



**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT**  
**SUPÉRIEUR ET DE LA**  
**RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB\_BLIDA 01**

**INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES**

**DEPARTEMENT : CONSTRUCTION AERONAUTIQUE**

**OPTION : Propulsion avions**

# **Etude et Conception d'une Tuyère à corps central Bidimensionnel Tronquée**

**Réalisé Par :**

- Mlle LEFTAHA Racha RYM
- Mlle MAIZI Roumaissa

**Dirigé par :** - M. ABDALLAH ELHIRTSI Ahmed  
- M. ABADA Omar

**Blida, Septembre 2020**

## RESUME

L'objectif de notre projet est d'étudier les différents paramètres thermodynamiques ainsi que les différentes formes de la tuyère à corps central obtenus numériquement à l'aide d'un programme de calcul numérique (FORTRAN) permettant de faire la conception à Haute Température de la tuyère supersonique à corps central donnant un écoulement parallèle à la sortie pour différentes conditions. La première est dans le cas du modèle Gaz Parfait (GP) et la deuxième est dans le cas du modèle Haute Température (HT) pour trois différentes températures de sortie chambre de combustion ( $T_0 = 1000K, 2000K$  et  $3000K$ ).

Cette étude a été établie d'abord tout au long du divergent sans aucune troncature (dans ce cas on est à 100% de la longueur du corps central). Ensuite, sur différentes valeurs de troncature (à 75%, 50% et 25% de la longueur du corps central). A partir des résultats obtenus des différentes formes de la tuyère à corps central, on a tracé les courbes des différents paramètres thermodynamiques pour chaque valeur de troncature, puis on a fait une comparaison entre les différentes courbes afin de déterminer l'effet de troncature sur nos résultats.

**Mots clés** : Tuyère à corps central, Supersonique, Haute Température, Troncature, Paramètres Thermodynamiques.

## **ABSTRACT**

The objective of our project is to study the different thermodynamic parameters as well as the different shapes of the central body nozzle obtained numerically with the help of a numerical calculation program (FORTRAN) allowing making the High Temperature design of the supersonic plug nozzle giving a parallel flow at the outlet for different conditions. The first is in the case of the Perfect Gas (GP) model and the second is in the case of the High Temperature (HT) model for three different combustion chamber outlet temperatures ( $T_0 = 1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$  and  $3000\text{K}$ ).

First, this study was established along the whole length of the divergent without any truncation (in this case we are at 100% of the length of the central body). Then on different values of truncation (at 75%, 50% and 25% of the length of the central body). From the results obtained from the different shapes of the central body nozzle, we drew the curves of the different thermodynamic parameters for each truncation value, and then we made a comparison between the different curves in order to determine the effect of truncation on our results.

**Keywords:** Central body nozzle, Supersonic, High Temperature, Truncation, Thermodynamic parameters.

## ملخص:

الهدف من مشروعنا هو دراسة مختلف المعايير الديناميكية الحرارية وكذلك الأشكال المختلفة لفوهة الجسم المركزي التي تم الحصول عليها عددياً باستخدام برنامج الحساب العددي (FORTRAN) مما يسمح بتصميم البوق ما فوق الصوتي ذو الجسم المركزي ثنائي البعد الذي يمكننا من الحصول على تدفق منتظم وموازي عند مقطع الخروج تحت تطبيق فرضية درجة الحرارة المرتفعة من اجل شروط مختلفة. الأولى في حالة نموذج الغاز المثالي والثانية في حالة نموذج ارتفاع درجة الحرارة من اجل ثلاث درجات حرارة مختلفة لمنفذ غرفة الاحتراق (  $T_0=1000K$  ،  $2000K$  ،  $3000K$  ).

تم إنشاء هذه الدراسة أولاً في جميع أنحاء التباعد دون أي اقتطاع (في هذه الحالة لدينا 100٪ من طول الجسم المركزي). ثم على قيم اقتطاع مختلفة (75٪، 50٪ و 25٪ من طول الجسم المركزي). من خلال النتائج التي تم الحصول عليها من الأشكال المختلفة لفوهة الجسم المركزي، قمنا برسم منحنيات معايير الديناميكية الحرارية المختلفة لكل قيمة اقتطاع، ثم تم إجراء مقارنة بين المنحنيات المختلفة من أجل تحديد تأثير الاقتطاع على النتائج.

الكلمات المفتاحية: فوهة الجسم المركزي، فوق الصوتية، درجة حرارة عالية، اقتطاع، معايير ديناميكية حرارية.

## Remerciements

Nous tenons tout d'abord à rendre grâce à Dieu le Tout Puissant et le Miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage afin de réaliser ce modeste travail, sans que nous oublions nos très chères parents pour leurs soutiens très précieux.

Nous tenons également à exprimer nos profondes gratitudee à notre cher professeur et encadrant Mr. Abdallah Elhirtsi Ahmed pour son suivi et pour son énorme soutien qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de la période du travail, et pour toute la confiance qu'il nous a témoignée en nous proposant ce sujet.

Ainsi, nous nous permettons d'exprimer nos reconnaissances à notre Co-encadrant Mr. Abada Omar pour son suivi, et pour ses remarques avisées et ses conseils éclairés.

Nous adressons aussi nos vifs remerciements aux membres des jurys pour avoir consenti de juger ce travail.

Nous ne laisserons pas cette occasion passer, sans remercier tous les enseignants et le personnel de l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales pour leur aide et leurs précieux conseils et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre formation.

Enfin, nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

# Dédicaces

*Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.*

*Aux deux femmes qui ont souffert sans me laisser souffrir, qui n'ont jamais dit non à mes exigences et qui n'ont épargnées aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère Sabrina et ma chère tante Fatiha.*

*A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père Nour Eddine.*

*A ma chère sœur Lydia et mon cher frère Mouloud ainsi que mon fiancé Djabir qui n'ont pas cessés de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.*

*A mes grands-parents, mes tantes spécialement Djaouida et sa fille Dina. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.*

*Sans oublier mon binôme Roumaïssa pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.*

# Dédicaces

*Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie  
ce modeste travail à :*

*Mon adorable mère Saloua*

*Mon cher père Mohammed*

*Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour  
Éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti  
pour mon Instruction et mon bien être.*

*Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez  
Depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.*

*Que cet humble travail soit l'exaucement de vos vœux tant  
Formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en  
N'acquitterai jamais assez.*

*A MES CHERS ET ADORABLE FRÈRES*

*Zakariya, la prunelle de mes yeux, Mouadh, la douce, au cœur si grand,*

*Dhiya Eddine mon petit frère que j'adore,*

*Je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de Succès et que Dieu, le tout  
puissant, vous protège et vous garde.*

*A toute ma famille.*

*A mon binôme et ma chère amie Racha que j'apprécie beaucoup.*

*A MES AMIS, en souvenir de notre sincère et profonde amitié et des  
moments agréables que nous avons passés ensemble.*

*Une spéciale dédicace à cette personne qui compte  
Déjà énormément pour moi, et pour qui je porte bcp  
De tendresse et respect.*

*A TOI HAMZA*

# Table des matières

Résumé	
Remerciement	
Dédicaces	
Tables des matières	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Nomenclature	
Introduction.....	01

## CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

1.1 Définition d'une tuyère.....	04
1.2 Présentation d'une tuyère supersonique.....	04
1.3 Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique.....	05
a. Ecoulement subsonique.....	06
b. Ecoulement sonique adaptée.....	06
c. Ecoulement sonique non adaptée.....	07
d. Ecoulement supersonique adaptée.....	09
e. Ecoulement supersonique non adaptée.....	09
1.4 Fonctionnement réel de la tuyère supersonique.....	09
➤ Le régime d'adaptation.....	10
➤ Le régime de sous-détente.....	10
➤ Le regime de sur -détente.....	11
• sur détente avec décollement naissante ...	11
• sur détente avec décollement étendu.....	12
1.5 Les différentes configurations des tuyères supersoniques.....	13
1.5.1Tuyères conventionnelles .....	13



1.5.1.1 Les Tuyères à contour profilée .....	13
1.5.1.2 Les Tuyères annulaires.....	14
1.5.2 Tuyère adaptée en altitude .....	15
1.5.2.1 Les tuyères à décollement contrôlé .....	15
➤ Tuyère à double galbe .....	16
➤ Tuyère à zone d'expansion .....	17
➤ Tuyère à détente centrée .....	17
1.5.2.2 Les tuyères bi-modes .....	17
➤ Tuyère à double col (dual mode nozzle) .....	18
➤ Tuyère à double détente (dual- expander nozzle) .....	18
1.5.2.3 Tuyère auto-ajustable .....	19
➤ Tuyère type bouchon (Plug Nozzle) .....	19
➤ Tuyère type détente déviation (expansion-déflexion nozzle).....	20
1.5.3 Tuyère innovante .....	20
➤ Tuyère à section variable .....	21
➤ Tuyère à chevron (tuyères en dents de scie) .....	21
➤ Tuyère orientable .....	22
1.6 Les profils des tuyères supersoniques .....	22
1.6.1 Les tuyères coniques .....	23
1.6.2 Les tuyères optimisées .....	23
➤ Tuyère à contour idéal tronqué (TIC) .....	24
➤ Les tuyères à profil parabolique (TOC) .....	25
1.7 Domaines d'application des tuyères supersoniques .....	26
1.7.1 Moteurs fusées .....	26
1.7.2 Moteurs des avions de combat .....	27
1.7.3 Souffleries supersoniques .....	27

## **CHAPITRE 2**

### **LES PARAMETRES DE PERFORMANCES**

2.1 La poussée .....	28
2.2 Coefficient de poussée .....	28
2.3 Le débit .....	29
2.4 Coefficient de débit .....	29
2.5 Vitesse caractéristique .....	30
2.6 Vitesse effective .....	30
2.7 Impulsion spécifique .....	30
2.8 Impulsion totale .....	31

## **CHAPITRE 3**

### **LES PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE**

3.1 Introduction .....	32
3.2 Relations thermodynamiques .....	33
3.2.1 L'équation d'état .....	33
3.2.2 L'équation adiabatique .....	33
3.2.2 L'équation de la vitesse du son .....	34
3.2.3 L'équation de la vitesse en fonction de la température .....	35
3.2.4 L'équation du nombre de Mach en fonction de la température .....	36
3.2.5 L'équation de la masse volumique en fonction de la température .....	36
3.2.6 L'équation de la pression en fonction de la température .....	37
3.2.7 L'expression de la section en fonction de la température .....	38
3.2.8 L'expression de débit massique critique en fonction de la	

température.....	39
3.3 Le modèle du gaz parfait.....	39
3.4 Procédure de calcul.....	40
3.4.1 Polynôme d'interpolation de $C_p(T)$ .....	41
3.4.2 Intégration de la chaleur spécifique .....	42
3.5 Le Calcul numérique des rapports thermodynamiques .....	42
3.6 Paramètres critiques au col correspondant à $T_0$ .....	45
3.7 Paramètres Supersoniques correspondant à $T_0$ .....	46
3.8 L'Erreur du modèle du Gaz Parfait .....	48
3.9 Application aux tuyères .....	49

## CHAPITRE 4

### TUYERE A CORPS CENTRAL BIDIMENTIONNELLE (PLUG NOZZLE)

4.1 Introduction .....	51
4.2 La tuyère à corps central type à bouchon "Plug Nozzle" .....	52
4.3 Formulation Mathématique du Problème .....	54
4.4 La Discrétisation .....	58
4.5 Les procédés de calcul .....	61
4.6 Paramètres Thermodynamiques .....	65
4.7 La masse du corps central .....	65
4.8 La force de pression exercée sur la paroi .....	66
4.9 La masse du gaz dans le divergent.....	67
4.10 L'erreur du model Gaz Parfait .....	68

## CHAPITRE 5 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

5. Introduction.....	69
5.1 La programmation (FORTRAN) .....	69
5.1.1 L'effet de la température génératrice $T_0$ sur l'allure du corps central.....	70
5.1.2 Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du corps central.....	74
5.1.3 Variation du coefficient de force le long de la paroi du corps central.....	78
5.2. Les formes de la tuyère à corps central obtenues par différentes .troncatures.....	78
5.3 L'effet de la troncature du corps central sur les paramètres thermodynamiques.....	80
5.3.1 L'effet de la troncature du corps central sur le rapport des températures.....	80
5.3.2 L'effet de la troncature du corps central sur le rapport des masses volumiques.....	81
5.3.3 L'effet de la troncature du corps central sur le rapport des pressions.....	83
5.3.4 L'effet de la troncature du corps central sur le nombre de Mach.....	85
5.3.5 L'effet de la troncature du corps central sur l'angle de déviation de l'écoulement.....	86
5.4 L'effet de la troncature du corps central sur le coefficient de force $C_F$ .....	88
5.5 L'erreur du coefficient de force $C_F$ obtenue par les différentes troncatures du corps central .....	90
Conclusion générale.....	92
Références	

# Liste des figures

## CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

<b>Figure 1.1</b> : tuyère supersonique convergente- divergente.....	05
<b>Figure 1.2</b> : Schéma de la tuyère supersonique .....	05
<b>Figure 1.3</b> : Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique et L'évolution de la pression le long d'une tuyère .....	07
<b>Figure 1.4</b> : Régime de sur détente en 1D.....	08
<b>Figure 1.5</b> : Organisation de l'écoulement à l'adaptation.....	10
<b>Figure 1.6</b> : Organisation de l'écoulement en régime de sous-détente.....	11
<b>Figure 1.7</b> : Tuyère en sur-détente avec décollement naissant de la couche Limite .....	12
<b>Figure 1.8</b> : Tuyère en sur-détente avec décollement étendu de la couche limite .....	13
<b>Figure 1.9</b> : tuyère à contour profilé.....	14
<b>Figure 1.10</b> : Tuyère annulaire.....	15
<b>Figure 1.11</b> : Tuyère double galbe.....	16
<b>Figure 1.12</b> : Tuyère à zone d'expansion.....	16
<b>Figure 1.13</b> : Tuyère à détente centrée.....	17
<b>Figure 1.14</b> : Tuyère à double col.....	18

<b>Figure 1.15</b> : Tuyère à double détente.....	18
<b>Figure 1.16</b> : Tuyère type bouchon.....	19
<b>Figure 1.17</b> : Tuyère Type Détente Déviation.....	20
<b>Figure 1.18</b> : Tuyère à section variable.....	20
<b>Figure 1.19</b> : Tuyère à chevrons.....	21
<b>Figure 1.20</b> : Tuyère orientable.....	22
<b>Figure 1.21</b> : Tuyère conique.....	23
<b>Figure 1.22</b> : Profils des tuyères TIC et TOC.....	24
<b>Figure 1.23</b> : Tuyères TIC et TOC du DLR.....	25
<b>Figure 1.24</b> : Tuyère d'une fusée.....	26
<b>Figure 1.25</b> : Tuyère d'un avion de Combat.....	26
<b>Figure 1.26</b> : avion de combat a décollage verticale.....	27
<b>Figure 1.27</b> : soufflerie supersonique.....	27

### **CHAPITRE 3 : LES PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE**

<b>Figure 3.1</b> : Variation de la fonction $F_{\rho}(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$ .....	43
<b>Figure 3.2</b> : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T^*]$ .....	44
<b>Figure 3.3</b> : Présentation de la condensation des nœuds.....	44

### **CHAPITRE 4 : TUYERE A CORPS CENTRAL BIDIMENTIONNELLE (PLUG NOZZLE)**

<b>Figure 4.1</b> : Les géométries de la tuyère à corps central.....	52
<b>Figure 4.2</b> : Ecoulement au col et à la sortie d'une tuyère à corps central.....	53
<b>Figure 4.3</b> : Angle de déviation $\Psi$ de la carène de la tuyère à corps central.....	54
<b>Figure 4.4</b> : Angle de déviation $\Psi$ de la carène de la tuyère à corps central.....	54
<b>Figure 4.5</b> : Angles de Mach du col et de la section de sortie de la tuyère à corps central type à Bouchon.....	57

<b>Figure 4.6</b> : Paramètres d'une Ligne de Mach intermédiaire reliant les points A et i (i=2, 3, ..., N).....	58
<b>Figure 4.7</b> : Discrétisation de la zone de détente de la tuyère à corps central type à bouchon.....	59
<b>Figure 4.8</b> : Présentation des paramètres dans un triangle.....	60
<b>Figure 4.9</b> : Force de pression exercée sur un segment du corps central.....	66

## CHAPITRE 5 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS

<b>Figure 5.1</b> : L'allure du corps central à $M_S=1.5$ .....	70
<b>Figure 5.2</b> : L'allure du corps central à $M_S=2.0$ .....	71
<b>Figure 5.3</b> : L'allure du corps central à $M_S=3.0$ .....	72
<b>Figure 5.4</b> : L'allure du corps central à $M_S=4.0$ .....	73
<b>Figure 5.5</b> : L'allure du corps central à $M_S=5.0$ .....	73
<b>Figure 5.6</b> : Variation du rapport des températures le long de la paroi du corps central pour $M_S=3.0$ .....	75
<b>Figure 5.7</b> : Variation du rapport des masses volumiques le long de la paroi du corps central pour $M_S=3.0$ .....	75
<b>Figure 5.8</b> : Variation du rapport des pressions le long de la paroi du corps central pour $M_S=3.0$ .....	76
<b>Figure 5.9</b> : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement $\theta$ le long de la paroi du corps central pour $M_S=3.0$ .....	77
<b>Figure 5.10</b> : Variation du nombre de Mach le long de la paroi du corps central pour $M_S=3.0$ .....	77
<b>Figure 5.11</b> : Variation du coefficient de force $C_F$ le long de la paroi	

du corps central pour $M_S=3.0$ .....	78
<b>Figure 5.12</b> : L'allure du corps central à 75% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	79
<b>Figure 5.13</b> : L'allure du corps central à 50% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	79
<b>Figure 5.14</b> : L'allure du corps central à 25% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	80
<b>Figure 5.15</b> : Variation du rapport des températures le long du divergent à 75% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	80
<b>Figure 5.16</b> : Variation du rapport des températures le long du divergent à 50% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	80
<b>Figure 5.17</b> : Variation du rapport des masses volumiques le long du divergent à 25% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	81
<b>Figure 5.18</b> : Variation du rapport des masses volumiques le long du divergent à 75% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	81
<b>Figure 5.19</b> : Variation du rapport des masses volumiques le long du divergent à 50% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	82
<b>Figure 5.20</b> : Variation du rapport des pressions le long du divergent à 25% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	82
<b>Figure 5.21</b> : Variation du rapport des pressions le long du divergent à 75% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	83
<b>Figure 5.22</b> : Variation du rapport des pressions le long du divergent à 50% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	83
<b>Figure 5.23</b> : Variation du rapport des pressions le long du divergent	



à 25% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	84
<b>Figure 5.24</b> : Variation du nombre de Mach le long du divergent .....	84
à 75% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	85
<b>Figure 5.25</b> : Variation du nombre de Mach le long du divergent	
à 50% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	85
<b>Figure 5.26</b> : Variation du nombre de Mach le long du divergent	
à 25% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	86
<b>Figure 5.27</b> : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement $\theta$ le long du divergent	
à 75% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	87
<b>Figure 5.28</b> : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement $\theta$ le long du divergent	
à 50% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	87
<b>Figure 5.29</b> : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement $\theta$ le long du divergent	
à 25% la longueur du bouchon et à $M_S=3.0$ .....	87
<b>Figure 5.30</b> Variation du coefficient de force $C_F$ le long du divergent	
à 75% la longueur du corps central et à $M_S=3.0$ .....	88
<b>Figure 5.31</b> Variation du coefficient de force $C_F$ le long du divergent	
à 50% la longueur du corps central et à $M_S=3.0$ .....	89
<b>Figure 5.32</b> Variation du coefficient de force $C_F$ le long du divergent	
à 25% la longueur du corps central et à $M_S=3.0$ .....	89
<b>Figure 5.33</b> : Variation du coefficient de force $C_F$ à la sortie du corps central pour différentes tronçatures.....	90
<b>Figure 5.34</b> : Variation d l'erreur du coefficient de force $C_F$ à la sortie du corps central pour différentes tronçatures.....	91

## Liste des tableaux

<b>Tableau 3.1</b> : Table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ avec la température pour l'air.....	40
<b>Tableau 3.2</b> : Coefficients du polynôme $C_p(T)$ .....	41
<b>Tableau 5.1</b> : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.1.....	71
<b>Tableau 5.2</b> : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.2.....	71
<b>Tableau 5.3</b> : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.3.....	72
<b>Tableau 5.4</b> : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.4.....	73
<b>Tableau 5.5</b> : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.5.....	74
<b>Tableau 5.6</b> : Les valeurs du coefficient de force $C_F$ à la sortie du corps central pour différentes troncatures.....	90
<b>Tableau 5.7</b> : Les valeurs de l'erreur du coefficient de force $C_F$ pour différentes troncatures.....	91

## Notation latines

**A** : Section de la tuyère.

**As**: Section de sortie.

**A\***: Section du canal ou  $M= 1$ .

**a** : vitesse de son.

**Cd** : Le coefficient de décharge.

**CF** : Le coefficient de poussée.

**Cp** : Capacité calorifique a volume constante.

**Cv** : Capacité calorifique a volume constante.

**C\*** : La vitesse caractéristique.

**C<sub>D</sub>** : Coefficient de débit.

**C<sub>Masse</sub>** : coefficient de la masse de la structure de la tuyère.

**C<sub>Gaz</sub>** : Coefficient de la masse du gaz.

**C<sub>p</sub> (T)** : Coefficient de l'interpolation du paramètre  $T$ .

**F** : La poussée.

**H** : Enthalpie.

**I** : L'impulsion totale.

**I<sub>S</sub>** : L'impulsion spécifique.

**L** : Longueur de la tuyère.

**M** : Nombre de mach.

**Ms**: Nombre de mach de sortie.

**M\***: Nombre de Mach du col.

**m**: Débit massique.

**P** : Pression statique.

**P<sub>0</sub>** : Pression total (ou génératrice).

**P<sub>a</sub>** : Pression ambiante.

**P\***: Pression statique à la vitesse du son.

**T** : Température statique de l'écoulement.

**T<sub>0</sub>** : Température totale (ou génératrice).

**T\***: Température statique à la vitesse du son.

**T<sub>s</sub>**: Température de sortie.

**T** : temps.

**r** : Constante du gaz parfait.

**R** : Rayon d'une section de la tuyère.

**R<sub>s</sub>**: Rayon de sortie.

**R\***: Rayon du col.

**L** : Longueur de la tuyère.

**l** : Unité de profondeur de la tuyère bidimensionnelle.

**X<sub>plug</sub>** : Distance entre la carène et la section de sortie de la tuyère à corps central.

**V<sub>eff</sub>**: Vitesse effective.

**W<sub>p</sub>** : Travail de force de pression.

**Q** : Chaleur échangée.

**ΔU** : Variation de l'énergie interne.

**ΔE<sub>c</sub>** : Variation de l'énergie cinétique.

**ΔE<sub>p</sub>**: Variation de l'énergie potentielle.

**L** : Chaleur latente.

**b1, b2** : Coefficients de la fonction de condensation.

**u, v** : composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.

**N** : Nombre des itérations et nombre de points de la discrétisation de la zone de détente pour la tuyère à corps central.

### **Système de coordonnées :**

**X** : abscisse d'un point.

**Y** : Ordonné d'un point.

$x_B$  et  $y_B$  : abscisse et Ordonné du point B.

$x_s$  et  $Y_s$  : Position et Ordonné de la section de sortie.

$x_N$  et  $Y_N$  : Position et Ordonné du point N.

### **Symboles grecs :**

$\alpha$ : L'angle que fait l'axe de la tuyère avec la paroi extérieure du bouchon.

$\beta$ : L'angle que fait l'axe de la tuyère avec la paroi intérieur du bouchon.

$\gamma$ : Rapport des chaleurs spécifiques.

$\mu$ : Angle de Mach.

$\nu$ : Fonction de Prandtl-Meyer.

$\psi$ : Inclinaison de 'Lip' par rapport à la verticale.

$\Phi$ : Angle polaire d'un point de la paroi par rapport au 'Lip'.

$\theta$ : Angle de déviation du vecteur vitesse de l'écoulement.

$\theta^*$  : Angle de déviation du vecteur vitesse de l'écoulement au col.

$\theta_s$  : Angle de déviation du vecteur vitesse de l'écoulement à la sortie.

$\zeta$  : Facteur de perte de la poussée.

$\lambda$ : Rayon polaire.

$\lambda_B$  : Rayon polaire au point B.

$\varepsilon$ : Erreur relative ou la tolérance.

$\rho$ : Masse volumique.

$\rho_0$ : Masse volumique de référence.

$\rho_s$ : Masse volumique à la sortie.

### **Abréviations :**

**HT** : Haute Température

**GP** : Gaz Parfait

**CV** : Convergente

**DV** : Divergente

### **Indice :**

S : section de sortie

\* : condition critique

0 : condition d'arrêt

i : position actuelle ou nœud

**0** : Condition d'arrêt.

**C** : Condition au col.

**d** : Décharge.

**eff** : Effective.

**(i, j)** : Nœud ou point.

**Plug** : Concernant le corps central.

**s** : Section de sortie.

**t** : Total.

**Exposant**

\* valeur au col juste après la détente.

**K** itération.

## INTRODUCTION

L'expansion et la décharge d'un gaz dans différents systèmes de propulsion, par exemple : moteurs à réaction et fusées, est toujours réalisé par une tuyère. La Poussée d'une tuyère classique à géométrie fixe, qui décharge dans l'atmosphère peut être exprimé par la relation simple suivante :

$$F = \dot{m} V_e + (P_e - P_{atm})A_e \quad (1)$$

Cette relation indique que pour une tuyère conçue pour avoir une valeur constante de  $P_e$  (aussi connu sous le nom de pression d'échappement de conception "Design Exhaust Pressure",  $P_{des}$ ), la poussée est affectée par le changement d'altitude. À l'altitude de conception, où  $P_{atm} = P_{des}$ , le deuxième terme de la relation ci-dessus (connu sous le nom de poussée de pression) est égale à zéro, et on dit que la tuyère fonctionne dans une "condition optimale". À des altitudes inférieures à l'altitude de conception, où  $P_{atm} > P_{des}$ , la poussée de pression prend une valeur négative, et la perte de poussée est inévitable. Ces conditions, qui se produisent à des altitudes allant du niveau du sol à l'altitude de conception, sont appelées conditions de «sur-expansion». À côté de la perte inhérente de poussée, la tuyère conventionnelle peut souffrir d'autres problèmes, notamment les ondes de choc et la séparation de l'écoulement dans la section divergente, l'oscillation de poussée et l'asymétrie du débit dans les conditions de sur-expansion.

Depuis l'apparition des systèmes de propulsion à réaction et de fusée, les chercheurs ont inventé et mis en œuvre de nombreux types de tuyères, principalement pour augmenter les performances de poussée de ces dernières dans les conditions de travail hors conception. Parmi ces différents designs, les caractéristiques de la tuyère à corps central (connu notamment sous le nom de Plug Nozzle) attirent des chercheurs depuis le milieu des années 1950 [52].



De nombreuses études théoriques de la tuyère à corps central ont été réalisées dans les années 1960. Le travail de Berman et Crimp [53] est un exemple de ces études, dans lesquels des questions telles que les méthodes de conception analytique, vecteur de poussée, et intégration avec des systèmes propulseurs solides et liquides ont été abordés. Rao [54] a présenté une méthode plus précise basée sur le calcul des variations pour la conception du corps central (The Plug) en 1961, et Lee et Thompson [55] ont développé le premier programme informatique pour la conception de tuyère à bouchon basé sur le travail de Rao en 1964. Au début des années 1970, les problèmes thermiques et de résistance de la tuyère à corps central et le développement de méthodes plus efficaces pour la fabrication des tuyères conventionnelles a conduit à un déclin des activités de recherche dans ce domaine.

Dans les années 1990, la NASA a lancé le projet SSTO (Single Stage to Orbit), qui a nécessité un système de propulsion avec une efficacité maximale dans une large gamme d'altitude de travail. Le système de propulsion à corps central a été sélectionné à cet effet, et les recherches approfondies et le développement ont conduit à des tests réussis du moteur aérospike RS2200 [56]. L'annulation de ce projet en 2001 a conduit à un nouveau déclin des activités de recherche dans ce domaine aux États-Unis ces dernières années, mais la tuyère à corps central reste toujours un sujet de recherche en direct en Europe et au Japon. Hageman et al. [57,58] ont proposé l'application d'une tuyère aérospike à grande échelle dans le lanceur post-Ariane 5 au DLR. Tomita et al. [49] et Sakamoto et al. [59] ont porté des études expérimentales des tuyères à corps central axisymétriques et linéaires, et Fujii et Ito [60] ont étudié numériquement de nombreux aspects des tuyères à corps central.

Plus récemment, deux groupes différents aux États-Unis ont appliqué la tuyère à corps central axisymétrique dans le système de propulsion

des fusées-sondes, et ont démontré un gain considérable dans les performances des fusées [61, 62].

La tuyère à corps central est considérée comme ayant les meilleures performances globales par rapport à la tuyère cloche conventionnelle (Bell Nozzle) car l'expansion du jet n'est pas limitée par une paroi et le flux d'échappement peut s'adapter à l'environnement en modifiant la limite du jet. De plus, on considère que les performances de la tuyère ne sont pas influencées par la troncature de cette dernière car la pression de sortie compense la perte de force de poussée. La pression de sortie peut également être augmentée en injectant un flux secondaire à la sortie qui peut être prélevé du flux d'échappement et injecté à cette dernière [63]. Pour une discussion détaillée sur les comparaisons de performances hors conception des tuyères à corps central et conventionnelles, le lecteur est aimablement renvoyé à la référence [64].

Malgré son avantage remarquable par rapport à la tuyère conventionnelle, l'application pratique d'une tuyère à corps central idéale a des problèmes structurels et thermiques, surtout à cause de l'extrémité pointue du corps central (The Plug). Ces problèmes peuvent être évités dans une large mesure en tronquant la sortie du corps central. La troncature de la sortie réduit le poids et la longueur de la tuyère à corps central et augmente sa force, facilitant ainsi l'application pratique de ce type de tuyère. Dans ce mémoire, l'effet des différentes valeurs de troncature sur les paramètres de la tuyère à corps central ont été étudiées en diverses conditions.

## CHAPITRE 1

### GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

#### 1.1 Définition d'une tuyère

La tuyère est une partie déterminante d'un système de propulsion. C'est un conduit de section droite variable placé à la sortie d'un propulseur et qui sert à transformer l'énergie thermique des gaz chauds de combustion en énergie cinétique, donc c'est le lieu de la détente des gaz brûlés. Elle fournit la poussée à l'engin dans son ascension vers l'espace.

#### 1.2 Présentation d'une tuyère supersonique

Une tuyère supersonique est un conduit de forme convergente-divergente avec un profil spécifiquement étudié. Elle met en communication une chambre contenant un gaz comprimé avec un milieu extérieur d'évacuation. Pour permettre le mouvement du gaz, la chambre et le milieu extérieur sont à des pressions différentes.

La tuyère supersonique a pour rôle d'accélérer les gaz d'une vitesse faible à l'entrée du convergent à une vitesse sonique au col puis à une vitesse supersonique à la sortie du divergent. Tout le long de la tuyère, la vitesse du gaz augmente, cependant que sa pression et sa température diminuent. La tuyère supersonique est appelée tuyère de Laval, elle est représentée dans la figure 1.1 [1], [2].

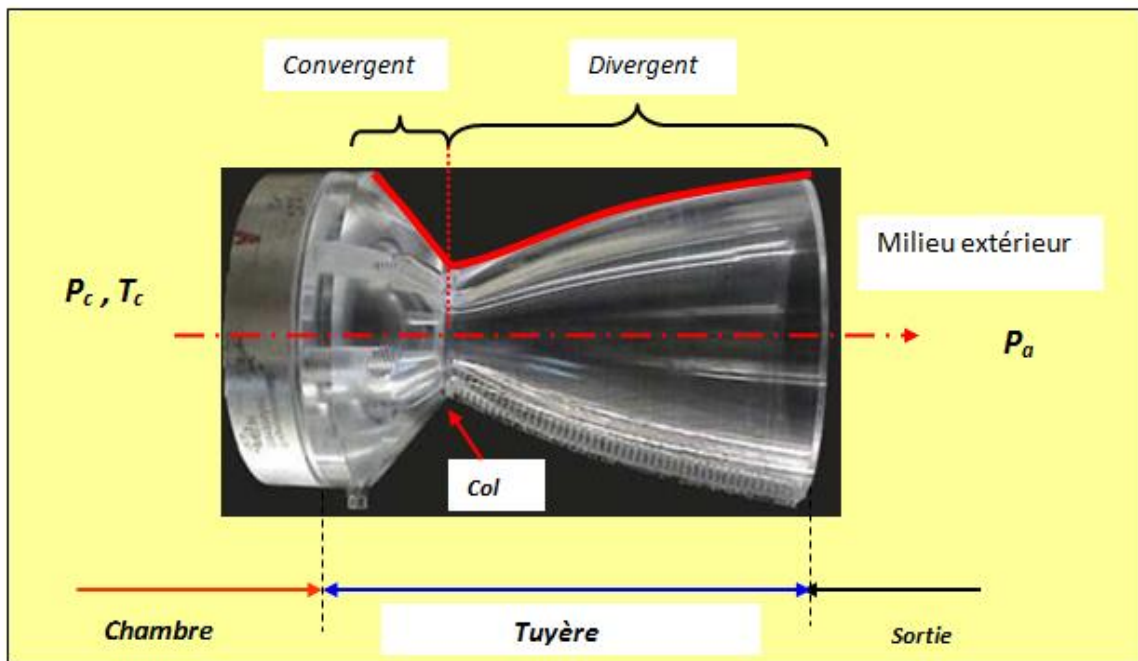


Fig. 1.1 : La tuyère supersonique convergente- divergente.

### 1.3 Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique. Considérons le système représenté par la figure 1.2, constitué d'une tuyère Laval. La tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice  $P_c$  supposée fixe. Le divergent débouche dans une enceinte quasi infinie dont la pression statique  $P_a$  est variable.

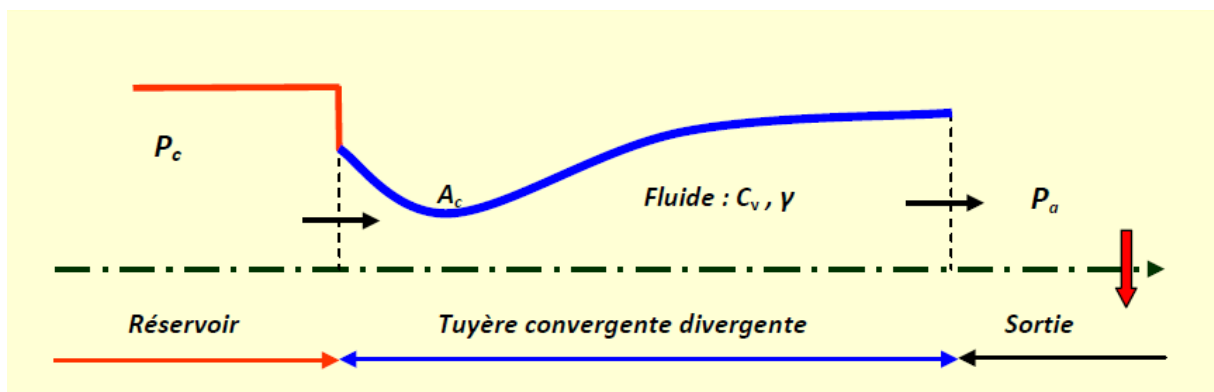


Fig. 1.2 - Schéma de la tuyère supersonique.

Le fluide est entièrement au repos (figure 1.3, courbe (a)) Si la pression du milieu extérieur est égale à la pression de la chambre, mais dans le cas où la pression du milieu ambiant  $P_a$  diminue progressivement au-dessous de la pression  $P_c$  supposée constante, un débit d'écoulement prend naissance et cinq régimes particuliers d'écoulements sont distingués [4], [5], [6].

#### **a. Écoulement subsonique**

Tout au long de la tuyère l'écoulement est subsonique (figure 1.3, courbes (b) et (c)). Dans le convergent la vitesse augmente et la pression diminue jusqu'à une valeur minimale atteinte au col. Puis dans le divergent la vitesse diminue et la pression augmente jusqu'à la pression du milieu extérieur. La pression est donc minimale dans la section du col où la vitesse passe par une valeur maximale.

#### **b. Écoulement sonique adapté**

L'écoulement est dit sonique adapté si  $P_a$  continue à diminuer jusqu'à une valeur caractéristique notée  $P_{ac1}$ , le débit atteint une valeur limite maximale [figure 1.3, courbe (d)]. Sauf au col de la tuyère, l'écoulement est subsonique, la pression atteint la valeur critique  $P^*$  et la vitesse atteint la vitesse du son. Le col est amorcé.

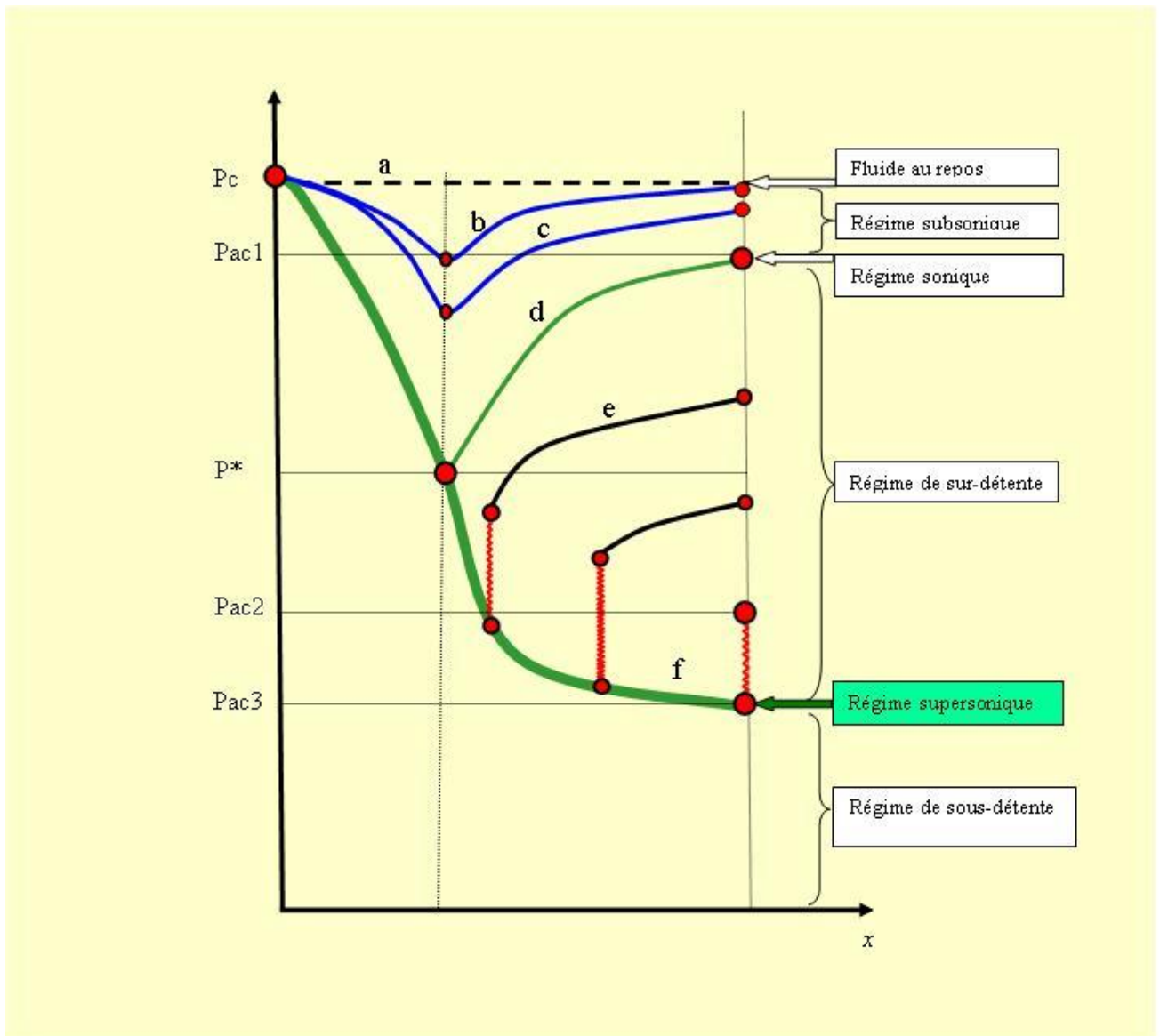


Fig. 1.3 - Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique et L'évolution de la pression le long d'une tuyère.

### c. Écoulement sonique non adapté

Si  $P_a$  diminue au-dessous de  $P_{ac1}$ , le col reste toujours sonique. Dans le divergent apparaît un phénomène irréversible appelé onde de choc, l'écoulement est dit sonique non adapté ou régime de sur détente. L'évolution de l'écoulement du gaz est représentée par la courbe (e) de la figure 1.3. Dans le convergent l'écoulement ne subit aucune modification mais dans le divergent une onde de choc stationnaire et normale à l'axe de la tuyère divise l'écoulement en deux parties (figure 1.4).

Dans la première partie du divergent l'écoulement est supersonique, la vitesse continue à augmenter et la pression diminue. A travers l'onde de choc, la pression augmente brusquement, et la vitesse diminue brusquement. L'onde de choc se place de telle façon que la recompression qui s'effectue ramène la pression de la sortie à la pression ambiante  $P_a$ .

Dans la deuxième partie du divergent (après l'onde de choc) l'écoulement est à nouveau subsonique, la pression remonte et la vitesse diminue progressivement.

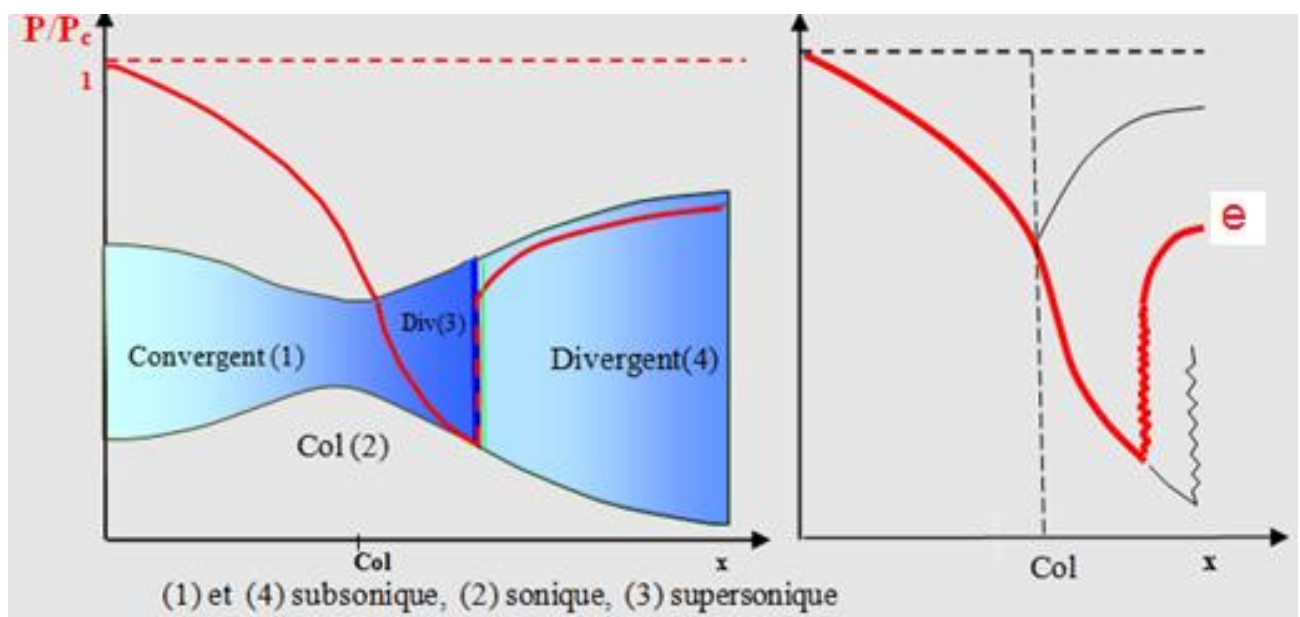


Fig. 1.4 - Régime de sur-détente en 1D.

Lorsque  $P_a$  diminue, l'onde de choc se déplace vers la sortie. Soit  $P_{ac2}$  la pression ambiante pour laquelle l'onde de choc se place à la sortie de la tuyère. L'écoulement dans le divergent devient entièrement supersonique en diminuant encore la pression  $P_a$  au-dessous de  $P_{ac2}$ , l'onde de choc quitte complètement la tuyère et la diminution de  $P_a$  ne modifie plus l'écoulement à l'intérieur.

L'adaptation de la pression entre la sortie de la tuyère et la pression du milieu ambiant doit se faire à l'extérieur du divergent par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques.

#### **d. Ecoulement supersonique adapté**

Il arrive un moment où l'écoulement est entièrement supersonique dans toute la tuyère si  $P_a$  continue à diminuer. Le phénomène d'onde de choc disparaît, alors la tuyère est parfaitement adaptée. L'évolution du gaz est représentée par la courbe (f) de la figure 1.3. Notons par  $P_{ac3}$  la pression ambiante pour laquelle ce phénomène se produit.  $P_{ac3}$  est appelé pression d'adaptation.

#### **e. Ecoulement supersonique non adapté**

L'écoulement dans la tuyère de Laval ne subit aucune modification Lorsque la pression  $P_a$  devient inférieure à  $P_{ac3}$ , et l'écoulement est dit supersonique non adapté. L'adaptation entre la tuyère et la pression ambiante doit se faire à l'extérieure de la tuyère par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques.

### 1.4 Fonctionnement réel de la tuyère supersonique

Dans les écoulements réels, la tuyère comporte une couche limite qui est très sensible aux variations de pression, ce qui rend les phénomènes physiques dans la tuyère plus complexes. Lorsque le col de la tuyère est sonique, l'écoulement dans la tuyère dépend uniquement de la pression à la sortie de la tuyère notée  $P_e$  et de la pression du milieu ambiant  $P_a$ . En fonction de la différence entre ces deux pressions, trois cas sont rencontrés :

Si  $P_e = P_a$ , la tuyère est dite adaptée.

Si  $P_e > P_a$ , la tuyère est dite sous-détendue.

Si  $P_e < P_a$ , la tuyère est dite sur-détendue.



### ➤ Le régime d'adaptation

Dans le cas du régime adapté, Le gaz se détend depuis la chambre jusqu'à la sortie de la tuyère où la détente est complètement accomplie. En sortant de la tuyère la pression du milieu ambiant  $P_a$  est égale à la pression de sortie  $P_e$ .

L'écoulement du gaz sort de la tuyère sous forme d'un jet supersonique quasi-uniforme. Une frontière isobare sépare le jet supersonique du fluide ambiant. En sortant de la tuyère, la couche limite du jet entre en contact avec le fluide ambiant et l'entraîne dans son sillage. Cette interaction forme une couche de mélange (figure 1.5).

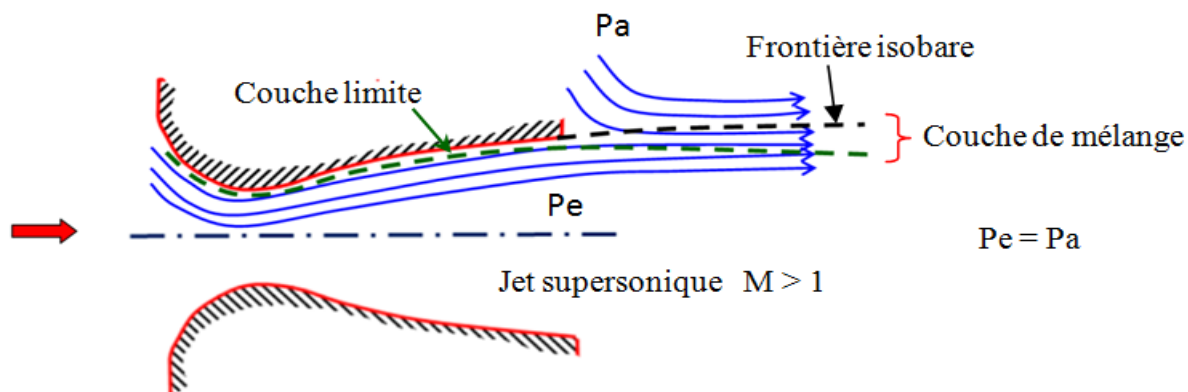


Fig. 1.5 - Organisation de l'écoulement à l'adaptation.

### ➤ Le régime de sous-détente

Le régime supersonique hors adaptation est appelé régime de sous-détente. Il se concrétise lorsque la pression du milieu ambiant  $P_a$  est inférieure à la pression d'adaptation. La détente est incomplète dans la tuyère. A la sortie de cette dernière, le gaz continue sa détente de la pression de sortie  $P_e$  à la pression inférieure ambiante  $P_a$ . La suite de la détente du gaz est réalisée par un faisceau d'ondes de détente.

On observe un élargissement du jet supersonique à la sortie de la tuyère, Vu que la pression  $P_e$  est supérieure à la pression  $P_a$ . La frontière isobare qui sépare le jet supersonique du fluide du milieu ambiant prend une forme

divergente (figure 1.6).

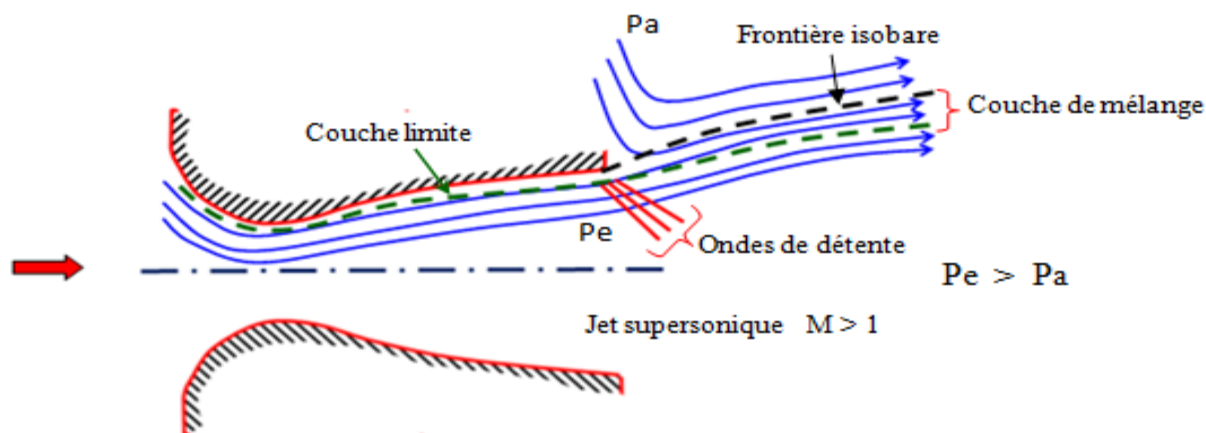


Fig. 1.6 - Organisation de l'écoulement en régime de sous-détente.

### ➤ Le régime de sur-détente

Le deuxième régime supersonique hors adaptation est le régime désigné par le régime de sur détente. Ce dernier se produit lorsque la pression d'adaptation de la tuyère est inférieure à la pression du milieu ambiant  $P_a$ .

La détente des gaz dans la tuyère s'effectue jusqu'à une pression statique  $P_1$  qui est inférieure à la pression ambiante  $P_a$ . La couche limite du jet dans cette situation subit une contre-pression et un choc d'intensité  $P_2/P_1$  se forme dans l'écoulement.

La pression  $P_2$  est la pression après le choc, elle est presque égale à la pression ambiante. Suivant l'intensité du choc, deux cas sont rencontrés : le régime de sur-détente avec décollement naissant et le régime de sur-détente avec décollement étendu.

#### • Sur-détente avec décollement naissant

Ce régime de sur-détente est qualifié de sur-détente avec décollement naissant car il n'y a pas de point de décollement (figure 1.8). Pour des gradients de pression adverse modérés, la couche limite subsonique détecte la contre-pression en un point O, appelé origine de l'interaction, juste un peu en avant de la sortie de la tuyère.

La couche limite décolle de la tuyère à la lèvre et un choc oblique se

forme à la sortie de la tuyère.

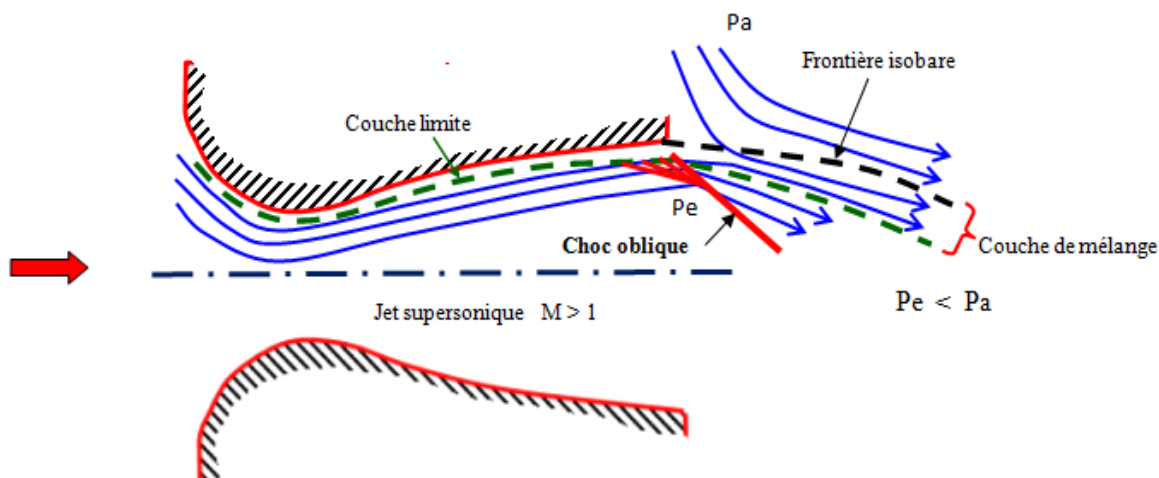


Fig. 1.7 - Tuyère en sur-détente avec décollement naissant de la couche limite.

- **Sur-détente avec décollement étendu**

La couche limite n'est pas en mesure de supporter n'importe qu'elle valeur de contre pression. Au-delà d'une certaine valeur critique, la couche limite décolle à l'intérieur de la tuyère. Ce décollement entraîne une profonde modification de l'écoulement, comme le montre le montage réalisé dans la figure (1.9), [7], [8].

Ce régime est très dangereux pour la tuyère, et le décollement ainsi créé va se produire dans un point S situé à l'intérieur. La topologie de l'écoulement dans ce régime est fortement influencée par le profil de la tuyère ainsi que le rapport de pression  $P_e/P_a$ .

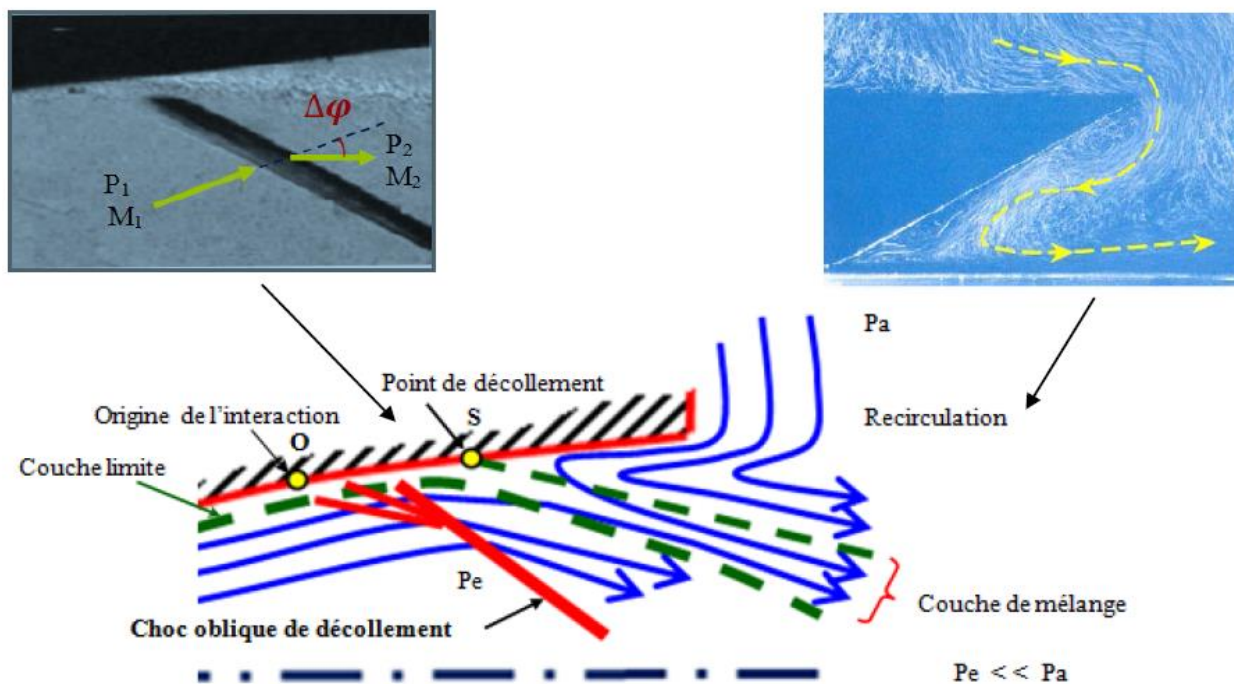


Fig. 1.8 - Tuyère en sur-détente avec décollement étendu de la couche limite.

## 1.5 Les différentes configurations des tuyères supersoniques

La poussée d'une tuyère ne dépend pas seulement du taux d'accélération des gaz dans la partie divergente mais aussi de la direction des gaz à la section de sortie. Afin d'obtenir une poussée maximale dans la tuyère, les gaz d'éjections sont ramenés à la direction axiale, en faisant augmenter la longueur de la tuyère, qui induit automatiquement l'augmentation de son poids. Ceci a un effet néfaste sur le rendement de propulsion de la tuyère. Donc le choix d'une tuyère est un compromis.

### 1.5.1 Tuyères conventionnelles

#### 1.5.1.1 Les tuyères à contour profilés

Pour remédier aux pertes de poussée considérables à cause de la divergence de l'écoulement à la sortie, il faut tourner le contour du divergent vers l'intérieur pour ramener l'écoulement à une direction axiale, et aller avec la partie divergente près du col à des valeurs de divergence relativement

importantes pour compenser la détente manquée en faisant incliner le profil vers l'intérieur.

Dans ce contexte une approche directe pour la conception d'une tuyère supersonique a été proposée par Guderley et Hentsh en 1955, le problème du calcul de la section de sortie et du contour pouvant fournir une poussée optimale a été posé en spécifiant uniquement la longueur et la pression ambiante. Pour développer le contour supersonique de la tuyère une méthode appelée méthode des caractéristiques a été appliquée, le résultat de cette dernière est une tuyère développant une poussée optimale pour une valeur donnée de la section de sortie et de la longueur figure (1.9).

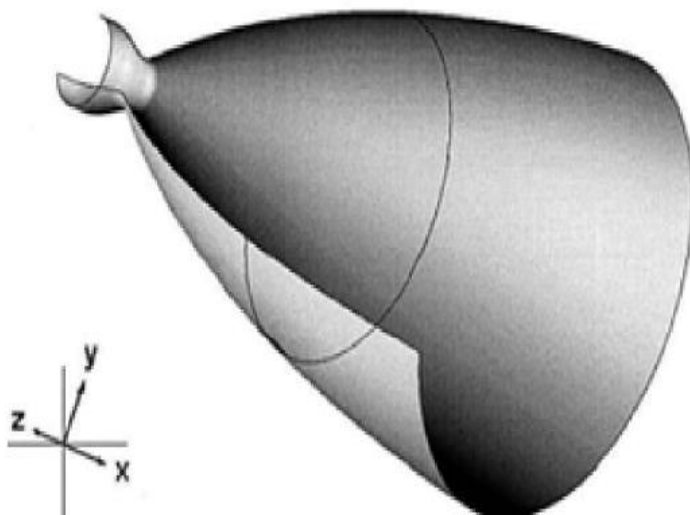


Fig. 1.9- tuyère à contour profilé

#### 1.5.1.2 Les tuyères annulaires

Comme son nom l'indique les gaz d'échappement passent à partir du col jusqu'à la sortie de la tuyère à travers une conduite sous forme d'anneau au lieu d'une section normale d'origine sur l'axe, cet anneau est formé par un corps central au col et par une paroi externe qui définit le Gabarret de la tuyère. Voir Figure (1.10).

Du fait que le contour est de bordures coniques et qu'à la sortie de la tuyère le gaz d'éjection n'est pas d'une direction axiale, cette configuration

induit toujours une perte de poussée. Dans ce cas, le facteur de perte de poussée est défini par la relation suivante :

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\alpha + \beta) \sin \beta + \cos \beta - \cos \alpha}$$

Avec :

$\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les angles formés par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure, et l'axe de la tuyère et la paroi intérieure.

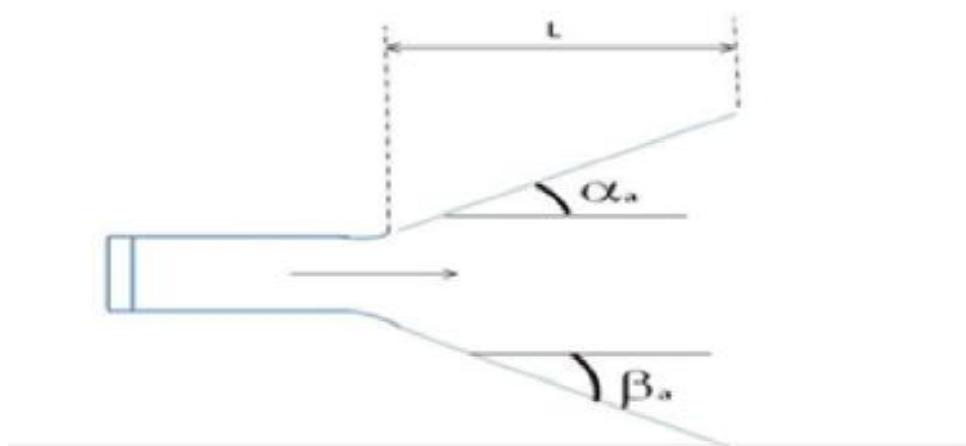


Fig. 1.10-Tuyère annulaire

### 1.5.2 Tuyère adaptée en altitude

Des progrès plus significatifs dans les performances d'une tuyère peuvent être réalisés à travers l'adaptation de la pression de sortie tuyère à la pression ambiante pendant la montée du lanceur dans l'atmosphère.

#### 1.5.2.1 Les tuyères à décollement contrôlé

##### ➤ Tuyère à double galbe

La tuyère à double galbe, appelée aussi tuyère à double cloche est l'une des tuyères innovantes utilisée généralement pour les navettes spatiales, formée par une jonction de deux tuyères à simple galbe au niveau d'un point dit d'inflexion. Elle a l'avantage d'auto-adaptation de l'écoulement pour deux plages de fonctionnement (à basse et à haute altitude) par une simple inflexion du contour (sans activation mécanique) et

un décollement du jet à basse altitude, fixé à la jonction de deux galbes c'est à dire stable et symétrique à l'inflexion. Cependant, elle présente comme inconvénients une traînée d'aspiration supplémentaire à basse altitude et des charges latérales durant la transition entre les régimes.

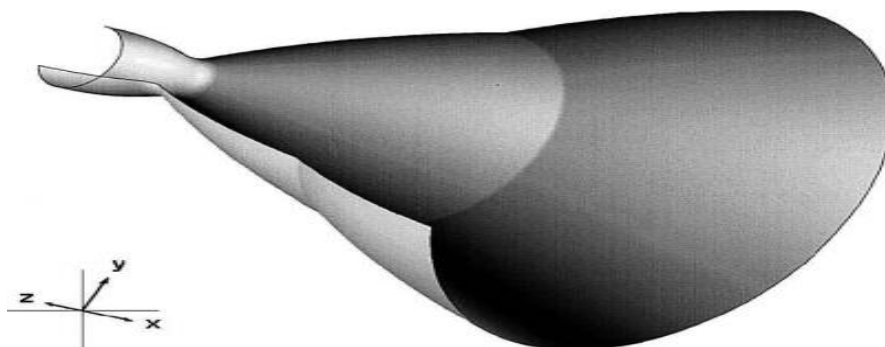


Fig. 1.11- Tuyère double galbe

➤ **Tuyère à zone d'expansion**

La forme de la zone d'expansion de la partie divergente est un peu arbitraire. Typiquement, une forme d'arc circulaire de grand rayon est utilisée dans les souffleries. A la sortie de la tuyère, l'écoulement devient uniforme et parallèle à l'axe de révolution comme indique la figure (1.12) [24], [18] et [34].

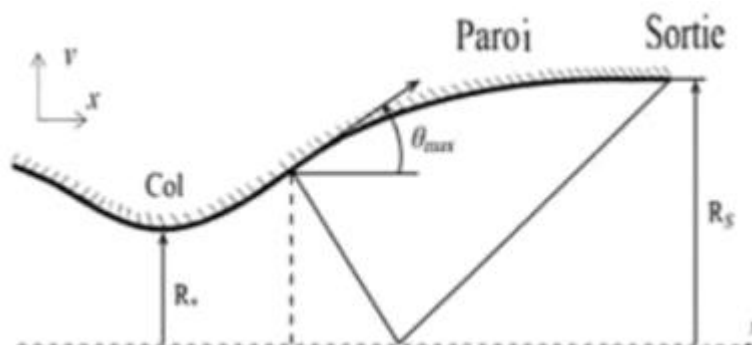


Fig. 1.12- Tuyère à zone d'expansion [18,34].

➤ **Tuyère à détente centrée**

La tuyère est de type à détente centrée, si la zone d'expansion est contractée en un point, où la détente prend place à travers des ondes de Prandtl Meyer centrées et générées à partir du coin du col de la tuyère avec un angle initial  $O^*$  [18,34]. Dans ce type de tuyères on peut donner une valeur relativement importante à l'angle de divergence situé près du col allant de  $20^\circ$  à  $30^\circ$ , pour donner une importante détente sans gêner l'axialité de l'écoulement à la sortie. La deuxième partie divergente tend à faire suivre l'écoulement dans la direction uniforme et parallèle [25].

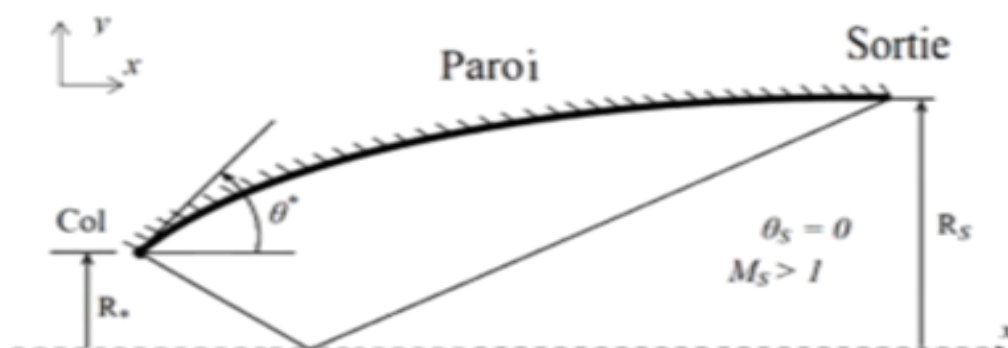


Fig. 1.13- Tuyère à détente centrée.

1.5.2.2 Les tuyères bi-modes

➤ **Tuyère à double col (dual mode nozzle)**

À basse altitude la chambre de poussée (chambre de combustion + tuyère) externe fonctionne avec la chambre de poussée interne en parallèle. Dans ce mode d'opération, le moteur a un col large qui produit un rapport de détente modéré. À une certaine altitude la chambre de poussée externe s'éteint et le moteur continue à fonctionner seulement avec la chambre de poussée interne. Avec cette configuration, l'écoulement de la chambre interne se détend et s'attache d'une manière supersonique à la chambre externe en résultant un rapport de détente élevé pour le reste de la mission [30].



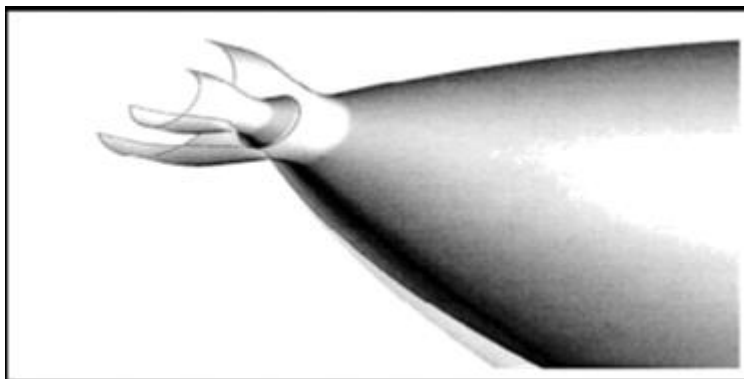


Fig. 1.14- Tuyère à double col.

➤ **Tuyère à double détente (dual-expander nozzle)**

À basses altitudes les deux chambres de poussées fonctionnent en partageant la même section de sortie, ce qui donne un rapport de section correspondant à une détente modérée. A un certain point de la mission, l'une des deux chambres s'éteint, permettant à l'autre chambre d'utiliser la totalité de la section de sortie et de créer un grand rapport de section (une grande détente) pour le reste de la mission.

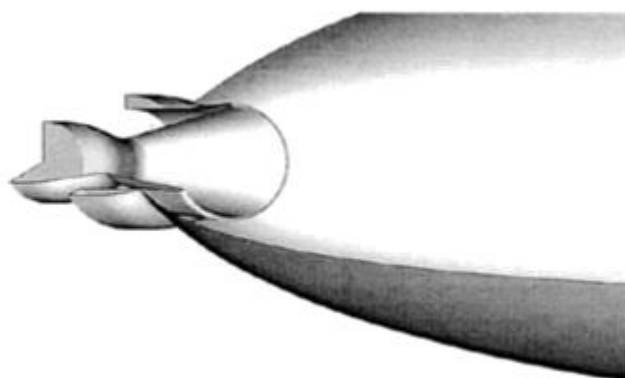


Fig. 1.15- Tuyère à double détente.

1.5.2.3 Tuyère auto-ajustable

Contrairement aux configurations précédentes où le processus de détente des gaz est principalement influencé par le contour de la paroi à la section divergente de la tuyère, le processus de détente de ces gaz dans ce cas est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante. L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures. Ces tuyères sont classées en deux

catégories:

➤ **Tuyère type bouchon (plug nozzle)**

Ce type de tuyère possède un col de la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur. L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère Convergente-Divergente, et les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion  $P_t$  jusqu'à la pression ambiante  $P_a$  (Fig.1.16).

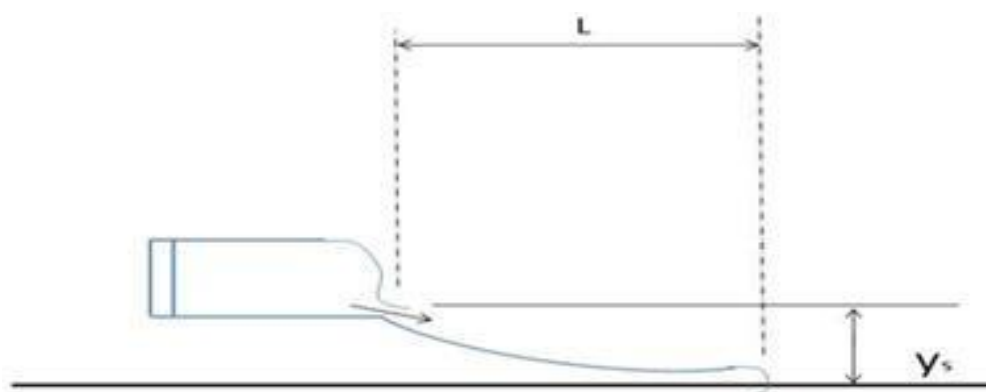


Fig. 1.16- Tuyère type bouchon.

➤ **Tuyère type détente-déflexion (expansion-déflexion nozzle)**

Dans ce type de tuyère une chambre de combustion compacte se positionne autour de la ligne centrale et présente un col annulaire au voisinage de cette dernière. On la qualifie de tuyère à détente-déflexion (E.D) parce que les gaz se dirigent dans la direction de l'écoulement du bouchon central qui réalise une rotation de l'écoulement en expansion à une direction presque axiale. Cette configuration permet l'obtention des bonnes performances même dans des conditions au-dessous de celles pour lesquelles elle a été initialement conçue.

Les travaux expérimentaux sur de telles tuyères [9] et [10], ont montré qu'une utilisation d'angles de déviation d'une valeur aussi importante que  $40^\circ$  pour des rapports de détente bas n'entraîne que des pertes minimales de poussée (une perte de 1% a été enregistrée pour un angle de  $30^\circ$ ).

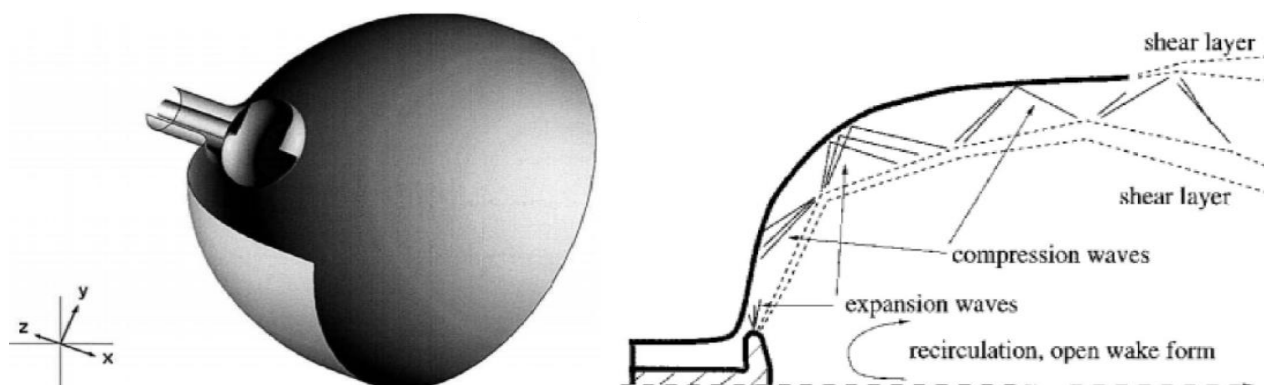


Fig. 1.17- Tuyère Type Détente Déviation

### 1.5.3 Tuyère innovante

#### ➤ Tuyère à section variable

La sortie de la tuyère est à section variable et constituée d'une multitude de volets qui, en se rapprochant ou en s'écartant, modifient le diamètre de la tuyère afin qu'elle soit adaptée. Afin de se rapprocher le plus possible de la forme circulaire, les demi-volets sont réalisés par une multitude de petits volets, s'emboîtant les uns dans les autres. En général la commande de position est assurée par un anneau qui est tiré ou poussé (fermeture –ouverture) par des vérins répartis à la périphérie du canal de postcombustion.



Fig. 1.18- Tuyère à section variable

➤ **Tuyère à chevrons (tuyères en dents de scie)**

C'est une tuyère pour les turboréacteurs de type double flux d'air séparés, comportant une paroi interne à l'intérieur de laquelle circule un flux d'air primaire (FP) et qui se compose à l'extrémité externe de chevrons. Ainsi qu'une paroi externe entourant au moins partiellement la paroi interne et le long de laquelle s'écoule un flux d'air secondaire (FS), celle-ci étant mobile le long de la paroi interne. L'invention trouve des applications dans le domaine de l'aéronautique et en particulier, dans le domaine de la réduction des nuisances sonores extérieures produites par les turboréacteurs d'un aéronef notamment lors de la phase de décollage.



Fig. 1.19- Tuyère à chevrons.

➤ **Tuyère orientable**

C'est une tuyère articulée autour d'un ou deux axes comportant une partie fixe d'une part et de l'autre une partie pivotante et des vérins de commande permettant de déplacer la partie pivotante avec déformation de la structure annulaire élastique, ce qui permet d'orienter l'axe de poussé.

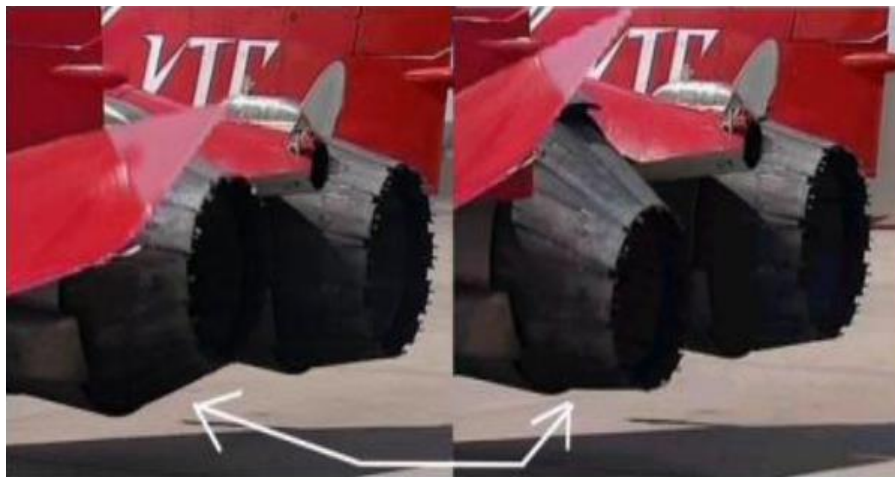


Fig. 1.20- Tuyère orientable.

## 1.6 Les profils des tuyères supersoniques

Deux types de profils sont largement utilisés, les tuyères à profil conique et les tuyères à profil optimisé.

### 1.6.1 Les Tuyères coniques

Les tuyères à profils coniques sont utilisées particulièrement en raison de la simplicité de la conception et de la réalisation de leur divergent. L'angle de divergence se situe entre 15 et 25 degrés. Ce type de profil simple équipe principalement les missiles et les propulseurs à poudre. Un exemple de tuyère conique est la tuyère de la fusée historique allemande V-2 [11].

Cette configuration engendre une perte considérable de poussée due à la divergence de l'écoulement (direction non axiale) à la section de sortie, cette perte est quantifiée par Malin qui a défini un facteur qui dépend de l'angle de divergence du cône :

$$\zeta = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Où  $\alpha$  est l'angle de divergence de la tuyère.

Le coefficient de poussée ( $C_F$ ) développé par ce type de tuyère est approximativement inférieur à 1.7% d'une tuyère idéale. IL est donné par l'expression suivante:

$$C_F = \frac{P_e A_e}{P_0 A^*} + \frac{1 + \cos \alpha}{2} \frac{\rho_e V_e^2 A_e}{P_e A_e}$$

Avec :

$P_e$  : Pression à la sortie de la tuyère.

$P_0$  : Pression totale.

$A_e$  : Section de sortie de la tuyère.

$A^*$  : Section au col de la tuyère.

$\rho_e$  : Masse volumique des gaz d'éjection.

$V_e$  : vitesse à la sortie de la tuyère.



Fig. 1.21- Tuyère conique.

### 1.6.2 Les tuyères optimisées

La conception de grandes tuyères se confronte à la contrainte de poids et à la longueur du divergent, ce qui pousse à l'utilisation des profils optimisés. Deux grandes familles de tuyères à profil optimisé sont utilisées actuellement : les tuyères idéales tronquées et les tuyères à profil parabolique [12], [7].

#### ➤ **Les tuyères à contour idéal tronqué TIC**

Ce type de tuyères est désigné de tuyères idéales tronquées ou tuyères TIC (Truncated Ideal Contoured nozzle), car le divergent de la tuyère est tronqué dans la dernière partie au prix de perte de poussée relativement limitée, et cela pour des raisons d'optimisation. Le profil est obtenu à partir de celui d'une tuyère idéale de référence qui a été calculé pour engendrer dans le plan de sortie un écoulement parallèle à l'axe.

Les tuyères idéales tronquées équipent certains moteurs de lanceurs comme le moteur européen Viking du lanceur Ariane 4, le moteur japonais

LE-7 du lanceur H-2 et le moteur russe RD-120 du lanceur Zenith [12], [13].

➤ **Les tuyères à profil parabolique TOC**

Ce type de tuyère est dit tuyère TOC de l'acronyme de la dénomination anglaise Thrust-Optimized Contour nozzle. Une méthode permettant d'optimiser la performance d'une tuyère pour une longueur donnée est proposée par Rao [14], qui a montré que le profil de la tuyère obtenu par cette méthode pouvait être approché par une parabole, sans perte significative de performance [15].

La longueur typique d'une tuyère Rao est de 75% à 85 % de la longueur d'une tuyère conique de 15 degrés ayant le même rapport de section. Ce type de profil est utilisé pour les tuyères des moteurs fusées modernes tels que le moteur Vulcain d'Ariane 5 ou le moteur SSME de la navette spatiale américaine.

La figure 1.22 présente les profils de deux tuyères TIC et TOC du laboratoire LEA de Poitiers en France [16-17]. Les deux tuyères ont le même rapport de section  $S_{\text{sortie}} / S_{\text{col}}$  et ont les mêmes performances pour un écoulement parfait. Mais, la tuyère TOC est plus optimisée que la tuyère TIC, donc une longueur plus faible et ce qui implique un poids plus faible. Ce gain d'optimisation est pénalisé par un écoulement réel plus perturbé dans la tuyère TOC que la Tuyère TIC. La figure 1.23 présente les maquettes à échelle réduite des tuyères TIC et TOC du laboratoire DLR en Allemagne [18].

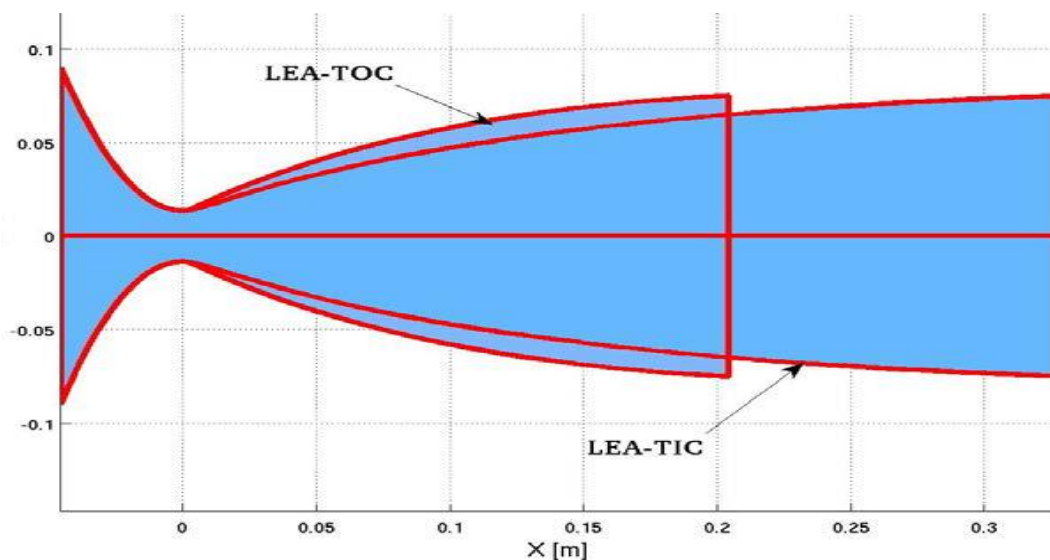


Fig. 1.22- Profils des tuyères TIC et TOC.



Fig. 1.23- Tuyères TIC et TOC du DLR [18].

### 1.7 Domaines d'application des tuyères supersoniques

Les tuyères supersoniques interviennent dans beaucoup de structures aéronautiques et aérospatiales telles que les moteurs fusées et missiles, moteurs avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques [9].



### 1.7.1 Moteurs fusées

Le moteur-fusée est le système de propulsion que les fusées utilisent pour accélérer à des vitesses supersoniques. les ergols stockés à bord sont brûlés dans la chambre de combustion et les gaz produits sont accélérés par la tuyère, Ils produisent une poussée qui accroît la vitesse de la fusée. Cette poussée produite est optimale lorsque la pression des gaz à la sortie de la tuyère est égale à la pression ambiante.

Les tuyères de premier étage qui doivent fonctionner à pression ambiante sont relativement courtes car le gaz ne doit pas être sur-détendu tandis que celles des étages qui fonctionnent dans le vide sont très allongées. Le divergent de forme idéale est de grande longueur or celle-ci a un impact direct sur la masse du lanceur. Donc pour limiter l'encombrement, les tuyères des moteurs fusées des étages supérieurs peuvent être en partie déployable.

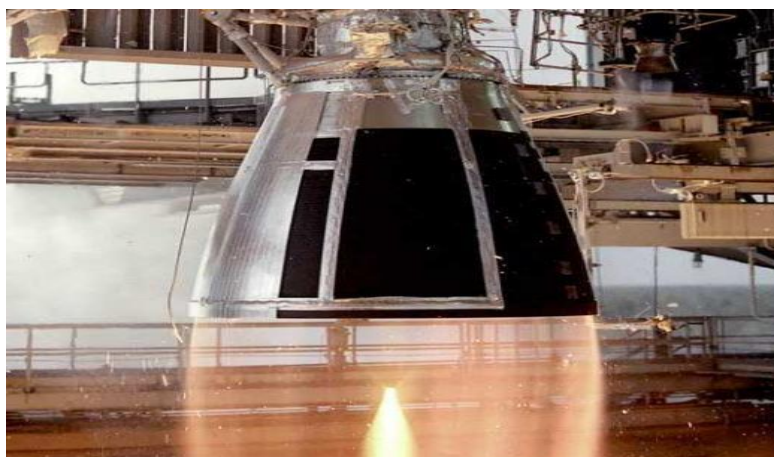


Fig. 1.24- Tuyère d'une fusée

### 1.7.2 Moteurs des avions de combats

Les Tuyères à col de sortie auto-adaptable ou à section ajustable sont utilisées dans la propulsion des avions de combat, dont le rapport des sections s'adapte aux divers régimes durant le vol en but d'optimiser la poussée, la Figure 1.25 représente un turboréacteur a section de sortie ajustable.

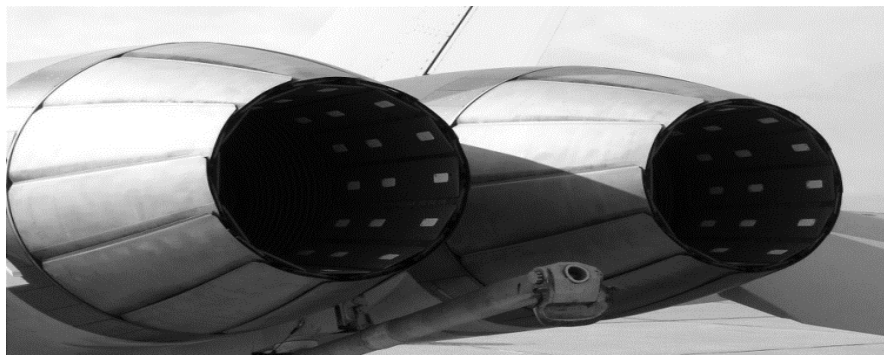


Fig. 1.25- Tuyère d'un avion de Combat.

On trouve également dans les avions de combat à décollage et atterrissage vertical l'utilisation des tuyères orientables, articulées autour d'un ou deux axes, permettant d'orienter l'axe de poussée et de rester en vol stationnaire.



Fig. 1.26- avion de combat a décollage verticale.

### 1.7.3 Souffleries supersoniques

Une soufflerie supersonique est une installation d'essais utilisée en aérodynamique dans le but de recréer des conditions de vol d'un appareil à des fins expérimentales en simulant des écoulements réels sur des prototypes à échelle réduite (profil d'aile, maquette d'avion...), qui sont fondés sur le principe de l'uniformité et l'analogie à l'air libre de l'atmosphère, du profil de vitesse ainsi que celui du nombre de Mach en sortie de tuyère. Cette dernière est l'élément indispensable de la soufflerie permettant de faire passer l'écoulement d'air à une vitesse supersonique.

Une installation supersonique peut se présenter sous une variété de

configurations différentes (à rafale, à impulsion, à cycle fermé ...) et comprend alors un équipement permettant de générer une différence de pression entre les deux extrémités de la tuyère. Cet équipement se compose, d'une manière générale, de trois parties principales : le collecteur (ou le convergent), la chambre d'expérience et le diffuseur (ou le divergent).

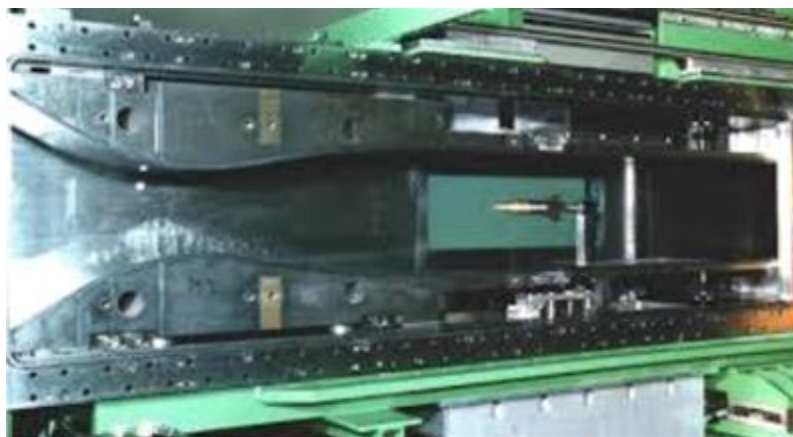


Fig. 1.27- soufflerie supersonique.

## CHAPITRE 2

### LES PARAMETRES DE PERFORMANCES

#### 2.1. La poussée

La poussée est la force délivrée par une tuyère, elle est en fonction non seulement de la vitesse d'éjection des gaz de combustion, mais aussi de la différence entre la pression de sortie et la pression ambiante. En théorie monodimensionnelle d'un écoulement permanent non visqueux, la poussée s'écrit :

$$F = \dot{m} V_e + (P_e - P_a) A_e$$

Avec :

F : La poussée.

$V_e$  : Vitesse d'éjection des gaz.

$A_e$  : Section de sortie tuyère.

$\dot{m}$  : Débit massique.

$P_e$  : Pression d'éjection (de sortie).

$P_a$  : Pression ambiante.

#### 2.2. Coefficient de poussée

Le coefficient de poussée est une quantité sans dimension. Il est défini comme le rapport de la poussée F sur le produit de la pression génératrice et la section de sortie de la tuyère, il caractérise la performance de la partie divergente ou encore la qualité de détente dans la partie divergente. Le coefficient de poussée est donné par l'expression suivante :

$$C_F = \frac{F}{P_0 A_c}$$

Où :

$C_F$  : Le coefficient de poussée.

F : La poussée.

$P_0$  : pression totale (ou génératrice).

$A_c$  : Section au col de la tuyère.

### 2.3. Le débit

Pour des conditions soniques au col de section  $A_c$ , le débit  $\dot{m}$  est bloqué à sa valeur maximale pour une valeur de  $P_i$  donnée, dans ce cas le col est dit amorcé :

$$\dot{m} = \frac{P_0 A_c \delta(\gamma)}{\sqrt{C_p T_0}}$$

Avec :

$$\delta(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1-\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

Où :

$\gamma$  : Rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constant.

$C_p$  : Capacité calorifique a pression constante.

$P_0$  : pression totale (génératrice).

$T_0$  : pression totale (ou génératrice).

$A_c$  : Section au col.

### 2.4. Coefficient de débit

Du fait que l'écoulement réel ne respecte pas parfaitement l'hypothèse de tranche plane, et qu'il ne se comporte pas comme un gaz non visqueux et calorifiquement parfait, le débit réel  $\bar{m}$  est alors corrigé avec un coefficient  $C_D$  approchant l'unité :

$$C_D = \frac{\text{débit actuel réel}}{\text{débit actuel isentropique}}$$

Donc :

$$\bar{m} = C_D \times \dot{m}$$

Où :

$C_D$  : le coefficient de débit.

$\dot{m}$  : Débit isentropique.

$\bar{m}$  : Débit réel.

### 2.5. Vitesse caractéristique

La vitesse caractéristique ( $C^*$ ) est un paramètre qui n'est fonction que de la nature du mélange et de la température de combustion :

$$C^* = \frac{P_0 \times A^*}{\dot{m}}$$

Où :

$\dot{m}$  : Débit masse.

$A^*$  : Section critique.

### 2.6. Vitesse effective

La vitesse effective, notée  $V_{\text{ef}}$ , est la vitesse réelle mesurée à la sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie par le rapport de poussée sur le débit :

$$V_{\text{eff}} = \frac{F}{\dot{m}}$$

Où :

$\dot{m}$  : Débit masse.

F : La poussée.

### 2.7. Impulsion spécifique

L'impulsion spécifique notée  $I_{\text{sp}}$ , mesure la force exercée par l'engin en fonction de la quantité de carburant consommé par unité de temps, c'est le quotient de la **poussée** et le produit du débit massique de **propergol** par la valeur normale de l'**accélération** de la **pesanteur** :

$$I_{\text{sp}} = \frac{F}{\dot{m} \times g}$$

Où :

$\dot{m}$  : Débit masse.

F : La poussée.

g : La gravité.

## 2.8. Impulsion totale

L'impulsion totale est définie comme l'intégral de la poussée durant la totalité du temps de fonctionnement :

$$I_{\text{totale}} = \int_0^t F \, dt = Ft$$

Où :

F : la poussée.

t : le temps.

## CHAPITRE 3

### LES PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

#### 3.1 Introduction

Dans le cas d'un écoulement supersonique d'un gaz parfait, les résultats obtenus sont valables sous la base de quelques hypothèses [19], [20], [21], [22], [23], parmi elles, le gaz est considéré comme calorifiquement parfait. Autrement dit, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  sont constantes et ne dépendent pas de la température. Pourtant, ceci n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température augmente [24], [25]. Le but de ce chapitre est de montrer l'effet de l'accroissement de la température sur les relations thermodynamiques, en mettant en évidence la variation de  $C_p$  et dans ce cas le gaz sera nommé gaz calorifiquement imparfait. Pour le cas d'un écoulement d'air soumis à une pression élevée, nous avons pu trouver une table contenant quelques valeurs de  $C_p$  et de  $\gamma$  en fonction de la température dans un intervalle compris entre 55 K et 3550 K, et vu qu'il existe une relation entre  $C_p(T)$  et  $\gamma(T)$ , on a établi une interpolation polynomiale aux valeurs de la table, afin de trouver une forme analytique pour la fonction  $C_p(T)$ . Cependant, les résultats seront illustrés par le choix d'une interpolation par un polynôme du 9<sup>ème</sup> degré [24] et [25].

Puisque les relations mathématiques développées sont sous forme d'équations algébriques non linéaires et d'intégrales analytiques complexes, où la procédure analytique est impossible, donc on va s'intéresser à des approches numériques. Par conséquent, nous avons utilisé la méthode de dichotomie pour la résolution des équations algébriques non linéaires et l'algorithme de Simpson pour l'intégration numérique des fonctions présentées [35], [38], [24], [25] et [39]. Nous avons adopté également une procédure de condensation aux extrémités de l'intervalle d'intégration afin de raffiner les points à l'endroit où il y a un gradient élevé [42], [24] et [25]. La formule de condensation choisie est celle de Robert, présentée dans la référence [42].



L'application sera pour l'air dans le domaine supersonique inférieur au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ. La comparaison est faite avec le modèle gaz calorifiquement parfait à  $\gamma$  constant.

Dans l'intention de déterminer la limite d'application du modèle du gaz parfait, une étude sur l'erreur donnée par ce modèle par rapport à notre modèle à Haute Température sera présentée.

### 3.2. Relations thermodynamiques

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur les équations de conservations sous forme différentielle ainsi que l'équation d'état d'un gaz parfait [26], [27], [28].

#### 3.2.1 L'équation d'état

$$P = \rho r T \quad (3.1)$$

Avec :  $r = 287.1029 \text{ J}/(\text{Kg.K})$ .

#### 3.2.2 L'équation adiabatique

D'après le premier principe de la thermodynamique à cycle fermé [29], on a la relation :

$$W_p + Q = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p \quad (3.2)$$

En négligeant la variation de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, on obtient :

$$W_p + Q = \Delta U \quad (3.3)$$

Avec :

$$W_p = - \int_1^2 P dV \quad (3.4)$$

D'après les relations de la thermodynamique [30], on peut écrire, pour un écoulement adiabatique, la relation suivante :

$$dQ = C_v dT + LdT = C_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dV = 0 \quad (3.4)$$

$$dQ = C_V dT + L dT = C_V dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = 0 \quad (3.5)$$

Avec :

$$L = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{rT}{V} \quad (3.6)$$

Et 
$$v = \frac{1}{\rho} \quad , \quad dv = -\frac{d\rho}{\rho^2} \quad (3.7)$$

Pour un régime supersonique, le rapport des chaleurs spécifiques est donné par la relation suivante :

$$C_V = \frac{C_P}{\gamma} \quad \text{Ou} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (3.8)$$

Remplaçons les relations (3.6), (3.7) et (3.8) dans l'expression (3.5), on obtient :

$$\frac{C_P}{\gamma} dT - \frac{rT}{\rho} d\rho = 0 \quad (3.9)$$

Et d'après la Relation de MAYER, on a :

$$C_P - C_V = r$$

et 
$$\gamma(T) = \frac{C_P(T)}{C_P(T) - r}$$

Donc pour un gaz parfait, cette relation devient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T[\gamma(T) - 1]} \quad (3.10)$$

Par intégration de l'équation (3.10), on peut obtenir la relation adiabatique pour un gaz parfait à Haute Température.

### 3.2.3 L'équation de la vitesse du son

Par définition, la vitesse du son est donnée par :

$$a^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{s=\text{cste}} \quad (3.11)$$

La différentielle de l'équation d'état d'un gaz parfait (3.1) est donnée par :

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{dT}{d\rho} + r T \quad (3.12)$$

On remplace la relation (3.10) par son égalité dans (3.12), on aura :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T[\gamma(T) - 1]} \Rightarrow \frac{dT}{d\rho} = \frac{T[\gamma(T) - 1]}{\rho}$$

D'où :

$$\frac{dP}{\rho} = \rho r \frac{T[\gamma(T)-1]}{\rho} + rT$$

Alors:

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = rT[\gamma(T) - 1] + rT$$

En simplifiant, on trouve :

$$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s = \gamma(T) r T \quad (3.13)$$

On conclut que l'équation (3.13) qui définit la relation de la vitesse du son reste toujours valable pour le modèle à Haute Température. En revanche, le rapport  $\gamma(T)$  varie et cette variation doit être prise en compte :

On a:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{\gamma(T) r T} \\ da = \frac{r T d\gamma(T) + r \gamma(T) dT}{2\sqrt{r T \gamma(T)}} \end{array} \right.$$

Alors :

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\gamma(T)}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad (3.14)$$

Cette relation présente la différentielle de la vitesse du son en terme de température pour un gaz à Haute Température.

### 3.2.4 L'équation de la vitesse en fonction de la température

L'équation de conservation de l'énergie est donnée sous la forme [26], [31] :

$$h + \frac{v^2}{2} = \text{cst} \quad \text{ou bien} \quad C_p T + \frac{v^2}{2} = \text{cst} \quad (3.15)$$

En dérivant l'équation (3.15), on obtient :

$$C_p dT + VdV = 0 \quad (3.16)$$

D'où :

$$VdV = -C_p dT \quad (3.17)$$

Intégrons la relation (3.17) entre l'état générateur donné par ( $V_0 \approx 0, T_0$ ) et un état quelconque donné par ( $V, T$ ), on obtient :

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (3.18)$$

A la sortie de la chambre de combustion, les valeurs de  $V_0$  et  $T_0$  sont données, donc la relation (3.18) donne :

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (3.19)$$

On pose :

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT \quad (3.20)$$

D'où :

$$V^2 = 2 H(T) \quad (3.21)$$

En divisant la relation (3.16) par  $V^2$  et en remplaçant (3.21) dans le résultat obtenu, on aura :

$$\frac{dV}{V} = \frac{-C_p}{2 H(T)} dT \quad (3.22)$$

L'expression (3.22) présente la forme différentielle de la vitesse d'écoulement en fonction de la température.

### 3.2.5 L'équation du nombre de Mach en fonction de la température

L'expression du nombre de Mach est donnée par la relation [19] :

$$M = \frac{V}{a} \quad (3.23)$$

En élevant l'équation au carré on trouve :

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} \quad (3.24)$$

Ensuite, en substituant l'équation (3.21), on obtient :

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (3.25)$$

Cette relation présente la variation du nombre de Mach en fonction de la température.

### 3.2.6 L'équation de la masse volumique en fonction de la température

Le théorème de Bernoulli nous permet d'écrire la relation :

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 = cst \quad (3.26)$$

La forme différentielle de l'équation (3.26) est donnée par la relation :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (3.27)$$

En remplaçant l'équation (3.11) dans l'équation (3.27), on trouve :

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + V dV = 0 \quad (3.28)$$

Afin de faire apparaître le nombre de Mach, on substitue la relation (3.23) dans l'équation (3.28) pour trouver :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (3.29)$$

En substituant les relations (3.22) et (3.25) dans la relation (3.29), on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} dT = \frac{C_p(T)}{\gamma(T) r T} dT \quad (3.30)$$

On pose :

$$F_\rho(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} \quad (3.31)$$

Donc, l'équation (3.30) devient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_\rho(T) dT \quad (3.32)$$

En intégrant l'équation (3.32) entre l'état générateur ( $\rho_0, T_0$ ) et l'état concerné donné par ( $\rho, T$ ), on obtient le rapport des masses volumiques correspondant à la température  $T_0$  exprimé par la relation suivante :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_T^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (3.33)$$

### 3.2.7 L'équation de la pression en fonction de la température

Depuis l'équation d'état d'un gaz parfait, le rapport des pressions est donné par la relation :

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \times \frac{T}{T_0} \quad (3.34)$$

Prenons la différentielle de l'équation d'état :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (3.35)$$

Ensuite remplaçons la relation (3.32) dans l'expression (3.35), on aura :

$$\frac{dP}{P} = \left( F_p(T) + \frac{1}{T} \right) dT \quad (3.36)$$

Cette relation présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour le model à Haute Température.

### 3.2.8 L'expression de la section en fonction de la température

L'équation de conservation de la masse s'écrit [32] et [33] :

$$\rho V A = \text{cst} \quad (3.37)$$

La différentielle de la relation (3.37) donne :

$$\frac{dA}{A} = - \left( \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (3.38)$$

En remplaçant  $\frac{dV}{V}$  et  $\frac{d\rho}{\rho}$  par leurs expressions (3.22) et (3.32)

respectivement, on obtient :

$$\frac{dA}{A} = - \left( - \frac{C_p(T)}{2H(T)} + \frac{C_p(T)}{\gamma(T)r T} \right) dT \quad (3.39)$$

Posons :

$$F_A(T) = C_p(T) \left[ \frac{1}{2H(T)} - \frac{1}{\gamma(T)r T} \right] \quad (3.40)$$

Alors la relation (3.39) devient :

$$\frac{dA}{A} = F_A(T) dT \quad (3.41)$$

L'intégration de l'équation (3.41), entre l'état du col ( $A^*, T^*$ ) et un état quelconque ( $A, T$ ) du divergent détermine le rapport des sections supersoniques qui est donné par l'expression :

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_T^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (3.42)$$

Pour calculer les paramètres  $\rho$  et  $A$ , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible à cause de la complexité des fonctions à intégrer. C'est pour cela que notre

intérêt s'oriente vers le calcul numérique.

### 3.2.9 L'expression du débit massique critique en fonction de la température

Le débit massique traversant une section A est donné par [26], [34] :

$$\dot{m} = \int \rho V \cos \theta \, dA \quad (3.43)$$

$\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec la normale à la section A.

Pour obtenir un calcul non-dimensionnel, nous divisons la relation (3.43) par la quantité  $A^* \rho_0 a_0$ , on aura :

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \int \frac{\rho}{\rho_0} \left( \frac{a}{a_0} \right) M \cos(\theta) \frac{dA}{A^*} \quad (3.44)$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère, car à cette section on a :

$$\rho = \rho^* \text{ et } A = A^*, a = a^* \text{ ainsi que } M = 1 \text{ et } \theta = 0$$

Donc, la relation (3.44) se réduit à une relation plus simple :

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a^*}{a_0} \right) \quad (3.45)$$

La détermination du rapport des vitesses du son se fait par l'utilisation de la relation (3.13), on obtient :

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

La relation (3.46) montre qu'il faut tenir compte de la variation du rapport  $\gamma(T)$  pour la détermination du rapport des vitesses du son.

### 3.3 Le Modèle du gaz parfait

Pour étudier la différence entre le model Haute Température et le model gaz parfait, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait [26], [27], [28], [34], [35], [36], et [37] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \\ \frac{P_0}{P} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\ \frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{array} \right. \quad (3.47)$$

On remarque que les relations (3.47) sont reliées explicitement avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait. Ceci dit, Pour notre modèle, la variable principale est la température à cause de l'équation (3.25), reliant M et T, où la détermination de l'expression analytique de son inverse est impossible.

### 3.4 Procédure de calcul

Le tableau 3.1 donne la variation de la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  en fonction de la température, pour l'air [10]. Néanmoins, pour un gaz parfait, les valeurs de  $C_p$  et  $\gamma$  sont données à la température  $T= 298.15$  K par [19], [21], [10] et [31], tel que :

$$\gamma = 1.402 \quad \text{et} \quad C_p = 1001.28932 \text{ (J/kg K)}$$

Tableau 3.1 : Table de variation de  $C_p(T)$  et  $\gamma(T)$  avec la température pour l'air.

T (K)	$C_p$ (J/ Kg K)	$\gamma(T)$	T (K)	$C_p$ (J/ Kg K)	$\gamma(T)$	T (K)	$C_p$ (J/ Kg K)	$\gamma(T)$
55.538	1001.104	1.402	833.316	1107.192	1.350	2111.094	1256.813	1.296
....	....	....	888.872	1119.078	1.345	2222.205	1263.410	1.294
222.205	1001.101	1.402	944.427	1131.314	1.340	2333.316	1270.097	1.292
277.761	1002.885	1.401	999.983	1141.365	1.336	2444.427	1273.476	1.291
305.538	1004.675	1.400	1055.538	1151.658	1.332	2555.538	1276.877	1.290
333.316	1006.473	1.399	1111.094	1162.202	1.328	2666.650	1283.751	1.288
361.094	1008.281	1.398	1166.650	1170.280	1.325	2777.761	1287.224	1.287
388.872	1011.923	1.396	1222.205	1178.509	1.322	2888.872	1290.721	1.286
416.650	1015.603	1.394	1277.761	1186.893	1.319	2999.983	1294.242	1.285
444.427	1019.320	1.392	1333.316	1192.570	1.317	3111.094	1297.789	1.284
499.983	1028.781	1.387	1444.427	1204.142	1.313	3222.205	1301.360	1.283
555.538	1054.563	1.374	1555.538	1216.014	1.309	3333.316	1304.957	1.282
611.094	1054.563	1.370	1666.650	1225.121	1.306	3444.427	1304.957	1.282
666.650	1067.077	1.368	1777.761	1234.409	1.303	3555.538	1308.580	1.281
722.205	1080.005	1.362	1888.872	1243.883	1.300			
777.761	1093.370	1.356	1999.983	1250.305	1.298			

#### 3.4.1 Polynôme d'interpolation de $C_p(T)$

Compte tenu de la petite valeur de l'erreur obtenue entre les valeurs tabulées et les valeurs interpolées [38] et [39], l'interpolation de  $C_p$  en fonction de la température est réalisée par un polynôme du 9<sup>ème</sup> degré [24] et [25]. A titre d'information, plusieurs tests d'interpolations [40] ont été effectués afin de choisir la meilleure interpolation.



En utilisant le schéma de Horner [38] pour la présentation du polynôme  $C_p(T)$ , on obtient :

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (3.48)$$

Les coefficients  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) sont présentés dans le tableau 3.2 suivant :

Tableau 3.2 : Coefficients du polynôme  $C_p(T)$

I	$a_i$
1	1001.1058
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$
3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$
4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$
5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$
6	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$
7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$
8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$
9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

Après une présentation graphique du polynôme de  $C_p(T)$  et une comparaison avec les valeurs données par le tableau 3.1, on remarque un petit problème durant l'interpolation par la formule (3.48), qui se manifeste par une variation ondulée à basse température (jusqu'à environ 240 K) en guise d'avoir une fonction constante dans cette portion, conforme aux valeurs de la table.

A cet effet, une correction est introduite pour rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau 3.1. Alors, si  $T = \bar{T} = 240 \text{ K}$ , la relation (3.48) donne la valeur suivante :

$$\bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \quad (J / Kg \cdot K)$$

Donc, la correction est faite de la manière suivante :

- Si  $T \leq \bar{T}$ , on utilise la correction suivante :  $C_p(T) = \bar{C}_p$
- Si  $T > \bar{T}$ , on utilise la formule (3.48).

Il est possible d'avoir plusieurs formes de polynômes par plusieurs procédures et méthodes [38] et [39], pour la détermination de la forme analytique de la fonction  $C_p(T)$ . En revanche, afin de choisir la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs du tableau 3.1 et les valeurs données par la substitution dans l'équation

analytique du polynôme d'interpolation. Cependant, l'interpolation choisie donne une erreur meilleure à  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

### 3.4.2 Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

Une fois que l'interpolation est faite, on détermine la fonction  $H(T)$  de la relation (3.20), par intégration de la fonction  $C_p(T)$  dans l'intervalle  $[T, T_0]$ . A ce moment-là,  $H(T)$  est une fonction à un paramètre  $T_0$  et elle est définie tant que  $T \leq T_0$ . Substituons la relation (3.48) dans la relation (3.20) et écrivons le résultat obtenu de l'intégration sous la forme du schéma de Horner, on obtient :

$$H(T)=H_0 - [c_1+T(c_2+T(c_3+T(c_4+T(c_5+T(c_6+T(c_7+T(c_8+T(c_9+T(c_{10}))))))))))] \quad (3.49)$$

$$\text{Avec :} \quad H_0=T_0(c_1+T_0(c_2+T_0(c_3+T_0(c_4+T_0(c_5+T_0(c_6+T_0(c_7+T_0(c_8+T_0(c_9+T_0(c_{10})))))))))) \quad (3.50)$$

$$\text{Et :} \quad c_i = a_i / i \quad (i=1, 2, 3, \dots, 10)$$

Vu la correction faite sur la fonction  $C_p(T)$ , la fonction  $H(T)$  prend la forme suivante :

- Si  $T_0 < \bar{T}$  alors :  $H(T) = \bar{C}_p(T_0 - T)$
- Si  $T_0 > \bar{T}$  on a :  $\begin{cases} \text{si } T > \bar{T} & \text{alors:} & H(T) = \text{relation (3.49)} \\ \text{si } T \leq \bar{T} & \text{alors:} & H(T) = \bar{C}_p(\bar{T} - T) + H(\bar{T}) \end{cases}$

### 3.5 Le calcul numérique des rapports thermodynamiques

La résolution des rapports des masses volumiques et des sections donnés par les formules (3.33) et (3.42) respectivement, demande l'intégration numérique des fonctions  $F_p(T)$  et  $F_A(T)$  dans les intervalles  $[T, T_0]$  et  $[T, T^*]$ . Notons que la fonction  $F_A(T)$  dépend du paramètre  $T_0$ .

Nous avons tracé au préalable les courbes de variations des deux fonctions précédentes afin d'avoir une idée sur la variation de chacune d'elles avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, elles sont illustrées par les figures 3.1 et 3.2 respectivement. On peut déduire que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle ( $T=T_S$ ). Dans le but d'avoir

une bonne présentation à ces extrémités, le traçage des fonctions est choisi pour la température  $T_0=500$  K (basse température) et  $M_S= 6.00$  (extrême supersonique).

On remarque que chaque fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température  $T_S$ , d'où la nécessité d'une condensation des nœuds au voisinage de cette dernière pour les deux fonctions [25]. Dont le but est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

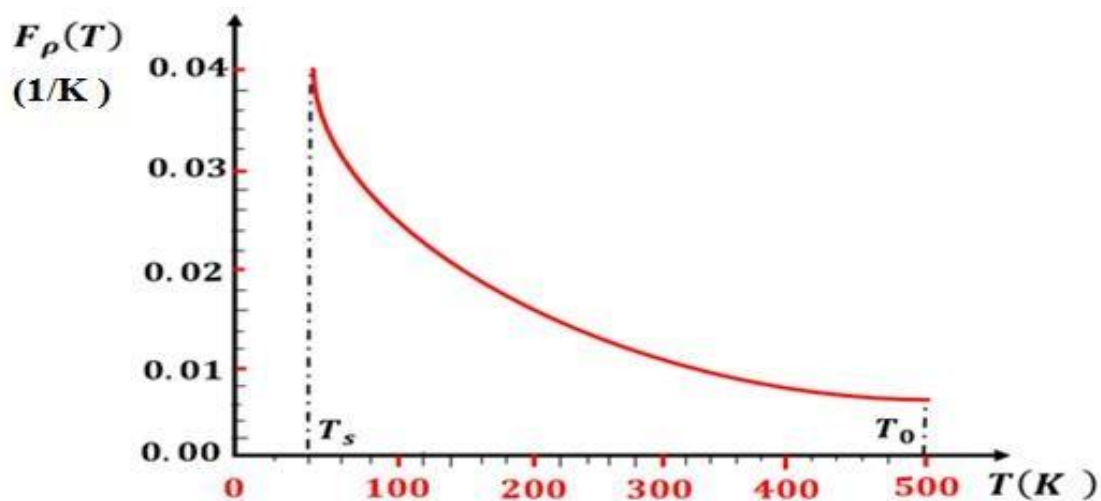


Fig. 3.1-Variation de la fonction  $F_\rho(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T_0]$ .

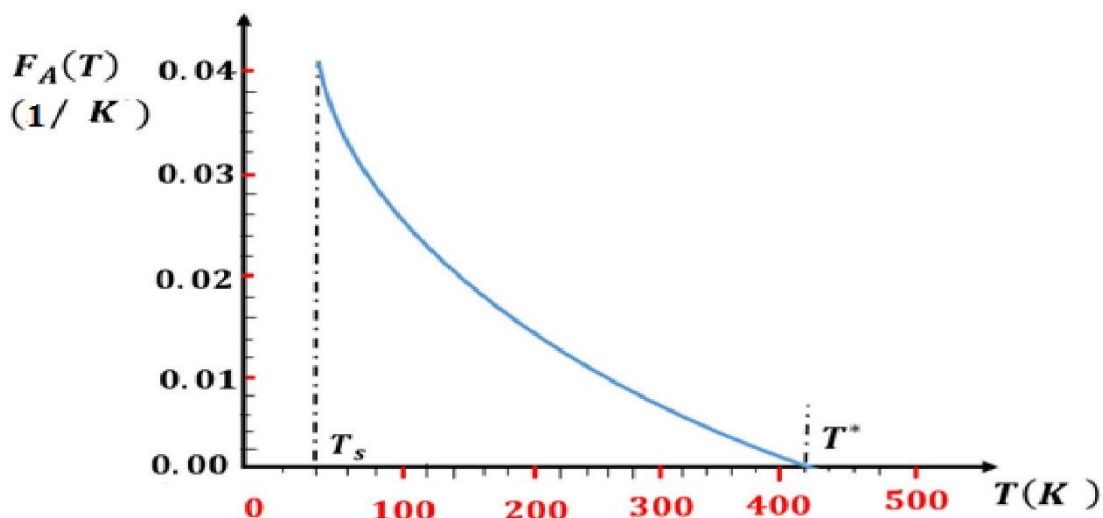


Fig. 3.2 - Variation de la fonction  $F_A(T)$  dans l'intervalle  $[T_s, T^*]$ .

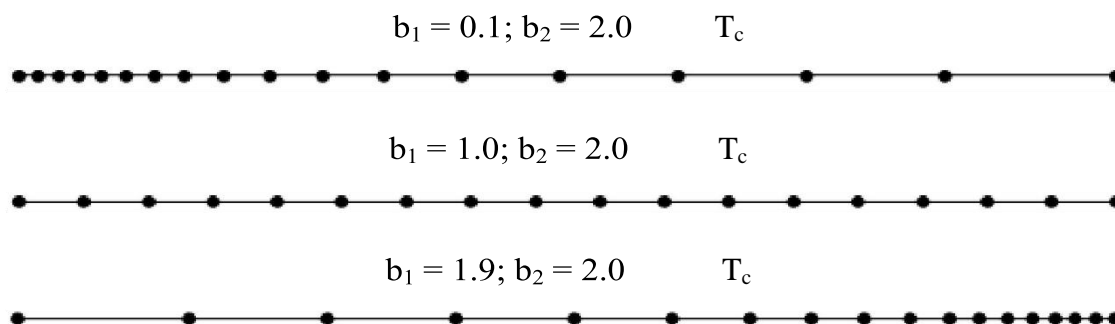


Fig. 3.3 - Présentation de la condensation des nœuds.

La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [41] et [38], pour le calcul numérique des intégrales (3.33) et (3.42). La fonction de condensation utilisée est celle de Robert [14]. Elle est donnée par la relation :

$$S_i = b_1 z_i + (1 - b_1) \left[ 1 - \frac{\tanh[b_2(1-z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (3.51)$$

Avec :

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.52)$$

Une fois que la fonction de condensations est déterminée, on peut estimer la distribution des températures par :

$$T_i = S_i(T_D - T_G) + T_G \quad (3.53)$$

- La température  $T_D$  égale à  $T_0$  pour la fonction  $F_p(T)$ , et égale à  $T^*$  pour la fonction  $F_A(T)$ .

- La température  $T_G$  égale à  $T^*$  pour le paramètre critique, et égale à  $T_S$  pour le paramètre à une section supersonique.

On remarque que si on prend une valeur de  $b_1$  proche de zéro ( $b_1=0.1$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  de l'intervalle. En revanche, si on prend des valeurs de  $b_1$  proche de 2 (par exemple  $b_1=1.9$ ), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite. Pour des sous intervalles de même longueurs, on peut prendre  $b_1=1.0$ .

La figure 3.3 présente la distribution des nœuds suivant le choix de la valeur de  $b_1$ , on rappelle que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  vu la variation des fonctions  $F_\rho(T)$  et  $F_A(T)$ .

### 3.6 Paramètres critiques au col correspondant à $T_0$

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ( $M=0$ ). Alors, les paramètres critiques ( $T^*$ ,  $P^*$ ,  $\rho^*$  et  $a^*$ ) correspondant à la température  $T_0$  et au nombre de Mach  $M=1$  (cas au col de la tuyère), peuvent être déterminés.

Si on remplace dans la relation (3.25), les paramètres  $M$  et  $T$  par les conditions critiques, on obtient :

$$(M^*)^2 = \frac{2H(T^*)}{\gamma(T^*) r T^*} \quad (3.54)$$

Comme  $M^*=1$ , alors, la relation (3.54) devient :

$$F(T^*) = 2H(T^*) - a^2(T^*) = 0 \quad (3.55)$$

La détermination de la racine  $T^*$  de l'équation (3.55) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie [37] et [24]. Sachant que  $T^* < T_0$ , on peut choisir facilement un intervalle  $[T_1, T_2]$  contenant la température  $T^*$  et qui doit vérifier la condition  $F(T_1) F(T_2) \leq 0$ , on peut prendre  $T_1=0$  K et  $T_2=T_0$ .

Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer  $T_1$  avec une précision  $\varepsilon$ , et par la suite le rapport  $T^* / T_0$  correspondant à la température  $T_0$ . Sachant que la valeur  $T^*$  obtenue dépend de la précision  $\varepsilon$ . Le nombre de subdivisions  $K$  de l'intervalle  $[T_1, T_2]$  correspondant à la précision  $\varepsilon$  nécessaire pour déterminer la température  $T^*$  est donné par [10] :

$$K = 1.4426 \log(T_0/\varepsilon) + 1 \quad (3.56)$$

Dans le cas où  $\varepsilon = 10^{-16}$ , le nombre de subdivisions K ne peut excéder 66.

Si on substitue  $T=T^*$  dans la relation (3.33) et on intègre la fonction, dans l'intervalle  $[T^*, T_0]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche ( $T=T^*$ ), nous obtenons le rapport critique des masses volumiques suivant :

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T^*}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (3.57)$$

Le rapport critique des pressions peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (3.34), on obtient :

$$\frac{P^*}{P_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left( \frac{T^*}{T_0} \right) \quad (3.58)$$

Ainsi que le rapport des vitesses critiques du son en substituant la valeur de  $T^*$  dans la relation (3.46) par :

$$\frac{a^*}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T^*)}{\gamma(T_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{T^*}{T_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.59)$$

Pour trouver la valeur non-dimensionnelle du débit massique critique, il suffit de remplacer l'expression du rapport critique des masses volumiques (3.57), et celle des vitesses du son (3.59), dans l'expression (3.45).

### 3.7 Paramètres Supersoniques correspondant à $T_0$

On procède maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométriques à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique  $M_S$ . Cette section est caractérisée par :  $T=T_S$ ,  $A=A_S$  et  $\rho=\rho_S$ ,  $P=P_S$ .

L'obtention du rapport des températures se fait au préalable par la substitution de  $T=T_S$  et  $M=M_S$  dans la relation (3.25), on obtient :

$$M_S^2 = \frac{2H(T_S)}{\gamma(T_S) r T_S} \quad (3.60)$$

La relation (3.60) devient :

$$F(T_s) = 2H(T_s) - M_s^2 a^2(T_s) = 0 \quad (3.61)$$

La détermination de la racine  $T_s$  de l'équation (3.61) se fait de la même manière que celle de  $T^*$  et avec la même démarche, en utilisant l'algorithme de dichotomie [37] et [24], sauf ici, nous avons  $T_s < T^*$ .

Après avoir déterminé l'intervalle  $[T_1, T_2]$ , on peut facilement obtenir  $T_s$  avec une précision  $\varepsilon$  et par la suite le rapport  $T_s/T_0$  correspondant à la température  $T_0$ . On peut prendre dans ce cas  $T_1 = 0$  K et  $T_2 = T^*$ , sachant que la valeur obtenue de  $T^*$  dépend de la précision  $\varepsilon$ .

Remplaçons  $T=T_s$  dans la relation (3.33) et intégrons la fonction  $F_\rho(T)$  dans l'intervalle  $[T_s, T_0]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport des masses volumiques.

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T_s}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (3.62)$$

Le rapport des pressions supersoniques peut être déterminé en substituant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (3.34), nous aurons :

$$\frac{P_s}{P_0} = \left( \frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \left( \frac{T_s}{T_0} \right) \quad (3.63)$$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu encore en remplaçant  $T$  par  $T_s$  dans la relation (3.46), nous obtenons :

$$\frac{a_s}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T_s)}{\gamma(T_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{T_s}{T_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

L'obtention du rapport géométrique des sections se fait par la substitution de  $T$  par  $T_s$  dans la relation (3.42). Par la suite, on intègre la relation obtenue dans l'intervalle  $[T_s, T_0]$  en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche  $T_s$ . On obtient :

$$\frac{A_s}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_{T_s}^{T^*} F_A (T) dT \right) \quad (3.65)$$

Remarque:

- A titre d'information, on peut calculer le débit à cette section en introduisant les paramètres nécessaires dans la relation (3.44) puis en intégrant, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left( \frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \left( \frac{a_s}{a_0} \right) M_s \frac{A_s}{A^*} \quad (3.66)$$

Puisque le débit est constant à travers la tuyère, les relations (1.45) et (3.66) donnent le même résultat.

- La précision des résultats d'intégration de (3.57), (3.62) et (3.65) dépend essentiellement des valeurs de  $N$ ,  $b_1$  et  $b_2$ .

### 3.8 L'erreur du modèle Gaz Parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait considère la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  comme étant constants, et fournit des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles températures. D'après l'étude menée, on remarque qu'il existe une différence entre les relations du modèle gaz parfait et celles du modèle développé (modèle HT). Par conséquent, l'erreur donnée par le modèle gaz parfait par rapport à notre modèle qui tient compte de la température génératrice peut être calculée pour chaque paramètre.

Alors, pour chaque couple  $(T_0, M)$ , l'erreur relative  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante [30] :

$$\varepsilon_{Param\grave{e}tre}(T_0, M) = \left| 1 - \frac{Param\grave{e}tre_{GP}(T_0, M)}{Param\grave{e}tre_{HT}(T_0, M)} \right| \times 100 \quad (3.67)$$



Le mot paramètre dans la relation (3.67) peut représenter tous les paramètres ( $T$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $A$ ,  $a$  et débit) mentionnés dans ce chapitre.

Dans les applications aérodynamiques, généralement les auteurs acceptent une erreur inférieure à 5% [20].

L'erreur maximale commise entre les erreurs données par les paramètres peut être évaluée pour donner une erreur globale des résultats du phénomène physique.

### 3.9 Application aux tuyères

Il est possible de rencontrer le problème étudié, à titre d'illustration, lors de la conception des tuyères supersoniques de propulsion. L'utilisation de la forme de la tuyère dimensionnée, obtenue à partir du modèle gaz parfait donnant un nombre de Mach  $M_S$  supersonique uniforme à la section de sortie pour les applications des moteurs fusées ou des souffleries, dégrade les performances souhaitées ; notamment si la température de la chambre de combustion  $T_0$  est élevée [24].

On souligne que la forme de la structure de la tuyère ne change pas, cependant, le comportement thermodynamique de l'air change avec la température  $T_0$ , en augmentant la valeur de  $T_0$ , on peut obtenir des résultats autres que ceux obtenus pour le modèle gaz parfait.

De ce fait, afin de conserver la même variation du nombre de Mach à travers la tuyère et par conséquent, le même nombre de Mach de sortie  $M_S$  du modèle gaz parfait, il faut déterminer pour notre modèle, le rayon de chaque section et en particulier le rayon de la section de sortie qui va donner la même variation du nombre de Mach et conséquemment une autre forme de la tuyère sera obtenue.

La relation (3.68) indique que le nombre de Mach du modèle GP est conservé. En premier lieu, on détermine la température à cette section qui représentera la solution de l'équation (3.69). Ensuite, on détermine le rapport des sections et par conséquent le rayon de la section, en utilisant la relation (3.70). Sachant que le rapport des sections eu par le modèle HT est supérieur

au rapport des sections du modèle GP, on peut conclure que la forme de la tuyère obtenue par notre modèle inclue la forme de la tuyère obtenue par le modèle à  $\gamma$  constant (modèle GP).

$$M_s(HT) = M_s(GP) \quad (3.68)$$

$$M_s(HT) = \frac{\sqrt{2H[T_s(HT)]}}{a[T_s(HT)]} \quad (3.69)$$

$$\frac{A_s}{A^*}(HT) = \text{Exp} \left( \int_{T_s(HT)}^{T^*} F_A(T) dT \right) > \frac{A_s}{A^*}(GP) \quad (3.70)$$

Cependant, la relation (3.71) consiste à conserver la forme de la tuyère dimensionnée par le modèle gaz parfait, ceci dit, cette tuyère va délivrer un nombre de Mach inférieur à celui souhaité (voir la relation (3.72)).

Donc, la correction du nombre de Mach pour le modèle Haute Température se fait tout d'abord par la détermination de la température  $T_s$  comme solution de l'équation (3.70), ensuite par l'évaluation du nombre de Mach de sortie en utilisant la relation (3.64). Dans ce cas, les rapports thermodynamiques changent et influent sur les autres paramètres de conception comme la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère. La résolution de l'équation (3.70) se fait en combinant la méthode de dichotomie avec la quadrature de Simpson.

$$\frac{A_s}{A^*}(HT) = \frac{A_s}{A^*}(GP) \quad (3.71)$$

$$M_s(HT) < M_s(GP) \quad (3.72)$$

## CHAPITRE 4

### TUYERE A CORPS CENTRAL BIDIMENTIONNELLE (PLUG NOZZLE)

#### 4.1. Introduction

Dans l'industrie de la construction aéronautique, on s'intéresse toujours à la conception des engins aérospatiaux tels que les missiles, La fabrication des souffleries supersoniques et les moteurs fusées. Par nécessité d'atteindre des vitesses supersoniques pour des besoins, surtout militaires, les tuyères supersoniques sont devenues des organes essentiels. Le rendement, la poussé ainsi que la consommation dépendent énormément de la forme géométrique de ces derniers.

On note que la détermination de la forme d'une tuyère dépend de son utilisation. Par exemple, si la tuyère est utilisée pour la conception d'une soufflerie supersonique, notre souhait est que la propulsion d'un gaz donne un écoulement froid à la sortie pour raison de mesure et la conservation des outils de l'expérience, sans se baser sur la longueur minimale. Mais si la tuyère est conçue pour l'application des missiles et avions supersoniques, on s'intéresse dans ce cas, à une tuyère délivrant le nombre de Mach souhaité ayant une longueur et poids réduit le plus petit possible.

Des années plus tard, et en parallèle avec les développements expérimentaux et numériques, les tuyères conventionnelles souffraient de problèmes tels que les ondes de choc et la séparation du flux dans la section divergente, l'oscillation de la poussée et l'asymétrie de l'écoulement dans les conditions de sur-expansion. C'est ce qui a incité les concepteurs à améliorer les performances des tuyères de propulsion et rechercher l'obtention d'une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle avec une poussée maximale.

En jouant sur ces facteurs, plusieurs formes de tuyères ont été trouvées, parmi eux la forme de la tuyère à corps central (PLUG NOZZLE).

Cette dernière attirait l'intention des chercheurs depuis les années 1950.

La forme de ce type de tuyère est illustrée dans la figure 4.1. Les concepteurs ont trouvé deux formes dans ce contexte ;

- La tuyère à corps central type à bouchon "Plug Nozzle" qui est le sujet de cette étude.
- La tuyère à corps central type à détente déflexion "Expansion-déflexion Nozzle".

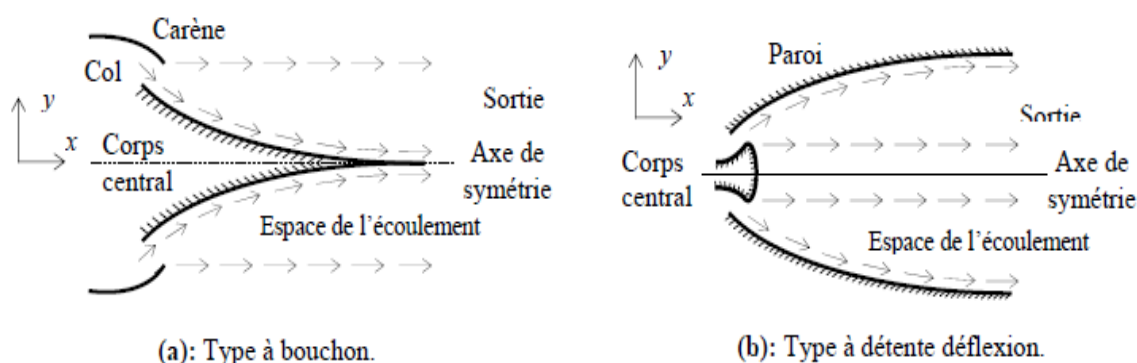


Fig.4.1-Les géométries de la tuyère à corps central.

#### 4.2 La tuyère à corps central type à bouchon "Plug Nozzle"

Il existe deux catégories des tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes [26], [46] et [34]. La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée [10], [46] et [47]. Dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées.

- Ce type de tuyère est appelé par tuyère à corps central avec ligne sonique courbée. Chaque type existe pour les deux sortes d'un écoulement bidimensionnel [26], [45], et axisymétrique [29], [48] et [49] donnant au total quatre configurations possibles.

- le phénomène de l'écoulement à l'extrémité de la carène est considéré par analogie comme l'écoulement au bord de fuite d'un profil d'aile.
- La différence entre ce type de tuyère et les autres modèles, est que l'écoulement au col est incliné d'un angle  $\theta^*$  par rapport à l'horizontale.

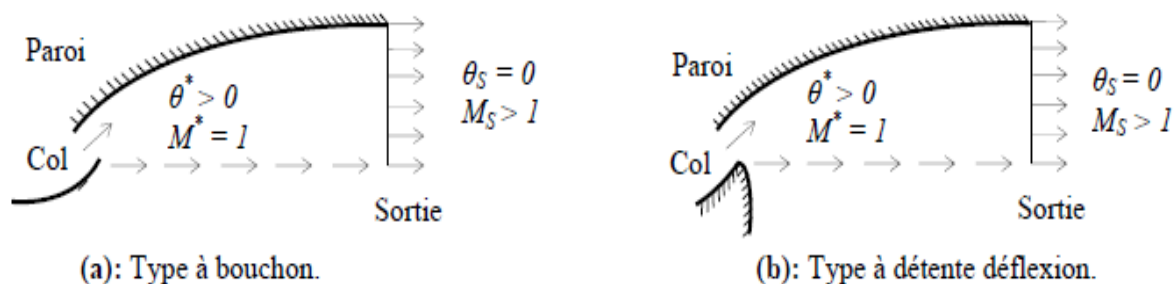


Fig.4.2 -Écoulement au col et à la sortie d'une tuyère à corps central.

- L'écoulement à travers la paroi se redresse uniquement de l'angle  $\theta = \theta^*$  au col jusqu'à l'horizontal «  $\theta = 0$  » à la sortie. Ici la zone d'expansion est absente. Autrement dit, elle est contractée en un point. Nous pouvons donc dire maintenant, que nous avons une possibilité de gagner une masse de la tuyère. Pour arriver à dévier l'écoulement au col, on introduit un 'Lip' avec une inclinaison  $\Psi$  considérée par rapport à la verticale et l'écoulement se trouve à l'extérieur comme le montre la figure (4.3) ci-dessous.

Donc le 'Lip' sera incliné d'un angle  $\Psi$  comme l'indique la figure suivante :

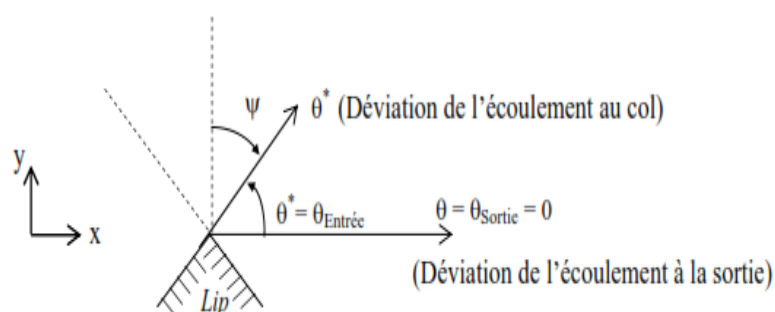


Fig.4.3 -Angle de déviation  $\Psi$  de la carène de la tuyère à corps central.

- L'écoulement est supposé sonique au col pour avoir un écoulement supersonique dans la partie divergente de la tuyère.
- Dans notre étude, on s'intéresse uniquement à la partie divergente supersonique. Des ondes de Mach centrées divergentes sont issues à partir du coin du col.

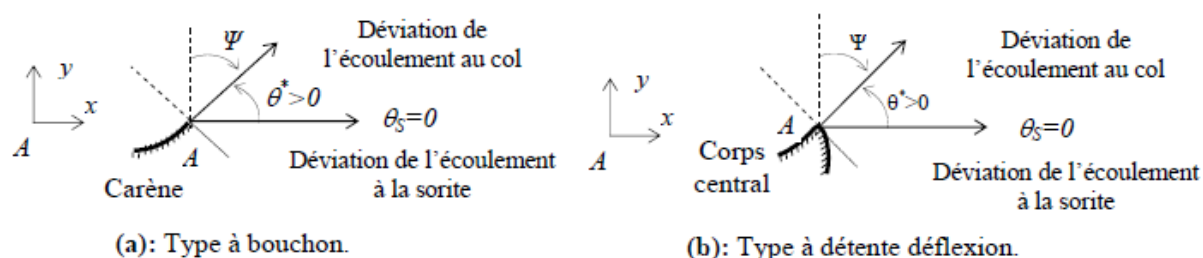


Fig.4.4 - Angle de déviation  $\Psi$  de la carène de la tuyère à corps central.

Pour arriver maintenant à présenter le modèle mathématique de calcul de l'écoulement dans la tuyère. Nous allons prendre en considération les diverses hypothèses mentionnées au chapitre 3 (Le gaz est considéré comme parfait c à d  $C_p$  et  $\gamma$  sont constantes, écoulement permanent et irrotationnel ...).

### 4.3 Formulation Mathématique du Problème

L'écoulement au col et à la section de sortie est unidirectionnel. Le rapport des sections critiques reste toujours valable. Il est pris en considération pour comparer les calculs numériques trouvés par notre modèle et la théorie. Notons ici que le rapport des sections d'un gaz parfait est donné dans le chapitre 3 par l'équation (3.47) :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.47)$$

Le calcul de l'écoulement pour un gaz parfait à haute température est basé sur la détente de Prandtl-Meyer qui l'on peut récapituler comme suite :

D'abord la petite déviation d'écoulement  $\Delta\theta$  en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse  $\Delta V$  par la relation suivante [20], [33] :

$$d\theta = - \frac{\cotg(\mu)}{v} dV \quad (4.1)$$

En insérant la relation entre l'angle de Mach  $\mu$  et le nombre de Mach  $M$  dans l'équation (4.1), on obtient :

$$dv = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{v} \quad (4.2)$$

Cette relation est très importante pour faire l'étude de l'écoulement supersonique.

**- Relation entre la vitesse et la température :**

$$\frac{dV}{v} = - \frac{C_p}{2H(T)} dT \quad (4.3)$$

**- Relation de nombre de Mach  $M$  :**

$$M = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a} \quad (4.4)$$

Remplaçons les relations (4.3) et (4.4) dans la relation (4.2), nous obtiendrons la relation suivante :

$$dv = Fv dT \quad (4.5)$$

Avec :

$$Fv = \frac{C_p}{2 H(T)} \sqrt{\frac{2 H(T)}{a^2} - 1} \quad (4.6)$$

Enfin, on aboutit à la formule :

$$v = \int_T^{T^*} F_v \, dT \quad (4.7)$$

Notons que le calcul de la valeur de  $v$  a besoin d'intégrer la fonction  $F_v(T)$ . La procédure analytique est impossible à faire vu la complexité de cette fonction à intégrer. Notre intérêt s'oriente donc vers le calcul numérique. Les paramètres  $M$  et  $v$  sont reliés avec la température  $T$  de l'écoulement.

A une température  $T=T_S$  on prend  $v=v_S$ . La fonction de Prandtl-Meyer donnée par la théorie d'un gaz parfait [8] est de la forme :

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left[ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (M^2 - 1) \right] - \arctg[\sqrt{M^2 - 1}] \quad (4.8)$$

L'angle  $v$  est mesuré par rapport à la vectrice vitesse du col.

Sur la figure (4.5), la ligne AB et AS présente respectivement les ondes de Mach de la section col et sortie. Ces lignes sont inclinées d'angles  $\mu_B$  et  $\mu_s$  donnés respectivement par :

$$\mu_B = 90^\circ \quad , \quad \mu_s = \arcsin\left(\frac{1}{M_s}\right)$$



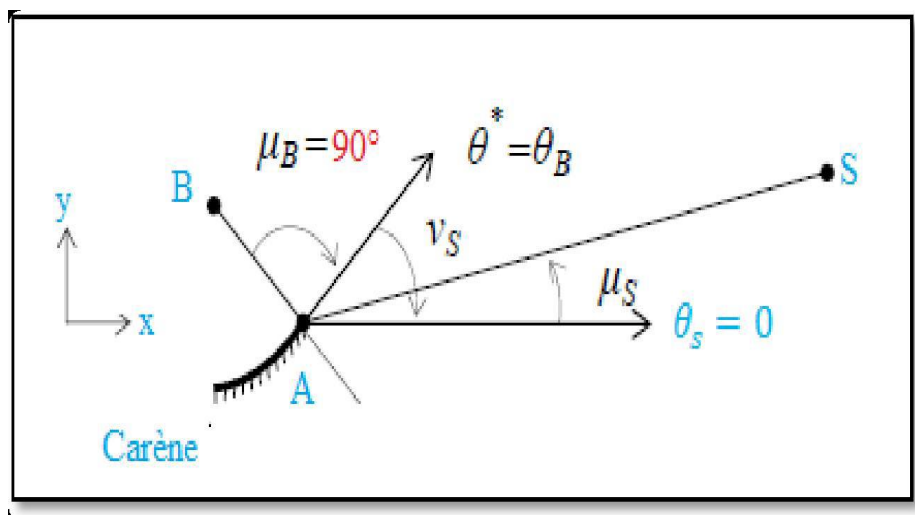


Fig. 4.5 - Angles de Mach du col et de la section de sortie de la tuyère à corps central type à Bouchon.

Entre ces deux lignes de Mach, il y a une infinité d'ondes de Mach Centrées divergentes issues du point A de la carène 'Lip' comme le montre la figure (4.5). Chaque ligne donne un nombre de Mach et on peut facilement, à partir de ce nombre, déduire un point du contour du corps central.

Comme le gaz est parfait, le vecteur vitesse est tangent à la ligne de courant, qui sera considéré comme le contour de la paroi du corps central. Par conséquent, le point A est un point de discontinuité en paramètres et en particulier en  $M$ ,  $T$  et  $\theta$ .

Les propriétés de l'écoulement, telles que le nombre de Mach, la déviation de l'écoulement  $\theta$  et les rapports des pressions  $\frac{P}{P_0}$ , des températures  $\frac{T}{T_0}$  et des masses volumiques  $\frac{\rho}{\rho_0}$  sont constants le long de chaque ligne de Mach issue du point A. Cette propriété nous donne l'avantage de déterminer rapidement et explicitement la position du point de la paroi.

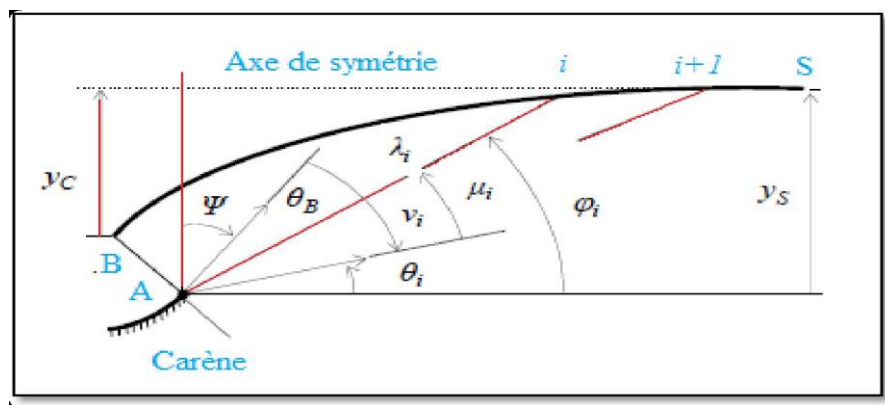


Fig.4.6 - Paramètres d'une Ligne de Mach intermédiaire reliant les points A et i ( $i=2, 3, \dots, N$ ).

La figure (4.6) présente les paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire reliant les points A et i. L'angle  $\theta_s$  est inconnu a priori. La conception est considérée sur la base du nombre de Mach de sortie. Pour avoir un écoulement uniforme et parallèle à la sortie, il est nécessaire d'incliner l'écoulement au col d'un angle  $\theta_B$  par :

$$\theta_B = v_s = v(M_s) \quad (4.9)$$

Une fois l'angle  $\theta_B$  déterminé, nous pouvons facilement déterminer l'inclinaison de la carène (Lip) par rapport à la verticale, grâce à la relation suivante [49] :

$$\psi = 90^\circ - v_s \quad (4.10)$$

#### 4.4 La Discrétisation

La zone d'expansion entre les lignes AB et AS peut être discrétisée en N ondes de Mach, y compris les deux extrémités, comme le montre la figure (4.7). Notant ici que les ondes de Mach sont des lignes droites, plus le nombre d'onde N est grand, plus on obtient une très bonne présentation de l'allure du corps centrale.

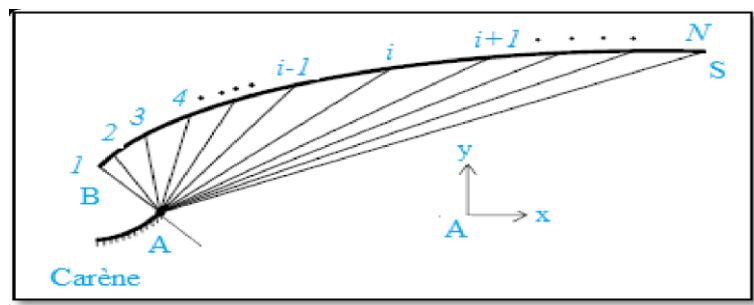


Fig. 4.7 - Discrétisation de la zone de détente de la tuyère à corps central type à bouchon.

La détermination des points de la paroi est faite de manière explicite, si nous connaissons la position et les propriétés d'un point sur la paroi, on peut facilement déterminer celles du point adjacent jusqu'à ce que nous atteignons le point de section de sortie.

Le schéma du modèle sous la présence d'une ligne de Mach est illustré dans la figure (4.6). La température  $T_i$  au point  $i$  est connue. On peut alors écrire :

$$\mu_i = \arcsin (1/M_i) \quad (4.11)$$

$$v = \int_T^{T^*} F_v \, dT \quad (4.12)$$

$$\Phi_i = 90 - \Psi - v_i + \mu_i \quad (4.13)$$

$$\theta_i = \phi_i - \mu_i \quad (4.14)$$

Avec :

$$a(T_{pi}) = \sqrt{\gamma r T_{pi}} \quad (4.15)$$

$$M_i = \sqrt{\frac{2H(T_{pi})}{a(T_{pi})}} \quad (4.16)$$

$$\gamma_i = \frac{C_p(T_i)}{C_p(T_i) - r} \quad (4.17)$$

Sur la figure (4.7), les propriétés  $M_i$ ,  $\theta_i$ ,  $v_i$ ,  $x_i$  et  $y_i$  au point  $i$  sont connues. Donc le problème revient à déterminer les propriétés au point  $i+1$ . Sur le triangle reliant les points  $A$ ,  $i$  et  $i+1$  (voir ci-dessous la figure (4.8)), on peut écrire :

$$\alpha_i = \pi - \varphi_i + v_s - v_i \quad (4.18)$$

$$\beta_i = \varphi_{i+1} - v_B + v_i \quad (4.19)$$

$$\frac{\sin(\beta_i)}{\lambda_i} = \frac{\sin(\alpha_i)}{\lambda_{i+1}} \quad (4.20)$$

Le rayon polaire du point  $i+1$  est donné par :

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i \frac{\sin(\beta_i)}{\sin(\alpha_i)} \quad (4.21)$$

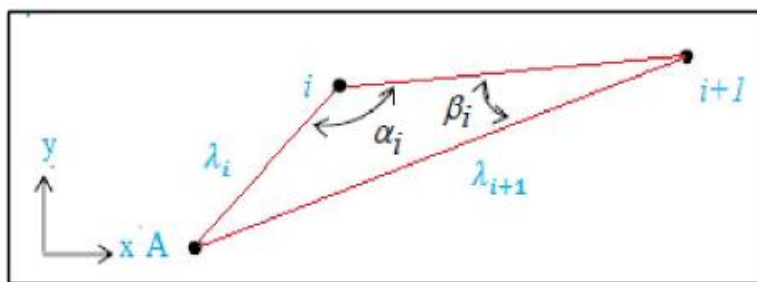


Fig. 4.8 - Présentation des paramètres dans un triangle.

Soient :

$\alpha$  : Angle au sommet  $i$ .

$\beta$  : Angle au sommet  $i+1$ .

$\lambda_i$  : Rayon polaire  $A_i$ .

$\lambda_{i+1}$  : Rayon polaire  $A_{i+1}$ .

$X_i, Y_i$  : Coordonnées cartésiennes du point  $i$ .

$X_{i+1}, Y_{i+1}$  : Coordonnées cartésiennes du point  $i+1$ .

Par analogie avec les équations (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14), nous pouvons déduire les relations au point  $i+1$  en changeant l'indice  $i$  par  $i+1$ .

La température  $T_{i+1}$  est connue au point  $i+1$  dont ces coordonnées peuvent être calculées par :

$$\frac{X_{i+1}}{\lambda_B} = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_B} \cos(\varphi_{i+1}) \quad (4.22)$$

$$\frac{Y_{i+1}}{\lambda_B} = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_B} \sin(\varphi_{i+1}) \quad (4.23)$$

On peut conclure que tous les points sont reliés avec le point A par des lignes de Mach et chaque point  $i$  sur la paroi possède sa propre température, différente de celle des autres points. Par conséquent, on considère le point A comme étant un point de discontinuité des différentes propriétés telles que  $M$ ,  $T$ ,  $\theta$ ...etc, puisqu'il contient une infinité de valeurs pour chaque propriétés.

Pour arriver à concevoir la tuyère, on a choisi la discrétisation de la zone de variation de la température  $T \in [T_s, T^*]$  en  $N$  valeurs y compris les valeurs des extrémités pour que le calcul soit rapide.

#### 4.5 Les procédés de calcul

Les données nécessaires pour concevoir la tuyère se résument comme suite :

- a. La valeur du nombre de Mach de sortie  $M_s$  (le dimensionnement se fait sur cette base).
- b. La température génératrice  $T_0$  de la sortie chambre de combustion.
- c. Le rayon polaire  $\lambda_{AS}$ , dans notre cas on prend  $\lambda_{AS}=1$  pour adimensionner les résultats par rapport à ce rayon.
- d. Les valeurs des paramètres CP et  $\gamma$ .
- e. La constante du gaz ( $r$ ), sachant que le gaz considéré est l'air.
- f. La discrétisation du nombre de Mach en  $N_p$  valeurs.

Tout d'abord en première étape, on doit déterminer quelques résultats importants pour la conception, qui sont en premier lieu : Les rapports thermodynamiques critiques : pour un gaz parfait à Haute Température

les rapports critiques  $T^*/T_0$ ,  $\rho^*/\rho_0$ , et  $P^*/P_0$  sont présentés dans le chapitre 3 par les relations (3.55), (3.57) et (3.58) respectivement.

Ainsi que Les rapports thermodynamiques à la section de sortie :

Les rapports  $T_s/T_0$ ,  $\rho_s/\rho_0$ , et  $P_s/P_0$  d'un gaz parfait à Haute Température et correspondant au nombre de Mach de sortie sont présentés dans le chapitre 3 par les relations (3.61), (3.62) et (3.63) respectivement. Et le Rapport théorique des sections critiques établi également dans le chapitre 3 par la relation (3.65) :

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_T^{T^*} F_A(T) dT \right)$$

Avec :

$$F_A(T) = C_p(T) \left[ \frac{1}{2H(T)} - \frac{1}{\gamma(T)rT} \right]$$

Ce rapport nous sera utile comme source de comparaison et de validation de nos calculs numériques.

Puis, la Valeur de la fonction de Prandtl Meyer  $v_s$  correspondant au nombre de Mach de sortie et qui peut être obtenue par la relation (4.9). Ainsi que la déviation  $\Psi$  de la carène (Lip) par rapport à la verticale, obtenue par la relation (4.10).

Subséquentement, comme le processus de calcul est lié à deux points successifs, il est nécessaire de donner les résultats pour le point de départ qui est le point B, où la ligne AB représente la première ligne de Mach. Nous avons donc sur cette ligne:

- Le nombre de Mach est égal à  $M_B=1,0$  (Entrée sonique).
- L'angle de Mach est égal à  $\mu_B=90$  degrés.
- La valeur de la fonction de Prandtl Meyer est égale à  $v_B=0$  degré.
- L'angle polaire est égal a  $\varphi_B=90 - \psi - v_s + \mu_s$ .
- Le rayon polaire est égal à  $\lambda_B=1,0$  (parmi les données).
- La position du premier point du mur est donnée par :

$$\frac{x_B}{\lambda_B} = \cos(\varphi_B) \quad (4.24)$$

$$\frac{y_B}{\lambda_B} = \sin(\varphi_B)$$

- L'angle de déviation de l'écoulement :

$$\theta^* = \theta_B = \varphi_B - \mu_B \quad (4.25)$$

- Le rayon adimensionnel théorique de la section de sortie (distance verticale) est calculé en utilisant l'équation (3.61) :

$$\frac{Y_S}{\lambda_B} = \frac{A_S}{A_*} \quad (4.26)$$

- La section critique du col :

$$A^*=A_B=2 \lambda_B \quad (4.27)$$

Par la suite, en deuxième étape on affecte les résultats obtenus au point B considéré comme étant le premier point de calcul numérique pour  $i=1$ .

Pour chaque ligne de Mach, il est nécessaire de connaître la température au centre de l'expansion A qui représente également la température le long de la ligne de Mach reliant les points A et i.

Comme le nombre de points sélectionné est égal à N, on obtient alors un nombre de panneaux qui est égale à N-1. Donc, la température au point i est donné par :

$$T_i = T^* - (i-1) \Delta T \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (4.28)$$

Avec :

$$\Delta T = \frac{T^* - T_S}{N-1} \quad (4.29)$$

En incrémentant la valeur de  $i=2$  à N, on peut déterminer les caractéristiques thermodynamiques et les propriétés physiques le long de toutes les lignes de Mach sélectionnées et par conséquent, la forme du corps central peut être obtenue.

Pour accélérer le processus de calcul de l'intégrale (4.12), on peut

considérer que cette intégrale est de la forme suivante [50] :

$$v_{i+1} = v_i + \int_T^{T^*} F_v \, dT \quad (4.30)$$

Le calcul de l'intégrale (4.28) est effectué en utilisant l'algorithme de Simpson. Pour les applications numériques, et si N est grand, nous pouvons choisir environ 5 à 7 points de Simpson pour l'évaluation de cette intégrale avec une précision appropriée.

A partir des résultats du dernier point  $i=N$ , on peut obtenir les résultats suivants :

- La position du point S de la section de sortie est donnée sous forme adimensionnelle par la relation :

$$\frac{x_S}{\lambda_B} = \frac{x_N}{\lambda_B} \quad (4.31)$$

$$\frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{y_N}{\lambda_B}$$

- La distance axiale entre la section de sortie et le coin de la carène 'Lip' est donnée par :

$$\frac{x_{\text{plug}}}{\lambda_B} = \frac{x_S}{\lambda_B} \quad (4.32)$$

- La longueur totale de la tuyère est mesurée par la distance axiale entre le point B du col et le point S de la section de sortie. Elle est donnée, sous forme adimensionnelle par :

$$\frac{L}{\lambda_B} = \frac{x_S}{\lambda_B} - \frac{x_B}{\lambda_B} \quad (4.33)$$



- Le rapport des sections correspondant à la discrétisation de N points peut être évalué par :

$$\frac{A_S}{A_*} (\text{calculé}) = \frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{Y_N}{\lambda_B} \quad (4.34)$$

#### 4.6 Paramètres Thermodynamiques

Dans chaque point  $i$  de la paroi, les rapports thermodynamiques peuvent être déterminés par les relations suivantes :

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)_i = \frac{T_i}{T_0} \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_i = \text{Exp}\left(-\int_{T_i}^{T_0} F_\rho(T) dT\right) \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_i = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_i \left(\frac{T}{T_0}\right)_i \quad (4.37)$$

Le rapport des températures nous aidera à faire le choix approprié du matériau de construction du corps central résistant à cette température. Ainsi que le rapport de densité qui nous permettra d'évaluer la masse du gaz existant à chaque instant dans l'espace de l'écoulement. Et enfin, celui des pressions qui contribuera à la détermination de la force de pression exercée sur la paroi.

#### 4.7 La masse du corps central

Afin de calculer la masse de la structure du corps central, on considère les deux hypothèses suivantes : la première s'agit d'approximer la forme de la paroi entre deux points successifs à une ligne droite. Si le nombre de points  $N$  est très élevé, cette hypothèse donnera de bons résultats. Et la deuxième c'est de considérer le corps central comme étant constitué du même matériau, et d'une épaisseur constante.

Le calcul de la masse de la structure dépend du calcul de la longueur curviligne de la paroi du corps central. Donc, par unité de profondeur et sous forme adimensionnelle, on obtient :

$$\frac{\text{Masse}}{\rho_M T_M A^*} = C_{\text{Masse}} \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{\left(\frac{x_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{x_i}{\lambda_B}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{y_i}{\lambda_B}\right)^2} \quad (4.38)$$

Le terme  $A^*$  dans la relation (4.38) est égale à  $A^* = 2 l \lambda_B$ .

#### 4.8. La force de pression exercée sur la paroi

La force de pression exercée sur le segment de la figure (5.9) est approximée par l'interpolation suivante :

$$P_i = \sigma P_i + (\sigma - 1)P_{i+1} \quad (4.39)$$

Alors, la force de pression axiale exercée sur ce segment est donnée par la relation :

$$F_{xi} = P_i (y_{i+1} - y_i) \quad (4.40)$$

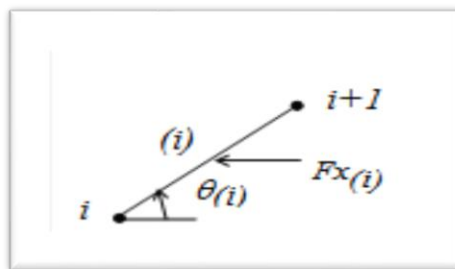


Fig.4.9- Force de pression exercée sur un segment du corps central.

La force de pression axiale exercée sur tout le corps centrale, par unité de profondeur, est calculée par la somme de toutes les forces de pression axiales exercées sur chaque segment. Le corps central est constitué de deux parties par raison de symétrie. Sous forme adimensionnelle, on obtient [49] :

$$\frac{F_x}{P_0 A^*} = C_F = \sum_{i=1}^{i=N-1} \left( \frac{P}{P_0} \right)_i \left[ \frac{y_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{y_i}{\lambda_B} \right] \quad (4.41)$$

Le rapport des pressions dans la relation (4.41) est donné par les expressions (4.37) et (4.39).

#### 4.9 La masse du gaz dans le divergent

On peut considérer l'espace de la tuyère comme l'union des triangles placés l'un adjacent à l'autre comme le montre la figure 4.7, y compris la zone uniforme entre la ligne de Mach AS et la ligne horizontale. Le nombre total des triangles est égale à N-1 en ajoutant le triangle de la zone uniforme. Par conséquent, la masse du gaz dans la partie divergente par unité de profondeur, qui se trouve dans l'espace compris entre deux lignes de Mach successives peut être approximée à :

$$\text{Mass}_{\text{gaz}(i)} = \rho_i A_i l \quad (4.42)$$

Avec:

$$\rho_{(i)} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \quad (4.43)$$

$$A_{(i)} = \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{2} \quad (4.44)$$

Au point A du triangle considéré, il y a deux valeurs de la masse volumique, l'une égale à celle du point i et l'autre égale à celle du point i+1. C'est pour cela qu'on a considéré la valeur moyenne de la masse volumique

entre deux points comme le montre l'équation (4.43). La position du point A ne figure pas dans la relation (4.44), puisque  $x_A = y_A = 0$ .

Dans la zone uniforme, la masse du gaz, par unité de profondeur, est donnée par :

$$\text{Masse Gaz (zone uniforme)} = \rho_s \frac{x_s y_s}{2} * l \quad (4.45)$$

La masse totale du gaz dans la section divergente y compris la symétrie du corps central, par unité de profondeur, sera donc donnée, sous forme adimensionnelle, par la relation suivante :

$$\frac{\text{Mass}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_B A^*} = C_{\text{Gaz}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \left[ \frac{x_s}{\lambda_B} \frac{y_s}{\lambda_B} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N-1} \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{(i)} \left[ \frac{x_{i+1}}{\lambda_B} \frac{y_i}{\lambda_B} - \frac{x_i}{\lambda_B} \frac{y_{i+1}}{\lambda_B} \right] \quad (4.46)$$

#### 4.10 L'erreur du model Gaz Parfait

Le modèle mathématique du gaz parfait est développé sur la base pour considérer les valeurs de  $C_p$  et de  $\gamma$  comme étant constantes, ce qui donne des résultats acceptables pour des faibles températures de stagnation. L'erreur donnée par le modèle GP peut être calculée pour chaque paramètre de conception. Ensuite, pour chaque valeur de  $T_0$ ,  $M_s$ , l'erreur relative peut être évaluée par la relation suivante :

$$\varepsilon_{\text{Paramètre}}(T_0, M) = \left| 1 - \frac{\text{Paramètre}_{\text{GP}}}{\text{Paramètre}_{\text{HT}}} \right| \times 100 \quad (4.47)$$

Le mot paramètre dans la relation (4.47) peut représenter tous les paramètres de conception, notamment la longueur de la tuyère, la masse de la structure, la force de pression exercée sur la paroi et le rapport des sections.

## CHAPITRE 5 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### 5. Introduction

Le chapitre suivant est consacré pour la présentation et l'illustration des divers résultats obtenus par le programme de calcul numérique (FORTRAN) élaboré pour la forme de tuyères à corps central (Plug Nozzle).

En première partie, le paragraphe 5.1 comporte les résultats et les courbes obtenus par le programme de calcul numérique pour la tuyère à corps central bidimensionnelle. Ensuite, en deuxième partie on a les paragraphes 5.2 et 5.3 qui comportent également des résultats et des courbes obtenus par le même programme de calcul mais cette fois-ci pour différentes valeurs de tronçature de la base du bouchon.

L'objectif principal de ce chapitre est la mise en application de la méthode de conception et de dimensionnement de la tuyère à corps central.

Pour la présentation des figures, on a opté pour quatre courbes. Trois courbes pour le cas Haute Température correspondant à la température génératrice  $T_0=1000$  K, 2000 K et 3000 K, et une quatrième courbe pour le cas Gaz Parfait (Gamma constant  $\gamma=1.402$ ). Les résultats numériques présentés sont déterminés avec une précision de  $10^{-3}$ .

Dans l'interprétation, on a introduit l'abréviation HT pour le modèle Haute Température et GP pour le modèle gaz parfait.

### 5.1 La programmation(Fortran)

Un programme informatique écrit en langage FORTRAN avec déclaration en double précision de toutes les variables et paramètres flottants a été développé à fin de permettre le dimensionnement de la tuyère à corps central, en passant par des étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans la partie divergente de la tuyère supersonique bidimensionnel.

Le code développé donne l'allure de la tuyère à corps central suivant le choix de départ qui dépend du nombre de Mach de sortie  $M_S$  et de

la Température génératrice  $T_0$ . Nos résultats sont exposés sous forme de courbes représentant le contour de notre tuyère pour le cas à Haute Température pour diverses valeurs de la température génératrice  $T_0$  ( $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$  et  $3000 \text{ K}$ ), La comparaison des résultats se fera avec ceux donnés également par le programme mais pour le cas Gaz Parfait.

Ensuite, on s'est focalisé sur l'obtention des courbes de dimensionnement et des paramètres de conception de la tuyère à corps central pour différentes valeurs de troncature. Les valeurs numériques déterminées par le programme sont présentées avec une précision de l'ordre de  $10^{-10}$ , afin de bien illustrer la différence entre les résultats des différentes troncatures.

#### 5.1.1 L'effet de la température génératrice $T_0$ sur l'allure du corps central

Les figures 5.1 à 5.4 illustrent l'allure du corps central lorsque  $M_S = 1.5$ , 2.0, 3.0, 4.0 et 5.0 respectivement. Sur la figure 5.1, les quatre courbes sont presque identiques pour le cas GP et les cas des températures  $T=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$  jusqu'à  $3000\text{K}$ . Ceci est même vérifié dans le tableau 5.1 par les valeurs numériques obtenues.

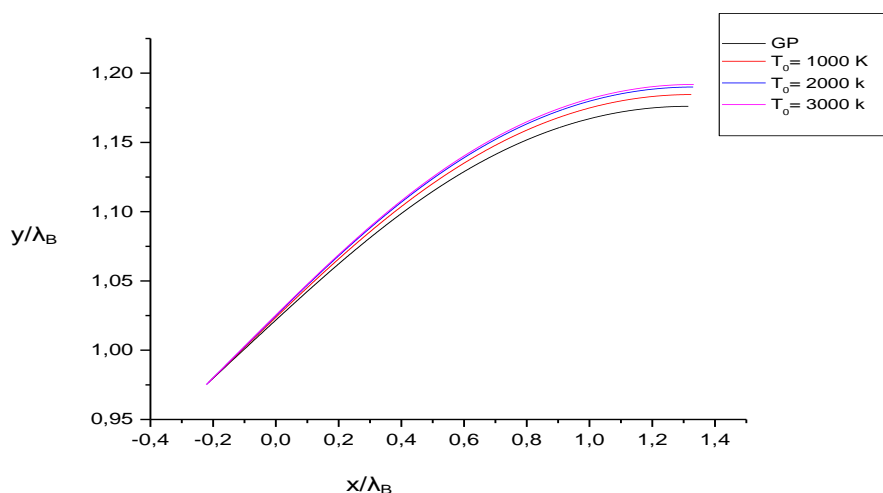


Fig. 5.1-L'allure du corps central à  $M_S=1.5$ .

Tableau 5.1 : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.1.

$M_s = 1.5$	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (°)
GP = ( $\gamma=1.402$ )	78,110	1,176	1,315	-0,206	0,979	1,521	1,537	0,089	11,890
$T_0 = 1000$ K	77,600	1,185	1,324	-0,215	0,977	1,539	1,557	0,095	12,400
$T_0 = 2000$ k	77,285	1,190	1,330	-0,220	0,975	1,550	1,569	0,099	12,715
$T_0 = 3000$ k	77,178	1,192	1,333	-0,222	0,975	1,554	1,573	0,101	12,822

On remarque que dans la figure 5.2 pour un  $M_s=2.0$ , la différence entre les quatre courbes est un peu plus importante par rapport aux courbes de la figure 5.1. Néanmoins, les deux courbes HT ( $T_0=2000$ K et  $T_0=3000$ K) restent toujours très proches. Cela peut être vérifié par les valeurs numériques du tableau 5.2.

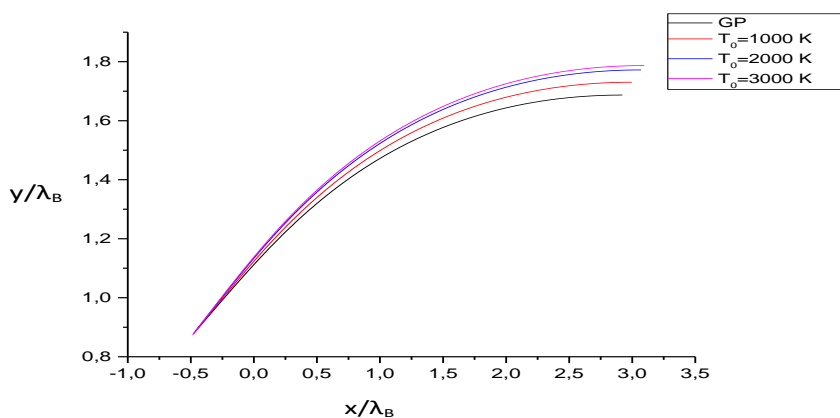


Fig.5.2 -L'allure du corps central à  $M_s=2.0$ .

Tableau 5.2 : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.2.

$M_s = 2$	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (°)
GP = ( $\gamma=1.402$ )	63,664	1,687	2,922	-0,444	0,896	3,366	3,497	0,287	26,336
$T_0 = 1000$ K	62,422	1,730	2,997	-0,463	0,886	3,460	3,606	0,309	27,578
$T_0 = 2000$ k	61,353	1,772	3,069	-0,479	0,878	3,549	3,709	0,331	28,647
$T_0 = 3000$ k	60,983	1,787	3,095	-0,485	0,874	3,580	3,746	0,339	29,017

On constate que la différence entre les courbes commerce à accroître graduellement tout en augmentant le nombre de Mach de sortie  $M_S$ , et ce qui est le cas respectivement pour les figures 5.3, 5.4 et 5.5. Ceci dit, on peut faire les mêmes constatations pour les valeurs numériques des tableaux 5.3, 5.4 et 5.5 lorsque  $M_S > 2.0$ .

Sur les figures 5.1 à 5.5, on aperçoit que les formes des tuyères ne sont pas confondues au même point au col, vu que l'angle  $\Psi$  n'est pas le même. Ces points se trouvent sur un cercle de rayon  $\lambda_B = 1.00$ .

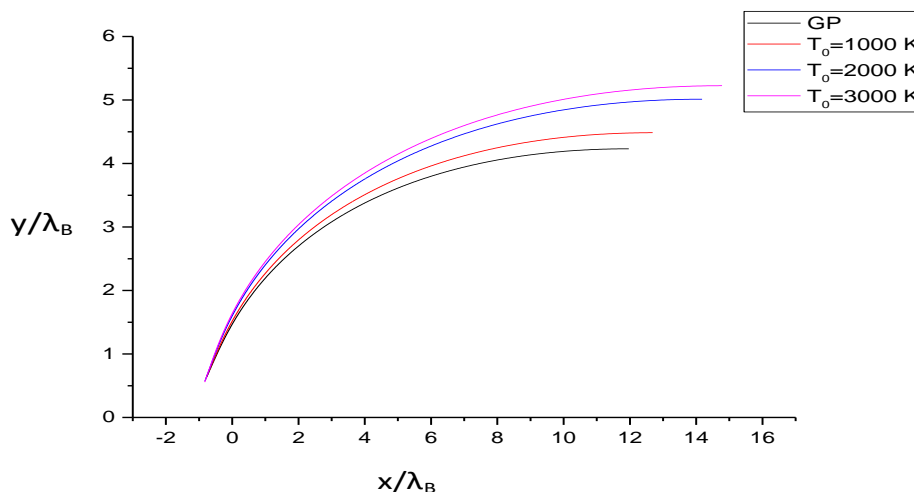


Fig.5.3-L'allure du corps central à  $M_S=3.0$ .

Tableau 5.3 : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.3.

$M_S = 3$	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (°)
GP = ( $\gamma=1.402$ )	40,354	4,232	11,968	-0,762	0,648	12,730	13,628	0,745	49,646
$T_0 = 1000$ K	38,256	4,485	12,685	-0,785	0,619	13,470	14,469	0,796	51,744
$T_0 = 2000$ k	35,011	5,013	14,177	-0,819	0,574	14,996	16,192	0,884	54,989
$T_0 = 3000$ k	33,827	5,225	14,778	-0,831	0,557	15,609	16,885	0,918	56,173



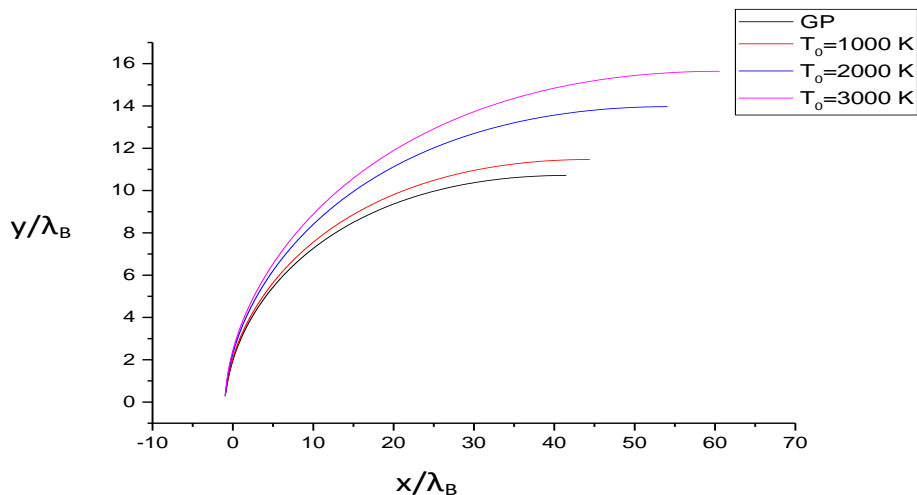
Fig.5.4-L'allure du corps central à  $M_S=4.0$ .

Tableau 5.4 : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.4.

$M_s = 4$	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (°)
GP ( $\gamma=1.402$ )	24,385	10,716	41,498	-0,911	0,413	42,409	45,059	1,127	65,615
$T_0 = 1000$ K	22,109	11,470	44,421	-0,926	0,376	45,347	48,252	1,188	67,891
$T_0 = 2000$ k	17,376	13,968	54,089	-0,954	0,299	55,044	58,726	1,327	72,624
$T_0 = 3000$ k	14,979	15,641	60,568	-0,966	0,258	61,534	65,716	1,400	75,021

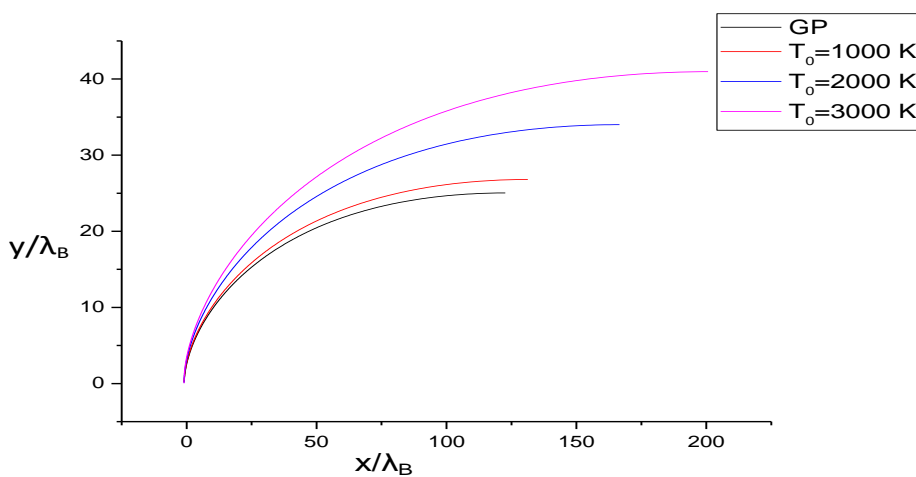
Fig. 5.5 - L'allure du corps central à  $M_S=5.0$ .

Tableau 5.5 : Les résultats de calcul des paramètres de conceptions pour les formes de tuyères de la figure 5.5.

$M_s = 5$	$\Psi$ (°)	$\frac{y_s}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (°)
GP = ( $\gamma=1.402$ )	13,297	25,039	122,647	-0,973	0,230	123,620	129,423	1,409	76,703
$T_0 = 1000$ K	11,016	26,809	131,309	-0,982	0,191	132,291	138,585	1,472	78,984
$T_0 = 2000$ k	5,737	34,008	166,569	-0,995	0,100	167,564	175,707	1,631	84,263
$T_0 = 3000$ k	2,383	40,965	200,642	-0,999	0,042	201,641	211,472	1,733	87,617

A partir des graphes et des valeurs numériques obtenus, on peut conclure qu'en augmentant la température ainsi que le nombre de Mach de sortie toutes les valeurs numériques des paramètres de conceptions augmentent excepté les deux paramètres  $\Psi$  et  $\frac{y_B}{\lambda_B}$  qui diminuent. Donc, cela justifie l'influence de la température  $T_0$  de la chambre de combustion sur l'allure des tuyères et les paramètres de conception.

#### 5.1.2 Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du corps central

Les figures 5.6, 5.7 et 5.8 représentent respectivement la variation des rapports thermodynamiques  $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $P/P_0$  le long de la paroi des tuyères de la figure 5.3 lorsque  $M_s=3.0$ .

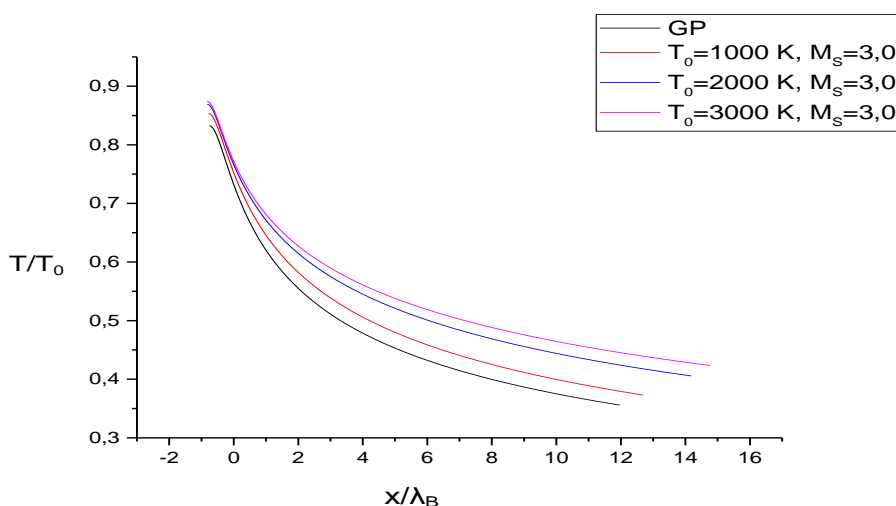


Fig.5.6 -Variation du rapport des températures le long de la paroi du corps central pour  $M_s=3.0$ .

On remarque d'après la figure 5.6 que le rapport des températures  $T/T_0$  diminue le long de la paroi. Le gaz parfait indique un refroidissement par rapport au comportement thermodynamique réel, surtout si  $T_0$  est élevée. Par exemple si  $T_0=2000$  K, pour le cas GP, les valeurs au col et à la sortie sont  $T^*=1665$  K,  $T_S=712$  K et pour le cas HT, on a  $T^*=1737$  K et  $T_S=811$  K. Il est possible que le matériau choisi sur la base du modèle GP, ne puisse pas résister à la température de notre modèle puisque le gaz se comporte à haute température.

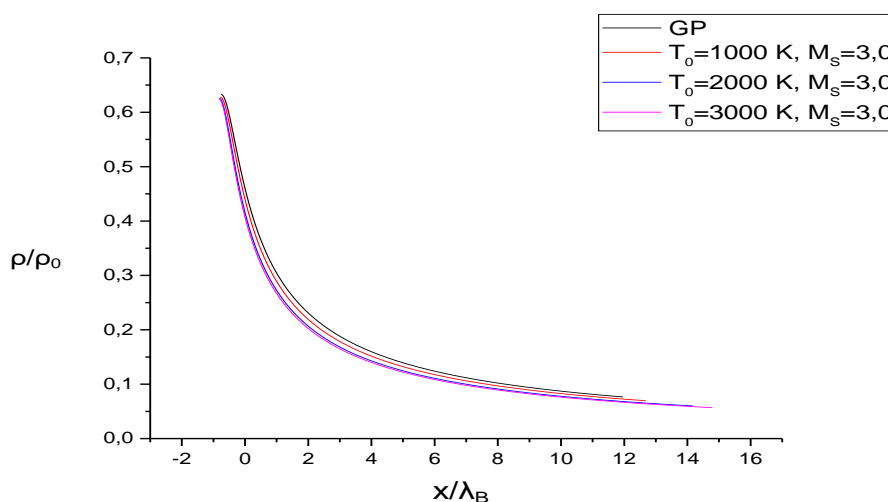


Fig. 5.7- Variation du rapport des masses volumiques le long de la paroi du corps central pour  $M_S=3.0$ .

Le rapport  $\rho/\rho_0$  nous donne une indication sur la quantité du gaz qui va traverser le divergent afin de déterminer la durée de vie du carburent. D'après la figure 5.7, on constate que le rapport  $\rho/\rho_0$  diminue à travers le divergent avec l'augmentation de la température. Le décroissement est un peu plus rapide pour le modèle HT que pour le modèle GP surtout pour la température  $T_0= 3000$  K.

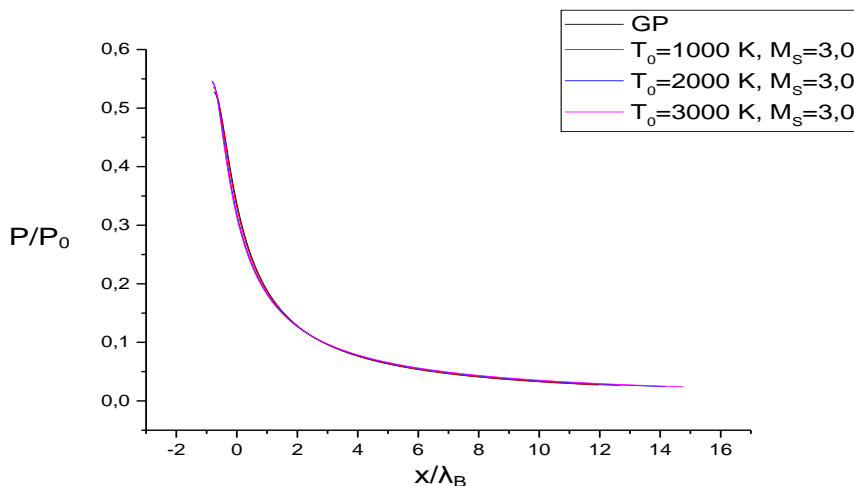


Fig.5.8- Variation du rapport des pressions le long de la paroi du corps central pour  $M_S=3.0$ .

Le rapport  $P/P_0$  sert à déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. La figure 5.8 illustre un quasi superposition des 4 courbes de variation du rapport de pression qui indiquent une chute de pression tout au long de la paroi. Le modèle GP montre que la force de pression est inférieure à celle donnée par le modèle HT (qui est proche du comportement réel de l'écoulement dans la tuyère), voir les valeurs de  $C_F$  dans le tableau 5.3.

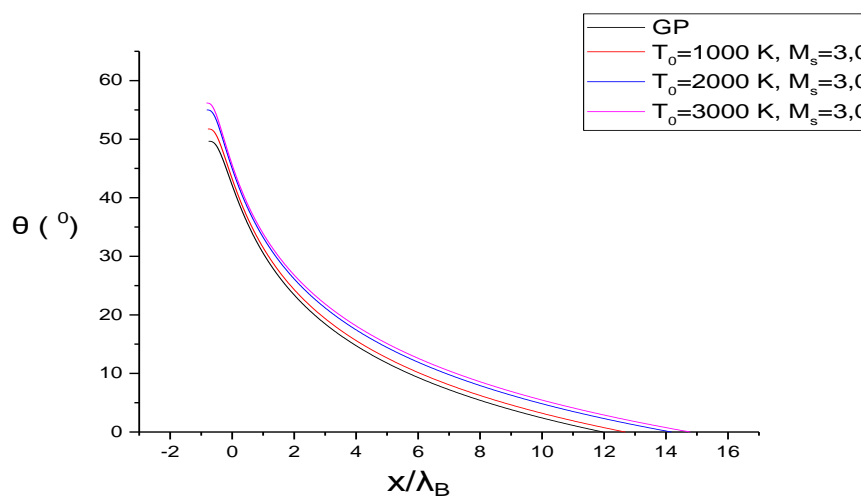


Fig. 5.9-Variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long de la paroi du corps central pour  $M_S=3.0$ .

Concernant l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$ , on remarque d'après la figure 5.9 l'existence d'un décroissement tout au long du divergent jusqu'à ce que la valeur de  $\theta$  s'annule ( $\theta = 0$ ) à la sortie de la tuyère, et c'est ce qui approuve notre hypothèse d'écoulement parallèle à l'axe, à la sortie du divergent.

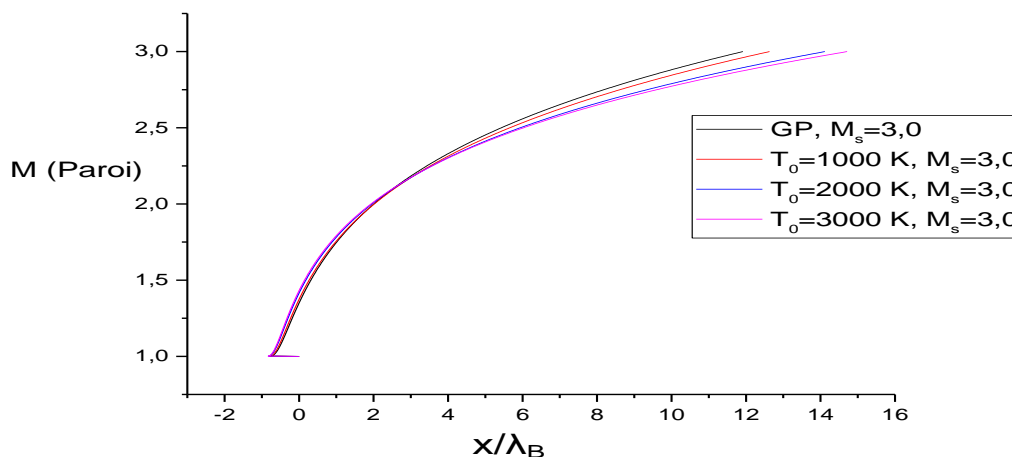


Fig.5.10- Variation du nombre de Mach le long de la paroi du corps central pour  $M_s=3.0$ .

D'après la figure 5.10, on aperçoit un accroissement du nombre de Mach le long de la paroi du divergent, de la valeur  $M=1$  au col jusqu'à  $M=M_s=3.0$  à la sortie de la tuyère.

Les courbes de ces figures ne sont pas confondues au col, vu les formes des tuyères de la figure 5.3. Donc, on justifie clairement l'effet de la température  $T_0$  sur les paramètres thermodynamiques et physique.

### 5.1.3 Variation du coefficient de force le long de la paroi du corps central

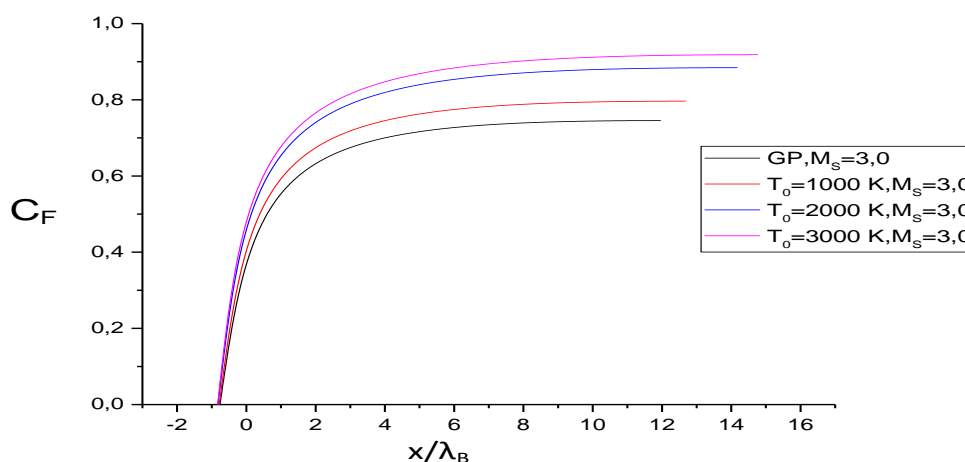


Fig. 5.11 -Variation du coefficient de force  $C_F$  le long de la paroi du corps central pour  $M_S=3.0$ .

D'après la figure 5.11 illustrée ci-dessus, on remarque que la valeur du coefficient de force  $C_F$  augmente le long du divergent puis devient constante à la sortie du corps central. On constate aussi que la variation du coefficient de force est plus rapide et plus importante toute fois que la température génératrice de sortie de la chambre de combustion augmente par exemple à  $T_0=1000$  K  $\rightarrow C_F = 0.7964$  tandis que à  $T_0=3000$  K  $\rightarrow C_F = 0.9183$ .

### 5.2. Les formes de la tuyère à corps central obtenues par différentes troncatures

D'après les figures illustrées ci-dessus (Figure 5.12, 5.13 et 5.14) on remarque que pour un même nombre de Mach de sortie  $M_S=3.0$ , l'effet de l'augmentation de la température est toujours présent en plus de celui de la troncature. Toute fois que le pourcentage de troncature de la longueur du corps central augmente la longueur de la tuyère diminue bien évidemment mais aussi la pente de la tangente à ces courbes.

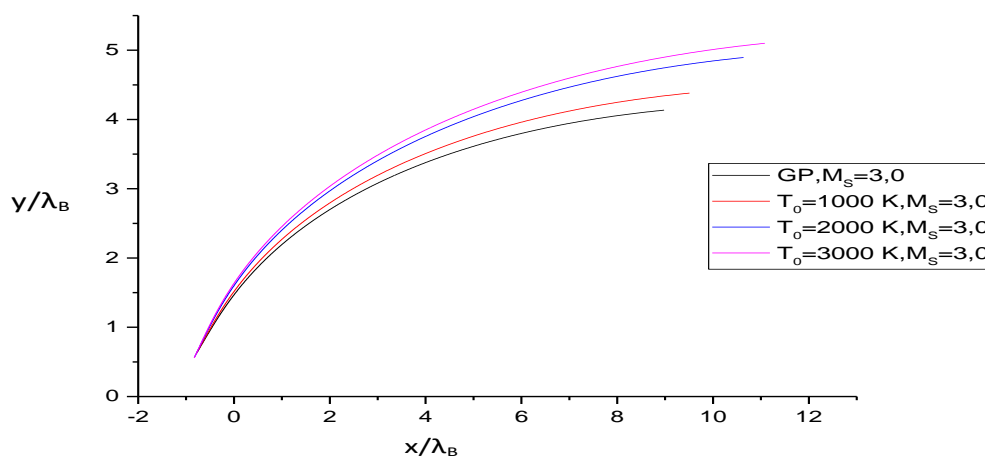


Fig. 5.12- L'allure de la tuyère à 75% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

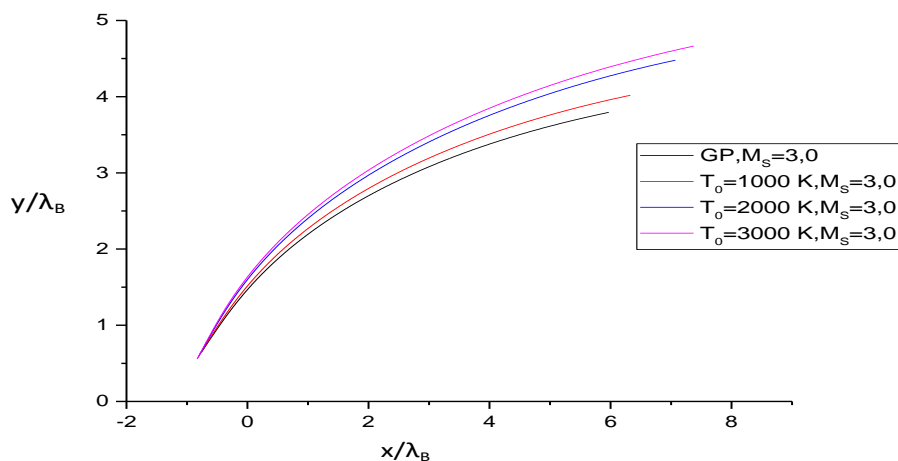


Fig. 5.13 - L'allure de la tuyère à 50% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

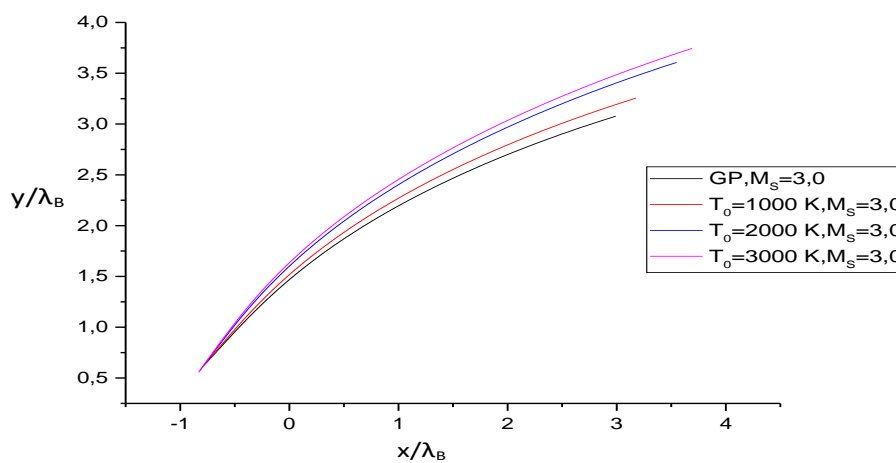


Fig. 5.14 - L'allure de la tuyère à 25% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

### 5.3 L'effet de la troncature du corps central sur les paramètres thermodynamiques

#### 5.3.1 L'effet de la troncature du corps central sur le rapport des températures

Les figures 5.15, 5.16 et 5.17 représentent la variation du rapport des températures  $T/T_0$  le long de la paroi des tuyères des figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement pour les différentes troncatures lorsque  $M_S=3.0$ .

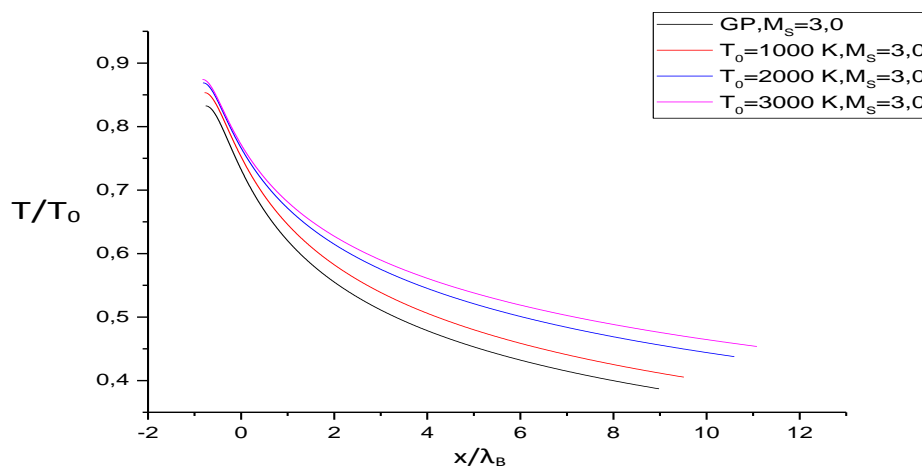


Fig.5.15 - Variation du rapport des températures le long du divergent à 75% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

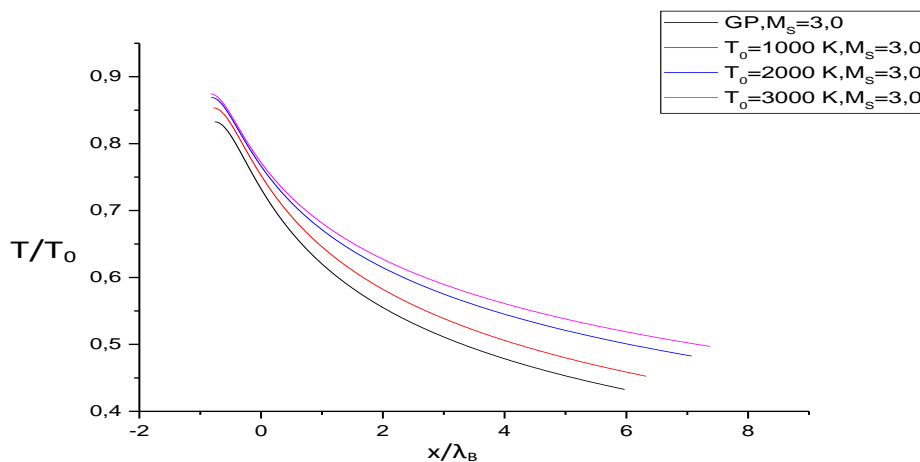


Figure 5.16 : Variation du rapport des températures le long du divergent à 50% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .



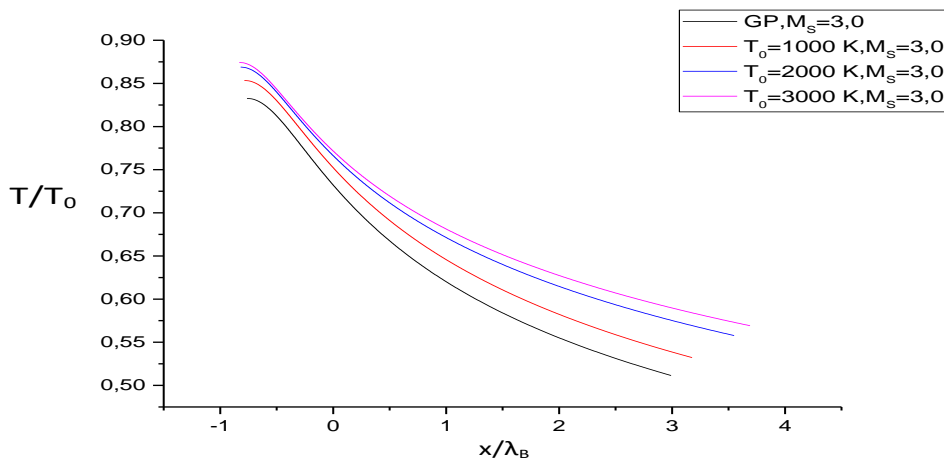


Fig. 5.17 - Variation du rapport des températures le long du divergent à 25% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

Depuis les courbes figurées ci-dessus (Figure 5.15, 5.16 et 5.17), on observe une décroissance du rapport des températures le long de la paroi. Cependant, toutes fois que le pourcentage de troncature de la longueur du corps central augmente le refroidissement à l'intérieure du divergent diminue. Par exemple à 75% la longueur du corps central (c'est-à-dire pour une troncature de 25%) le rapport des températures à la sortie du divergent peut atteindre la valeur de 0.43 à  $T_0=2000$  K, tant dit que à 25% la longueur du corps central (c'est-à-dire pour une troncature de 75%) le rapport ne diminue pas en dessous de 0.56 pour une même valeur de température.

### 5.3.2 L'effet de la troncature du corps central sur le rapport des masses volumiques

Les figures 5.18, 5.19 et 5.20 représentent la variation du rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$  le long de la paroi des tuyères des figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement pour les différentes troncatures lorsque  $M_S=3.0$ .

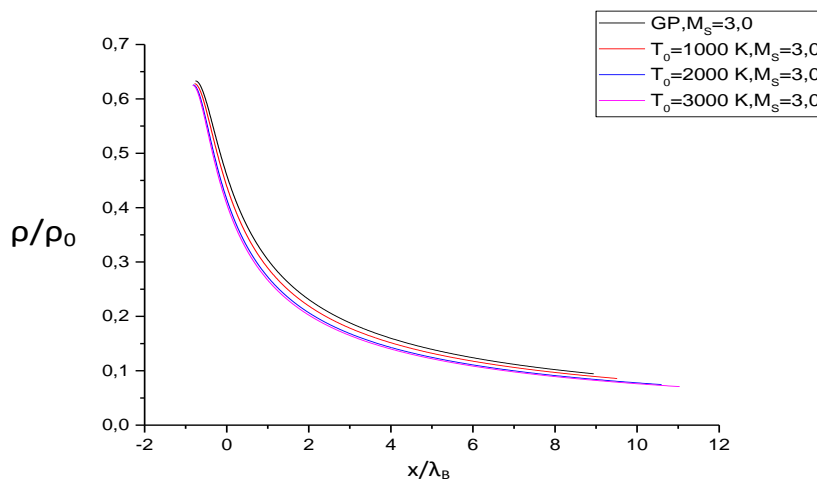


Fig. 5.18 - Variation du rapport des masses volumiques le long du divergent à 75% la longueur du corps central et à  $M_S=3,0$ .

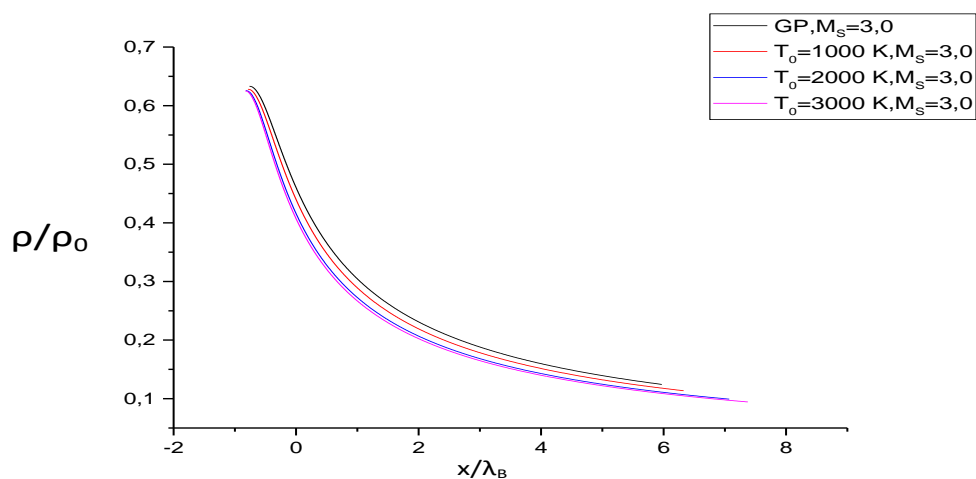


Fig. 5.19 - Variation du rapport des masses volumiques le long du divergent à 50% la longueur du corps central et à  $M_S=3,0$ .

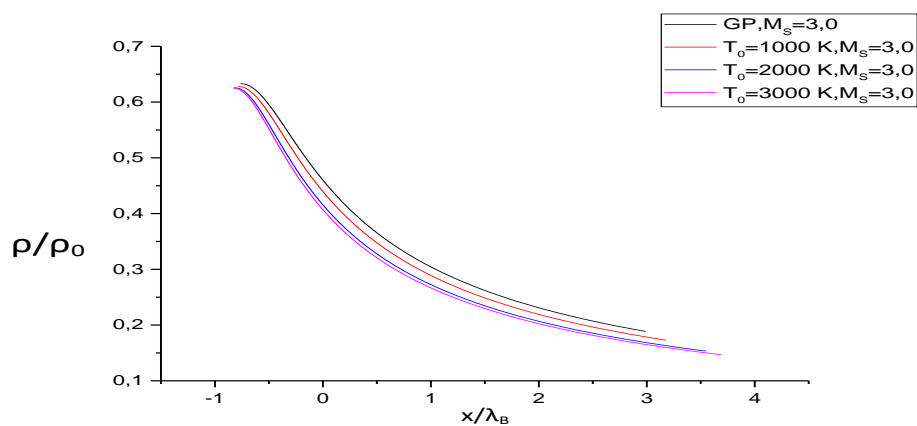


Fig.5.20 - Variation du rapport des masses volumiques le long du divergent à 25% la longueur du corps central et à  $M_S=3,0$ .

Les courbes élucidées dans les figures ci-dessus indiquent une diminution du rapport des masses volumiques tout au long du divergent. Chaque fois que la longueur du bouchon diminue le décroissement du rapport est moins important et les courbes s'écartent les unes des autres.

### 5.3.3 L'effet de la troncature du corps central sur le rapport des pressions

Les figures 5.21, 5.22 et 5.23 représentent la variation du rapport des pressions  $P/P_0$  le long de la paroi des tuyères des figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement pour les différentes troncatures lorsque  $M_S=3.0$ .

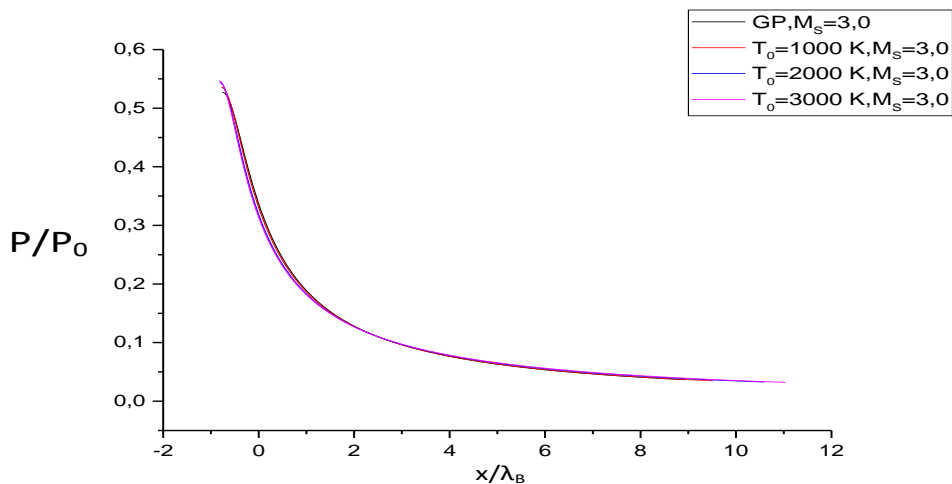


Fig. 5.21 - Variation du rapport des pressions le long du divergent à 75% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

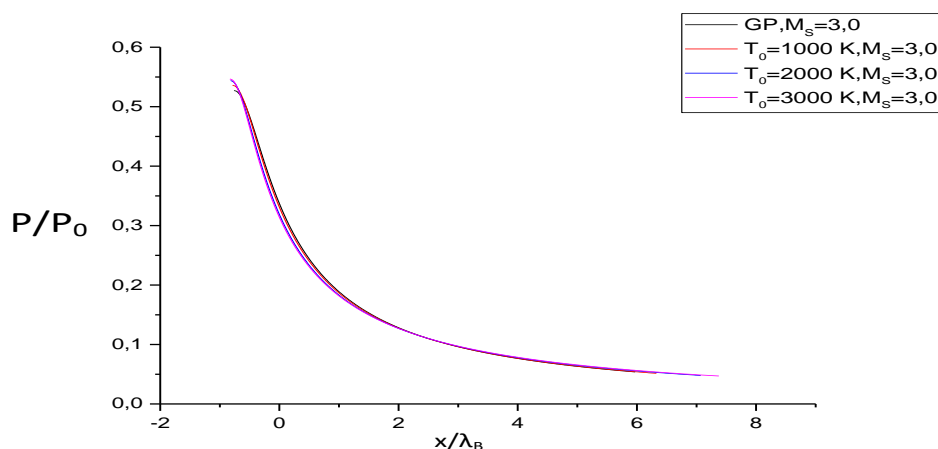


Fig. 5.22- Variation du rapport des pressions le long du divergent à 50% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

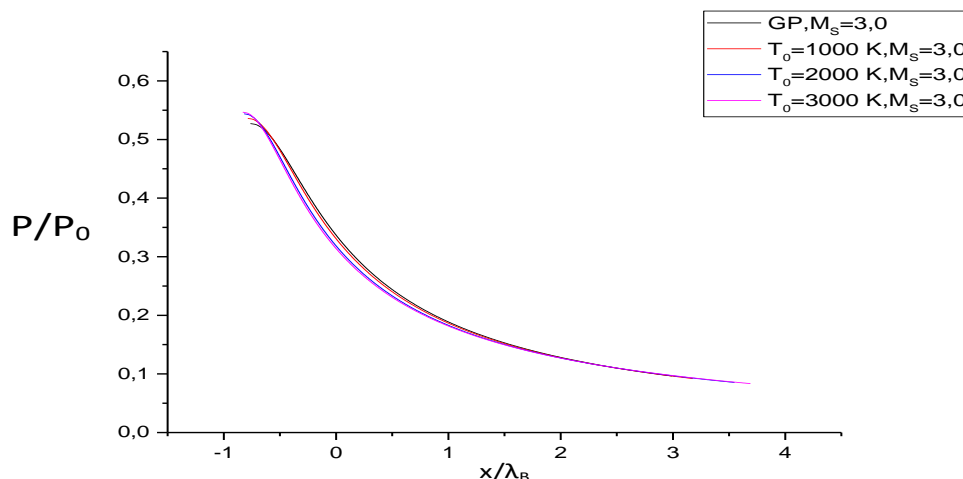


Fig.5.23 -Variation du rapport des pressions le long du divergent à 25% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

A partir des figures 5.21, 5.22 et 5.23 nous constatons un abaissement du rapport des pressions le long du divergent, accompagné par une augmentation de la force de pression. Cependant, l'effet de troncature n'influe pas trop la diminution du rapport.

#### 5.3.4 L'effet de la troncature du corps central sur le nombre de Mach

Les figures 5.24, 5.25 et 5.26 représentent la variation du nombre de Mach le long de la paroi des tuyères des figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement pour les différentes troncatures lorsque  $M_S=3.0$ .

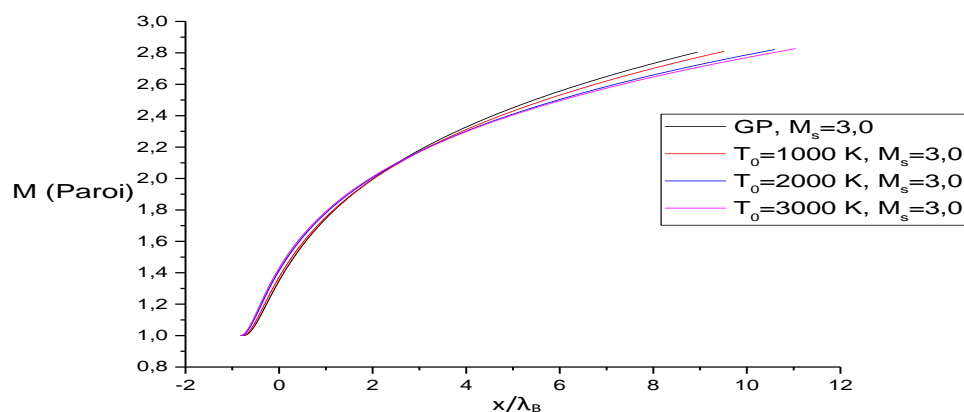


Fig. 5.24 - Variation du nombre de Mach le long du divergent à 75% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

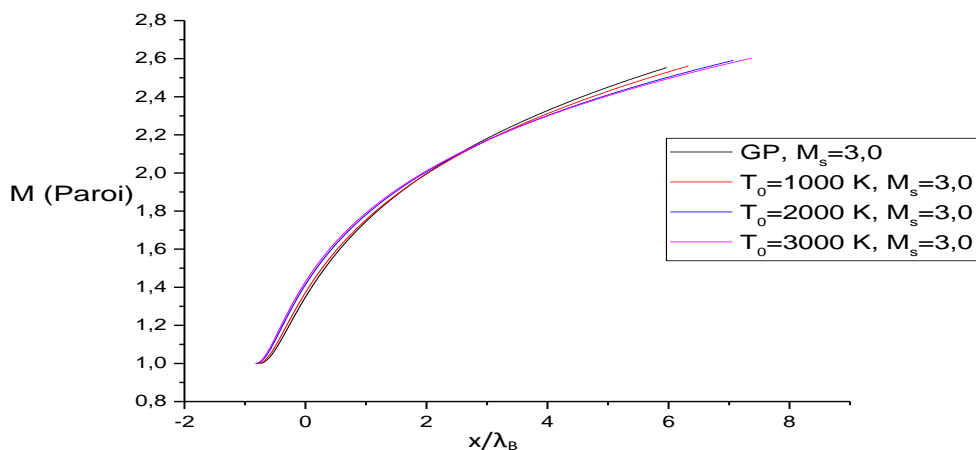


Fig.5.25 -Variation du nombre de Mach le long du divergent à 50% la longueur du corps central et à  $M_s=3.0$ .

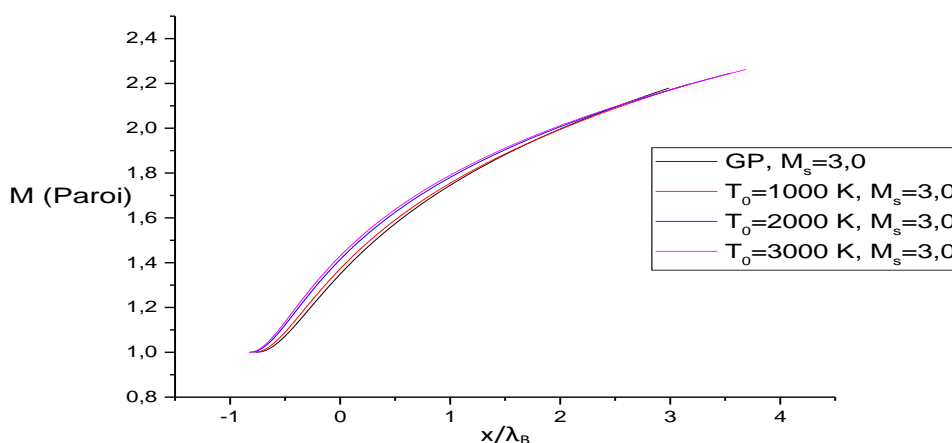


Fig. 5.26- Variation du nombre de Mach le long du divergent à 25% la longueur du corps central et à  $M_s=3.0$ .

Depuis les illustrations ci-dessus, on conclue qu'en augmentant le pourcentage de troncature de la longueur du corps central le nombre de Mach continue à augmenter mais n'atteins pas la valeur imposée à la sortie qui est égale à 3 dans notre cas. Donc, toutes fois que le pourcentage de troncature est élevé le nombre de Mach à la sortie du divergent sera inférieur au Mach de sortie imposé.

### 5.3.5 L'effet de la troncature du corps central sur l'angle de déviation de l'écoulement

Les figures 5.27, 5.28 et 5.29 représentent la variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long de la paroi des tuyères des figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement pour les différentes troncatures lorsque  $M_s=3.0$ .

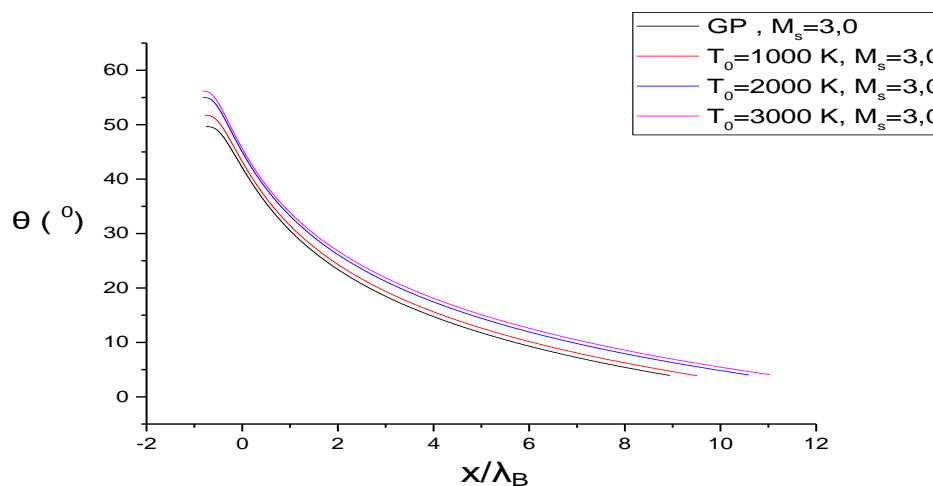


Fig. 5.27 -Variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long du divergent à 75% la longueur du corps central et à  $M_s=3.0$ .

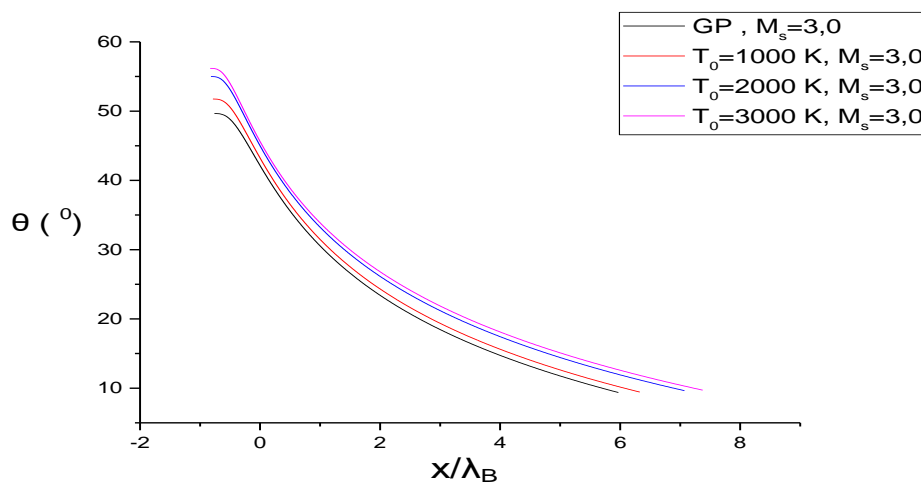


Fig. 5.28 - Variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long du divergent à 50% la longueur du corps central et à  $M_s=3.0$ .

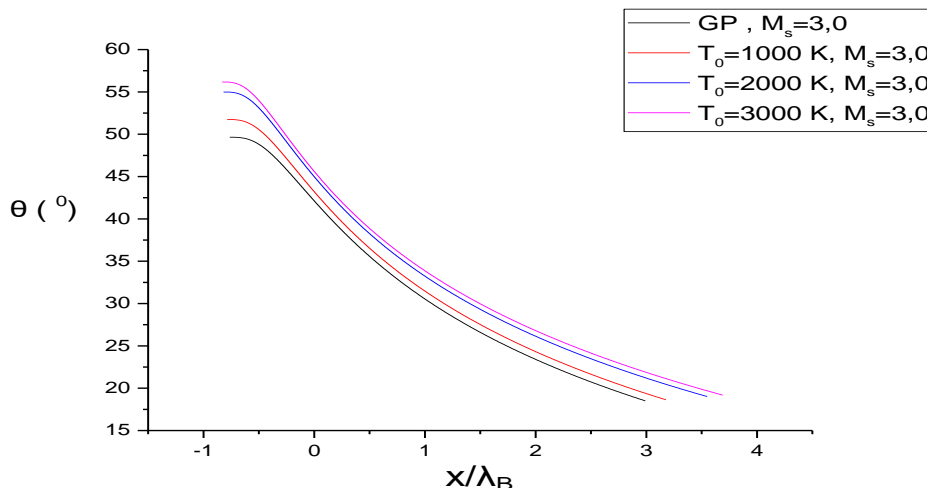


Fig. 5.29 - Variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long du divergent à 25% la longueur du corps central et à  $M_s=3.0$ .

On aperçoit d'après les figures 5.27, 5.28 et 5.29 qu'il existe une diminution de l'angle de déviation de l'écoulement le long du divergent. Cependant, à cause de l'effet de troncature l'écoulement n'est plus parallèle à la sortie ( $\theta_s > 0$ ) comme il l'était à 100% la longueur du corps central. Donc, toute fois que le pourcentage de troncature de la longueur du bouchon augmente l'angle de déviation de l'écoulement à la sortie augmente et s'éloigne de la valeur  $\theta_s = 0$ . On remarque aussi que les courbes s'éloignent les unes des autres avec l'augmentation du pourcentage de la troncature.

#### 5.4 L'effet de la troncature du corps central sur le coefficient de force $C_F$

Les figures 5.30, 5.31 et 5.32 représentent la variation du coefficient de force  $C_F$  le long de la paroi des tuyères des figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement pour les différentes troncatures lorsque  $M_s=3.0$ .

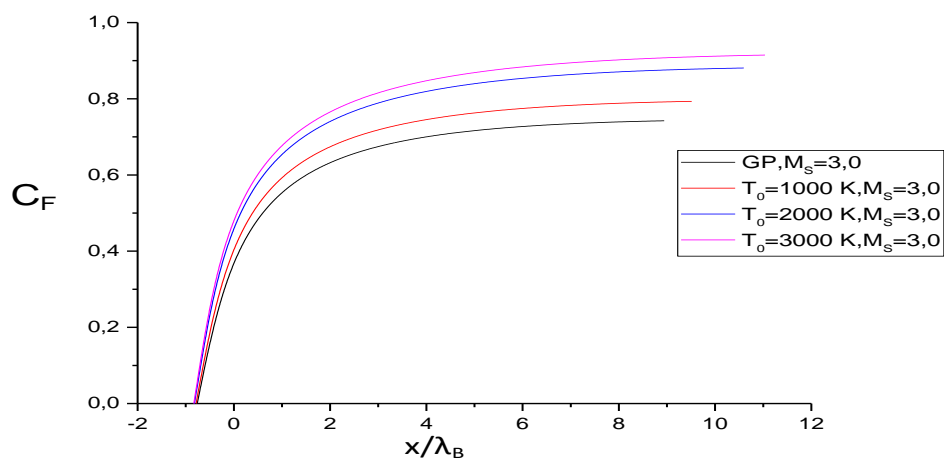


Fig. 5.30 - Variation du coefficient de force  $C_F$  le long du divergent à 75% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

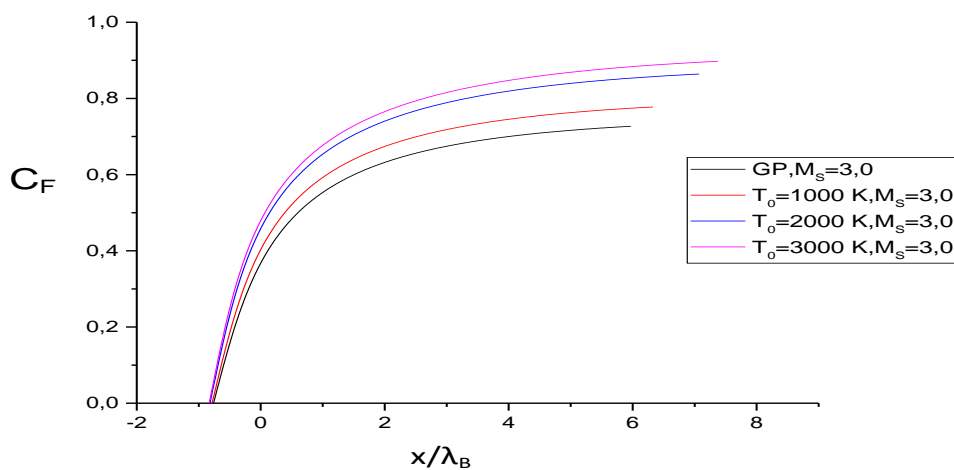


Fig. 5.31 - Variation du coefficient de force  $C_F$  le long du divergent à 50% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .



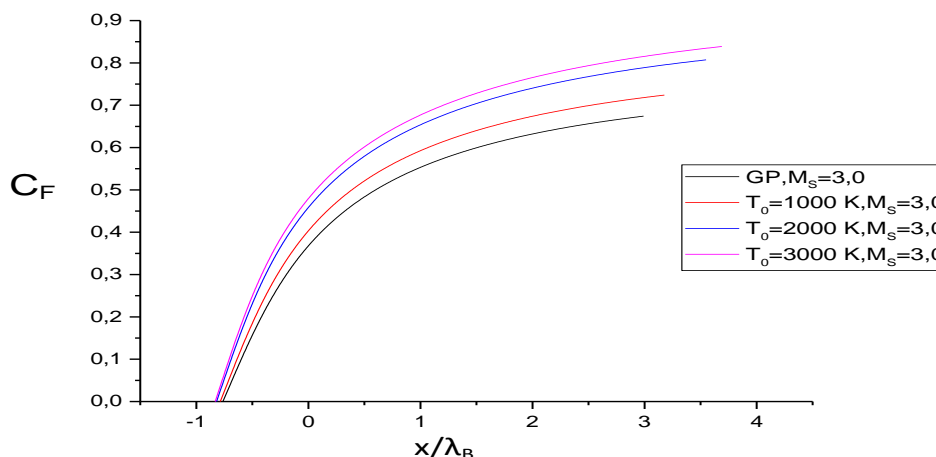


Fig. 5.32 - Variation du coefficient de force  $C_F$  le long du divergent à 25% la longueur du corps central et à  $M_S=3.0$ .

Depuis les illustrations ci-dessus, on remarque que le coefficient de force  $C_F$  augmente toujours le long de la tuyère mais en atteignant des valeurs inférieures aux valeurs atteintes à 100% la longueur du corps central. Donc, on peut constater qu'en augmentant la valeur de la troncature, les valeurs du coefficient de force diminuent et l'écart entre ces valeurs devient de plus en plus important. Le tableau et l'histogramme ci-dessous présentent les valeurs du coefficient de force  $C_F$  obtenues numériquement à la sortie du corps central avec une précision de  $10^{-4}$ .

Tableau 5.6 : Les valeurs du coefficient de force  $C_F$  à la sortie du corps central pour différentes troncatures.

Troncature $C_F$	0%	50%	50%	75%
GP ( $\gamma=1.402$ )	0,7454	0,7422	0,7269	0,6745
$T_0=1000$ K	0,7964	0,7932	0,7776	0,7240
$T_0=2000$ K	0,8843	0,8807	0,8641	0,8071
$T_0=3000$ K	0,9183	0,9146	0,8975	0,8388

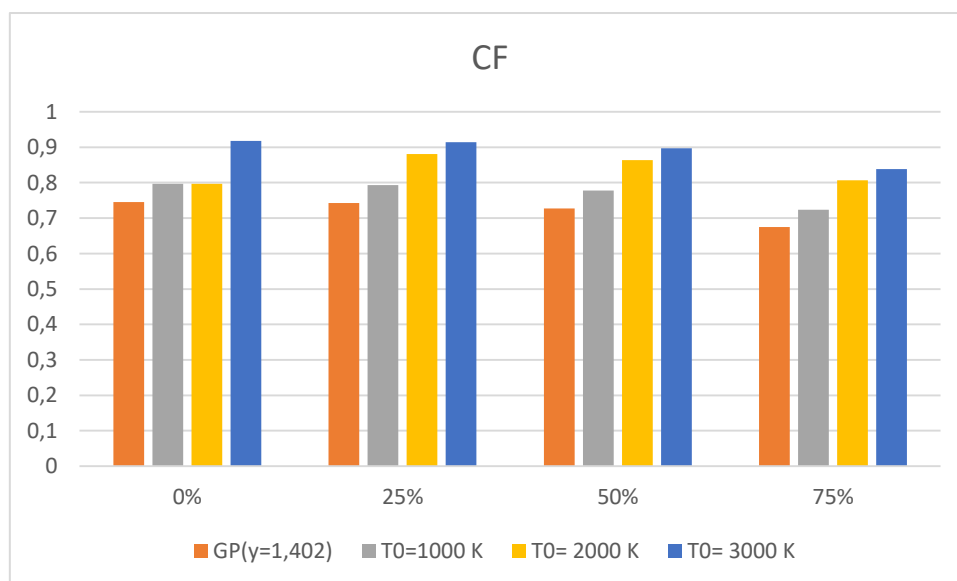


Fig. 5.33 - Variation du coefficient de force  $C_F$  à la sortie du corps central pour différentes troncatures.

### 5.5 L'erreur du coefficient de force $C_F$ obtenue par les différentes troncatures du corps central

L'erreur du coefficient de force obtenue par les différentes troncatures est donnée par la formule ci-dessous :

$$\varepsilon_{Param\grave{e}tre}(T_0, M) = \left| 1 - \frac{Param\grave{e}tre_{Troncature}}{Param\grave{e}tre_{100\%}} \right| \times 100$$

Le tableau ci-dessous présente les différentes valeurs de l'erreur calculées

Tableau 5.7 : Les valeurs de l'erreur du coefficient de force  $C_F$  pour différentes troncatures.

Troncature \ Erreur %	0%	25 %	50%	75%
GP ( $\gamma= 1.402$ )	0	0,4560	2,4818	9,5116
T <sub>0</sub> =1000 K	0	0,4018	2,3606	9,0909
T <sub>0</sub> = 2000 K	0	0,4071	2,2842	8,7300
T <sub>0</sub> = 3000 K	0	0,4029	2,2650	8,6573

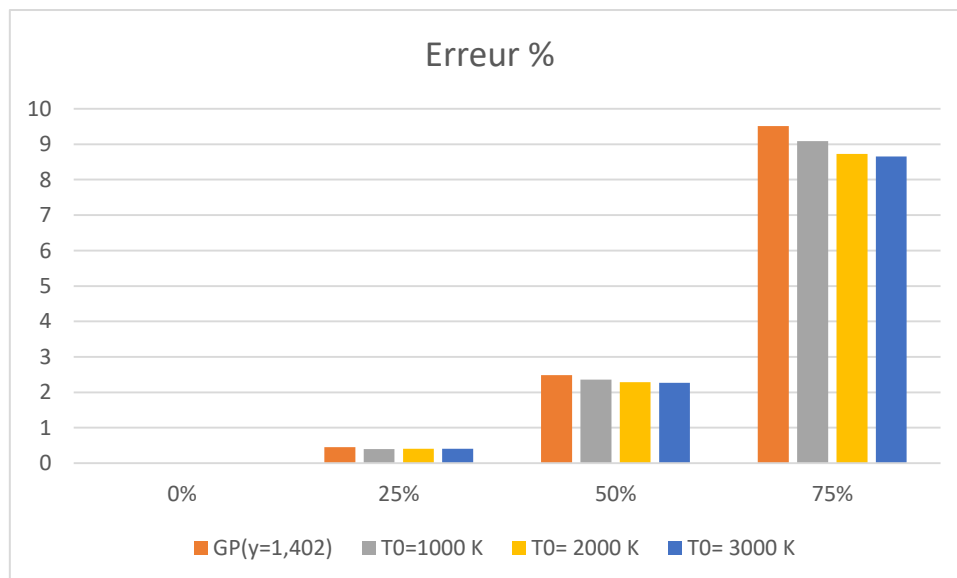


Fig. 5.34 -Variation d l'erreur du coefficient de force  $C_F$  à la sortie du corps central pour différentes troncatures.

D'après l'histogramme et le tableau 5.7, On conclue qu'en augmentant la valeur de la troncature l'erreur croit. Au-delà de 50% de troncature la valeur de l'erreur est importante et peut atteindre les 9.5%, c'est ce qui traduit une perte de 9.5% de poussée.

## Conclusion

A partir des courbes et des résultats obtenus, nous pouvons conclure que la variable principale pour le modèle Haute Température est la température  $T$ , tandis que pour le modèle Gaz Parfait est le nombre de Mach  $M$ .

A des températures de sortie de la chambre de combustion inférieures à 1000 K et à des nombres de Mach inférieures à 3, l'écart entre les résultats des deux modèles est petit. En revanche, lorsque la température de sortie de la chambre de combustion est supérieure à 1000 K, le modèle Gaz Parfait diminuera les performances des paramètres de conception des tuyères supersoniques et donnera des résultats éloignés du cas réel, c'est ce qui nous a incitées à utiliser le modèle Haute Température.

Les rapports thermodynamiques peuvent être utilisés pour déterminer les paramètres de conception des diverses formes de tuyères sous la base du modèle Haute Température.

La troncature de la tuyère nous a permis de gagner une portion intéressante de la masse de la tuyère.

L'écoulement à la sortie de la tuyère tronquée n'est plus parallèle au voisinage de la paroi, dans ce cas-là on perd une petite quantité de la force de pression.

Toute fois que la valeur de la troncature du corps central augmente, le coefficient de force  $C_F$  diminue.

L'écart entre les valeurs du coefficient de force avec troncature et la valeur du coefficient sans troncature augmente en augmentant la valeur de cette dernière et c'est ce qui explique l'augmentation de l'erreur calculée.

Enfin, on peut dire que à des valeurs de troncature importantes (supérieures à 50%) la diminution du coefficient de force est importante c'est à dire une perte de poussée importante. Donc afin d'obtenir un bon compromis (poids/poussée), il est recommandé d'utiliser des troncatures inférieures à 50% à fin de minimiser la perte de poussée, notant aussi que le choix de

la troncature dépendra également de la mission accordée au véhicule dans lequel la tuyère à corps central est équipée.

**Références :**

- [1]: Jean Délery, *Traité d'aérodynamique compressible, Volume 2, écoulements monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité*, Lavoisier 2008.
- [2]: Andre Lallemand, *Ecoulement monodimensionnel des fluides Compressibles*, Techniques de l'ingénieur Génie énergétique – B 8 165.
- [3]: Yohann Perrot, *étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible*, Thèse de doctorat, INSA de Rouen 2006.
- [4]: S. Candel, *Mécanique des Fluides*, Dunod 1995.
- [5]: Ingel Ryhming, *Dynamiques des Fluides*, Presses Polytechniques Romandes 1985.
- [6]: R. Comolet, *Mécanique expérimentale des fluides*, Tome 1, Masson, 1990.
- [7]: Reijasse, P, *Aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente : décollement libre et charges latérales en régime stabilisé*, PhD Thesis, Université de Paris VI, 2005. *Aérothermodynamique*, E.N.S.A.E, 1989.
- [8]: Jean Délery, *Aérodynamique interne, tuyères et arrières corps*, Département.
- [9]: A.H, « Compressible Fluid Flow ». Vol.1 .PP.73, 1953.
- [10]: H.P.G, Peterson C.R, «Mechanics and Thermodynamics of Propulsion». Addition Wesley Publishing Company Inc.PP.180, 1965.

[11] : Deck, S. Simulation numérique des charges latérales instationnaires sur

Des configurations de lanceur, thèse de Doctorat de l'Université d'Orléans,

ONERA 2002.

[12]: Gerald Hagemann, Frey M, Shock pattern in the plume of rocket nozzles: needs for design consideration. Shock Waves 17(6), 387–395, 2008.

[13]: Pascal Pempie, Moteur fusée à ergols liquides, document CNES DLA/CT 03-194,2007.

[14]: RAO, G. V. R., Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, Vol. 28, No.6, June 1958.

[15]: RAO, G.V.R., Approximation of optimum thrust nozzle contours. ARS Journal J30(6), page 561, June 1960.

[16] : Nguyen, A. T., Girard, S., Alziary de Roquefort, T. Etude de l'écoulement dans une tuyère à contour parabolique en régime surdétendu. Rapport LEA sous commande ONERAN°6983/DA/CDES, juillet 2001.

[17]: Girard, S., Deniau, H., Nguyen, A. T., Alziary de Roquefort, T. Etude de l'écoulement dans une tuyère propulsive à contour parabolique en régime surdétendu, Note LEA, 2000.

[18]: Manuel Frey, Behandlung von Strömungs problem en in Raketendüsen bei Überexpansion. PhD thesis, Université de Stuttgart, Allemagne, 2001.

[19]: Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, 1988.

- [20]: Anderson J.Jr. "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982.
- [21]: Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson, 1979.
- [22]: Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, 1986.
- [23]: Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, 1997.
- [24]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Parameters of Supersonic Flow at High Temperature. Application for Air," 4th International Conferences on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT, 19-22 Sep. 2005, Caire, Egypt.
- [25]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in Nozzles," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
- [26]: Angelino G., "Approximate Method for plug Nozzle Design," AIAA Journal, Vol. 2, N° 10, PP. 1834-1835, 1964.
- [27]: Berman K., "The Plug nozzle: A new approach to engine design," Astronautics, PP. 22-24, April 1960.
- [28]: Hagemann G., Immich H. and Terhardt M., "Flow phenomena in advanced rocket nozzles - The plug nozzle," AIAA-1998-3522, 34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland, OH, July 13-15, 1998.
- [29]: Takashi I., Fujii K. and Hayashi A. K., "Computations of Axisymmetric



- Plug-Nozzle Flow fields: Flow Structures and Thrust Performance," AIAA Journal of Propulsion and Power, Vol. 18, N° 2, PP. 254-260, 2002.
- [30] : Ryhming I. L., "Dynamique des Fluides," Presses Polytechnique romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
- [31]: Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2<sup>ème</sup> edition, John Willey and sons, inc., 1976.
- [32]: Shapiro A. H., "Compressible Fluid Flow," Vol. 1, New York, the Ronald Press, 1953.
- [33]: Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, the Ronald Press Company, New York, 1953.
- [34]: Onofri M., "CFD Results of Plug Nozzle Test Cases," AIAA-2002-4036 38<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis, Indiana, July 7-10, 2002.
- [35]: Démidovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow, 1987.
- [36]: Evvard J. C. and Maslen. S. H., "Three-Dimensional Supersonic Nozzles and Inlets of Arbitrary Exit Cross Section," NASA TN-2688, April 1952.
- [37]: Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
- [38]: Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, 1985.

- [39]: Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [40]: Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," *Comput. J.*, Vol. 9, PP. 404-407, 1978.
- [41]: Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [42]: REIJASSE.P, "Aérodynamique des tuyères supersoniques", ENSAM.2007 [web.paris.ensam.fr/IMG/pdf/Cours\\_ENSAM\\_Reijasse.pdf](http://web.paris.ensam.fr/IMG/pdf/Cours_ENSAM_Reijasse.pdf)
- [43]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4599, 42st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12, 2006.
- [44] : S. M.HABIBALLAH "Liquide rocket trust Chambers», office national d'étude et de la recherche aérospatiales, chatillon, France, 2004.
- [45]: Greer H., "Rapid Method for Plug Nozzle Design," *ARS Journal*, Vol. 31, N° 04, PP. 560-561, 1961
- [46]: Rommel T., Hagemann G., Schley C. A. and all., "Plug Nozzle Flow field Analysis," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 13, N° 5, PP. 629-634, 1997.

- [47]: Marsilio R., "Numerical Simulation for Plug Nozzle Flow Field," AIAA-2001-670, 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Meeting and Exhibit, 8-11 Jan. 2001, Reno Hilton, Reno, Nevada.
- [48]: Takashi I. and Fujii K., "Numerical Investigations of the Base-Flow Characteristics of Axisymmetric Aerospike Nozzles," Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 45, N° 148, PP. 108-115, 2002.
- [49]: Tomita T., Tamura H., and Takahashi M., "An experimental evaluation of plug nozzle flow field," AIAA-1996-2632, 32<sup>nd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Lake Buena Vista, FL, July 1-3, 1996.
- [50]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Plug Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-0592, 44<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 9-12 Jan. 2006, Reno Nevada, Reno Hilton, USA.
- [51]: Zebbiche T., "Supersonic Plug Nozzle Design," AIAA-2005-4490, 41<sup>st</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson, Arizona, July 10-13, 2005.
- [52]: Hearsh, D. P. and G. C. Gorton, "Investigation of Thrust and Drag Characteristics of a Plug-Type Exhaust Nozzle", *NACA RME53L16*, 1954.
- [53]: Berman, K. and F. W. Crimp Jr., "Performance of Plug-Type Rocket Exhaust Nozzle", *ARS Journal*, Jan. 1961.

- [54]: Rao, G.V.R., "Spike Nozzle Contour for Optimum Thrust", *Ballistic Missile and Space Technology, Vol. 2*, C. W. Morrow (Ed.), Pergamon Press, New York, 1961, pp. 92-101.
- [55]: Lee, C. and Thompson D., "FORTRAN Program for Plug Nozzle Design", *NASA TM X-53019*, 1964.
- [56]: Korte, J., J. Dunn, A. Salas, N. Alexandrov, W. Follett, G. Orient and A. Hadid, "Multidisciplinary Approach to Linear Aerospike Nozzle Optimization", *33rd Joint Propulsion Conference*, Seattle, USA, July 1997.
- [57]: Hageman, G., H. Immich, T. V. Nguyen and D.E. Dumnov, "Advanced Rocket Nozzles", *Journal of Propulsion and Power*, Vol 14, No 5, pp. 620-634, AIAA, 1998.
- [58]: Hageman, G., A. Preuss and H. Immich, "Advanced Nozzle Concepts for Future Rocket Engine Applications", *CNES-AAAF-ESA Conference*, Liege, Belgium, Dec.2002.
- [59]: Sakamoto, H., Takahashi M., Sasaki, M., Tomita, T., Kusaka K. and Tamura H., "An Experimental Study on a 14KN Linear Aerospike Nozzle Combustor", *AIAA Paper 99- 2761*, 1999
- [60]: Ito, T., K. Fujii and A.Koich-Hayashi, "Computations of the Axisymmetric Plug Nozzle Flow Fields", *17th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Norfolk, USA, June 1999.
- [61]: Bernard, E., H. H. Chen, T. Mueller and J. Garvey, "Design, Manufacturing and Test of a Plug Nozzle Rocket Engine", *AIAA Paper 2002-4038*, 2002.

[62]: Anon., "New Nozzle Shows Potential for Increased Efficiency", *Aviation Week and Space Technology*, March 31, 2003.

[63]: Ito, T., and Kozo Fuji, "Flow Field Analysis of the Base Region of Axisymmetric Aerospike Nozzle", *AIAA-2001-1051*, 2001.

[64]: Naghib-Lahouti, A., Nazarinia, M., and Tolouei, E., "Design and CFD Analysis of an Aerospike Nozzle to Compare Its Off-Design Performance with a Conventional Nozzle", *Proceedings of IMEC2004, International Mechanical Engineering Conference*, IMEC2004-FM014-CP, December 5-8, 2004, Kuwait.