau (II.1) : les paramètres de TAMU WING II. [23]

II.5. La représentation d'état de modèle nominal TAMU WING II :

Pour obtenir la représentation d'état de notre système, On substitue l'équation (II.33) dans (II.35) on obtient :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -\rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] - \rho V^2 s C_{l_\beta} - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} \gamma \quad (II.37)$$

Et on substitue M par sa valeur donnée par l'équation (II.34) dans (II.36) on aura :

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha (\alpha) \alpha + C_\alpha (\dot{\alpha}) \dot{\alpha} = \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (II.38)$$

On combine l'équation (II.37) avec l'équation (II.38) pour éliminer $\ddot{\alpha}$ on aura :

$$\begin{aligned} & \ddot{h} \left[\frac{(m_w x_\alpha b)^2 - m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \dot{h} \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l_\alpha}]}{m_w x_\alpha b} \right] + \\ & \dot{\alpha} \left[\frac{C_\alpha (\dot{\alpha}) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \\ & \alpha \left[\frac{k_\alpha (\alpha) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] - \frac{k_h h I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \\ & + \beta \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\beta} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \gamma \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] = 0 \end{aligned} \quad (II.39)$$

On divise l'équation (II.39) par $\frac{(m_w x_\alpha b)^2 - m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b}$:

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= \dot{h} \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l_\alpha}]}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \\ & \dot{\alpha} \left[\frac{C_\alpha (\dot{\alpha}) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] - \\ & \frac{k_h h I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \alpha \left[\frac{k_\alpha (\alpha) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \\ & \beta \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\beta} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \gamma \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] \end{aligned} \quad (II.40)$$

On peut écrire l'équation ci-dessus (II.40) comme suit :

$$\ddot{h} = a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} \beta + b_{32} \gamma \quad (II.41)$$

En combinant aussi l'équation (II.37) avec l'équation (II.38) en éliminant cette fois \dot{h} on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \left[m_w x_\alpha b - \frac{m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \dot{h} \left[c_h + \frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha}}{V} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{V m_w x_\alpha b} \right] + \dot{\alpha} \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha}}{V} \left(\frac{1}{2} - a \right) b - \frac{m_T C_\alpha}{m_w x_\alpha b} + \right. \\ \left. \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{V m_w x_\alpha b} \left(\frac{1}{2} - a \right) b \right] + \alpha \left[\rho V^2 b s C_{l_\alpha} - \frac{m_T k_\alpha(\alpha)}{m_w x_\alpha b} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{m_w x_\alpha b} \right] + k_h h + \\ \beta \left[\rho V^2 b s C_{l_\beta} + \frac{\rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_T}{m_w x_\alpha b} \right] + \gamma \left[\rho V^2 b s C_{l_\gamma} + \frac{\rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_T}{m_w x_\alpha b} \right] = 0 \end{aligned} \quad (II.42)$$

On divise l'équation (II.42) par $x_\alpha b - \frac{m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b}$ et on calcule $\ddot{\alpha}$ on le trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = \dot{h} \left[\frac{C_h m_w x_\alpha b + \rho V^2 b s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha b + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \\ \dot{\alpha} \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b m_w x_\alpha b - m_T C_\alpha (\dot{\alpha}) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \frac{k_h h m_w x_\alpha b}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \\ \alpha \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha b - m_T k_\alpha(\alpha) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \beta \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\beta} m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_T}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] \\ + \gamma \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\gamma} m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_T}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right]. \end{aligned} \quad (II.43)$$

L'équation ci-dessus (II.43) peut être écrite comme suit :

$$\ddot{\alpha} = a_{41} \dot{h} + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{\alpha} + a_{44} \alpha + b_{41} \beta + b_{42} \gamma \quad (II.44)$$

Les équations (II.41) et (II.44) peuvent être écrites sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Avec : x est le vecteur d'état donné par :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

u : est le vecteur de commande donnée par : $u = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

A et B sont les matrices d'état et de commande données respectivement :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32}(\alpha) & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42}(\alpha) & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

Les coefficients des matrices A et B sont mentionnés dans l'annexe B

On remarque que notre système aéroélastique est de 4^{ème} ordre et il est décrit par un modèle mathématique à paramètres variables non linéaire.

On calcule les variables de la matrice A et B en utilisant les paramètres mentionnés dans le Tableau (II.1) à une vitesse d'écoulement V=13 m/s et on néglige les paramètres non linéaires dans le coefficient de rigidité k_α on trouve :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix}$$

Et

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix}$$

II.6. Modélisation des incertitudes paramétriques :

Dans cette section on considère la modélisation du système aéroélastique où le système est soumis uniquement à des perturbations de type structuré (les perturbations paramétriques), les paramètres affectés par ces incertitudes sont le coefficient d'amortissement C_h et le coefficient de rigidité K_α et la pression dynamique quasi stationnaire q.

II.6.1. La transformation linéaire fractionnaire LFT (linear fractional transformation) : [14]

La représentation des incertitudes paramétriques qui intervient sur le modèle, peut être traduite par la transformation linéaire fractionnaire (LFT).

Considérant une boucle fermée soumise à des incertitudes paramétriques, la première étape consiste à transformer cette boucle fermée de façon à se ramener au schéma d'interconnexion standard P- Δ de la Figure (II.4).

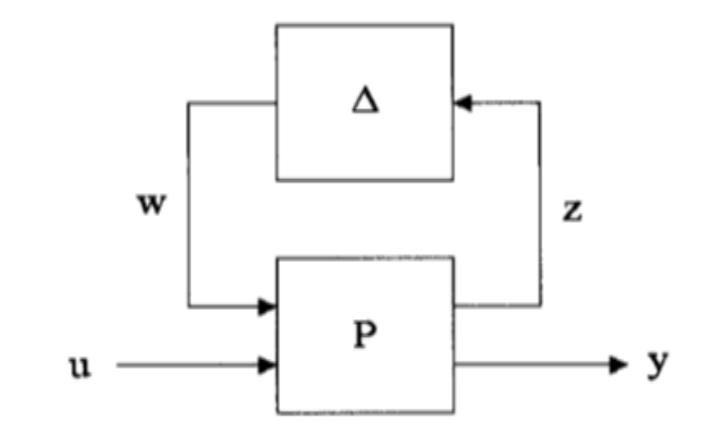


Figure (II.4) : mise sous forme de LFT d'un processus incertain. [14]

La matrice (Δ) contient les incertitudes du modèle (P), elle est de la forme :

$$(\Delta) = \text{diag}(\delta_i I q_i) \quad (\text{II.45})$$

Avec $\delta_i \in [-1; 1]$ représente la variation normalisée de $i^{\text{ème}}$ paramètre incertain et Iq est la matrice identité.

Les deux variables (vectorielles) w et z sont introduits respectivement comme une entrée et une sortie auxiliaires, connectées par une boucle de retour sur un gain Δ selon la relation suivante :

$$w = \Delta \times z \quad (\text{II.46})$$

Le système P s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (\text{II.47})$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (\text{II.48})$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (\text{II.49})$$

Les équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

II.6. 2. Le modèle mathématique du système incertain :

Pour adapter notre système dans le cadre de la synthèse des commande PRLQR et PRLQG, une interprétation pour modéliser le système aéroélastique qui tient compte les incertitudes paramétriques du modèle sur la pression dynamique, la rigidité et l'amortissement est donnée comme suit :

Les charges aérodynamiques L et M sont données par [23]:

$$L(t) = q \left\{ 2bsC_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bsC_{l_\beta} \beta + 2bsC_{l_\gamma} \gamma \right\} \quad (\text{II.51})$$

$$M(t) = q \left\{ 2b^2sC_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2sC_{m_\beta} \beta + 2b^2sC_{m_\gamma} \gamma \right\} \quad (\text{II.52})$$

Avec q c'est la pression dynamique donnée par :

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{II.53})$$

La pression dynamique peut être définie comme étant une combinaison de la pression dynamique quasi-stationnaire nominale, et une perturbation associée suivant la relation. [23]

$$q = q_{nom} + \delta_q \quad (II.54)$$

Où :

q_{nom} : est la pression dynamique nominale

δ_q : est la perturbation associée à la pression dynamique.

En substituant (II.54) dans (II.33) et (II.34) respectivement, on trouve les charges aérodynamiques perturbées données par (II.55) et (II.57) : [22] [23]

$$L(t) = q_{nom} 2bs C_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2bs C_{l_\beta} \beta + q_{nom} 2bs C_{l_\gamma} \gamma + w_1 \quad (II.55)$$

$$z_1 = 2bs C_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bs C_{l_\beta} \beta + 2bs C_{l_\gamma} \gamma \quad (II.56)$$

$$M(t) = q_{nom} 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + q_{nom} 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma + w_2 \quad (II.57)$$

$$z_2 = 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (II.58)$$

Avec :

$$W_1 = \delta_q Z_1 = \delta_1 Z_1$$

$$W_2 = \delta_q Z_2 = \delta_2 Z_2$$

Le coefficient d'amortissement perturbé pour le mouvement vertical peut être défini comme [8] :

$$C_h = C_{h-nom} + W_3 \delta_3 \quad (II.59)$$

Où :

δ_3 : est la perturbation liée au coefficient d'amortissement C_{h-nom} pour le mouvement vertical

$$\delta_3 \in R \quad \text{et} \quad |\delta_3| \leq 1$$

$$W_3 = e_3 C_{h-nom}$$

W_3 : est la pondération sur la perturbation associée au coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_{h-nom}

e_3 est l'erreur de pondération. On prend sa valeur à 40% pour cet exemple.

Pour les buts semblables, le coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage peut être exprimé comme [23] :

$$k_{\alpha} = k_{\alpha-nom} + W_4 \delta_4 \quad (II.60)$$

Avec :

δ_4 : est la perturbation associée au coefficient de rigidité de mouvement de tangage $k_{\alpha-nom}$

$$\delta_4 \in R \quad \text{et} \quad |\delta_4| \leq 1$$

$$W_4 = e_4 K_{\alpha-nom}$$

W_4 : est la pondération sur la perturbation associée au coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage $k_{\alpha-nom}$

e_4 : est l'erreur de pondération. On prend sa valeur a 50% pour cet exemple.

On pose :

$$z_3 = W_3 \dot{h} \quad (II.61)$$

$$z_4 = W_4 \alpha \quad (II.62)$$

On a :

$$w_3 = \delta_3 z_3 \quad (II.63)$$

$$w_4 = \delta_4 z_4 \quad (II.64)$$

On substitue (II.59) dans (II.35) et en combinant avec (II.61) et en substituant (II.60) dans (II.36) et en combinant avec (II.62) on obtient respectivement :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_{\alpha} b \ddot{\alpha} + C_{h\ nom} \dot{h} + k_h h + \delta_3 z_3 = -L \quad (II.65)$$

$$m_w b x_{\alpha} \ddot{h} + I_{e\alpha} \ddot{\alpha} + k_{\alpha\ nom} \alpha + c_{\alpha} \dot{\alpha} + \delta_4 z_4 = M \quad (II.66)$$

Ces deux équations ci-dessus peuvent être écrites comme suit on substitue w_3 et w_4 par leurs valeurs :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_{\alpha} b \ddot{\alpha} + C_{h\ nom} \dot{h} + k_h h + w_3 = -L \quad (II.67)$$

$$m_w b x_{\alpha} \ddot{h} + I_{e\alpha} \ddot{\alpha} + k_{\alpha\ nom} \alpha + C_{\alpha} \dot{\alpha} + w_4 = M \quad (II.68)$$

On combine l'équation (II.67) avec l'équation (II.55) et l'équation (II.68) avec (II.57) on aura respectivement :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_{\alpha} b \ddot{\alpha} + C_{h\ nom} \dot{h} + k_h h + w_3 = -q_{nom} \left\{ 2bs C_{l_{\alpha}} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bs C_{l_{\beta}} \beta + 2bs C_{l_{\gamma}} \gamma \right\} - w_1 \quad (II.69)$$

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha nom} \alpha + c_\alpha \dot{\alpha} + w_4 = q_{nom} \left\{ 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \right\} + w_2 \quad (II.70)$$

On combine ces deux équations ci-dessus pour éliminer $\ddot{\alpha}$ et \ddot{h} on obtient respectivement :

$$\ddot{h} = a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} w_1 + b_{32} w_2 + b_{33} w_3 + b_{34} w_4 + b_{35} \beta + b_{36} \gamma \quad (II.71)$$

$$\ddot{\alpha} = a_{41} h + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{h} + a_{44} \dot{\alpha} + b_{41} w_1 + b_{42} w_2 + b_{43} w_3 + b_{44} w_4 + b_{45} \beta + b_{46} \gamma \quad (II.72)$$

Réarrangeant l'équation (II.56) et (II.58), nous avons :

$$z_1 = c_{12} \alpha + c_{13} \dot{h} + c_{14} \dot{\alpha} + d_{15} \beta + d_{16} \gamma \quad (II.73)$$

$$z_2 = c_{22} \alpha + c_{23} \dot{h} + c_{24} \dot{\alpha} + d_{25} \beta + d_{26} \gamma \quad (II.74)$$

À partir de l'équation (II.61) et (II.62) les pondérations sont définies comme suit :

$$z_3 = W_3 \dot{h} = c_{33} \dot{h} \quad (II.75)$$

$$z_4 = W_4 \dot{h} = c_{42} \dot{h} \quad (II.76)$$

Les équations (II.71), (II.72), (II.73), (II.74), (II.75) et (II.76) peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (II.77)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & w_3 & 0 \\ 0 & w_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients des matrices A et B C et D sont mentionnés dans l'annexe B

II.6. 3. Application numérique sur le modèle incertain TAMU WING II :

En utilisant les paramètres mentionnés dans le Tableau (II.1) et on prend $V= 13\text{m/s}$, les variables des matrices A, B, C, D de l'équation (II.77) sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0753 & -0.3024 & -0.0753 & 0.3024 & -5.7551 & 0.4122 \\ 0.3024 & 8.2595 & 0.3024 & -8.2595 & 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.5305 & 0.1177 & 0.0263 \\ 0 & -0.0501 & -0.0039 & -0.0009 \\ 0 & 0 & 10.9720 & 0 \\ 0 & 1.7625 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8584 & -0.0355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0290 & -0.0043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, deux étapes ont été élaborées : Le développement mathématique du modèle nominal en premier, ensuite le développement de modèle incertain.

La modélisation est basée sur le formalisme de Lagrange qui est un outil puissant permettant d'arriver au modèle mathématique d'une manière simplifiée ; il ne tient en compte que les forces ayant un travail.

Le modèle nominal obtenu n'est qu'une approximation du modèle réel ; des dynamiques ont été négligées lors de la synthèse telle que l'effet de la gravité.

Le modèle incertain est obtenu en développant le modèle nominal en introduisant des paramètres incertains sur le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_h , Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage K_α et la pression dynamique q .

Chapitre III :

Commandes PRLQR/PRLQG

Introduction :

Le contrôle d'un système ou d'un processus est conventionnellement subdivisé en deux problèmes qui sont la poursuite et la régulation. Le problème de base de la poursuite est de permettre à un système de suivre le mouvement d'une cible avec un minimum d'erreur, tant que la régulation est de permettre à un processus de délivrer une production donnée en corrigeant toute tendance à dévier loin du point désiré [14].

La sécurité et la stabilité des avions en vol ont été une priorité pendant plusieurs années, c'est l'un des sujets de recherche importants en aéronautique pour assurer un vol stable et pour éviter toute action néfaste pour la structure de l'appareil et le confort des utilisateurs, les systèmes du contrôle doivent fournir la stabilité et les performances d'un modèle donné. Ces objectifs font un grand défi, grâce à la compréhension de dynamique et de contrôle amélioré, ils ont été capables de développer des nouveaux modèles qui sont plus rapides, ayez la plus grande performance et fonctionnent robustement dans de très grands intervalles de vol [16].

Le contrôle optimal sert à concevoir un contrôle pour minimiser l'index de la performance, en général, le problème du contrôle optimal est difficile à résoudre, à l'exception des systèmes linéaires avec un index de performance du second degré.

L'utilisation de la théorie du contrôle optimale développe une méthode pour aboutir à des paramètres qui sont capables à accomplir la performance désirée et la stabilité dans le système du contrôle et la robustesse. La question qui se pose pour ces systèmes de contrôle, c'est bien la robustesse face aux différentes perturbations et les pannes qui peuvent présenter un danger d'instabilité conduisant au problème de destruction de la structure et bien évident un décrochage, dans notre cas étudié dans ce projet, le flottement d'aile doit être contrôlé avec une commande robuste pour garantir le bon fonctionnement de l'appareil en toute sécurité.

La robustesse peut se définir par le bon fonctionnement du système dans ces conditions : Perturbations internes, Perturbation externes et les pannes.

Les commandes utilisées dans ce projet sont :

- La commande PRLQR ((Parameter Robust Linear Quadratic Regulator).
- La commande PRLQG (Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian).

Dans ce chapitre on commence par l'étude de la contrôlabilité du système, puis on présente la loi de la commande PRLQR en nous appuyant sur les lois des commandes classiques (LQR, LQG en **annexe C**) ensuite on introduit un observateur de Kalman pour estimer les états manquants après l'avoir supposé (commande PRLQG).

Ce chapitre va donc être consacré à la robustification du système vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Ces différentes synthèses robustes sont fondées sur une modélisation en espace d'états de l'incertitude inhérente au système. Nous allons définir la synthèse PRLQR (Parameter Robust LQR) qui tient compte de la solution de l'équation de Riccati, où s'il y a une solution, le gain de retour qui s'en déduit assure une robustesse vis-à-vis des paramètres incertains. Ainsi que donner la démonstration originale de la synthèse PRLQG (Parameter Robust LQG) en introduisant l'observateur et son gain dans le but d'augmenter sa robustesse et ses performances.

III.1. Etude de la contrôlabilité du système (voir l'annexe D) :

Avant de présenter les commandes utilisées dans notre projet nous devons vérifier d'abord une propriété importante, qui est la contrôlabilité. La propriété de contrôlabilité est nécessaire pour garantir que nous avons l'autorité pour conduire l'état du système d'un état arbitraire à un état désiré.

La matrice de contrôlabilité est définie comme suit :

$$c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (\text{III.1})$$

Dans notre cas l'ordre de système est 4 ($n = 4$) donc la matrice de contrôlabilité devient pour notre système :

$$c = [B, AB, A^2B, A^3B] \quad (\text{III.2})$$

À l'aide de la fonction 'ctrb' du MATLAB, on peut vérifier que le système s'il est contrôlable.

Rank [Ctrb (A, B)] = 4 = **n**, alors : 'le système aéroélastique est contrôlable'.

Hypothèse : (III.0)

pour commencer notre étude des méthodes mentionnées il est nécessaire de supposer ce qui suit :

- Le système est contrôlable.
- Le système vérifie les propriétés induites par les hypothèses LQ (**annexe C**) selon lesquels :
 - Dim(z) ≤ Dim(u) (q ≤ m) ;
 - le transfert $Z/U(s) = N(sI - A)^{-1}B$ n'a pas de zéros dans le demi-plan droit, alors :

$$P_0 = 0$$

III.2. Méthode PRLQR :

Cette méthode utilise en plus des données du système, la modélisation des incertitudes et permet de prendre en compte l'amplitude des variations paramétriques contrairement à la méthode classique.

III.2.1. Cadre de l'étude :

Le modèle et ses incertitudes sont représentés comme suit :

Soit :

$$\Delta A(\delta) = \Delta M_c(\delta) N \tag{III.3}$$

Avec toutefois la restriction suivante :

$$\Delta(\delta) = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_r \end{bmatrix} \text{ Avec } |\delta_i| \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \tag{III.4}$$

Pour pouvoir aborder cette méthode nous aurons besoin de rappels sur la méthode LQR classique (présenté en **annexe C**).

Si l'on veut parler de robustesse paramétrique, il faut, de toute manière, faire intervenir la matrice, la seule qui soit dépendante de l'incertitude inhérente au système.

Par ajout et retrait des termes $P\tilde{A} + \tilde{A}^T P$, et sP à l'équation de Riccati, nous obtenons l'équation :

$$P(sI - \tilde{A}) - (sI + \tilde{A}^T) P + P(-A) + (\tilde{A}^T - A^T)P - Q_x + PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{III.5}$$

Post-multipliée par $(sI - \tilde{A})^{-1}B$ et pré-multipliée par $B^T(-sI - \tilde{A}^T)^{-1}$, l'équation précédente se réécrit alors :

$$B^T \Phi^*(s)[P(A - \tilde{A}) + (A - \tilde{A})^T P + Q_x] \Phi(s) B = B^T \Phi^*(s) K_C^T R + R K_C \Phi(s) B + B^T \Phi^*(s) K_C^T R K_C \Phi(s) B \quad (\text{III.6})$$

Où il a été posé :

$$R K_C = B^T, \quad K_C^T R = P B$$

$$\Phi(s) = (sI - \tilde{A})^{-1}, \quad \Phi^T(-s) = \Phi^*(s) = (-sI - \tilde{A}^T)^{-1}$$

Supposons que la matrice de pondération R soit proportionnelle à la matrice identité selon :

$$R = P I \quad (\text{III.7})$$

Alors, si la quantité ρI est ajoutée de part et d'autre de l'égalité, nous obtenons finalement :

$$[I + K_C \Phi B]^* [I + K_C \Phi B] = I + \frac{1}{\rho} B^T \Phi^* [-P \Delta A - \Delta A^T P + Q_x] \Phi B \quad (\text{III.8})$$

On peut reconnaître la matrice de transfert en boucle ouverte $K_C \Phi(s) B$, tandis que $(I + K_C \Phi(s) B)^{-1}$ n'est rien d'autre que la fonction de sensibilité du système en boucle fermée. Ce premier résultat, obtenu dans le domaine fréquentiel, montre comment le lieu de Nyquist évolue en fonction des différentes valeurs de la matrice \tilde{A} .

En particulier, si le gain de retour K_C est appliqué au système nominal ($\Delta A = 0$), la dernière équation permet de retrouver un résultat très intéressant de la commande LQR, puisqu'elle se réduit à :

$$\|I + K_C (sI - A)^{-1} B\|_\infty \geq 1 \quad (\text{III.9})$$

Cette dernière égalité assure que le lieu de Nyquist reste toujours à l'extérieur du cercle unité et implique d'excellentes marges de stabilité.

En outre, si le gain de retour K_C est appliqué à un système perturbé ($\Delta A \neq 0$), il est plus difficile de tirer des conclusions quant à l'allure du lieu des racines. Il s'avère même que dans certains cas, la stabilité peut être mise en défaut.

En résumé, malgré les «excellentes marges de gain et de phase qu'elle assure, la loi de commande LQR ne garantit rien quant à la robustesse aux variations paramétriques. Il est donc tentant de trouver une synthèse s'inspirant de la méthodologie LQR pour ses propriétés intéressantes et qui puisse tenir compte des incertitudes paramétriques. C'est en l'occurrence la dernière relation trouvée (III.9) qui va nous aider à développer la synthèse PRLQR.

III.2.2 Condition suffisante de robustesse

Par analogie aux résultats obtenus dans le chapitre 2 (modélisation système incertain) :

$$F_C^T(-j\omega)RF_C(j\omega) \geq R \quad (III.10)$$

La condition $-P\Delta A = \Delta A^T P + Q_x \geq 0$ permet donc de garantir une robustesse aux performances identique à celle obtenue par la synthèse LQR (**annexe C**), à l'exception ici, que cette garantie est valable quelle que soit la valeur de la perturbation ΔA . Ainsi, nous avons obtenu une condition suffisante pour assurer à la fois une certaine robustesse en stabilité et en performance vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

III.2.3. Equation de Riccati pour la synthèse PRLQR :

Le problème est donc de trouver un critère J , c'est-à-dire un réglage (Q_x, ρ) tel que la solution P de l'équation de Riccati (III.16) garantisse pour toutes les valeurs ΔA admissibles. Nous allons utiliser, pour cela, une démarche déjà bien connue dans le domaine de la synthèse robuste pour les systèmes incertains. Issue du travail de Petersen [14], elle est fondée sur la « borne de Petersen – Hollot » [13], [14], qui consiste à donner un majorant d'un ensemble d'équations de Lyapunov sous la forme d'une simple équation de Riccati :

L'équation (III.10) s'écrit aussi

$$PM_C\Delta(\rho)N + N^T\Delta(\rho)M_C^T P \leq Q_x \quad (III.11)$$

Or $|\delta_i| \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ l'équation (III.11) est vérifiée si :

$$|PM_C N + N^T M_C^T P| \leq Q_x \quad (III.12)$$

A ce niveau, on fait appel à l'inégalité

$$2|ab| \leq \gamma a^2 + \frac{1}{\gamma} b^2 \quad (III.13)$$

Où γ est une constante positive choisie arbitrairement. Matriciellement, on peut alors écrire :

$$\gamma N^T N + \frac{1}{\gamma} PM_C M_C^T P \leq Q_x \quad (III.14)$$

Ce qui est vérifié s'il existe une matrice définie positive Q_x , telle que :

$$Q_x = Q_{x0} + \gamma N^T N + \frac{1}{\gamma} PM_C M_C^T P \quad (III.15)$$

En reportant cette valeur (III.15) dans l'équation (III.11), nous obtenons l'équation de Riccati pour la synthèse PRLQR :

$$PA + A^T P - \frac{1}{\rho} PBB^T P + Q_{x0} + \gamma N^T N + \frac{1}{\gamma} PM_C M_C^T P = 0 \quad (III.16)$$

On constate donc que la pondération sur l'état recherchée Q_x , dépend de la solution P de l'équation de Riccati par le terme $\frac{1}{\gamma} P M_c M_c^T P$ qui est d'autant plus important que γ est faible. Le critère J ne peut donc être exprimé a priori. Cela entraîne également le fait que l'équation de Riccati (4) n'admet pas toujours de solution P définie positive si γ est trop faible. Sur le plan pratique, on règle Q_{x0} et ρ pour satisfaire les performances sur le modèle nominal en oubliant les termes $\frac{1}{\gamma} P M_c M_c^T P$ et $\gamma N^T N$ dans le critère. Puis on introduit ces termes par le biais du paramètre γ réglé de façon à ce que la solution P de l'équation de Riccati (4) soit définie positive.

La méthode PRLQR peut donc se résumer comme suit :

III.2.3.1 Méthodologie PRLQR :

Pour un système incertain défini par (III.4) et vérifiant les hypothèses (III.0), la synthèse PRLQR permet d'obtenir un gain de retour d'état, robuste aux incertitudes paramétriques bornées. Ce retour d'état est défini par :

$$u(t) = -K_c \quad \text{avec} \quad K_c = \frac{1}{\rho} B^T P \quad \text{(III.17)}$$

P est la solution définie positive ($P = P^T \geq 0$), si elle existe, de l'équation de Riccati suivante :

$$PA + A^T P + (Q_{x0} + \gamma N^T N) - P \left(\frac{1}{\rho'} B B^T - \frac{1}{\gamma} M M^T \right) P = 0 \quad \text{(III.18)}$$

Où Q_{x0} et ρI sont respectivement les pénalisations sur l'état et la commande, choisies pour le système nominal, et γ une constante positive choisie a priori et suffisamment élevée pour que P existe.

Donc pour cette méthode, la commande PRLQR en boucle fermée est définie comme :

$$u = -K_c x$$

III.2.4. Propriétés de la synthèse PRLQR :

Revenons sur l'expression de la fonction coût que la commande PRLQR cherche à minimiser. L'explicitier revient à la décomposition en quatre termes pénalisants :

$$j = \int_0^{\infty} \left(x^T Q_{x0} x + x^T \gamma N^T N x + x^T \frac{1}{\gamma} P M_c M_c^T P x + \rho u^T u \right) dt \quad (\text{III.19})$$

- Le premier d'entre eux, $x^T Q_{x0} x$ est la pénalisation sur la performance choisie pour le système nominal.

- Le second terme, $x^T \gamma N^T N x$ traduit l'énergie incertaine, c'est-à-dire l'énergie du système vue par les directions incertaines (les plus sensibles) de l'espace d'état.

- Le terme $\frac{1}{\gamma} P M_c M_c^T P$ est en fait un terme qui permet de prendre en compte une perturbation pire cas dans la direction M_c définie par les paramètres incertains.

- Enfin, $\rho u^T u$ est le terme de pondération sur la commande. Il permet de limiter l'amplitude de u . Et, selon la valeur de ρ , la bande passante du système diffère.

Nous avons donc augmenté la garantie de robustesse de stabilité par rapport aux incertitudes modélisées. Les effets de ces termes sont de minimiser l'influence de l'énergie incertaine stockée par le système et de réaliser une barrière aux perturbations pire-cas agissant dans la direction des paramètres incertains M_c . Leur importance relative est pondérée par γ .

III.2.4.1. Rôle de γ :

γ réalise un compromis entre la minimisation de l'énergie incertaine ($\gamma N^T N$) et la désensibilisation aux perturbations pire-cas orientées dans la direction des paramètres incertains ($\frac{1}{\gamma} P M_c M_c^T P$). Si γ est très grand, l'énergie incertaine du système est fortement pondérée. Cette pondération suffit à rendre le système robuste aux incertitudes paramétriques, mais les performances sont dégradées dès que $\gamma N^T N \gg Q_{x0}$. En revanche, quand γ tend vers 0, plus aucune perturbation n'est permise dans la direction M_c . Autrement dit, les paramètres incertains ne doivent pas influencer la réponse du système.

Pour un meilleur compromis, il est préférable de prendre une valeur intermédiaire de γ . Ce choix est d'autant plus judicieux que la bande passante du système boucle fermée est très large pour les valeurs extrêmes de γ (gains de K_c élevés). Le second rôle de γ est, de fait, d'influencer la bande passante du système boucle fermée. Il est facile de vérifier que la commande PRLQR donne une bande passante plus grande que la commande LQR, puisqu'on désensibilise le système aux variations paramétriques. Par ailleurs, plus la bande passante est large et moins le système est robuste aux incertitudes hautes fréquences non modélisées. C'est la contrepartie « redoutable » de la bonne robustesse aux incertitudes paramétriques.

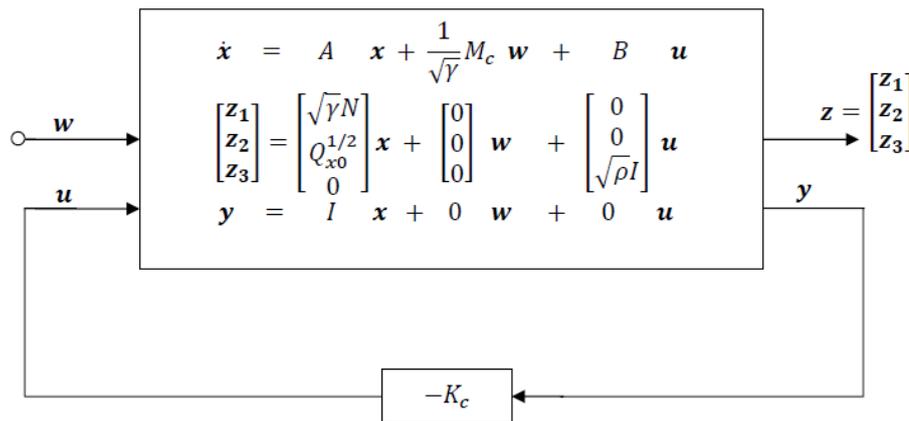


Figure (III.1) : Forme standard de la synthèse PRLQR.

III.3. Méthode PRLQG :

Dans cette section, nous allons nous appuyer sur les propriétés asymptotiques des synthèses LQ et LQG (voir **annexe C**) pour développer une technique de synthèse de loi de commandes, asymptotiquement robustes aux variations paramétriques. On appelle cette technique la synthèse PRLQG.

III.3.1. Formulation de la méthodologie PRLQG

Pour un système incertain défini par (III.4) et vérifiant les propriétés des hypothèses (III.0), il est possible de retrouver, par la synthèse LQG, la robustesse paramétrique du filtre de Kalman en ajustant la constante q dans le critère LQ défini par [16] :

$$Q_x = Q_{x0} + qN^T N \text{ et } R = R_0 \tag{III.20}$$

Où Q_{x0} et R_0 sont des matrices de pondérations réglées pour satisfaire la performance sur le système nominal.

Pour cette méthode, la commande PRLQG en boucle fermé est définie comme :

$$u = -K_c \hat{x}$$

Avec : $\hat{x} = x_{\text{(estimé)}}$

III.3.2. Introduction d'un observateur de Kalman

Si l'on considère que seules les sorties $y=Cx$ sont accessibles à la mesure, par analogie avec la méthode LQG, on synthétisera un observateur de Kalman [19] pour estimer l'état et appliquer sur cet état estimé, noté \hat{x} , le gain K_c calculé précédemment. La représentation d'état du correcteur dynamique ainsi obtenu s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f D K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ y \end{pmatrix} \quad (III.21)$$

Où K_f désigne le gain de l'observateur de Kalman. La représentation d'état, entre w et z , de la boucle fermée par la commande $u = -K_c \hat{x}$ s'écrit maintenant :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK_c & M_c \\ K_f C & A - BK_c - K_f C & 0 \\ N & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \\ w \end{pmatrix} \quad (III.22)$$

Ou encore, en faisant apparaître l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ dans le vecteur d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\varepsilon} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK_c & K_f C & 0 \\ 0 & A - K_f C & M_c \\ N & N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \varepsilon \\ w \end{pmatrix} \quad (III.23)$$

Le transfert $Z/W(s)$ s'écrit donc maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{Z}{W}(s) &= [N \quad N] \begin{pmatrix} sI_n - A + BK_c & -K_f C \\ 0 & sI_n - A + BK_f C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ M_c \end{pmatrix} \\ &= N[(sI_n - A + BK_c)^{-1} K_f C + I_n] (sI_n - A + BK_f C)^{-1} M_c \end{aligned} \quad (III.24)$$

Posons $\varphi(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1} K_f$, nous pouvons décomposer le transfert $\varphi(s)$ sur ses valeurs propres λ_i , ses vecteurs propres à droite V_i et à gauche U_i . Soit :

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^n \frac{N v_i u_i^T K_f}{z - \lambda_i} \quad (III.25)$$

Et de la même façon, le réglage asymptotique de la commande LQ, tel qu'il a été présenté précédemment, entraîne $\varphi(s) = 0$. Donc :

$$Z/U(s) = N(sI_n - A + K_f C)^{-1} M_c \quad (III.26)$$

C'est-à-dire que de la perturbation $\Delta(\delta)$, on ne « voit » que les modes d'observation (valeurs propres de $A - K_f C$). Ces modes sont donc sensibles aux variations paramétriques mais les modes de commande (valeurs propres de $A - BK_c$), comme dans le cas du retour d'état, y sont insensibles. Il faut donc que le réglage du filtre de Kalman permette d'obtenir une dynamique d'estimation aussi peu sensible que possible aux variations paramétriques pour que l'ensemble de la dynamique de la boucle fermée présente de bonnes propriétés de robustesse.

III.3.3. Dualité et analogie avec le LTR :

Nous avons vu dans les paragraphes précédents comment robustifier la commande LQ (voir **annexe C**) en pondérant le critère dans la direction de $z(Q_x \rightarrow N^T N)$; on peut aussi, par dualité, robustifier l'observateur de Kalman en injectant un bruit d'état dans la direction de $w(W_x \rightarrow M_C M_C^T)$.

Dans ce dernier cas, le transfert en boucle fermée vu de la perturbation devient :

$$Z/W(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1} M_c \quad (\text{III.27})$$

Les modes d'observation sont donc maintenant insensibles aux variations paramétriques et ce transfert répond comme celui que l'on obtiendrait par une commande LQ qui supposerait tout l'état mesurable.

III.3.4. Seconde formulation de la méthodologie PRLQG

Pour un système incertain défini par (III.4) et vérifiant les propriétés des hypothèses (III.0), il est possible de retrouver, par la synthèse LQG (**annexe C**), la robustesse paramétrique du retour d'état LQ (voir **annexe C**) en ajustant la constante q dans le réglage du filtre de Kalman défini par [19] :

$$W_x = W_{x0} + q M_c M_c^T \quad \text{Et} \quad V = V_0 \quad (\text{III.28}).$$

Où W_{x0} et V_0 sont les matrices de covariance réglées sur le système nominal. Cette synthèse PRLQG force la partie « filtre de Kalman » à être asymptotiquement insensible aux variations paramétriques. Nous l'appellerons donc, par abus d'écriture, synthèse PRG.

D'un point de vue pratique, c'est cette dernière formulation du PRLQG qui est la plus utilisée, car les systèmes sont généralement plus riches en mesures qu'en commande et l'hypothèse (III.0), qui le nombre de paramètres incertains indépendants au nombre de commandes (cas du PRLQ) ou au nombre de mesures (cas du PRG), est donc moins restrictive dans le cas du PRG que dans le cas du PRLQ.

Une autre alternative consiste à robustifier le gain de retour d'état vis-à-vis de certains paramètres et l'observateur vis-à-vis d'autres paramètres selon l'interprétation physique de ces paramètres et selon le savoir-faire du concepteur.

Enfin, on remarquera que le LQG/LTR (voir **annexe C**) est un cas particulier du PRLQG où l'on a choisi :

$$M_c = B \quad \text{Et} \quad N = C.$$

III.4. Conclusion :

Les techniques présentées dans ce chapitre permettent d'appréhender le problème de la robustesse paramétrique sous le formalisme LQ et LQG.

La synthèse PRLQR permet le calcul d'un retour d'état robuste aux incertitudes paramétriques en tenant compte des amplitudes de ces variations

La synthèse PRLQG est en fait une technique de désensibilisation asymptotique et ne nécessite pas la connaissance des amplitudes des variations paramétriques. Cela permet entre autre d'alléger l'étape de modélisation des incertitudes. Elle est fondée sur la propriété asymptotique de la commande LQ et fait intervenir, de façon analogue à la synthèse LQG/LTR, un paramètre de réglage haut-niveau permettant de maîtriser le compromis performance/robustesse.

Chapitre IV :

**Résultats
et
simulation**

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les commandes PRLQR et PRLQG pour notre système aéroélastique présentées dans le chapitre précédent, et nous présenterons notre résultat numérique et graphique de simulation en utilisant le logiciel : MATLAB/SIMULINK®.

On commence premièrement par étudier le système en boucle ouverte, après on introduit les commandes PRLQR et PRLQG pour ensuite comparer les résultats.

Le déplacement vertical (h), l'angle d'incidence (α), l'angle de déflexion du volet de bord de fuite (β) et l'angle de déflexion du volet de bord d'attaque (γ), sont observés et montrés par des graphes ; la vitesse de flottement en boucle fermée sera repérée pour chaque commande.

Pour le modèle incertain, les paramètres concernés sont : le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_h , Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage K_α et la pression dynamique q .

L'objectif de la synthèse du système est de déterminer un correcteur $K(s)$ permettant de corriger le processus afin d'avoir une bonne stabilité du système.

IV.1. Modèle nominal :

Dans cette section, on va étudier la stabilité du modèle de l'aile, en simulant le système en boucle ouverte tout en observant les valeurs propres de la matrice A pour connaître la stabilité du système, sachant que le modèle dépend de la vitesse d'écoulement, on va donc prendre deux valeurs différentes de la vitesse.

IV.1.1. Simulation en boucle ouverte :

Pour une vitesse d'écoulement $V=10$ m/s, le modèle mathématique calculé est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{a} \\ \ddot{h} \\ \ddot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -5.0643 & -2.6784 & -0.1260 \\ 860.0497 & -26.1249 & 8.5929 & -0.2306 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ a \\ \dot{h} \\ \dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3.4054 & 0.2439 \\ 1.1645 & -2.8507 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

(IV 1)

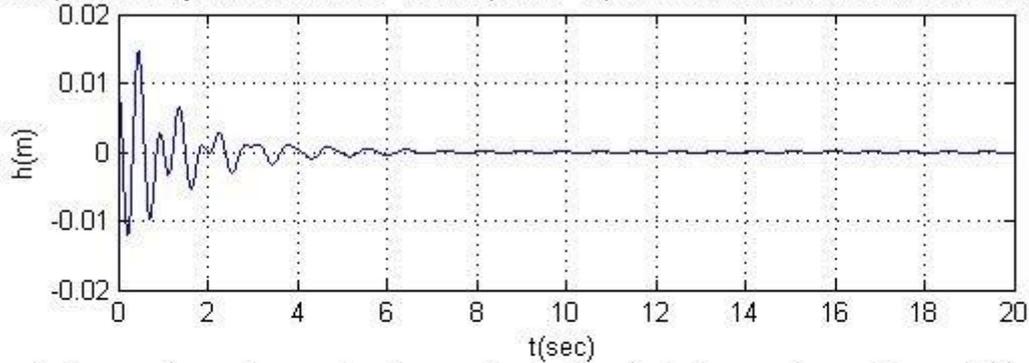
Le système possède les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε , et les fréquences ω suivants :

λ	ε	ω (rad/s)
$-0.4351 \pm 7.2815i$	0.0596	7.2945
$-1.0194 \pm 13.6372i$	0.0745	13.6752

Tableau (IV 1) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour V= 10m/s.

Les résultats de simulation obtenus en boucle ouverte avec les conditions initiales $[h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T = [0.01 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ sont présentés sur la Figure (IV 1) :

la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical à une vitesse de V=10m/s



la réponse de système en boucle ouverte pour l'angle de tangage à une vitesse de V=10m/s

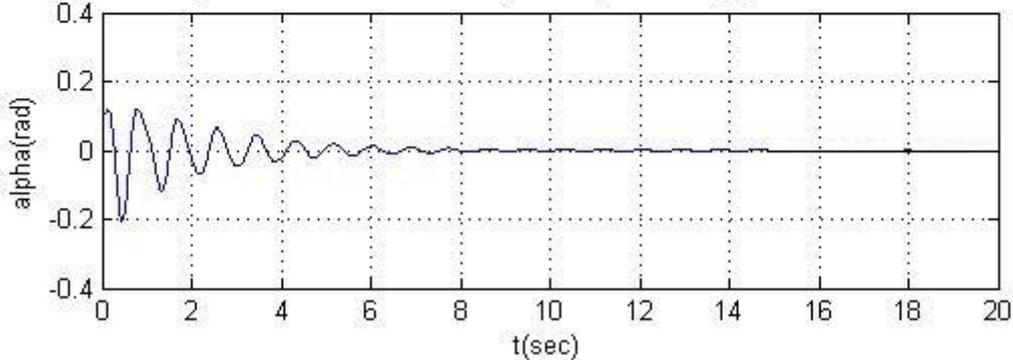


Figure (IV 1) : la réponse du système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h(m) et l'angle de tangage α à une vitesse de V=10m/s.

Pour une autre vitesse d'écoulement V=15m/s, le modèle mathématique calculé est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -12.7270 & -2.9849 & -0.1944 \\ 860.0497 & -22.9878 & 8.7424 & -0.1972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -7.6621 & 0.5488 \\ 2.6202 & -6.4141 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

(IV 2)

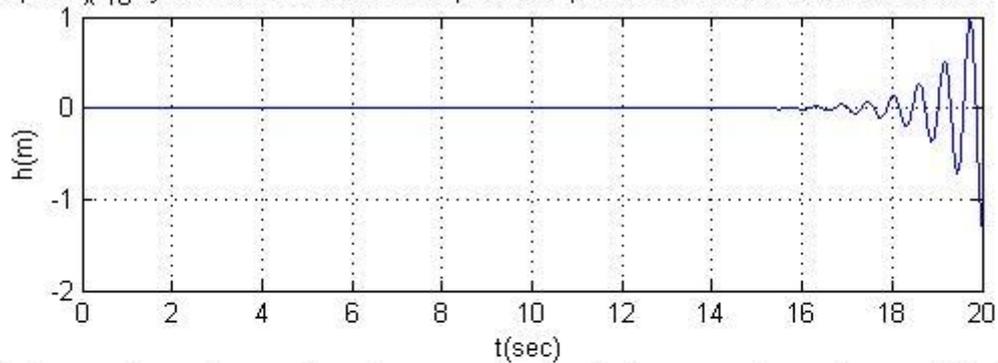
En boucle ouverte, les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε et les fréquences ω sont :

λ	ε	ω (rad/s)
$1.1168 \pm 11.0765i$	-0.1003	11.1327
$-2.7079 \pm 10.9396i$	0.2403	11.2697

Tableau (IV 2) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 15$ m/s.

La réponse du système est montrée dans la **Figures (IV 2) :**

la réponse du système en boucle ouverte pour le déplacement vertical à une vitesse de $V=15$ m/s



la réponse du système en boucle ouverte pour l'angle de tangage à une vitesse de $V=15$ m/s

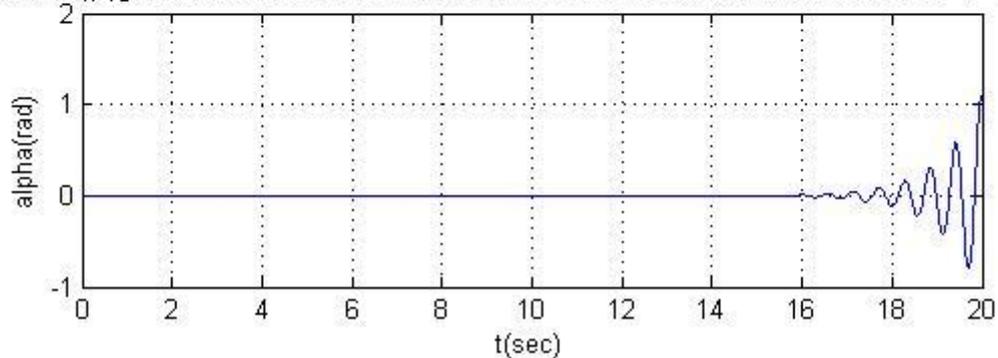


Figure (IV 2) : la réponse du système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α à une vitesse de $V=15$ m/s

IV.1.2. Interprétation :

Les résultats de simulation en boucle ouverte montrent qu'à la vitesse 10 m/s (**Figure (IV 1)**), le système possède des oscillations de faible amplitude qui convergent lentement vers le zéro (le système prend 14.8s (pour l'angle d'incidence α) pour les amortir), car le système possède des coefficients d'amortissement positifs ($\varepsilon_1 = 0.0596, \varepsilon_2 = 0.0745$), ce qui lui permet d'amortir ces oscillations.

À la vitesse $V=15$ m/s, le modèle devient instable comme le montre les **Figures (IV 2)**, les valeurs propres de la matrice A montrent que le système possède un coefficient d'amortissement négatif ($\varepsilon_1 = -0.1003$) ce qui illustre le phénomène de flottement.

Donc il existe une vitesse de transition qui s'appelle la vitesse de flottement, elle conduit le système de la stabilité vers l'instabilité. Avec des simulations successives, cette vitesse est repérée à :

$$V_{\text{flottement en } BO} = 13.954\text{m/s.}$$

IV.2. Modèle incertain :

A partir du modèle nominal on obtient un modèle incertain en lui introduisant des incertitudes ; les paramètres affectés par ces incertitudes sont le coefficient d'amortissement C_h , de rigidité K_α et la pression dynamique q , les résultats de simulation sont montrés sur des graphes.

IV.2.1. Simulation en boucle ouverte du modèle incertain :

On effectue une simulation du système en boucle ouverte à deux vitesses différentes ($V_1 = 13 \text{ m/s}$ et $V_2 = 14 \text{ m/s}$). Pour déterminer la vitesse de flottement en boucle ouverte du nouveau modèle incertain, il suffit de surveiller un seul paramètre d'état (le déplacement verticale 'h' par exemple). Les résultats de simulation sont montrés par les figures suivantes :

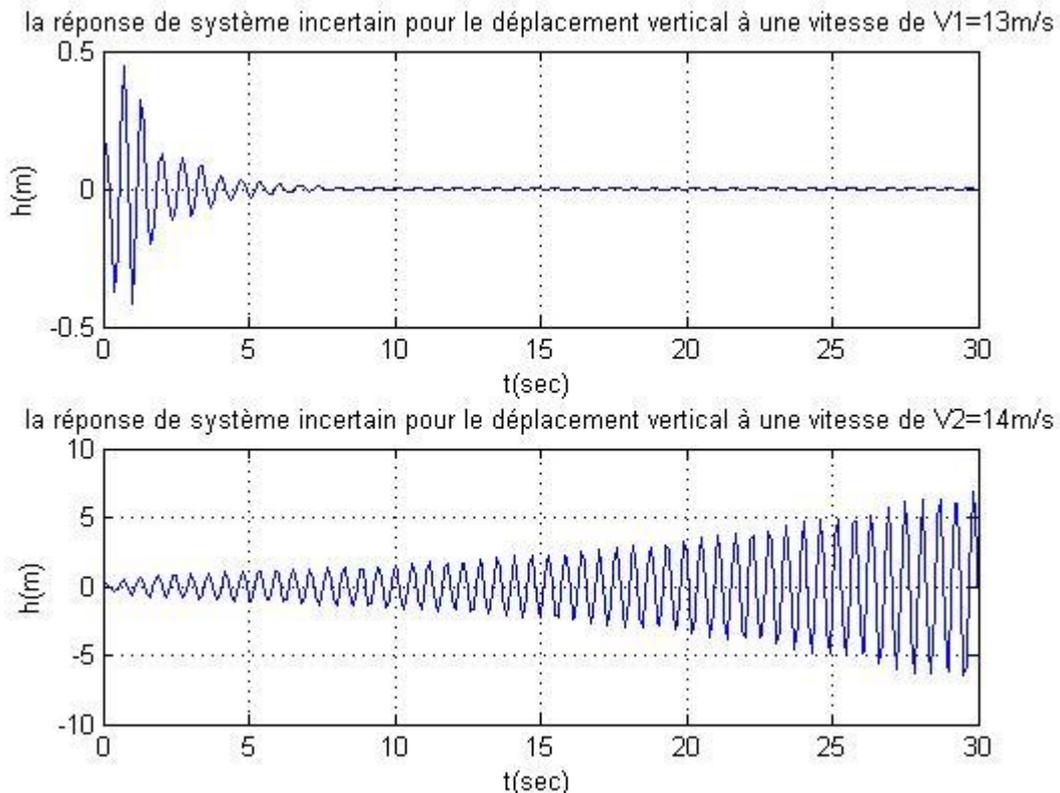


Figure (IV 3) : réponse du système incertain en boucle ouverte pour $V_1 = 13 \text{ m/s}$ et $V_2 = 14 \text{ m/s}$

IV.2.1.1. Interprétation :

D’après la **Figure (IV 3)**, le système converge à $V_1 = 13 \text{ m/s}$, et il diverge à $V_2 = 14 \text{ m/s}$, donc la vitesse de flottement comprise entre ces deux vitesses. Avec la simulation successive, on a trouvé :

$$V_{\text{flottement en BO}} = 13.2 \text{ m/s}$$

Dans le cas d’un modèle nominal, on a trouvé une vitesse de flottement égale à 13.954 m/s, et dans le cas d’un modèle incertain, la vitesse de flottement a dégradé jusqu’à 13.2 m/s, car on a tenu en compte des incertitudes paramétriques.

IV.2.2. Simulation en boucle fermée :

IV.2.2.1 Simulation avec la commande PRLQR :

En appliquant la commande PRLQR sur le système incertain, Les valeurs des gains sont regroupées dans le Tableau (IV.3) avec ρ fixe, $\rho = 1$ et γ' variable pour une vitesse $V=13.954 \text{ m/s}$:

γ'	Kc
2	$\begin{bmatrix} 1.1710 & 0.3742 & -0.4815 & -0.0110 \\ 88.5262 & 5.8031 & 5.1761 & 1.4456 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1.1308 & 0.3566 & -0.4525 & -0.0085 \\ 83.3939 & 5.5466 & 4.6537 & 1.3778 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 1.1280 & 0.3556 & -0.4386 & -0.0067 \\ 81.3352 & 5.6297 & 4.4383 & 1.3611 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 1.3743 & 0.4837 & -0.4571 & 0.0028 \\ 88.5485 & 8.8891 & 4.3153 & 1.6095 \end{bmatrix}$

Tableau (IV.3) : les valeurs des gains de la commande PRLQR pour $V=13.954 \text{ m/s}$, $\rho = 1$ et γ' variable

Remarque :

On note qu'une valeur importante de gain conduit à des meilleures réponses de système en termes d'amortissement des oscillations, mais avec une grande énergie délivrée par la commande, pour résoudre ce problème, il est préférable de choisir à partir du Tableau (IV.3) un gain intermédiaire qui permet de combiner ces deux objectifs.

Pour des valeurs de gain intermédiaire, on choisit $\rho = 1$ et $\gamma = 4$, le gain correspondant est :

$$K_C = \begin{bmatrix} 1.1308 & 0.3566 & -0.4525 & -0.0085 \\ 83.3939 & 5.5466 & 4.6537 & 1.3778 \end{bmatrix} \quad (IV\ 3)$$

Les résultats obtenus sont montrés sur la figure suivante :

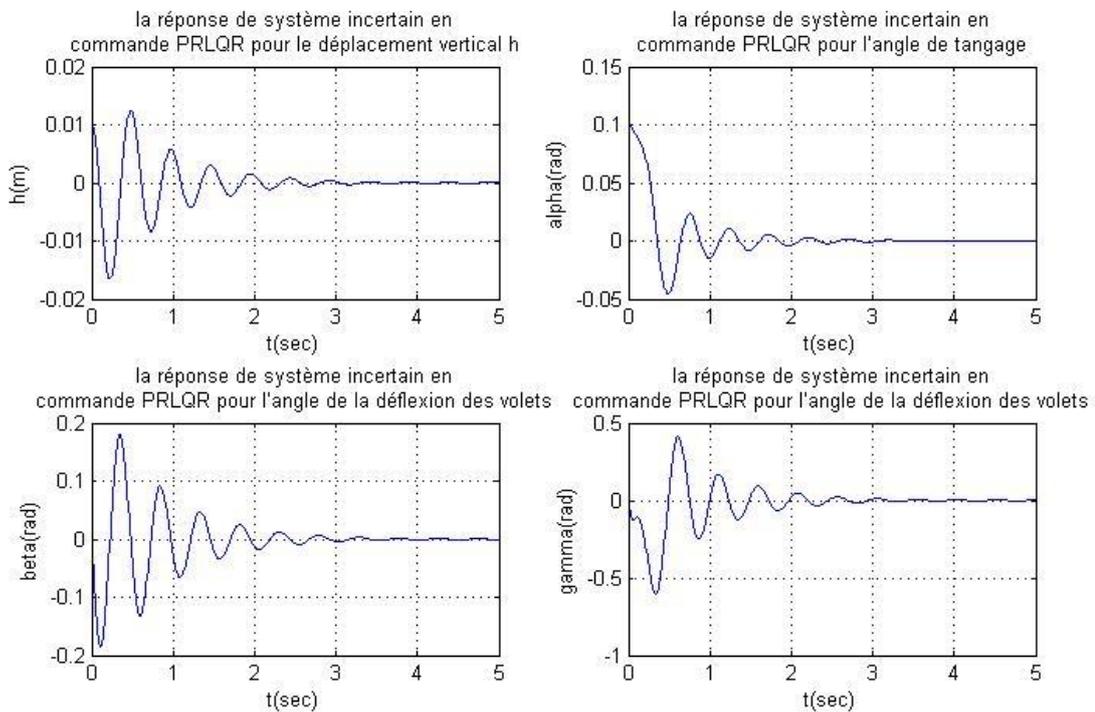


Figure (IV 4) : la réponse du système incertain en commande PRLQR pour : le déplacement vertical h , l'angle de tangage α , pour l'angle de la déflexion des volets β et l'angle de la déflexion des volets γ à une vitesse de $V=13.954$ m/s

IV.2.2.1.1. Interprétation :

En utilisant la commande PRLQR, on obtient un système bien amorti dont la convergence est faite sans oscillations avec un temps de réponse de 3.2 s (pour l’angle d’incidence α).

IV.2.2.1.2. Le gain en vitesse :

On prend un gain statique à une vitesse de 13.954 m/s, et on observe la réponse du système en changeant la vitesse d’écoulement, les résultats sont représentés dans la figure suivante :

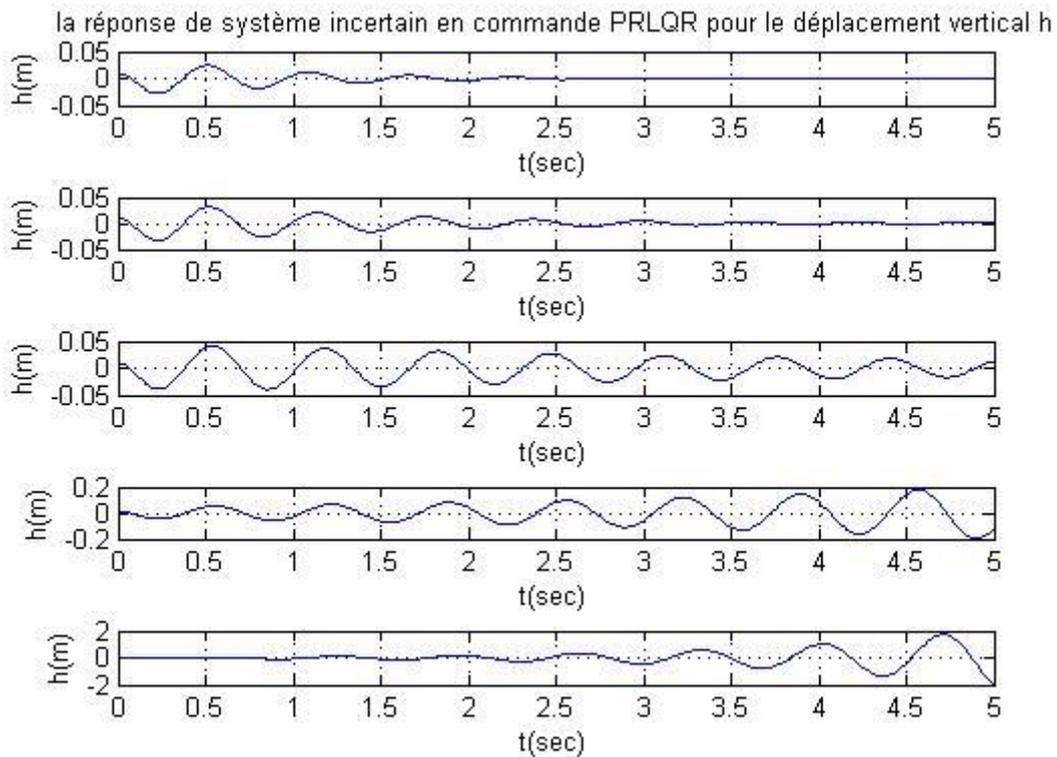


Figure (IV 5) : la simulation successive du déplacement vertical ‘h’ en plusieurs vitesses de 20m/s à 28m/s avec un pas de 2m/s

Avec la simulation successive on a trouvé :

$$V_{flottement\ en\ BF} = 24.800\ m/s.$$

Donc on a une marge considérable, de 11.6 m/s, qui prouve la robustesse de la commande.

IV.2.2.2. Simulation avec la commande PRLQG :

L'application de la commande PRLQG consiste à introduire un observateur au système incertain, en ajoutant un gain du filtre de Kalman K_f au gain du retour d'état de la commande PRLQR K_c en gardant toujours la vitesse $V=13.954$ m/s :

Gain de retour d'état K_c :

$$K_c = \begin{bmatrix} 1.1308 & 0.3566 & -0.4525 & -0.0085 \\ 83.3939 & 5.5466 & 4.6537 & 1.3778 \end{bmatrix} \quad (IV\ 4)$$

Gain estimation K_f :

$$K_f = \begin{bmatrix} 29 & 14 \\ -14 & 406 \\ 518 & -3059 \\ 2885 & 82333 \end{bmatrix} \quad (IV\ 5)$$

Les résultats obtenus sont montrés sur la figures (IV 5) :

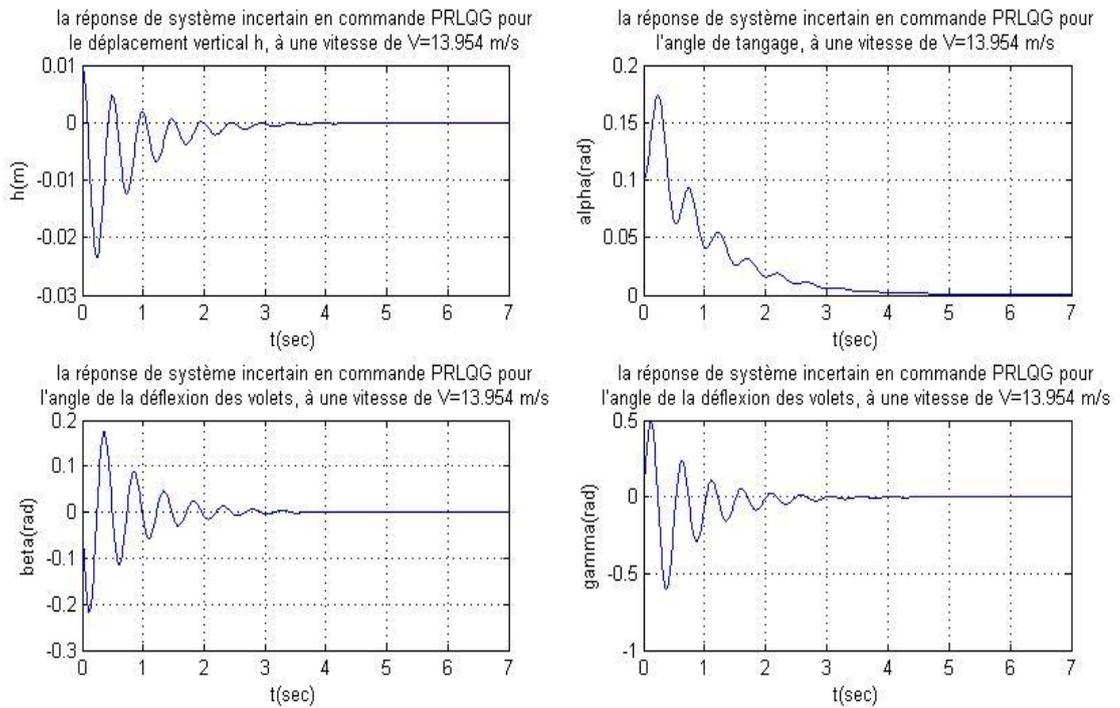


Figure (IV 6) : la réponse du système incertain en commande PRLQG pour le déplacement vertical h , l'angle de tangage α , l'angle de la déflexion des volets β et l'angle de la déflexion des volets γ à une vitesse de $V=13.954$ m/s

IV.2.2.2.1. Interprétation :

En utilisant la commande PRLQG, on obtient un système moins amorti que la commande PRLQR avec un temps de réponse plus grand de 4.5s (pour l'angle d'incidence α).

IV.2.2.2.2 Le gain en vitesse :

On prend un gain statique à une vitesse de 13.954 m/s, et on observe la réponse du système en changeant la vitesse d'écoulement, avec la simulation successive on a trouvé :

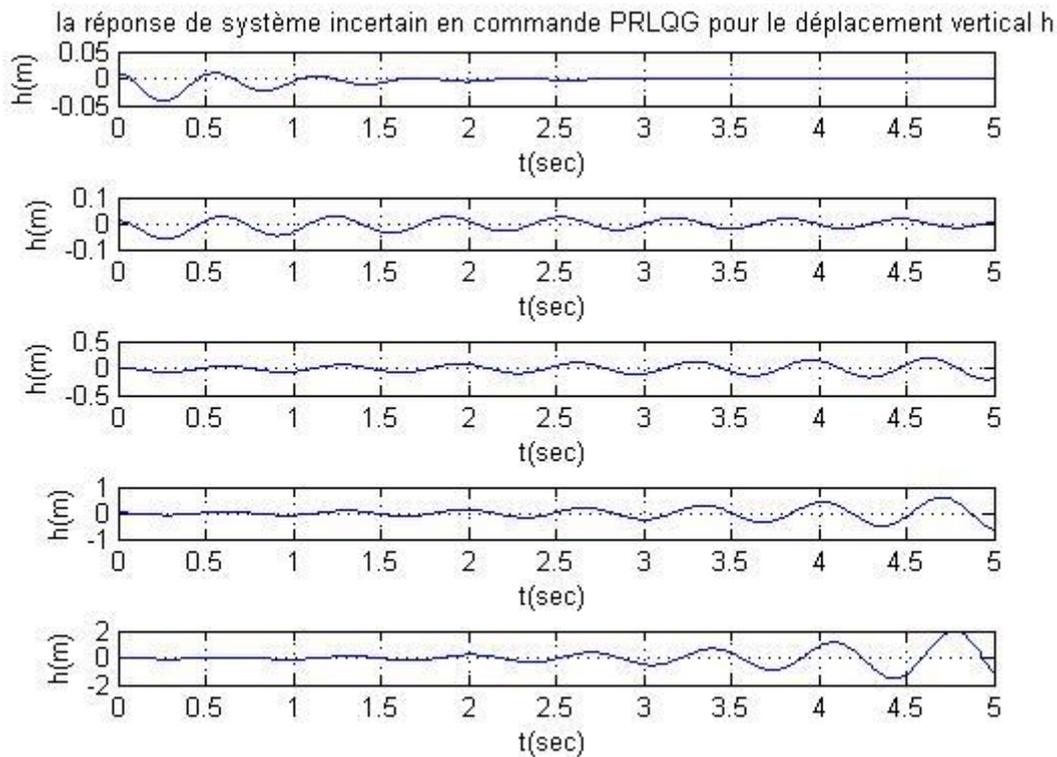


Figure (IV 7) : la simulation successive du déplacement vertical ‘h’ en plusieurs vitesses de 20m/s à 28m/s avec un pas de 2m/s

Avec la simulation successive on a trouvé :

$$V_{\text{flottement en BF}} = 22.1 \text{ m/s.}$$

Donc on a une marge considérable, de **8.9 m/s**, qui prouve la robustesse de la commande.

On remarque qu’en utilisant l’estimateur, la valeur de vitesse de flottement à diminuer par rapport à la commande PRLQR

IV.3. Synthèse des résultats de simulation pour la commande PRLQR et PRLQG :

IV.3.1. Analyse d'amélioration de performance :

Afin de comparer les deux commandes utilisées PRLQR et PRLQG du point de vu amélioration de performance du système, on prend une vitesse inférieure à la vitesse de flottement du modèle nominal égale à 12m/s, une vitesse entre les deux vitesses de flottement des deux commandes égale à 23m/s, et une autre supérieure ou égale à 26 m/s.

Les résultats de simulation sont montrés dans la figure (IV.7)

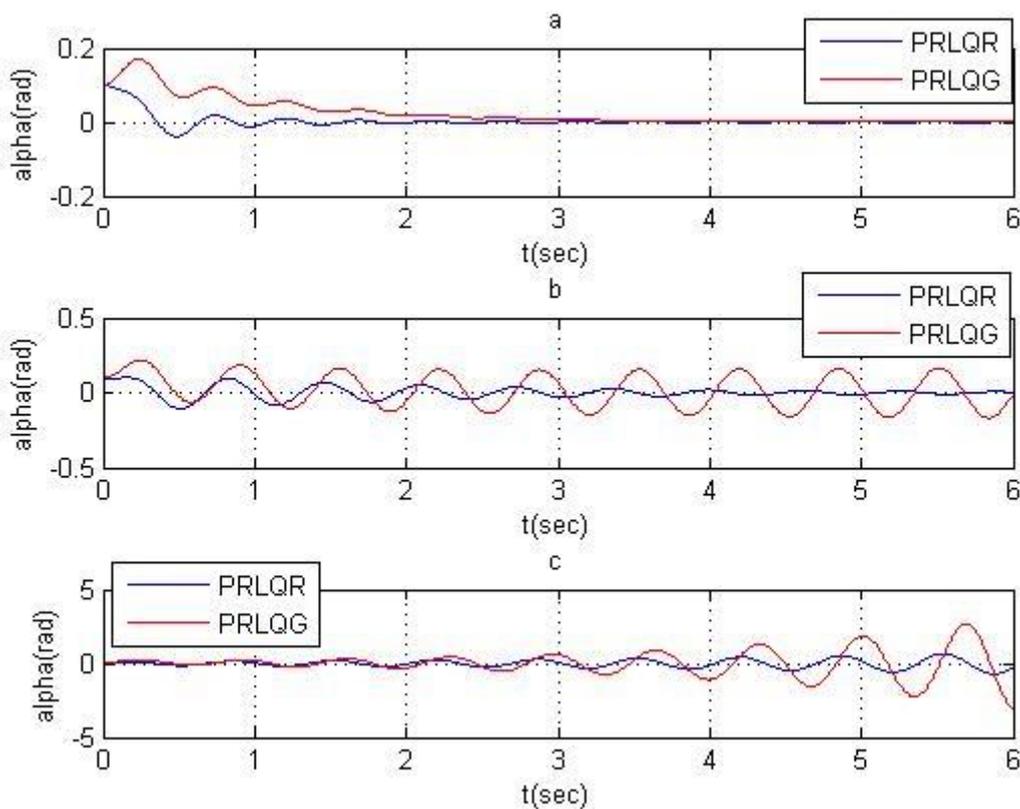


Figure (IV.8) : la réponse dy système en utilisant la commande PRLQR et PRLQG, pour $V= 12$ m/s (a), pour $V=23$ m/s (b), pour $V=26$ m/s (c).

IV.3.2. Analyse de la robustesse :

Pour bien analyser la robustesse du système en utilisant les commande PRLQR et PRLQG, on fait varier la vitesse V , le coefficient de rigidité structural pour le mouvement vertical K_α et le coefficient de rigidité structural pour le mouvement vertical C_h , et on trace en (%) un graphe 3D de domaine de stabilité (voir figures IV 8, et IV 10).

Pour bien analysé les performances de robustesse on trace d'autres graphes en 2D, cela est montré dans les figures (IV 9 et IV 11).

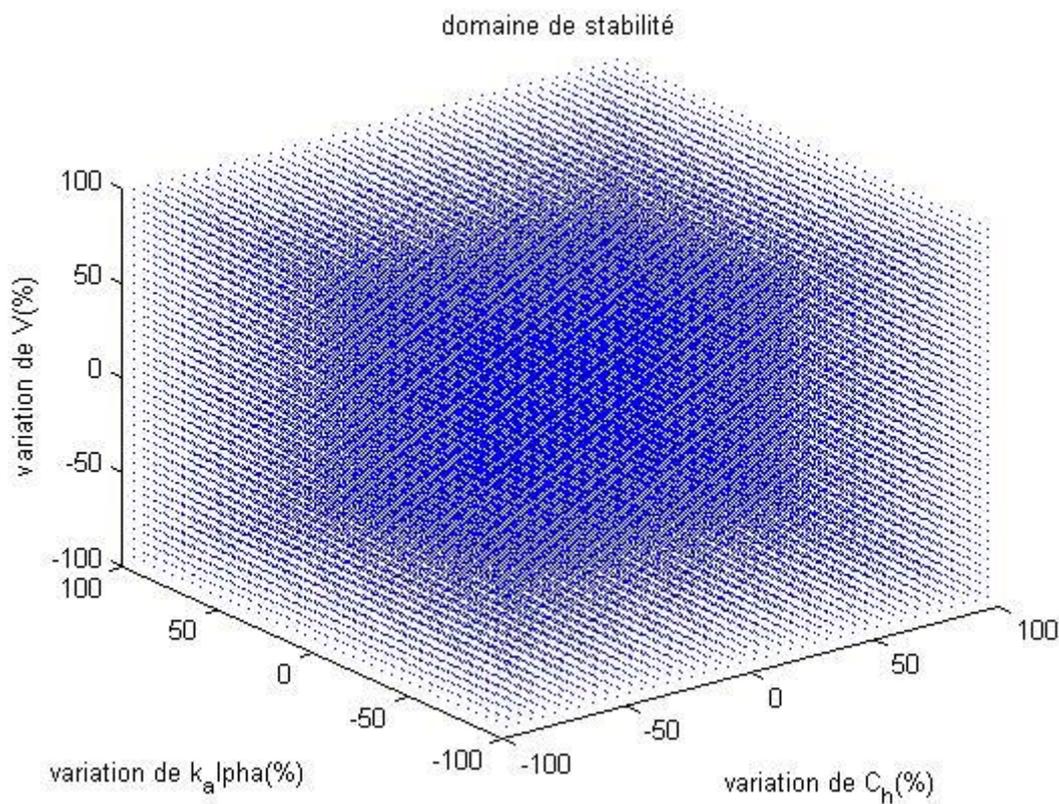


Figure (IV 9) : domaine de stabilité pour la commande PRLQR en 3D.

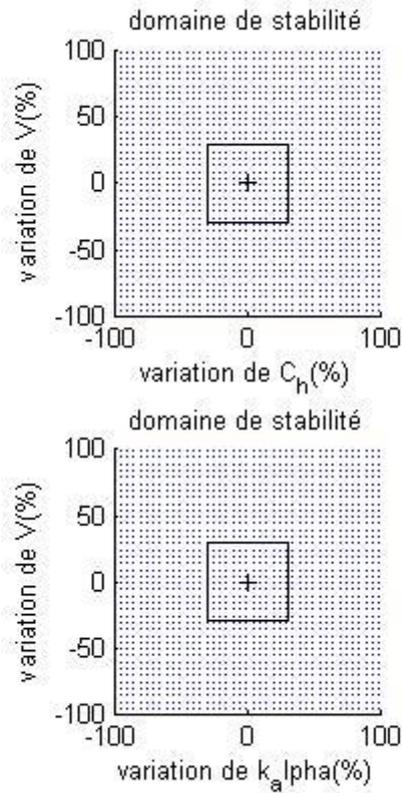


Figure (IV 10) : domaine de stabilité pour la commande PRLQR en 2D.

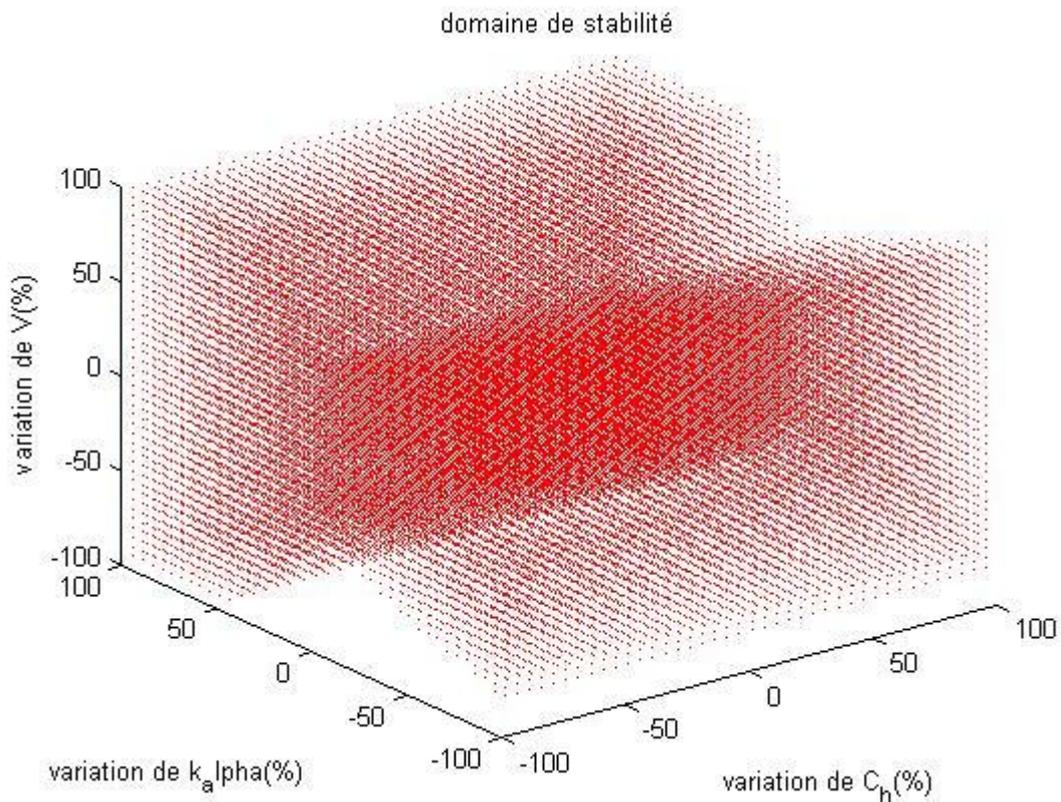
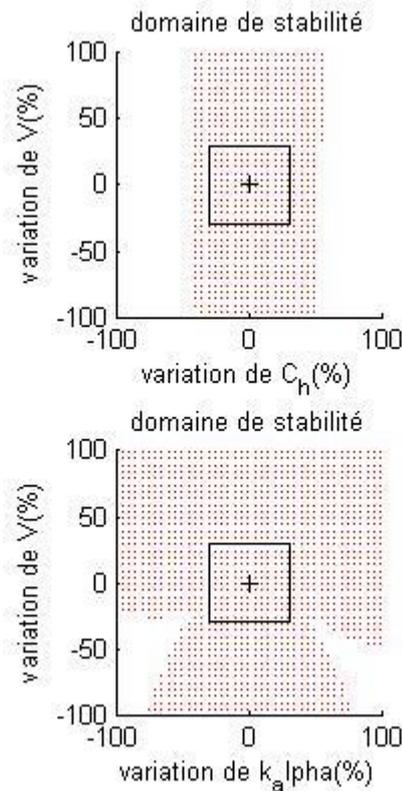


Figure (IV 11) : domaine de stabilité pour la commande PRLQG en 3D.**Figure (IV 12) :** domaine de stabilité pour la commande PRLQG en 2D.

IV.3.3. Interprétation :

On constate que les deux commandes arrivent à stabiliser le système pour la vitesse de 12 m/s, avec une amélioration notable pour la commande PRLQR en termes de la rapidité de convergence.

Pour la deuxième vitesse (23m/s), on remarque qu'avec la commande PRLQG le système diverge contrairement à la commande PRLQR où le système converge toujours mais lentement, ce qui justifie la robustesse de cette dernière.

Pour la vitesse de 26m/s, et pour les deux commandes le système diverge mais diverge avec PRLQG plus rapidement qu'avec la commande PRLQR.

Pour le domaine de stabilité, on remarque qu'en utilisant la commande PRLQR on obtient un large domaine de stabilité ; par contre, avec la deuxième commande le domaine de stabilité diminue, avec la présence des plages de nom stabilité, par exemple :

-Pour le modèle 3D : la plage (V=50% à 100%, k_{alpha}=-85% à 50%, C_h =-100% à 100%) qui est stable pour la commande PRLQR.

- Pour le modèle 2D : la plage ($V=-20\%$ à -100% , $k_alpha=-80\%$ à -100%) qui est stable pour la commande PRLQR.

Conclusion :

Les résultats numériques de simulation sont résumés dans le tableau suivant :

La commande utilisée	Temps de repense t(s) à $V=13.954m/s$	La vitesse de flottement en boucle ouverte (m/s)	La vitesse de flottement en boucle fermée (m/s)	Le gain en vitesse (m/s)
Modèle linéaire	14.8	13.954	/	/
PRLQR pour le modèle incertain	3.2	13.200	24.800	11.6
PRLQG pour le modèle incertain	4.5	13.200	22.100	8.9

Tableau (IV.4) : résumé des résultats de simulation obtenus.

Les valeurs numériques présentées dans le tableau ci-dessus résultent les remarques suivantes :

- Un gain en vitesse important dans l'application de la commande PRLQR sur le modèle incertain qui prouve la robustesse de la commande vis-à-vis du changement de la vitesse d'écoulement ou la variation des paramètres internes du système, ceci n'est plus vrai dans le deuxième cas (l'application de la commande PRLQG sur un modèle incertain), ce qui est justifié par un gain en vitesse moins important, ce qui confirme que cette dernière est moins robuste.
- Le temps de réponse pour la commande PRLQG est plus grand que celui de la commande PRLQR, ce qui confirme que stabilité de la 2^{ème} commande et plus importante que la 1^{ère} commande.

→ Le domaine de stabilité de la commande PRLQR est plus important que celui de la commande PRLQG.

Les différentes valeurs de la vitesse de flottement et du temps de réponse pour les différentes commandes (PRLQR, PRLQG) indiquent que l'utilisation du filtre de KALMAN diminue les performances de la commande (en terme performance et stabilité). Et cela est dû à l'estimation des états (PRLQG) au lieu de travailler avec des états mesurés (PRLQR) ce qui entraîne forcément de légères erreurs de calcul qui vont être la cause de la dégradation des performances.

L'estimation (commande PRLQG) présente l'avantage de combler les états non mesurés en les calculant (estimant) cela peut diminuer le cout de construction et faciliter la réalisation de la commande, en éliminant par exemple les capteurs physiques.

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce mémoire est réalisé dans le but de modéliser mathématiquement une partie d'aile aéroélastique et d'appliquer une commande robuste dédiée à cette dernière afin d'éliminer le phénomène de flottement.

Dans le développement mathématique du modèle dynamique, la méthode de Lagrange est utilisée en démarrant du système physique.

Le modèle dynamique obtenu nous permet de simuler les mouvements de tangage et le déplacement vertical, la simulation nous a permis de détecter le phénomène de flottement qui correspond à une instabilité due à une vitesse critique appelée vitesse de flottement.

Pour une première simulation, le modèle utilisé est un modèle nominal qui ne représente pas le cas réel, par la suite on injecte un paramètre non linéaire qui est le coefficient de rigidité structurelle pour le mouvement de tangage, et on ajoute des incertitudes linéaires dans les paramètres de système concernant la pression dynamique, le coefficient d'amortissement, et de rigidité ; Cela nous permet d'obtenir des vitesses de flottement qui sont différentes de celles du modèle nominal.

Pour lutter contre le phénomène de flottement, on a opté pour l'utilisation de deux types de commandes, il s'agit de la commande paramétrique robuste linéaire quadratique régulatrice (PRLQR) ainsi que la commande paramétrique robuste linéaire quadratique Gaucienne (PRLQG),

L'application de la commande PRLQR nous a conduits à augmenter (éloigner) d'une manière significative la vitesse de flottement pour le modèle incertain.

L'application de la commande PRLQG nous a permis aussi d'augmenter (éloigner) la vitesse de flottement pour le modèle incertain, mais avec un gain de vitesse moins élevé que celui de la 1ere commande. L'avantage de cette commande est de pouvoir estimer des états manquant pour un système par conséquent celle-ci revient à être plus intéressante lorsqu'on manque de capteurs et donc peut être un moyen pour améliorer le cout de construction pour un léger compromis de performances et faciliter la réalisation de la commande en éliminant les capteurs physiques.

Conclusion générale

Perspectives :

Pour les futures études dans le domaine de l'aéroservoélasticité, on propose pour la phase de modélisation d'introduire d'autre facteur de non linéarité concernant la structure ou bien l'aérodynamique, et d'étaler l'étude sur une aile complète, ou bien un avion flexible.

De point de vue commande, on propose d'utiliser d'autres types de commandes adaptées, pour améliorer les performances, tel que la commande H_∞ .

Listes des références

Liste des références

- [1] **Alazard D., Cumer C., Apkarian P., Gauvrit M. et Ferres G.**, « *Robustesse et Commande Optimal* », Cépaduès-Editions, 1999.
- [2] **FLORIAN BLANC**, Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions, thèse du doctorat de l'université de Toulouse, 16 décembre 2009.
- [3] **Pascal HEMON**, comportements aéroélastique de structures flexibles en écoulement transverse, mémoire d'habilitation à diriger des recherches, 19 mars 2013.
- [4] **Kron A.**, « *Conception de lois de commande Fly-by-wire robustes pour avions de transport civil dont la structure est considérée flexible* », Thèse de doctorat de l'Université, U.F.R. Génie Electrique – Université de Sherbrooke Quebec, Canada, Février 2004.
- [5] **ALEXANDER DOIN**, analyse des systèmes aéroservoélastiques bouclés en configuration de rétroaction application au phénomène de battement, département génie électrique école polytechnique, Montréal, 2001.
- [6] **Kalman K.**, « *Algebraic characterisatio of polynomial whose zeros lie in certain algebraic domain* », Actes Nat. Acad. Sci., vol. 64, pp. 818-823, May 1969.
- [7] **F. ROTELLA**, Commande des systèmes linéaires à plusieurs entrées, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes ,2003.
- [8] **Zhou K., Doyle and J.C. Glover K.**, « *Robust and Optimal Control* », Upper Saddle River, NJ: Prentice - Hall, 1995.
- [9] **THOMAS WOODROW SUKUT**, Nonlinear aeroelastic analysis of UAVs: Deterministic and stochastic Approaches, 2d Lt USAF , RICE University HOUSTON, TEXAS, April 2012.
- [10] **Kwakernaak H. and Sivain R.**, « *Linear optimal control systems* », Wiley interscience John Wiley and Sons, première edition, 1972.
- [11] **Doyle J.C., Francis B.A, and. Tannenbaum A. R.**, « *Feedback Control Theory* », Macmillan Publishing Co, New York, 1992.
- [12] **Z. WANG, A. BEHAL, P. MARZOCCA**, Adaptive and Robust Aeroelastic Control of Nonlinear Lifting Surfaces with Single/Multiple Control Surfaces, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Central Florida, 2010.

Listes des références

- [13] **PIERRE APKARIAN**, Eléments de la théorie de la commande robuste, Hypertext PDF document, 1993
- [14] **Edouard Laroche**, Robust control, Université de STRASBOURG, 2011-2012
- [15] **DAVID SENECHAL**. mécanique II phq 310, Département de physique Faculté des sciences Université de Sherbrooke ,1^{er} décembre 2013.
- [16] **Francis B.A., Helton J.W. and Zames G.**, « *Optimal feedback controllers for linear multivariable systems* », IEEE Transc. Autom. Cont., vol. AC-29, n° 10, pp. 888-900, Oct. 1984.
- [17] **Mr. KHEBBACHE Hicham**, Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires, phd, Université FERHAT ABBAS de Setif, 2012.
- [18] **Zhou K. and Doyle J.C.**, « *Essentials of Robust Control* », Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 1998.
- [19] **HACINE BENCHOUBENE**, Support cours automatique, institut d'aéronautique et des études spatiales, université Saad Dahleb Blida, 2013/2014.
- [20] **ANDRIANARISON MAHERIZO VALINAINA**, commande robuste des systèmes linéaires par les approches PRLQG/PRLQR, mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme d'études approfondies, Université d'ANTANANARIVO, 2008-2009.
- [21] **Oustaloup A.**, « *La Robustesse : Analyse et Synthèse de Commandes Robustes* », Paris : Hermès, 1994.
- [22] **DEWEY H. HODGES, G.ALVIN PIERCE**, Introduction to structural dynamics and aeroelasticity, Cambridge aerospace series, 2002.
- [23] **YING TENG**, Modeling and simulation of aeroservoelastic control with multiple control surfaces using μ - method, Phd, California University, 2005.
- [22] **Dilmi.S, Bouzouia.B**, Dynamic and control of flexible wing with two control surfaces, International journal of simulation systems science and technology, vol 11 No.6, pp 1-8 ISSN 1473-8031.

Annexes

Annexe A

Introduction :

Quand on veut utiliser les lois de Newton pour développer les équations du mouvement d'une particule ou d'un système, il faut faire attention à inclure toutes les forces du système. La Forme de Lagrange des équations du mouvement que nous tirons ici à l'avantage de nous permettre d'ignorer toutes les forces qui ne font aucun travail (par exemple, les forces de frottement, les forces des connexions inextensibles) [15].

La méthode de Lagrange nous donne une procédure automatique pour obtenir les équations du mouvement, il suffit seulement de calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

A.1. Degrés de liberté :

Avant de procéder à développer les équations de Lagrange, nous devons caractériser nos Systèmes dynamiques d'une manière systématique. La propriété la plus importante pour notre but actuel est le nombre de coordonnées indépendantes que nous devons connaître pour spécifier complètement la position ou la configuration de notre système. On dit qu'un système à n degrés de liberté si exactement les n coordonnées servent à définir complètement sa configuration [15].

A.2. Les coordonnées généralisées :

Nous pensons généralement aux coordonnées longueurs ou angles. Cependant, tout ensemble de paramètres qui nous permet de spécifier uniquement la configuration du système peut servir comme coordonné. Lorsque nous généralisons le sens de l'expression de cette manière, nous appelons ces nouvelles quantités "les coordonnées généralisées."

La forme générale des équations de Lagrange pour n'importe quel système (conservateur ou non conservateur) est comme suite :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Avec T est l'énergie cinétique de système et Q_i : Représentant la composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté q_i .

A.3. Les équations de Lagrange pour les systèmes conservateurs :

Si un système est conservateur, le travail effectué par les forces peut être calculé à partir de l'énergie potentielle U . Nous définissons le changement de l'énergie potentielle pendant un petit déplacement comme le négatif du travail effectué par les forces du système pendant le déplacement [15].

Puisque $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2$ est le travail effectué par les forces, nous avons :

$$\delta P = -Q_1 \delta q_1 - Q_2 \delta q_2$$

Nous avons souligné que q_1 et q_2 sont indépendants et, par conséquent, peuvent être variés arbitrairement :

Si $\delta q_1 = 0$ alors on a $\delta P = -Q_2 \delta q_2$ donc :

$$Q_2 = -\frac{\partial P}{\partial q_2}$$

De même, on peut voir que

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q_1}$$

On remplace Q_2 et Q_1 par leur valeur dans l'équation on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

A.4 Les équations de Lagrange pour les systèmes non conservateurs :

Pour les systèmes non conservateurs on définit le Lagrangien L comme suivant :

$$L = T - U$$

Où :

- T : est l'énergie cinétique du système en mouvement
- U : est l'énergie potentielle de système

Ce Lagrangien L vérifie pour chacune des coordonnées généralisées q_j :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial d}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

d : représente la fonction de dissipation.

Q_j : Représentant la composante des forces extérieures qui travaillent selon deux degrés de liberté q_j .

Et pouvant s'obtenir en dérivant le travail virtuel W des forces extérieures :

$$W = \sum_j Q_j U_j \quad \text{Soit} \quad Q_j = \frac{\partial w}{\partial u_j}$$

Avec U_j désignant le champ de déplacement [13].

Annexe B**B.I Les paramètres des matrices A et B du modèle nominal :**

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2$$

B.I.1. La matrice A :

$$a_{31} = \frac{-k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_\alpha \text{nom} m_w x_\alpha b - q_{\text{nom}} 2bs (C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$a_{33} = \frac{-I_{ea} C_{h \text{nom}} - q_{\text{nom}} 2bs [C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2] \left(\frac{1}{V}\right)}{d}$$

$$a_{34} = \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - q_{\text{nom}} 2bs (C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d}$$

$$a_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha - m_T k_\alpha(\alpha) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{d}$$

$$a_{43} = \frac{C_h m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{d}$$

$$a_{44} = \frac{\rho V^2 b^3 s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) m_w x_\alpha - m_T C_\alpha + m_T \rho V^2 b^3 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right)}{d}$$

B.I.2. La matrice B :

$$b_{31} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = \frac{-m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{41} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l_\beta} m_w x_\alpha + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_T}{d}$$

$$b_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l_\gamma} m_w x_\alpha + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_T}{d}$$

B.II. Les paramètres des matrices A, B, C, et D du modèle incertain :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2$$

B.II.1. La matrice A :

$$a_{31} = \frac{-k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_\alpha \text{nom} m_w x_\alpha b - q_{\text{nom}} 2bs (C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$a_{33} = \frac{-I_{ea} C_{h \text{nom}} - q_{\text{nom}} 2bs [C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2] \left(\frac{1}{V}\right)}{d}$$

$$a_{34} = \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - q_{\text{nom}} 2bs (C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d}$$

$$a_{42} = \frac{-m_T k_\alpha \text{nom} + q_{\text{nom}} 2bs (m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b C_{l_\alpha})}{d}$$

$$a_{43} = \frac{m_T x_\alpha b C_{h \text{nom}} + q_{\text{nom}} 2bs (m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b C_{l_\alpha}) \left(\frac{1}{V}\right)}{d}$$

$$a_{44} = \frac{-m_T C_\alpha + q_{\text{nom}} 2bs (m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b C_{l_\alpha}) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}$$

B.II.2. La matrice B :

$$b_{31} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = \frac{-m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{33} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{34} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{35} = \frac{-q_{\text{nom}} 2bs (C_{l_\beta} I_{ea} + C_{m_\beta} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$b_{36} = \frac{-q_{\text{nom}} 2bs (C_{l_\gamma} I_{ea} + C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$b_{41} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{42} = \frac{m_T}{d}$$

$$b_{43} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{44} = \frac{-m_T}{d}$$

$$b_{45} = \frac{q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\beta} + m_w x_\alpha b C_{l_\beta})}{d}$$

$$b_{46} = \frac{q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\gamma} + m_w x_\alpha b C_{l_\gamma})}{d}$$

B.II.3. La matrice C :

$$c_{12} = 2bs c_{l_\alpha}$$

$$c_{13} = \frac{2bs C_{l_\alpha}}{V}$$

$$c_{14} = 2bs c_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{V} \right)$$

$$c_{22} = 2b^2 s C_{m_\alpha}$$

$$c_{23} = \frac{2b^2 s C_{m_\alpha}}{V}$$

$$c_{24} = 2b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{V} \right)$$

$$c_{33} = W_3$$

$$c_{42} = W_4$$

B.II.4. La matrice D :

$$d_{15} = 2bs C_{l_\beta}$$

$$d_{16} = 2bs C_{l_\gamma}$$

$$d_{25} = 2b^2 s C_{m_\beta}$$

$$d_{26} = 2b^2 s C_{m_\gamma}$$

Annexe C

C.I. Commande LQ :

En automatique, la Commande linéaire quadratique, dite Commande LQ, est une méthode qui permet de calculer la matrice de gains d'une commande par retour d'état. L'initiateur de cette approche est Kalman, auteur de trois articles fondamentaux entre 1960 et 1964. Les résultats de Kalman ont été complétés par de nombreux auteurs. [20]

L'idée consiste à minimiser un critère de performance $J(u)$, quadratique en l'état x et la commande u , et qui est une somme pondérée de l'énergie de x et de celle de u . Le but de la commande consiste, à la suite d'une perturbation, à ramener, de préférence aussi rapidement que possible, l'état à sa valeur d'équilibre 0 , compte tenu des contraintes liées à un cahier des charges. Si, dans $J(u)$, on privilégie l'énergie de x , c'est celle-ci qui va être essentiellement minimisée, au détriment de l'énergie de la commande, qui pourra donc être très grande : c'est l'adage « qui veut la fin veut les moyens » ; dans ce cas la commande sera très nerveuse (à grands gains). Si au contraire on privilégie dans $J(u)$ l'énergie de u , on met l'accent sur l'économie des moyens ; on obtiendra donc une commande de faible énergie, molle, pour laquelle la dynamique de la boucle fermée sera lente. Le rôle du concepteur consiste à choisir habilement les matrices de pondérations qui interviennent dans le critère, de manière à obtenir *in fine*, après un certain nombre d'essais-erreurs, le comportement souhaité du système en boucle fermée. Notons que, quelle que soit la méthode employée pour la conception d'un régulateur, des essais-erreurs sont inévitables. Dans le cas de la commande linéaire quadratique, avec un minimum d'expérience, les essais-erreurs convergent très rapidement. La commande linéaire quadratique, comparée à la méthode de placement de pôles, est très précieuse dans le cas d'un système ayant plusieurs entrées, car il n'y a pas alors de solution unique au problème de placement de pôles : pour les mêmes pôles en boucle fermée, certaines lois de commandes peuvent être très robustes, et d'autres pas du tout. La commande linéaire quadratique possède quant à elle, intrinsèquement, de très bonnes propriétés de robustesse.[13]

C.I.1. Théorie de la commande linéaire quadratique :

C.I.1.1. Cas d'un critère quadratique classique :

Considérons le système linéaire stationnaire ayant pour équation d'état :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{C.1}$$

où $x(t)$ est l'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande, et A et B sont des matrices constantes appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{n \times m}$ respectivement. Considérons d'autre part le critère :

$$j = \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (\text{C.2})$$

Où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices symétriques réelles, semi-définie positive et définie positive respectivement.

C.I.1.2. Généralisation :

Il peut être utile de considérer un critère un peu plus général, de la forme :

$$j = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (\text{C.3})$$

Où $\alpha \geq 0$. On se ramène au cas précédent en posant $x_a(t) = e^{\alpha t} x(t)$, $u_a(t) = e^{\alpha t} u(t)$.

L'équation d'état devient :

$$\dot{x} = A_a x_a + B u_a \quad (\text{C.4})$$

Où $A_a = A + \alpha I_n$

C.I.1.3. Existence d'une commande optimale stabilisante :

Notons d'abord que si une commande optimale existe, elle est unique, car l'intégrande du critère est strictement convexe en considérons la *matrice hamiltonienne* de dimension $2n \times 2n$

$$H = \begin{bmatrix} A_a & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A_a^T \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Et la condition

(a): H n'a pas de valeur propre imaginaire.

On montre facilement que si λ est une valeur propre de H , $-\lambda$ l'est aussi. Par conséquent, si la condition (a) est satisfaite, il existe une matrice de changement de base $N = [N_1 \ N_2]$ telle que $N^{-1}HN$ soit sous forme de Jordan, les n premiers (resp. Derniers) blocs étant associés à des valeurs propres λ_i telles que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$. Soit alors :

$$N_1 = [v_1 \dots v_n], \quad v_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\eta = [\eta_1 \dots \eta_n], \quad \varepsilon = [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n]$$

Si la matrice ε est inversible, $P = \eta \varepsilon^{-1}$ est une solution de l'« équation algébrique de Riccati »

Soit les conditions

(b): La paire (A_a, B) est stabilisable.

(c): La matrice ε est inversible, P est une solution symétrique réelle semi-définie positive de l'équation algébrique de Riccati ci-dessus, la matrice $A_a - BK$ (avec $K = R^{-1}B^T P$)

$B^T \bar{P}$) a toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche ouvert, et la commande en boucle fermée $\hat{u} = -Kx$, $K = R^{-1} B^T \bar{P}$) est la commande optimale.

On a le résultat suivant :

Solution à l'équation algébrique de Riccati et pôles du système bouclé :

On a l'équivalence (a) et (b) avec (c). D'autre part, en supposant la condition (b) satisfaite, une condition *suffisante* pour que la condition (a) soit satisfaite est

(d): la paire (C, A_α) est détectable

où la matrice C est telle que $Q = C^T C$.

De plus, (b) et (d) est une *condition nécessaire et suffisante* pour que la matrice P de (c) soit l'*unique* solution symétrique réelle semi-définie positive de l'équation algébrique de Riccati considérée.

Si les conditions (a) et (b) sont satisfaites,

(1) la matrice P est *définie positive* si, et seulement si (C, A_α) est observable;

(2) en désignant par $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ ($q \leq n$) les valeurs propres *distinctes* de H dont la partie réelle est négative, les valeurs propres distinctes de $A_\alpha - BK$ sont $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, et par conséquent les valeurs propres distinctes de $A - BK$ (i.e. les pôles du système bouclé) sont $\lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_q - \alpha$.

On notera que, du point de vue numérique, il est préférable, pour résoudre l'équation algébrique de Riccati, d'utiliser la *forme de Schur* de H plutôt que sa forme de Jordan.

C.II. Commande LQR :

LQR « Linear Quadratic Regulator », est l'une des méthodes de conception la plus largement répondue pour le contrôle et la stabilité de système selon les différents critères.

Des études ont réalisées comparant des propriétés des contrôleurs (exécution, robustesse, utilisation de contrôle) dans des différentes applications. On parle de la commande linéaire quadratique lorsque le système est linéaire et le critère à minimiser est quadratique, cette commande est définie comme étant une commande optimale par retour d'état, le principe de la commande LQR est présenté dans la figure suivante [13] :

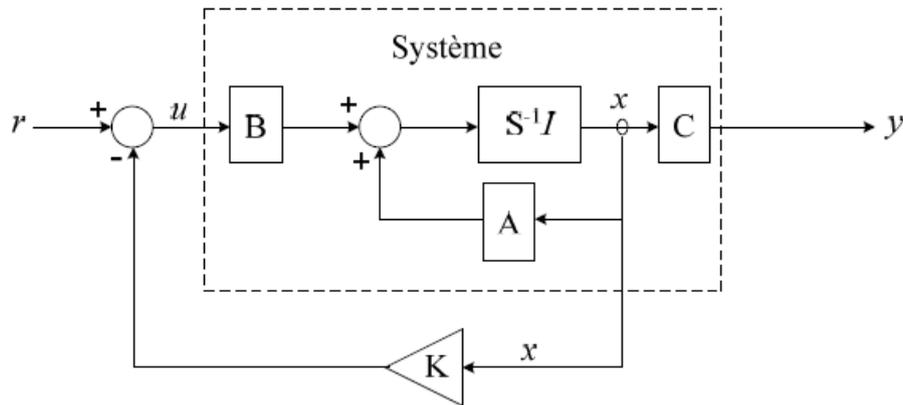


Figure (C.1) : principe de la commande LQR [15].

C.III. La commande LQG :

La commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20^{ème} siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariables. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet. Depuis la fin du 20^{ème} siècle, la commande H_∞ apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multivariables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

C.III.1.1 Formulation :

Soit le système dynamique stochastique d'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v \\ y = Cx + w \end{cases} \quad (C.6)$$

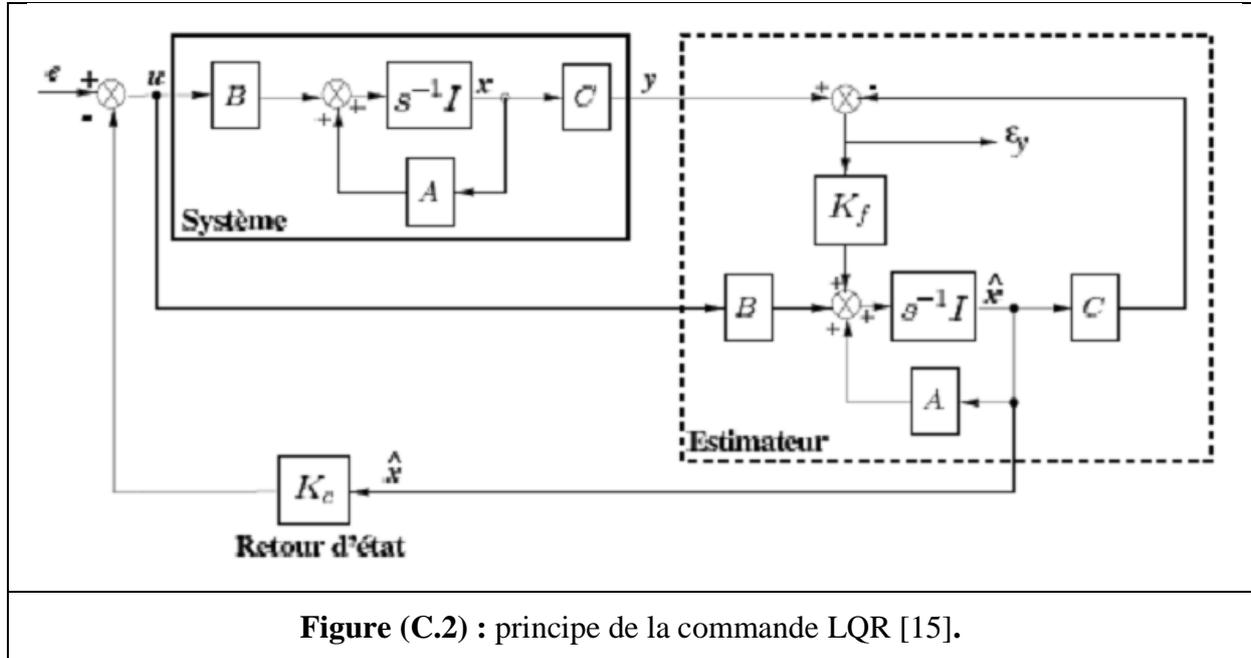
Où le bruit d'état v et le bruit de mesure w sont des bruits blancs centrés de variance $E\{vv^T\}=V \geq 0$ et $E\{ww^T\}=W > 0$. Le problème LQG consiste en la minimisation du critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_{-t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \right\} \quad (C.7)$$

Où Q et R deux matrices de pondération avec, $Q=Q^T \geq 0$ et $R=R^T > 0$. Du fait des entrées de bruit v et w , les grandeurs u et x sont des grandeurs stochastiques. Comme critère, il est ainsi

naturel de s'intéresser à l'espérance d'une intégrale. Il est possible de considérer des critères à temps.

La figure C.2 représente la structure du correcteur LQG dans la boucle de régulation.



La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f D K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ y \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

C.III.1.2 LQR/LTR :

La présence d'un observateur fait que les propriétés de robustesse du correcteur LQ ne sont plus valables [17]. Les méthodes de Loop Transfert Recovery (LTR ou en Français recouvrement du transfert de la boucle) consistent à modifier les conditions de la synthèse afin de se rapprocher du transfert qui serait obtenu avec un retour d'état LQ. Si ce transfert est obtenu, la robustesse est alors assurée. Depuis les premiers travaux de Doyle et Stein en 1981 [18], de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet. C'est cette première approche qui est présentée ici. Elle a l'inconvénient de ne pas convenir aux systèmes à déphasage non-minimal (systèmes possédant des zéros à partie réelle positive.).

La méthode de recouvrement repose sur l'écriture de la matrice de covariance V de la forme :

$$V = V_0 + q^2 B B^T \quad (C.9)$$

On montre que le gain de la boucle ouverte $C(s)G(s)$ tend vers $K(sI-A)^{-1}B$, celui du régulateur LQ, lorsque q tend vers l'infini. Ainsi, à partir d'un correcteur initial reposant sur les pondérations V_0 et W , on augmente petit-à-petit q jusqu'à obtenir la robustesse suffisante.

Une approche duale consiste à retoucher le gain du retour d'état en choisissant la matrice de pondération Q de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2 C^T C \quad (C.10)$$

La méthode reste la même : on augmente q jusqu'à obtenir la robustesse désirée. Dans tous les cas, l'augmentation de la robustesse se fait au détriment des performances et un compromis doit être trouvé.

Annexe D

C.1. Définition de la contrôlabilité :

Un système définit par la représentation d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{C.1}$$

Il est commandable ou gouvernable si pour toute instance, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état ξ_0 à l'état ξ_1 en un temps fini [20].

Mathématiquement un système est contrôlable si la matrice de contrôlabilité 'C' est de rang n . Avec n c'est l'ordre de système et 'C' appelée matrice de Kalman ou matrice de contrôlabilité, et la condition 'rank C = n'. appelée condition de Kalman, la matrice de Kalman est définit comme suit :

$$C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

C.2. Définition de l'observabilité :

Le système linéaire décrit par les équations (C.1) est dit observable si la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ nous permet de déterminer de façon unique l'état $x(t)$, pour tout instant 't' [37].

C.3. Condition d'observabilité d'un système :

Il est proposé, sans démonstration, une condition nécessaire et suffisante de l'observabilité d'un système. Cette dernière est très simple :

Un système décrit par les équations (C.1) est observable si et seulement si la paire (A;C) est observable.

Mathématiquement si la matrice $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ est de rang n .

Avec n est l'ordre de système [15].