

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1**  
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du Diplôme de Master en  
Energétique

Thème

**Etude sur les instabilités hydrodynamiques :**  
**Instabilité de Rayleigh-Bénard**

Proposé et encadré par :

Dr. GRINE Kada

Réalisé par :

Mr. HANAFI Djameleddine

Mr. LIMANI Djamel eddine

Année universitaire 2018/2019



## ***Remerciement***

*Nous remercions tout d'abord Dieu de nous avoir donné le courage, la santé et la patience pour pouvoir accomplir ce travail. Nos remerciements s'adressent à notre promoteur.*

*Au terme de ce travail, on tient à exprimer notre profonde gratitude à notre cher professeur et encadrant Mr. Kada GRINE pour son suivi et pour conseils avisés, son énorme soutien, qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de la période de projet.*

*Aussi, nous voulons remercions également notre professeur le chef d'option de l'Energétique au niveau de département de la mécanique Mr. Boussad BOUMEDDANE pour toutes ses efforts durant toute la période de cycle de Master .*

*Nous remercions Mr. Mustapha TEMMAR le Chef département de mécanique au niveau de notre université Saad Dahleb – Blida pour son énorme travail sur l'organisation dans le département durant toutes ces années.*

*Aux membres du jury, pour nous avoir d'accepter de siéger dans ce jury et d'examiner ce mémoire.*

## *Dédicace*

*Avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie, que nous dédions notre travail,  
A nos mères*

*« Vous nous avez donné la vie, la tendresse et le courage pour réussir. Tous ce que nous  
pouvons vous offrir ne pourra exprimer l'amour et la reconnaissance que nous vous porte.*

*En témoignage, nous vous offrons ce modeste travail pour vous remercions pour vos  
sacrifices et pour l'affection dont vous n'avez toujours entourée ».*

*A nos pères, « Le père, l'épaule solide, l'œil attentif compréhensif et la personne, la plus  
digne de notre estime et de notre respect. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes  
sentiments, que Dieu vous préserve et vous procure santé et longue vie. »*

*A nos frères, nos sœurs aussi, à toutes les membres de nos familles HANAFI et LIMANI , tout  
personne qui nous a aidé pour effectuer ce travail-là. MERCI infiniment*

*Djamel et Djamel.*

## ***Résumé:***

La convection de Rayleigh-Bénard est un exemple d'instabilité thermique due à une différence de température entre les surfaces inférieure et supérieure d'une couche de fluide chauffée par le bas, et donnant naissance à des cellules rotatives. La première partie du travail à constituer en une étude théorique de l'instabilité et en la détermination de la valeur du paramètre de contrôle appelé nombre de Rayleigh provoquant le passage de l'état stable (purement conductif) de la couche de fluide à l'état instable caractérisé par l'apparition de rouleaux convectifs. Dans la deuxième partie du travail, une simulation numérique des équations générales du phénomène physique a été entreprise à l'aide du code commercial Fluent pour justifier les résultats théoriques.

Notre travail dans cette thèse est basé sur l'étude de phénomène de Rayleigh-Bénard (Convection) qui représente l'un des états d'instabilité susceptible dans lequel se trouve un fluide soumis à un gradient de température déstabilisant. Elle se traduit par la formation de structures convectives appelées cellules de Bénard qui sont aussi causées par des mouvements convectifs naissent à l'intérieur du fluide. Ce problème a été étudié expérimentalement par Bénard et théoriquement par Rayleigh.

Ce phénomène devient plus complexe a propos des fluides à seuil. Alors dans notre thèse on va décrire le mouvement de convection d'un fluide chauffé par le bas, des expériences de Rayleigh-Bénard ont été effectuées sur des fluides newtoniens, Le dispositif expérimental nous a permis d'avoir des résultats quantitatifs et qualitatifs intéressants.

## ***Abstract:***

Rayleigh-Bénard convection is an example of thermal instability where temperature difference between the top and bottom caused by heating the fluid from below results in formation of rolls. In the first part analytical study is carried out in order to determine the

critical value of the control parameter known as the Rayleigh number which determines the transition from a purely conductive stable state to an unstable convective state characterized by the appearance of convective rolls. In the second part a numerical simulation is performed through the use of the commercial package Fluent in order to justify the theoretical results.

Our work in this thesis is based on the Rayleigh-Bernard phenomenon study (convection) which represents one of the states of susceptible instability in which is a fluid subjected to a destabilizing temperature gradient. It results in the formation of convective structures called Benard cells who are also caused by convective movements are born inside the fluid. This problem has been studied experimentally by Benard and theoretically by Rayleigh. In this thesis, Rayleigh-Bernard experiments were performed with a Newtonian fluid. The experimental apparatus allowed us to obtain interesting quantitative and qualitative results.

## Table des matières :

<b>Nomenclature.....</b>	<b>11</b>
<b>Introduction.....</b>	<b>12</b>
<b>Chapitre 1 : Généralités sur les instabilités hydrodynamiques</b>	
<b>Introduction.....</b>	<b>14</b>
<b>1. Différents types d'instabilité.....</b>	<b>18</b>
1.1 Instabilité de Taylor-Couette.....	18
1.2 Instabilité de Kelvin-Helmoltz.....	19
1.2.1 Relation de dispersion généralisée.....	20
1.3 Instabilité Rayleigh-Taylor.....	21
1.4 Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau.....	22
1.5 Instabilité Rayleigh-Bénard.....	24
Historique.....	25
1.5.1 Approximation de Boussinesq.....	27
1.5.2 Le mécanisme de la convection de Rayleigh-Bénard.....	28
1.5.3 Le Nombre de Rayleigh.....	29
1.5.4 La cellule de Rayleigh-Bénard.....	30
1.5.5 Le phénomène de la convection Rayleigh-Bénard dans la nature.....	30
<b>Chapitre 2 : Formulation mathématique du problème</b>	
<b>2.1 Introduction .....</b>	<b>32</b>
<b>2.2 Formulation du problème .....</b>	<b>32</b>
2.2.1 Modèle des équations.....	32
2.2.1.1 Conservation de la masse.....	32

2.2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement.....	32
2.2.1.3 Conservation de l'énergie.....	33
<b>2-3- Approximation de Boussinesq .....</b>	<b>33</b>
<b>2-4- Géométrie et conditions aux limites.....</b>	<b>34</b>
<b>2-5- Etat de base (état purement conductif).....</b>	<b>35</b>
<b>2-6- Etat perturbé .....</b>	<b>36</b>
<b>2-7- Méthode de séparation de variable ou méthodes des modes normaux.</b> <b>.....</b>	<b>36</b>
<b>2-8- Résultat .....</b>	<b>40</b>
<b>Chapitre 3 : Expérimentation numérique - Vérification de la</b>	
<b>théorie :</b>	
<b>3-1 Introduction.....</b>	<b>41</b>
<b>3-2- Description du problème .....</b>	<b>41</b>
<b>3-3- Choix de paramètres et procédure numérique.....</b>	<b>42</b>
<b>3-4- Calcul .....</b>	<b>43</b>
3-4-1- Température.....	43
3-4-2- Nombre de Nusselt (Nu) .....	44
3-4-3- La vitesse maximale .....	45
3-4-3- Résultats et discussion .....	45
<b>3-5- L'effet de Maillage.....</b>	<b>48</b>
3-5-1- Les tables des résultats de simulation et calculs pour différents maillage.....	50
3-5-2- Résultats et discussion.....	51
<b>3-6- L'influence du rapport de forme .....</b>	<b>53</b>
3-6-1 Cas 1/5 .....	53
3-6-2 - Cas 1/7 .....	55
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>58</b>
<b>Annexes.....</b>	<b>60</b>



# Liste des figures

## Chapitre 1 : Généralités sur les instabilités hydrodynamiques

1.1-Transition supercritique. Branches stables et instables ( $A, Re$ ).....	17
1.2- Transition sous-critique.....	17
1.3- Transition globalement sous-critique.....	17
1.4- Schématisation d'un écoulement de fluide entre deux cylindres circulaire.....	19
1.5-Couche de mélange (nappe), vitesses parallèles mais de module différent.....	19
1.6- Début de la perturbation de la nappe (couche de mélange).....	19
1.7- Apparition d'une zone de forte vortacité .....	20
1.8- L'enroulement de la nappe tourbillonnaire.....	20
1.9- Deux couches fluides superposées avec un fond en $z \approx -hr$ .....	21
1.10-Simulation hydrodynamique d'un « polype » isolé de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.....	22
1.11- Filet d'eau issu d'un tube de 4mm de diamètre.....	24
1.12- Schématisation de l'écoulement à l'intérieur d'une cellule de Rayleigh-Béna..	26
1.13- Mouvement du fluide lors d'une convection Rayleigh-Bénard.....	27
1.14- Bifurcation dans la convection Rayleigh-Bénard (mécanisme physique).....	28
1.15- Mouvement de fluide entre les deux couches après la différence de température.....	29
1.16- Image réelle d'apparition des cellules Rayleigh-Bénard après l'expérience physique.....	30
1.17- Vue microscopique des cellules Rayleigh Bénard.....	30
1.18- Représentation schématique des cellules de convection dans le manteau terrestre.....	31
1.19- Circulation atmosphérique générale sous forme de cellules de convection.....	32
1.20- Brise de mer (convection de Rayleigh-Bénard dans les mers).....	32

## **Chapitre 2 : Formulation mathématique du problème :**

2.1- Surfaces de la géométrie (Conditions aux limites) .....	34
2.2 – Courbe de stabilité marginale (cas de 2 surface solides ).....	39
2.3 - Courbe de stabilité marginale (cas d'une surface solide et d'une surface libre)..	40

## **Chapitre 3 : Expérimentation numérique -**

### **Vérification de la théorie :**

3.1 – Cavité rectangulaire (deux surfaces solide).....	42
3.2 – Contour de température à $Ra=700$ .....	47
3.3 – Contour de température à $Ra=1710$ .....	47
3.4 – Contour de vitesse à $Ra=1710$ .....	48
3.5 – Variation de la magnitude de la vitesse le long de la ligne centrale suivant la coordonnée x.....	48
3.6 –Maillage (60*30).....	49
3.7 –Maillage (80*100).....	49
3.8 – Contour de température à $Ra=1710$ .....	51
3.9 – Contour de température à $Ra=1730$ .....	52
3.10 – Contour de température à $Ra=1750$ .....	52
3.11 – Nombre de Nusselt en fonction de nombre de Rayleigh.....	53
3.12 - Contour de température à $Ra=1700$ .....	54
3.13 - Contour de vitesse à $Ra=1700$ .....	54
3.14 – Variation de la magnitude de la vitesse le long de la ligne centrale suivant la coordonnée x pour $Ra=1700$ .....	55
3.15 – Contour de température à $Ra=1700$ .....	56
3.16 - Contour de vitesse à $Ra=1700$ .....	56
3.17 – Variation de la magnitude de la vitesse le long de la ligne centrale suivant la coordonnée x pour $Ra=1700$ .....	57
3.18- Contours de vitesse pour un facteur de forme de 1/5 et $Ra=2000$ .....	57
3.19- Contours de vitesse pour un facteur de forme de 1/7 et $Ra=2000$ .....	58



## ***NOMENCLATURE:***

### **Symboles et abréviations :**

$\Delta T$	écart de température entre les plaques de confinement
$\Delta T_C$	écart de température critique
$T_{froide}, T_1$	Température de la plaque supérieure (froide)
$T_{chaude}, T_2$	Température de la plaque inférieure (chaude)
$D$	Distance entre les plaques, épaisseur de la couche fluide
$G$	Accélération gravitationnelle
$T_v$	Temps caractéristique de diffusion thermique verticale de la cellule
$T_h$	Temps caractéristique de diffusion thermique horizontale de la cellule
$A$	Surface d'échange thermique dans la cellule de Rayleigh-Bénard
$R$	Résistance de chauffe
$Ra$	Nombre de Rayleigh
$Ra_c$	Nombre de Rayleigh critique
$Pr$	Nombre de Prandtl
$Nu$	Nombre de Nusselt
$h$	Coefficient de transfert thermique par convection
$\phi$	Densité de flux thermique
$\varrho$	Nombre de Rayleigh réduit, gradient thermique réduit
$\rho$	Masse volumique
$\lambda$	Conductivité thermique
$\kappa$	Diffusivité thermique
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique
$\nu$	Viscosité cinématique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\mu_0$	Viscosité cinématique à vitesse de cisaillement nulle
$\tau$	Contrainte de cisaillement
$s$	Seuil de contrainte

## ***Introduction :***

D'une façon générale, dans le domaine énergétique l'optimisation de la consommation énergétique devient une priorité. La compréhension des phénomènes physiques qui sont à l'œuvre dans divers procédés industriels est nécessaire. Ainsi, les transferts de la chaleur et de la matière restent des phénomènes complexes très présents dans le quotidien. La convection thermique naturelle dans un fluide fascine encore les scientifiques. En transportant de la chaleur par le mouvement lui-même du fluide entre deux milieux, ce mode de transfert permet d'échanger la chaleur de manière plus importante que ne le permet la conduction.

La convection naturelle est un phénomène extrêmement répandu. Il peut être observé à petite échelle, par exemple dans une casserole d'eau sur une cuisinière, mais aussi à grande échelle, par exemple sur la terre, où l'énergie solaire est absorbée par le sol avant de réchauffer les couches inférieures de l'atmosphère provoquant ainsi des vents thermiques.

La convection de Rayleigh-Bénard correspond à la situation où un volume de fluide, enfermé dans une enceinte, est simultanément chauffé par le bas et refroidi par le haut. Dans le champ de pesanteur, cette configuration est instable en raison du gradient de densité engendré par la différence de température entre le haut et le bas de l'enceinte : le fluide du bas se dilate, devient plus léger que le fluide du haut et tend à s'élever sous l'effet de la poussée d'Archimède. En raison de sa simplicité et du faible nombre de paramètres de contrôle, la convection de Rayleigh-Bénard a fait l'objet de nombreux travaux tant d'un point de vue expérimental que sur un plan théorique. La plupart des études portent sur la compréhension de l'échange de chaleur entre la source chaude et la source froide. Une question centrale est notamment de savoir comment évolue l'efficacité du transfert thermique avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) est le paramètre de contrôle du système. Il peut être vu comme la différence de température sans dimension, c'est-à-dire que plus il est élevé, plus l'échange de chaleur est important. Le nombre de Rayleigh, en fonction des écoulements considérés, peut varier sur plusieurs dizaines de décades. A titre d'exemple, dans une casserole d'eau chaude il est de l'ordre de  $10^9$ . En conditions de laboratoire, les nombres de Rayleigh maxima atteignent des valeurs de l'ordre de  $10^{17}$ , alors que dans le cas d'écoulements géophysiques ils sont nettement supérieurs. Par exemple, pour la convection atmosphérique on estime que  $Ra \approx 10^{21}$ . La compréhension de l'évolution du transfert de

chaleur en fonction de  $Ra$  est donc indispensable pour pouvoir extrapoler sur plusieurs décades les lois établies à des  $Ra$  plus modères. Nous trouvons cependant sur cette question d'apparence simple de nombreuses théories et expériences parfois contradictoires. En transportant de la chaleur par le mouvement lui-même du fluide entre deux milieux, ce mode de transfert permet d'échanger la chaleur de manière plus importante que ne le permet la conduction.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier est consacré à la présentation de phénomène des instabilités hydrodynamiques de façon générale avec une attention particulière à celles qui font l'objet de notre étude. Le second est consacré à l'étude théorique de l'instabilité Rayleigh–Bénard et la détermination du nombre de Rayleigh critique. Dans le troisième chapitre on présente une vérification expérimentale (numérique) de la théorie par une résolution numérique des équations générales à l'aide du logiciel ANSYS.R2.2019.académique.

## ***Chapitre 1 : Généralités sur les instabilités hydrodynamiques***

### ***Introduction :***

Les instabilités hydrodynamiques occupent une place de choix en mécanique des fluides. Depuis Osborne Reynolds et G. I. Taylor, on sait en effet que la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent est due au caractère instable de l'état laminaire vis-à-vis de certaines classes de perturbations, soit infinitésimales, soit d'amplitudes finies. Ce paradigme a été pour la première fois magistralement mis en évidence par les travaux de G. I. Taylor sur l'instabilité de l'écoulement de Couette produit par la mise en rotation différentielle de deux cylindres coaxiaux. La théorie de l'instabilité hydrodynamique fait désormais partie de l'arsenal de techniques mis à la disposition du mécanicien des fluides pour étudier les transitions dans une grande variété d'écoulements en génie mécanique, en génie chimique, en aérodynamique et dans l'étude des phénomènes naturels (climatologie, météorologie, géophysique interne).

La théorie classique de l'instabilité hydrodynamique porte essentiellement sur les écoulements cisailés quasi parallèles ou parallèles, tels que la couche de mélange, le jet, le sillage, l'écoulement de Poiseuille dans un canal, l'écoulement de couche limite, etc. De telles configurations sont privilégiées dans les livres de Drazin & Reid et de Schnid & Henningson, et elles retiennent tout particulièrement l'attention des chercheurs de sensibilité « mécanicienne ».

L'objectif de l'analyse de stabilité est de déterminer dans quel domaine de paramètres une solution particulière des équations de Navier-Stokes est effectivement observable. Un écoulement est dit stable si et seulement si il est stable vis à vis de toute perturbation. Certains écoulements sont instables vis-à-vis de perturbations infinitésimales. Dans la pratique, il existe toujours un « bruit de fond », et ce type de solution bifurque toujours vers un autre état. D'autres écoulements stables vis à vis de toute perturbation

infinitésimale sont instables pourvu que l'amplitude de ces perturbations soit supérieure à un certain seuil. Dans ce cas, pour un même domaine de paramètres, il existe deux solutions différentes observables. Le « choix » fait par le système entre les deux états possibles sera alors conditionné par son histoire. Pour le premier type d'écoulement, on dira qu'il est instable aux perturbations infinitésimales ou en corelinéairement instable. Pour le second type, on parlera d'instabilité aux amplitudes finies, ou bien d'instabilité non-linéaire.

Connaissant un état stationnaire nous pouvons y superposer des perturbations et étudier leur évolution temporelle grâce aux équations du mouvement. Sachant que la stabilité s'entend pour toutes les perturbations possibles, l'analyse doit être faite sur une base complète de modes normaux. Par exemple, sur la base des modes de Fourier, on étudie la stabilité d'un mode arbitraire  $(k, \sigma)$ ,  $k$  étant le nombre d'onde spatial de la perturbation, et  $\sigma$  son taux de croissance temporel. Si l'on suppose que l'amplitude  $\varphi$  de la perturbation est infinitésimale, on peut alors se contenter d'un développement au premier ordre et négliger les termes non-linéaires en  $\varphi$ . Les équations du mouvement fournissent alors une relation de dispersion entre  $k$  et  $\sigma$  permettant de déduire dans tous les régimes pour quels modes spatiaux il y aura croissance de la perturbation. L'hypothèse forte de l'analyse linéaire est donc que les perturbations doivent être d'amplitude infinitésimale.

Mais l'analyse linéaire ne suffit pas à décrire grand nombre d'instabilités observées en laboratoire ou dans la nature. Leur étude nécessite de prendre en compte les termes non-linéaires précédemment négligés. L'analyse devient beaucoup plus complexe et il n'existe pas aujourd'hui de théorie générale de la stabilité non-linéaire.



## Transitions Sous-Critiques, Super-Critiques et Ecoulements Métastables

Ces deux types d'instabilités conduisent en pratique à des comportements différents lors de la transition vers la turbulence. On peut différencier grossièrement deux familles de transitions : les transitions *super-critiques* et les transitions *sous-critiques*.

La figure 1 présente le schéma de principe d'une transition supercritique. Elle représente la stabilité des solutions dans un diagramme amplitude - Re. L'axe  $A = 0$  représente l'état de base – fluctuations nulles. En dessous d'une valeur critique du paramètre de contrôle  $Re_c$ , l'écoulement est inconditionnellement stable (stable vis-à-vis de toute perturbation). Au-dessus de cette valeur, il est inconditionnellement instable (instable vis-à-vis de toute perturbation). Dans ce cas, l'analyse linéaire décrira correctement la stabilité. Le principe d'une transition sous-critique est illustré sur la figure 2. Comme dans le cas d'une transition *super-critique*, il existe une valeur du paramètre de contrôle au-dessus de laquelle l'écoulement de base est inconditionnellement instable. Cependant, en-dessous de cette valeur, il existe une plage de stabilité conditionnelle dans laquelle il peut être déstabilisé par des perturbations d'amplitude finie mais reste stable aux perturbations infinitésimales : l'écoulement est métastable. En dessous de la limite dite de stabilité conditionnelle, l'écoulement est inconditionnellement stable. Une analyse de stabilité linéaire ne sera capable que de prédire la limite d'instabilité inconditionnelle.

Enfin, la figure 3 s'attarde sur une transition globalement sous-critique. L'unique différence avec une transition *sous-critique* simple est l'absence de régime d'instabilité inconditionnelle. L'écoulement est métastable partout au-dessus du seuil de stabilité conditionnelle. Dans ce dernier cas de figure, l'analyse linéaire prédira la valeur infinie du paramètre critique.

La stabilité non-linéaire introduit une nouvelle variable, l'amplitude de la perturbation. Alors que dans le cas d'une instabilité linéaire le seuil est défini seulement par le nombre de Reynolds (ou un autre paramètre de contrôle pertinent), le seuil d'une instabilité d'amplitude finie est donné par le couple amplitude-Reynolds. Plus précisément, pour toute valeur du Reynolds, il existe une amplitude critique en dessous de laquelle les perturbations seront amorties. Au-dessus de cette amplitude critique, les perturbations seront amplifiées.

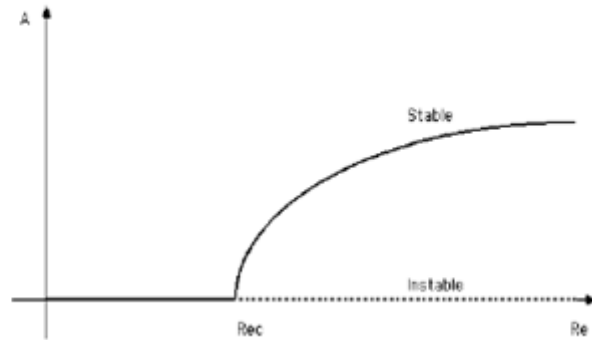


Fig 1.1 Transition super-critique. Branches stables et instables dans un diagramme (A,Re) ; A est l'amplitude des fluctuations par rapport à l'état de base ; Re est le paramètre de contrôle

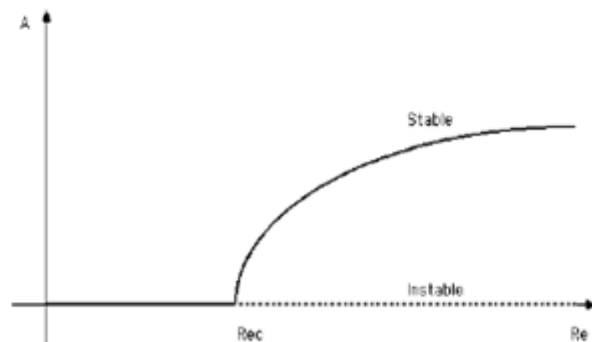


Fig 1.2 Transition sous-critique

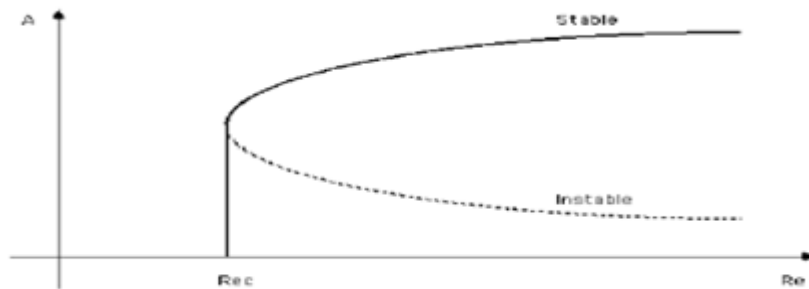


Fig 1.3 Transition globalement sous-critique

Dans ce chapitre on va parler d'une façon générale sur les instabilités des fluides avec ses divers phénomènes physiques, ses propriétés et ses effets. Une part importante du chapitre est consacrée à l'analyse de phénomène de la convection Rayleigh-Bénard.

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l'océan, on observe la croissance des vagues. Cette instabilité, due au cisaillement du champ de vitesse, est appelée "instabilité

de Kelvin-Helmholtz”. Vagues générées par le vent lors d’une tempête. Lorsqu’un fluide lourd est placé au-dessus d’un fluide léger, on observe la croissance de doigts amorçant le mélange des deux fluides. Cette instabilité, due à la gravité, est appelée “instabilité de Rayleigh-Taylor”. En l’absence de forçage de la vitesse et lorsque le fluide lourd est placé sous le fluide léger, une perturbation de l’interface génère des oscillations que l’on appelle “ondes de surface” ou “ondes de gravité externes” ou plus communément “houle linéaire” ou “vagues”.

La convection désigne l'ensemble des mouvements internes (verticaux ou horizontaux) qui animent un fluide et qui impliquent alors le transport des propriétés des parcelles de ce fluide. Ce transfert implique l'échange de chaleur entre une surface et un fluide à son contact, ou le déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre, une particule et après une telle différence de température (Valeur  $\Delta T_{critique}$ ) de fluide chauffée à la base devient moins dense du fait de sa dilatation thermique et remonte sous l'action de la poussée d'Archimède. Arrivée au sommet de la couche, le fluide échange sa chaleur, se refroidit et s'alourdit. Il redescend alors et crée un transfert retour de chaleur. Et donc là on arrive au phénomène instable de turbulence.

## 1. Différents types d’instabilité :

### 1.1 Instabilité de Taylor-Couette :

On étudie ici l’écoulement d’un fluide entre deux cylindres circulaires coaxiaux en rotation (écoulement de Couette). Le cylindre extérieur est fixe, l’autre à une vitesse  $\Omega$ . La solution simple par trajectoires circulaires ne s’observe que pour certaines valeurs de  $\Omega$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Le paramètre caractéristique de cet écoulement est le nombre

de Taylor :

$$T_a = \frac{\Omega^2 (R_2 - R_1)}{2\nu^2} = \frac{\text{forces centrifuges}}{\text{force de viscosité}}$$

- L’élément perturbateur : forces centrifuges
- L’élément stabilisateur : viscosité

Si  $T_a < 1700$ , l’écoulement est stable (trajectoires circulaires)

Si  $T_a \approx 1700$ , apparition des tourbillons de Taylor (cellules toroïdales)

Si  $T_a > 1700$ , instabilité → chaos (turbulence)

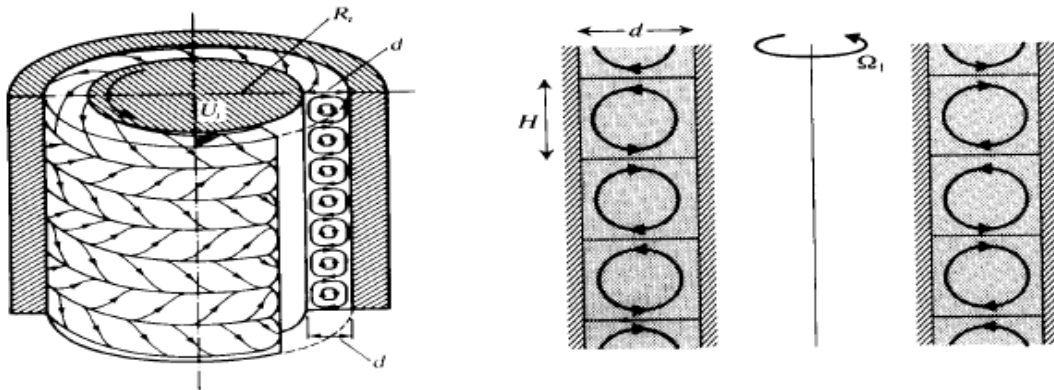


Fig1.4 – Schématisation d'un écoulement de fluide entre deux cylindres circulaire, apparition des tourbillons de Taylor (cellules toroïdales).

## 1.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz :

On considère le cas d'une couche de mélange plane telle que :

- Vitesses parallèles mais de module différent
- Champ rotationnel dans la couche mais irrotationnel à l'extérieur

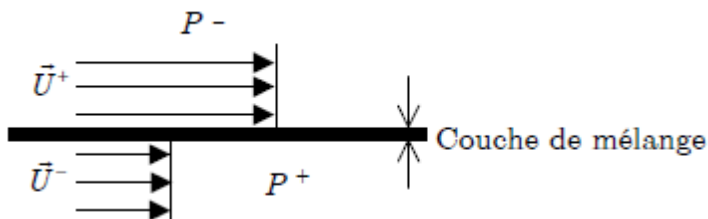


Fig1.5 –Couche de mélange (nappe), vitesses parallèles mais de module différent.

### Mécanisme :

Si une perturbation de la nappe (couche de mélange) apparaît, la partie haute subit une dépression et une accélération alors que la partie basse subit une surpression et un ralentissement. → déséquilibre.

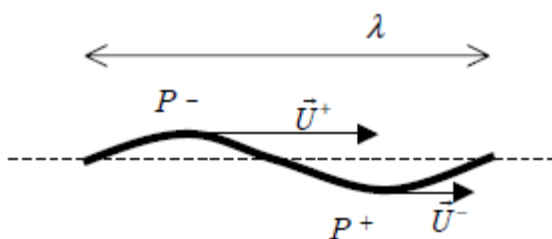


Fig1.6 – Début de la perturbation de la nappe (couche de mélange)

La distance crête à crête diminue, il y a une apparition d'une zone de forte vorticité.

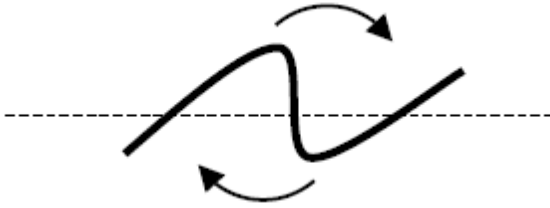


Fig1.7 - Apparition d'une zone de forte vorticité

Finalement il y a un enroulement de la nappe tourbillonnaire.

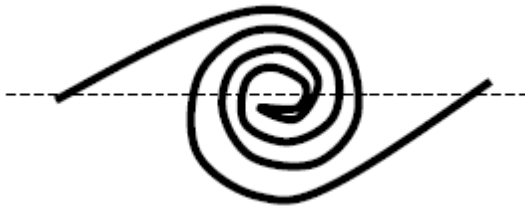


Fig1.8 – L'enroulement de la nappe tourbillonnaire

### 1.2.1 Relation de dispersion généralisée :

Pour comprendre ces phénomènes d'instabilité ou d'oscillations, pour déterminer leurs taux de croissance et leurs pulsations, le choix d'un modèle pertinent, sa linéarisation autour d'un état d'équilibre et le calcul d'une relation de dispersion généralisée constituent une démarche très courante en physique, bien au-delà de la mécanique des fluides. Cette relation de dispersion généralisée relie le taux de croissance de l'instabilité ou la période de l'oscillation à la longueur d'onde des perturbations et aux différents paramètres du problème étudié.

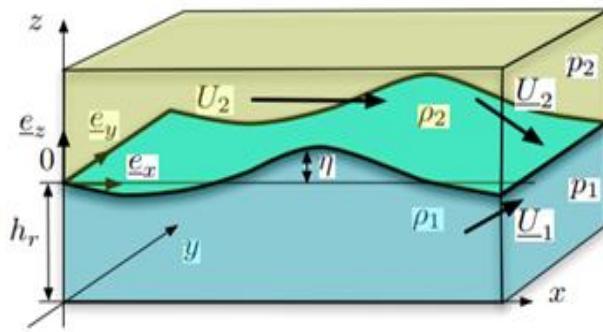


Fig1.9 – Deux couches fluides superposées avec un fond en  $z \approx -h_r$

On considère deux couches fluides superposées de masses volumiques différentes. On suppose que la couche supérieure, d'extension infinie, est animée d'une vitesse moyenne constante. Il peut se développer des instabilités ou simplement des oscillations de la surface libre autour d'un état d'équilibre. Le cas général où les deux couches peuvent être d'extension quelconques et où la couche fluide inférieure est animée d'un courant moyen se déduit facilement par généralisation du cas particulier traité ici.

### 1.3 Instabilité Rayleigh-Taylor :

Le phénomène de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes : si l'interface est perturbée par une onde sinusoïdale alors l'effet gravitationnel aura tendance à faire plonger le fluide lourd placé au-dessus du fluide léger sous la forme d'un champignon. Dans un premier temps, la forme évolue de façon linéaire, mais elle devient rapidement non linéaire et très complexe.

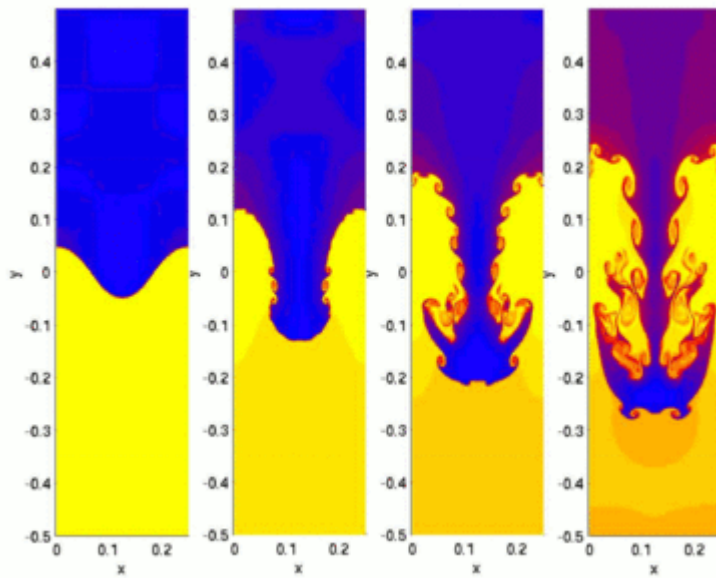


Fig.1.10–Simulation hydrodynamique d’un « polype » isolé de l’instabilité de Rayleigh–Taylor

Considérons deux couches fluides superposées dans le champ de la pesanteur et séparées par une interface horizontale. Nous supposons ici que la viscosité n’intervient pas, et que les parois qui bornent les fluides sont suffisamment loin de l’interface pour être ignorées. Les seules grandeurs physiques prises en compte sont donc les deux masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , la tension interfaciale  $\sigma$  et la gravité  $g$ . Ces quatre grandeurs dimensionnelles font intervenir les trois dimensions fondamentales, masse, longueur et temps ; le problème dépend donc que d’un paramètre sans dimension, le rapport des masses volumiques, ou encore le paramètre (appelé nombre d’Atwood)

$$r = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Ce paramètre est négatif si le fluide le plus dense est au-dessus, et positif dans l’autre cas ; il est égal à l’unité si le fluide supérieur a une densité négligeable, ce qui est le cas pour un gaz au-dessus d’un liquide.

On montre que lorsque le fluide le plus lourd se trouve au-dessus, la moindre perturbation de l’interface s’amplifie exponentiellement, avec le taux  $\exp(\gamma t)$ , avec  $\gamma = \sqrt{rgk}$  où  $\gamma$  est le taux de croissance,  $k$  le nombre d’onde spatial.

Considérons une perturbation de l'interface dans un plan vertical  $(x,y)$ , d'amplitude  $a$  et de nombre d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , et analysons les forces exercées sur une « bosse » de fluide 1 entre le plan  $y=0$  (interface au repos) et l'interface déformée. La force nette due à la gravité, ou force de « flottabilité » (somme algébrique du poids et de la force d'Archimède), c'est  $(2a/k)(\rho_2 - \rho_1)g$ .

## 1.4 Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau

Quiconque s'est arrêté devant un robinet laissant échapper un mince filet d'eau a pu observer une instabilité capillaire : la rupture du filet en gouttelettes. Il est possible de contrôler la fréquence des gouttes, et donc leur espacement et leur taille, en excitant le filet liquide par des ondes acoustiques envoyées par un haut-parleur placé à proximité. La figure 2.2 montre la formation de telles gouttelettes « forcées » ; plus la fréquence d'excitation est basse, plus la fréquence de passage des gouttes est basse et leur espacement grand. La taille des gouttes peut aussi être forcée par des vibrations de basse fréquence créées par un élément piézo-électrique : cette technique est très utilisée dans les imprimantes à jet d'encre où l'on cherche à envoyer sur le papier des gouttes aussi petites et bien calibrées que possible (de quelques pico-litres de volume). On remarquera aussi sur la figure 2.8 le caractère très déformé des gouttes lors de la rupture du filet, ainsi que la présence de petites gouttelettes secondaires entre les gouttes principales.

Les premières observations de la rupture d'un filet fluide en gouttelette ont été faites par le Français F. Savart (1833) sans pourtant que soit reconnue la tension de surface comme phénomène à l'origine de l'instabilité (cette tension de surface avait été mise en évidence en 1805 par le Français P. S. de Laplace et l'Anglais T. Young). Une telle reconnaissance est due au physicien belge J. Plateau (1857).



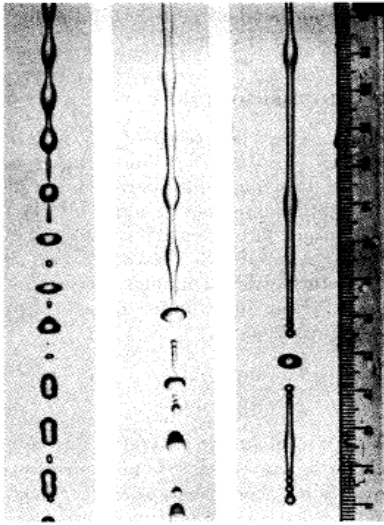


Fig.1.11 – Filet d’eau issu d’un tube de 4mm de diamètre est perturbé à différentes fréquences par un haut-parleur. Les ((longueurs d’onde)) du chapelet de gouttes sont de 4, 12, 36 et 42 diamètres. Cliché Rutlarid et Jarrieson 1071 (Vari Dyke 1982).

Longueur d’onde  $k_{max}$  le plus amplifié :  $k_{max} = 0.697$ ,

où  $n$  est le rayon du filet fluide, correspondant à une longueur d’onde  $\lambda = 9,01 a$ . Cette prédiction s’accordait aux observations de Savart à 3% près ! Les calculs de Rayleigh (non visqueux en 1879 puis purement visqueux en 1892) ont été étendus aux nombres de Reynolds finis par Chandrasekhar (1961). Un développement du résultat de Chandrasekhar pour les petits nombres d’onde ( $ka \ll 1$ ) donne pour le nombre d’onde le plus amplifié.

$$(k_{max} a)^2 = \frac{1}{2 + \sqrt{18/Re}}$$

Comme discuté dans la section précédente, la tension interfaciale stabilise l’interface plane entre deux couches fluides superposées dans le champ de la pesanteur. La raison est que toute perturbation d’une interface plane augmente son aire  $A$ , et augmente donc l’énergie interfaciale  $\gamma A$ . Dans le cas présent d’un filet cylindrique, la tension interfaciale est au contraire déstabilisante, c’est elle qui est responsable de l’instabilité. En effet, pour un volume de fluide donné, l’aire interfaciale est moindre pour un ensemble de gouttes de rayon  $r$  sphériques que pour un cylindre de rayon  $a$  ; plus précisément, le rapport des aires est

$$\frac{\text{air des gouttes}}{\text{air du cylindre}} = \frac{3a}{2r}$$

## 1.5 Instabilité Rayleigh-Bénard :

## *Historique :*

Lord Rayleigh et Henri Bénard sont les deux physiciens à l'origine de la découverte et de l'analyse de convection. Ces analyses ont été faites de façon indépendante et simultanée au début du vingtième siècle.

C'est Henri Bénard, qui a la fin du XIXe siècle, a été l'un des premiers à mener une étude en laboratoire sur les courants de convection. Dans son article intitulé 'Les tourbillons cellulaires dans une nappe de liquide', [Bénard 1900] l'auteur étudie des couches minces de fluides (environ 1 mm) chauffées par en-dessous, la surface supérieure du liquide étant libre. Le dispositif expérimental que nous utilisons actuellement la cellule de Rayleigh-Bénard est plus proche de celle définie théoriquement par Lord Rayleigh [Rayleigh 1916]. En effet, contrairement au dispositif expérimental de H. Bénard, il fait l'hypothèse dans son article que le fluide est contenu entre deux plaques planes infiniment grandes. Lors du calcul du seuil d'instabilité du fluide, c'est-à-dire la différence de température pour laquelle le fluide se met en mouvement, l'auteur introduit également une quantité qui deviendra par la suite le nombre de Rayleigh. Rayleigh place lui même son travail dans la continuité de celui de H. Bénard qu'il cite dans la première phrase de son article : « The present is an attempt to examine how far the interesting results obtained by Bénard in his careful and skillful experiments can be explained theoretically. ».

En 1900, H. Bénard commente son travail en ces termes : « Je n'ai pas la prétention d'avoir épuisé un sujet aussi nouveau : bien des points restent à éclaircir, même sans sortir du point de vue expérimental ; mais je serais heureux si mon travail, tout incomplet qu'il est, contribuait à attirer l'attention des expérimentateurs sur les domaines inexplorés de la Physique moléculaire et de la Mécanique des fluides. ». Il semble que son souhait ait été réalisé : la cellule de Rayleigh-Bénard reste encore aujourd'hui un dispositif d'étude de la convection thermique très utilisée. Il s'agit en effet d'une géométrie simple avec peu de paramètres de contrôles qui peuvent être ajustés indépendamment les uns des autres. Cependant, malgré le grand nombre d'études sur ce sujet, des zones d'ombre persistent, en particulier la compréhension du mécanisme de transport de la chaleur par l'écoulement turbulent à haut nombre de Rayleigh.

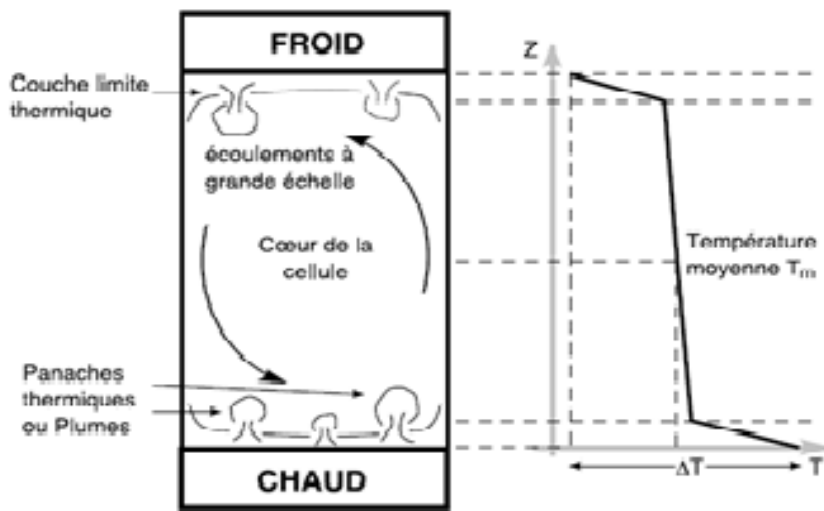


Fig.1.12 - Schématisation de l'écoulement à l'intérieur d'une cellule de Rayleigh-Bénard (à gauche). Profil moyen de température suivant la hauteur de la cellule (à droite).

L'instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard apparaît si une couche de fluide confinée horizontalement, chauffée par le bas et refroidie par le haut, est soumise au champ de gravité. Il existe de nombreux travaux sur ce sujet dans le cas de fluides newtoniens, beaucoup moins dans le cas de fluides non newtoniens.

Le phénomène de Rayleigh-Bénard correspond à l'état instable dans lequel se trouve une couche de fluide dilatable, couche confinée entre deux plans rigides horizontaux, d'épaisseur  $d$  et soumise à un écart de température  $\Delta T$ . La structure du fluide est encore stable et au repos, si cet écart dépasse une valeur critique  $\Delta T_c$ .

Les instabilités de Rayleigh-Bénard sont contrôlées par une concurrence entre plusieurs forces ; la poussée d'Archimède (la force motrice), la dissipation de quantité de mouvement (le terme visqueux) et la diffusivité thermique. Ces deux dernières représentent les forces de freinage.

On s'intéresse ici à la configuration idéalisée d'une couche fluide horizontale forcée par un gradient thermique vertical. L'état conductif est caractérisé par une vitesse nulle et un profil linéaire de température à gradient vertical. On suppose que le bas de la couche est plus chaud que le haut et l'on augmente progressivement le forçage. Lorsque le forçage thermique est faible, l'état conductif est stable. Une perturbation de température ou de vitesse est dissipée par la diffusion thermique ou la viscosité avant que la force d'Archimède n'ait eu le temps

d'agir. Lorsque le forçage thermique dépasse un seuil critique, l'état conductif devient instable et des mouvements de convection apparaissent.

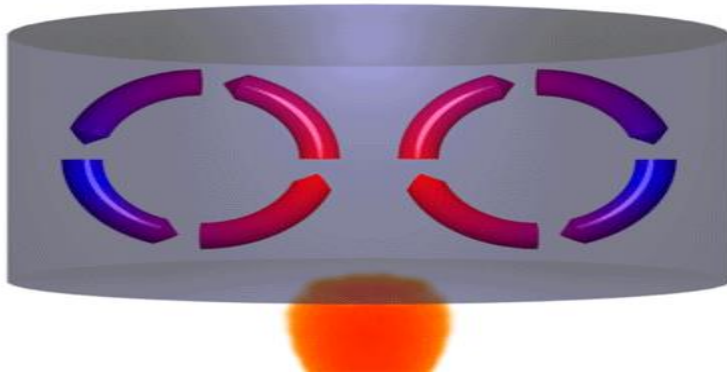


Fig1.13. Mouvement du fluide lors d'une convection Rayleigh-Bénard (instabilité du fluide et apparition des rouleaux convectifs).

### 1.5.1 Approximation de Boussinesq :

En 1903, Gauthier-Villars éditait à Paris le tome II, du traité de Joseph Boussinesq intitulé : « Théorie Analytique de la Chaleur ». A la page VII de l'Avertissement à ce tome II Boussinesq écrit : « ...il fallait encore observer que, dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante de l'*unité de volume* soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité  $g$ , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci...». Cette observation est, ce que l'on appelle, aujourd'hui : « l'approximation de Boussinesq » (en accord avec l'appellation, en 1916, de Rayleigh), et une conséquence spectaculaire en est la possibilité de considérer un système d'équations quasi-incompressible couplé pour la dynamique (équation de Navier) et la température (équation de Fourier) pour lequel la poussée d'Archimède est la force active principale régissant le mouvement.

L'approximation de Boussinesq en mécanique des fluides désigne une approximation des équations de Navier-Stokes pour des écoulements incompressibles à surface libre dans lesquels existe un gradient de masse volumique vertical entraînant l'absence d'équilibre hydrostatique.

L'approximation de Boussinesq permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes, prenant en compte des forces de flottabilité (poussée d'Archimède) à l'échelle local dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température. Cette étude de stabilité s'effectue en linéarisant les équations autour de l'état conductif. On

montre alors que la stabilité de l'état conductif ne dépend que de la valeur du nombre de Rayleigh.

Pour décrire le mouvement de convection d'un fluide chauffé par le bas, les équations de Navier-Stokes compressibles sont trop complexes, et les équations de Navier-Stokes incompressibles ne rendent pas compte des forces de flottabilité. L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces forces car la densité volumique des forces extérieures est celle induite par le champ de gravité.

### 1.5.2 Le mécanisme de la convection de Rayleigh-Bénard :

La présence d'un gradient thermique dans le fluide induit un gradient de densité. Des particules se refroidissent au contact de la plaque froide, deviennent plus denses et ont donc tendance à couler. D'autres particules deviennent moins denses au contact de la plaque chaude, elles se dilatent et ont donc tendance à monter. C'est cette différence de densité qui fait naître la poussée d'Archimède au sein du fluide, poussée qui croît avec l'augmentation de l'écart de température entre le haut et le bas du fluide. Le système est en équilibre mécanique, et le transfert thermique reste purement conductif tant que la poussée d'Archimède n'arrive pas à vaincre les forces de freinages que sont le frottement visqueux et la dissipation thermique

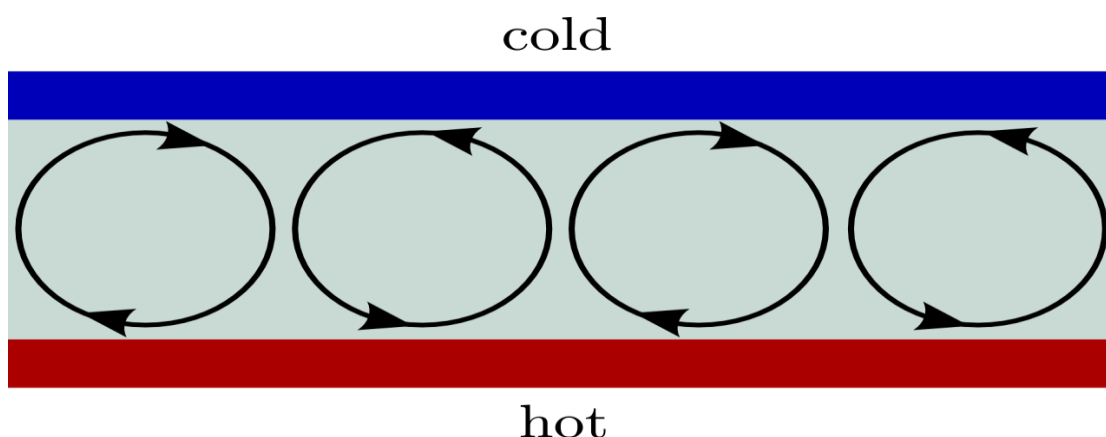


Fig1.14 - Bifurcation dans la convection Rayleigh-Bénard (mécanisme physique).

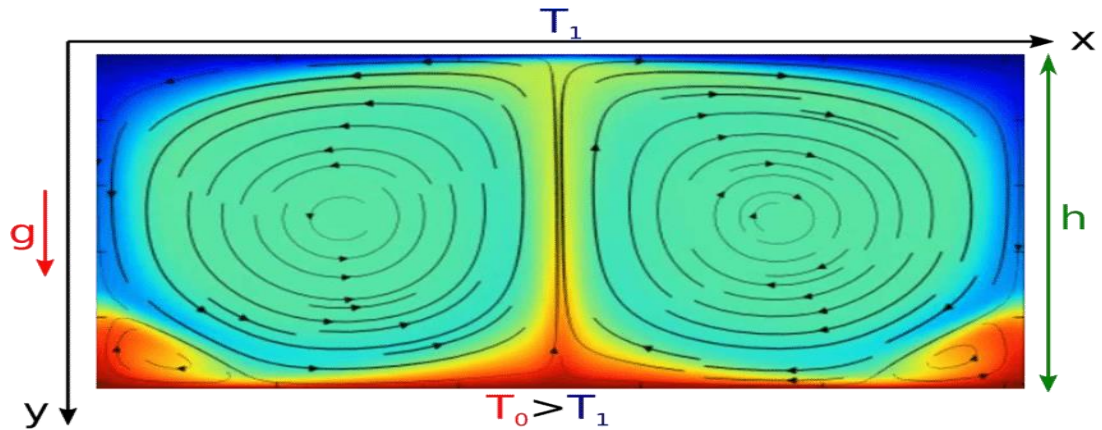


Fig1.15 - Mouvement de fluide entre les deux couches après la différence du température (Convection Rayleigh-Bénard)

A partir d'un certain écart de température entre le haut et le bas du fluide, la poussée d'Archimède devient suffisamment importante pour enclencher les mouvements ascendants et descendants de convection. Des mouvements apparaissent, en général sous forme de rouleaux contrarotatifs bidimensionnels (Figures 1.4.1 et 1.4.2) ; le sens de rotation est difficile à prédire théoriquement

L'écart de température  $\Delta T$  est exprimé par le nombre sans dimension  $Ra$ . Le nombre de Rayleigh met donc en évidence le lien entre les différentes forces de ce phénomène par :

$$Ra = \frac{\text{poussée d'Archimède}}{\text{force visqueuse } \times \text{ diffusion thermique}}$$

### 1.5.3 Le Nombre de Rayleigh :

Le nombre de Rayleigh  $Ra$  est le paramètre de contrôle de la convection thermique. Plus le nombre de Rayleigh est grand, plus la convection est intense. Il s'écrit sous la forme :

$$Ra = \frac{g \cdot \alpha \cdot h^3 \cdot \Delta T}{\kappa \cdot \nu}$$

ou  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique isobare,  $h$  la hauteur de la cellule de convection,  $\Delta T$  la différence de température entre le haut et le bas de la cellule,  $\kappa$  la diffusivité thermique et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Rayleigh peut s'interpréter comme une mesure de l'importance du mécanisme responsable de l'instabilité du fluide (la poussée d'Archimède) par rapport aux mécanismes de freinage (la

diffusivité thermique et la viscosité). Il est également possible de voir le nombre de Rayleigh comme la différence de température  $\Delta T$  adimensionnée.

#### 1.5.4 La cellule de Rayleigh-Bénard :

Les cellules de Rayleigh-Bénard sont un concept relatif à la convection qui désigne un phénomène observé en 1900 lors d'une expérience simple réalisée par Henri Bénard, un physicien français<sup>1</sup>. Ce sont des cellules de convection qui apparaissent spontanément dans un liquide quand on lui applique une source de chaleur extérieure. Elles illustrent la théorie des systèmes dissipatifs, d'une façon simple et aisément compréhensible. La formation de ces structures convectives résulte de la déstabilisation du milieu fluide dans le cadre de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.



Figure 1.16 - Image réelle d'apparition des cellules Rayleigh-Bénard après l'expérience physique.

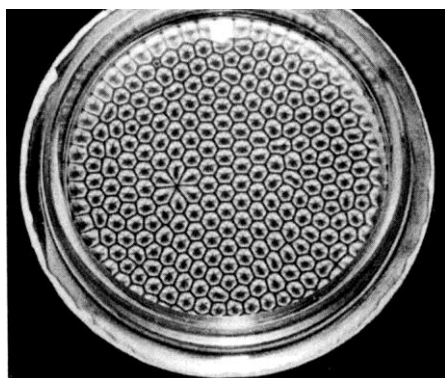


Fig. 1.17 - Vue microscopique des cellules Rayleigh Bénard.

#### 1.5.5 Le phénomène de la convection Rayleigh-Bénard dans la nature :

La convection de Rayleigh-Bénard induite par une instabilité d'origine thermique apparaît dans de nombreux phénomènes naturels comme en géologie, dans l'océan avec les courants

océaniques ou encore dans l'atmosphère. Les mécanismes de convection dans le manteau terrestre (fig. 1.4.5) sont très étudiés par les géophysiciens car ils pourraient être à l'origine du déplacement des plaques tectoniques. En effet, bien que le manteau soit constitué de roches solides, la température et la pression élevées régnant à l'intérieur de la Terre font qu'elles adoptent un comportement visqueux. Le nombre de Rayleigh du manteau terrestre est d'ailleurs extrêmement élevé puisqu'il est égal à 100 millions.

Dans l'atmosphère, la convection est souvent provoquée par le chauffage de l'air au niveau du sol par le Soleil. Ainsi, c'est toute la circulation atmosphérique de la Terre qui est régulée par ce phénomène (fig. 1.4.6). L'air très chaud de l'équateur monte et se dirige vers les latitudes plus hautes en se refroidissant avant de redescendre vers le sol. À une échelle plus proche de nous, les cellules de convection sont aussi à l'origine de nombreuses manifestations météorologiques parfois violentes comme les orages, les tornades ou les pluies de mousson ou plus inoffensives comme les brises thermiques (fig. 1.4.7).

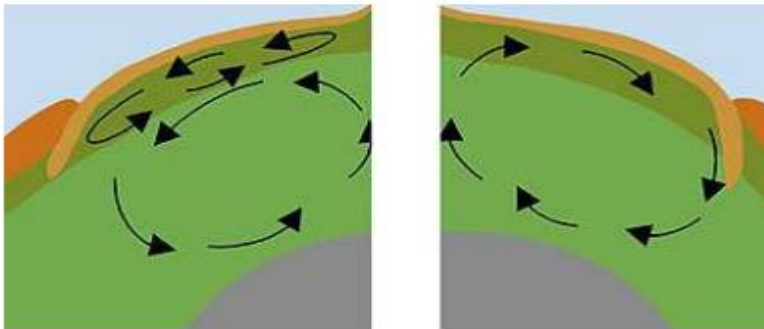


Fig. 1.18 - Représentation schématique de deux modèles de répartition des cellules de convection dans le manteau terrestre.



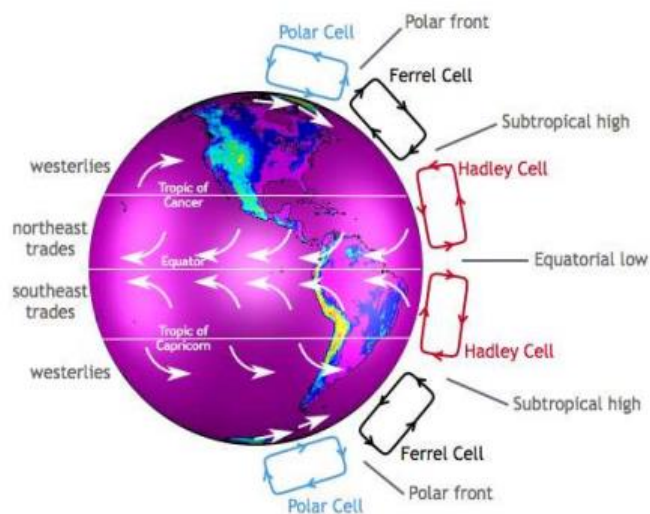


Fig.

1.19 -Circulation atmosphérique générale sous forme de cellules de convection aussi connues sous le nom de cellules de Hadley

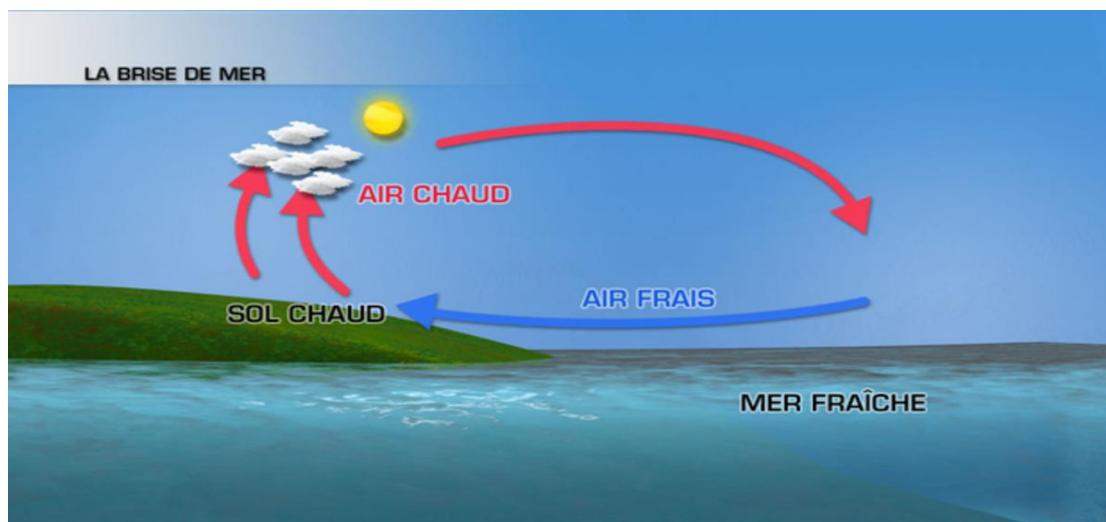


Fig.1.20 -Brise de mer : en journée, le sol est chauffé par le Soleil et devient plus chaud que l'eau, l'air présent s'élève et crée une zone de basse pression attirant l'air marin. Brise de terre : la nuit, l'eau se refroidit moins vite que le sol, c'est alors le phénomène inverse qui se produit.

## ***Chapitre 2 : Formulation mathématique du problème***

### ***Introduction :***

Un important aspect d'un écoulement est sa stabilité, c'est-à-dire l'effet qu'a une perturbation sur un état donné de l'écoulement. Si une petite perturbation est introduite dans l'écoulement, et que cette perturbation voit son amplitude croître à une valeur finie, l'écoulement peut basculer vers un autre état. Dans ce nouvel état de nouvelles perturbations peuvent apparaître et s'ajouter de telle sorte que l'écoulement atteigne un état chaotique appelé turbulence.

Dans ce chapitre, la stabilité de l'équation gouvernante l'écoulement sera examinée par une analyse linéaire de la stabilité. On présentera une approche générale de la méthode dite des modes normaux. L'étude sera faite par une linéarisation des équations du mouvement autour d'un état de base (dans notre cas un état purement conductif) en supposant que l'amplitude de la perturbation est petite. On montrera que la stabilité de l'état de base ne dépend que d'un paramètre, dit de contrôle, qui dans notre étude n'est autre que le nombre de Rayleigh. Les inconvénients de la méthode sont que l'approche ne considère que le développement initial de la perturbation. Cependant les résultats obtenus dans ce chapitre, concordent bien avec les résultats obtenus par l'approche numérique du chapitre suivant.

### **2-2- Formulation du problème :**

#### **2-2-1- Modèle des équations :**

Dans cette section, les lois de conservation applicables à un fluide seront formulées tels que ceux pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Diverses approximations seront ensuite appliquées pour obtenir un ensemble d'équations connues sous le nom d'équations de Boussinesq.

**2-2-1-1- Conservation de la masse :** exprime que le fluide est continu, et que la masse se conserve dans l'écoulement. Elle s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} = 0 \quad (2.1)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique et  $\vec{U}$  est le vecteur des vitesses. Si le fluide est incompressible elle se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (2.1.a)$$

**2-2-1-2- Conservation de la quantité de mouvement :** traduit la deuxième loi de Newton et donne des équations dites de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement des fluides

newtoniens. Elles permettent de proposer une modélisation de nombreux phénomènes, et s'expriment mathématiquement sous la forme tensorielle suivante :

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

où  $g_i$  est l'accélération gravitationnelle et  $\tau_{ij}$  est le tenseur des contraintes composé des contraintes tangentielles (dites de viscosité) et des contraintes normales.

Dans le cas d'un écoulement incompressible on peut montrer que ces équations prennent la forme :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.3)$$

Appelées équation de Navier-Stokes.  $p$  est la pression et  $\mu$  la viscosité dynamique

**2-2-1-3- Conservation de l'énergie :** L'équation de la conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Moyennant différentes approximations on obtient la forme thermique finale suivante

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T \right) = \kappa \nabla^2 T \quad (2.4)$$

### 2-3- Approximation de Boussinesq :

On utilise une hypothèse simplificatrice connue par l'approximation de Boussinesq qui permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des forces de flottabilité (poussée d'Archimède) dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température.

Le système d'équations de l'approximation de Boussinesq étant énoncé, on s'intéresse à la configuration idéalisée d'une couche fluide horizontale forcée par un gradient thermique vertical en imposant les températures aux frontières.

On considère  $\rho$  constante sauf dans les termes des forces de volume ou elle est variable et ne dépendant que de la température. Si on note par  $\rho_0$  la valeur à une température de référence, alors pour une faible perturbation (ou variation) :

$$\rho(T) \approx \rho_0 + d\rho = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT \quad (2.5)$$

En notant par  $\beta$  le coefficient d'expansion volumique :

$$\beta = -1/\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_m} \quad (2.6)$$

Alors :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_m)) \quad (2.7)$$

Où  $T_m$  est une température moyenne ou de référence.

Les équations du mouvement s'écrivent donc, sous une forme tensorielle :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1. b)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i(1 - \beta(T - T_m)) + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2. b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2.3. b)$$

( $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  : diffusivité thermique)

## 2-4- Géométrie et conditions aux limites :

Le fluide peut-être soit confiné entre deux surfaces solides, avoir une surface libre, ou avoir deux surfaces libres (voir figure (2.1)).

La dernière configuration, quoi qu'irréaliste, a été celle traitée par Rayleigh.

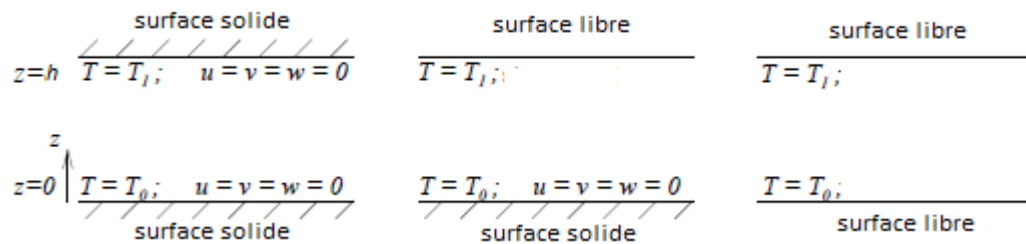


Figure 2.1 - Surfaces de la géométrie (Conditions aux limites)

Quel que soit le cas traité (surface solide ou libre) la température est maintenue constante le long de chaque frontière. Concernant la vitesse on a les conditions aux limites suivantes.

$u = v = 0$  (Adhérence) et  $w = 0$  (imperméabilité) pour une surface solide.

Le long d'une surface libre on montre que  $w = \partial^2 w / \partial z^2 = 0$  (condition de contraintes nulles)

## 2-5- Etat de base (état purement conductif) :

On appelle état conductif la solution stationnaire pour laquelle  $U_i = 0$ . Dans ce cas, on montre facilement que le champ de température  $T$  est égal au profil conductif qui s'écrit  $T_b(z)$

$$T = T_b(z)$$

On a :  $U_i = 0$ , et les équations s'écrivent :

$$0 = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i(1 - \beta(T - T_m)) \quad (2.2. c)$$

$$0 = \nabla^2 T \Rightarrow \frac{d^2 T_b}{dz^2} = 0 \Rightarrow T_b(z) = Az + B \quad (2.3. c)$$

Les conditions aux limites sont :  $z = 0, T_b = T_0$

$z = h, T_b = T_1$

$$\Rightarrow T_b(z) = -\frac{T_0 - T_1}{h} z + T_0 = -\frac{\Delta T}{h} z + T_0 \quad (2.8)$$

On définit la température de référence (ou moyenne) :

$$T_m = \frac{T_0 + T_1}{2} \quad (2.9)$$

Alors :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i (1 - \beta(T - T_m)) \quad (2.10)$$

## 2-6- Etat perturbé :

A l'état de base on superpose une petite perturbation :

$$U_i = 0 + \dot{U}_i, \quad p = p_b + \dot{p}, \quad T = T_b + \dot{T}$$

Les équations s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1. d)$$

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial t} + \dot{U}_j \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \dot{p}}{\partial x_i} - \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \dot{p}}{\partial x_i} + 1 - g_i (1 - \beta(T_b - T_m) - \beta \dot{T})$$

$$+ \nu \frac{\partial^2 \dot{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2. d)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} + \dot{U}_j \frac{\partial (T_b + \dot{T})}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 \dot{T} + \alpha \nabla^2 T_b \quad (2.3. d)$$

$$\text{On tire : } \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_i} = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \dot{p}}{\partial x_i} - g_i \beta \dot{T} + \nu \frac{\partial^2 \dot{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2. e)$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \dot{T} - \dot{W} \frac{\partial T_b}{\partial z} = \alpha \nabla^2 \dot{T} + \dot{W} \frac{\Delta T}{h} \quad (2.3. e)$$

( $\dot{W}$  c'est la composante de la perturbation de vitesse suivant z)

### Elimination de la pression :

On élimine la pression de la façon suivante. On prend la divergence des équations du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial t} \right) = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \dot{p}}{\partial x_i \partial x_i} - g_i \beta \frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 \dot{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (2.2. f)$$

Permutation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_i} \right) = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \dot{p}}{\partial x_i \partial x_i} - g_i \beta \frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_i} \right) \quad (2.2. g)$$

L'équation de continuité  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$ , donne

$$\frac{-1}{\rho_0} \nabla^2 \dot{p} + g \beta \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} = 0 \quad (\vec{g} = (0, 0, -g)) \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 \dot{p} = -g \beta \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} \Rightarrow \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \dot{p} = -g \beta \frac{\partial^2 \dot{T}}{\partial z^2} \quad (2.11. a)$$

L'équation de  $\dot{W}$  est donnée par :

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial t} = -\frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \dot{p}}{\partial z} + g \beta \dot{T} + \nu \nabla^2 \dot{W} \quad (2.12)$$

En prenant le  $\nabla^2$  de cette équation on tire :

$$\nabla^2 \frac{\partial \dot{W}}{\partial t} = -\frac{-1}{\rho_0} \nabla^2 \left( \frac{\partial \dot{p}}{\partial z} \right) + g \beta \nabla^2 \dot{T} + \nu \nabla^4 \dot{W} \quad (2.13)$$

$$= -\frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \dot{p}) + g \beta \nabla^2 \dot{T} + \nu \nabla^4 \dot{W}$$

$$= -g \beta \frac{\partial^2 \dot{T}}{\partial z^2} + g \beta \nabla^2 \dot{T} + \nu \nabla^4 \dot{W}$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \dot{W}}{\partial t} = g\beta \nabla_{xy}^2 \dot{T} + \nu \nabla^4 \dot{W} \quad (2.14)$$

$$\left( \nabla_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \dot{T} + \dot{W} \frac{\Delta T}{h} \quad (2.15)$$

Qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \dot{W} = g\beta \nabla_{xy}^2 \dot{T} \quad (2.16)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \right) \dot{T} = \dot{W} \frac{\Delta T}{h} \quad (2.17)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{En } z = 0, h \quad \dot{W} = \dot{T} = 0$$

L'équation de continuité donne en  $z = 0, h$  (comme  $\dot{U} = \dot{V} = 0$  sur les plaques : condition d'adhérence) :

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

L'équation étant du 4<sup>ème</sup> ordre et nécessite donc quatre conditions aux limites.

## 2-7- Méthode de séparation de variable ou méthodes des modes normaux :

Les équations en  $\dot{W}$  et  $\dot{T}$  étant linéaires, on recherche une solution sous la forme :

$$\dot{W}(x, y, z, t) = W(z)f(x, y)e^{\sigma t}, \quad \dot{T}(x, y, z, t) = \theta(z)f(x, y)e^{\sigma t} \quad (2.19)$$

La substitution dans (2.16) et (2.17) donne :

$$\left[ \sigma - \nu \left( f \frac{d^2}{dz^2} + \nabla_{xy}^2 f \right) \right] \left( f \frac{d^2}{dz^2} + \nabla_{xy}^2 f \right) W = g\beta \nabla_{xy}^2 f \theta \quad (2.20)$$

$$\left[ \sigma - \alpha \left( f \frac{d^2}{dz^2} + \nabla_{xy}^2 f \right) \right] \theta = W f \frac{\Delta T}{h} \quad (2.21)$$

Si on pose que :

$$\nabla_{xy}^2 f = -\frac{a^2}{h^2} f \quad (2.22)$$

(où  $a$  est une constante liée à la géométrie du problème) alors :

Les équations se réduisent à :

$$\left[ \sigma - \nu \left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] \left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) W = -g\beta \frac{a^2}{h^2} \theta \quad (2.23)$$

$$\left[ \sigma - \alpha \left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] \theta = W \frac{\Delta T}{h} \quad (2.24)$$

Note : dans le cas 2-D on a  $f = f(x)$  et  $\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{a^2}{h^2} f$

$$\Rightarrow f(x) = A \cos \frac{a}{h} x + B \sin \frac{a}{h} x = C e^{i \frac{a}{h} x} \quad (2.25)$$

Où  $a/h$  s'identifie à un nombre d'onde.

La constante  $\sigma$  (appelée taux de croissance) peut être complexe, où sa partie réelle est associée avec le taux de croissance de la perturbation, et sa partie imaginaire associée avec le comportement oscillatoire de la perturbation. On montre que dans le cas de l'instabilité de Rayleigh Bénard,  $\sigma$  est purement réelle.

Puisque (2.22) et (2.23) sont à coefficients constants on peut rechercher des solutions sous la forme :

$$W = Ae^{qz/h} \quad \text{et} \quad \theta = Be^{qz/h} \quad (2.26)$$

D'où :

$$\left[ \sigma - \nu \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) A = -g\beta \frac{a^2}{h^2} B \quad (2.27)$$

$$\left[ \sigma - \alpha \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] B = A \frac{\Delta T}{h} \quad (2.28)$$

D'où :

$$A = \frac{\left[ \sigma - \alpha \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] B}{\frac{\Delta T}{h}} \quad (2.29)$$

$$\left[ \sigma - \nu \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \frac{\left[ \sigma - \alpha \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] B}{\frac{\Delta T}{h}} = -g\beta \frac{a^2}{h^2} B \quad (2.30)$$

$$\left[ \sigma - \nu \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \left[ \sigma - \alpha \left( \frac{q^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) \right] = -g\beta \frac{a^2 \Delta T}{h^3} \quad (2.31)$$

Comme le signe de  $\sigma$  détermine si la solution est stable ou instable, on s'intéresse à la limite entre ses deux états  $\sigma = 0$  (Appelée stabilité marginale ou neutre). D'où :

$$(q^2 - a^2)^3 = -g\beta \frac{a^2 h^3 \Delta T}{\nu \alpha} = -a^2 Ra, \quad (2.32)$$

où  $Ra = \frac{g\beta h^3 \Delta T}{\nu \alpha}$  est le nombre de Rayleigh. (2.33)

En posant

$$a^2 Ra = \tau^3 a^6 \quad (2.34)$$

On aura donc :

$$(q^2 - a^2)^3 = -\tau^3 a^6 \Rightarrow q^2 = a^2 + (-1)^{\frac{1}{3}} \tau a^2 \quad (2.35)$$

Les trois racines de  $(-1)^{1/3}$  sont :

$$(-1), \quad \frac{1}{2(1+i\sqrt{3})}, \quad \frac{1}{2(1-i\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow q^2 = -a^2(\tau - 1) \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow q^2 = a^2 \left[ \left( 1 + \frac{\tau}{2} (1 + i\sqrt{3}) \right) \right] \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow q^2 = a^2 \left[ \left( 1 + \frac{\tau}{2} (1 - i\sqrt{3}) \right) \right] \quad (2.38)$$

En prenant les racines carrées de chaque racine on trouve :

$$\bullet \quad q_0 = \pm ia(-1 + \tau)^{\frac{1}{2}} \quad (2.36.a)$$

$$\bullet \quad q_1 = \pm a \left( 1 + \tau/2 (1 + i\sqrt{3}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.37.a)$$

$$\bullet \quad q_1 = \pm a \left( 1 + \tau/2 (1 - i\sqrt{3}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.38.a)$$

Et la solution prend la forme :

$$W(z) = A_1 e^{q_0 \frac{z}{h}} + A_2 e^{-q_0 \frac{z}{h}} + A_3 e^{q_1 \frac{z}{h}} + A_4 e^{-q_1 \frac{z}{h}} + A_5 e^{q_2 \frac{z}{h}} + A_6 e^{-q_2 \frac{z}{h}} \quad (2.39)$$

Les conditions aux limites donnent :

$$W(z=0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 \quad (2.40)$$

$$W(z = h) = 0 \Rightarrow A_1 e^{q_0} + A_2 e^{-q_0} + A_3 e^{q_1} + A_4 e^{-q_1} + A_5 e^{q_2} + A_6 e^{-q_2} \quad (2.41)$$

$$\dot{W}(z = 0) = 0 \Rightarrow q_0 A_1 - q_0 A_2 + q_1 A_3 - q_1 A_4 + q_2 A_5 - q_2 A_6 \quad (2.42)$$

$$\dot{W}(z = h) = 0$$

$$\Rightarrow q_0 A_1 e^{q_0} - q_0 A_2 e^{-q_0} + q_1 A_3 e^{q_1} - q_1 A_4 e^{-q_1} + q_2 A_5 e^{q_2} - q_2 A_6 e^{-q_2} \quad (2.43)$$

Les deux dernières conditions aux limites sont obtenues en considérons l'équation(2.17)en z =0 et h pour  $\sigma = 0$

$$\Rightarrow \left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right)^2 W(0) = 0 \quad (2.44)$$

$$\text{et} \quad \left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right)^2 W(h) = 0 \quad (2.45)$$

$$(q_0^2 - a^2)^2 A_1 + (q_0^2 - a^2)^2 A_2 + (q_1^2 - a^2)^2 A_3 + (q_1^2 - a^2)^2 A_4 + (q_2^2 - a^2)^2 A_5 + (q_2^2 - a^2)^2 A_6 = 0 \quad (2.46)$$

$$(q_0^2 - a^2)^2 A_1 e^{q_0} + (q_0^2 - a^2)^2 A_2 e^{-q_0} + (q_1^2 - a^2)^2 A_3 e^{q_1} + (q_1^2 - a^2)^2 A_4 e^{-q_1} + (q_2^2 - a^2)^2 A_5 e^{q_2} + (q_2^2 - a^2)^2 A_6 e^{-q_2} \quad (2.47)$$

Pour trouver les solutions non triviales à ce système d'équations on l'écrit sous une forme matricielle  $MA = 0$  où

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & e^{q_0} & q_0 & q_0 e^{q_0} & (q_0^2 - a^2)^2 & (q_0^2 - a^2)^2 e^{q_0} \\ 1 & e^{-q_0} & -q_0 & -q_0 e^{-q_0} & (q_0^2 - a^2)^2 & (q_0^2 - a^2)^2 e^{-q_0} \\ 1 & e^{q_1} & q_1 & q_1 e^{q_1} & (q_1^2 - a^2)^2 & (q_1^2 - a^2)^2 e^{q_1} \\ 1 & e^{-q_1} & -q_1 & -q_1 e^{-q_1} & (q_1^2 - a^2)^2 & (q_1^2 - a^2)^2 e^{-q_1} \\ 1 & e^{q_2} & q_2 & q_2 e^{q_2} & (q_2^2 - a^2)^2 & (q_2^2 - a^2)^2 e^{q_2} \\ 1 & e^{-q_2} & -q_2 & -q_2 e^{-q_2} & (q_2^2 - a^2)^2 & (q_2^2 - a^2)^2 e^{-q_2} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix},$$

et on résout l'équation  $\det(A) = 0$ . Cette dernière équation a été résolue pour un ensemble de valeur fixes de a. Quand a est fixe, la valeur de M ne dépend que de la valeur de Rayleigh. Par conséquent pour chaque valeur de a, on obtient une équation du type  $\det(M(Ra))_a = 0$ . Cette équation a été résolue numériquement par la méthode de Newton-Raphson dans MATLAB.



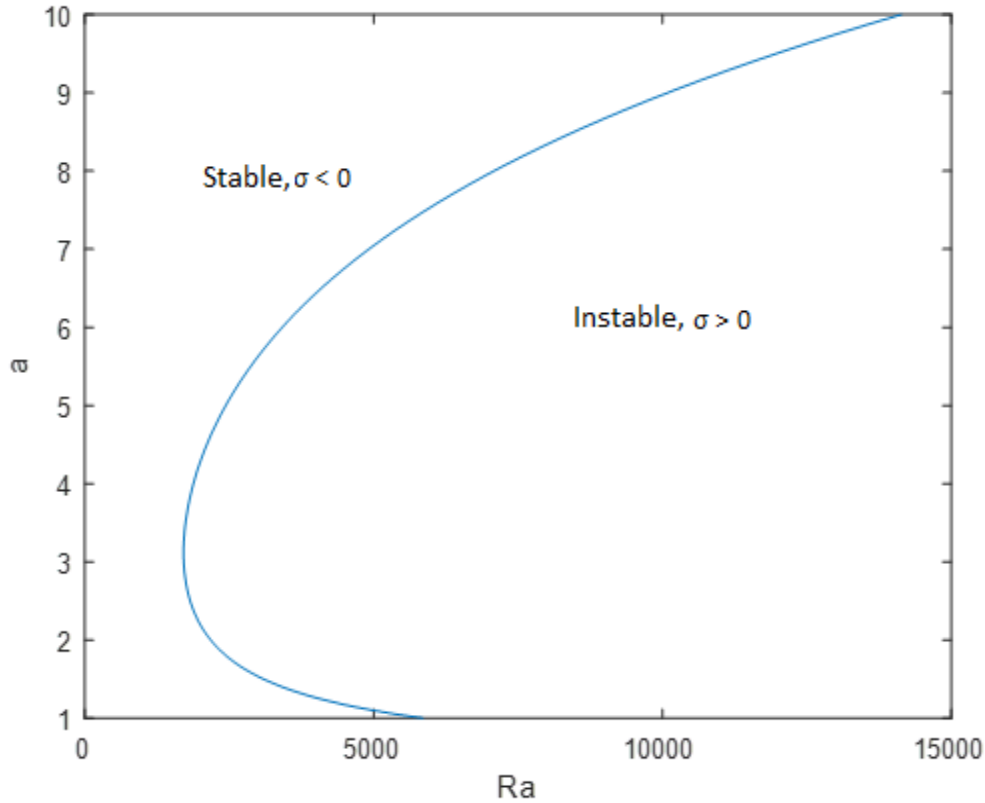


Figure (2.2) : Courbe de stabilité marginale (cas de 2 surface solides)

Dans le cas d'une cellule de convection présentant une paroi solide et une surface libre, les conditions aux limites à la surface libre s'écrivent (contraintes tangentielles nulles à la surface)

$$W' = T' = \mu(\partial U' / \partial z + \partial W' / \partial x) = \mu(\partial V' / \partial z + \partial W' / \partial y) = 0 \quad (2.48)$$

Comme  $W'(x, y, h) = 0$  est nulle en tout point de la surface libre, les équations précédentes imposent donc

$$\partial U' / \partial z = \partial V' / \partial z = 0. \quad (2.49)$$

En dérivant l'équation de continuité par rapport à  $z$  on tire que

$$\partial^2 W' / \partial z^2 = 0 \quad (2.50)$$

La combinaison des équations (2.22) et (2.23) donne

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right)^3 W = - \frac{ga^2 \Delta T}{\alpha h^3} W \quad (2.51)$$

L'équation (2.22), pour  $\sigma = 0$ , permet d'écrire que

$$W = \left( d^2 / dz^2 - a^2 / h^2 \right)^2 W = d^2 W / dz^2 = 0, \quad (2.52)$$

à la surface libre. En développant l'opérateur  $\left( d^2 / dz^2 - a^2 / h^2 \right)^2$ , les conditions à la surface libre s'écrivent finalement

$$W = \frac{d^2 W}{dz^2} = \frac{d^4 W}{dz^4} = 0 \quad (2.53)$$

Les trois conditions à la paroi sont

$$W = W' = \left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{a^2}{h^2} \right) W = 0 \quad (2.54)$$

Avec ces nouvelles conditions aux limites la matrice des coefficients M précédemment définie s'écrit

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & e^{q_0} & q_0 & q_0^2 e^{q_0} & q_0^4 e^{q_0} & (q_0^2 - a^2)^2 \\ 1 & e^{-q_0} & -q_0 & q_0^2 e^{-q_0} & q_0^4 e^{-q_0} & (q_0^2 - a^2)^2 \\ 1 & e^{q_1} & q_1 & q_1^2 e^{q_1} & q_1^4 e^{q_1} & (q_1^2 - a^2)^2 \\ 1 & e^{-q_1} & -q_1 & q_1^2 e^{-q_1} & q_1^4 e^{-q_1} & (q_1^2 - a^2)^2 \\ 1 & e^{q_2} & q_2 & q_2^2 e^{q_2} & q_2^4 e^{q_2} & (q_2^2 - a^2)^2 \\ 1 & e^{-q_2} & -q_2 & q_2^2 e^{-q_2} & q_2^4 e^{-q_2} & (q_2^2 - a^2)^2 \end{pmatrix}$$

La résolution numérique du système d'équation se fait de la même façon que pour le cas de deux plaques solides.

La solution numérique donne une valeur critique du nombre de Rayleigh de  $Ra,c = 1101$  correspondant à un nombre d'onde de  $a = 2.7$ . Les valeurs théoriques sont 1101 et 2.68

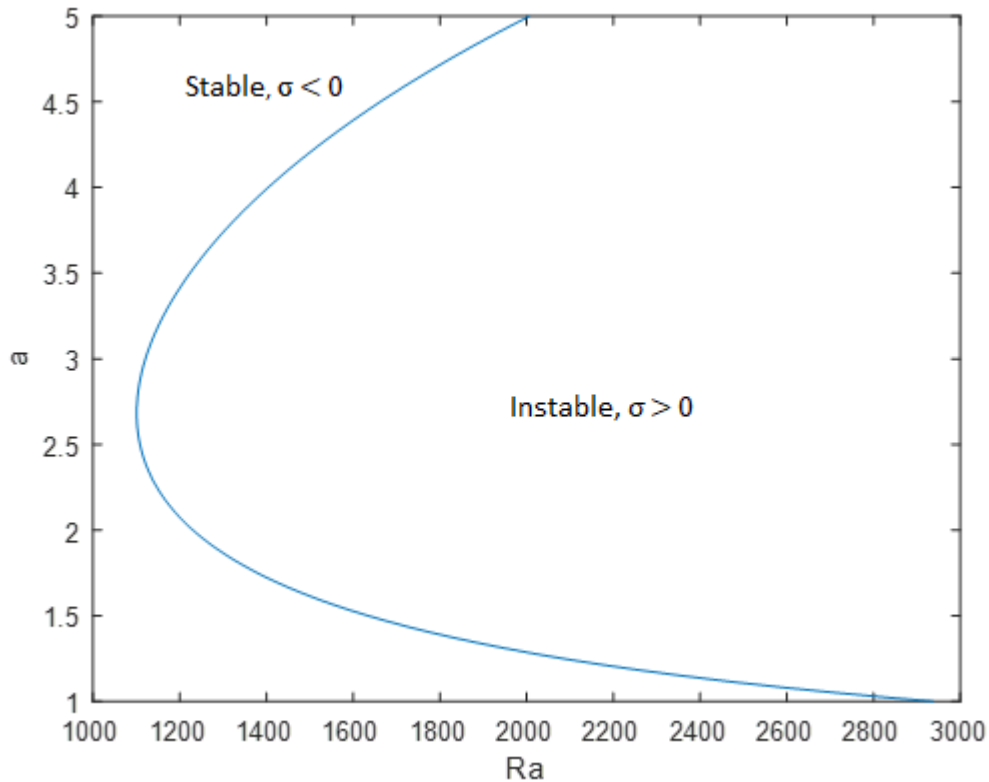


Figure 2.3 : Courbe de stabilité marginale (cas d'une surface solide et d'une surface libre)

## Résultats :

Dans la figure (2.2) on peut observer que la valeur la plus basse du nombre de Rayleigh sur la limite de stabilité est  $Ra = 1708$  pour  $a = 3,12$ . Donc la plus grande valeur de Rayleigh pour laquelle la solution est stable pour toutes les valeurs de  $a$  est  $Ra = 1708$

Les mêmes constatations peuvent être faites pour le cas de la figure (2.3). La plus grande valeur de Rayleigh conditionnant la stabilité pour toute valeur de  $a$  est  $Ra = 1101$ .

## Chapitre 3 : Vérification numérique de la théorie

### 3-1- Introduction :

Dans ce chapitre on se propose de valider les résultats analytiques du chapitre précédent par une résolution numérique des équations générales du mouvement. Pour simuler numériquement le problème, le code commerciale ANSYS Fluent (Académique version 2019) a été utilisé.

### 3-2- Description du problème :

Considérons deux plaques infiniment longue distantes de  $h$ . la plaque inférieure est à la température  $T_0$ , et celle supérieure à la température  $T_1$ , tel que  $T_0 > T_1$ . Entre les deux plaques on a un fluide de masse volumique  $\rho$ , de viscosité cinématique  $\nu$ , de diffusivité thermique  $\alpha$ , et de coefficient d'expansion thermique  $\beta$ . Le domaine D dans lequel le fluide est situé est défini par

$$0 < z < h, -\infty < x, y < \infty.$$

L'écoulement est gouverné par les équations développées dans le chapitre précédent et qui sous forme vectorielle s'écrivent

$$\text{div} \vec{U} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 \vec{U}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \nabla^2 T, \quad (3.3)$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_m)) \quad (3.4)$$

On suppose :

- Fluide visqueux newtonien (la loi de comportement reliant contrainte et déformation est linéaire et isotrope).
- Les forces se réduisent à l'accélération de la pesanteur.
- Les propriétés physiques de l'air confiné à l'intérieur de la cavité sont supposées constantes.
- Les vitesses mises en jeu sont faibles. on considère l'air comme un fluide incompressible.
- Le fluide est complètement transparent (pas d'échange par rayonnement au sein du fluide).
- L'écoulement est laminaire et bidimensionnel.

Comme conditions aux limites on a

$$\vec{U}(x, y, 0, t) = \vec{U}(x, y, h, t) = 0 \quad \forall x, y \in D, t > 0$$

$$T(x, y, 0, t) = T_0 ; T(x, y, h, t) = T_1$$

A l'état initial le fluide est à l'état de repos et la température est linéairement distribuée

$$T(z, 0) = T_0 + \frac{z}{h}(T_0 - T_1) \quad x, y, z \in D$$

$$\vec{U}(x, y, z, 0) = 0 \quad x, y, z \in D$$

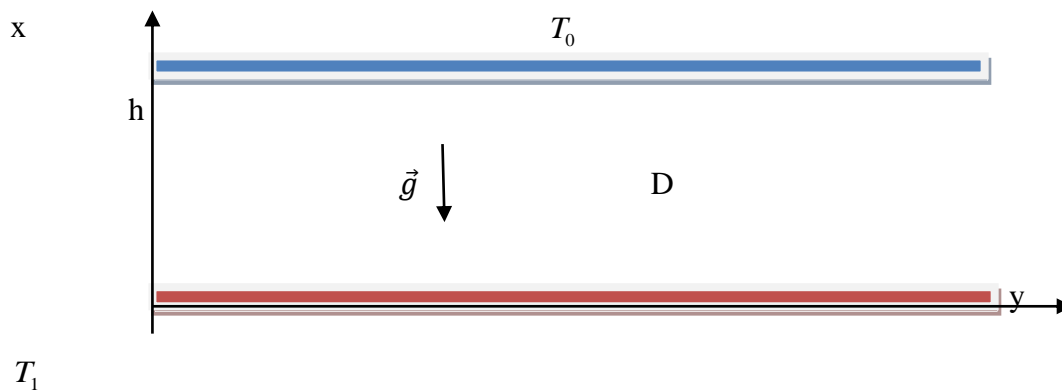


Figure 3.1 – Cavit e rectangulaire (deux surfaces solide)

Cependant pour la résolution numérique du problème, le domaine infini est remplacé par un domaine fini. Dans le cas bidimensionnel, les dimensions du domaine sont L suivant x, et h suivant z. le fluide de travail est l'eau à 20 C dont les paramètres physiques sont donnés par le tableau 3.1

Parameters	Valeur
$Cp(J/(kg.K))$	4182
$\rho(kg/m^3)$	998.3
$\mu(kg/(m.s))$	0.00103
$\nu(m^2/s)$	$10^{-6}$
$k(W/(m.K))$	0.6
$\alpha(m^2/s)$	$1.436 * 10^{-7}$
$\beta(K^{-1})$	$0.207 * 10^{-3}$

Tableau 3.1 – Les paramètres thermo- physique de l'eau à 20  C

### 3-3- Choix de paramètres et procédure numérique :

Un modèle laminaire a été appliqué puisque l'écoulement dans le régime d'instabilité est essentiellement laminaire. Le schéma retenu pour la discrétisation des équations de quantité de mouvement et de la chaleur est un schéma de 2<sup>ème</sup> ordre amont (Second Order Upwind). Pour s'affranchir du problème posé par le couplage pression/vitesse et pour résoudre les équations couplées, nous avons utilisé l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations) (12). Le schéma de discrétisation Presto a été employé pour la pression (13). Les facteurs de sous-relaxation ont été placés à 1.0 pour la pression, la densité, les forces de corps, 0.7 pour la quantité de mouvement et 0.9 pour l'énergie, ceci aide et allège les calculs qui ont été ralentis par les conditions imposées. Les solutions ont été considérées convergées pour les solutions équilibrées quand les résiduels calculés sont en-dessous de  $10^{-6}$ , pour l'équation de la continuité, les équations de la quantité de mouvement et l'équation d'énergie.

### 3-4- Calcul :

**3-4-1- Température :** la température de la plaque inférieure a été déterminée à partir de la différence de température qui a été calculée à partir de la formule du nombre de Rayleigh. Ce processus a été répété avec des valeurs de Rayleigh différentes, suivant cette relation :

$$T = \frac{\nu \alpha Ra}{\beta g h^3} \quad (3.5)$$

$$\Delta T = \frac{10^{-6} * 1.436 * 10^{-7} * Ra}{9.81 * 0.207 * 10^{-3} * h^3}$$

$$\Delta T = (0.7 \times 10^{-10}) Ra / h^3 \quad (3.6)$$

et donc

$$T_0 = T_1 + \Delta T \quad (3.7)$$

Ra	$\Delta T$
1000	0,07
1400	0,098
1500	0,105
1600	0,112
1700	0,119
1720	0,1204
1725	0,12075
1730	0,1211
1740	0,1218
1750	0,1225
1800	0,126
1900	0,133
2000	0,14
3000	0,21
5000	0,35
5500	0,385
6000	0,42
6500	0,455

Tableau 3.2 – Résultats de calcul de différence de température à partir de nombre de Rayleigh

### 3-4-2- Nombre de Nusselt (Nu)

Le nombre de Nusselt définit le rapport entre le flux thermique totale et le flux thermique purement conductif

$$\text{Nu} = \frac{\text{flux thermique total}}{\text{flux thermique par conduction}} \quad (3.8a)$$

Le flux thermique total est  $Q_{\text{total}} = Q_{\text{conduction}} + Q_{\text{convection}}$ , d'où

$$\text{Nu} = \frac{Q_{\text{conduction}} + Q_{\text{convection}}}{Q_{\text{conduction}}} = 1 + \frac{Q_{\text{convection}}}{Q_{\text{conduction}}} \quad (3.8b)$$

Avec  $Q_{\text{conduction}} = \frac{k\Delta T}{h} \cdot A$ , où A est la surface d'échange entre la plaque inférieur et le fluide.

Soit

$$\text{Nu} = 1 + \frac{Q_{\text{convection}}}{(k\Delta T/h)A} \begin{cases} =1 \text{ Régime conductif} \\ >1 \text{ Régime convectif} \end{cases} \quad (3.8c)$$

La mesure de Nusselt permet donc de déterminer le point de transition entre les deux régimes. De même la variation de Nusselt avec le nombre de Rayleigh permet la détermination du nombre de Rayleigh critique.

Notons que la solution du problème pour chaque valeur de Rayleigh donne la quantité de chaleur totale correspondante et donc Nusselt.

On calcule  $Q_{tot}$  à chaque fois qu'on change la température de la plaque inférieure sous Fluent.

Pour le Maillage de rapport de forme (1/2) :

$$Nu = Q_{tot}/(1.2 * \Delta T) \quad (3.8. b)$$

Les résultats de ce cas sont affichés dans le tableau (3.3) ci-dessus.

Pour le Maillage de rapport de forme (1/3) :

$$Nu = Q_{tot}/(1.8 * \Delta T) \quad (3.8. c)$$

Pour le Maillage de rapport de forme (1/7) :

$$Nu = Q_{tot}/(4.2 * \Delta T) \quad (3.8. d)$$

### **3-4-3- La vitesse maximale :**

Une autre façon de déterminer le point d'instabilité est la détermination de la valeur maximale de la vitesse en terme du nombre de Rayleigh (et donc de  $\Delta T$ ). Le passage de l'état conductif à l'état convectif se traduit par un passage du fluide d'un état statique à un état de mouvement. Cette valeur de la vitesse maximale est accessible sous Fluent.

### **3-4-3- Résultats et discussion :**

La première tentative de détermination du nombre de Rayleigh critique a été faite avec un maillage relativement grossier de 40x20 sur un domaine de 2cm de long et 1cm de large. Les résultats obtenus pour différents nombres de Rayleigh sont donnés par le tableau (3.3).

La figure (3.1) montre les contours statiques de la température à  $Ra = 700$ . On peut clairement voir que les isothermes sont parfaitement horizontales et sans distorsion, ce qui signifie qu'aucune instabilité ne s'est installée. La figure (3.3) correspondant à un nombre de Rayleigh de 1710 montre que l'instabilité vient juste de s'installer. Ceci est conforme à la théorie puisqu'il ressort de l'analyse de la stabilité linéaire que le nombre de Rayleigh critique est d'environ 1708 (voir figure 3.2). Notons que cette valeur dite théorique est approximative. La



figure (3.5) montre la longueur d'onde de la variation de la magnitude de la vitesse (ou vitesse maximale) qui est de l'ordre de 1cm c'est-à-dire de l'ordre de la profondeur de la couche de fluide.

La figure (3.4) montre que la forme des cellules convectives est sensiblement carrée correspondant à la forme géométrique rectangulaire de l'enceinte formée de deux plaques infiniment longues suivant la direction horizontale. La structure et la forme des cellules de convection dépend des conditions aux limites et de la forme des enceintes. C'est un sujet de recherche active dans l'étude de la convection de Rayleigh Bénard.

Ra	$\Delta T$	Qtot	Vmax	Nu
1000	0,07	0,084	0	1
1400	0,098	0,1176	0	1
1500	0,105	0,126	0	1
1600	0,112	0,1344	0	1
1700	0,119	0,1428	0	1
1710	0,12005	0,1443	0,00000578	1,0017
1720	0,12004	0,1453	0,0000108	1,0057
1750	0,1225	0,1514	0,0000249	1,029
1800	0,126	0,1616	0,0000383	1,068
1900	0,133	0,1823	0,0000564	1,14223
2000	0,14	0,2031	0,00007024	1,209
3000	0,21	0,419	0,000155	1,6627
5000	0,35	0,8868	0,0002688	2,1114
5500	0,385	1,010233	0,0002937	2,18665
6000	0,42	1,13586	0,0003178	2,2537
6500	0,455	1,263655	0,00034125	2,3144

Tableau 3.3 : Résultat de la simulation pour un maillage de (40\*20)

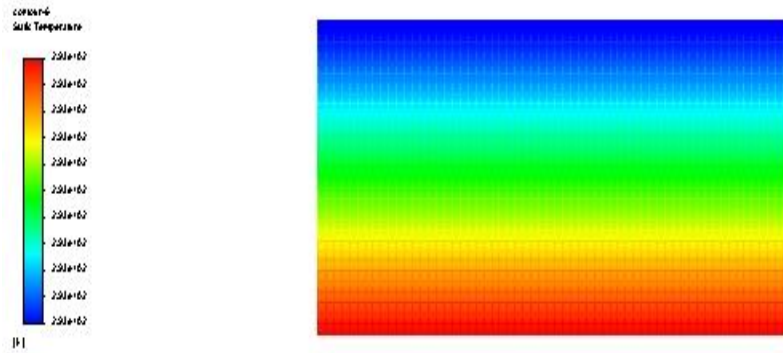


Figure 3.2 – Contour de température à Ra=700

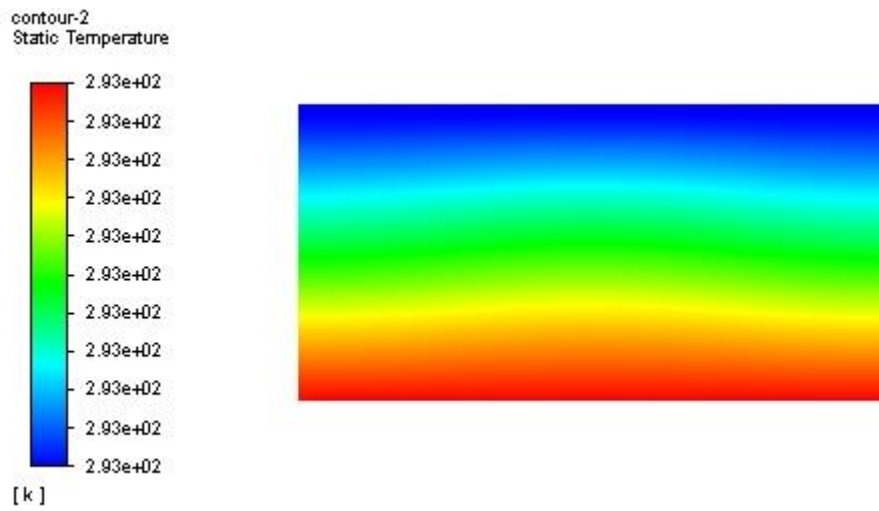


Figure 3.3 – Contour de température à Ra=1710

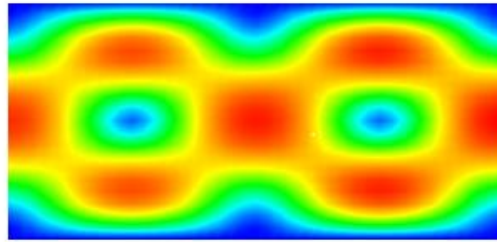
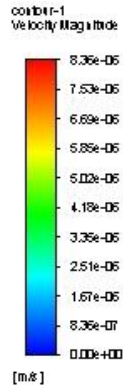


Figure 3.4 – Contour de vitesse à Ra=1710

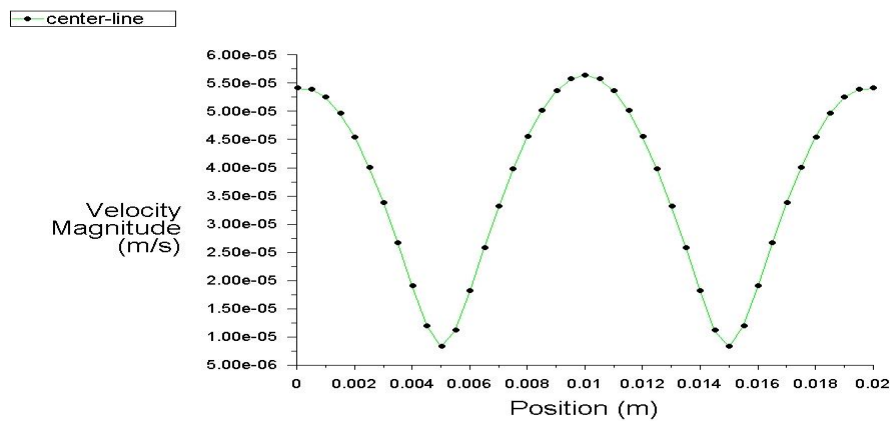


Figure 3.5 – Variation de la magnitude de la vitesse le long de la ligne centrale suivant la coordonnée x

### 3-5- L'effet de Maillage :

Après la vérification de notre théorie avec un maillage de (40\*20). On a étudié l'effet du maillage sur la valeur du nombre de Rayleigh critique. Pour cela on a considéré deux autres maillages plus fins qui sont (60\*30), (100\*80) correspondant à la même configuration géométrique, et dont les résultats sont résumés dans les tableaux (3.4) et (3.5).

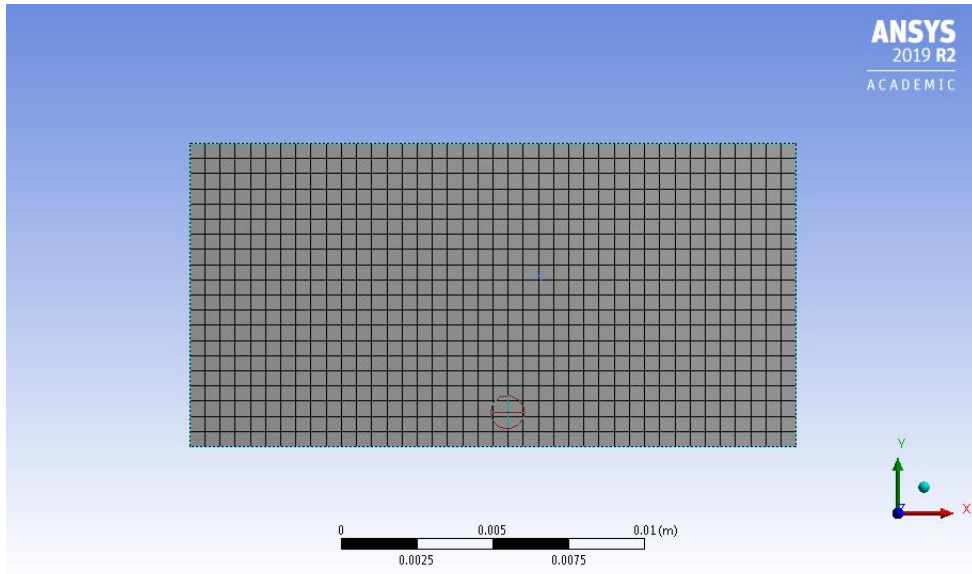


Figure3.6 –Maillage (60\*30)

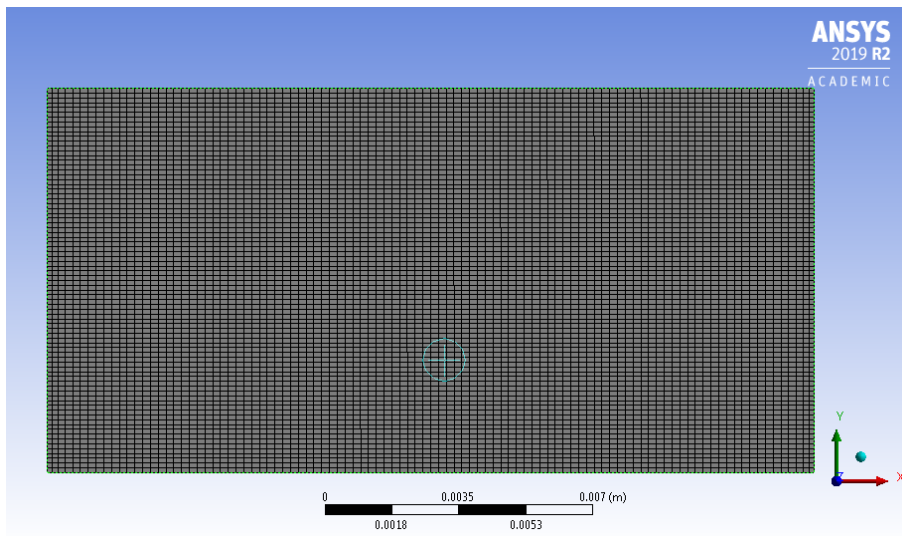


Figure 3.7- Maillage (80\*100)

### 3-5-1- Les tables des résultats de simulation et calculs pour différents maillage:

Ra	$\Delta T$	Qtot	Vmax	Nu
1000	0.07	0.084	0	1
1400	0.098	0.076	0	1
1500	0.105	0.126	0	1
1600	0.112	0.1344	0	1
1700	0.119	0.1428	0	1
1720	0.1204	0.14448	0	1
1725	0.12075	0.1449	0	1.00836
1730	0.1211	0.1456	0.0000065	1.002
1740	0.1218	0.14766	0.000014515	1.01
1750	0.1225	0.1497	0.00001948	1.018
1800	0.126	0.15994	0.000035	1.057
1900	0.133	0.18056	0.00005427	1.1313
2000	0.14	0.20133	0.0000685	1.1984
3000	0.21	0.4166	0.0001542	1.6553
5000	0.35	0.882	0.0002672	2.1
5500	0.385	1.0046	0.000292	2.17446
6000	0.42	1.1292	0.000316	2.24047
6500	0.455	1.256	0.0003392	2.3003

Tableau 3.4: Résultat de la simulation pour un maillage de (60\*30)

Ra	$\Delta T$	Qtot	Vmax	Nu
1000	0,07	0,084	0	1
1400	0,098	0,1176	0	1
1500	0,105	0,126	0	1
1600	0,112	0,1344	0	1
1700	0,119	0,1428	0	1
1750	0,1225	0,1493	0,00000436	1,008
2000	0,14	0,1858	0,000026	1,105
3000	0,21	0,2665	0,0000372	1,05
5000	0,35	0,8765	0,0002622	2,08
6500	0,455	1,2582	0,0003383	2,3

Tableau 3.5 : Résultat de la simulation pour un maillage de (100\*80)

### 3-5-2-Résultats et discussion :

Pour le maillage (40\*20), d'après le tableau (3.3) on remarque que le nombre de Nusselt est supérieur à 1 et la vitesse maximale commence à apparaître quand le  $Ra = 1710$  qui représente le Rayleigh critique, et les rouleaux dans le contour de température dans la figure (3.7) montrent l'apparition de l'instabilité.

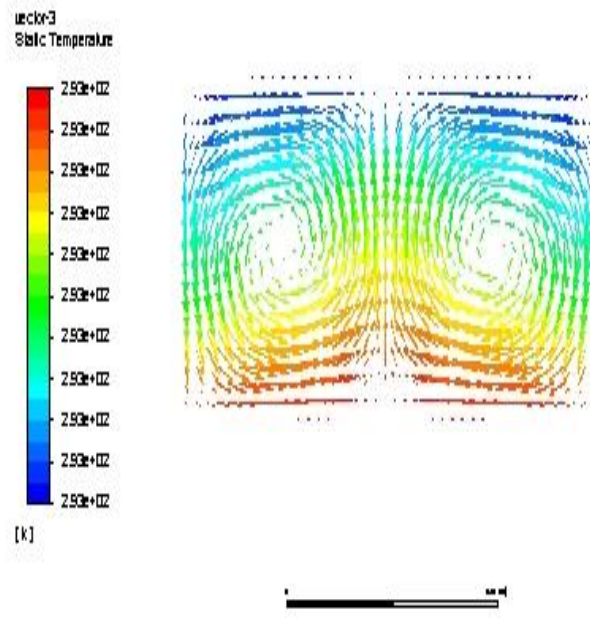


Figure 3.8 – Contour de température à  $Ra=1710$

Pour le maillage (60\*30), d'après le tableau (3.4) on remarque que le nombre de Nusselt est supérieur à 1 et la vitesse maximale commence à apparaître quand le  $Ra = 1730$  qui représente le Rayleigh critique, et les déviations dans le contour de température dans la figure (3.8) montrent l'apparition de l'instabilité.

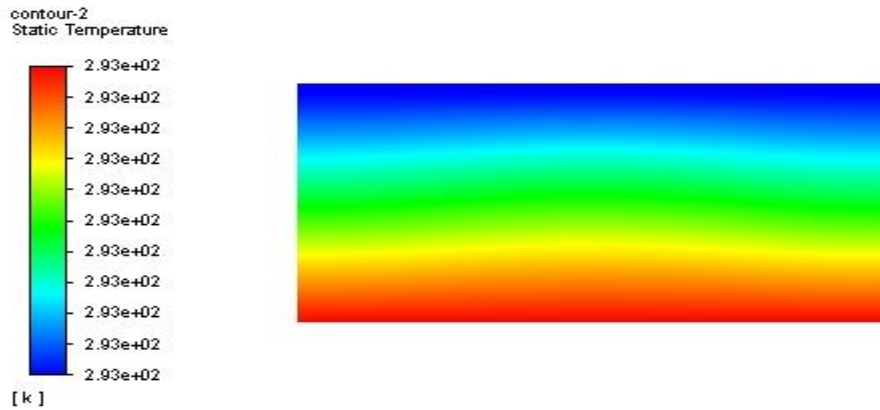


Figure 3.9 – Contour de température à Ra=1730

Pour le maillage (100\*80), d’après le tableau (3.5) on remarque que le nombre de Nusselt est supérieur à 1 et le mouvement convectif commence à apparaître quand le  $Ra = 1750$  qui représente le Rayleigh critique, et les déviations dans le contour de température dans la figure (3.9) montent l’apparition de l’instabilité.

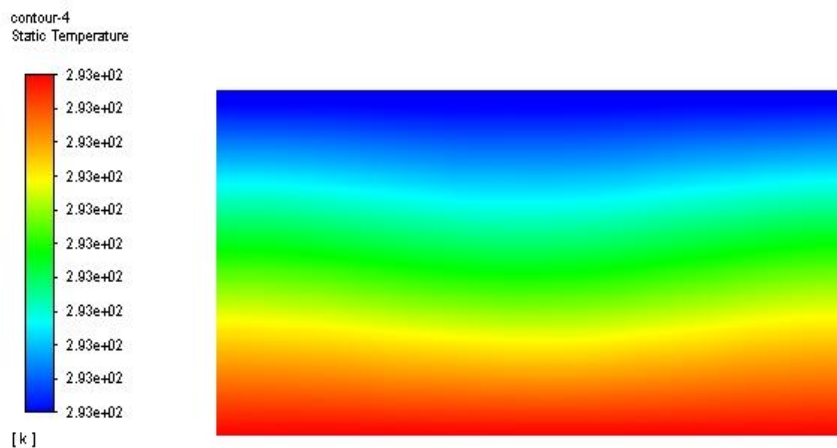


Figure 3.10– Contour de température à Ra=1750

D’après la figure (3.10), on peut en conclure que le Rayleigh critique augmente avec l’augmentation du nombre d’éléments d’une géométrie.

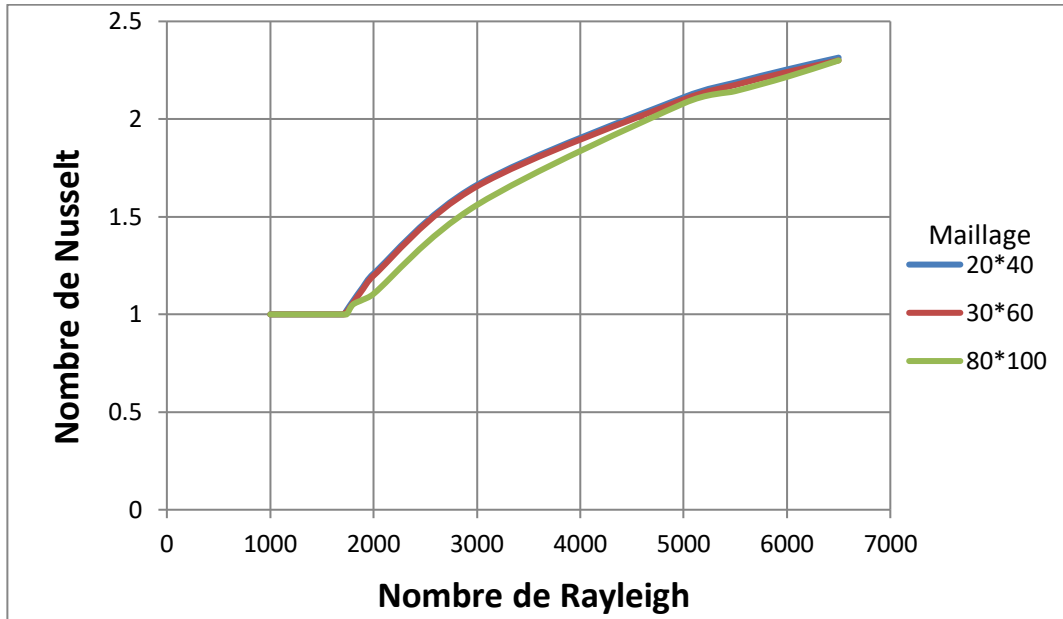


Figure 3.11 – Nombre de Nusselt en fonction de nombre de Rayleigh

### 3-6- L'influence du rapport de forme :

L'étude précédente a montré que la finesse du maillage retardait l'apparition de l'instabilité et par conséquent éloignait le nombre de Rayleigh critique de sa valeur théorique. Dans cette partie du travail on a voulu étudier l'effet qu'avait la forme de l'enceinte sur l'instabilité et sur le nombre de Rayleigh critique. Pour cet effet on a considéré deux autres formes d'enceinte ayant un facteur de forme de 1/5 et 1/7.

Les résultats du calcul numérique obtenus pour ces deux cas sont ci-dessous :

#### 3-6-1 Cas 1/5

Ra	$\Delta T$	$Q_{tot}$	Vmax	Nu
1000	0.07	0.21	0	1
1400	0.098	0.294	0	1
1500	0.105	0.315	0	1
1600	0.112	0.336	0	1
1700	0.119	0.358428	0.00000912	1.004
1715	0.12005	0.36926	0.0000212	1.021
1800	0.126	0.4094	0.0000424	1.083

Tableau 3.6 : Résultat de la simulation pour un rapport de forme de (1/5)



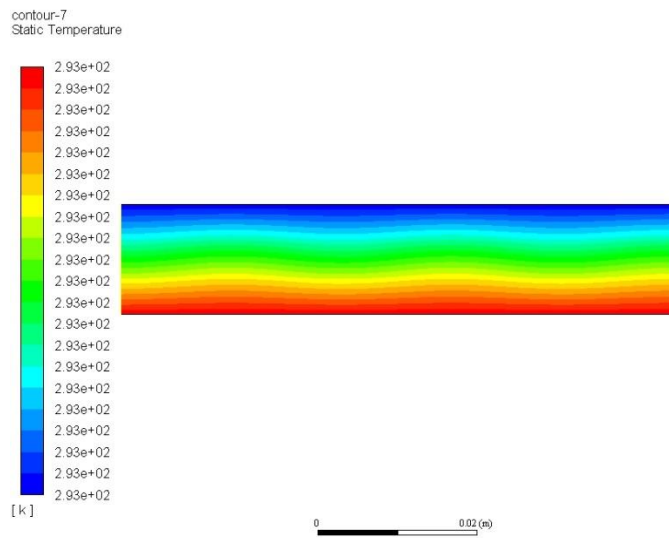


Figure 3.12 – Contour de température à Ra=1700

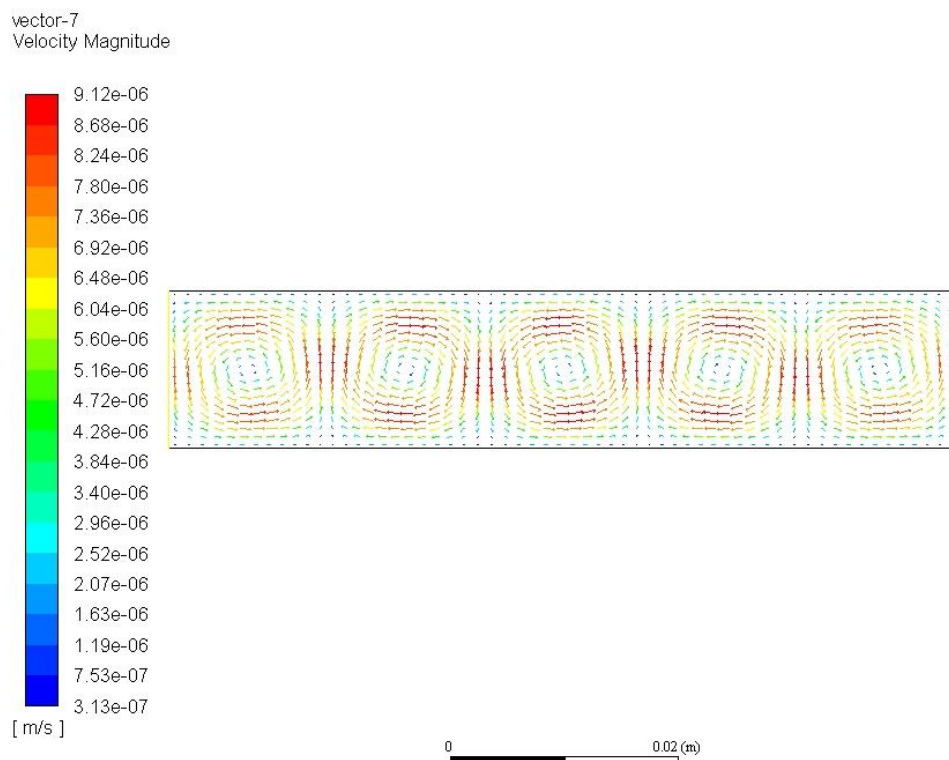


Figure 3.13 – Contour de vitesse à Ra=1700

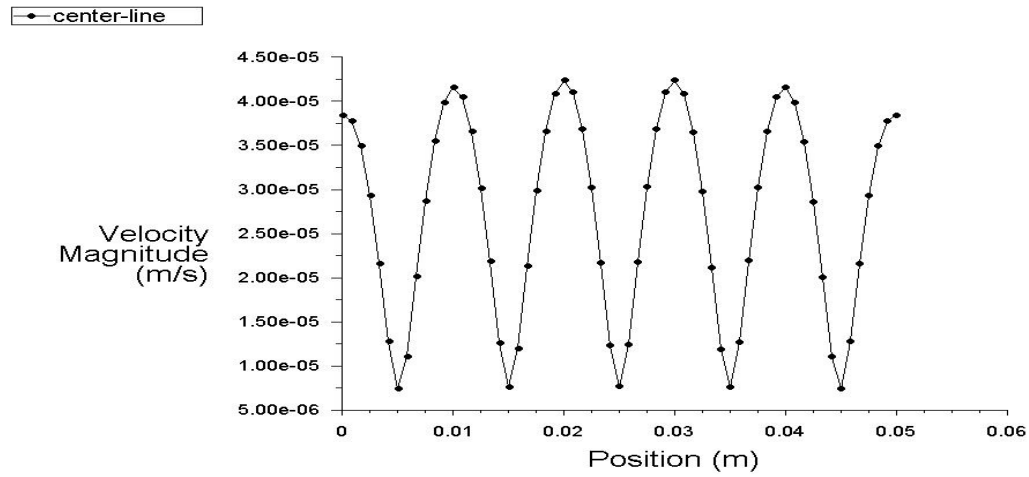


Figure 3.14 – Variation de la magnitude de la vitesse le long de la ligne centrale suivant la coordonnée x pour Ra=1700

### 3-6-2 - Cas 1/7

Ra	$\Delta T$	$Q_{tot}$	Vmax	Nu
1000	0.07	0.29	0	1
1400	0.098	0.418	0	1
1500	0.105	0.442	0	1
1600	0.112	0.4746055	0	1
1700	0.119	0.5037265	0.00000214	1.024
1715	0.12005	0.52260513	2.141E-06	1.03648
1800	0.126	0.5822305	4.6082E-05	1.0723

Tableau 3.6 : Résultat de la simulation pour un rapport de forme de (1/7)

contour-8  
Static Temperature

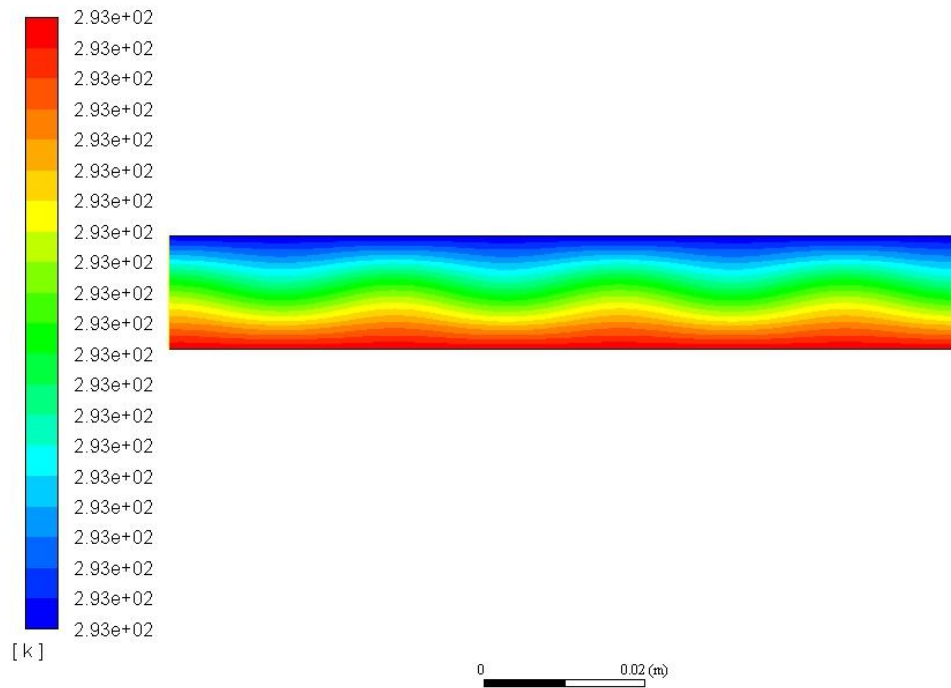


Figure 3.15 – Contour de température à Ra=1700

**ANSYS**  
2019 R2  
ACADEMIC

vector-3  
Velocity Magnitude

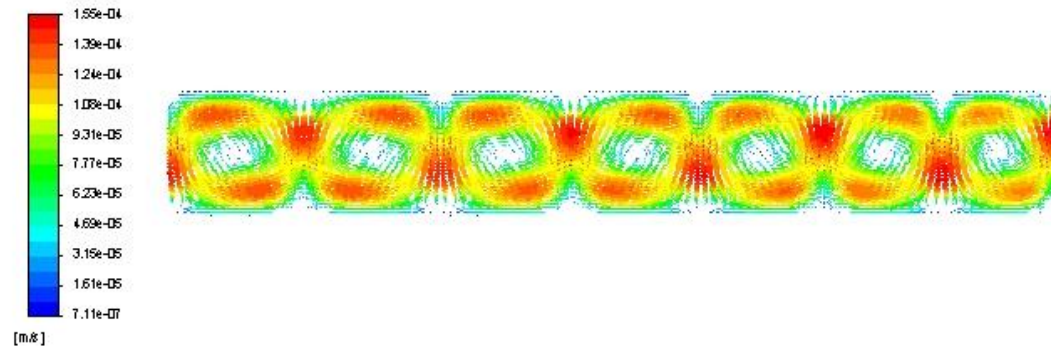
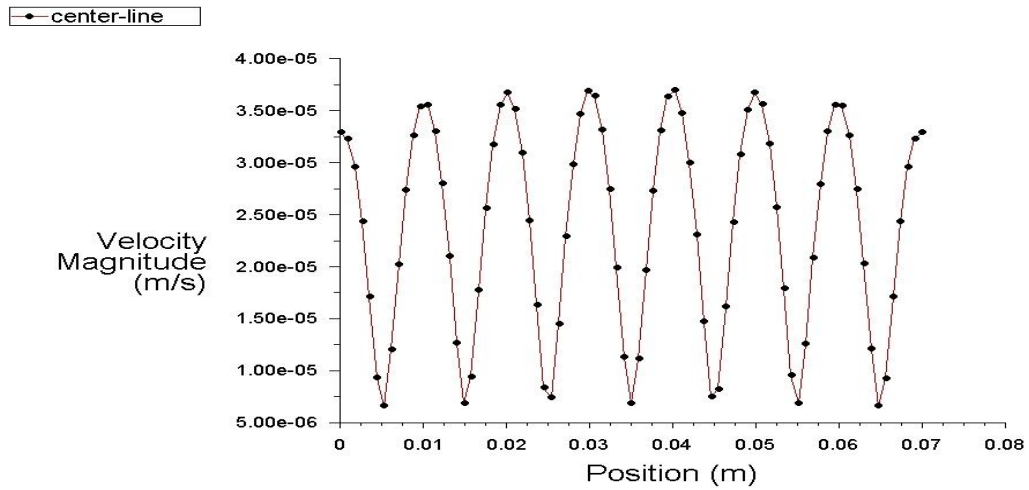


Figure 3.16 – Contour de vitesse à Ra=1700



Figure

3.17 – Variation de la magnitude de la vitesse le long de la ligne centrale suivant la coordonnée  $x$  pour  $Ra=1700$

Les résultats présentés montrent que l'instabilité s'installe d'autant plus vite que le rapport de forme est plus grand. De plus on note que le nombre de rouleaux convectif est égal au facteur de forme. Un calcul plus poussé a montré que ceci n'est vrai que pour un nombre de Rayleigh inférieur à une valeur limite au-delà de laquelle on apparition d'un nouveau rouleau convectif en contradiction avec la référence (Bhattacharya ).

vector-13  
Velocity Magnitude

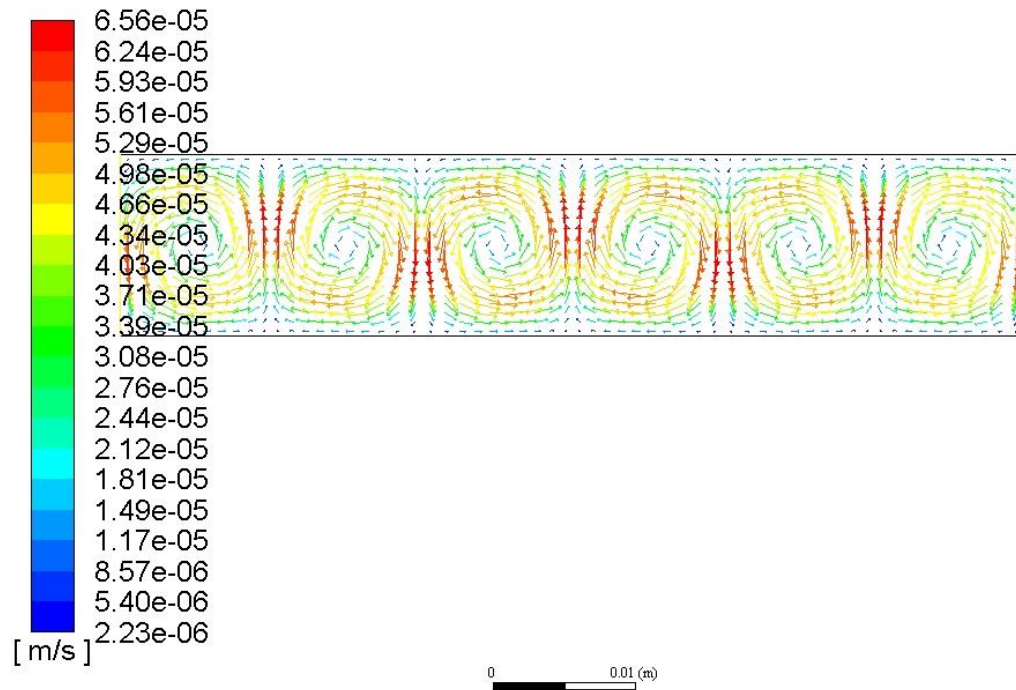


Fig. 3.18- Contours de vitesse pour un facteur de forme de 1/5 et Ra=2000

vector-11  
Velocity Magnitude

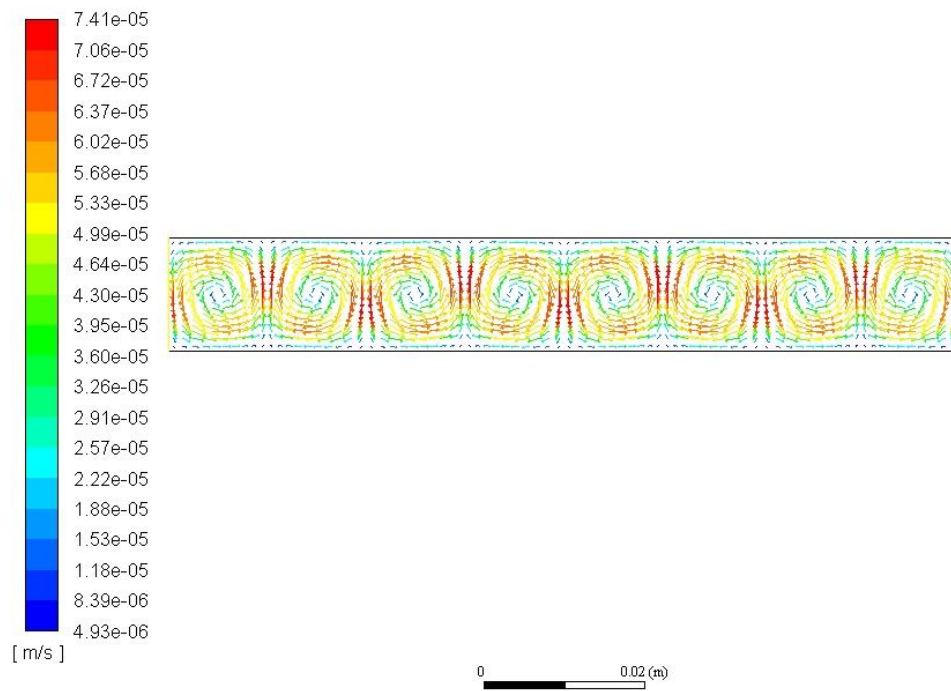


Fig. 3.19- Contours de vitesse pour un facteur de forme de 1/7 et Ra=2000

## **Conclusion générale :**

Le but de notre travail est de faire l'étude des instabilités hydrodynamiques et particulier l'instabilité thermo convective de Rayleigh-Bénard. Lors de ce projet nous avons réussi à structurer une démarche pour appréhender de manière numérique un phénomène aussi complexe que les instabilités de Rayleigh-Bénard.

La réalisation de ce mémoire nous a permis d'acquérir des connaissances sur le phénomène des instabilités hydrodynamiques des fluides newtoniens.

L'étude théorique a montré que l'instabilité s'installait, dans le cas de conditions aux limites rigides (deux plaques planes), pour un nombre de Rayleigh de l'ordre de 1708. Cependant l'expérimentation numérique a montré que cette valeur dépendait de deux facteurs : la finesse du maillage utilisé et du facteur de forme de l'enceinte. Concernant le premier facteur, on a constaté que la finesse du maillage retardait l'installation de l'instabilité (chose contre intuitive). Le deuxième facteur par contre hâtait l'installation de l'instabilité. Cela peut s'expliquer par le fait que plus la surface d'échange est importante, pour une même différence de température, plus la quantité de chaleur échangée est importante ce qui permet au fluide de surmonter l'effet stabilisant de la diffusion thermique et de la dissipation visqueuse.

Le cas de condition aux limites rigide-surface libre, seule l'étude théorique a été faite. L'expérimentation numérique n'a pas été entreprise vu le manque de temps consacré à la rédaction du mémoire, et la complexité de la modélisation numérique.

Ce projet a un réel intérêt dans de multiples domaines. D'un point de vue industriel il est fréquent de rencontrer ce type de situations dans les procédés qui font intervenir des lits fluidisés. Il peut aussi s'avérer particulièrement adaptés aux problèmes industriels qui sont régis par la convection naturelle comme le développement de double vitrage. L'instauration de rouleaux de convection est aussi très courante en météorologie et en océanographique.

Finalement on tient à souligner que cette étude n'a concerné que les fluides newtoniens, et que par conséquent le travail pourrait être étendu au cas des fluides non newtoniens.





## Annexes :

### 1/ cas de deux plaques solides

#### Le programme pour la fonction :

```
Function y = my_fct (Ra)
Global a
q0= 1i*a*(-1+ (Ra/a^4)^(1/3))^(1/2);
q1= a*(1+ (Ra/a^4)^(1/3)*(1/2+1i*sqrt(3)/2))^(1/2);
q2= a*(1+ (Ra/a^4)^(1/3)*(1/2-1i*sqrt(3)/2))^(1/2);

A= [1 1 1 1 1 1
Exp (q0) exp (-q0) exp (q1) exp (-q1) exp (q2) exp (-q2)
q0 -q0 q1 -q1 q2 -q2
q0*exp (q0) -q0*exp (-q0) q1*exp (q1) -q1*exp (-q1)
q2*exp (q2) -q2*exp (-q2)
(q0^2-a^2)^2 (q0^2-a^2)^2 (q1^2-a^2)^2 (q1^2-a^2)^2
(q2^2-a^2)^2 (q2^2-a^2)^2
(q0^2-a^2)^2*exp (q0) (q0^2-a^2)^2*exp (-q0)
(q1^2-a^2)^2*exp (q1) (q1^2-a^2)^2*exp (-q1)
(q2^2-a^2)^2*exp (q2) (q2^2-a^2)^2*exp (-q2)] ;

y = det(A);
end
```

#### Le programme de la courbe marginale :

```
% Méthode de Newton
global a
a_vec = 1:0.01:10 ; % intervalle de a pour la résolution
Ra=10000; % estimation initiale
delta_Ra = 0.001; % intervalle d'approximation des dérivées
Tolérance = 0.001 ; % tolérance pour l'erreur absolue de Ra
Ra_vec=[]; % vector des resultats
for i = 1:length(a_vec)
a = a_vec(i);
dR = 1 ; % valeur factice
%Résoudre avec la méthode de Newton jusqu'à ce que la valeur absolue
% de l'erreur dR soit inférieure à la tolerance
while abs (dR) > tolerance
f = my_fcn(Ra) ;
df = (my_fcn(Ra+delta_Ra)-my_fcn(Ra-delta_Ra))/(2*delta_Ra) ;
dR = - f /df ;
Ra = Ra + dR ;
end
Ra_vec(i) = Ra;
end
Plot (Ra_vec ,a_vec )
xlabel ( 'Ra' ) , ylabel ( 'a' )
```

### 2/ Cas d'une surface solide et d'une surface libre

```
function y = myfct(Ra)
global k
q0= 1i*k*(-1+(Ra/k^4)^(1/3))^(1/2);
q1= k*(1+(Ra/k^4)^(1/3)*(1/2+1i*sqrt(3)/2))^(1/2);
q2= k*(1+(Ra/k^4)^(1/3)*(1/2-1i*sqrt(3)/2))^(1/2);

A=[1 1 1 1 1 1
q0 -q0 q1 -q1 q2 -
```

```

exp(q0) exp(-q0) exp(q1) exp(-q1) exp(q2) exp(-q2)
q0^2*exp(q0) q0^2*exp(-q0) q1^2*exp(q1) q1^2*exp(-q1)...
q2^2*exp(q2) q2^2*exp(-q2)

q0^4*exp(q0) q0^4*exp(-q0) q1^4*exp(q1) q1^4*exp(-q1)...
q2^4*exp(q2) q2^4*exp(-q2)
(q0^2-k^2)^2 (q0^2-k^2)^2 (q1^2-k^2)^2 (q1^2-k^2)^2 ...
(q2^2-k^2)^2 (q2^2-k^2)^2 ];

y = det(A);
end

% Méthode de Newton
globala
a_vec = 1:0.01:5; % intervalle de a pour la resolution

Ra=10000;% estimation initiale
delta_Ra = 0.001; % intervalle d'approximation des dérivées
tolerance = 0.001 ; % tolerance pour l'erreur absolue de Ra
Ra_vec=[]; % vector des resultats
fori = 1:length(a_vec)
a = a_vec(i);
dR = 1 ;% valeur factice
%Résoudre avec la methode de Newton jusqu'a ce que la valeur absolue
% de l'erreur dR soit inférieure à la tolerance
while abs (dR) > tolerance
f = myfct(Ra) ;
df = (myfct(Ra+delta_Ra)-myfct(Ra-delta_Ra))/(2*delta_Ra) ;
dR = - f /df ;
Ra = Ra + dR ;
end
Ra_vec(i) = Ra;
end
ans
plot (Ra_vec ,a_vec )
xlabel( 'Ra' ) , ylabel ( 'a' )

```

## Simulation numérique sous Fluent :

General :

- Solver type: pressure based
  - Velocity formulation : absolute
  - Time : steady
  - 2D Space : Planar
  - Gravity >Y : -9.81

Model :

- Energy : On
- Laminar

Materiel : Water liquid

Methode :

- Scheme : Simple
- Pressure : PRESTO

Monitor :

Residual > 1e-06  
Intialization : standard > temperature : 293  
Run calculation .

## ***Bibliographies :***

- *Pijush K Kundu & Ira M Cohen Reprinted January 2010 Fluid Mechanics, fourth edition with contributions by P. S. Ayyaswamy and H. H. Hu.*
- *2. Ahmed Abdelali. Etude expérimentale des instabilités thermoconvectives de Rayleigh-Bénard dans les fluides viscoplastiques. Autre. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENI042*
- *3. François Charru, Instabilités hydrodynamiques, 2007 EDP sciences. Instabilités de fluide au repos. Instabilités thermique de Rayleigh-Bénard.*
- *4. Zineddine KEBICHE, Teodor BURGHELEA, Cathy CASTELAIN\*. Mise en évidence expérimentale de l'instabilité de Rayleigh-Bénard dans le cas de fluides à seuil. Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, LTN UMR CNRS 6607 Polytech, \*(auteur correspondant : cathy.castelain@univ-nantes.fr).*
- *5. Introduction à la théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique. © Grenoble sciences L'air et l'eau – René moreau. Retour vers le site:[[https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap\\_ebook/moreau/justifications-theoriques](https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap_ebook/moreau/justifications-theoriques) ]*
- *6. Samik Bhattacharya. Aerospace Engineering Department , Auburn University, Auburn, AL, 36849. Effect initial condition and influence of aspect ratio change on Rayleigh-Bénard convection. [Numerical Simulation].*
- *7. Frédéric Gauthier. Convection turbulente dans une cellule de Rayleigh-Bénard cryogénique: de nouveaux éléments en faveur du Régime Ultime de Kraichnan. Dynamique des fluides [ physics.flu-dyn] Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français.*











