



**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1 FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

Laboratoire de Construction Mécanique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en
Construction Mécanique

Titre

**Utilisation des éléments piézo-électriques pour l'atténuation
des vibrations dans les plaques**

Proposé et encadré par :

Dr. Ezzraimi Madjid

Dr. Tiberkak Rachid

Réalisé par :

Omari Yasmine

Nirak Fatima

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Nous remercions ALLAH pour sa protection et son aide pour accomplir ce travail, et nous le prie encore pour m'aider à apprendre plus.

Nos remerciements à nos encadreurs de thèse docteur Ezzraïmi Madjid pour leurs soutiens, conseils, orientation et encouragement tout au long de ce projet.

Nous remercions les honorables membres du jury qui ont donné de leur temps pour lire et examiner cette thèse.

Merci à nous parents et famille pour leur amour et leurs sacrifices, et pour nous avoir soutenu et supporté durant ces années.

Un grand remerciement à tous les enseignants du département de génie mécanique et mes collègues et tous mes amis.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui nous aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit de plusieurs Années d'étude à :

Mes chers et respectueux parents « Sofiane et Feriel »

en récompense de leurs sacrifices et leur clairvoyance qui m'a servi et me servirait tout au long de ma vie

Ma chère sœur : « Sabrina »

Mes chers petits frères « Abd Rahim et Mohamed Yanis »

Ma chère binôme « Nirak Fatima » et à toute sa famille

Mes deux chères tantes « kamila et Fatima Zahra »

Mes deux neveux « Racim et Ilan »

Et a toute la famille **OMARI**.

Tous mes amis du primaire, CEM, lycée avec lesquels j'ai passé des années inoubliables.

Tous les enseignants qui ont participé à ma formation durant mes quatre ans, sans les nommer, car la liste est longue.

A toutes les personnes que j'aime et qui m'aiment

A moi-même.

OMARI Yasmine

To my dear mother I dedicate this work,

Mom, now you can raise your white flag freely...

Fatima Nirak

Table des matières :

Introduction générale.....1

Chapitre I : Généralités et notion de base

I.1.Introduction3

I .2. Les vibrations4

I .2.1 vibration sinusoïdale4

I .2.2. La vibration périodique4

I.2.3. Vibration aléatoire5

I.3.Contrôle de vibrations5

I.3.1. Control passif6

I.3.2. Contrôle semi-actif6

I .3.3 Contrôle actif7

I.4.La Piézoélectricité.....8

I.4.1. Symétrie et Piézoélectricité9

I.4.2. L'effet piézoélectrique10

I.5.contrôle actif des vibrations12

I.6 le mécanisme du control actif par la piézoélectricité 12

Conclusion..... 13

Chapitre II : Théorie *des plaques*

II .1 Introduction..... 14

II .2 Définition14

II .3 Classification des plaques15

II .3.1. La théorie des plaques minces de love-Kirchhoff15

II .3.1.1 Champs de déplacement 16

II .3.1.2. Champ de Déformation	17
II .3.2 La théorie des plaques épaisses du premier ordre de Reissner-Mindlin.....	17
II .3.2.1. Champs de déplacement	18
II .3.2.2: Champs de déformation.....	19
II .4. Loi de comportement.....	20
II .4.1. Matériau composite	21
II .4.2. Matériau isotrope.....	22
II .6. Théorie classique des stratifiés.....	22
II .6.1. Expression du champ de déformation	23
II .6.2. Contraintes planes	24
II .6.3. Comportement d'un stratifié	25
II .6.4. Equation constitutive d'un stratifié	26
II .7. Théories des plaques sandwiches	26
II .7.1. Champ de déplacement	27
II .7.2. Champ de déformation	28
II .7.3 Equation constitutive	28
II .8. Matériau piézoélectrique	29
II .8.1 Loi de comportement	29
II .8.2. Champ électrique	30
II .8.3 Energie cinétique.....	31
II .8.4. Energie potentielle	31

II .8.5. Travail pour plaque piézoélectrique	32
II .9. Théorie des plaques sandwiches (multicouches)	32
II .9.1. Energie cinétique du sandwich	32
II .9.2. Energie potentielle du sandwich	33
II .9.3 Travail des efforts extérieurs.....	34
Conclusion.....	34

Chapitre III : Discrétisation en élément finis

III .1. Introduction	35
III .2.la discrétisation et les fonctions de base	35
III .3 Le modèle du produit ou maillage.....	35
III .4. Choix du modèle	36
III .5. Approximation nodale.....	37
III .6. Représentation de la géométrie.....	38
III .7. Fonctions d'interpolation	39
III .8 Approximation de la solution	40
III .8.1 Approximation de l'énergie cinétique sur un élément.....	40
III .8.2 Approximation de l'énergie potentielle sur un élément.....	41
III .8.3 Travail des forces extérieures pour le sandwich.....	41
Conclusion.....	44

Chapitre IV : Analyse d'un sandwich piézoélectrique

IV.1 Introduction.....	45
IV.2 Analyse modale	45
IV.3Amortissement	46
IV.3 Analyse dynamique	48

IV.4 Réponse d'un capteur piézoélectrique (mode capteur)	48
IV.5 Mode Actionneur.....	49
IV.6 Résolution par la méthode de NEWMARK	49
IV.6.1 Principe de l'algorithme de NEWMARK	49
Conclusion.....	50

Chapitre V : Application et discussion

V.1. Introduction	51
V.2. Logiciel de calcul ANSYS	51
V.2.1. Plaque élastique isotrope monocouche.....	52
V.2.2. Plaque composite élastique orthotrope	52
V.2.3 Etude de l'influence des conditions aux limites.....	54
V.2.4 Plaque anisotrope piézoélectrique	54
V.2.5. Plaque piézoélectrique sandwich	57
Conclusion	60
Conclusion générale	61
Référence bibliographique	

List des figures

Figure I.1. Illustration extraite du brevet de Luge.....	3
Figure 1.2. Signal des vibrations sinusoïdal est ses paramètres.....	4
Figure1.3. Différence entre le signal de vibration aléatoire et périodique.....	5
Figure. I .4. Control hybride des vibrations d'une masse.....	6
Figure1.5. Schéma explicatif de travail des systèmes de contrôle semi-actif.....	7
Figure I.6. Principe d'un corps en vibration subissant le contrôle actif.....	8
Figure I.7. Hiérarchie des matériaux cristallins ayant des propriétés piézoélectriques... ..	9
Figure I.8. Représentation schématique de l'apparition de la polarisation.....	9
Figure. I.9. Organigramme des différentes classes cristallines.....	10
Figure I.10. Illustration de l'effet direct et inverse.....	11
Figure I.11. Exemple sur l'effet direct.....	11
Figure. I.12. accéléromètres piézoélectrique.....	11
Figure. I.13. détecteur à semi-conducteur au silicium.....	11
Figure. I.14. Actionneur piézoélectrique linéaire APA 60SM.....	12
Figure. I.15. Principe de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique.....	12
Figure. I.16. Schéma d'une structure intelligente.....	12
Figure. I.17. Représentation de mécanisme d'action par extension.....	13
Figure.II.1. Géométrie d'une plaque.....	14
Figure.II.2. Illustration de la plaque de Love- Kirchhoff.....	16
Figure.II.3. Rotation d'une fibre normale selon les axes x et y mettant en évidence le relations Entre \mathbf{u}_0 , \mathbf{v}_0 et les angles θ_x ,correspondant au mouvement du plan moyen.....	16

Figure.II.4. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	18
Figure.II.5. Représentation d'un matériau composite.....	21
Figure.II.6. Structure sandwich.....	27
Figure.II.7. Plaque sandwich piézoélectrique.....	32
Figure.III.1. Exemples de découpages géométriques appartenant à des maillages.....	36
Figure. III.2. Deux maillages plans avec leurs nœuds.....	36
Figure.III.3. Élément fini a quatre nœuds de cellules de tisses.....	37
Figure.III.4. Élément rectangulaire à quatre nœuds.....	37
Figure. IV.1. Amortissement visqueux.....	46
Figure. IV.2. Amortissement structural.....	47
Figure.V.1. Plaque monocouche isotrope (AAAA).....	51
Figure. V.2. Plaque composite élastique orthotrope.....	53
Figure.V.3. les couches et les orientations de la plaque.....	53
Figure. V.4. déformation de plaque piézoélectrique (ELLL) chargé avec 50v dans les deux polarisations.....	56
Figure. V.4. déformation de plaque piézoélectrique (ELLL) chargé avec 100v dans les deux polarisations.....	56
Figure.V.5. Plaque sandwich piézoélectrique.....	57
Figure.V.6. La déformation de plaque sandwich charger avec 100 Pa.....	58
Figure.V.7. Plaque sandwich charger avec 200 Pa à sa surface supérieure.....	58
Figure.V.8. Déformation de de sandwich subit de 50 v.....	59
Figure.V.9. Déformation de sandwich (ELLL) chargé avec 100 Pa et 50v.....	60

Liste des tableaux

Tableau.V.1 : les trois premières fréquences propres de la plaque monocouche isotrope

(AAAA).....52

Tableau.V.2 : les trois premières fréquences propres de la plaque (ELLL).....53

Tableau.V.3 : les trois fréquences propres d'une plaque (AAAA) et une plaque

(ELLL).....54

Tableau. V.4: Propriétés de matériau piézoélectrique.....55

Tableau.V.5.les déformations de plaque ELLL avec des différents voltages et polarisations.....57

Les symboles :

[C] : est la matrice de rigidité.

[S] : la matrice souplesse.

[ε] : la déformation.

δ : variation subie pendant l'intervalle de temps considéré

[σ] : la contrainte.

φ_x et φ_y : rotation de cisaillement des sections normales a l'axe x et y.

λ : coefficient de lamé

x, \dot{x} , \ddot{x} : le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'état.

E_1 : module d'élasticité longitudinal.

E_2 : module de cisaillement longitudinal.

G_{12} : module de cisaillement longitudinal.

$G_{13}=G_{23}$: module de cisaillement transversal.

δ_{ij} : le symbole de Kronecker.

w : déplacements transversal.

t et r : désigne les variables de translation et de rotation.

T_σ : est la matrice de changement de base (1',2',3') des contraintes.

T_ε : est la matrice de changement de base (1',2',3') des déformations.

K^2_{ij} : coefficients de couplage.

N : résultantes en membrane.

A : la matrice de rigidité en membrane.

B : la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

D : la matrice de rigidité en flexion.

M_f : moments de flexion et de torsion.

$\{F\}$: force volumique.

$\{f\}$: force surfaciques.

$\{P\}$: forces ponctuelles.

$\{D\}$: vecteur de déplacements électriques.

$\{\varepsilon\}$: vecteur de déformation.

$\{E\}$: vecteur des champs électrique.

$[e]$: matrice des constantes piézoélectrique ou de couplage mécanique.

$[d]$: matrice de permittivité électrique.

$[C]$: matrice des constantes élastiques.

$\{E\}$: le champ électrique.

$\{h_p\}$: épaisseur de la sous-couche électrique.

$\{h_c\}$: épaisseur de l'âme.

$\{D\}$: charge électrique surfacique ou déplacements électrique.

N_i : fonction d'interpolation.

nn : nombre de nœuds par éléments.

$\{F_v\}$ et $\{F_s\}$: sont respectivement les forces volumique.

$\{Q\}$: vecteur de charge électrique.

$\{\varphi\}$ et $\{\psi\}$: les vecteurs propres.

$\{\sigma_t\}$ et $\{\tau_t\}$: sont respectivement les contraintes de membrane et de cisaillements.

θ_x et θ_y : rotation totale par rapport a x et y respectivement.

u et v : déplacement de la membrane par rapport a x et y respectivement.

λ et μ : les coefficients de lamé.

ν_{12} et ν_{21} et ν_{31} : coefficient de poisson.

$[Q_{ij}]$: la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1, 2,3).

$[Q'_{ij}]$: matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel.

$[S'_{ij}]$: la matrice de souplesse dans la base (1',2',3').

ملخص

المواد الكهروضغطية لديها القدرة على تحويل الطاقة الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية والعكس صحيح يمكن استخدام هذه المواد الذكية في تطبيقات مختلفة مثل التحكم في الضوضاء أو الاهتزازات التي تمثل مشكلة كبيرة في العديد من التطبيقات الصناعية في هذه الاطروحة، نقدم صياغة لصفحة سندويتش تتضمن طبقة مركزية مرنة مركبة بين طبقتين كهروضغطية يمكن اعتبارهما هيكلًا ذكيًا والسماح بالتحكم الثابت في الانحراف يتم إجراؤه في وضع المشغل الكلمات المفتاحية: كهروضغطية، اهتزازات، تحكم فعال، تحكم ثابت

Résumé

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa. Ces matériaux dits intelligents peuvent être utilisés dans différentes applications telle que le contrôle de bruit ou les vibrations qui est un problème majeur dans de nombreuses applications industrielles.

Dans ce contexte, on présente une formulation d'une plaque sandwich intégrant une couche centrale élastique composite entre deux couches piézoélectriques pouvant être considérée comme une structure intelligente et permettant le contrôle statique de la déflexion est entrepris en mode actionneur.

Mots clé : piézoélectrique, vibrations, control actif ,control statique.

Abstract

Piezoelectric materials have the ability to convert electrical energy into mechanical energy and vice versa. These so-called intelligent materials can be used in different applications such as noise or vibration control which is a major problem in many industrial applications. In this context, we present a formulation of a sandwich plate integrating a composite elastic central layer between two piezoelectric layers that can be considered as an intelligent structure and allowing the static control of the deflection is undertaken in actuator mode.

Keywords: piezoelectric, vibrations, active control, static control.

Piezoelectric materials have the ability to convert electrical energy into mechanical energy and vice versa. These so-called intelligent materials can be used in different applications such as noise or vibration control which is a major problem in many industrial applications. In this context, we present a formulation of a sandwich plate integrating a composite elastic central layer between two piezoelectric layers that can be considered as an intelligent structure and allowing the static control of the deflection is undertaken in actuator mode.

Introduction générale

Dans de nombreuses applications industrielles, le bruit ou les vibrations constituent le principal problème, causant la fatigue structurale, la transmission des vibrations à d'autres systèmes, ...Les méthodes conventionnelles d'atténuation des vibrations se limitent à amortir la perturbation par des techniques passives, par contre, la technologie active permet de contrôler les vibrations par un actionneur qui agit sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser l'intensité de ces vibrations à un niveau acceptable.

Les structures en plaque et coque sont des éléments structuraux de base dans la construction des équipements aéronautiques, aérospatiaux, aéronautiques, civils, navals, sportifs et militaires. Face à un champ d'application aussi large et important, on s'intéresse à l'étude du comportement dynamiques des structures principalement en plaque minces et épaisses, et d'utilisant la technologie de la piézoélectricité pour l'atténuation des vibrations.

Dans ce contexte, nous avons proposé un modèle éléments finis d'une plaque en sandwich, qui intègre une couche centrale élastique (matériau isotrope ou composite) entre deux sous-couches piézoélectriques (actionneurs et / ou capteurs), qui peut être considéré comme une structure intelligente (smart structure) et permettant le contrôle actif des vibrations.

Pour accomplir cette mission, le travail est subdivisé en plusieurs parties :

Dans la première étape, c'est une recherche bibliographique sur les vibrations structurelles, sur les différentes techniques d'atténuation des vibrations, et sur la technologie de la piézoélectricité pour le contrôle actif de ses vibrations.

Alors que dans cette partie, nous avons présenté la théorie de la flexion des plaques minces (hypothèse de KIRCHOFF) pour l'analyse dynamique des plaques élastiques isotropes et orthotropes, puis proposé la théorie des plaques épaisses (hypothèse MINDLIN-REISSNER) pour prendre en considération d'autres phénomènes générés, comme l'influence des effets de cisaillement transverse, permettant de perfectionner l'approximation du modèle de la structure.

Le troisième chapitre est consacré à la discrétisation des éléments finis, et présente le modèle d'élément fini, maillage et l'approximation de la solution.

Au chapitre 4, nous avons présenté l'analyse de la plaque sandwich piézoélectrique, pour l'analyse modèle, analyse en mode capteur ou en mode actionneur, puis le détail de la méthode de NEWMARK qui permet de résoudre l'équation de mouvement.

Le cinquième chapitre est réservé aux applications et discussions, ou on va traiter des structures en plaque élastiques, isotrope, composite pour une modale, puis le sandwich par rapport au contrôle des vibrations.

Le travail est terminé par une conclusion qui englobe les discussions des résultats obtenues, les remarques et les perspectives.

Chapitre I

Généralités et notion de base.

I.1.Introduction :

Dans beaucoup de cas, les vibrations représentent des nuisances. Elles sont sources de bruit acoustique et de détérioration du matériel. Le contrôle de vibrations consiste à diminuer l'amplitude des vibrations d'une structure qui vibre. Deux familles de solutions sont envisageables :

Le contrôle passif de vibrations se fait avec des matériaux ou des systèmes amortissant (par exemple des matériaux viscoélastiques). Par contre le contrôle actif, utilise des capteurs et des actionneurs qui sont bandés à la structure pour atténuer ses vibrations. Cette solution nécessite un apport d'énergie pour la mise en mouvement des actionneurs, mais elle peut s'avérer plus efficace dans certains cas.

Le concept de contrôle actif est très ancien. Le brevet de P. Lueg remonte à 1933 Décrit le principe de l'équipement de contrôle actif du bruit dans le pipeline. Un des schémas de ce brevet est donné à la figure I.1. Appareil utilisant un microphone pour détecter le champ sonore nocif en amont et piloter un haut-parleur en aval avec signal amplifié. Une utilisation prudente des microphones et des haut-parleurs produira des ondes sonores par opposition aux ondes incidentes, alors le bruit est atténué [8].

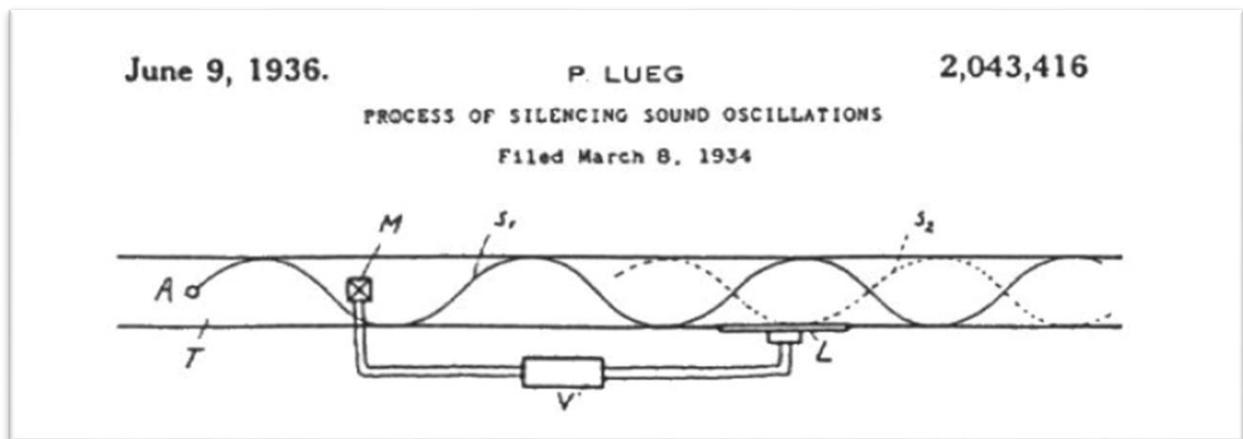


Figure I.1. Illustration extraite du brevet de Lueg.

I.2. Les vibrations :

La plupart des mouvements qui se répètent dans le temps sont appelés vibrations ou oscillations. La théorie des vibrations étudie les mouvements oscillatoires des corps et les efforts qui leurs sont associés.

Les vibrations d'un système impliquent le transfert de son énergie potentielle en une énergie cinétique et l'énergie cinétique en énergie potentielle, alternativement. Si le système est amorti, son énergie est dissipée à chaque cycle de vibration et doit être remplacée par une source extérieure si un état de vibration stationnaire doit être maintenu.

On définit généralement trois types de vibrations :

I.2.1 vibration sinusoïdale :

Elle est celle qui est obtenue, par exemple, lorsqu'une masse attachée au bout d'un ressort est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée. Comme pour tout phénomène vibratoire, on définit la période, c'est-à-dire le temps (en secondes) qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit et la fréquence en hertz qui est l'inverse de la période. Un diapason, un buzzer de sonnette ou de téléphone, les cordes vocales, le tympan ou la membrane cochléaire sont des objets dont les vibrations sont sinusoïdales. [1]

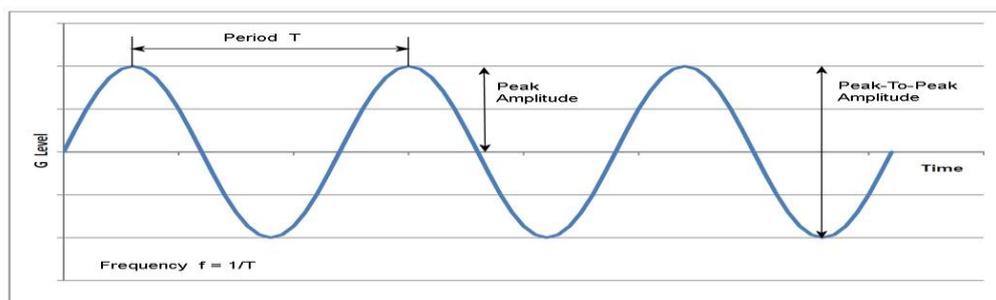


Figure 1.2. Signal des vibrations sinusoïdal est ses paramètres.

I.2.2. La vibration périodique :

Elle correspond à des mouvements plus complexes qu'une simple oscillation. Mais ces mouvements se reproduisent globalement identiques à eux-mêmes à des périodes de temps mesurables. C'est le cas de beaucoup de machines comme les marteaux piqueurs, les marteaux burineurs, les dames pneumatiques, la plupart des marteaux et outils pneumatiques. Mais c'est

aussi ce que l'on perçoit très bien quand on est dans un train et éventuellement dans une voiture à la condition que le chauffeur adopte une conduite très régulière sur un revêtement de qualité constante. Le plus souvent, les vibrations périodiques se décomposent en une série de vibrations sinusoïdales élémentaires de fréquence et d'amplitude propres qui s'additionnent.[1]

I.2.3. Vibration aléatoire :

Comme son nom l'indique, n'offre pas de résolution simple en termes de vibration sinusoïdale ou périodique. On dit aussi qu'à aucun moment on ne peut prédire quelle sera la position de l'objet par rapport à son point d'équilibre. C'est le cas des automobiles dont les vibrations dépendent de différents facteurs inconnus, comme l'état de la route, par exemple, la présence d'un nid-de-poule ou d'une bosse, etc. C'est aussi le cas de la plupart des machines utilisées dans le transport des matériaux ou des marchandises et des machines de terrassement. [1]

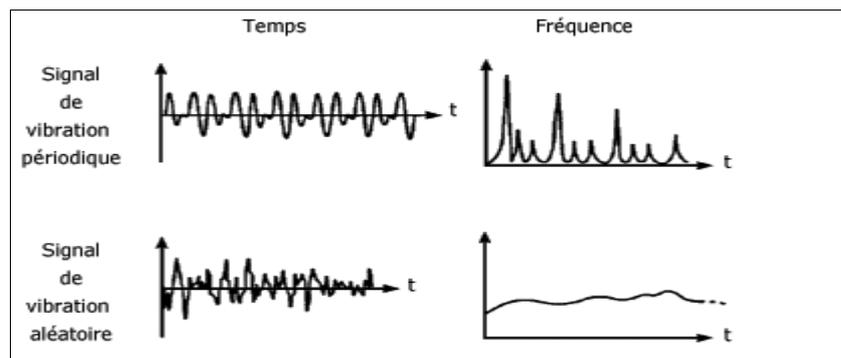


Figure1.3. Différence entre le signal de vibration aléatoire et périodique

I.3. Contrôle de vibrations :

Il est possible de limiter l'effet des vibrations grâce, fondamentalement, à trois types de techniques. Le premier est l'annulation (ou suppression), utilisé surtout pour éliminer le bruit engendré par la vibration, il se fait par la production d'une source de bruit secondaire émettant le négatif du bruit primaire afin d'aboutir à une annulation. La seconde est l'isolation qui consiste à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans pour autant éliminer celle du système émetteur. Finalement, le troisième groupe de techniques, dit d'atténuation, est utilisé pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système, en cas d'échec ou d'impossibilité de son isolation, ou pour réduire le rayonnement acoustique, en cas d'impossibilité de production ou d'inefficacité d'une source secondaire d'antibruit. Dans ce

cas, les techniques d'atténuation consistent à diminuer l'amplitude des vibrations structurales dont les fréquences sont dans le voisinage des fréquences propres de la structure [1].

I.3.1. Control passif :

Les techniques passives d'amortissement des vibrations structurales utilisent l'intégration ou l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes, couplées à la structure de telle façon que les vibrations de la structure sont amorties passivement, c'est-à-dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire. Les revêtements composés de matériaux polymères viscoélastiques constituent des traitements très efficaces pour réduire les amplitudes de résonance de structures vibrantes. Ces matériaux ont la propriété de passer d'un état légèrement rigide (caoutchouteux), pour des températures élevées et de faibles fréquences de vibration, à un autre rigidifié (vitreux), pour la situation inverse. De plus, dans la région de transition entre ces deux états, où leurs propriétés élastiques varient rapidement, ces matériaux sont capables de transformation semi-active de contrôle, représentent donc une évolution des systèmes passifs, et donc ils conservent les caractéristiques fondamentales de fiabilité, de sécurité. Et la simplicité associe l'énergie de déformation en énergie thermique, dissipant ainsi, sous forme de chaleur, l'énergie vibratoire de la structure à laquelle elles sont collées. De plus, il a été constaté que ces revêtements viscoélastiques sont beaucoup plus efficaces lorsqu'ils sont recouverts d'une couche élastique leur permettant de se déformer en cisaillement (figure 1.1). Ce traitement est appelé revêtement compressé passif (RCP). [7]

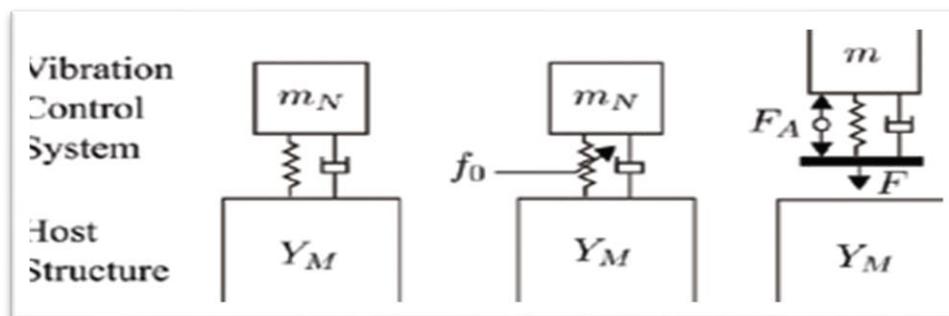


Figure. I.4. Control hybride des vibrations d'une masse.

I.3.2. Contrôle semi-actif :

En principe, un bon compromis entre performance et qualité [coût, simplicité, fiabilité] peut être obtenu grâce à un système semi-actif. L'idée principale du contrôle semi-actif est très simple : elle consiste à modifier dans le temps les caractéristiques des équipements passifs consommateurs d'énergie. Le changement nécessite une énergie minimale. Ce concept de

commande est introduit en modifiant la force d'amortissement du fluide en contrôlant l'ouverture de soupape d'un amortisseur classique, tel qu'un amortisseur hydraulique équipé d'une servovalve, qui contrôle le débit d'huile. Passer les restrictions

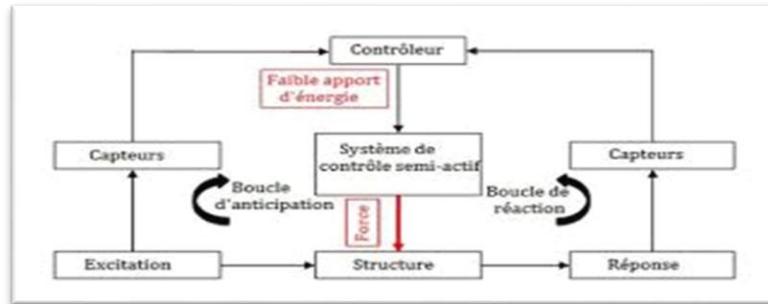


Figure1.5. Schéma explicatif de travail des systèmes de contrôle semi-actif

Pour la méthode semi-active, l'effet de contrôle est obtenu par l'ajustement en temps réel des paramètres mécaniques dissipés, qui réagissent passivement avec le reste de la structure. Les modalités de réglage de ces paramètres sont déterminées en fonction du choix de l'algorithme de contrôle et de l'excitation et / ou de la réponse de la structure. Par conséquent, comme le contrôle actif, les systèmes de contrôle semi-actifs nécessitent des capteurs, des processeurs et des actionneurs. Par contre, par rapport à un système de contrôle actif, l'énergie requise extérieurement est minimale : elle ne sert qu'à modifier les caractéristiques mécaniques du dispositif de contrôle, et elle peut être fournie, par exemple, par une simple batterie [6].

I.3.3 Contrôle actif :

Les amortisseurs actifs, peuvent amortir une bande large de fréquence. Donc, l'étude du contrôle actif des structures est une continuité logique de la technologie du contrôle passif et semi-actif. Un système de contrôle est dit actif si un ou plusieurs actionneurs appliquent des forces sur une structure selon un algorithme de contrôle et en utilisant pour leurs fonctionnement une source d'énergie externe. Ces forces peuvent être utilisées pour dissiper ou ajouter de l'énergie dans la structure à contrôler. Afin de mettre en place un tel système, il existe deux approches qui sont radicalement différentes :

La première consiste à identifier la perturbation qui crée les vibrations pour l'annuler en lui superposant une excitation "inverse".

La deuxième consiste à identifier la réponse de la structure plutôt que l'excitation qui la fait vibrer.

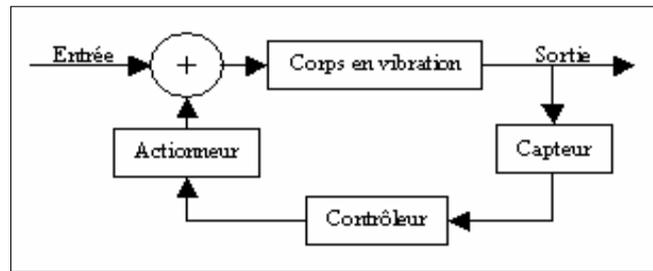


Figure I.6. Principe d'un corps en vibration subissant le contrôle actif

Il consiste premièrement, à placer les capteurs sur la structure pour identifier, à chaque instant, la réponse ou l'excitation. Lorsque la réponse de la structure est mesurée à chaque instant et cette information est utilisée ensuite pour la correction de la force de contrôle appliquée instantanément, la configuration de contrôle est connue sous le nom du contrôle à boucle fermée.

En deuxième étape, il consiste à choisir une loi de contrôle qui permet, à chaque instant, à l'actionneur, en apportant de l'énergie de l'extérieur, de produire une force de contrôle. Lors de la conception d'un système de contrôle actif des vibrations par rétroaction, on commence par étudier le comportement dynamique de la structure à contrôler, puis on choisit une loi de contrôle de rétroaction qui répond au mieux à la problématique. [8]

I.4.La Piézoélectricité :

Les matériaux piézoélectriques ont été largement utilisés dans les actionneurs ou capteurs en raison de leur capacité à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa. Ces matériaux dits intelligents peuvent être utilisés dans différentes applications telles que les mécanismes d'injection, les moteurs piézoélectriques, les sonars. L'activité de ces matériaux est liée au fait qu'ils présentent une polarisation macroscopique due à l'existence d'un moment dipolaire résultant de l'absence de symétrie Centro. Parmi les matériaux piézoélectriques les plus utilisés, il existe une famille particulière pour laquelle la polarisation macroscopique peut être modifiée par l'application d'un champ électrique à ces matériaux dits ferroélectriques, aussi on note parmi les matériaux d'intérêt les plus utilisés sont les PZT (Les PZT, ou titanozirconates de plomb, sont des composés chimiques de formule $PbZr_xTi_{1-x}O_3$. Il s'agit de céramiques de structure pérovskite présentant plusieurs propriétés intéressantes : ferroélectricité, piézoélectricité et pyroélectricité).

Le PZT possède de bonnes caractéristiques piézoélectriques et un excellent coefficient de couplage électromécanique, ce qui explique leur rôle important dans le domaine de matériaux adaptatifs. [2]

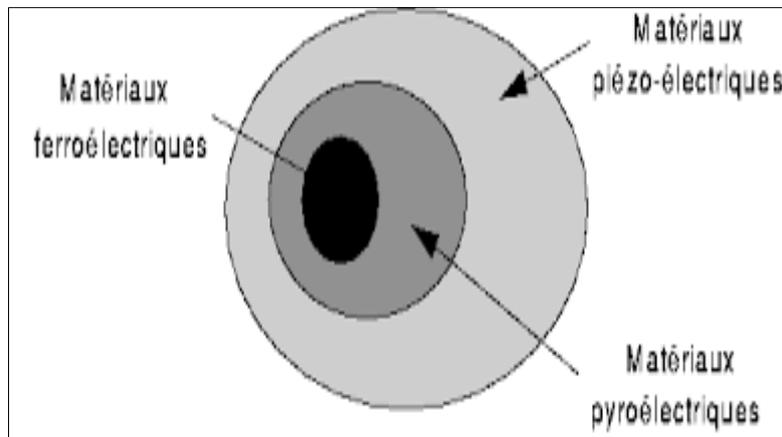


Figure I.7. Hiérarchie des matériaux cristallins ayant des propriétés piézoélectriques.

I.4.1. Symétrie et Piézoélectricité :

A l'échelle de la maille cristalline, la Piézoélectricité se manifeste par une polarisation de la maille, résultant de la séparation du centre de gravité des charges positives et négatives. L'origine de l'effet piézoélectrique est liée à la structure et la symétrie cristallines des matériaux. En effet, pour qu'un cristal soit piézoélectrique, il doit être non Centro symétrique c'est-à-dire que les barycentres des charges positives et négatives ne coïncident pas dans la maille. [5]

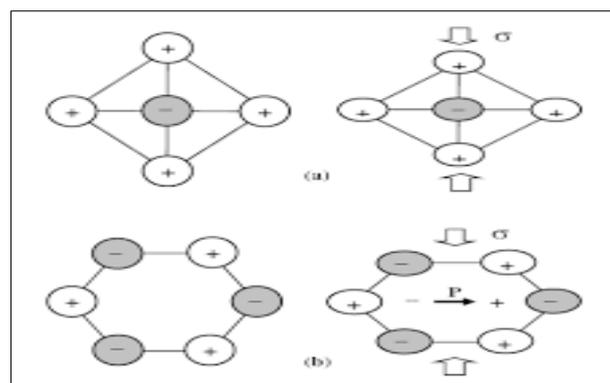


Figure I.8. Représentation schématique de l'apparition de la polarisation

- (a) Corps Centro symétrique (non Piézoélectrique)
- (b) Corps non Centro symétrique (Piézoélectrique)

Sur les 32 classes cristallines, 21 sont dépourvues de centre de symétrie, parmi celles-ci, 20 sont piézoélectriques. Dans ces 20 classes, 10 présentent une polarisation spontanée en

l'absence d'un champ extérieur et possèdent une polarisation naturelle selon au moins une direction ; elles sont dites pyroélectriques et polaires en raison de la variation de la polarisation spontanée avec la température.

Enfin, les cristaux ferroélectriques correspondent à un sous-groupe des pyroélectriques pour lesquels l'axe polaire, support d'un dipôle permanent et mobile dans le réseau cristallin sous l'influence d'un champ électrique extérieur. Ils ont eu la particularité de pouvoir se polariser selon deux axes ou plus, chaque direction étant équiprobable [5]

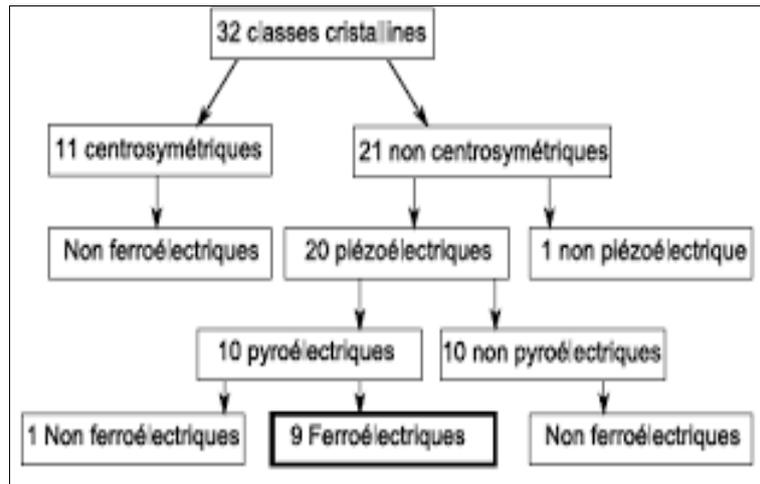


Figure. I.9. Organigramme des différentes classes cristallines

I.4.2. L'effet piézoélectrique :

La piézoélectricité caractérise l'aptitude de certains matériaux cristallins de convertir une contrainte mécanique en une énergie électrique et réciproquement [3].

L'effet piézoélectrique a deux caractéristiques : lorsqu'il n'y a pas de contrainte, les charges s'annulent, et lorsque le sens de la contrainte est inversé, le signe de la charge s'inverse. Il y a deux fonctions : l'effet piézoélectrique direct correspond à l'apparition de charge électrique sous contrainte, ce qui permet l'utilisation de matériaux piézoélectriques comme capteurs, car les informations sur la déformation structurelle de la mécanique de la forme de tension peuvent être restituées. En revanche, l'effet inverse correspond à la déformation du matériau lorsqu'un champ électrique est appliqué au matériau. [4]

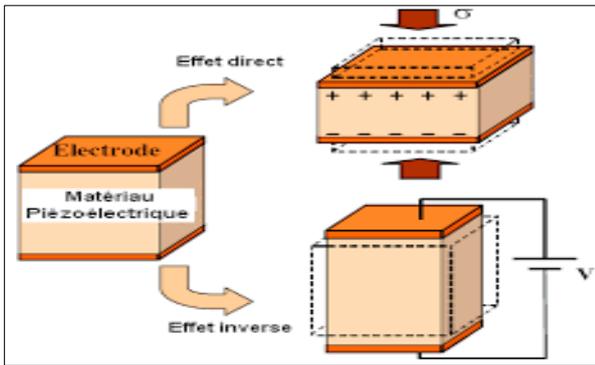


Figure I.10. Illustration de l'effet direct et inverse

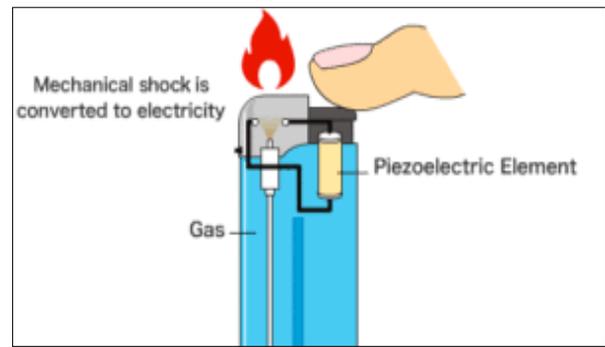


figure I.11.Exemple sur l'effet direct.

A. Capteur de pression ou accélération :

La pression exercée sur un matériau piézoélectrique crée des charges qui peuvent être mesurées électroniquement. Les matériaux piézoélectriques sont donc des candidats naturels pour des applications basées sur la détection de pression. Ils sont notamment utilisés pour les voitures (pression des pneus), l'aéronautique (pression dans les buses), les pèse-personnes ou la musique (tambours électroniques). Sur le même principe, il est possible de mesurer une accélération. Il est ainsi possible de réaliser des capteurs inertiels (accéléromètre à lame vibrante, gyromètre vibrant Coriolis) utilisables dans les centrales inertielles ou plus couramment dans des applications de moindre précision : airbag (airbag), guidage, jeu vidéo à levier de console.



Figure. I.12.accéléromètre piézoélectrique

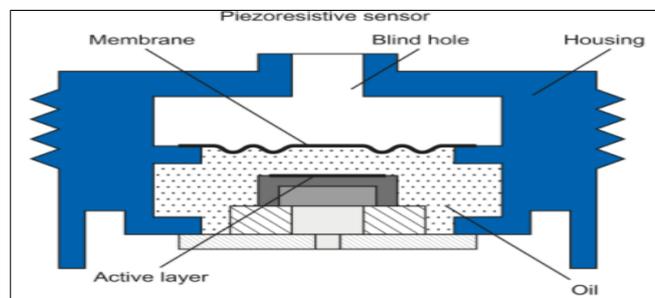


Figure. I.13.détecteur à semi-conducteur au silicium

B. Actionneurs piézoélectriques :

Les actionneurs utilisent l'effet piézoélectrique inverse : dans ces dispositifs, les champs électriques sont utilisés pour contrôler la déformation ou le déplacement. Les actionneurs monolithiques contrôlables qui utilisent une contrainte induite par la tension pour entraîner le déplacement sont appelés actionneurs piézoélectriques. Il existe deux principaux types d'actionneurs piézoélectriques :

- Actionneur direct, où le déplacement obtenu est égal à la déformation du matériau piézoélectrique. L'actionneur direct permet des courses entre 0 et 100 μm ;
- Actionneurs agrandis dans lesquels des dispositifs mécaniques amplifient ce mouvement de 2 à 20 fois. Ils ont généralement une course de 0,1 à 1 mm.

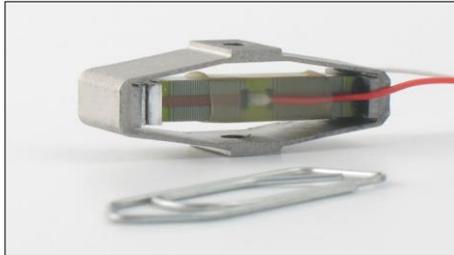


Figure. I.14. Actionneur piézoélectrique linéaire APA 60SM

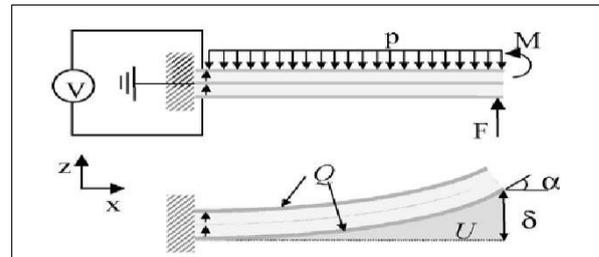


Figure. I.15. Principe de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique

I.5. contrôle actif des vibrations :

Les techniques actives permettent, de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure (capteur) de l'intensité des vibrations indésirables, ce qui constitue le principe du contrôle actif des vibrations. Alors une structure contenant des actionneurs et capteurs collés ou intégrés et couplés par un système de contrôle est dite intelligente.

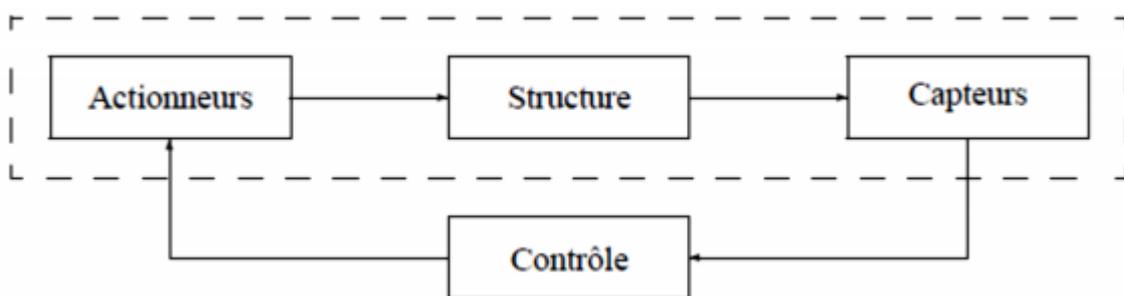


Figure. I.16. Schéma d'une structure intelligente

I.6 le mécanisme du control actif par la piézoélectricité

L'intérêt principal des matériaux piézoélectriques est qu'ils couplent fortement les grandeurs mécaniques et électriques, et permettent d'agir sur l'état mécanique d'une structure par modification du champ électrique appliqué à ces matériaux.

Alors en plaçant une paire de céramiques piézoélectriques de façon symétrique de chaque côté de la structure on peut créer un effet de flexion en fournissant un voltage de même polarité pour une céramique et un voltage de polarité opposée pour l'autre céramique comme le montre la Figure 1.6, on dit qu'on est en mode actionneur.

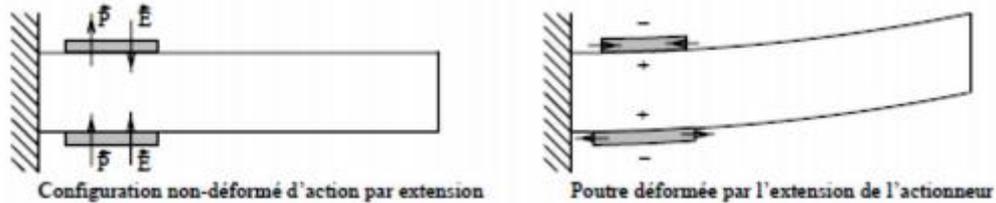


Figure. I.17. Représentation de mécanisme d'action par extension

Ces matériaux peuvent aussi être utilisés comme capteurs piézoélectriques permettant de fournir, à chaque instant, une valeur moyenne des déformations d'une région de la structure correspondant à la surface du capteur, donc une contrainte sur un matériau piézoélectrique entraîne l'apparition d'une tension entre les électrodes (effet direct de la piézoélectricité).

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les contrôles des vibrations (passif, semi-passif, actif) et ses outils (capteur et actionneur) en matériaux piézoélectriques et aussi la description de phénomène piézoélectrique (effet direct et inverse).

Chapitre II

Théorie des plaques

II .1. Introduction :

Les plaques sont largement utilisées dans les structures de l'industrie sous-marine, l'aérospatiale, le génie civil et les bâtiments communs (ponts, toitures de bâtiments ...), les domaines énergétiques et la conception industrielle (turbines, pièces). Mécanicien, carrosserie), même dans le monde de la vie (artères, bronches) ... etc. Tous ces domaines sont stratégiques et très importants économiquement. Pour cette raison, ces plaques font l'objet de nombreux travaux depuis plus d'un siècle.

II .2. Définition :

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan x, y) et par une petite épaisseur (notée $h(x, y)$), par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement Transversal (*CT*). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence *CT*. [9]

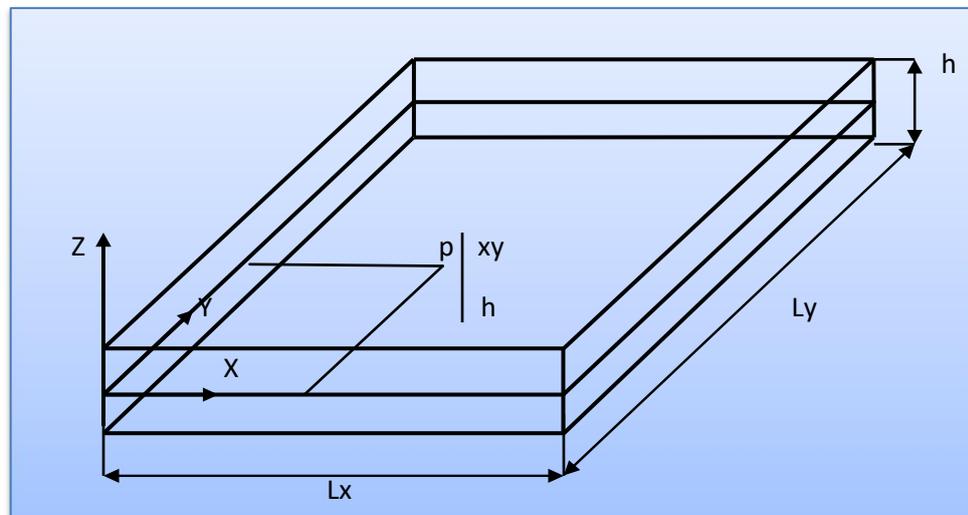


Figure. II .1. Géométrie d'une plaque.

II.3. Classification des plaques :

Les composants de plaque de pliage à déplacement peuvent être divisés en deux catégories :

- Éléments basés sur la théorie de Kirchhoff (ignorant le cisaillement transverse).
- Éléments basés sur la théorie de Hencky Mindlin-Reissner (cisaillement transverse).

II.3.1. La théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff :

La théorie de Kirchhoff-Love est employée pour l'étude de plaques minces. Elle énonce les hypothèses suivantes :

- le plan moyen est initialement plan, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de courbure.
- Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan, c'est-à-dire que nous ne considérons que le déplacement transversal (w) des points du feuillet moyen.
- Les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation, c'est à dire que nous pouvons négliger le cisaillement.
- L'épaisseur de la plaque est faible.
- La déformation est nulle impliquant que les contraintes dans cette direction peuvent être négligées.
- Et nous nous plaçons en petites déformations.

La théorie classique des plaques (ou théorie classique des stratifiés CLPT) est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements. En principe, il convient le mieux à la modélisation de plaques minces.

Leur formulation ne nécessite que l'approximation des composantes de déplacement $u(x,y)$; $v(x,y)$; $w(x,y)$; sur plan moyen de la plaque et la contrainte transversale normale est égale à zéro : $\sigma_{zz}=0$, ce qui revient à négliger les effets de déformation de cisaillement transverse.[11]

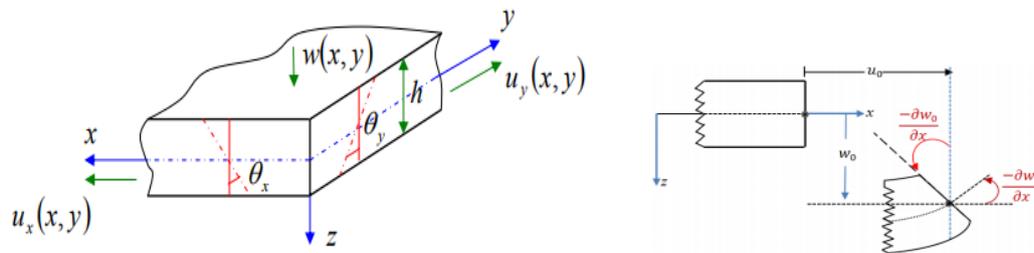


Figure II.2. Illustration de la plaque de Love- Kirchhoff

II.3.1.1 Champs de déplacement :

En ignorant la déformation de cisaillement transversale $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$. Le déplacement de n'importe quelle plaque (x, y) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, z) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Sachant que les rotations $(\theta_x$ et $\theta_y)$ sont données par :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{ et } \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{II.2})$$

Où :

- **u et v** : Les déplacements de la membrane dans le plan $Z=0$
- **w** : Le déplacement transversal ;
- **θ_x et θ_y** Rotation totale par rapport à x et y respectivement.[19]

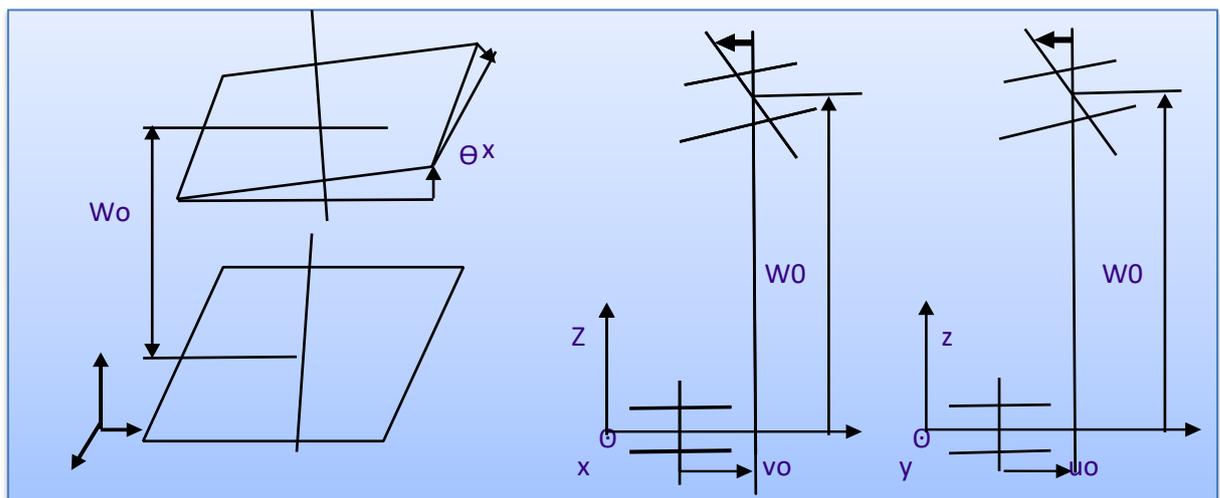


Figure II.2. Rotation d'une fibre normale selon les axes x et y mettant en évidence les relations Entre u_0 , v_0 et les angles θ_x correspondant au mouvement du plan moyen

II .3.1.2. Champ de Déformation :

Soit un point \mathbf{x} dans l'état de référence, correspondant à la plaque au repos, ayant pour position $(x_1 x_2 x_3)^T = (x, y, z)^T$. Suite à la déformation Θ , nous avons vu que ce point subit un déplacement $= U_{(u_1 u_2 u_3)} = (u, v, w)^T$. Puis nous avons vu qu'étant dans le cadre de petites déformations avec de petits déplacements, nous pouvons considérer le **tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé** pour modéliser cette déformation en fonction du déplacement. Ce tenseur est symétrique et ses composantes décrites avec la notation de Voigt sont définies par : [11]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II .3})$$

Le champ des déformations en membrane représentés par un vecteur ε^0 à trois composantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II .4})$$

Ainsi que le champ de courbure représenté par un vecteur $\{k\}$ à trois composantes :

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II .5})$$

II .3.2 La théorie des plaques épaisses du premier ordre de Reissner-Mindlin:

Les éléments basés sur la théorie Mindlin-Reissner sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des cinq variables indépendantes $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$. Cependant, on note que dans l'expression de l'énergie de déformation n'interviennent que des dérivées premières de (w, θ_x, θ_y) et la condition de la compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité. [12]

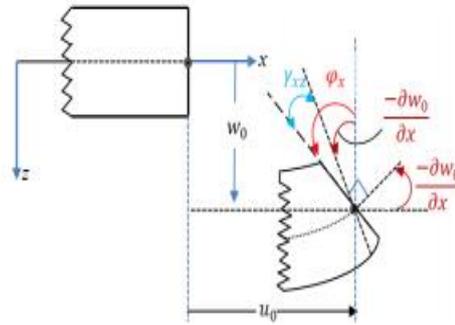


Figure. II .4. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

II .3.2.1. Champs de déplacement :

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner-Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen (Fig2.4). Si Θ_x désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe Z, ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc : [10]

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II .6})$$

D'autre part, de la figure 2.4, on remarque que :

$$\Theta_x \neq \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \Theta_y \neq \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II .7})$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

u, v : Les déplacements de la membrane

w : Le déplacement transversal

$\beta_x (\Theta_y)$: La rotation du plan (xy) autour de y

$\beta_y (-\Theta_x)$: La rotation du plan (xy) autour de x

En choisissant la forme du champ de déplacement, la déformation transversale est constante en par rapport a z. Par conséquent, la contrainte de cisaillement est uniforme dans chaque couche et discontinue entre les couches. La description de cette erreur doit introduire des coefficients de correction afin de mieux prendre en compte l'influence du cisaillement transverse lors de l'écriture d'énergie [10]

II .3.2.2: Champs de déformation:

Dans ce cas, On en déduit le champ des déformations correspondant : [10]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II .8})$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_u]\{u\} \quad (\text{II .9})$$

Où :

- $[D_u]$: opérateur différentiel des déplacements

Avec :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\beta\} + z\{x\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (\text{II .10})$$

Où : L'indice

- mf : effet membrane et flexion
- C : effet cisaillement

Le champ des déformations peut être sous-divisé en trois champs :

- Le champ des déformations en flexion :

$$\{x\} = z\{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_{uf}]\{u\} \quad (\text{II.11})$$

- Le champ des déformations en membrane :

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_{um}]\{u\} \quad (\text{II.12})$$

- Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_{uc}]\{u\} \quad (\text{II.13})$$

II.4. Loi de comportement :

Cette loi est généralement appelée loi de Hooke généralisée, qui introduit une matrice de rigidité symétrique C. Par conséquent, 21 coefficients indépendants sont généralement utilisés pour décrire le comportement linéaire des matériaux.

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.15})$$

La relation élastique peut être exprimée sous la forme opposée, comme suit :

$$\varepsilon = \mathbf{S} \sigma \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$$

S : matrice de flexibilité ou de souplesse (symétrique).

II .4.1. Matériau composite :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes (fibres + matrice), qui a des avantages importants comme la résistance mécanique et à la fatigue, ce qui le rend beaucoup utilisé dans différentes avancées industrielles comme le génie civile et l'aéronautique.

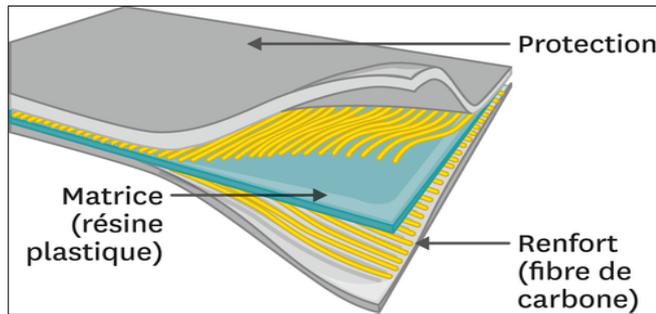


Figure. II . 5. Représentation d'un matériau composite.

La plupart des matériaux composites possèdent une structure présentant une ou plus symétries, ces symétries réduisent le nombre des constantes indépendantes pour décrire un comportement d'un matériau. [25]

A. Matériau orthotrope :

Il possède 3 plans de symétrie perpendiculaire deux à deux.

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II .16})$$

Avec les conditions de symétrie :

$$\frac{\mu_{12}}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{E_2} ; \frac{\mu_{13}}{E_1} = \frac{\mu_{31}}{E_3} ; \frac{\mu_{32}}{E_3} = \frac{\mu_{23}}{E_2} \quad (\text{II .17})$$

B. Matériau isotrope transverse :

C'est un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Il est appelé matériau orthotrope de révolution ou unidirectionnel.

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & & 0 & \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & & 0 & \\ & & & \frac{c_{22}-c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & c_{66} & 0 \\ & & & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Les quatre relations supplémentaires étant :

$$E_1 = E_2 ; G_{12} = G_{23} ; 2G_{12} = \frac{E_1}{1 + \mu_{12}}$$

Donc, les propriétés du matériau orthotrope à isotrope transverse sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes. [25]

II.4.2. Matériau isotrope :

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donné par : [25]

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & 0 & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & 0 & \\ & & & \frac{c_{11}-c_{13}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{13}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé λ et μ :

$$\begin{cases} C_{11} = \lambda + 2\mu \\ C_{12} = \lambda \end{cases}$$

II.6. Théorie classique des stratifiés :

La théorie des stratifiés a été développée au début des années 1960 et est basée sur la déformation, le cisaillement, la flexion et la torsion que subissent les éléments stratifiés minces lorsque la structure est chargée. Le résultat produit par plusieurs couches (ou pliées) couches ou tissus unidirectionnels (spécifiques à la direction de chaque couche) [13].

II .6.1. Expression du champ de déformation :

Dans ce cas le champ de déformation est la superposition : [14]

-Déformation en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II .20})$$

-déformation en flexion et torsion

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II .21})$$

Les déformations s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

$$\text{En posant : } k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II .22})$$

Où :

- ε : déformation en membrane
- K : déformation en flexion et torsion.
- $k(x, y)$: est appelée la matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M(x, y)) = \varepsilon_m(x, y) + \varepsilon_f(x, y) = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y) \quad (\text{II .23})$$

II.6.2. Contraintes planes :

L'état de contrainte plane est un état de contrainte bidimensionnel, et les composants du tenseur de contrainte n'ont rien à voir avec la coordonnée Z ; la relation suivante est illustrée pour le pliage unidirectionnel ou le pliage de tissu. Pour l'état de contrainte plane, nous avons:[18]

$$\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

Pour un état de contraintes plane, la déformation du pli dans son repère d'orthotrope (1, 2, 3) la matrice s'écrit suivant la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{33} = G_{12} ;$$

$$Q_{44} = G_{23} ; Q_{55} = G_{13}$$

Les matrices de rigidité c'est de souplesse s'exprimée dans la base (1',2',3') s'ont obtenues en appliquant les relations de changement de base suivantes :

$$* C' = T^{-1} \sigma C T \varepsilon \dots \dots \dots a$$

$$* S' = T^{-1} \varepsilon C T \sigma \dots \dots \dots b$$

Pour les contraintes : $T_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$

Pour les déformations $T_\varepsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$

Ou : $C = \cos \theta$ et $S = \sin \theta$

$T_{\sigma}^{-1}etT_{\varepsilon}^{-1}$ sont respectivement l'atrics inverses de $T_{\sigma}etT_{\varepsilon}$ les relations d'élasticité peuvent s'écrire dans le repère (x,y) sous l'une des deux formes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \tau'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{16} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{26} \\ \sigma'_{16} & \sigma'_{26} & \sigma'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \tau'_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Les coefficients $[Q'_{ij}]$ et $[S'_{ij}]$ sont exprimés respectivement comme suivant :

$$\begin{cases} Q'_{11} = Q_{11}C^2 + Q_{22}S^2 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 \\ Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} + Q_{66})S^2C^2 + Q_{12}(S^4 + C^4) \\ Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{22} - Q_{66})S^2C^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})CS^3 \\ Q'_{22} = Q_{11}S^4 + Q_{22}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 \\ Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]S^2C^2 + Q_{66}(C^2 + S^2) \\ Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})S^3C + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})SC^3 \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{cases} S'_{11} = S_{11}C^4 + (2S_{12} + S_{66})S^2C^2 + S_{22}S^4 \\ S'_{22} = S_{11}C^4 + (2S_{12} + S_{66})S^2C^2 + S_{22}C^4 \\ S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})S^2C^2 + S_{12}(S^4 + C^4) \\ S'_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})S^2C^2 + S_{66}(S^4 + C^4) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

II.6.3. Comportement d'un stratifié :

On appelle stratifié ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelle ou de tissues avec des orientations propres à chaque pli : [14]

- **Comportement en membrane :**

$$[N(x,y)] = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x,y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x,y). \quad (\text{II.31})$$

-En introduisant les matrices :

$$A = [A_{ij}] \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \quad et \quad B = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad (\text{II.32})$$

- **Comportement en flexion et de torsion**

$$[M(x,y)] = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x,y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x,y) \quad (\text{II.33})$$

Soit :

$$M(x, y) = [B]\varepsilon_m(x, y) + [D]k(x, y) \quad (\text{II .34})$$

-En introduisant les matrices :

$$D = [B_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \quad (\text{II .35})$$

II .6.4. Equation constitutive d'un stratifié :

L'équation constitutive des stratifiés s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme : [14]

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{22} & B_{26} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{11} & B_{11} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II .36})$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{II .37})$$

N : résultantes en membrane

A : La matrice de rigidité en membrane

B : La matrice de couplage membrane-flexion-torsion

M_f : Moments de flexion et de torsion

D : La matrice de rigidité en flexion

II .7. Théories des plaques sandwiches :

Le matériau sandwich est constitué d'un noyau à faible densité auquel deux peaux à haute rigidité et résistance sont liées. La fonction de base du sandwich est de transférer l'action mécanique d'une peau à une autre par cisaillement transversal. La peau peut être en un matériau métallique ou plus généralement une couche d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure). L'épaisseur de l'âme sera notée h et le système de coordonnées sera sélectionné de sorte que le plan (x, y) soit le plan moyen. Nous utilisons les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme (couche centrale) est plus élevée que celles des deux peaux. ($h > h_1, h_2$).
- Le déplacement de l'âme (u et v) suivant les directions (x et y) sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Déplacement transverse (w) est indépendant de la variable (z) : la déformation ε_{zz} est négligeable.
- La théorie des plaques sandwiches est donc basée sur la détermination de cinq fonctions de déplacement et rotation $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$. [15]

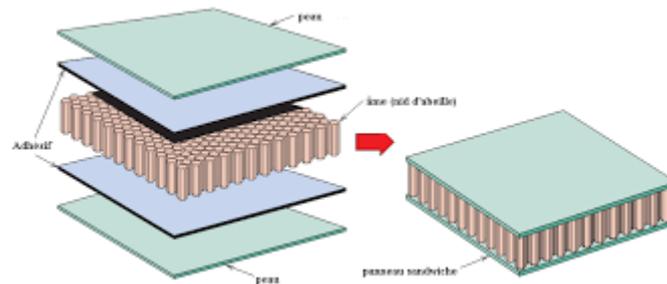


Figure. II .6. Structure sandwiche.

II .7.1. Champ de déplacement :

Le champ de déplacement indique un schéma de premier ordre des déplacements de l'âme [15]

$$\text{Peau inférieure : } \begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \text{ (II .38)}$$

$$\text{Peau supérieure : } \begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \text{ (II .39)}$$

II .7.2. Champ de déformation :

Le champ de déformation dans la peau inférieure est donner par :[15]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon'_{yy} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon'_{zz} = 0 \\ \gamma'_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma'_{yz} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma'_{xz} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (\text{II .40})$$

Le champ de déformations s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \gamma'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II .41})$$

II .7.3Equation constitutive :

L'équation constitutive du panneau sandwich implique les résultats et les moments qui ont été introduits dans la théorie des stratifiés :[15]

- **Les résultantes en membrane**

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{yx} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}+h_1}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II .42})$$

- **Les moments en flexion et torsion**

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{yx} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}+h_1}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} Z dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} Z dz \quad (\text{II .43})$$

- **Les résultantes en cisaillement**

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II .44})$$

D'après les résultants l'équation constitutive est :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

$$\text{Avec : } F_{ij} = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k dz \quad (\text{II.46})$$

Où :

α_{ij} : sont les facteurs de correction en cisaillement permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse, on reprend aussi la valeur de $\frac{5}{6}$.

II.8. Matériau piézoélectrique :

Le mot piézoélectricité vient du grec "piezo", qui signifie presser ou appuyer. Par conséquent, le terme piézoélectricité fait référence à la polarisation électrique ou au champ électrique ou au potentiel généré par certains objets sous l'action d'une contrainte mécanique. Nous parlons de l'effet piézoélectrique direct. Parce que l'effet piézoélectrique inverse est également observé. La tension appliquée à un matériau aux propriétés piézoélectriques entraînera une modification de la taille du matériau. [16]

II.8.1 Loi de comportement :

Pour un matériau piézoélectrique polarisé dans la direction de l'épaisseur (z), les lois de comportement sont : [18]

❖ **L'effet direct de la piézoélectricité :**

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} = [d]^T\{E\} \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Ou : } \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

***L'effet inverse de la piézoélectricité :**

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [e]^T\{E\} \quad (\text{II.49})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & 0 & C_{55} & 0 \\ & & & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Où :

- $\{D\}$: Vecteur de déplacement électrique
- $\{\varepsilon\}$: Vecteur des déformations
- $\{E\}$: Vecteur des champs électriques
- $[e]$: Matrices des constantes piézoélectriques ou de couplage mécanique
- $[d]$: Matrice de permittivité électrique
- $\{\sigma\}$: Vecteur de contrainte
- $[C]$: Matrice des constants élastiques

II.8.2. Champ électrique :

Le champ électrique $\{E\}$ est le gradient du potentiel électrique $\{\phi\}$, et c'est constant suivant l'épaisseur h_p de la couche piézoélectrique : [18]

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = 0 \\ E_z &= -\frac{\phi}{h_p} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{h_p} \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

Où :

- $\{E\}$: Le champ électrique
- $\{\phi\}$: Potentiel électrique
- $\{h_p\}$: Epaisseur de la couche électrique

II .8.3 Energie cinétique:

L'énergie cinétique de la couche piézoélectrique a la même forme que celle d'un matériau purement élastique, donnée par : [18]

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dv = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{u}\}^T [\bar{m}_p] \{\dot{u}\} ds \quad (\text{II .52})$$

$$\text{Avec : } [\bar{m}_e] = \rho \begin{bmatrix} h_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II .53})$$

II .8.4. Energie potentielle :

Par contre l'énergie potentielle est différente à cause de l'effet piézoélectrique, pour un milieu continu, elle comporte initialement une partie élastique et une autre électrique : [18]

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\} \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v [D] \{E\} dv \quad (\text{II .54})$$

En substituant les expressions précédentes, on obtient :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon\}^T \{e\}^T [E] + \{E\}^T \{e\} \{\varepsilon\}) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^T [D] \{E\} dv \quad (\text{II .55})$$

La composante élastique de cette énergie a aussi la même forme que celle d'une couche élastique, mais avec la différence de la matrice $[C]$, car le matériau piézoélectrique est généralement orthotrope.

La deuxième composante est l'énergie potentielle piézoélectrique qui représente le couplage :

$$E_{p\text{-piezoelctrique}} = -\frac{1}{2} \int_v \left(\begin{aligned} & \{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{E\}^t [e_{mf}]^t \{\beta\} + \{\chi\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \\ & + \{E\}^t [e_{mf}]^t \{\chi\} + \{\gamma\}^t [e_c]^t \{E\} + \{E\}^t [e_c]^t \{\gamma\} \end{aligned} \right) dv \quad (\text{II .56})$$

Sachant que de cisaillement pour cette dernière est nulle étant donné que

$E_x = E_x = 0$, et en intégrant suivant l'épaisseur on obtient :

$$E_{p\text{-piézo}} = -\frac{1}{2} \int_S h_p (\{\beta\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}]^T \{\beta\}) ds \quad (\text{II .57})$$

Alors que la composante diélectrique de l'énergie potentielle est donnée par :

$$E_{p\text{-diélectrique}} = -\frac{1}{2} \int_S h_p (\{E\}^T [d]^T \{E\}) ds \quad (\text{II .58})$$

II .8.5. Travail pour plaque piézoélectrique :

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique. [18]

$$T_{\text{mécanique}} + T_{\text{électrique}}$$

II .9. Théorie des plaques sandwiches (multicouches) :

La formulation traite un sandwich intégrant une couche centrale élastique (isotrope ou composite) entre deux sous couches piézoélectriques (en rôles d'actionneurs et/ou capteurs).[17]

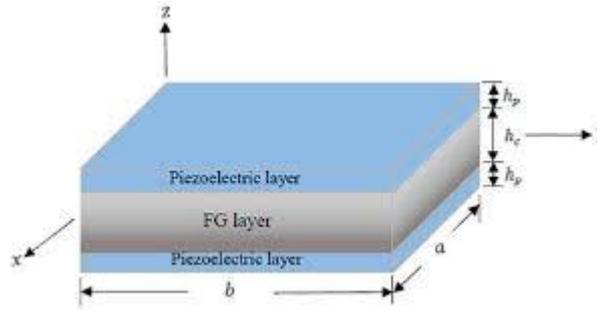


Figure. II .7. Plaque sandwich piézoélectrique

II .9.1. Energie cinétique du sandwich :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_v \int_V \{\dot{u}\}^T ([L_t]^T [L_t] - z([L_r]^T [L_t] + [L_t]^T [L_r]) + z^2([L_r]^T [L_r])) \{\dot{u}\} ds \quad (\text{II .59})$$

En intégrant dans l'intervalle $[-\frac{h_c}{2}, +\frac{h_c}{2}]$ pour l'âme (cœur), l'intervalle $[-\frac{h_c}{2} - h_p, -\frac{h_c}{2}]$ pour la couche piézoélectrique inférieure, et l'intervalle $[+\frac{h_c}{2}, +\frac{h_c}{2} + h_p]$ pour la couche supérieure, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_S \{\dot{u}\}^T [\bar{m}_s] \{\dot{u}\} ds \quad (\text{II .60})$$

$$[\bar{m}_s] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & m_1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & m_1 & & & \\ & & & m_1 + m_1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & m_1 + m_1 & \end{bmatrix} \quad (\text{II .61})$$

Où :

- s : indice pour plaque Sandwiche,
- h_c : Épaisseur de l'âme (cœur)
- h_p : Épaisseur de la sous-couche piézoélectrique
- $m_1 = \rho_c \cdot h_c + 2\rho_p \cdot h_p$
- $m_2 = \rho_c \frac{h_c^3}{12}$
- $m_3 = \rho_p \frac{2}{3} \left(\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right)$ [9]

II .9.2. Energie potentielle du sandwich :

$E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-piezoélectrique}} - E_{p\text{-diélectrique}}$ (II .62)

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon\}^T \{e\}^T [E] + \{E\}^T \{e\} \{\varepsilon\}) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^T [D] \{E\} dv \text{ (II .63)}$$

-Pour la composante élastique, on a :

$$E_{\text{élastique}} = E_{\text{membrane}} + E_{\text{flexion}} + E_{\text{cisaillement}} \text{ (II .64)}$$

$$E_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \int_s \{\beta\}^T [H_m] \{\beta\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\bar{x}\}^T [H_f] \{\bar{x}\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} ds \text{ (II .65)}$$

Où :

$$[H]_m = h_c [C_{mf}]_{\text{coeur}} + 2h [C_{mf}]_{\text{piezo}} \text{ (II .66)}$$

$$[H_f] = \frac{h_c^3}{12} [C_{mf}]_{\text{coeur}} + \frac{2}{3} \cdot \left(\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right) [C_{mf}]_{\text{piezo}} \text{ (II .67)}$$

$$[H_c] = k \cdot h_c \cdot [C_c]_{\text{coeur}} \text{ (II .68)}$$

La composante piézoélectrique du sandwich est l'apport que des deux sous-couches piézoélectriques, c'est donné par : [17]

$$E_p = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot (\{\beta\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}]^T \{\beta\}) ds \text{ (II .69)}$$

La même remarque sur la partie diélectrique :

$$E_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot (\{E\}^T [d]^T \{E\} ds) \text{ [9] (II .70)}$$

II .9.3 Travail des efforts extérieurs:

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique.[17]

=

$$T = T_{\text{mécanique}} + T_{\text{électrique}} \text{ (II .71)}$$

Pour la première composante on reprend la relation :

$$T_{\text{électrique}} = \int_v \{U\}^T \{F\} dv + \int_s \{U\}^T \{f\} ds + \{U\}^T \{P\} \quad (\text{II.72})$$

Par contre la deuxième est donnée par :

$$T_{\text{électrique}} = - \int_s \{\phi\}^T \{D\} ds \quad (\text{II.73})$$

Conclusion :

Après notre brève introduction dans la théorie des plaques minces, élastiques, orthotropes et piézoélectriques, on va clarifier dans le chapitre suivant le concept des éléments finis et la discrétisation des formules présentées en chapitre 2.

Chapitre III

Discrétisation en élément finis :

III.1. Introduction :

La méthode des éléments finis spécifie un ensemble de techniques numériques qui permettent de résoudre approximativement une classe de problèmes mathématiques basés sur des équations aux dérivées partielles, pour lesquelles on ne sait généralement pas comment trouver une solution exacte. C'est un outil mathématique avec de nombreuses applications, de la physique des milieux continus au calcul de probabilité. [20]

III.2. la discrétisation et les fonctions de base :

La théorie de la rétention vient du mécanisme du continuum, la soi-disant discrétisation. Ainsi, il est possible de discrétiser toutes les théories de la mécanique du continu, qu'il s'agisse d'une version 3D générale, d'une forme 2D simplifiée (contrainte plane, déformation plane, ...), ou encore de la théorie des poutres, des plaques ou des coques. La discrétisation de la mécanique des continus repose sur deux modifications :

- Une autre hypothèse cinématique sur l'allure du champ de déplacement est recherchée sous la forme d'une combinaison linéaire (inconnue) de fonctions de base connues définies par la continuation de la ressource ;
- Une transformation des équations d'équilibre du continuum conçue pour les rendre mathématiquement compatibles avec les autres hypothèses que nous venons d'introduire. [20]

III.3 Le modèle du produit ou maillage :

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un maillage, dont la définition s'appuie sur deux objets géométriques. Le premier est un découpage du domaine géométrique occupé par le produit en sous-domaines de formes simples. Ces sous-domaines sont tridimensionnels, bidimensionnel ou unidimensionnels, selon la théorie dans laquelle on se place (par exemple, en mécanique des milieux continus 3D, mais en théorie des poutres, il s'agit de lignes). [20]

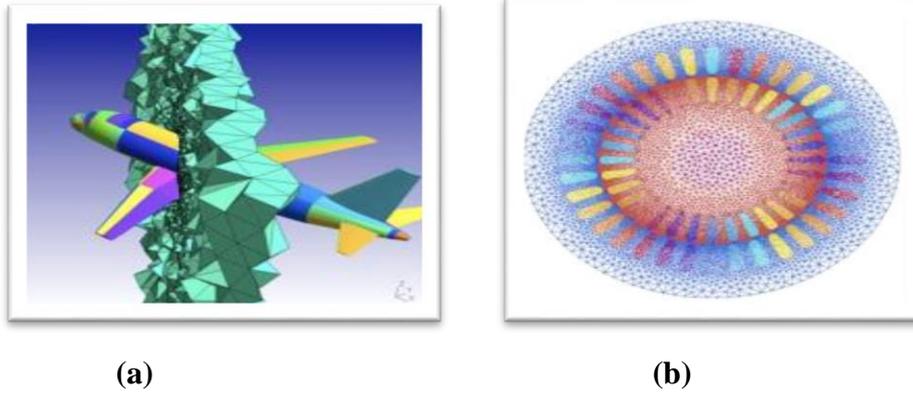


Figure. III.1. Exemples de découpages géométriques appartenant à des maillages :
 (a) une partie du volume d'air entourant un avion (pour une simulation d'acoustique 3D),
 (b) un modèle plan d'un moteur électrique (pour une simulation d'électromagnétisme 2D).

Le deuxième objet est une liste de points particuliers, situés aux sommets des sous-domaines ainsi que, quelquefois, aux milieux de leurs arêtes : les nœuds (figure2).

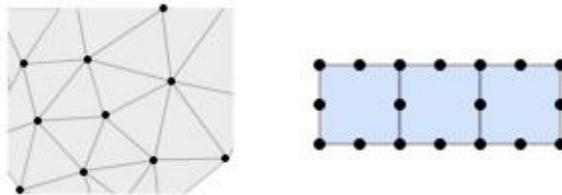


Figure. III. 2. Deux maillages plans avec leurs nœuds.

III.4. Choix du modèle :

Le choix d'élément est en fonction de la précision voulue, de la nature du problème et aussi du temps disponible, et parmi les types des élément finis on choisira un élément rectangulaire bidimensionnel à quatre nœuds avec 5 degrés de liberté, car suite à une recherche sur le domaine ce type d'éléments est très utilisé pour le traitement des problèmes de plaques (isotropes, orthotropes et anisotropes).[20]

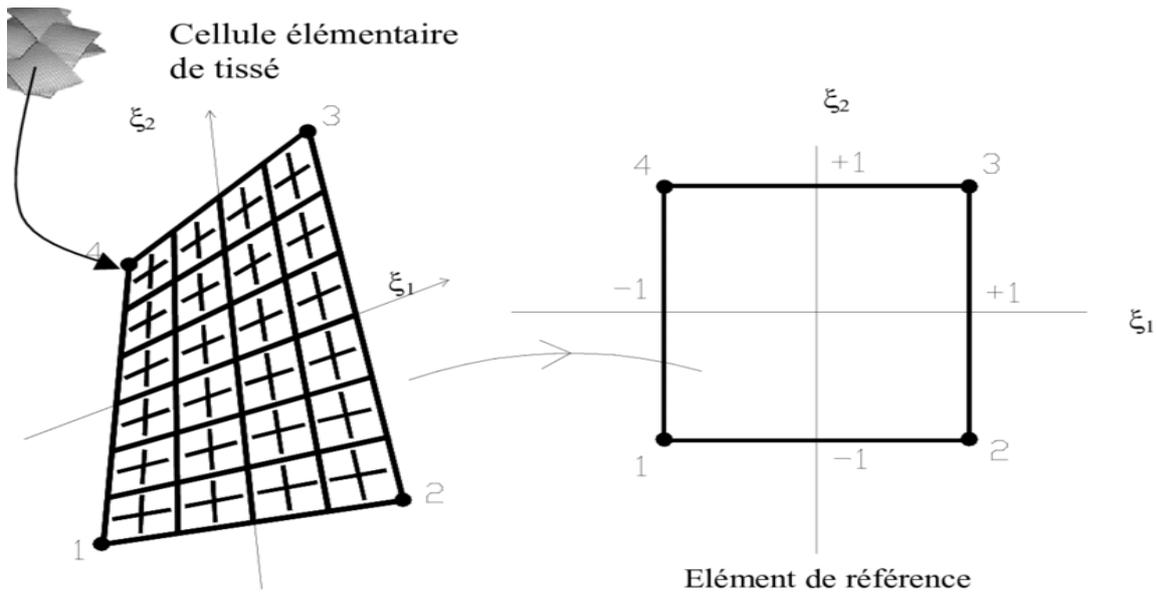


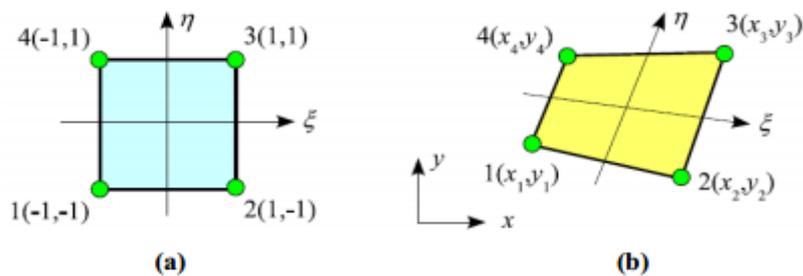
Figure. III.3. Élément fini a quatre nœuds de cellules de tisses.

III.5. Approximation nodale :

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique du \mathbf{u} approximatif du champ des variables $\bar{\mathbf{u}}$ par le sous-champ. Cette approximation est basée sur l'approximation du champ au nœud de l'élément considéré, on parle de représentation approximative de nœud ou plus simplement d'approximation nodale. [20]

III.6. Représentation de la géométrie

On a opté pour un élément de plaque quadrilatère iso paramétrique bidimensionnel avec quatre nœuds (interpolation linéaire) et 5 degrés de liberté (3 déplacements u v w et 2 rotations θ_x et θ_y) à chaque nœud (chaque élément réel a un élément de référence).



Elément de référence

Elément réel

Figure. III.4. Élément rectangulaire à quatre nœuds.

On appelle coordonnées naturelle (ξ, η) d'un système physique un ensemble de variables réelles, qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes, et permettant de décrire ce système, en particulier dans le cadre de la mécanique lagrangienne.[21]

III.7. Fonctions d'interpolation :

Les variables du problème peuvent être approximées selon les fonctions suivantes : [22]

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot v_i \\
 w &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot w_i \\
 \theta_x &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{xi} \\
 \theta_y &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{yi}
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

Où :

- N_i : fonctions d'interpolation
- nn : nombre de nœuds par élément

Pour un élément rectangulaire à quatre nœuds, la matrice de la fonction d'interpolation est donnée par :

$$[N] = [G] \cdot [C]^{-1} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \tag{III.2}$$

$$[C] = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Où : $[G] = [1 \quad \xi\eta \quad \eta\xi]$ (III.3)

On a donc :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases}$$

Les relations de fonctions d'interpolation sont réorganisées sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.4)}$$

$$\{u\} = [N_u] \{\bar{u}\} \quad \text{(III.5)}$$

Où :

- $\{\bar{u}\}$ Vecteur de déplacements nodaux

La matrice jacobéenne de la transformation, c'est-à-dire des coordonnées réelles aux coordonnées naturelles, est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.6)}$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.7)}$$

$$\det[J(\xi, \eta)] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} > 0 \quad \text{(III.8)}$$

Avec :

[J]: matrice Jacobéenne (2×2) de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées naturelle, et inversement.

L'utilisation des coordonnées naturelles simplifie le domaine sur lequel les intégrales sont définies, et les éléments de surfaces sont exprimées par :

$$dS = dx. dy = [J]. d\xi. d\eta \quad (\text{III.9})$$

(ξ_i, η_i) : sont les coordonnées du nœud i^e de l'élément de référence. On en déduit :

$$N_j = (\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Pour une couche en matériau piézoélectrique, on a un degré de liberté supplémentaire pour chaque nœud, qui représente le potentiel électrique. Etant donné que le potentiel électrique est constant sur la surface des couches piézoélectriques, alors l'interpolation du potentiel électrique est donnée par :

$$\{\phi\} = [N_\phi]\{\bar{\phi}\} = [I]\{\bar{\phi}\} \quad (\text{III.11})$$

Ou :

- $\{\phi\}$: vecteur des potentiels électrique
- $\{N_\phi\} = [I]$: matrice d'interpolation (matrice identité)

III.8 Approximation de la solution :

Afin d'obtenir des expressions d'énergie approchées et discrètes, nous introduisons des expressions d'interpolation nodale :

III.8.1 Approximation de l'énergie cinétique sur un élément :

On reprend l'expression (II .52) de l'énergie, et en substituant la dérivée de la relation

(III.5), on obtient : [18]

$$\{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}_u]\{\dot{\bar{\mathbf{u}}}\} \quad (\text{III.12})$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{u}\}^T [N_u]^T [\bar{m}_s] [N_u] \{\dot{u}\} ds \quad (\text{III.13})$$

III.8.2 Approximation de l'énergie potentielle sur un élément:

Pour une plaque sandwich piézoélectrique, l'énergie potentielle est aussi composée de trois parties :

$$E_p = E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-piézoélectrique}} - E_{p\text{-diélectrique}} \quad (\text{III.14})$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_s \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_s \{\varepsilon\}^T [e]^T \{\varepsilon\} dv + \frac{1}{2} \{E\}^T [e] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \{E\}^T [D] \{E\} dv \quad (\text{III.15})$$

A-Energie potentielle élastique

A partir de la relation (II.64), et en substituant les expressions des approximations des relations (II.62), (II.65), et (III.13), on aura :

$$\left(\begin{array}{l} E_P = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{u}\}^T ([N_u]^T [D_{um}]^T [H_m] [D_{um}] [N_u]) \\ \quad + [N_u]^T [D_{uf}]^T [H_f] [D_{uf}] [N_u] \\ \quad - [N_u]^T [D_{um}]^T [H_{mf}] [D_{uf}] [N_u] \\ \quad - [N_u]^T [D_{uf}]^T [H_{mf}] [D_{um}] [N_u] \\ \quad + [N_u]^T [D_{uc}]^T [H_c] [D_{uc}] [N_u] \{\bar{u}\} ds \end{array} \right) \quad (\text{III.16})$$

B-Energie potentielle piézoélectrique

On reprend l'expression (II.69), et en substituant les expressions des approximations des relations (II.64), (II.62) et (III.11), l'énergie devienne

$$E_{p=} - \frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \{\bar{u}\}^T ([N_u]^T [D_{um}]^T [e_{mf}]^T [D_\emptyset] [N_\emptyset] ds - \frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \{\bar{\emptyset}\}^T ([D_\emptyset]^T [N_\emptyset]^T [e_{mf}]^T [N_u] [D_{um}]) \{\bar{u}\} ds \quad (\text{III.17})$$

C- Energie potentielle diélectrique

Cette énergie est la participation des couches piézoélectriques présentée dans l'expression (II.70) et en substituant les expressions des approximations de la relation (III.11)

$$E_p = -\frac{1}{2} (2h_p) \int_s \{\bar{\emptyset}\}^T [N_\emptyset]^T [D_\emptyset]^T [d] [D_\emptyset] [N_\emptyset] \{\bar{\emptyset}\} ds \quad (\text{III.18})$$

III.8.3 Travail des forces extérieures pour le sandwich

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique.

A. Mécanique

On reprend l'expression ($T_{\text{électrique}} = \int_v \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{F}\} d\mathbf{v} + \int_s \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{f}\} d\mathbf{s} + \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{P}\}$), en tenant compte de la relation ($\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}_u] \{\bar{\mathbf{u}}\}$) :

$$\mathbf{T} = \int_v (\mathbf{h}_c + 2\mathbf{h}_p) \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{N}_u]^T \{\mathbf{F}_v\} d\mathbf{v} + \int_s \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{N}_u]^T \{\mathbf{F}_s\} d\mathbf{s} + \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{N}_u]^T \{\mathbf{P}\} \quad (\text{III.19})$$

Ou :

- $\{\mathbf{F}_v\}$ et $\{\mathbf{F}_s\}$ sont respectivement les forces volumiques et surfaciques.

B. Électrique

$$\left[\begin{aligned} & [\mathbf{K}_{uu}]_e = \sum_i \mathbf{h}_i \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{um}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\mathbf{D}_{um}] [\mathbf{N}_u] d\mathbf{s} \\ & + \sum_i \frac{\mathbf{h}_i^3}{12} + \mathbf{z}_i \mathbf{h}_i \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{um}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\mathbf{D}_{uf}] [\mathbf{N}_u] d\mathbf{s} \\ & - \sum_i (\mathbf{z}_i \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{um}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\mathbf{D}_{uf}] [\mathbf{N}_u] d\mathbf{s} \\ & - \sum_i (\mathbf{z}_i \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{uf}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\mathbf{D}_{um}] [\mathbf{N}_u] d\mathbf{s} \\ & + \sum_i (\mathbf{k} \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{uc}]^T [\mathbf{C}_c] [\mathbf{D}_{uc}] [\mathbf{N}_u] d\mathbf{s} \end{aligned} \right] \quad (\text{III.20})$$

Avec : \mathbf{z}_i : la position par rapport au plan moyen de la i^{e} couche

A. Cas piézoélectrique

Cette partie représente le couplage électromécanique, et en écrivant l'expression (III.18) sous la forme :

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{K}_{u\emptyset}]_e \{\bar{\emptyset}\} + \frac{1}{2} \{\bar{\emptyset}\}^T [\mathbf{K}_{\emptyset u}]_e \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (\text{III.21})$$

Où :

- $[\mathbf{K}_{u\emptyset}]_e$ Et $[\mathbf{K}_{\emptyset u}]_e$: est composante de la matrice de rigidité due au couplage piézo-mécanique

$$[\mathbf{K}_{u\phi}]_e = -\sum_i \mathbf{h}_i \int_S [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{um}]^T [\mathbf{e}_{mf}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] d\mathbf{s} - \sum_i (\mathbf{z}_i \mathbf{h}_i) \int_S [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{D}_{uf}]^T [\mathbf{e}_{mf}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] d\mathbf{s} \quad (\text{III.22})$$

B. Cas diélectrique

Cette matrice représente l'effet de la partie électrique de l'énergie

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e \{\bar{\phi}\} \quad (\text{III.23})$$

Où : $[\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e$: matrice de rigidité élémentaire due à la diélectricité est donnée par :

$$[\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e = -\sum_i \mathbf{h}_i \int_S [\mathbf{N}_\phi]^T [\mathbf{D}_\phi]^T [\mathbf{d}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] d\mathbf{s} \quad (\text{III.24})$$

D'après la matrice (élastique, piézoélectrique, diélectrique) on construit la matrice de rigidité élémentaire :

$$[\mathbf{K}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}]_e & [\mathbf{K}_{u\phi}]_e \\ [\mathbf{K}_{\phi u}]_e & [\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

L'expression matricielle de la formulation variationnelle

donne les équations de mouvement de la structure :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{Q}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Les équations de mouvement sont données par :

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_{uu}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{u\phi}]\{\phi\} = \{\mathbf{F}\}$$

$$[\mathbf{K}_{\phi u}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (\text{III.27})$$

Où :

- $\{\mathbf{F}\}$: Vecteur de forces extérieures
- $\{\mathbf{Q}\}$: Vecteur de charge électrique

Conclusion :

On a utilisé les éléments finis pour discrétiser le milieu et approximer l'énergie pour obtenir la matrice de base de masse, rigidité et vecteur de force nodale. L'opération d'assemblage permet d'obtenir la matrice globale et obtenir les équations de mouvement.

Chapitre IV

Analyse d'un sandwich piézoélectrique

IV.1 Introduction

L'analyse d'une plaque sandwich piézoélectrique équivaut à traiter les équations de mouvement qui contrôlent son comportement dynamique. Par conséquent, nous nous intéressons à l'analyse modale et dynamique de la structure, puis introduisons des formules pour atténuer les vibrations dans les modes capteur et actionneur

IV.2 Analyse modale :

En résolvant l'équation de mouvement régissant le comportement des structures, pour une plaque monocouche ou plaque sandwich, on peut obtenir la réponse modale et dynamique.

L'analyse modale caractérise la vibration libre d'une structure, et permet de déterminer les fréquences propres de vibrations (valeurs propres) et les déformées modales (vecteurs propres) de cette structure.

L'analyse modale d'une plaque piézoélectrique peut suivre les mêmes étapes que celles pour une plaque purement isotrope à quelques détails près. Donc, si aucune force externe n'est appliquée sur la structure, l'équation de mouvement se réduit à : [18]

$$\begin{bmatrix} [M] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\boldsymbol{\phi}}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\boldsymbol{\phi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

La solution est écrite sous la forme suivante :

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{t})\} = \{\boldsymbol{\Psi}\} e^{j\omega t} \quad (\text{IV.2})$$

$$\{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})\} = \{\boldsymbol{\varphi}\} e^{j\omega t} \quad (\text{IV.3})$$

Où ; ω : Valeur propre

$\boldsymbol{\Psi}$ et $\boldsymbol{\varphi}$: les vecteurs propres

Substituant l'expression (IV.2) et (IV.3) dans la relation (IV.1), on obtient l'équation caractéristique du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi \\ \phi \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

D'où :

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Cette équation peut être séparée en deux parties, une partie élastique et l'autre électrique présenté comme suit :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_{uu}]\{\Psi\} + [\mathbf{K}_{u\phi}]\{\phi\} - [\mathbf{M}]\{\Psi\} = \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{K}_{\phi u}]\{\Psi\} + [\mathbf{K}_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

IV.3 Amortissement :

Toute structure réelle sera plus ou moins amortie, ce qui provoque la dissipation d'énergie lors des vibrations. Si la structure absorbe une énergie très faible, ce qui signifie un amortissement très faible, la structure est considérée comme conservatrice ; si la structure dissipe de l'énergie, ce qui signifie un amortissement élevé, la structure est considérée comme dissipative. Les amortissements les plus courants sont : [23]

- **Amortissement visqueux** : Amortisseur conventionnel (roulement de fluide visqueux à travers le trou de piston) Entraîné par un mouvement vibrant) transmet une force proportionnelle à la vitesse Mouvement et signes opposés. Dans un cycle, les effets de ces forces sont positifs : Amortissement visqueux.

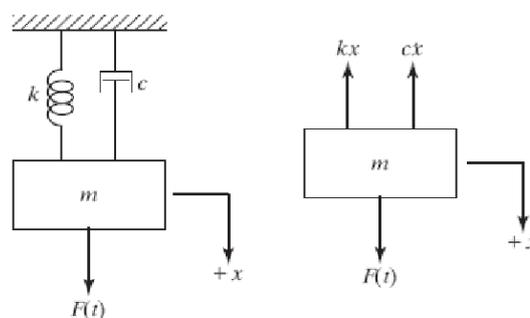


Figure. IV.5. Amortissement visqueux.

- **Amortissement structural** : Énergie dissipée Proportionnel au déplacement afin que la force d'amortissement soit proportionnelle à la vitesse.

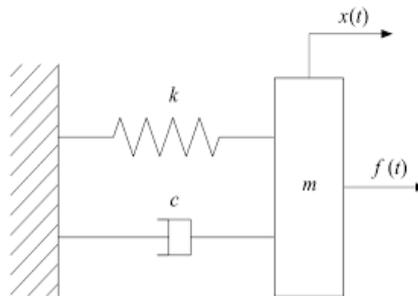


Figure. IV.6. Amortissement structural

- **Amortissement visqueux proportionnel « globale »** ; On se place dans le cadre des équations classiques de la dynamique des structures linéaires :

$$\mathbf{M} \mathbf{U}'' + \mathbf{C} \mathbf{U}' + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (\text{IV.7})$$

La notion d'amortissement de RAYLEIGH permet de définir la matrice d'amortissement \mathbf{C} comme combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse :

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}] \quad (\text{IV.8})$$

Ou :

- α : Coefficient de proportionnalité de la masse
- β : Coefficient de proportionnalité de la rigidité

Influence des coefficients de proportionnalité :

- Amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie : $\alpha=0, \beta=\beta_i$, dans ce cas les modes élevés seront très peu amortis et les modes basse fréquence très amortis.
- Amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité : $\alpha=\alpha_j, \beta=0$, dans ce cas aussi les modes élevés seront très amortis.
- Amortissement proportionnel complet : $\alpha=\alpha_j, \beta=\beta_j$,

Cet amortissement est le plus utilisé pour plusieurs avantages, on cite :

- Après avoir assemblé la matrice de rigidité et de masse avec les coefficients réels, il est facile à mettre en œuvre

- Historiquement, son succès est lié à la méthode d'analyse transitoire, qui est réalisée par réorganisation modale à partir du vrai mode pur.

Mais il a aussi des inconvénients qui sont :

I • Cette modélisation ne permet pas de représenter l'hétérogénéité de la structure par rapport à l'amortissement.

- L'amortissement effectivement introduit dans le modèle dépend fortement de l'identification des coefficients α et β .

IV.3 Analyse dynamique :

Cette analyse permet l'étude des vibrations d'une structure sous chargement externe, et l'équation de mouvement d'une plaque sandwich piézoélectrique est donnée par : [18]

$$\begin{bmatrix} [M] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\emptyset}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{u}}\} \\ \{\dot{\emptyset}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\emptyset}] \\ [K_{\emptyset u}] & [K_{\emptyset\emptyset}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\emptyset\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Les éléments piézoélectriques peuvent être utilisés soit comme capteur (effet direct de la piézoélectricité), ou autant qu'actionneur (effet inverse de la piézoélectricité). Dépendant de leur utilisation, les conditions aux limites électriques sont différentes.

IV.4 Réponse d'un capteur piézoélectrique (mode capteur) :

Dans ce cas, il n'existe que des capteurs sur la plaque sandwich, alors le vecteur des potentiels électriques reste inconnu dans l'équation de mouvement. Par conséquent le vecteur d'excitation ne comporte que les efforts mécaniques. On note aussi qu'aucune charge n'est accumulée sur les couches piézoélectriques, et pour la couche de capteur, la charge appliquée ($\{\emptyset\} = \{0\}$) est nulle. Donc l'équation de mouvement devient :

$$\begin{bmatrix} [M] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\emptyset}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\emptyset}] \\ [K_{\emptyset u}] & [K_{\emptyset\emptyset}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\emptyset\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

IV.5.Mode Actionneur :

Dans ce cas, il n'y a que des actionneurs sur la plaque sandwich, donc le vecteur potentiel ($\{\emptyset\} \neq 0$) est connu. La composante d'excitation de l'actionneur est alors transférée du même côté du vecteur force. L'équation du mouvement devient :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_u\} - [K_{u\emptyset}]\{\emptyset_n\} \quad (IV.11)$$

IV.6 Résolution par la méthode de NEWMARK :

La méthode de NEWMARK permet l'analyse numérique des équations différentielles du second ordre. Il convient non seulement aux systèmes différentiels linéaires. [23]

IV.6.1 Principe de l'algorithme de NEWMARK :

Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité la position et la vitesse à l'instant t à partir des mêmes grandeurs à l'instant $t - dt$. Ce développement contient un terme d'erreur du troisième ordre proportionnel à la dérivée de l'accélération. En partant de l'hypothèse selon laquelle l'accélération varie linéairement sur l'intervalle, on aboutit à des formules qui ne dépendent plus de la dérivée troisième mais qui introduisent les dérivées à l'instant t en plus de celles à l'instant $t - dt$. [24]

Algorithme :

À la différence d'autres méthodes d'intégration numérique l'algorithme est particulièrement simple. [23]

Début

{Les valeurs au pas précédent deviennent les anciennes valeurs}

$$x_{t-dt} = x_t; \dot{x}_{t-dt} = \dot{x}_t; \ddot{x}_{t-dt} = \ddot{x}_t \quad (IV.12)$$

Répéter

{Les nouvelles valeurs deviennent les anciennes valeurs}

$$x_a = x_t; \dot{x}_a = \dot{x}_t; \quad (IV.13)$$

{Calcul de la nouvelle accélération en fonction des anciennes valeurs}

$$\ddot{x}_t = \frac{1}{M} f(x_a, \dot{x}_a, t) \quad (\text{IV.14})$$

{Calcul de la nouvelle vitesse et la nouvelle position en fonction de la nouvelle accélération}

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-dt} + \frac{1}{2}(\ddot{x}_{t-dt} + \ddot{x}_t)dt \quad (\text{IV.15})$$

$$x_t = x_{t-dt} + \dot{x}_{t-dt}dt + \frac{1}{3}(\ddot{x}_{t-dt} + \frac{\ddot{x}_t}{2})dt^2 \quad (\text{IV.16})$$

Jusqu'à $|x_t - x_a| < \varepsilon$ {La nouvelle approximation diffère assez peu de l'ancienne}

Fin.

Où :

- x , \dot{x} et \ddot{x} :le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'état n .

dt : est l'incrément du temps.

Conclusion

Dans cette partie, on a traité les équations de mouvement qui contrôlent le comportement des plaques sandwich piézoélectriques sous différents angles, a noter, analyse modale et le contrôle des vibrations en mode actionneur et capteur et on a spécifiquement expose la formule et l'algorithmme à exécuter.

Chapitre V

Application et discussion

V.1. Introduction :

L'un des objectifs de notre travail est de déterminer les caractéristiques (fréquence et mode propre) des plaques composites et des plaques piézoélectriques en vibration de flexion.

On va utiliser logicielle ANSYS pour traiter une analyse modale pour des plaque élastiques, isotropes, orthotropes, et aussi des plaques piézoélectriques monocouche et sandwich en mode actionneur.

V.2. Logiciel de calcul ANSYS :

ANSYS est un logiciel multiphasique de simulation numérique par méthode des éléments finis. Il couvre toutes les étapes nécessaires à une simulation : le traitement géométrique, le maillage, la résolution, le traitement de résultats et l'optimisation, il offre aussi des analyses modales, statiques, harmoniques...etc.

V.2.1. Plaque élastique isotrope monocouche :

Pour s'introduire et utiliser logicielle ANSYS on va traiter un cas très simple qui concerne une plaque isotrope élastique simplement appuyée sur les quatre cotés (AAAA), de dimensions $A*B*h$ ($A=2000\text{mm}$, $B=1500\text{mm}$ et $h=10\text{mm}$), avec les propriétés mécaniques suivantes : [1]

$E=200\text{GPa}$, $\rho=7800\text{kg/m}^3$, $\nu=0.3$

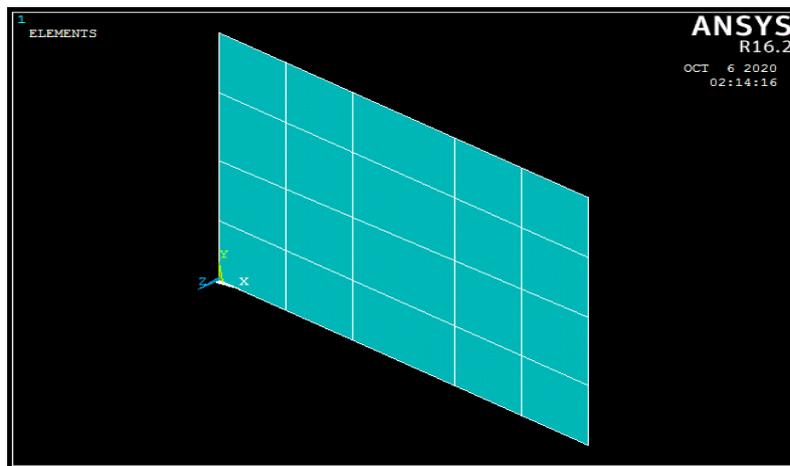


Figure.V.1. Plaque monocouche isotrope (AAAA)

On obtient les 3 premiers résultats que présentes les fréquences propres de la plaque (AAAA) :

SET	Présent	Ezzraimi [18]	Différences %
Mode 1	16.636	16.75	0.3%
Mode 2	34.720	35.88	1.1%
Mode 3	48.924	50.68	1.7%

Tableau.V.1 : les trois premières fréquences propres de la plaque monocouche isotrope

(AAAA)

D'après la comparaison on remarque que les fréquences sont très proches, et la différence maximale est de 2%, qui est acceptable.

V.2.2. Plaque composite élastique orthotrope :

Pour familiarise plus avec logicielle ANSYS on va traiter un cas plus complexe qui concerne une plaque composite en graphite-époxy (T300/976), de séquence d'empilement de plies (-45/45/-45/45), d'épaisseur de **0.25mm** chacune, de dimensions A*B (A=200mm et B=200 mm). La plaque est encastrée d'un seule coté et libre des trois autres (ELLL), de propriétés mécaniques : [1]

**$E_{11}=150\text{GPa}$ $E_{22}, E_{33}=9\text{GPa}$ $G_{12}= G_{13}= 7.1 \text{ GPA}$ $G_{23}=2.5\text{Gpa}$ $V_{12}=V_{23}=V_{13}=0.3$
 $p=1600 \text{ Kg/m}^3$**

La simulation de cette application a logicielle ANSYS est la suivante :

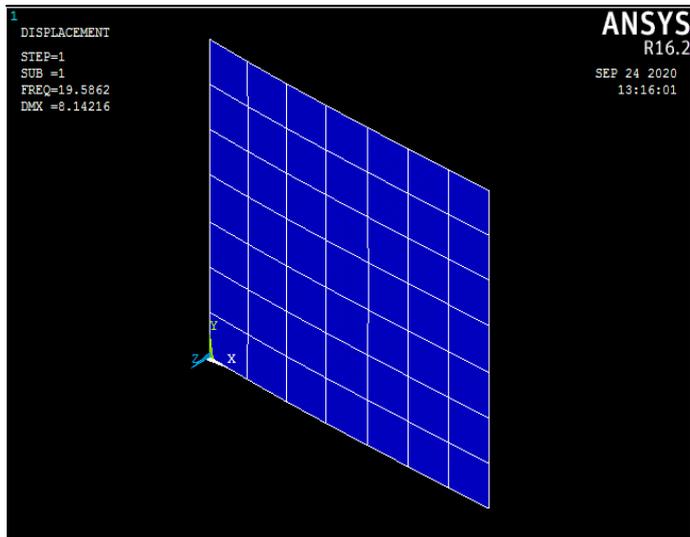


Figure. V.2. Plaque composite élastique orthotrope

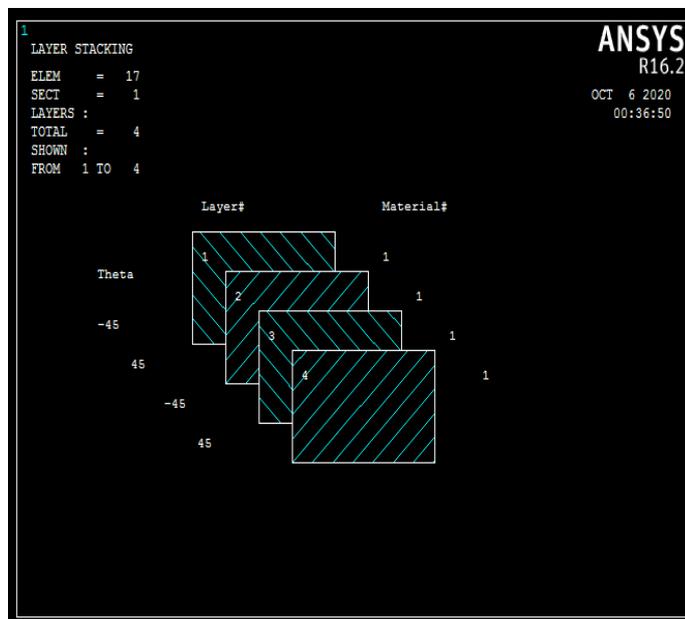


Figure.V.3. les couches et les orientations de la plaque

On obtient les 3 premiers résultats que présentes les fréquences propres de la plaque (ELLL) :

SET	Présent	Article LAM et al [25]	Déférence en %
Mode 1	19.743	21.4657	1.7%
Mode 2	68.059	63.3491	4.7%
Mode 3	118.36	130.8221	12.4%

Tableau.V.2 : les trois premières fréquences propres de la plaque (ELLL)

D'après la comparaison les résultats de ANSYS avec l'article, on remarque que les fréquences sont très proches, et la différence maximale est de 12.5% environ, et qui est acceptable.

Par la suite, ce composite sera utilisé comme partie centrale de la plaque sandwich entre les deux sous-couches piézoélectriques

V.2.3 Etude de l'influence des conditions aux limites

On reprend la même plaque en composite, mais avec des conditions aux limites différentes, c'est simplement appuyé sur les quatre cotés (AAAA). Les fréquences propres sont présentées sur le tableau suivant :

SET	TIME/FREQ (AAAA)	TIME/FREQ (ELLL)
Mode 1	140.7237	21.4657
Mode 2	337.2233	63.3491
Mode 3	562.1681	130.8221

Tableau.V.3 : les trois fréquences propres d'une plaque (AAAA) et une plaque (ELLL).

On remarque que les fréquences propres de la plaque (AAAA) augmentent presque sept fois plus que la plaque (ELLL) c.-à-d. que la plaque en conditions limites AAAA devienne plus rigide qu'une plaque (ELLL).

V.2.4 Plaque anisotrope piézoélectrique :

On va étudier l'effet piézoélectrique à travers logicielle ANSYS par un cas qui concerne une plaque anisotropie piézoélectrique (PZTG1195N) encastré d'un seul côté avec de démentions A*B (200*200mm) et épaisseur **hp=0.1mm** et d'une masse volumique égale à **7600 kg/m³**.

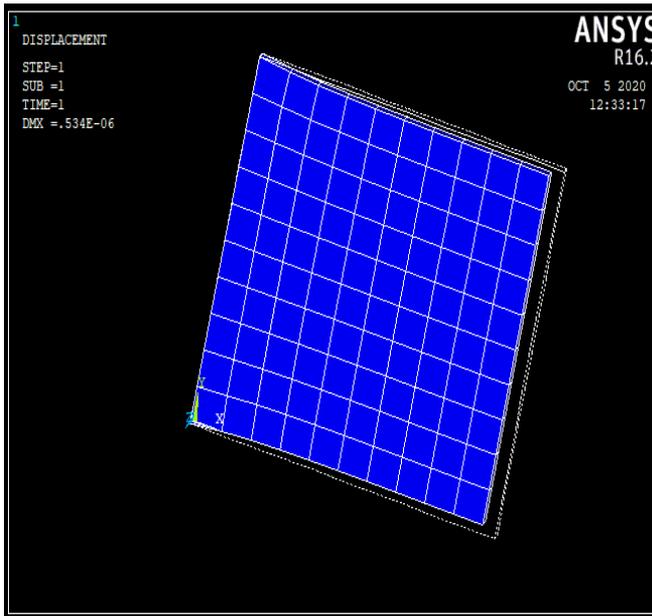
Les caractéristiques du matériau sont présentées dans le tableau suivant ;

Propriétés		PZT G1195N
Module de Young en GPa	E_{11}	63
	$E_{22}=E_{33}$	63
Coefficients de Poisson	ν_{23}	0.3
	$\nu_{13}=\nu_{12}$	0.3
Module de cisaillement (GPa)	$G_{12}=G_{13}$	24.2
	G_{23}	24.2
Masse volumique (Kg/m ³)	P	7600
Constantes piézoélectriques (m/V)	$e_{31}=e_{32}$	254 10 ⁻¹²
Permittivité électrique (F/m)	$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}$	15.3x10 ⁻⁹
	ϵ_{33}	15x10 ⁻⁹

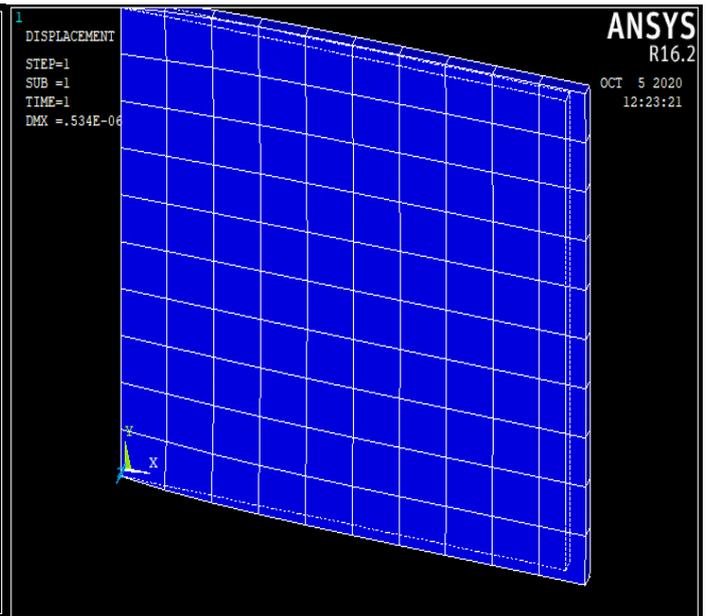
Tableau. V.4: Propriétés de matériau piézoélectrique

On a effectué deux cas, le premier est d'appliquer deux une tension électrique de 50 v sur la surface supérieure de la plaque piézoélectrique et 0 v sur sa surface inferieur, ce qu'on a appelé polarisation 01, et le cas oppose est la polarisation 02.

Les résultats des applications en ANSYS sont les suivants ;

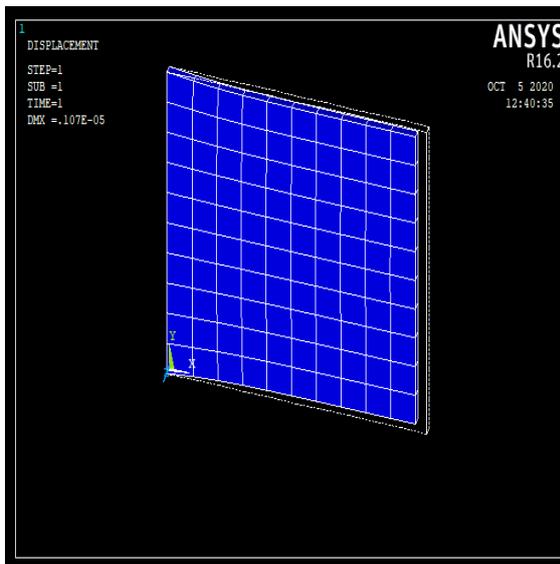


Polarisation 01

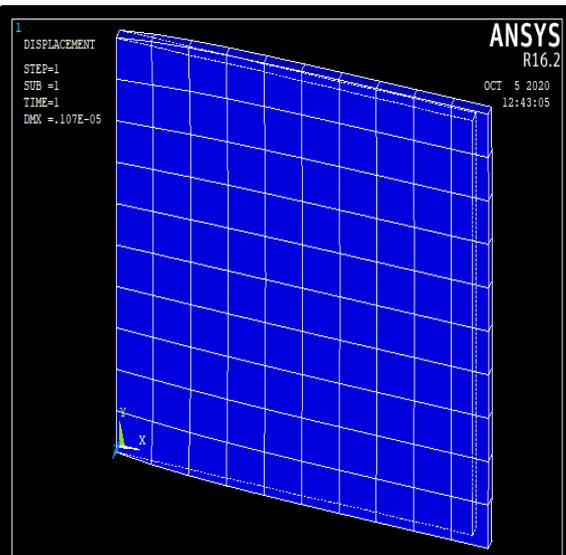


Polarisation 02

Figure. V.4: déformation de plaque piézoélectrique (ELLL) chargé avec 50v dans les deux polarisations.



Polarisation 01



Polarisation 02

Figure.V.6 : déformation de plaque piézoélectrique (ELLL) chargé avec 100v dans les deux polarisations.

Les résultats sont affichés au tableau suivant :

Voltage/polarisation	polarisation 01 +	polarisation 02 -
30v	0.32e-6	0.32e-6
50v	0.53e-6	0.53e6
100v	0.107e-5	0.107e-5

Tableau V.5. les déformations de plaque ELLL avec des différents voltages et polarisations.

D'après le tableau précédent les simulations on remarque que quand le voltage augmente la déformation de la plaque augmente mais cette dernière reste la même avec des polarisations inversées,

Avec ces résultats on a maîtrisé l'effet piézoélectrique ; la plaque s'allonge à la polarisation 01 et se rétrécit à la polarisation 02.

V.2.5. Plaque piézoélectrique sandwich :

On va traiter un exemple de contrôle actif des vibrations à travers une plaque sandwich piézoélectrique (structure intelligente) de dimensions $A*B$ (**20*20mm**) composée d'une plaque centrale en composite (élément contrôlé) en composite (graphite-époxy T300/976) d'une épaisseur totale de h (**$h=1mm$**), et deux sous-couches piézoélectriques en rôle d'actionneur (élément contrôleur) (PZTG1195N) d'épaisseur h_p chacune (**$h_p=0.1mm$**) encadrées d'un seul côté (ELLL).

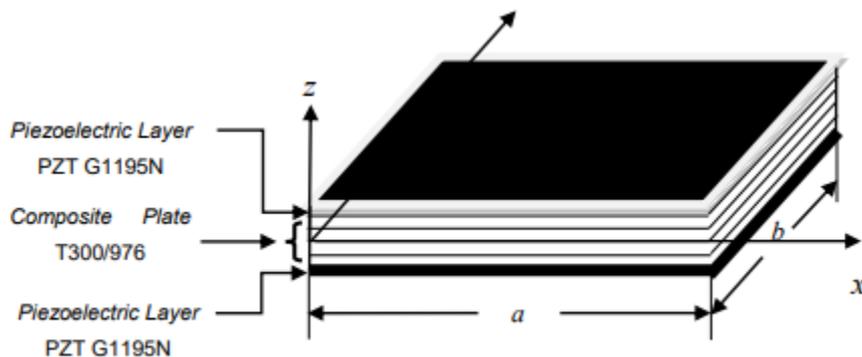


Figure.V.5. Plaque sandwich piézoélectrique

Les paramètres des deux matériaux sont les mêmes avec les applications précédentes, on va effectuer 3 applications, ou on change à chaque fois le type de charge appliqué (charge mécanique, charge électrique ou les deux).

A. charge mécanique sur la surface supérieure de sandwich (100Pa et 200Pa) :

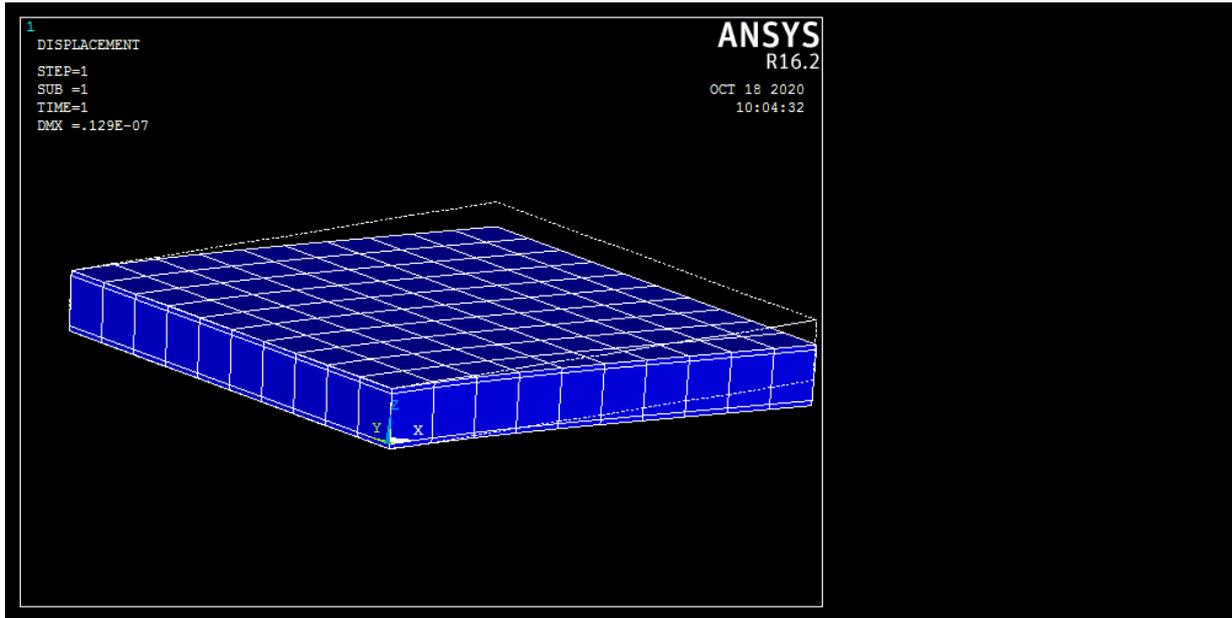


Figure.V.6. La déformation de plaque sandwich charger avec 100 Pa

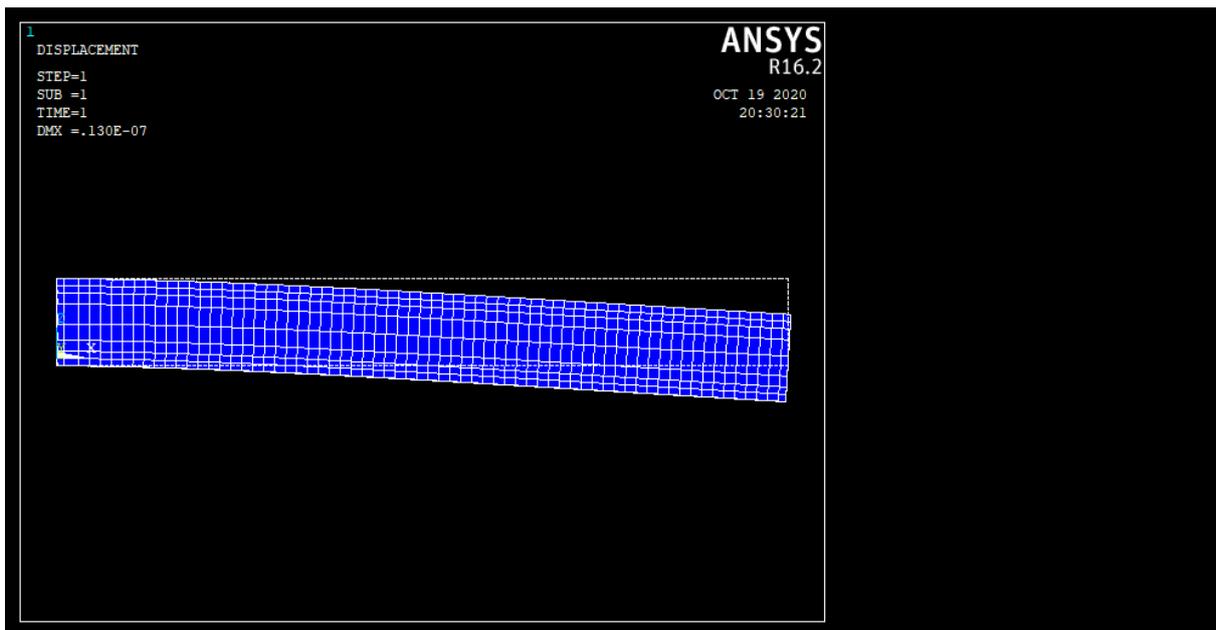


Figure.V.7. Plaque sandwich charger avec 200 Pa à sa surface supérieure

On remarque que lorsqu'on applique une charge mécanique répartie sur les deux surfaces des sous couches piézoélectriques, la plaque subit une flexion vers le bas et elle fléchisse davantage quand on augmente la charge.

Avec une charge de **100Pa** la plaque : la flèche est de **1,2e-7 m**.

Quand on applique une charge de **200Pa** la plaque fléchisse de valeur **1,3e-7 m**

B. tension électrique de 50V sans charge mécanique :

La figure suivante représente la plaque lorsqu'on applique un potentiel électrique dans les deux sous couches piézoélectrique

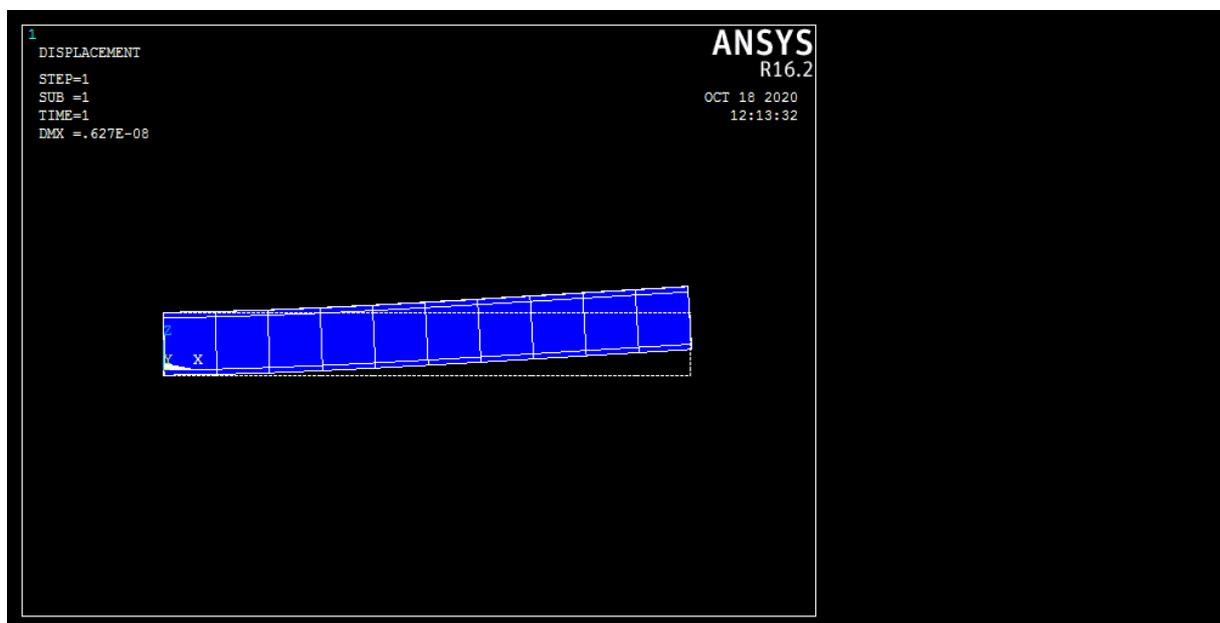


Figure.V.8. Déformation de de sandwich subit de 50 v.

D'après les exemples d'application seule on a conclu qu'elle s'allonge ou rétrécisse mais dans le cas de sandwich et polarisation différents sur les sous couches la plaque subi un effet de flexion (flexion vers le bas ou flexion vers le haut).

On a vérifié l'effet inverse de piézoélectrique et l'utiliser pour une plaque sandwich :

C.charge mécanique 100 Pa plus un tention électrique 50 V :

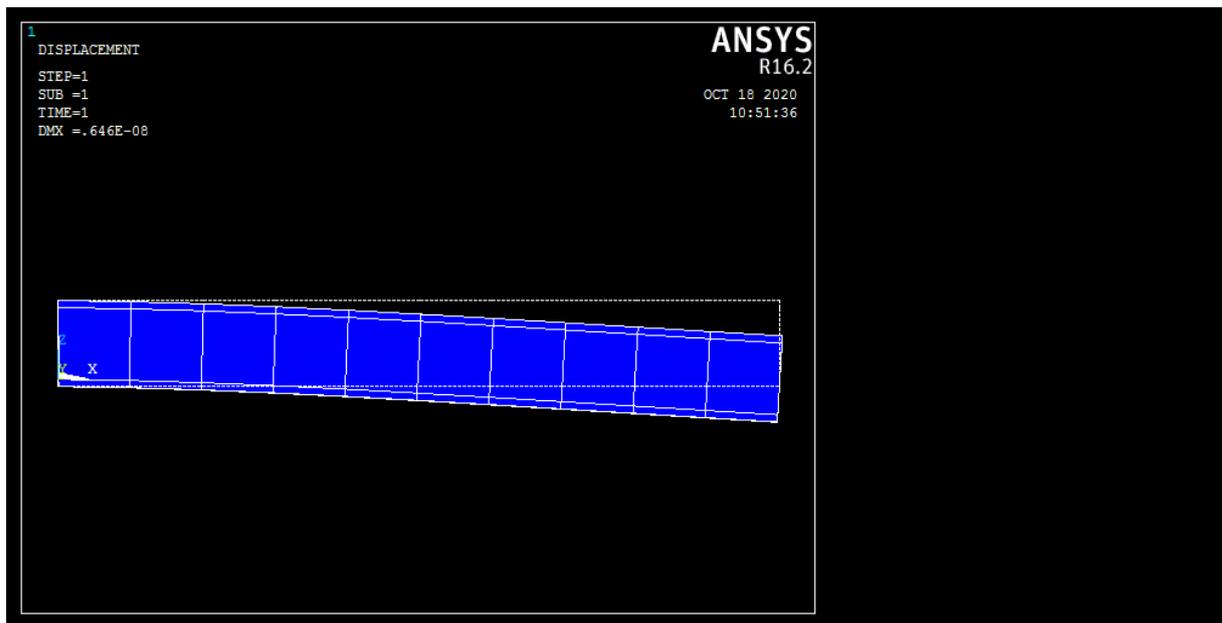


Figure.V.9. Déformation de sandwich (ELLL) chargé avec 100 Pa et 50v

Lors de l'application d'une charge mécanique répartie et d'une tension sur surface de deux plaques piézoélectriques, la plaque fléchée de valeur $0,646e-8$.

Conclusion :

On peut considérer que la plaque composite liée à la plaque piézoélectrique est subie une flexion le long de l'axe (oz), ce qui est provoqué par la différence de potentiel (50/0) émise par la plaque piézoélectrique induite.

Conclusion générale :

Le but de ce travail est de construire un modèle d'éléments finis d'une plaque sandwich contenant des éléments piézoélectriques, ce modèle dispose de tous les éléments de base d'une structure intelligente (smart structure), permettant le contrôle statique (en mode actionneur) et actif des vibrations.

Après avoir expliqué les principes de base nécessaires pour comprendre les phénomènes impliqués, notamment en ce qui concerne les matériaux piézoélectriques, les structures intelligentes et le contrôle actif des vibrations. L'équation proposée est basée sur les hypothèses de Mindlin et Kirchhoff pour contrôler le comportement des plaques en matériaux élastiques isotropes ou composites utilisant des éléments piézoélectriques (capteur / ou actionneur).

Le logiciel ANSYS est utilisé pour calculer le modèle éléments finis du sandwich pour différentes configurations. L'utilisation de ce logiciel n'était pas facile pour nous, surtout pour l'introduction des éléments piézoélectriques dans le calcul de l'atténuation des vibrations.

Pour se familiariser avec le logiciel, on a fait une analyse modale d'une plaque isotrope, puis une plaque composite monocouche sans éléments piézoélectriques, donc on a exposé les fréquences et les modes propres.

On a traité aussi une plaque monocouche piézoélectrique pour montrer l'effet inverse de la piézoélectricité, qui consiste à transformer l'énergie électrique (en appliquant une tension) en énergie mécanique (en déformations ou déplacements).

Alors que, l'application sur le sandwich (couche composite entre deux sous-couches piézoélectriques) est effectuée pour différents chargement mécaniques et électriques, l'atténuation de la déflexion est progressive en augmentant la valeur de tension appliquée.

En perspective, c'est l'application des différents types de contrôleurs pour le contrôle actives des vibrations que nous voulons traiter.

Référence bibliographique :

- [1] Thèse doctorat en biomécanique vibratoire (en cours) « relatif aux prescriptions de sécurité et de santé applicables en cas d'exposition des travailleurs aux risques dus aux vibrations mécaniques » Décret n° 2005-746 du 4 juillet 2005
- [2] CURIE. P, CURIE. J, Thèse doctorat « Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à face inclinées ». R. Acad. SCI. Paris, 1880, Tome 91, p 294.
- [3] Jaffe Thèse doctorat « Piezoelectric ceramics ». London: Academic Press en 1971, p.317,
- [4] E. Boucher. Thèse doctorat « Elaboration et caractérisation de céramiques PZT bi-substituées et modélisation non-linéaire de leur comportement en contrainte et en champ électrique » Université de Lyon, 2002.
- [5] A. HAJJAJI, Thèse de doctorat « Caractérisation multi échelle et lois de comportement dans les matériaux ferroélectriques ». Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007. P 172.
- [6] UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA : Plateforme des ressources pédagogiques et d'enseignement à distance
- [7] Marcelo AREIAS TRINDADE thèse de doctorat, Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures
Par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques :
Poutres sandwich/multicouches intelligentes, en France, 2000
- [8] thèse de doctorat « diverses stratégies de contrôle des vibrations sismiques » Université du Biskra
- [9] Edward L. Wilson «Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures Isotropic materials » types de plaque January 2002.
- [10] REISSNER.E, «the effect of the transverse shear deformation on the bending of elastic plates». J. Appl. Mech, vol.12 pages 62/77 en 1945
- [11] article: Kirchhoff–Love plate theory, note: The Einstein summation convention of summing on repeated indices is used below.

- [12] Florence Zara thèse de doctorat « Modèle mécanique d'une plaque mince », Version du 10 mai 2017 Université Lyon 1, Faculté des Sciences et Technologie. 10 mai 2017
- [13] DJEBLOUN Youcef thèse de doctorat « Comportement élastique des matériaux composites » université du Biskra en 2004
- [14] Laroze, S., Barraud JJ, « Mécanique des structures. Tome 4, Calcul des structures en matériaux composites », Eyrolles, Masson, Paris. 1987
- [15] Chedid Houda, thèse de doctorat « analyse dynamique des paques minces et épaisses :application aux matériaux homogènes et non homogènes>>Université de Constantine
- [16] Michel brissaud livre matériaux piézoélectrique (caractérisation, modélisation et vibration)
- [17] jean marie Berthelot, mécanique des matériaux et structures composites, 23 octobre 2012 , France
- [18] Ezzraimi Madjid thèse de doctorat « développement d'un algorithme de contrôle actif des vibrations avec prise », en compte du couplage fluide-structure,2018/2019.
- [19] Jean-Louis Batoz, « modélisation des structures par éléments finis », volume 2, Poutres et plaques
- [20] Lionel GENDRE thèse de doctorat « Introduction à la simulation par éléments finis3 » université paris-SACLAY 10/01/2013
- [21] Yves Debard thèse de Master « Méthode des éléments finis : élasticité plane » en 2011
- [22] Bouyaya Lynda thèse de Doctorat « Analyse numérique du comportement dynamique de structures composites à renforcement fibreux » université de Mentouri Constantine, 2011
- [23] Emmanuel Boyer thèse de Doctorat « Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire » le 04/11/2011
- [24] Daoudi et Kara thèse de Master « analyse en mode actionneur des plaques composites piézo-électriques » université du Blida 2018/2019

[25] Lam K. Y., Peng X. Q., Liu G. R., Reddy J. N., “Finite element model for piezoelectric composite laminates”, *Smart Mater*, 6: 583-591, (1997).