

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Saad Dahlab Blida 1

Institut d'Aéronautique et Des Etudes Spatiales



Projet de Fin d'Étude

En vue de l'obtention de Diplôme : Master en Aéronautique

Filière : Construction et Maintenance en Aéronautique

Spécialité : Structure Aéronautique

Thème

**Etude numérique et expérimentale des
structures composites**

Présentés par :

- Ameer M'hammed Hassan
- Bentata Soheib

Encadré par :

Mme Mahi Amale

Année Universitaire : 2019/ 2020

Remerciements

Ce travail est l'aboutissement d'un dur labeur et de beaucoup de sacrifices, nos remerciements vont d'abord au Créateur de l'univers qui nous a doté d'intelligence, et nous a maintenu en santé pour mener à bien cette année d'étude. Nous tenons aussi à adresser nos remerciements à nos familles, frères et sœurs, amis et plus précisément à nos chers parents qui nous ont toujours soutenus et poussés à continuer nos études. Ce présent travail a pu voir le jour grâce à leur soutien.

*De sincères et chaleureux remerciements offerts à notre encadreur, **Madame Mahi A.** Le mérite d'un mémoire appartient certes à l'auteur, mais également à son directeur qui l'encadre. Dans notre cas, notre encadreur a été d'un soutien et d'une attention exceptionnels. La confiance qu'elle nous a accordée ainsi que le soutien moral qu'elle a manifesté à notre égard nous ont permis d'accumuler des expériences professionnelles et personnelles marquantes qui font de nous des personnes grandies*

On salue son amabilité, sa patience, sa disponibilité, sa souplesse d'esprit et son savoir. C'est certes avec joie et fierté qu'on dépose aujourd'hui ce mémoire, mais aussi avec un brin de nostalgie qu'on termine ce programme d'études et on conclut ce travail.

*Nous tenons également à exprimer notre gratitude à **Mme BENKHADDA**, directrice de l'institut d'aéronautique et des études spatiales (IAES). Sa passion et son enthousiasme à aider les étudiants dans leur parcours universitaire méritent d'être soulignés. On tient aussi à remercier du fond de nos cœurs toute la famille de l'IAES*

*Enfin, on ne peut passer outre notre reconnaissance envers **RIABI Amina**, la précieuse amie qui nous a toujours soutenu durant la préparation de ce mémoire.*

Dédicace

A tous ceux qui ont de loins ou de près contribués a ce travail

A tous ceux qui nous ont encouragés soutenus et aidés

A nos parents

A nos frères

A nos sœurs

A nos amis

A nos professeurs

A nos collègues

*A ceux qui malgré la distance ont toujours été la présent par leur apport
morale*

Merci a tous et a toutes.

Hassan et Soheib

Résumé :

L'objectif de ce travail est de déterminer le comportement mécanique des plaques composites moyennement épaisses par la méthode de Navier pour la flexion et le flambage statiques des composites. Les plaques choisies sont de forme rectangulaire, composées de 4 couches et ayant deux configurations différentes. En effet nous déterminons les matrices de rigidités, de souplesses et l'équation constitutive pour une configuration composite multicouches.

A l'aide de langage MAPLE, nous avons élaboré un programme de calcul utilisé pour l'analyse des plaques composites moyennement épaisses.

Mot-clé : Matériau composite, Comportement mécanique, flexion, flambage Les matrices de rigidités, de souplesses, MAPLE.

Abstract:

The objective of this work is to determine the mechanical behaviour of medium-thickness composite plates using the Navier method for static bending and buckling of composites. The chosen plates are rectangular in shape, with a number of layers $n=4$ and with two different configurations. Indeed, the stiffness and flexibility matrices and the constituent equation for a multi-layer composite configuration are determined.

Using the MAPLE language, we have developed a computing program used for the analysis of medium-thick plates made of a composite material.

Keyword: Composite material, Mechanical behavior, bending, buckling The matrices of rigidities, flexibility, MAPLE.

الملخص :

الهدف من هذا العمل هو تحديد السلوك الميكانيكي للصفائح المركبة ذات السماكة المتوسطة باستخدام طريقة Navier للثني الثابت وإلتواء المركبات. الألواح المختارة مستطيلة الشكل ، مع عدد من الطبقات $n = 4$ وبتكوينين مختلفين. في الواقع ، يتم تحديد مصفوفات الصلابة والمرونة والمعادلة المكونة لتكوين مركب متعدد الطبقات.

باستخدام لغة MAPLE ، قمنا بتطوير برنامج حوسبة يستخدم لتحليل الصفائح متوسطة السماكة المصنوعة من مادة مركبة.

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة ، السلوك الميكانيكي ، الانحناء ، التواء مصفوفات الصلابة والمرونة ، MAPLE

Remerciements -----	2
Dédicace -----	3
Résumé : -----	4
Liste des Matières : -----	5
Liste des Figures : -----	8
Liste des Tableaux : -----	8
Liste des symboles : -----	10
Introduction Générale : -----	13

Chapitre I : Généralité sur les matériaux composites

1 Introduction-----	17
2 Matériaux composites-----	17
2.1 Constituants d'un matériau composite :-----	18
2.1.1 Matrice-----	18
2.1.2 Renforts-----	21
2.1.3 L'interface:-----	27
2.2 Charges et additifs-----	27
3 Type des matériaux composites :-----	27
3.1 Matériaux composites unidirectionnels :-----	27
3.2 Matériaux composites bidirectionnels :-----	28
3.3 Matériaux composites multidirectionnels :-----	28
4 Classification des matériaux composites-----	28
4.1 Classification suivant la forme des constituants-----	28
4.1.1 Composites à fibres-----	28
4.1.2 Composites à particules-----	29
4.2 Classification suivant la nature des constituants :-----	29
4.2.1 Composites à matrice organique (résine, charge), avec :-----	29
4.2.2 Composites à matrice métallique (alliages légers et ultra- légers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :-----	29
4.2.3 Composites à matrice minérale (céramique), avec :-----	29
5 Procédés de mise en œuvre des composites-----	30

5.1	Le moulage au sac de pré imprégné :-----	30
5.2	L'infusion de résine liquide (Liquid Resin Infusion – LRI) :-----	30
5.3	L'injection de résine sous pression (Resin Transfer Moulding – RTM) :-----	31
5.4	L'infusion par film de résine (Resin Film Infusion RFI) :-----	31
6	Architecture des matériaux composites-----	32
6.1	Monocouches -----	32
6.2	Stratifiés-----	32
	Désignation des structures stratifiées-----	33
6.3	Sandwich-----	33
7	Avantages et inconvénients des matériaux composites-----	34
7.1	Avantage:-----	34
7.2	Inconvénients :-----	34

Chapitre II : Comportement Mécanique Des Plaques Stratifiées

1	Introduction :-----	36
2	Modélisation du comportement mécanique d'un stratifié à renfort tissu :-----	37
2.1	Loi de mélange :-----	38
2.2	Loi de comportement :-----	39
2.2.1	Matériaux anisotropes :-----	39
2.2.2	Matériaux orthotropes :-----	
2.2.3	Matériaux transversalement isotropes:-----	41
2.2.4	Matériaux isotropes:-----	42
2.2.5	Relation contrainte-déformation plane :-----	42
2.3	Théories des stratifiés :-----	46
2.3.1	Champ des déformations :-----	47
2.3.2	Expression du champ des déformations :-----	48
2.3.3	Champ des contraintes :-----	49
2.3.4	Efforts généralisés :-----	50
2.3.5	Équation du comportement mécanique d'un stratifié :-----	52
3	Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré :-----	53
3.1	Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane-----	54
3.2	Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement -----	55
3.3	Relations fondamentales relatives aux moments -----	55

4	Conclusion :-----	56
---	-------------------	----

Chapitre III : Matériaux & Procédures expérimentales

1	Introduction :-----	58
2	Procédés de fabrication :-----	58
2.1	Présentation des constituants utilisés :-----	58
2.2	Mise en forme à partir de fibres pré imprégnés :-----	58
2.2.1	Matériaux pré imprégnés-----	58
2.2.2	Thermo-compression de tissu pré imprégné-----	59
2.3	Géométrie des éprouvettes et types de matériaux à utiliser :-----	59
2.3.1	Variation de nombre de couches :-----	60
2.3.2	Variation du matériau utilisé :-----	61
3	Essai mécaniques :-----	61
3.1	Essai de traction :-----	61
3.1.1	Dispositif de traction-----	62
3.1.2	Mesure de la déformation :-----	62
3.2	Mesure par Dynamic Mechanical Analysis (DMA)-----	62
3.2.1	Description du dispositif expérimental-----	63
4	Remarque :-----	64

Chapitre IV : Résultats et interprétation

1	Choix du matériau :-----	66
2	Simulation numérique :-----	66
	- Introduction :-----	66
	- Définition et fonctionnalité de logiciel de calcul (Maple) :-----	67
3	La résolution des équations de mouvement d'une plaque stratifiée en théorie du 1er ordre par la méthode de Navier :-----	67
	Equations de mouvement sous chargement q , P_x et P_y :-----	68
	- Cas d'une plaque en flexion : $q \neq 0$ et $P_x = P_y = 0$ -----	69
	- Cas d'une plaque en flambage : $q = 0$ et $P_x = \lambda_1 P_{cr}$ et $P_y = \lambda_2 P_{cr}$ -----	74
4	Résultats et interprétation :-----	76
	Conclusion-----	82

Conclusion Générale	83
Références Bibliographiques	85

Liste des Figures

Figure 1 : Évolution du nombre de passagers aériens au monde.	13
Figure 2 : Évolution de la proportion des matériaux composites utilisés dans la structure des avions.	14
<hr/>	
Figure I- 1 : Représentation schématique d'un matériau composite de type particule-matrice, fibres courtes-matrice et fibres continues matrice [1].....	17
Figure I- 2 : Matériaux composites [02]	18
Figure I- 3 : Chaîne et trame d'un tissu.	23
Figure I- 4 : Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus.	25
Figure I- 5 : Interface [7].....	27
Figure I- 6 : Principe du procédé de moulage au sac en autoclave de pré-imprégné.	30
Figure I- 7 : Principe du procédé LRI.	31
Figure I- 8 : Principe du procédé RTM.....	31
Figure I- 9 : Structure d'un composite stratifié.	33
Figure I- 10 : Désignation d'un stratifié [9].	33
Figure I- 11 : Composite sandwich.	34
<hr/>	
Figure II- 1 : Modélisation d'un tissu taffetas par un modèle à plis UD croisés équivalent	37
Figure II- 2 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.....	39
Figure II- 3 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.....	41
Figure II- 4 : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée (Figure adaptée de BERTHELOT (2010).	43
Figure II- 5 : présentation des n couches du stratifié	47
Figure II- 6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.....	48
<hr/>	
Figure III- 1 : pré-imprégné carbone-époxy.....	59
Figure III- 2 : géométrie des éprouvettes	60
Figure III- 3 : Fixation de l'extensomètre (déformation longitudinale) et de la jauge de	62
Figure III- 4 : Description du dispositif expérimental Eplexor [®] [Gabo, 2014].....	64
<hr/>	

Figure IV- 1 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel U en fonction de a/h	77
Figure IV- 2 : Variation du déplacement vertical adimensionnel w en fonction de a/h.....	77
Figure IV- 3 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{xx} en fonction de a/h.....	77
Figure IV- 4 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{yy} en fonction de a/h	78
Figure IV- 5 : Figure IV- 5 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{xy} en fonction de a/h	78
Figure IV- 6 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{xz} en fonction de a/h.....	78
Figure IV- 7 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{yz} en fonction de a/h.....	79
Figure IV- 8 : Variation du déplacement longitudinal non adimensionnel U en fonction de a/h	79
Figure IV- 9 : Figure IV- 9 : Variation du déplacement vertical non adimensionnel w en fonction de a/h.....	80
Figure IV- 10 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{xx} en fonction de a/h ...	80
Figure IV- 11 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{yy} en fonction de a/h ..	81
Figure IV- 12 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{xy} en fonction de a/h ..	81
Figure IV- 13 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{xz} en fonction de a/h....	82
Figure IV- 14 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{yz} en fonction de a/h... 82	

Liste des Tableaux

Tableau I- 1 :Caractéristiques mécaniques moyennes des résines TD polyesters,	19
Tableau I- 2 : Caractéristiques thermo-mécaniques moyennes de quelques résines TP [2]. .	20
Tableau I- 3 : caractéristiques mécaniques moyennes en traction de fibres seules (verreE, carbone, aramide)[4].....	26
<hr style="width: 20%; margin: 10px auto;"/>	
Tableau IV- 1 : Propriétés élastiques du matériau composite AS4-3502 [28].....	66

Liste des symboles

- [E_x]: module d'élasticité dans le sens chaîne.
[E_y]: module d'élasticité dans le sens trame.
[G_{xy}]: module de cisaillement.
[γ]: coefficient de Poisson.
[Q_{ij}]: matrice de rigidité réduite du stratifié
[Q_0]: matrice de rigidité réduite du pli à 0°
[Q_{90}]: matrice de rigidité réduite du pli à 90°
[h_0]: épaisseur du pli à 0°
[h_{90}]: épaisseur du pli à 90°
[E_T]: module de Young transversal
[E_L]: module de Young longitudinal
[V_m]: fraction volumique de la matrice
[E_m]: module de Young de la matrice
[V_f]: fraction volumique de la fibre
[E_f]: module de Young de la fibre
[ε_T]: déformation transversal
[ε_{Tm}]: déformation transversal de la matrice
[ε_{Tf}]: déformation transversal de la fibre
[ε_L]: déformation longitudinal
[γ_{LTm}]: coefficient de poisson longitudinal de la matrice
[γ_{LTf}]: coefficient de poisson longitudinal de la fibre
[γ_{LT}]: coefficient de poisson longitudinal
[G_{LT}]: module de giclement longitudinal
[G_m]: module de giclement de la matrice
 G_f : module de giclement de la fibre
[C]: matrice de rigidité
[S]: matrice de souplesse
[Q]: matrice de rigidité réduite
[\bar{c}]: Matrice de rigidité dans le repère global
[\bar{s}]: Matrice de souplesse dans le repère global
[T]: matrice de passage
[\bar{Q}]: Matrice de rigidité réduite dans le repère global
[Φ_x][Φ_y]: rotation dans le plan moyen
[u_0][v_0]: les déplacements membranaires de la feuille moyenne.
[w_0]: déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.
[σ_{ij}]: champs de contrainte
[ε_{ij}]: champs de déformation
[ε_m]: déformation en membrane
[ε_f]: déformation en flexion et torsion
[K_x], [K_y],[K_{xy}]: les courbures de la plaque en flexion.

[**k**] : indice de couche
[σ_k] : vecteur des contraintes dans la couche k
 \bar{Q}_k : matrice de rigidité réduite dans la couche k dans le repère global
[**Nx**], [**Ny**], [**Nxy**] : les résultantes en membranes
[**Mx**], [**My**], [**Mxy**] : les moments de flexion et torsion
[**A**] : matrice de membrane
[**B**] : matrice de couplage.
[**D**] : matrice de courbure.
[ρ] : masse volumique
[**q**] : charge transversal
[λ_1], [λ_2] : paramètres de flambage

Introduction Générale

Face à une croissance du trafic aérien supérieure à 4% par ans, comme le montre la **(Figure 1)**, et une communauté mondiale de plus en plus consciente de l'impact des gaz à effet de serre émis par les avions (dioxyde de carbone, oxydes d'azote) sur l'environnement, ajouté à une raréfaction des énergies fossiles, la réduction de l'émission des gaz à effet de serre dans les nouveaux avions et donc la réduction de la consommation du carburant devient l'un des principaux challenges de l'industrie aéronautique.

Ces nouvelles exigences environnementales rejoignent l'intérêt économique des acteurs à diminuer la consommation du carburant pour augmenter leur rentabilité, vu que le coût du carburant représente plus de 25% du coût d'exploitation d'un avion et que leur prix est fortement instable. Dans cette perspective les avionneurs ont visé des réductions conséquentes de la consommation du carburant et des émissions polluantes pour les futurs avions. Cet objectif ne peut être atteint qu'avec un travail simultané sur l'augmentation de l'efficacité énergétique des moteurs, l'amélioration de l'aérodynamisme des appareils et l'allègement de la structure des avions. Du fait que la durée de vie des nouveaux avions est entre 35 et 40 ans, une réduction de la masse de la structure d'un avion de 1 kg permet d'économiser des milliers de kg de carburant et d'éviter l'émission des tonnes de CO₂ dans l'atmosphère. Pour un seul vol de long-courrier l'allègement de la structure d'un avion d'une tonne permet d'économiser plus de 300 kg de carburant et d'éviter l'émission d'environ une tonne de CO₂. Grâce à leur légèreté, leur haute résistance et rigidité, ainsi qu'à leur bonne résistance à la corrosion et à la fatigue, les matériaux composites constituent une excellente alternative aux matériaux métalliques dans l'industrie aéronautique et aérospatiale.

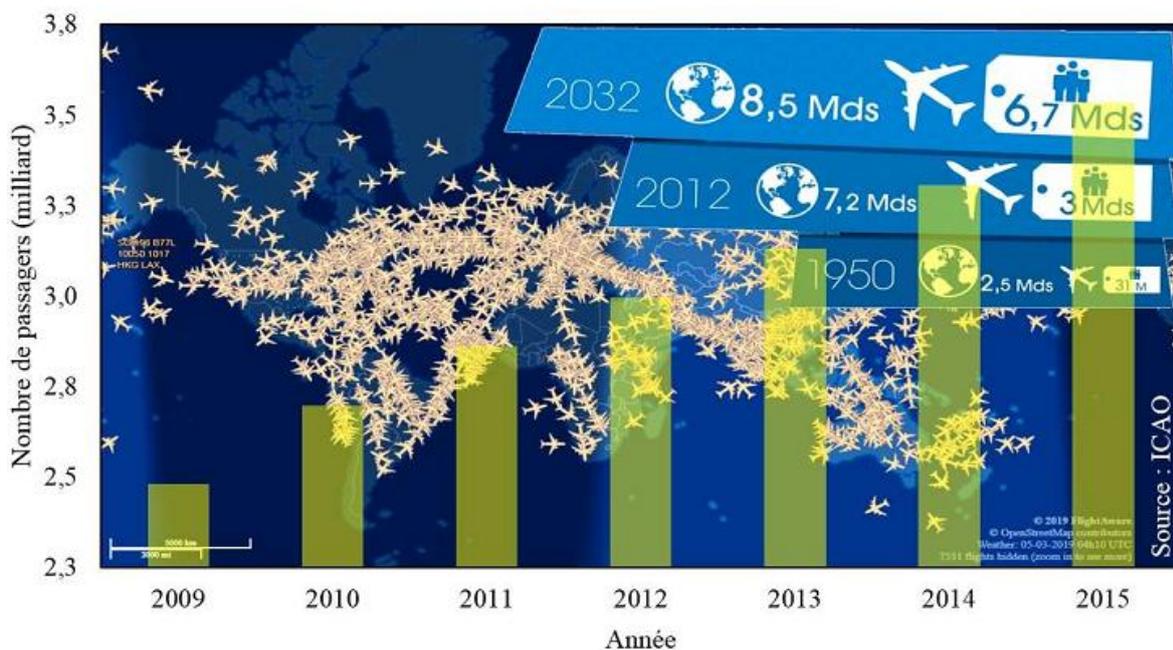


Figure 1 : Évolution du nombre de passagers aériens au monde.

Au cours de ces dernières années, la proportion des matériaux composites utilisés dans la structure des avions a dépassé les 50% et ne cesse de croître au fil du temps, comme l'illustre la **(Figure 2)**. Le remplacement des matériaux métalliques par les composites dans ce domaine n'est plus réservé aux structures secondaires, mais il a été étendu à certaines structures primaires, tel que le fuselage et les ailes de l'Airbus A350 et le Boeing 787. Ce progrès est considéré comme un grand pas vers l'objectif de construire un avion entier à base de fibres et de résines. Cependant, lors de ce passage, l'épaisseur des stratifiés composites utilisés dans ce domaine a énormément augmenté et soulevé plusieurs questions sur la fabrication, le comportement mécanique et l'endommagement de ces matériaux qui sont peu étudiés dans la littérature. L'industrie a déjà fait de grands progrès dans ce sens, néanmoins l'état de l'art non académique est inaccessible.

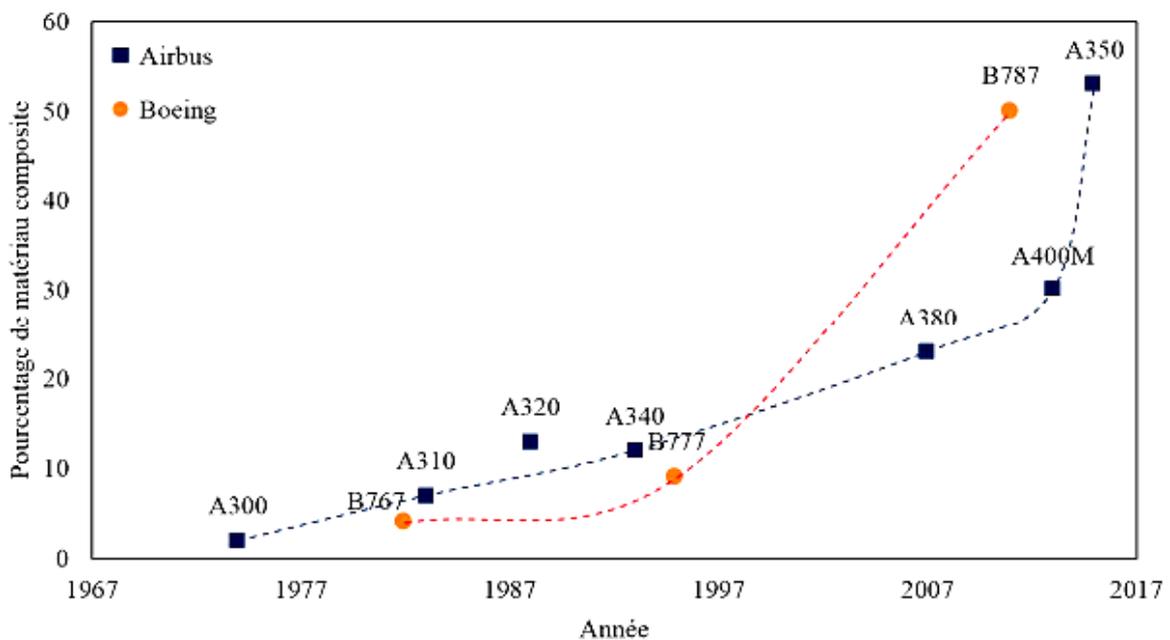


Figure 2 : Évolution de la proportion des matériaux composites utilisés dans la structure des avions.

Les composites permettent la réalisation de pièces légères, présentant des caractères d'anti corrosion et d'isolation thermique et électrique. Cependant les matériaux composites de par leur fragilités sont très sensibles à certaines efforts dynamiques notamment les efforts d'impacts qui sont présents que ce soit en service ou en fonctionnement. Contrairement aux matériaux métalliques les fissures provenant de ces efforts sont partiellement invisibles. Le développement de méthodes non destructives pour la détection de ces défauts s'avère très important

En effet, parmi les difficultés associées à l'usage des matériaux composites, la mesure des propriétés mécaniques (modules élastiques et résistances ultimes dans toutes les directions) est certainement la plus fondamentale. Ces données sont employées aussi bien dans les

calculs d'éléments finis que dans les critères de rupture. Plus spécifiquement, la mesure des propriétés mécaniques en tension dans le sens des fibres est souvent la donnée sur laquelle le designer détermine l'épaisseur d'une pièce. En effet, les pièces fabriquées de matériaux composites sont souvent élaborées de manière à ce que les fibres soient orientées selon les directions les plus sollicitées. Par conséquent, les méthodes permettant la mesure de ces propriétés doivent être les plus justes et fidèles possible pour permettre un design efficace.

Comprendre les phénomènes liés à l'endommagement et pouvoir identifier les mécanismes du comportement mécanique des fibres de carbone liés à la résine époxy sont essentiels pour la conception et le développement des structures composites multifonctionnelles soumises aux différents types de sollicitation et cela pendant toute leur durée de vie.

Dans ce contexte, ce travail consiste à caractériser les matériaux élaborés mécaniquement à travers des tests normalisés (traction, AMD, flexion,) de déduire les propriétés mécaniques.

Notre travail est divisé en quatre chapitres :

D'abord, **le premier chapitre** est une description des matériaux composites, leur constitution et architecture, ses avantages, ses inconvénients ainsi que leur différentes classifications.

Ensuite, nous sommes intéressés essentiellement dans **le deuxième chapitre** à présenter les différentes approches proposées pour analyser des comportements mécaniques des plaques stratifiées.

Le troisième chapitre est consacré à l'explication du déroulement de notre stage au sein de l'établissement.

Le **quatrième chapitre** comportera une analyse numérique du comportement des plaques stratifiées.

CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux composites

1 Introduction

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, etc. Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique)

L'impotence économique des matériaux composites est actuellement manifeste, et toutes les prévisions portent à croire que cette impotence va aller en croissant dans l'avenir proche. Une grande diversité de fabrication est touchée, elle va des automobiles et équipement sportifs aux applications aéronautique et spatial.

2 Matériaux composites

Les composites sont des matériaux hétérogènes et généralement anisotropes constitués de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et donne lieu à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Les matériaux composites sont généralement constitués d'une ou plusieurs phases discontinues appelées renforts répartis dans une phase continue appelée matrice. Les propriétés d'un matériau composite ne dépendent que des propriétés de ses composants (matrice et renfort), mais elles dépendent aussi de plusieurs autres paramètres, tels que la distribution géométrique des renforts, le procédé de fabrication et la qualité de l'interface qui assure le transfert des contraintes entre le renfort et la matrice.

Ces matériaux possèdent des propriétés mécaniques équivalentes, voire supérieures à celles de matériaux classiques, une faible masse volumique et une bonne résistance à la corrosion et à la fatigue. Les matériaux composites ont une grande variété de domaines d'application (aéronautique, maritime, automobile, ferroviaire, sport, etc.), cette dernière provient non seulement de leurs caractéristiques citées précédemment, mais aussi du nombre quasi illimité de combinaisons possibles entre renforts et matrices. [1]

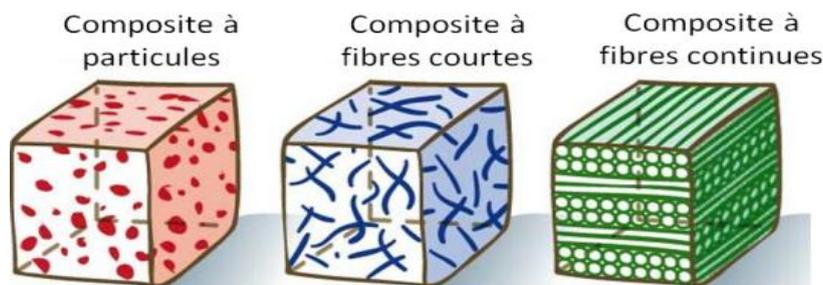


Figure I- 1 : Représentation schématique d'un matériau composite de type particule-matrice, fibres courtes-matrice et fibres continues matrice [1]

Schématiquement, les propriétés des matériaux composites dépendent :

- Des propriétés des constituants élémentaires.
- De la distribution géométrique des renforts ; par exemple s'ils sont constitués de fibres, de leur orientation.
- Des interactions éventuelles entre les constituants : qualité de l'adhésion entre la matrice et les renforts.

2.1 Constituants d'un matériau composite :

Les matériaux composites sont constitués principalement :

- D'une matrice à laquelle sont ajoutés, dans certains composites des charges.
- D'un renfort.
- D'une interface.

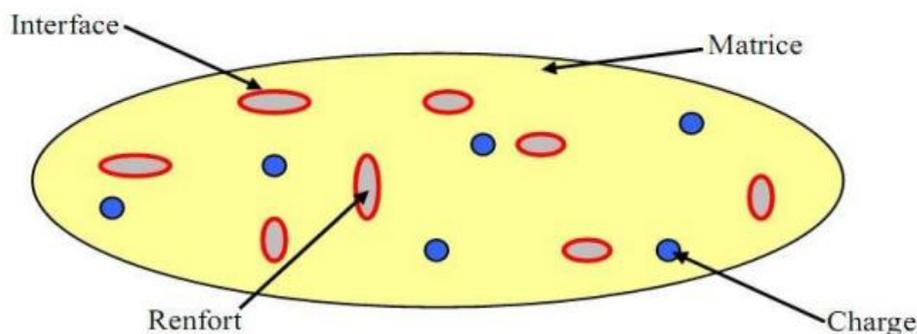


Figure I- 2 : Matériaux composites [02]

2.1.1 Matrice

La matrice a pour rôle de lier les renforts entre eux, transférer les charges mécaniques aux renforts, protéger les renforts de l'environnement extérieur et donner la forme désirée au produit final. Il existe plusieurs types de matrices qui peuvent être regroupées en quatre grandes catégories :

2.1.1.1 Matrices thermodurcissables :

Les Matrices thermodurcissables (polyester, vinylester, époxyde, phénolique, etc.) sont les plus utilisées dans l'industrie, elles possèdent la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide. Ces matrices détiennent des propriétés thermomécaniques et d'adhésion avec le renfort supérieures à celles des matrices thermoplastiques, notamment celles des matrices époxy qui sont les plus utilisées pour les applications

aéronautiques. Cependant, les matrices thermodurcissables ne sont pas recyclables et possèdent une faible résistance à l'impact, et leur polymérisation nécessite un laps de temps très long.

Mise en œuvre

Dans l'industrie composite les principaux procédés de mise en forme des résines TD sont : le moulage par injection basse pression de résine liquide (procédé RTM : Resin Transfer Molding), le moulage au contact, la pultrusion, l'enroulement filamentaire ou encore l'infusion. Le procédé RTM est la technique la plus courante pour réaliser des pièces de structures en série de bonne qualité. Il consiste à remplir l'empreinte d'un moule rigide et fermé par injection de résine en un ou plusieurs points. Outre sa productivité importante le procédé RTM donne une grande flexibilité aux industriels de part sa souplesse de mise en œuvre et sa facilité de réglage des paramètres procédés (temps de cycle, forme des pièces, positions d'injection, taux de renforts...).

	Résines polyester	Résines époxydes	Résines vinylesters
Masse volumique (Kg/m ³)	1200	1100 à 1500	1200
Module d'élasticité en traction (GPa)	2.8 à 3.5	3 à 5	3.4 à 3.5
Module d'élasticité en flexion (GPa)	3 à 4.5		3.1 à 3.8
Contrainte à la rupture en traction (MPa)	50 à 80	60 à 80	70 à 85
Contrainte à la rupture en flexion (MPa)	90 à 130	100 à 150	115 à 140
Allongement à la rupture en traction (%)	2 à 5	2 à 5	2.5
Résistance au cisaillement (MPa)	10 à 20	30 à 50	
Température de fléchissement sous charge à 1.8 MPa (°C)	60 à 100	290	100 à 140

Tableau I- 1 : Caractéristiques mécaniques moyennes des résines TD polyesters

2.1.1.2 Matrices thermoplastiques :

Elles sont constituées d'un ensemble de macromolécules longues, linéaires ou ramifiées et enchevêtrées entre elles. Les résines TP sont mises en forme à l'état liquide à une température supérieure à leur température de transition vitreuse (Tg) pour les polymères amorphes (exemple : le Polyétherimide) ou à leur température de fusion (Tf) pour les polymères semi-cristallins (exemple : le polyamide). Elles sont susceptibles d'être ramollies par chauffage ou durcies par refroidissement, et cela de manière répétée. Comme cela a été évoqué précédemment, les résines thermoplastiques sont de plus en plus fréquemment employées dans l'industrie composite : actuellement le développement de matériaux à matrice TP est deux fois supérieur à celui basé sur des matrices TD. On classe généralement en trois catégories distinctes, les résines TP entrant dans la fabrication de composites :

- Les polymères dits de “grande diffusion”, dont les propriétés mécaniques sont plus faibles mais bénéficient d'un coût compatible avec une production en grande série.
- Les polymères dits “d’utilisation technique”, dont les propriétés mécaniques sont supérieures aux polymères de grande diffusion et qui sont utilisés pour des objets industriels courants comme les pièces de structures.
- Les polymères dits de “hautes performances”, présentant des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un coût unitaire important.

Propriétés des résines TP

Ces résines présentent des atouts indéniables: une meilleure ténacité, des cycles de traitement plus rapides et surtout une meilleure recyclabilité. La récupération s’effectue simplement en refondant le matériau et en le remoulant [3], [4]. Néanmoins des carences subsistent toujours vis-à-vis des résines TD comme : une tenue à la température limitée, une résistance aux agressions chimiques faible ou encore un vieillissement mal connu et plus rapide. Le tableau I-2 présente les propriétés mécaniques de certaines résines TP. A titre comparatif nous avons ajouté les propriétés mécaniques du polyméthacrylate de méthyle (PMMA) qui est une résine acrylique de nature chimique proche de celle utilisée dans le projet « résine idéale ». Les résines acryliques possèdent des propriétés thermo-mécaniques supérieures aux polymères de grande diffusion (GD) mais une tenue en température moindre que celle des polymères haute performance (environ 60-100°C).

	Matrices TP	Masse volumique (Kg/m ³)	Contrainte à la rupture (traction) (MPa)	Module d'élasticité longitudinale (MPa)	Température de fléchissement sous charge (°C)
<i>Polymère GD</i>	Polypropylène	900	30	1200	50-60
<i>Polymère technique</i>	<i>Polyamide</i>	1100	65	4000	65-100
	PMMA	1180	65	3100	95
	<i>Polycarbonate</i>	1200	63	2430	145
<i>Polymère haute performance</i>	PEEK	1300	90	4000	150-160
	PPS	1300	65	4000	>260
	Polyetherimide	1150	105	3300	200
	PEI				

Tableau I- 2 : Caractéristiques thermo-mécaniques moyennes de quelques résines TP [5].

Mise en œuvre

Les composites à résine TP sont généralement mis en forme par des techniques analogues aux composites à base de thermodurcissables (enroulement filamentaire, pultrusion) ou par des techniques analogues à la mise en œuvre de polymères TP comme le

thermoformage. Toutefois pour les matériaux à résine acrylique, les récentes avancées techniques ont permis de produire des pièces de structure par le procédé RTM [6].

2.1.1.3 Matrices thermostables :

Les matrices thermostables (bismaléimide, polyimide, polyétheréthercétone, polysulfure de phénylène, etc.) sont développées principalement dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatiale. Ces dernières présentent de bonnes propriétés mécaniques pour des températures qui dépassent les 200°C. Néanmoins, ces matrices sont fragiles et leur prix est très élevé.

2.1.1.4 Matrices métalliques et céramiques :

Les matrices métalliques (alliages d'aluminium, alliages de titane, etc.) sont utilisées pour des applications de hautes températures (entre 300 °C et 500 °C). Ces dernières permettent d'associer les bonnes propriétés thermomécaniques et la ductilité des métaux aux matériaux composites. Cependant, la densité de ce type de matrice est plus élevée que celle des résines et le coût de fabrication des composites à matrice métallique est très élevé. Du fait de leur caractère réfractaire, les matrices céramiques sont réservées aux applications de très haute température (freinage, spatial, nucléaire), elles sont principalement utilisées dans la fabrication des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures. Cependant, ces matrices ont une très faible résistance à la rupture en traction.

2.1.2 Renforts

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées, et constituent une fraction volumique du matériau composite généralement comprise entre 0,3 et 0,7.

Les renforts peuvent être d'origines diverses:

- Végétale: bois, coton, jute, lin, sisal.
- Minérale: alumine, amiante, mica.
- Synthétique: polyester, polyamide.
- Artificielle: bore, carbone, acier, tungstène.

Diverses formes de renforts :**A) Formes linéiques :**

Dans ces matériaux, les fibres sont toutes alignées dans une même direction. Ils présentent d'excellentes propriétés mécaniques dans la direction des fibres. Cette structure trop anisotrope, présente peu d'intérêt pratique [7].

B) Formes surfaciques :

Les fils peuvent être utilisés pour réaliser des formes surfaciques de divers types : mats, tissus ou rubans, essentiellement développés dans le cas de fibres de verre.

• Les mats

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan. La différence entre les mats à fils coupés et les mats à fils continus se situe essentiellement au niveau de leur propriété de déformabilité. Les premiers sont peu déformables alors que les seconds permettent d'obtenir des "emboutis" profonds par un allongement régulier du mat dans toutes les directions.

• Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, de mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. Il est constitué (**Figure I- 3**) :

— d'une chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.

— d'une trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

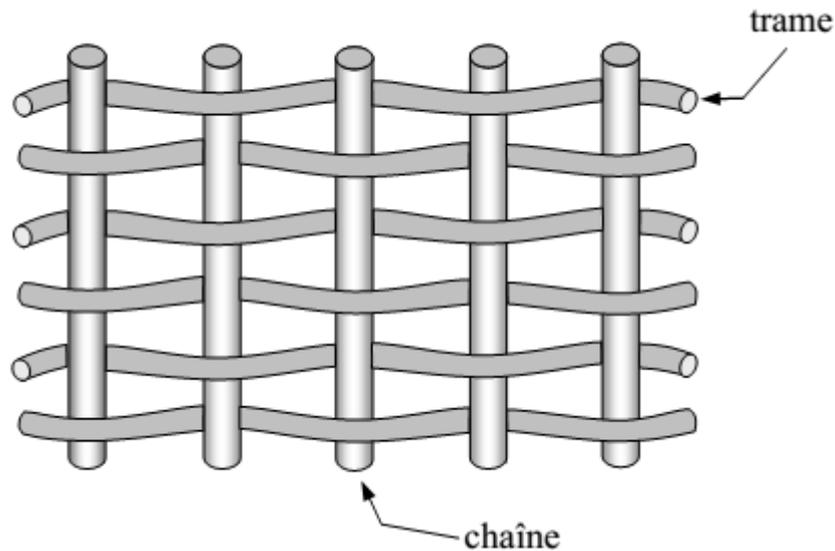


Figure I- 3 : Chaîne et trame d'un tissu.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés (fils simples, mèches, etc.), donc par la masse linéique des fils, et par le mode d'entrecroisement (ou *armure*) des fils de chaîne et des fils de trame. La (**Figure I- 4**) illustre les armures classiques utilisées : toile ou taffetas, sergé, satin, armure croisée, armure unidirectionnelle.

Taffetas

Dans l'armure taffetas (**Figure I-4**), les fils de chaîne et de trame s'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable. Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame (pour des fils de tissage identiques). Toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites.

Sergé

Pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé 2×1 , les fils trame passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes, et dans un sergé 2×2 , les fils trame passent sur deux fils chaîne et sous deux fils chaîne. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu sous forme de nervures diagonales. L'armure sergée offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé permet ainsi un glissement entre les fils chaîne et trame et s'adapte bien à des moulages de formes complexes.

Satin

L'armure satin est assez semblable à celle du sergé, mais le nombre de fils chaîne et de fils trame qui passent les uns sur les autres avant de s'entrecroiser est plus élevé. Chaque tissu satin est caractérisé par un nombre, usuellement 4 ou 8, indiquant que les fils chaîne passent sur 4 ou 8 fils trame. Il en résulte un tissu avec une face qui contient plus de fils chaîne et une autre face plus de fils trame. L'armure satin est bien adaptée au moulage de formes complexes.

Tissu croisé sans entrecroisement

Dans un tissu croisé, deux nappes de fils sont superposées sans entrecroisement des fils, et réunies par une chaîne et une trame de fils fins, n'intervenant pratiquement pas sur les performances mécaniques du tissu. L'absence d'entrecroisement supprime les effets de cisaillement et donne un tissu très performant mais coûteux.

Tissu à armure unidirectionnelle

Dans un tissu unidirectionnel, les fils sont alignés parallèlement à la direction chaîne, et ils sont réunis par un fil fin dans la direction trame. Ainsi, le tissu est unidirectionnel avec des performances élevées dans la direction chaîne. Les performances mécaniques des divers tissus dépendent :

- du type de fils constituant le tissu : nature (verre, carbone, etc.), fils avec ou sans torsion, etc.
- de l'armure. Les armures unidirectionnelles et haut module donnent les meilleures performances. L'armure satin et, à un degré moindre, le sergé ont des performances supérieures à celles de l'armure toile.
- de la contexture, par le taux de renfort global et selon chacune des directions chaîne et trame du tissu.

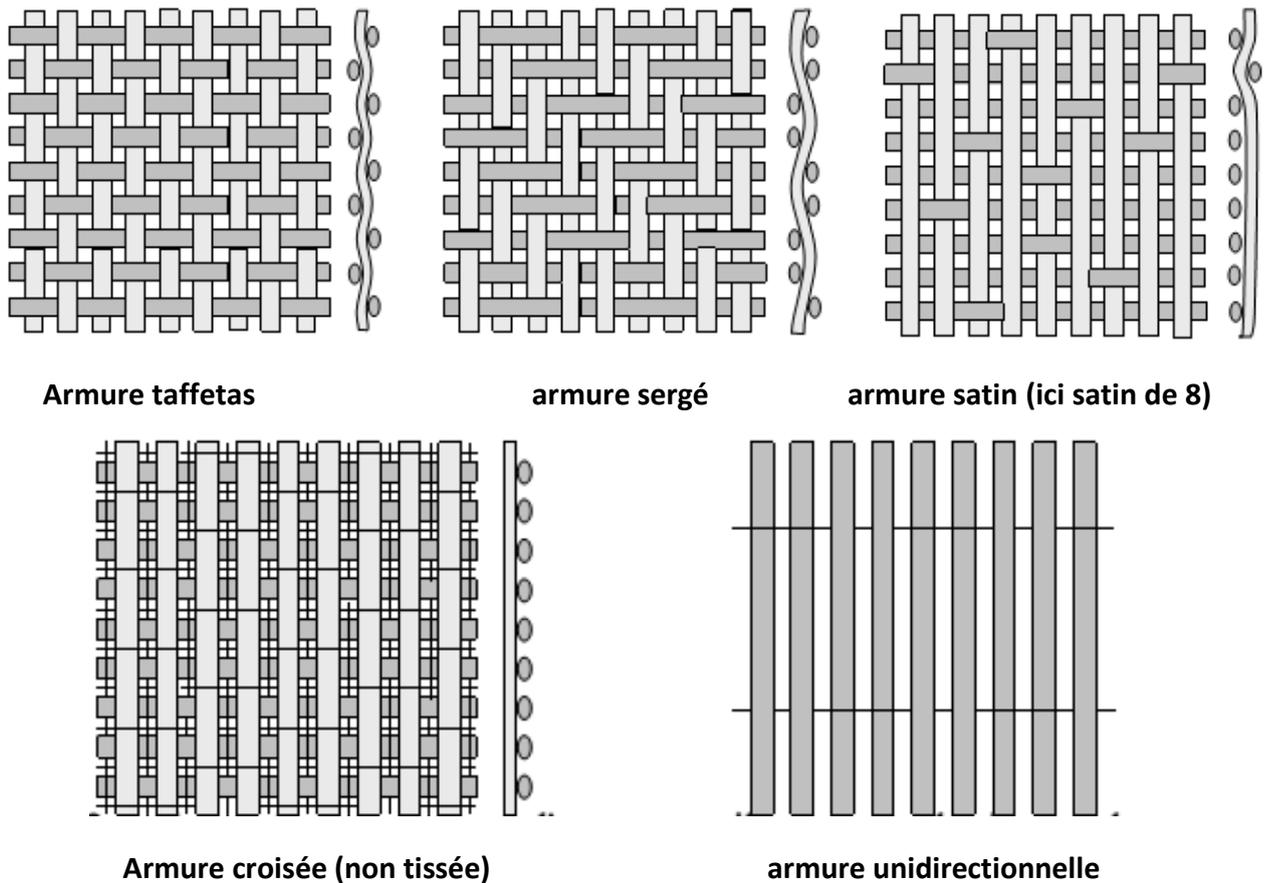


Figure I- 4 : Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus.

2.1.2.1 Principales fibres :

a) Fibres de carbone :

Les fibres de carbone sont produites par pyrolyse de fibre précurseur qui est généralement élaborées à partir de polyacrylonitrile, de la rayonne ou de brai. Le diamètre de ces fibres est de 5 à 10 μm . Les fibres de carbone présentent d'excellentes caractéristiques spécifiques et mécaniques, et elles sont principalement utilisées avec des matrices thermodurcissables dans les structures composites fortement sollicitées. Cependant, le coût de fabrication de ces fibres est élevé et leur résistance aux chocs et à l'abrasion est limitée.

b) Fibres de verre :

Les fibres de verre sont fabriquées à partir d'un verre filable (composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc.) fusionné et extrudé à travers des filières de 3 à 25 μm . On distingue différents types de fibre de verre de propriétés différentes selon la composition du mélange de préparation : verre E ou D (bonnes propriétés diélectriques), verre C (haute résistance chimique), verre R ou S (haut module d'élasticité). Ces fibres présentent une haute sensibilité aux endommagements superficiels et une faible rigidité par rapport aux autres renforts. Cependant, grâce à leur excellent rapport qualité/prix et leur faible masse

volumique, les fibres de verre sont le renfort le plus utilisé actuellement dans les matériaux composites.

c) Fibres d'aramide :

Les fibres d'aramide, qui sont plus connues sous leurs noms commerciaux (Kevlar, Nomex, Twaron, etc.) sont produites par polymérisation de polyamides. Ces fibres sont les moins denses et les plus résistantes à l'impact. Elles sont utilisées pour des applications bien ciblées, telles que la protection balistique (blindage) et la fabrication des réservoirs souples de carburant. Cependant, leur résistance en compression est très faible et leur reprise d'humidité est importante.

	Verre-E	Carbone	Aramide
Résistance à la traction (GPa)	3,8	5.5	3.0
Module d'élasticité en traction (GPa)	72	294	112
Elongation à la rupture (%)	4.9	1.9	2.4

Tableau I- 3 : caractéristiques mécaniques moyennes en traction de fibres seules (verre, carbone, aramide) [7].

d) Fibres céramiques :

Les fibres céramiques sont généralement élaborées par le dépôt chimique en phase vapeur d'un matériau réfractaire ou céramique (carbures, borures, nitrures, etc.) sur un fil support (tungstène ou carbone). Ces fibres sont principalement utilisées avec des matrices métalliques ou des matrices céramiques et présentent une bonne stabilité des propriétés à des températures pouvant aller de 500 à 1600°C. Du fait de leur coût de fabrication très élevé, l'utilisation de ces fibres est limitée.

e) Fibres végétales :

Les fibres végétales (lin, chanvre, coton, palmier, coco, bois, sisal, etc.) sont des structures biologiques assimilables à un matériau composite (une matrice principalement composée d'hémicellulose et de lignine renforcée par des fibrilles de cellulose). Ces fibres présentent une variabilité naturelle de formes et de propriétés. Leurs propriétés mécaniques sont faibles et peuvent au maximum atteindre celles des fibres de verre. Cependant, grâce à leur faible densité et leur biodégradabilité ces fibres sont de plus en plus utilisées dans divers domaines de l'industrie pour des applications présentant un fort aspect écologique.

Les autres fibres

Généralement ces fibres sont utilisées pour des applications spécifiques (papiers spéciaux, pour une bonne conductivité électrique...). Elles possèdent des modules d'élasticité très faibles comparés aux autres fibres. Ces fibres sont appréciées à cause de leur

prix de revient assez bas pour la plupart d'entre elles et la haute capacité d'isolation thermique pour certaines d'entre elles. Parmi ces autres types, On peut citer :

- les fibres d'origine minérale (amiante, silice).
- les fibres synthétiques (tergal, dacron, etc.) issus des polyesters, de polypropylène ou de polyéthylène
- les fibres métalliques (acier, cuivre, aluminium) qui sont utilisées souvent avec des matrices métalliques.

2.1.3 L'interface:

L'utilisation d'une couche interface permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Qui se forme spontanément lorsque deux phase sont mises en présence l'un de l'autre au moment de l'élaboration du matériau et qui se maintient entre ces deux phases pendant toute la vie du matériau, l'interface n'est pas simplement une simple discontinuité entre les deux phases du matériau hétérogène ou leur juxtaposition [8].

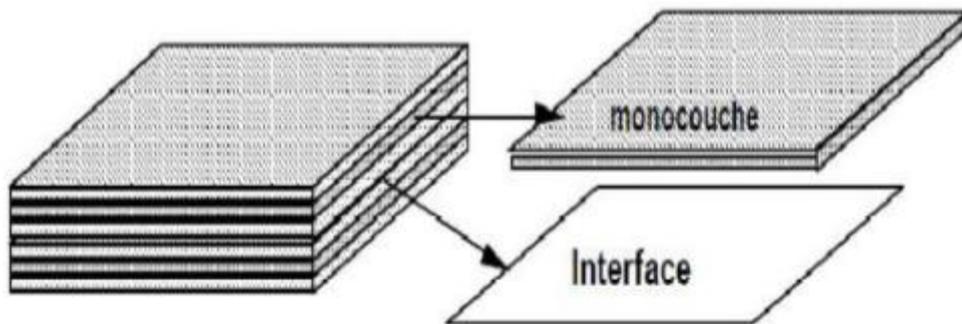


Figure I- 5 : Interface [9].

2.2 Charges et additifs

Les charges et les additifs sont généralement des produits d'origine naturelle, synthétique ou minérale, qui peuvent être incorporés aux résines afin d'améliorer leurs propriétés mécaniques et physiques, de faciliter leur mise en œuvre, ou bien de réduire leur prix de revient.

3 Type des matériaux composites :

3.1 Matériaux composites unidirectionnels :

Si l'angle entre deux couches consécutives est nul, c.à.d. toutes les fibres sont alignées selon une seule direction.

C'est la configuration de base des matériaux composites à fibres, ils sont constitués de fibres parallèles disposés dans une matrice pour une approximation la cellule élémentaire d'un tel matériau.

3.2 Matériaux composites bidirectionnels :

C'est un composite orthotrope, ou les stratifiés sont constitués de couche de matériaux dont le renfort est à base de tissus. Ces derniers sont généralement constitués de fils unidirectionnels croisés à 90° : l'un dans le sens chaîne, l'autre dans le sens trame. Ces couches possèdent trois plans de symétrie, les directions principales L et T seront prises respectivement suivant la direction chaîne et la direction trame. La direction T' est orthogonale au plan.

3.3 Matériaux composites multidirectionnels :

Si les couches successives sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que 0° . À titre d'exemple, les stratifiés à 8 plis le multidirectionnel suivant $[0/+45/-45/90/90/+45/-45/0]$.

Cette forme structurale permet d'avoir un tissu multidirectionnel qui permet de créer des formes complexes non développables qui donne par suite des pièces présentant de très hautes caractéristiques mécaniques et thermiques.

4 Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

4.1 Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres. [7]

4.1.1 Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, etc. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- la nature des constituants.
- la proportion des constituants.
- l'orientation des fibres.

4.1.2 Composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

4.2 Classification suivant la nature des constituants :

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, on peut citer [10-11]:

4.2.1 Composites à matrice organique (résine, charge), avec :

- Des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc.
- Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

4.2.2 Composites à matrice métallique (alliages légers et ultra- légers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- Des fibres minérales : carbone, carbures de silicium (SiC).
- Des fibres métalliques : bore.
- Des fibres métal- minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

4.2.3 Composites à matrice minérale (céramique), avec :

- Des fibres métalliques : bore
- Des particules métalliques : cermets,
- Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrice métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

5 Procédés de mise en œuvre des composites

Il existe de nombreux procédés de mise en œuvre des matériaux composites, dans cette partie on se limitera aux procédés qui nous permettent d'obtenir des composites à matrice thermodurcissable de qualités aéronautiques. La majorité des procédés de mise en œuvre de ces composites comprennent les principales étapes suivantes : L'imprégnation du renfort par la résine, le compactage pour l'enlèvement des bulles d'air et l'augmentation du taux de fibres, et l'échauffement du mélange (cuisson) pour le déclenchement de la polymérisation de la résine. Parmi les procédés les plus utilisés en aéronautique, on peut citer :

5.1 Le moulage au sac de pré imprégné :

Dans ce procédé les plis sont antérieurement imprégnés avec un pourcentage bien déterminé de résine. Le drapage de ces plis se fait sur un moule en donnant les directions des fibres à chaque pli afin d'obtenir les propriétés mécaniques désirées. Ensuite, à l'aide d'une pompe à vide et d'une bâche, un vide relatif est obtenu permettant de réaliser le compactage (**Figure I-6**). Finalement, la consolidation est effectuée en autoclave en contrôlant la température et la pression de la pièce.

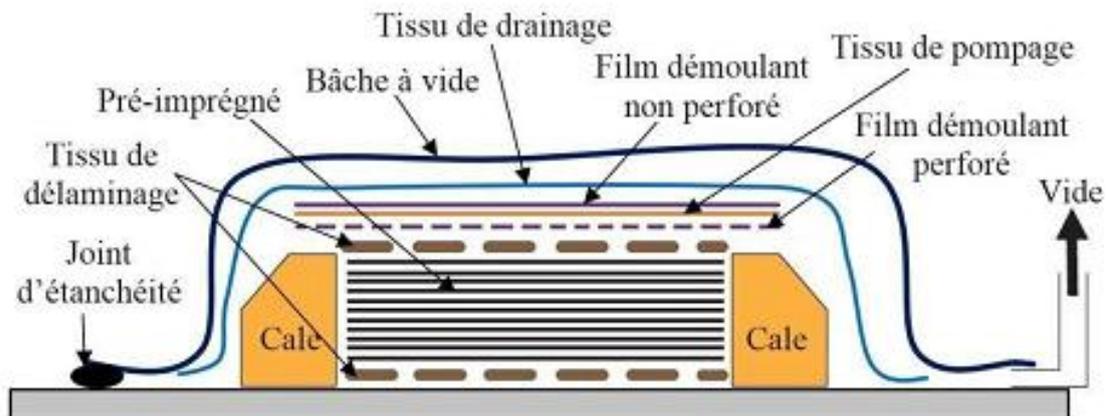


Figure I- 6 : Principe du procédé de moulage au sac en autoclave de pré-imprégné.

5.2 L'infusion de résine liquide (Liquid Resin Infusion – LRI) :

Ce procédé consiste à disposer les plis de renfort secs selon la séquence d'empilement ou la disposition souhaitée entre un moule rigide et une bâche à vide et d'injecter la résine par

dépression au moyen d'une pompe à vide. Une fois que les plis sont complètement imprégnés, la consolidation est ensuite effectuée en étuve.

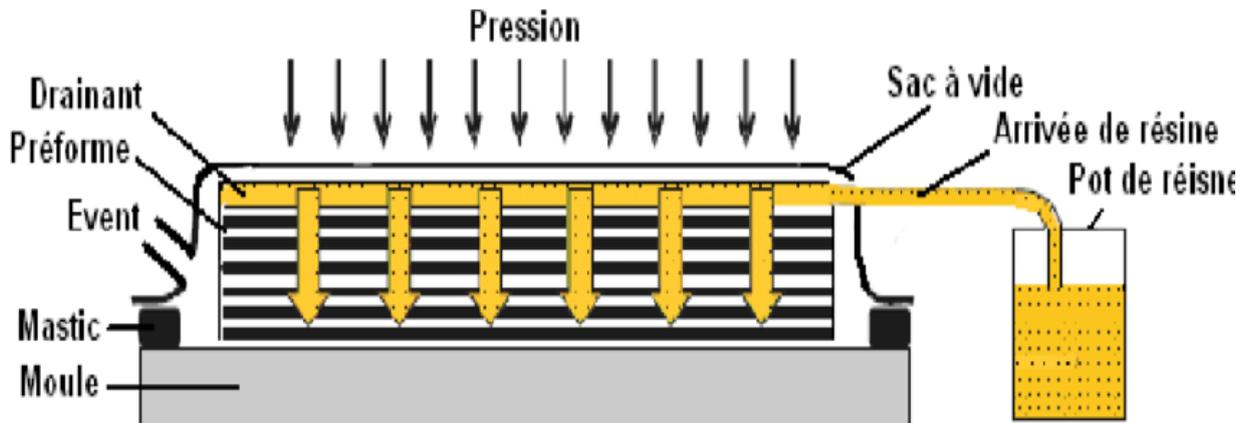


Figure I- 7 : Principe du procédé LRI.

5.3 L'injection de résine sous pression (Resin Transfer Moulding – RTM) :

Ce procédé consiste à placer la préforme fibreuse entre un moule et un contre-moule rigides chauffant et à injecter la matrice qui doit avoir une faible viscosité afin de faciliter l'écoulement de celle-ci au sein de la préforme (*Figure. I- 8*). La principale différence entre le procédé LRI et le RTM est l'utilisation d'un contre-moule rigide dans ce dernier afin de résister aux pressions mises en jeu (généralement 3 bars). Il existe de nombreux procédés dérivés de ce procédé, tels que le VA-RTM (Vacuum Assisted RTM) et le RTM light .

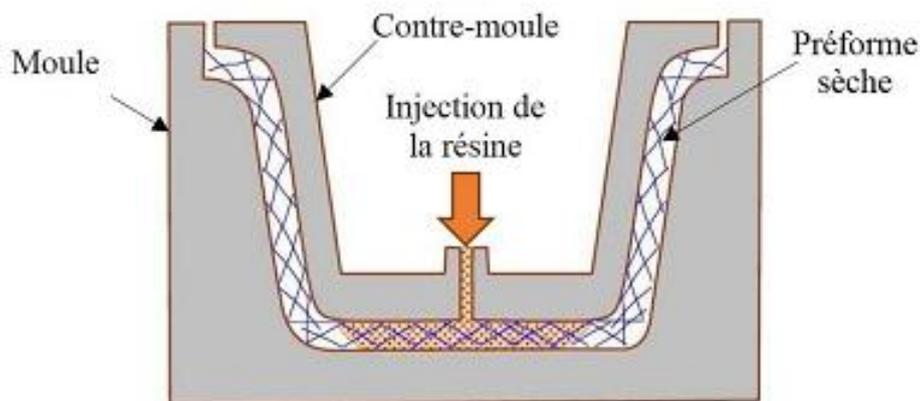


Figure I-8 : Principe du procédé RTM.

5.4 L'infusion par film de résine (Resin Film Infusion RFI) :

Ce procédé consiste à disposer les plis de renfort secs selon la séquence d'empilement ou la disposition souhaitée au-dessus d'un film de résine préalablement déposé dans un

moule. Ensuite, une bâche est apposée sur le moule et un vide relatif est créé à l'aide d'une pompe à vide. Finalement, l'imprégnation du renfort par la résine est effectuée en autoclave en contrôlant la température et la pression de la pièce.

6 Architecture des matériaux composites

L'objet de ce paragraphe est de dégager l'architecture générale des matériaux composites.

6.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

6.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (**Figure I- 10**). Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

- **Équilibré** : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+ \Theta$ que de couche orientées suivant la direction $-\Theta$
- **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- **Antisymétrique** : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
- **Croisé** : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
- **Hybride** : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

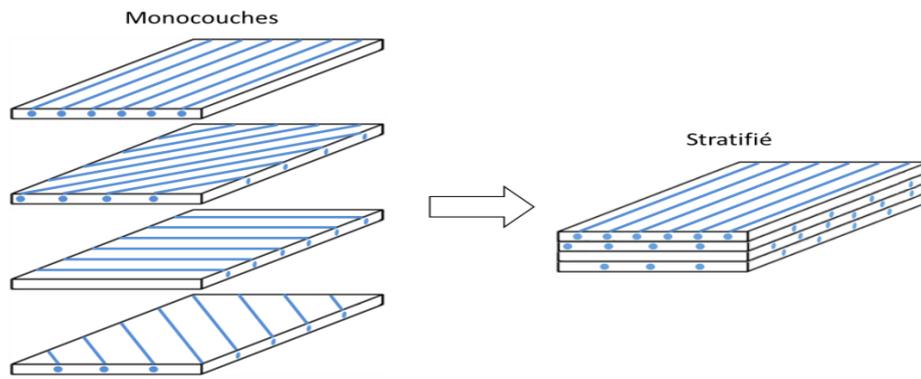


Figure I- 9 : Structure d'un composite stratifié.

• Désignation des structures stratifiées

Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type $(90^\circ, 0^\circ) 2s$ est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à 90° et 0° , puis par symétrie de deux groupes de plis à 0° et 90° . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

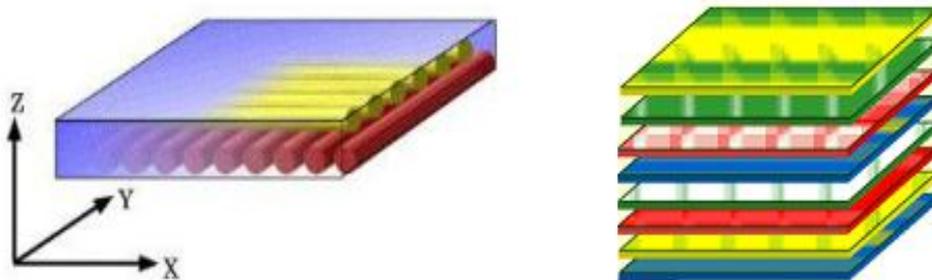


Figure I- 10 : Désignation d'un stratifié [12].

6.3 Sandwich

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (**Figure I- 11**). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique [13].



Figure I- 11 : Composite sandwich.

7 Avantages et inconvénients des matériaux composites

7.1 Avantage:

L'usage des matériaux composites ne cesse de croître dans différents domaines : automobile, naval, pétrolier, aéronautique et aérospatial. Grâce à ces matériaux présentent de nombreux avantages telle que :

- Gain de masse.
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques).
- Grande résistance à la fatigue.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone).
- Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole, etc. [14].

7.2 Inconvénients :

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température;
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes;
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches [14]

Ce chapitre constitue des généralités sur les composites, nous ne sommes pas étalés sur ce point vue que notre but été de donner uniquement une introduction et des définitions sur les composites dont nous avons besoin dans ce qui suit.

CHAPITRE II

Comportement Mécanique Des Plaques Stratifiées

1 Introduction :

Le choix d'un renfort et d'une matrice pour la fabrication d'une structure en matériau composite procède d'une analyse technico-économique complète. Dans certains cas, un renfort textile (tissus, satin, etc.) s'impose pour obtenir une bonne résistance à l'impact et au flambement, ou parce qu'il procure des propriétés plus équilibrées que les renforts unidirectionnels.

Par ailleurs, la manipulation des renforts textiles est plus facile, grâce au maintien des fibres par le tissage et à une plus grande drapabilité. Ce sont donc les renforts de choix pour la fabrication de panneaux et de structures de grandes dimensions (carters de protection, de têtes de puits en fond de mer, cellules de vie sur plateforme) ou de pièces dont la forme est complexe (raccords et jonctions de tubes). Ces avantages sont au prix d'une rigidité et d'une résistance à la rupture plus faibles en raison de l'ondulation des fils, et d'un coût plus élevé qu'un ruban unidirectionnel [15].

Les principaux paramètres relatifs à la caractérisation d'un tissu sont :

- Le type de l'armure (unidirectionnel, toile, satin, sergé, etc.),
- La nature des fils de chaîne et de trame : verre, carbone, kevlar, stratifié, etc.,
- Le titre des fils exprimé en tex (masse par unité de longueur),
- Le nombre de fils de chaîne et de trame par unité de longueur et largeur du tissu,
- La masse surfacique : masse du tissu par mètre carré,
- Etc.

Le comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysé par la théorie des plaques stratifiées, prenant en compte le cisaillement transverse qui est basé sur une évaluation des champs des déplacements qui considère qu'une normale au plan moyen d'un stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. Cette déformée ne restant toutefois pas normale à la déformée du plan moyen.

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant *la théorie classique des stratifiés* pour exprimer les résultantes N_{ij} et les moments M_{ij} en fonction des déplacements de la plaque, lorsque cette dernière est constituée d'un matériau composite stratifié.

2 Modélisation du comportement mécanique d'un stratifié à renfort tissu :

Le comportement mécanique d'un stratifié à renfort tissu peut être obtenu en appliquant la théorie classique des stratifiés. La matrice rigidité d'une couche dépend de quatre constantes :

E_x : module d'élasticité dans le sens chaîne.

E_y : module d'élasticité dans le sens trame.

G_{xy} : module de cisaillement.

ν_{xy} : coefficient de Poisson.

La façon la plus simple de modéliser le comportement mécanique d'une couche «Tissu» est de considérer cette couche comme constituée de deux couches unidirectionnelles respectivement orientées selon la chaîne et la trame (**Figure II-1**) [7]. La hauteur relative de ces deux couches correspond à la proportion de fibre dans chacune des deux directions. La fraction volumique de fibre est considérée comme uniforme. Les constantes élastiques des couches UD peuvent être calculées à partir des modèles micromécaniques présentés dans les paragraphes par la suite. Une matrice rigidité (Q_{ij} où $i,j=1,2,6$) équivalent aux deux couches est alors obtenue dans le cadre de la théorie des stratifié :

$$Q_{ij} = (h_{ij}^0 Q^0 + h_{ij}^{90} Q^{90}) (1 / (h^0 + h^{90})) \quad (\text{II.1})$$

Avec :

- Q_{ij} : matrice de rigidité réduite du stratifié
- Q^0 : matrice de rigidité réduite du pli à 0°
- Q^{90} : matrice de rigidité réduite du pli à 90°
- h_0 : épaisseur du pli à 0°
- h_{90} : épaisseur du pli à 90°

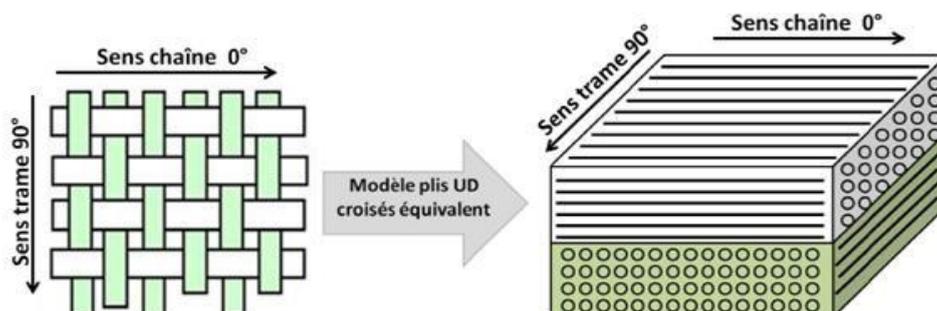


Figure II- 1 : Modélisation d'un tissu taffetas par un modèle à plis UD croisés équivalent

2.1 Loi de mélange :

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation "en parallèle" dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée.

Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront "en série", dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme [16]. En désignant par des indices m et f respectivement pour la matrice et la fibre on écrit que :

EL: en sens long :

$$E_L = V_m \cdot E_m + V_f \cdot E_f \quad (\text{II.2})$$

ET: en sens transverse :

$$1/E_T = (V_m/E_m) + (V_f/E_f) \quad (\text{II.3})$$

V_m : fraction volumique de matrice. V_f : fraction volumique de fibre.

$$V_f + V_m = 1$$

A l'échelle locale, on a les hypothèses suivantes :

Fibres: Comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients et E_f et V_f .

Matrice: Comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients et E_m et V_m .

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\epsilon_T = V_m \cdot \epsilon_{Tm} + V_f \cdot \epsilon_{Tf} \quad (\text{II.4})$$

Chacune des déformations latérales ϵ_{Tm} et ϵ_{Tf} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ϵ_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\epsilon_{Tm} = \nu_{LTm} \cdot \epsilon_L$ et $\epsilon_{Tf} = \nu_{LTf} \cdot \epsilon_L$. Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe :

$$\nu_{LT} = V_m \cdot \nu_m + V_f \cdot \nu_f \quad (\text{II.5})$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$(1/G_{LT}) = (V_m/G_m) + (V_f/G_f) \quad (\text{II.6})$$

2.2 Loi de comportement :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes Observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \tag{II.7}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \tag{II.8}$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 constantes de rigidité C_{ij} .

2.2.1 Matériaux anisotropes :

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

2.2.2 Matériaux orthotropes :

Selon Kollar et Springer, un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels [17].

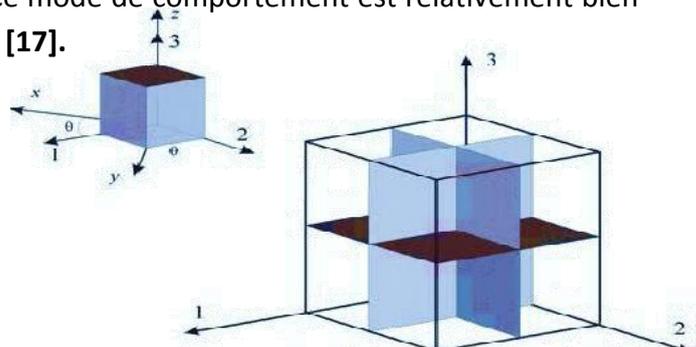


Figure II- 2 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

- 3 modules d'élasticité longitudinal E_1, E_2, E_3 dans les directions de l'orthotrope.
- 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{23}, G_{31} .
- ν_{ij} : ($\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$) est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i .
-

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse S_{ij} :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{44} = G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{13} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

2.2.3 Matériaux transversalement isotropes:

De la même façon que dans le matériau orthotrope, le matériau transversalement isotrope a trois plans de symétrie (**Figure II.3**). Toutefois, un des ces plans est isotrope. Le composite renforcé par fibres longues et uniformes est un exemple de matériau transversalement isotrope.

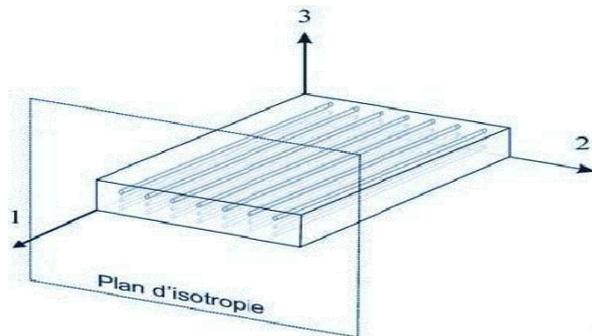


Figure II- 3 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.

Celui-ci a des fibres alignées par rapport à la direction 1 du système de référence matériau (**Figure II-3**). Dans ce cas, le plan perpendiculaire au plan des fibres, plan (2,3), est dit isotrope.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc:

$$C_{22} = C_{33} \quad C_{12} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66} \quad C_{44} = (C_{22} - C_{33}) / 2$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{II.12}$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité.

2.2.4 Matériaux isotropes:

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base.

Donc, les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E ; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \text{ et } G_{12} = G_{23} = G_{13}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Avec : $G = E / (2(1 + \nu))$

2.2.5 Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de contrainte plane, La relation contrainte déformation peut être donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Les coefficients Q_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (\text{II.15})$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité, qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement pur.

Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Selon Berthelot [7], les stratifiés sont élaborés par l'empilement de couche successible dont la direction des fibres est variable d'une couche a l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un système d'axe de

référence pour l'ensemble du stratifiée, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$.

En règle générale, l'axe (x_1) est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe (x_2) est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe (x_3) est perpendiculaire au plan du pli voir **(Figure II.4)**. Il est question de caractériser les propriétés élastique de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence (x, y, z) du stratifié, la direction des fibres fait un angle (θ) avec la direction x .

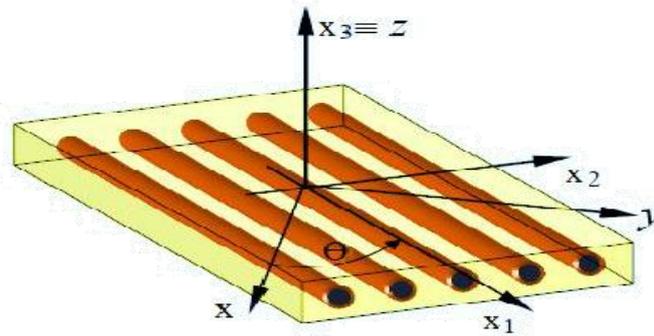


Figure II- 4 : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée (Figure adaptée de BERTHELOT (2010)).

Les matrices d'élasticité C et de souplesse S dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse C et S les relations de changement de base suivantes:

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T] \quad (II.16)$$

Et :

$$[\bar{S}] = [T]^{-1}[S][T] \quad (II.17)$$

Avec T est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (II.18)$$

Avec $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

$$\text{Et } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

De même pour les déformations, nous obtenons

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère (x, y, z) sont définies en fonction des déformations par

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3
 \end{aligned} \tag{II.22}$$

Il faut toutefois noter que Q_{16} et Q_{26} ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales.

2.3 Théories des stratifiés :

Selon l'approche adoptée, les différentes théories des stratifiés peuvent être généralement divisées en deux grandes catégories : la catégorie des théories dites de couche unique équivalente (Equivalent Single Layer - ESL) et la catégorie des théories dites « par couche » (layerwise - LW).

Parmi les principales théories appartenant à la première catégorie on cite la théorie classique des plaques stratifiées (Classical Laminated Plate Theory - CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First-order Shear Deformation Theory - FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre variable p (Variable p - order Shear Deformation Theory – PSDT). Pour chacune de ces théories, qui sont les plus fréquemment utilisées, le matériau composite stratifié est homogénéisé complètement. Ces théories sont parmi les premières théories des stratifiés proposées. Elles sont généralement des extensions des théories utilisées initialement pour l'étude des structures métalliques, telles que la CLPT de Stavsky [18], qui reprend les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff-Love [19] et la FSDT de Whitney et al [20], qui est une extension de la théorie de Mindlin-Reissner [21-22].

La seconde catégorie des théories écarte l'hypothèse d'homogénéisation complète du matériau stratifié et décrit indépendamment chaque pli. De telles théories se basent généralement sur une approximation polynomiale linéaire ou cubique du déplacement à l'intérieur de chaque pli.

L'utilisation des théories ESL pour la détermination de la réponse globale (déflexion, charges critiques de flambage, fréquences et modes propres) d'une structure en composite stratifié donne généralement d'excellents résultats. Alors que, la détermination précise des réponses locales, tel que les contraintes inter laminaires au voisinage des interfaces entre les plis d'une telle structure ou l'étude des phénomènes tel que la délamination, nécessite généralement le recours à des théories LW.

Cependant, ces théories peuvent, pour certaines stratifications, être très lourdes, car la quantité d'inconnues utilisées pour décrire le champ de déplacement global d'un stratifié est proportionnelle au nombre de plis qui le constituent [23].

Nous allons donner le schéma de comportement mécanique des plaques stratifiées, pour simplifier au mieux l'analyse de ses structures. Cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, y). La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques. L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z), sous la forme de polynômes en z , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) [7].

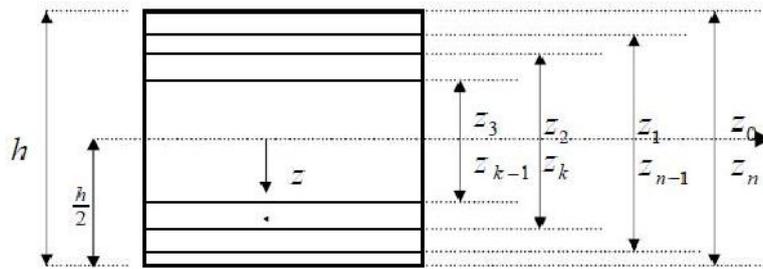


Figure II- 5 : présentation des n couches du stratifié

2.3.1 Champ des déformations :

Une première hypothèse consiste à considérer un stratifié comme un matériau composé d'une superposition de couches parfaitement liées (**Figure II.5**) et en négliger l'effet de cisaillement transverse, et les déformations en cisaillement transverse γ_{xz} et γ_{yz} qui sont donc nulles. Les déformations et les déplacements et les rotations sont petits. Le matériau présente donc un comportement élastique et les rotations dans le plan moyen sont définies par.

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}.\end{aligned}\tag{II.23}$$

Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y).\end{aligned}\tag{II.24}$$

u_0 et v_0 : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne.

w_0 : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

La déformée de la normale au plan moyen (O, x, y) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen. L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la (**Figure II-6**) [24].

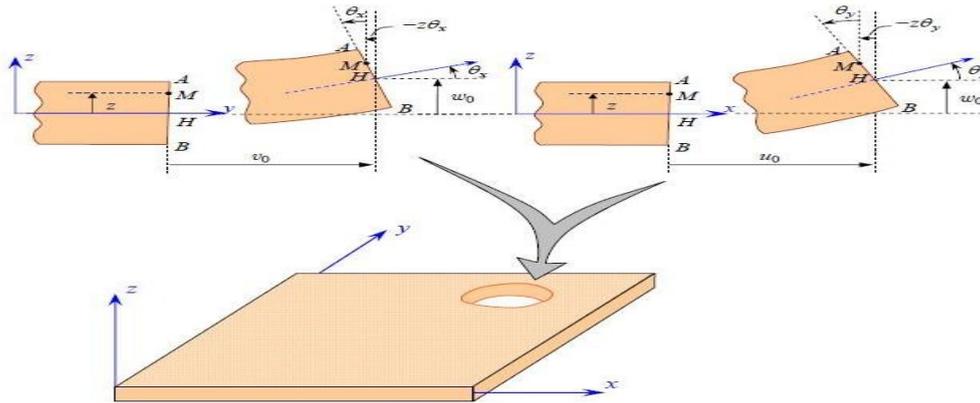


Figure II- 6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés [7].

2.3.2 Expression du champ des déformations :

Le champ des déformations s'écrit, en tenant compte des expressions... :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \varepsilon_{zz} &= 0, \\
 \gamma_{yz} &= 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{II.25}$$

Ce champ des déformations en un point M de coordonnées (x, y, z) est la superposition des déformations en membrane et les des déformations en flexion et torsion (courbure).

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M)
 \tag{II.26}$$

Avec $\varepsilon_m(M)$ les déformations en membrane s'expriment exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (0, x, y) des points de ce plan est définir par :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix},
 \tag{II.27}$$

Et $\varepsilon_f(M)$ les déformations en flexion et torsion peuvent en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M est défini par :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (II.28)$$

Les déformations en flexion et torsion peuvent être exprimées en fonction d'une nouvelle fonction $K(x, y)$ tel que :

$$\varepsilon_f(M) = z K(x, y), \quad (II.29)$$

Avec :

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (II.30)$$

K_x, K_y, K_{xy} : sont les courbures de la plaque en flexion.

Les déformations en un point M s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + zK(x, y). \quad (II.31)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (II.32)$$

2.3.3 Champ des contraintes :

Les relations suivantes donnent les contraintes dans une couche k dans un repère quelconque (x, y, z) [24] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \bar{Q}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad (II.33)$$

Avec :

$$\bar{Q}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \quad (II.34)$$

Où \bar{Q}_k est la matrice de rigidité réduite de la couche k. En tenant compte de (II.32) et (II.33), les contraintes dans une couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (II.35)$$

Ou

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k K(x, y), \quad (II.36)$$

Le vecteur $\sigma_k(M)$ représente le vecteur des contraintes dans la couche k ($hk-1 \leq z \leq hk$). La matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre, il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

2.3.4 Efforts généralisés :

Efforts de membrane :

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, l'expression des résultantes en membrane s'écrit [25] :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_k(x, y, z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k K(x, y)] dz, \quad (II.37)$$

En considérant les caractéristiques mécaniques et les déformations sont constantes suivant l'épaisseur d'une même couche, on peut écrire :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \bar{Q}_k K(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (II.38)$$

En intégrant dans l'épaisseur, on trouve :

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] K(x, y), \quad (II.39)$$

L'expression précédente de l'effort de membrane peut finalement s'écrire sous la forme :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B K(x, y), \quad (II.40)$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (II.41)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (II.42)$$

A : matrice de membrane.

B : matrice de couplage.

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (II.43)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x , N_y , N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion (K_x , K_y , K_{xy}).

2.3.4.1 Efforts de flexion et torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par [25] :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \sigma_k(x, y, z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k K(x, y)] dz, \quad (II.44)$$

Ce qui conduit à :

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] K(x, y), \quad (II.45)$$

Le vecteur des moments de flexion et de torsion s'écrit donc sous la forme :

$$M_f(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} K(x, y), \quad (II.46)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

Avec :

D : matrice de courbure.

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (II.47)$$

Les moments de flexion et de torsion sont fonctions des courbures en flexion et en torsion, et aussi sont fonctions des déformations en membrane.

2.3.5 Équation du comportement mécanique d'un stratifié :

Équation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.43) et (II.47) suivant une seule écriture matricielle sous la forme suivante [26]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (II.48)$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous la forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ K \end{bmatrix} \quad (II.49)$$

Les termes des matrices introduites A, B et D sont donnés par les expressions (II.50). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur e_k et la cote z_k du centre de la couche k, sous la forme :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k, \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k, \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \end{aligned} \quad (II.50)$$

3 Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré :

Les relations fondamentales des plaques s'écrivent de la forme suivante [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y, \\ \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z, \end{aligned} \quad (II.51)$$

Où :

f_x, f_y, f_z sont les composantes des forces volumiques exercées au point M du matériau.

a_x, a_y, a_z sont les composantes du vecteur accélération du point M .

ρ Est la masse volumique au point M du matériau.

3.1 Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane

Dans notre travail on va étudier un cas dont le problème est statique, en intégrant les équations (II.51) suivant l'épaisseur du stratifié et en tenant compte des conditions de la statique :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} . \tag{II.52}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz}(h/2) - \sigma_{xz}(-h/2)$$

les contraintes $\sigma_{xy}(h/2)$ et $\sigma_{xz}(-h/2)$ sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles.

L'intégration de la première des équations (II.51) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{II.53}$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0 \tag{II.54}$$

De même, l'intégration de la deuxième des équations (II.51) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{II.55}$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0 \tag{II.56}$$

3.2 Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (II.51) conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \tag{II.55}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = q$$

On arrive donc à l'équation suivante :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \tag{II.56}$$

$$F_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = 0 \tag{II.57}$$

3.3 Relations fondamentales relatives aux moments

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières des équations (II.51), puis en intégrant suivant l'épaisseur du stratifié.

La première conduit à :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \tag{II.58}$$

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \tag{II.59}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 & - F_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{II.60}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

(II.61)

De même, la deuxième équation conduit à :

$$\begin{aligned}
 & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \\
 & (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{II.62}$$

4 Conclusion :

Dans ce chapitre on a développé les théories qui sont applicables à l'étude du comportement élastique d'un matériau composite, les relations établies précédemment dans le cas général se simplifient au cas où le problème peut être ramené à un problème moins compliqué cela dépendra de notre choix pour le type de matériau.

Chapitre III

Matériaux & Procédures expérimentales

1 Introduction :

Toutes les étapes de la fabrication des composites sur les quels portent nos travaux étaient programmés d'être réalisés au sein de l'établissement de rénovation de matériel aéronautique (ERMAero)

Ce chapitre a tout d'abord pour but de présenter l'ensemble des constituants nécessaires à l'élaboration des matériaux. Le protocole de fabrication est ensuite décrit en détails. Enfin, les caractéristiques générales ainsi qu'une analyse mécanique complète des composites obtenus sont présentées.

2 Procédés de fabrication :

2.1 Présentation des constituants utilisés :

Les trois matériaux qui font l'objet de cette étude sont des composites bidirectionnels (2D) à matrice époxy renforcée par des tissu taffetas de carbone (composite C/ époxy) pour le premier et par des tissu taffetas de verre (composite V/époxy) pour le second, et par un mélange de tissu taffetas de verre et de carbone (composite hybride) pour le troisième.

L'objet de paragraphe est de présenter la nature et les principales caractéristiques de l'ensemble des constituants qui entrent dans la fabrication des matériaux étudiés.

2.2 Mise en forme à partir de fibres pré imprégnés :

Cette voie comprend deux étapes principales. La première correspond à la fabrication des prés/imprégnés, c'est-à-dire à l'imprégnation des fibres de renfort, tandis que la seconde correspond à la consolidation de la structure, c'est-à-dire à la superposition des plis et à leur adhésion sous l'action de pression et température.

2.2.1 Matériaux pré imprégnés

Dans ces matériaux, l'objectif est de mettre les fibres et la matrice proches les unes de l'autre pour permettre une bonne imprégnation par des transferts de matrice, à l'état de fusion lors du process. Il s'agit là de la voie privilégiée, car l'imprégnation en cours de mise en œuvre est rendue difficile par la haute viscosité des matrices. Il existe différents modes de fabrication de pré imprégnés : la voie en solution, la voie « pâteuse », la voie fondue, l'empilement de films, les tissus commelés et l'imprégnation de poudre sèche ou poudrage.[27]

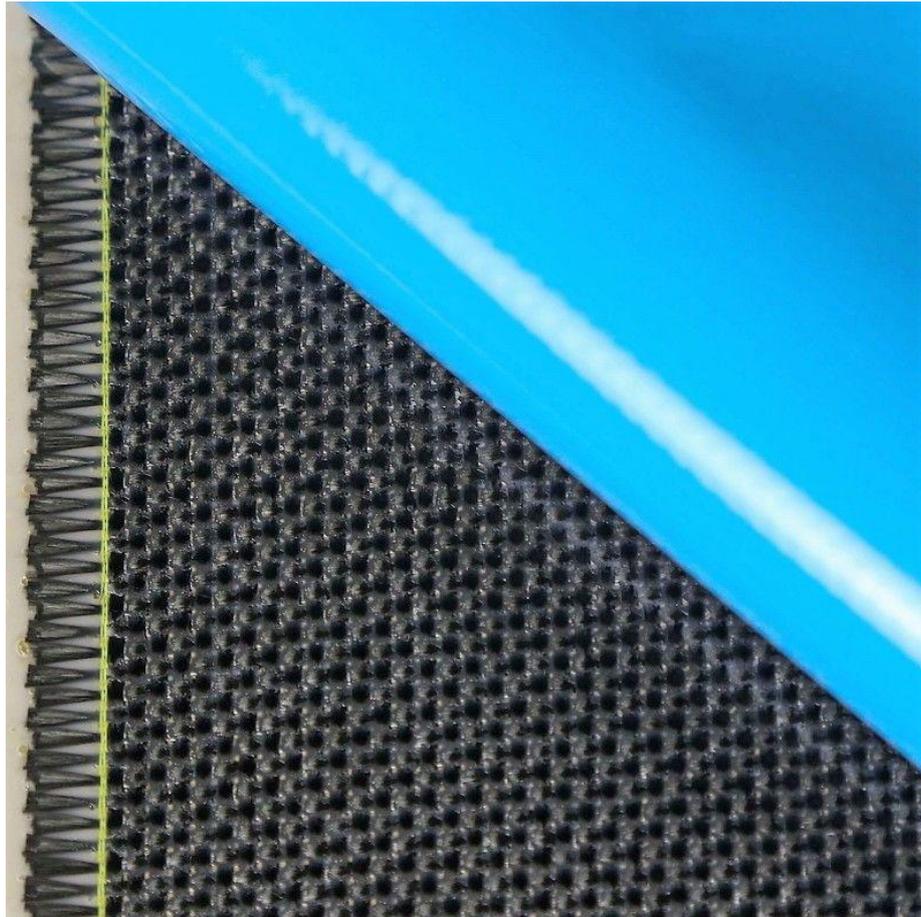


Figure III- 1 : pré-imprégné carbone-époxy.

2.2.2 Thermo-compression de tissu pré imprégné

Parmi les procédés de transformation ou consolidation des tissus pré imprégnés, la thermo/ compression est la plus répandue. La consolidation présente différentes étapes : le rapprochement des surfaces des plis, leur contact à l'échelle mésoscopique, la diffusion du résine d'une surface vers l'autre et enfin l'apparition d'une interface.

En thermo-compression, les plis sont en effet initialement séparés et vont se mettre en contact lorsqu'on applique une pression sur eux, la température étant proche de la température de fusion de la matrice. La matrice occupe alors les espaces laissés libres. La vitesse et la qualité d'imprégnation dépendent de nombreux paramètres : la dimension des fils, le nombre de filaments par fils, leur diamètre, l'environnement des fibres [28].

2.3 Géométrie des éprouvettes et types de matériaux à utiliser :

L'ensemble des essais mécanique été programmé à être réaliser sur des éprouvettes parallélépipédique extraites des plaques dont les dimensions sont les suivante :

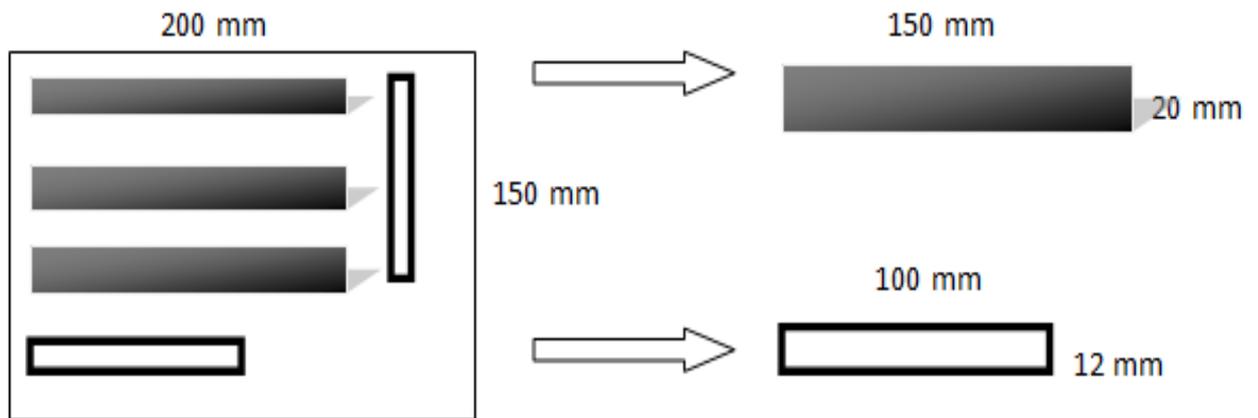
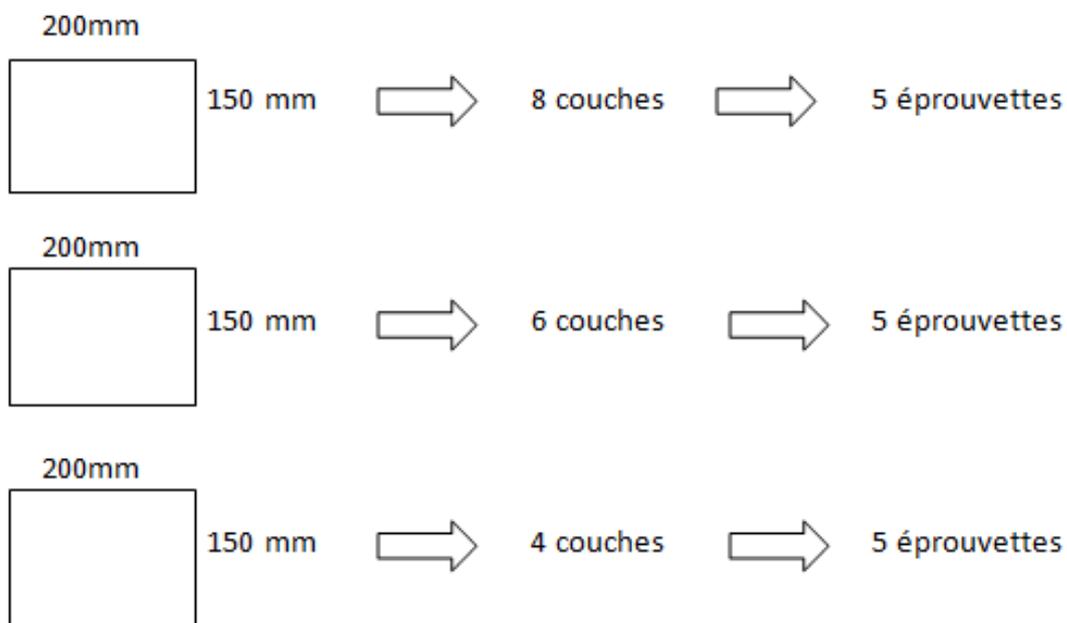


Figure III- 2 : géométrie des éprouvettes

Le but de notre travail été d’extraire les caractéristiques mécaniques et les comparer on variant les paramètres suivants :

2.3.1 Variation de nombre de couches :

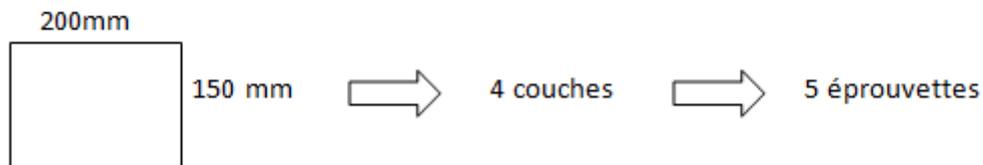


2.3.2 Variation du matériau utilisé :

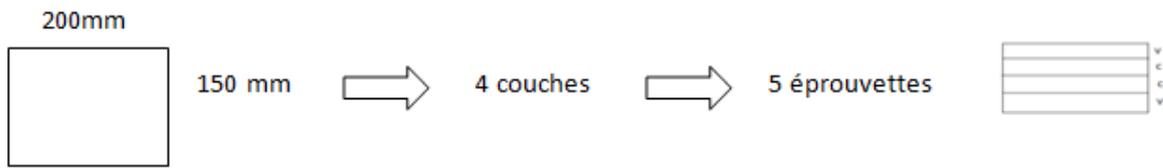
1. Verre/époxy:



2. Carbone/époxy:



3. Hybride : v/c/c/v



4. Résine:



3 Essai mécaniques :

3.1 Essai de traction :

L'analyse du comportement d'un matériau soumis à une sollicitation permet de caractériser ses propriétés mécaniques fondamentales telles que son module d'élasticité, sa limite élastique ou son point de rupture. Associée à une étude de l'évolution microstructurale du matériau, celle-ci permet également de connaître l'état d'endommagement à un niveau de contrainte précis, ainsi que d'identifier les mécanismes qui en sont responsables.

L'objet de cette étude était de décrire les moyens mis en œuvre pour caractériser de façon complète le comportement mécanique des composites à matrice époxyde et de

montrer comment, à partir des résultats obtenus, nous avons pu optimiser les propriétés des matériaux en modifiant les paramètres d'élaboration.

3.1.1 Dispositif de traction

La machine d'essais mécaniques utilisée pour étudier le comportement en traction des composites est une machine servo-hydraulique universelle INSTRON dont la charge maximale est de ± 20 kN. L'asservissement se fait sur le déplacement du mors supérieur à une vitesse de 0,05 mm/mn. Ce mode de chargement permet en effet de suivre la propagation de l'endommagement au sein du matériau et de mieux contrôler sa rupture [29].

3.1.2 Mesure de la déformation :

La mesure des déformations longitudinales est faite à l'aide d'un extensomètre à couteaux Schenk avec une base de l'ordre de 14 mm. Celui-ci est fixé mécaniquement sur l'épaisseur des échantillons à l'aide d'attaches métalliques à effet ressort (**Figure III- 3**).

Une fois l'extensomètre en place, la longueur de jauge est mesurée exactement à l'aide d'un système de visée couplé à un capteur de déplacement.

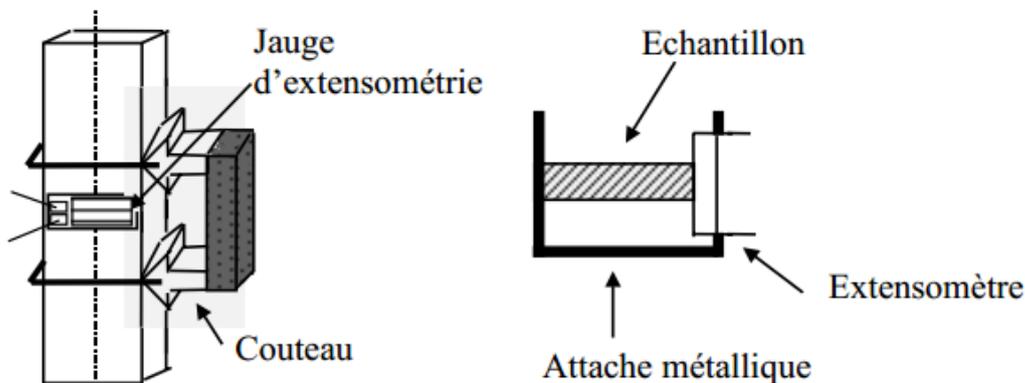


Figure III- 3 : Fixation de l'extensomètre (déformation longitudinale) et de la jauge

La mesure des déformations transverses est faite à l'aide d'une jauge de contrainte collée perpendiculairement à l'axe de l'éprouvette et couplée à un système d'amplification

3.2 Mesure par Dynamic Mechanical Analysis (DMA)

L'analyse mécanique dynamique et thermique (DMA) permet de mesurer les propriétés viscoélastiques en fonction de la température en appliquant une force/déformation cyclique (modifiable) à une fréquence donnée (modifiable) sur l'échantillon [30]. L'essai permet de déterminer le module de conservation (E') qui caractérise la partie élastique

du matériau et le facteur d'amortissement ($\tan \delta$) qui caractérise la partie visqueuse. Plusieurs modes de sollicitations peuvent être utilisés (traction/compression, flexion simple, flexion trois points, cisaillement, torsion). Lors d'une transformation de phase on observe une chute du module de conservation (E') et une augmentation du facteur d'amortissement ($\tan \delta$) dues aux phénomènes de réorientation qui sont des processus inélastiques.

Dans ce travail on propose une méthode expérimentale originale reposant sur des mesures de type DMA et permettant:

1. D'identifier les phénomènes de réorientation/transformation,
2. De détecter les températures de transformation de phase sous contrainte,
3. De déterminer les modules d'élasticité des différentes phases,
4. De déterminer l'influence éventuelle de la température et de la contrainte appliquée sur les propriétés élastiques d'une même phase mesurées par DMA.

3.2.1 Description du dispositif expérimental

Le dispositif utilisé est un spectromètre dynamique mécanique et thermique (DMA) Eplexor® [Gabo, 2014]. A la différence d'un dispositif classique de DMA il combine une machine de traction à une DMA. La (**Figure III- 4**) décrit le dispositif qui est composé :

1. D'une unité supérieure qui permet d'appliquer une charge dite statique, en étant pilotée en déplacement/déformation ou en force/contrainte.
2. D'une unité inférieure qui permet d'appliquer les paramètres dynamiques avec une fréquence de 1 Hz à 100 Hz, en étant pilotée en déplacement/déformation ou en force/contrainte.
3. D'une chambre thermique avec ventilateur permettant de faire des essais à températures contrôlées de -150 °C à +500 °C.

Cette association d'une machine de traction classique à une DMA permet de combiner de nombreux essais, en particulier des mesures de DMA lors d'un essai de traction isotherme (DMA-BS) et des mesures de DMA sous contrainte lors d'un balayage en température (DMA-BT).

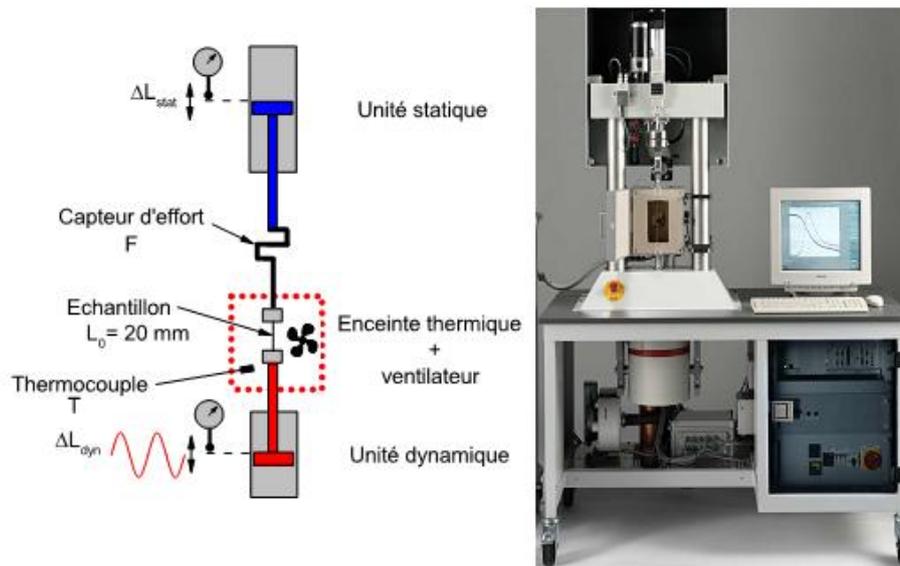


Figure III- 4 : Description du dispositif expérimental Eplexor[®] [Gabo, 2014].

4 Remarque :

Le travail décrit dans ce chapitre a été programmé d'être réalisé au sein de l'établissement de rénovation de matériel aéronautique (ERMAero), mais vu les circonstances et l'apparition du COVID-19 qui entrave le fonctionnement normal des activités au niveau de la plupart des entreprises, ERMA fait parti de ces derniers, et l'arrêt des activités pédagogiques des universités et des cités universitaires, la réalisation de notre stage est devenue impossible car tout a été à l'arrêt.

CHAPITRE IV

Résultats et interprétation

Ce chapitre est une présentation de logiciel Maple, illustrera le type de matériau utilisé pour la simulation numérique par la suite, et donnera les différents résultats et leurs interprétations.

1 Choix du matériau :

Le matériau choisi pour la simulation numérique est le composite carbone époxyde AS4-3502 ayant les propriétés élastiques suivantes (unité SI) :

Matériaux	E1	E2	G12	G13	G23	ρ	ν_{12}	ν_{13}
AS4-3502	174,6 .10 ⁹	7,0 .10 ⁹	3,5 .10 ⁹	35 .10 ⁹	1,4 .10 ⁹	1389,23	0,25	0,25

Tableau IV- 1 : Propriétés élastiques du matériau composite AS4-3502 [28].

2 Simulation numérique :

Introduction :

Ces dernières années, l'analyse par simulation numérique représente l'outil de calcul le plus utilisé [31], pour vérifier la validité de certains choix de conception ainsi que leurs optimisations et ce afin d'en garantir la sécurité et la durabilité pour l'utilisateur.

de nombreux progrès ont été faits dans la compréhension des mécanismes qui régissent le comportement mécanique de matériaux complexes, soumis à des sollicitations plus ou moins simples comme la traction, la compression ou diverses combinaisons des deux, et conduisant à des modèles performants, l'association de ces matériaux au sein d'une structure, dans le cadre d'une simulation numérique de son comportement global, mène à des modélisations qui s'avèrent être délicates.

En ce qui concerne notre travail de recherche, une large étude numérique a été mise en œuvre à l'aide du logiciel MAPLE. Elle a pour objectif de renforcer les apports de l'expérience dans l'analyse des phénomènes observés.

Tous les résultats obtenus sont présentés sous forme graphique pour les contraintes et cisaillement.

Définition et fonctionnalité de logiciel de calcul (Maple) :

Maple est un logiciel propriétaire de calcul formel développé depuis les années 1980 et aujourd'hui édité par la société canadienne Maplesoft. La dernière version est la version 2020.

Les objets de base du calcul sont les expressions mathématiques, représentées sous forme de graphes orientés acycliques. Maple fournit un langage de programmation spécifique, inspiré d'Algol, qui est à la fois le langage d'utilisation interactive et celui dans lequel est écrite la plus grande partie de la bibliothèque mathématique du logiciel.

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, des fonctions, ou des séries. Maple réalise des dérivations, des intégrations, des résolutions de systèmes d'équations linéaires, des inversions de matrices, des développements asymptotiques ou encore des résolutions d'équations différentielles sous forme *symbolique*, c'est-à-dire en gardant des inconnues dans la résolution. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en théorie des nombres et en combinatoire.

Au-delà des fonctionnalités de calcul formel et de programmation à proprement parler, Maple permet par exemple de copier et coller dans un traitement de texte les formules mathématiques issues des calculs, de tracer des courbes et surfaces, ou encore de générer des programmes numériques en langage C. Il offre un mode console et un mode graphique. Il est disponible sur la majorité des systèmes d'exploitation [32].

3 La résolution des équations de mouvement d'une plaque stratifiée en théorie du 1^{er} ordre par la méthode de Navier :

Dans cette partie, nous allons poser les équations de mouvements d'une plaque composite stratifiée en théorie du 1^{er} ordre appelée plaque de Mindlin. Etant donné que nous allons utiliser la méthode analytique de Navier pour résoudre ces équations et pour que les solutions existent, il faut que les rigidités suivantes soient nulles [33].

$$F_{45} = A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$$

Equations de mouvement sous chargement q , P_x et P_y :

q est la charge transversale, P_x et P_y sont les charges axiales de compression.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

$$(F_{55} + P_x) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + F_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (F_{44} + P_y) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + F_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + q = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - F_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{IV.4})$$

$$(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{IV.5})$$

La méthode de Navier requiert que les déplacements et rotations s'écrivent en double séries de Fourier suivantes :

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
 v(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 w(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\
 \psi_x(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
 \psi_y(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

La charge transversale q doit aussi être écrite en double série de Fourier :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_0 \sin \alpha x \sin \beta y \tag{IV.7}$$

Avec: $\alpha = m\pi/a$ et $\beta = n\pi/b$

En injectant ces déplacements et rotations dans les équations différentielles de mouvement de Navier, nous obtenons :

- **Cas d'une plaque en flexion : $q \neq 0$ et $P_x = P_y = 0$**

$$(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) A_{mn} + \alpha\beta (A_{12} + A_{66}) B_{mn} + (\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) D_{mn} + \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) E_{mn} = 0 \tag{IV.8}$$

$$\alpha\beta (A_{12} + A_{66}) A_{mn} + (\beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66}) B_{mn} + \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) D_{mn} + (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) E_{mn} = 0 \tag{IV.9}$$

$$(\alpha^2 F_{55} + \beta F_{44}) C_{mn} + (\alpha F_{55}) D_{mn} + (\beta F_{44}) E_{mn} - q_0 = 0 \tag{IV.10}$$

$$(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) A_{mn} + \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) B_{mn} + (\alpha A_{55}) C_{mn} + (\alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}) D_{mn} + \alpha\beta (D_{12} + D_{66}) E_{mn} = 0 \tag{IV.11}$$

$$\alpha\beta(B_{12} + B_{66})A_{mn} + (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22})B_{mn} + (\beta A_{44})C_{mn} + \alpha\beta(D_{12} + D_{66})D_{mn} + (\alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44})E_{mn} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

En regroupant les termes devant les amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} et E_{mn} , nous obtenons la matrice de rigidité suivante :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, \\ k_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\ k_{13} &= 0, \\ k_{14} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}, \\ k_{15} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21} &= k_{12}, \\ k_{22} &= \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66}, \\ k_{23} &= 0, \\ k_{24} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66}), \\ k_{25} &= \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{31} &= 0, \\ k_{32} &= 0, \\ k_{33} &= \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44}, \\ k_{34} &= \alpha A_{55}, \\ k_{35} &= \beta A_{44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{41} &= k_{14}, \\
 k_{42} &= k_{24}, \\
 k_{43} &= k_{34}, \\
 k_{44} &= \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}, \\
 k_{45} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{66}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{51} &= k_{15}, \\
 k_{52} &= k_{25}, \\
 k_{53} &= k_{35}, \\
 k_{54} &= k_{45}, \\
 k_{55} &= \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}
 \end{aligned}$$

Le système d'équations algébriques ainsi obtenu peut être mis sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.13)}$$

Le système est résolu pour chaque couple (m,n) puisque les déplacements et rotations de Navier sont en double sommation (on tronque la série à M, N points et on peut prendre $M = N = 10$). Pour chaque (m,n) , on obtient les 05 amplitudes de la série $(A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} \text{ et } E_{mn})$.

Les déplacements et rotations sont ensuite déterminés par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
 v(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 w(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\
 \psi_x(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
 \psi_y(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

De la même manière, les contraintes sont aussi déterminées par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= Q_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + Q_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\
 \sigma_y &= Q_{21} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + Q_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\
 \sigma_{yz} &= Q_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \sigma_{xz} &= Q_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \sigma_{xy} &= Q_{66} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{IV.15}$$

Par exemple la contrainte axiale σ_x sera calculée par :

$$\sigma_x = Q_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + Q_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = Q_{11} \frac{\partial}{\partial x} (u + z\psi_x) + Q_{12} \frac{\partial}{\partial y} (v + z\psi_y)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & Q_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y + z \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \right] + \\ & Q_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y + z \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \right] \\ \sigma_x = & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[\begin{aligned} & Q_{11} \frac{\partial}{\partial x} (A_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y + z D_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y) + \\ & Q_{12} \frac{\partial}{\partial y} (B_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y + z E_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad \text{(IV.16)}$$

Finalement :

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[-Q_{11} \alpha (A_{mn} + z D_{mn}) - Q_{12} \beta (B_{mn} + z E_{mn}) \right] (\sin \alpha x \sin \beta y) \quad \text{(IV.17)}$$

On peut procéder de la même manière pour le reste des contraintes.

De même que les déplacements peuvent être calculés à partir du champ de déplacement en injectant les séries doubles de Navier :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= u(x, y) + z \psi_x(x, y) \\ \bar{v}(x, y, z) &= v(x, y) + z \psi_y(x, y) \end{aligned} \quad \text{(IV.18)}$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y)$$

Exemple, l'expression de \bar{u} sera :

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) + z D_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \quad \text{(IV.19)}$$

- Cas d'une plaque en flambage : $q=0$ et $P_x = \lambda_1 P_{cr}$ et $P_y = \lambda_2 P_{cr}$

λ_1 et λ_2 sont les paramètres de flambage :

- Flambage unidirectionnel (selon l'axe x): $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$
- Flambage unidirectionnel (selon l'axe y): $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$
- Flambage bidirectionnel (selon les axes x et y): $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$

$$(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) A_{mn} + \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) B_{mn} + (\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) D_{mn} + \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) E_{mn} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) A_{mn} + (\beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66}) B_{mn} + \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) D_{mn} + (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) E_{mn} = 0 \quad (\text{IV.21})$$

$$[\alpha^2 (A_{55} + \lambda_1 P_{cr}) + \beta^2 (A_{44} + \lambda_2 P_{cr})] C_{mn} + (\alpha A_{55}) D_{mn} + (\beta A_{44}) E_{mn} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

$$(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) A_{mn} + \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) B_{mn} + (\alpha A_{55}) C_{mn} + (\alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}) D_{mn} + \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) E_{mn} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

$$\alpha\beta(B_{12} + B_{66}) A_{mn} + (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) B_{mn} + (\beta A_{44}) C_{mn} + \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) D_{mn} + (\alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}) E_{mn} = 0 \quad (\text{IV.24})$$

En regroupant les termes devant les amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} et E_{mn} , nous obtenons la matrice suivante du système :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, \\ k_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\ k_{13} &= 0, \\ k_{14} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}, \\ k_{15} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66}); \end{aligned}$$

$$k_{21} = k_{12},$$

$$k_{22} = \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66},$$

$$k_{23} = 0,$$

$$k_{24} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66}),$$

$$k_{25} = \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}$$

$$k_{31} = 0,$$

$$k_{32} = 0,$$

$$k_{33} = \alpha^2 (A_{55} + \lambda_1 P_{cr}) + \beta^2 (A_{44} + \lambda_2 P_{cr}),$$

$$k_{34} = \alpha A_{55},$$

$$k_{35} = \beta A_{44}$$

$$k_{41} = k_{14},$$

$$k_{42} = k_{24},$$

$$k_{43} = k_{34},$$

$$k_{44} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55},$$

$$k_{45} = \alpha\beta(D_{12} + D_{66}),$$

$$k_{51} = k_{15},$$

$$k_{52} = k_{25},$$

$$k_{53} = k_{35},$$

$$k_{54} = k_{45},$$

$$k_{55} = \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}$$

Le système d'équations algébriques ainsi obtenu peut être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} + k & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.25)}$$

Avec : $k = \lambda P_{cr}$, $\lambda = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2$

Pour trouver la charge de flambage critique P_{cr} (la plus petite charge qui provoque le flambage), le système doit être écrit sous la forme canonique suivante (on divise l'équation 3 par $(\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2)$):

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} - P_{cr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Avec :

$$\bar{k}_{33} = k_{33} / \lambda, \quad \bar{k}_{34} = k_{34} / \lambda, \quad \bar{k}_{35} = k_{35} / \lambda,$$

4 Résultats et interprétations :

Les plaques en matériaux composites sont soumises à un chargement de flexion. Les graphes des **(Figure IV-1)** à **(Figure IV-7)** présentent la variation des déplacements vertical adimensionnel (w) et longitudinal adimensionnel (u) et les contraintes adimensionnelles (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz}). en fonction de (a/h) , les graphes des **(Figure IV-8)** à **(Figure IV-14)** présentent la variation des déplacements vertical non adimensionnel (w) et longitudinal non adimensionnel (u) et les contraintes non adimensionnelles (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz}) en fonction de (a/h) .

Les différentes courbes correspondent à deux différentes configurations de stratifiés (0,90,90,0) et (90,-90,-90,90).

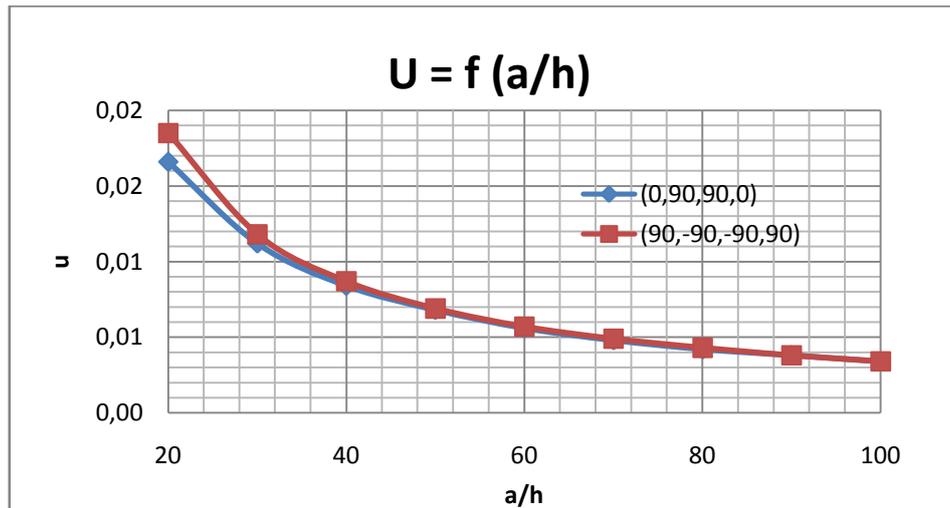


Figure IV- 1 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel U en fonction de a/h

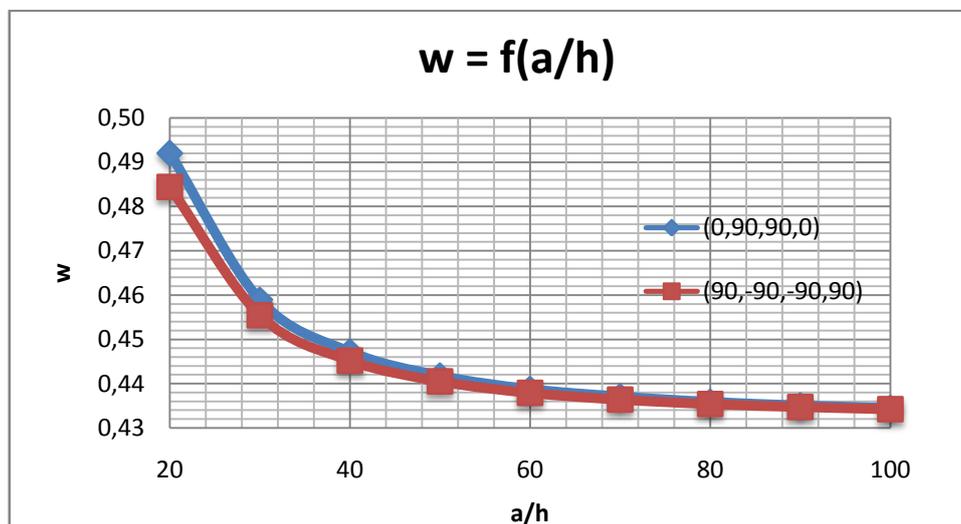


Figure IV- 2 : Variation du déplacement vertical adimensionnel w en fonction de a/h

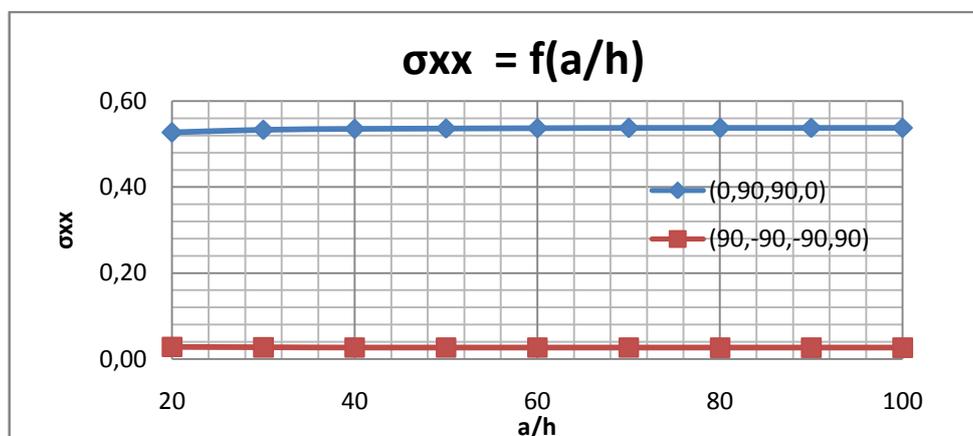


Figure IV- 3 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{xx} en fonction de a/h

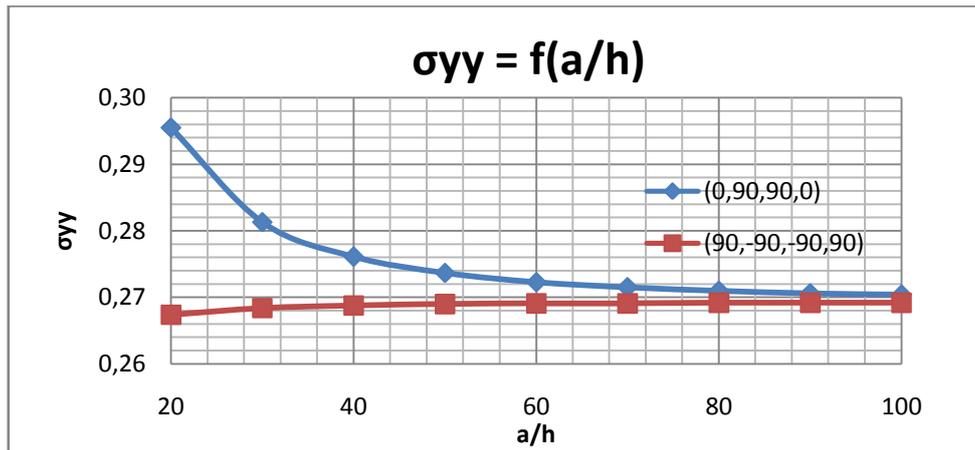


Figure IV- 4 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{yy} en fonction de a/h

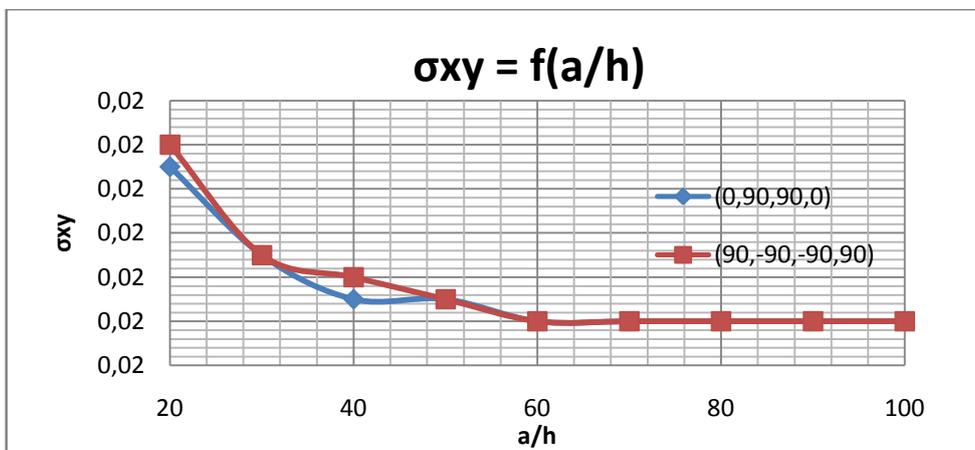


Figure IV- 5 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{xy} en fonction de a/h

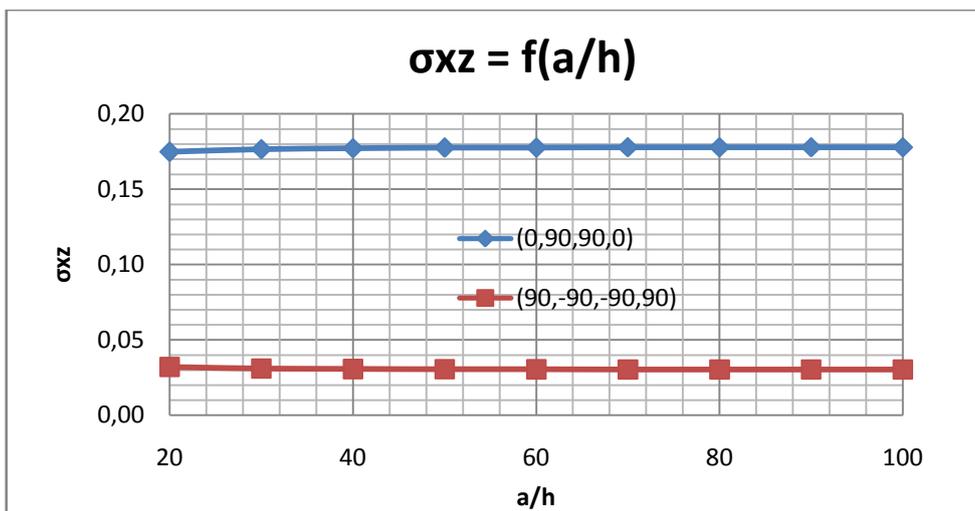


Figure IV- 6 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{xz} en fonction de a/h

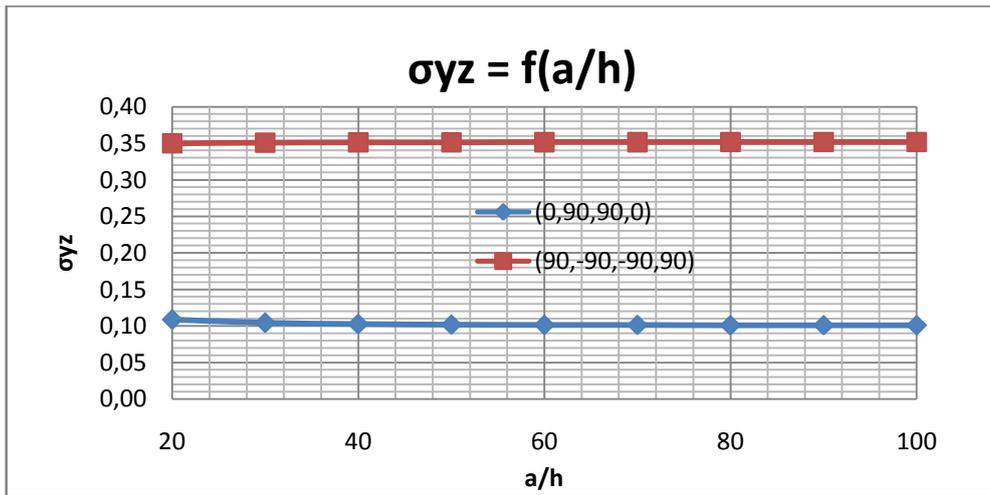


Figure IV- 7 : Variation de la contrainte adimensionnelle σ_{yz} en fonction de a/h

Les contraintes de cisaillement (σ_{xz} et σ_{yz}) adimensionnelles, présentées dans les (FigureIV-6) et (Figure IV-7) diminuent avec l'augmentation du rapport a/h car la plaque devient plus mince. Cette variation est plus visible les Figure IV- 13 et Figure IV- 14.

La variation réelle des résultats des graphes précédents est inverse lorsque a/h augmente ou diminue, comme présenter ci-dessous :

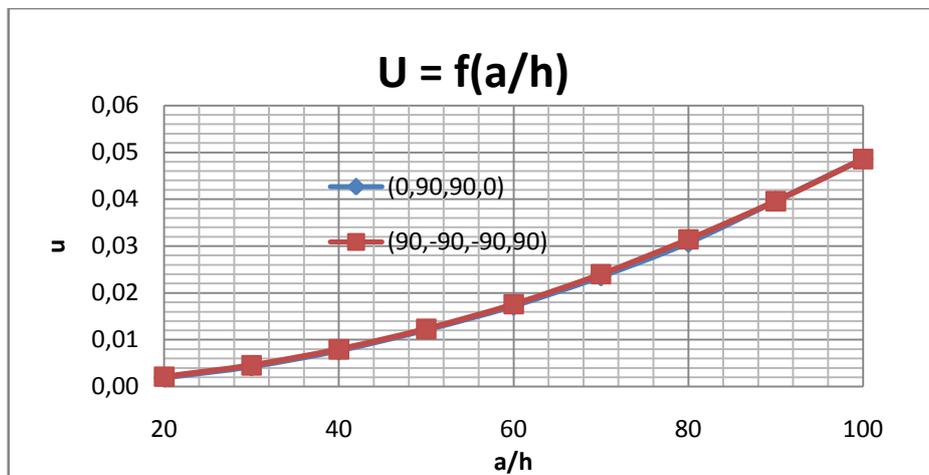


Figure IV- 8 : Variation du déplacement longitudinal non adimensionnel U en fonction de a/h

Le déplacement longitudinal adimensionnel u diminue quand le rapport a/h augmente. Le déplacement axial u non adimensionnel augmente lorsque la plaque devient plus mince car elle tend à être plus flexible quelle que soit la configuration (0,90,09,0) ou (90,-90,-90,90).

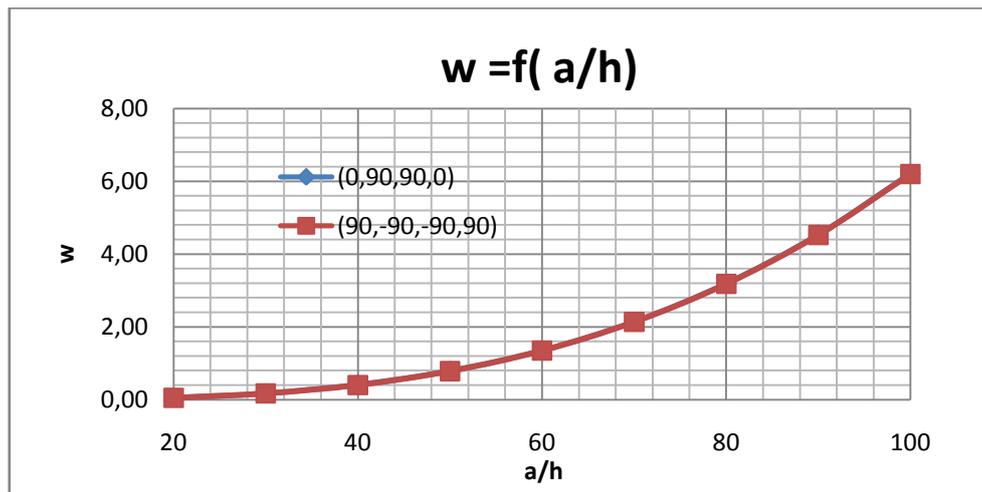


Figure IV- 9: Variation du déplacement vertical non adimensionnel w en fonction de a/h

Lorsque a/h diminue, la plaque devient plus épaisse et la déflexion adimensionnelle w (**Figure IV-2**) augmente, par contre la déflexion non adimensionnelle (**Figure IV-9**) diminue car la plaque tend à être plus rigide. Quand a/h augmente, la plaque étant plus flexible (souple) et la déflexion non adimensionnelle augmente pour les deux configurations $(0,90,90,0)$ et $(90,-90,-90,90)$.

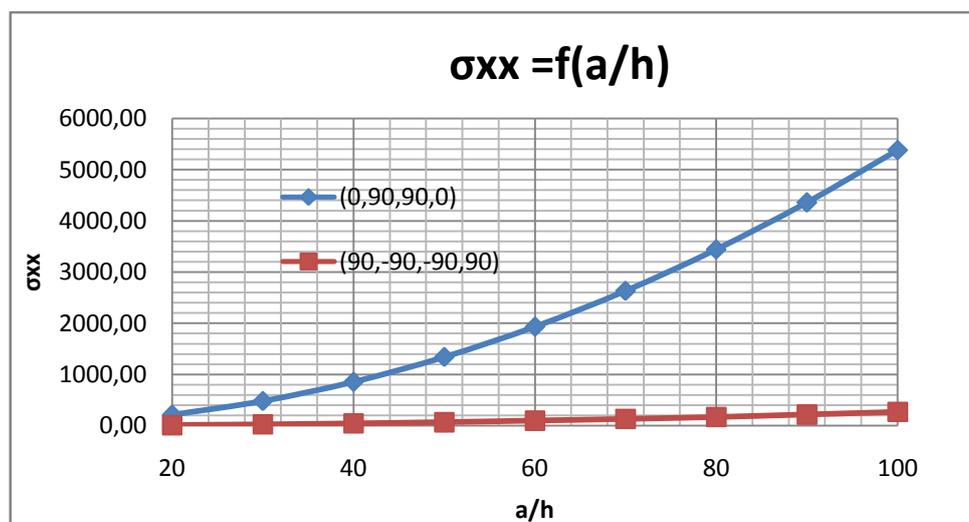


Figure IV- 10 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{xx} en fonction de a/h

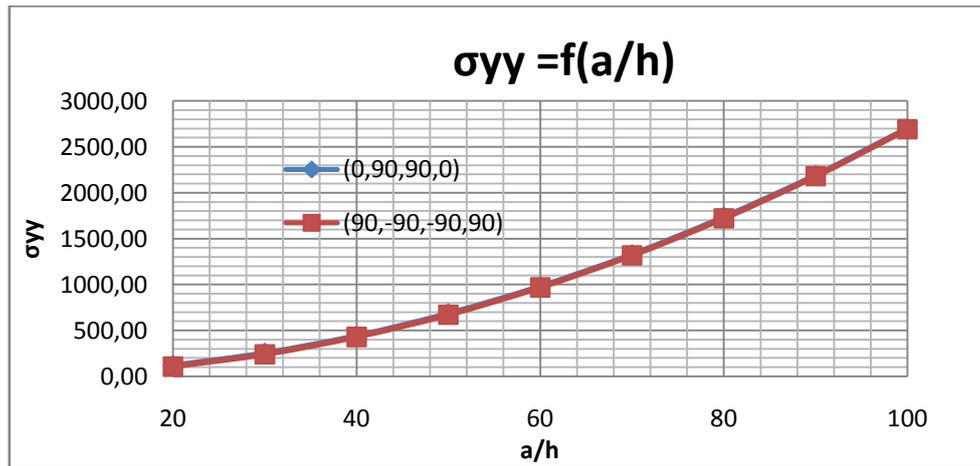


Figure IV- 11 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{yy} en fonction de a/h

lorsque a/h augmente, la plaque devient moins épaisse et les contraintes longitudinales (σ_{xx} , σ_{yy}) augmentent quelque soit la configuration (0, 90, 09,0) ou (90,-90,-90,90). Cependant, pour la configuration (0, 90, 90,0), σ_{xx} augmente plus vite que σ_{yy} du fait d'une rigidité longitudinale plus grande selon l'axe des x. Dans le sens de l'axe y, les rigidités longitudinales sont équivalentes et la contrainte σ_{yy} augmente de la même manière dans les 2 configurations mais elle est moins importante que σ_{xx} . (Figure IV- 10) et (Figure IV- 11)

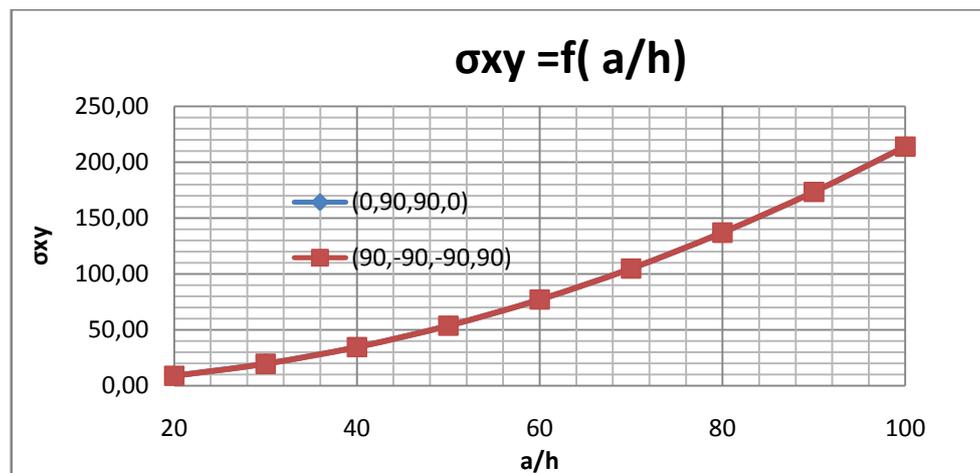


Figure IV- 12 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{xy} en fonction de a/h

La contrainte en plan xy reste sensiblement constante (Figure IV-5) et (Figure IV-12) du la rigidité en cisaillement en plan est la même pour les deux configurations.

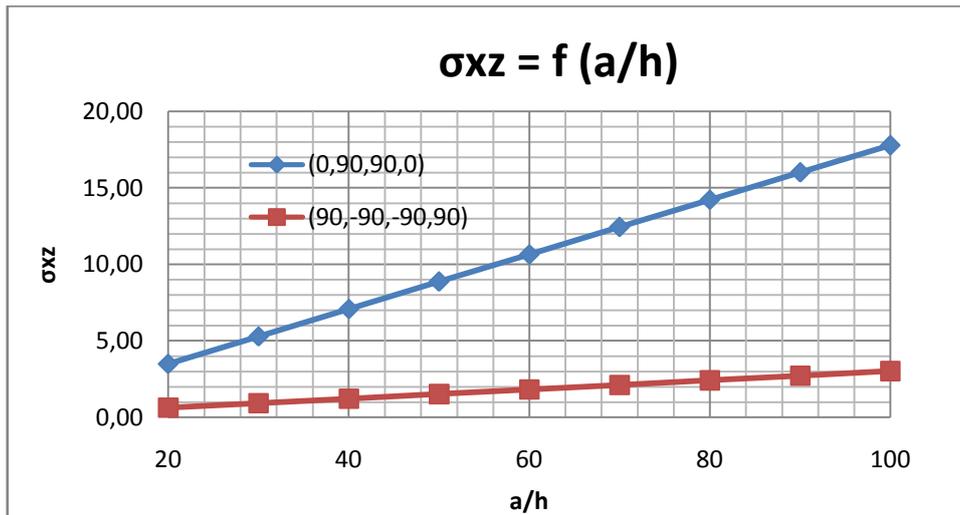


Figure IV- 13 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{xz} en fonction de a/h

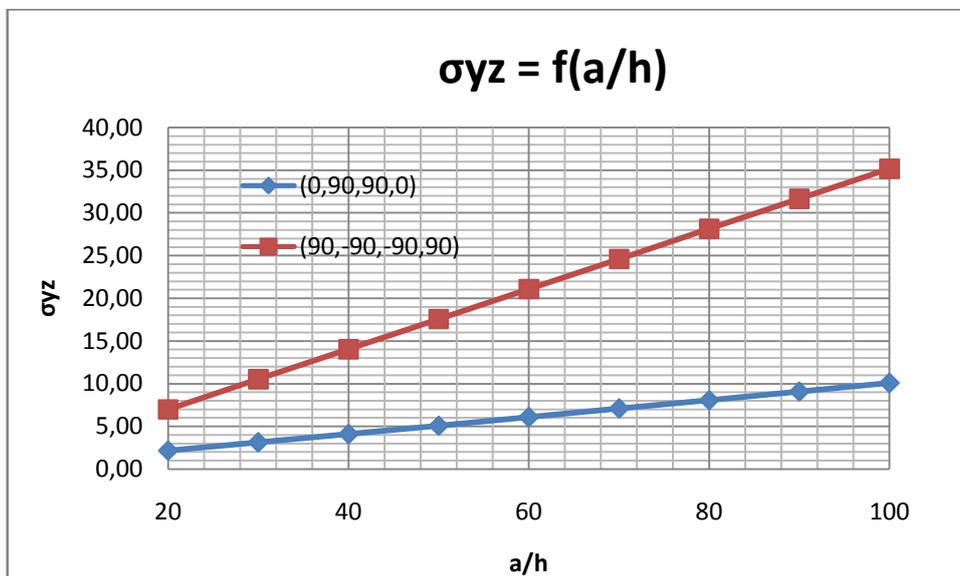


Figure IV- 14 : Variation de la contrainte non adimensionnelle σ_{yz} en fonction de a/h

Les contraintes de cisaillement (σ_{xz} et σ_{yz}) augmentent avec l'augmentation du rapport a/h car la plaque tend être mince. Pour la configuration (0,90, 90,0), la contrainte de cisaillement transversal σ_{xz} augmente plus vite que pour la configuration (90,-90,-90,90) car la plaque est plus flexible (module de cisaillement plus faible) dans ce dernier cas.

Conclusion

Après avoir étudié le cas d'une flexion pour un stratifié à deux configurations (0, 90, 90,0) et (90,-90,-90,90) en discutant les résultats de variation des contraintes et des déplacements vertical et longitudinal en fonction du paramètre a/h , on a constaté que le changement de configuration du stratifié influe sur la contrainte σ_{xx} et les contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} et non pas sur les contraintes σ_{yy} et σ_{xy} du fait de l'orientation des couches et de la symétrie de la plaque.

Conclusion Générale

Les résultats des études numériques présentés, ont permis de tirer les conclusions importantes suivantes :

- La fiabilité du programme de calcul numérique pour une bonne estimation du comportement statique d'une plaque moyennement épaisse.
- L'influence de certains paramètres, à savoir la variation des configurations des composites stratifiés (0,90,90,0) et (90,-90,-90,90) sur leurs comportements mécaniques.
- La notion d'une plaque épaisse, moyennement épaisse ou mince est basée sur les dimensions relatives de cette plaque, c'est-à-dire les rapports épaisseur longueur et épaisseur largeur. Dans notre cas, $a/h = 10$ (plaque moyennement épaisse) à $a/h = 100$ (mince)

Durant ce projet, nous avons eu l'occasion d'apprendre la modélisation théorique et la programmation dans le domaine des structures composites. De plus, l'utilisation de l'outil de calcul mathématique (Maple) a été très bénéfique aussi bien pour notre projet que pour notre complément de formation.

Enfin, nous souhaitons que notre modeste travail satisfasse tout lecteur et participe dans le développement de cet axe de recherche et aussi servira les étudiants en master, particulièrement de l'Institut d'Aéronautique pour leurs travaux de recherche.

Références Bibliographiques

- [1] : « *AGROCOMPOSITE JUTE - Gold of Bengal* », [Online] Available: <http://goldofbengal.com/les-projets/composite-jute/>, [Accessed: 29-Apr-2015].
- [2] : Daniel GAY , « *Matériaux composite* », 6^{ème} édition.
- [3] : Y. Yang, R. Boom, B. Irion, D.-J. van Heerden, P. Kuiper, and H. de Wit, « *Recycling of composite materials* », *Chem. Eng. Process. Process Intensif.* , vol. 51, pp. 53–68, Jan. 2012.
- [4] : J.Henshaw, « *Recycling and disposal of polymer-matrix composites* », ASM International, pp. 1006–1012, 2001.
- [5] : L. Berreur, B. de Maillard, and S. Nösperger, « *L'industrie française des matériaux composites.* », 2001.
- [6] : « *Résines thermoplastiques Elium® pour composites.* » [Online]. Available: <http://www.arkema.fr/fr/produits/productfinder/range/ResinesElium/?back=true>, [Accessed: 20-Apr-2015].
- [7] : J.Berthelot ,« *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures.* », 4^{ème} édition, 2010.
- [8] : A.MOKADDEM, « *Modélisation du Comportement de L'interface Fibre-Matrice de Matériaux Composites* », Mémoire de magister, USTO, 2008.
- [9] : F.Laurin,« *Introduction générale sur les matériaux composites* », ONERA, par www.univ.ubs.fr, 2013.
- [10] : M.GEIER, D.DUEDAL ,« *Guide pratique des matériaux composites* », TEC & DOC (Lavoisier), Paris, 349P, 1985.
- [11] : W.KURZ, J. P. MERCIER, G.ZAMBELLI ,« *Traité des matériaux: Introduction à la science des matériaux* », Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, ,404P, 1995.
- [12] : Benatta Mohamed Atef ,« *Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé* », Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2010.
- [13] : Bennai Riadh ,« *Contribution à l'étude de la vibration et la stabilité des structures fonctionnellement graduées* », Thèse de Doctorat de Université Hassiba Ben Bou Ali de Chlef, 2016.
- [14] : Ait Atmane H ,« *Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement.* », Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- [15] : F. DAL MASO & J. MÉZIÈRE, « *CALCUL DES PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DES TISSUS UTILISÉS DANS LES MATÉRIAUX COMPOSITES* », Institut français du pétrole, 1998.
- [16] : E.Lolive ,« *Analyse du comportement non linéaire de poutres en matériaux composite sandwiches avec âme en mousse* », Thèse de doctorat de l'université de Nantes, 2000.

- [17] : L.KOLLAR, SPRINGER, «*Mechanics of Composite Structures*», Cambridge University Press, 2003.
- [18] : Djabali Strav SY, «*Bending and stretching of laminated aeolotropic plates.* », Journal of EngineeringMechanics, 87:31-56, ASCE 1961.
- [19] : G.Kirchhoff, «*Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schreitbe.* », Reine Angew Math 40:51-58, 1850.
- [20] : Whitney JM, Pagano NJ, «*Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates*», Journal of Applied Mechanics 37:1031-1036, 1970.
- [21] : Reissner E, «*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.* », JAM 1945;12:69-77.
- [22] : Mindlin RD, «*Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, ElasticPlates.* », Journal of Applied Mechanics 18: 32-38, 1951.
- [23] : Reddy J N , «*Mechanics of Laminated Composite Plates : Theory and Analysis*», CRC Press 1997.
- [24] : Laurent Gornet, «*Généralité sur les matériaux composites*», ECN, Centre Nantes,2011.
- [25] : J. Molimard , «*Mécanique des Matériaux composites*», EMSE, Version 2, 2004.
- [26] : Laroze S Barran J.J , «*Mécanique des structures. Tome 4 : Calcul des structures en matériaux composites*». Eyroues, Masson ,1983 .
- [27] : TURTON N, MC AINSH, us patent 3785916, 1974.
- [28] : YE L.friedrich K.KASTEL J.WACHINGER , «*consolidation of unidirectionnel CF/PEEK composites from commingled yarn prepreg*», composite sciences and technology , Vol. 54 page 349-358, 1995.
- [29] : Corinne OLIVIER, «*Elaboration et étude du comportement mécanique de composites unidirectionnels C/Si3N4 et SiC/Si3N4*» ,Thèse de Doctorat de L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON 1998.
- [30] : Menard, K. P , «*Dynamic mechanical analysis : a practical introduction.* », CRC press, 2008.
- [31] : Pickett A.K , Johnson A.F, «*Numerical simulation of the forming Process in long fiber reinforced thermoplastics* », Composite Mat.Thech., (1996)
- [32] : «*Définition et fonctionnalités du logiciel du MAPLE* », [Online]. Available <https://fr.wikipedia.org/wiki/Maple>
- [33] : Pr Reddy JN , Liu CF. A, «*higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells*» ,2002.