

Chapitre II

MODELISATION DE LA TURBULENCE

Introduction :

Le chapitre abordé consistera en la présentation de l'aspect générale de la turbulence en commençant par les équations de base gouvernant la mécanique des fluides afin d'arriver aux principaux modèles utilisés pour la simulation d'écoulements turbulents incompressibles en prêtant attention au modèle K- ω /SST qui sera utilisé ultérieurement pour les simulations.

II.1. Pourquoi la Turbulence ?

Les équations de base devraient en principe permettre de venir à bout de tous les problèmes de thermoconvection. Cette possibilité reste malheureusement illusoire la plupart du temps, en raison de difficultés mathématiques extrêmes, spécialement lorsque les écoulements sont turbulents. On doit donc recourir à des approximations ou à des modèles simplificateurs.

II.2. Equations de base de la Mécanique des Fluides :

L'écoulement des fluides est décrit par des équations aux dérivées partielles qui traduisent des principes physiques tels que les lois de **conservation de la masse**, de la **quantité de mouvement** et de l'**énergie** [6].

II.2.1. Principe de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

La masse m d'un fluide dans un domaine D reste constante, on a:

$$m = \iiint \rho(\mathbf{M}, t) dV = Cste \quad 2.1$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint \rho(x, y, z, t) dV = \iiint \left[\frac{d}{dt} \rho(x, y, z, t) \right] dV = \iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right) dV \quad 2.2$$

D'où on obtient l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad 2.3$$

Pour un fluide incompressible on a

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad 2.4$$

Et l'équation de continuité s'écrit donc:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0 \quad 2.5$$

Notre fluide n'est pas au repos donc:

$\overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$ cela signifie que ρ ne dépend pas de la position (x, y, z) , donc le fluide est homogène et ρ ne dépend plus de t parce que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

II.2.2. Principe de conservation de quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes) :

La dérivée par rapport au temps de la force découlant des quantités de mouvement $\rho \vec{u}$ est égale à la somme des forces extérieures appliquées à un domaine D quelconque de fluide :

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{u}) = \rho \vec{F} + \vec{T} \quad 2.6$$

Considérons un domaine D du fluide limité par une surface fermée S , les forces extérieures agissant en chaque point M du fluide sont :

- Les forces de volume $\rho \vec{F}$: Généralement ce sont les forces de pesanteur.
- Les forces de surface \vec{T} : Elles sont dues essentiellement aux actions moléculaires du milieu extérieur sur la surface S limitant le domaine D .

Après des manipulations mathématiques et pour un fluide Newtonien on trouve :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad 2.7$$

Où les u_i et u_j sont les composantes de la vitesse, p la pression, ρ la densité constante et ν la viscosité cinématique [7].

II. 2.3. Principe de conservation de l'énergie :

Cette équation englobe les relations entre les diverses énergies affectant l'écoulement d'un fluide.

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \text{div} \vec{u} = \varphi + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) \quad 2.8$$

Où E représente l'énergie interne par unité de masse et φ une fonction toujours positive, appelée fonction de dissipation de RAYLEIGH :

$$\varphi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad 2.9$$

II.3. Approche statistique :

La résolution des équations instantanées de la mécanique des fluides (Equations de Navier-Stokes) s'avère très complexe car elle se confronte aux limitations des moyens de calcul, ceci restreint le domaine d'application aux cas dont le nombre de Reynolds est faible et la géométrie est simpliste loin des préoccupations industrielles nécessaires aujourd'hui. Une manière de traiter ces écoulements est de résoudre les équations statistiques ou moyennées de la mécanique des fluides. Cette approche est nommée approche RANS pour Reynolds Average Navier-Stokes [8]. Cette méthode consiste à décomposer les variables caractéristiques de l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante en utilisant l'opérateur de moyenne d'ensemble. Les équations obtenues sont dites 'équations moyennées'. Par ailleurs, la partie fluctuante, correspondant au champ turbulent, n'est pas prise en compte par cette approche. Pour tenir compte des fluctuations, il est donc nécessaire de les modéliser.

II. 3.1. Opérateurs de moyenne :

Afin d'obtenir ces équations moyennées, nous devons définir un opérateur de moyenne.

Il existe trois types d'opérateur de moyenne :

-L'opérateur de moyenne d'ensemble : La moyenne d'ensemble $\overline{f(\vec{x}, t)}$ d'une fonction aléatoire $f(\vec{x}, t)$ est définie comme la moyenne statistique sur l'ensemble des réalisations indépendantes $f^{(i)}$, on a donc :

$$\overline{f(\vec{x}, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\vec{x}, t) \quad 2.10$$

- L'opérateur de moyenne temporelle :

$$\overline{f^{(i)}(\vec{x}, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^{(i)}(\vec{x}, t) dt \quad 2.11$$

- L'opérateur de moyenne spatiale :

$$\overline{f^{(i)}}(\vec{x}, t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f^{(i)}(\vec{x}, t) dV \quad 2.12$$

Soit une variable aléatoire f , En appliquant l'opérateur de moyenne d'ensemble, cette fonction se décompose en une partie moyenne \bar{f} ainsi qu'une partie fluctuante f' :

$$f = \bar{f} + f' \quad 2.13$$

Avec par définition $\bar{f}' = 0$

L'opérateur de moyenne d'ensemble est utilisé pour ce cas car il vérifie les relations dites relations de Reynolds. Soient f et g deux fonctions aléatoires et λ un réel quelconque :

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad 2.14$$

$$\overline{\lambda f} = \lambda \bar{f} \quad 2.15$$

$$\overline{f g} = \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'} \quad 2.16$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad 2.17$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad 2.18$$

II.4. Décomposition de Reynolds :

Un des piliers de la modélisation en turbulence est l'approche par moyennage des équations de Navier-Stokes de manière à trouver une solution pour l'écoulement moyen. Fondamentalement, cette approche n'apporte rien sur la compréhension du phénomène de la turbulence, cependant elle a le mérite d'être à la base de nombreux modèles de turbulence qui, couplés à des observations expérimentales, donnent de bonnes estimations d'écoulements moyens [9].

II.4.1. Equations de Reynolds :

Nous allons prendre la moyenne d'ensemble de l'équation de Navier Stokes. Définissons d'abord le champ moyen (en lettres capitales) et le champ fluctuant (en lettres minuscules avec des primes) pour le champ instantané de vitesse et de pression :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}(\vec{x}) + \vec{u}'(\vec{x}, t) \quad 2.19$$

$$\vec{p}(\vec{x}, t) = \vec{P}(\vec{x}) + \vec{p}'(\vec{x}, t) \quad 2.20$$

II.4.1.1. Equations de l'écoulement moyen :

En général la notation \bar{x} est plutôt réservée à la prise de moyenne temporelle, c'est la notation que nous utiliserons dans la suite afin de faciliter la lecture. D'après la définition 4.11 ci-dessus :

$$\bar{\vec{u}} = \vec{U} ; \overline{\vec{u}'} = \vec{0} \quad 2.21$$

$$\bar{p} = \vec{P} ; \overline{p'} = \vec{0} \quad 2.22$$

Regardons l'effet de la prise de valeur moyenne sur la divergence du champ de vitesse qui est nul en incompressible $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$:

$$\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}} = \vec{\nabla} \cdot \bar{\vec{u}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad 2.23$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad 2.24$$

On trouve que le champ moyen et le champ fluctuant sont à divergence nulle.

En utilisant les propriétés que nous venons d'énoncer, nous pouvons montrer que la valeur moyenne de la composante suivant i de l'équation de Navier Stokes,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial^2 x_j} \quad 2.25$$

Devient :

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial^2 x_j} - \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad 2.26$$

L'équation 2.26 constitue l'équation de l'écoulement moyen. Le terme de gauche est la dérivée convective de l'écoulement moyen. On remarque que l'équation de l'écoulement moyen est presque la même que celle qui aurait été obtenue en remplaçant \vec{u} par \vec{U} dans l'équation de Navier Stokes. La différence est dans l'existence du terme $-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ que nous allons discuter maintenant.

Commençons par écrire différemment l'équation 2.26. Utilisons l'identité suivante :

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 2\nu \frac{\partial \bar{e}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{\sigma}'_{ij}}{\partial x_j} \rho \quad 2.27$$

Où $\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen. Comme le champ de vitesse moyen est à divergence nulle on peut montrer que 2.26 s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j - \bar{\sigma}'_{ij} + P \delta_{ij} + \rho \overline{u'_i u'_j}) = 0 \quad 2.28$$

L'équation 2.28 traduit un bilan local de flux de quantité de mouvement. Pour un fluide Newtonien, ce flux est donné par la grandeur $\Pi_{ij} = \rho u_i u_j - \sigma'_{ij} + p \delta_{ij}$ qui traduit le transport de quantité de mouvement de composante i dans la direction j . On rappelle que l'écoulement moyen est stationnaire, et donc que la quantité de mouvement doit être constante en un point fixe de l'écoulement ($\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} = 0$).

Les flux moyens entrant et sortant en ce point doivent donc être égaux, ce qui revient à dire que la somme des flux totaux moyens au travers d'une surface fermée doit être nul, soit que localement on doit avoir $\frac{\partial \bar{\Pi}_{ij}}{\partial x_j} = 0$. C'est exactement la relation 2.28 où la somme des termes entre parenthèses représente le flux moyen total de quantité de mouvement qui se décompose en trois termes moyens:

* $\rho U_i U_j$, transport de la composante ρU_i dans la direction j par convection de l'écoulement moyen.

* $\bar{\sigma}'_{ij}$: transport de la quantité de mouvement associé aux forces de frottement visqueux de l'écoulement moyen.

* $P \delta_{ij}$: transport de la quantité de mouvement associé aux forces de pression moyenne.

* $\rho \overline{u'_i u'_j}$: transport de la quantité de mouvement associé aux fluctuations de la turbulence.

Le dernier terme de flux est nommé tenseur de Reynolds, τ_{ij} et est défini par :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad 2.29$$

On peut considérer l'écoulement moyen comme résultant de ces quatre termes de transports où le dernier, appelé diffusion turbulente vient s'ajouter à la diffusion visqueuse. On aurait ainsi deux origines de frictions pour l'écoulement moyen : l'une visqueuse et l'autre turbulente. Enfin, insistons sur le fait que la "friction" turbulente n'a de sens que pour l'écoulement moyen. En effet d'après l'équation (2.26), le terme $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ peut être effectivement vu comme une contrainte agissant sur l'écoulement moyen orientée dans la direction j et agissant sur une surface élémentaire de normale dans la direction i .

La décomposition de Reynolds donne des indications sur les transferts d'énergie qui s'opèrent entre l'écoulement moyen et l'agitation turbulente. L'équation de bilan pour l'énergie cinétique moyenne, $\bar{e}_c = \frac{1}{2} \rho U_i U_i$ s'écrit :

$$\frac{D\bar{e}_c}{Dt} = \frac{\partial \bar{e}_c}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{e}_c}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-U_j P + (2\rho \nu \bar{e}_{ij} + \tau_{ij}) U_i) - (2\rho \nu \bar{e}_{ij} + \tau_{ij}) \bar{e}_{ij} \quad 2.30$$

A très grand nombre de Reynolds, les contraintes liées à l'agitation turbulente sont beaucoup plus importantes que les contraintes visqueuses. Dans ce cas la viscosité cinématique n'est plus un paramètre pertinent de l'écoulement moyen et on obtient pour le bilan d'énergie dans cette limite que

$$\frac{D\bar{e}_c}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-U_j P + \tau_{ij} U_i) - \tau_{ij} \bar{e}_{ij} \quad 2.31$$

Le premier terme représente la puissance qui nourrit l'écoulement moyen. Le deuxième terme représente la puissance transférée à l'agitation turbulente. Cette seconde puissance $\tau_{ij} \bar{e}_{ij}$ correspond donc à une "dissipation" de l'écoulement moyen.

II.4.1.2. Equations de l'écoulement fluctuant :

Maintenant on va remplacer le champ de vitesse et de pression par les décompositions de Reynolds sans prendre de valeurs moyennes. On obtient ainsi l'équation du champ fluctuant :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad 2.32$$

Et pour l'énergie cinétique fluctuante $\bar{e}'_c = \frac{1}{2} \rho u'_i{}^2$:

$$\frac{\overline{\partial e_c'}}{\overline{\partial t}} = \frac{\partial \overline{e_c'}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{e_c'}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho \hat{u}_i \hat{u}_j \hat{u}_k} + \overline{u_j' p'} - 2\rho \nu \overline{\hat{u}_i e_{ij}'} \right) + \tau_{ij} \overline{e_{ij}} + 2\rho \nu \overline{e_{ij}' e_{ij}'} \quad 2.33$$

Où $e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur des déformations turbulentes. Dans le membre de droite on retrouve le terme $\tau_{ij} \overline{e_{ij}}$ de l'équation (2.31) qui cette fois ci est un terme de production d'énergie turbulente. Le terme $2\rho \nu \overline{e_{ij}' e_{ij}'}$ représente la dissipation moléculaire.

Enfin le terme convectif $-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho \hat{u}_i \hat{u}_j \hat{u}_k} + \overline{u_j' p'} - 2\rho \nu \overline{\hat{u}_i e_{ij}'} \right)$ redistribue l'énergie au sein de l'agitation turbulente en la conservant.

II.4.1.3. Equations de tensions de Reynolds :

En soustrayant aux équations de quantité de mouvement instantanées les équations de quantité de mouvement moyen on obtiendra les équations de transports pour les fluctuations. En multipliant scalairement chaque équation de transport des fluctuations par les fluctuations et en prenant la moyenne que l'on a définie précédemment, on obtient les équations de transport des contraintes ou tensions de Reynolds.

$$\frac{\partial \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}}{\partial x_j} = \mathcal{P}_{ij} + \mathcal{T}_{ij} + \Pi_{ij} + \mathcal{D}_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad 2.34$$

Le membre de droite se décompose en plusieurs termes :

$\mathcal{P}_{ij} = \overline{\hat{u}_i \hat{u}_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{\hat{u}_j \hat{u}_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$	Production
$\mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j \hat{u}_k}}{\partial x_k}$	Transport turbulent
$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{\hat{u}_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{\hat{u}_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right)$	Corrélation pression-vitesse
$\mathcal{D}_{ij} = \nu \frac{\partial^2 \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}}{\partial^2 x_k}$	Diffusion visqueuse
$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j \partial u'_i}}{\partial^2 x_k}$	Tenseur de dissipation turbulente

II.4.1.4. Equation de l'énergie cinétique turbulente

En contractant les indices dans le système précédent, on obtient une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulent $K = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \mathcal{P}_k + \mathcal{T}_k + \Pi_k + \mathcal{D}_k - \varepsilon_k \quad 2.35$$

$\mathcal{P}_k = \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$ Production turbulente. Il caractérise les échanges d'énergie par interaction avec le mouvement moyen. Ce terme est positif comme on le verra par la suite. Il représente de l'énergie cédée par le mouvement moyen au mouvement turbulent.

$\mathcal{T}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}$ Transport turbulent ou diffusion turbulente par les fluctuations de vitesse.

$\Pi_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_k p}}{\partial x_k}$ Transfert d'énergie par l'interaction pression vitesse fluctuantes.

$\mathcal{D}_k = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial^2 x_k}$ Diffusion visqueuse de l'énergie cinétique turbulente par la viscosité.

$\varepsilon_k = \nu \frac{\partial u_i \partial u_i}{\partial^2 x_k}$ Dissipation de l'énergie turbulente sous forme de chaleur. Ce terme constitue un puits dans l'équation de k et conduit donc toujours à une décroissance de la turbulence.

II.5. Classification des modèles de turbulence

Le développement des équations statistiques de la mécanique des fluides fait apparaître des termes supplémentaires. La résolution de ces équations nécessite la définition des hypothèses de fermeture pour ces termes.

Concernant l'approche RANS, le terme des contraintes turbulentes peut se résoudre de différentes manières, soit par la résolution des équations de transport pour chacune des composantes du tenseur τ_{ij} . Dans ce cas on constate l'apparition de termes du troisième ordre nécessitant eux aussi des hypothèses de fermeture, on parle alors de modèles d'ordre 2. On peut aussi établir une hypothèse pour modéliser de façon directe le terme τ_{ij} , il s'agit de modèles d'ordre 0. Cependant, l'hypothèse de fermeture de Boussinesq est couramment utilisée pour modéliser le terme τ_{ij} [8].

***Hypothèse de Boussinesq :**

Après qu'il fût établi expérimentalement que les contraintes turbulentes augmentaient avec l'augmentation du taux de déformation moyen des éléments du fluide, Boussinesq proposa une relation entre les contraintes de Reynolds et les taux de déformation, qui a été étendue par la suite. Par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide newtonien, on suppose que le tenseur des contraintes de Reynolds s'écrit :

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad 2.36$$

Avec μ_t la viscosité turbulente et $K = \frac{1}{2} \overline{u_1 u_1}$ l'énergie cinétique turbulente. L'hypothèse de Boussinesq consiste donc à remplacer les six inconnues du tenseur des contraintes turbulentes définies comme :

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad 2.37$$

Par une seule inconnue scalaire : la viscosité turbulente μ_t . Elle implique que :

- le champ turbulent est isotrope aux petites échelles,
- le rapport entre production P_k et dissipation ϵ est proche de 1,
- le tenseur de Reynolds est aligné sur le tenseur des déformations,
- l'écoulement turbulent réagit directement à des effets de distorsions de l'écoulement moyen sans effet de mémoire,
- on donne un caractère diffusif (adapte aux petites échelles) à un phénomène à grande échelle (dont l'origine est la non linéarité des équations de Navier-Stokes).

Différents modèles existent pour calculer la viscosité turbulente. Toutefois, une analyse dimensionnelle montre que la viscosité turbulente μ_t est proportionnelle au produit de la masse volumique ρ par une vitesse u^* et une échelle de longueur ℓ^*

$$\mu_t \propto \rho \ell^* u^*$$

Ces derniers sont classés selon le nombre d'équations supplémentaires à résoudre.

II.5.1 Les modèles à une équation de transport

Ces modèles à une équation de transport consistent à résoudre une équation de transport pour déterminer l'échelle de vitesse u^* et à utiliser une relation algébrique pour définir l'échelle de longueur ℓ^* . Généralement, l'équation de transport résolue pour avoir l'échelle de

vitesse est celle de transport pour l'énergie cinétique turbulente k qui nous donne $u^* = \sqrt{k}$. La viscosité turbulente s'exprime alors par :

$$\mu_t = C_\mu \rho \sqrt{k} \ell^* \tag{2.38}$$

Avec C_μ une constante.

Parmi ces modèles, on peut citer le modèle de Spalart et Allmaras.

II.5.2 Les modèles à deux équations de transport

Comme nous venons de le mentionner, tous les modèles utilisent l'énergie cinétique turbulente k pour définir l'échelle de vitesse u^* . La variété entre ces modèles à deux équations de transport découle du choix effectué pour la deuxième variable transportée servant à la construction de l'échelle de longueur ℓ^* .

Afin de construire une échelle de longueur de la turbulence, nous avons le choix pour la deuxième variable transportée :

- la dissipation turbulente ϵ qui permet de construire une échelle de longueur par combinaison avec l'énergie cinétique turbulente k telle que $\ell^* = \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$,
- la dissipation spécifique $\omega = \frac{\epsilon}{k}$ qui permet de construire une échelle de longueur $\ell^* = \frac{k^{1/2}}{\omega}$,
- directement une échelle de longueur de la turbulence ℓ .

En partant de ces possibilités, nous définissons les modèles $K-\epsilon$, $K-\omega$, $K-l$ ainsi que leurs variantes [8].

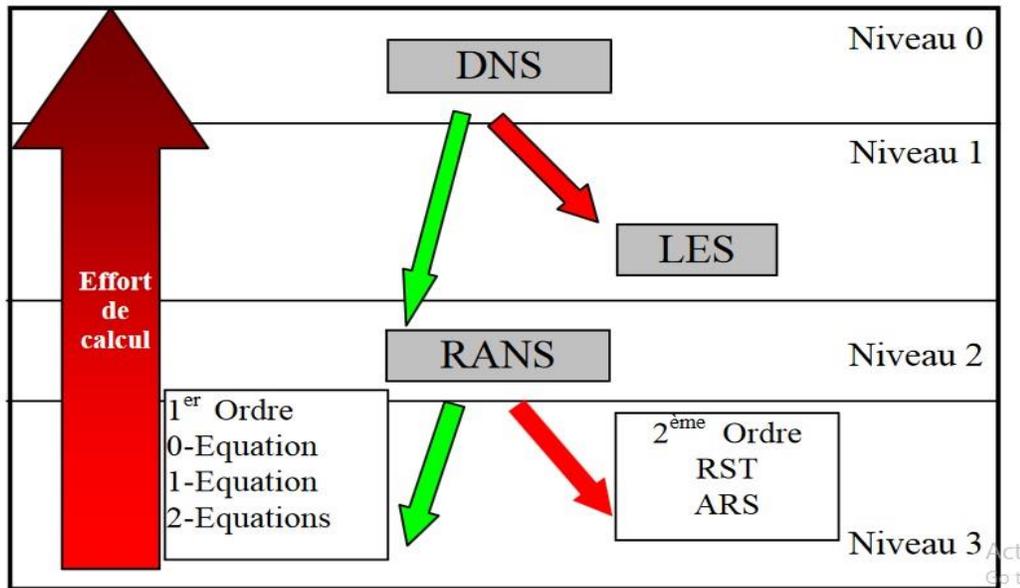


Figure (2.1) : Aperçu sur les différents modèles de turbulence.

II.6. Modèles de turbulence :

II.6.1. Modèle $K- \varepsilon$:

Ce modèle met l'accent sur les mécanismes affectant l'énergie cinétique turbulente en se basant sur la modélisation de deux équations de transport. La première est celle de l'énergie cinétique turbulente (k) et le deuxième est son taux de dissipation visqueuse (ε). Ainsi, la viscosité dynamique turbulente μ_t est calculée par :

$$\mu_t = \rho C_u \frac{k^2}{\varepsilon} \quad 2.39$$

$$C_u = 0.09 \quad 2.40$$

La robustesse du modèle, ainsi que son économie en temps de calcul est une précision raisonnable pour une large gamme d'écoulements turbulents [10].

II.6.2. Modèle $K- \omega$:

Ce modèle a été proposé en 1988 par Wilcox, il comprend une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente k et une équation de transport pour la dissipation spécifique ω construite à partir de l'équation pour ε proposée par Jones et Launder avec un changement de variable $\omega \approx \frac{\varepsilon}{k}$.

Kolmogorov a introduit le premier en 1942 un modèle à deux équations, l'une toujours basée sur une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente k , la seconde basée sur une équation de transport pour une fréquence caractéristique de la turbulence (c'est à dire l'inverse d'une échelle de temps) notée ω , plus précisément l'inverse de ω représente l'échelle de temps caractéristique de la dissipation de l'énergie cinétique k . On peut aussi voir ω comme le rapport ε/k . Depuis de nombreuses améliorations de ce modèle ont conduit aux deux équations de transport suivant [11].

II.6.2.1. Equation de k :

On a dérivé précédemment à partir des équations de transport pour les contraintes de Reynolds, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente qui s'écrit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \mathcal{P}_k + \mathcal{T}_k + \Pi_k + \mathcal{D}_k - \varepsilon_k \quad 2.41$$

En utilisant l'hypothèse de Boussinesq, le terme de production s'écrira :

$$-\rho \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \left[\mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \rho k \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad 2.42$$

Pour le terme de diffusion turbulente et de couplage avec la pression fluctuante de k , par analogie avec la diffusion visqueuse, il peut s'écrire sous la forme :

$$-\rho(\overline{k\hat{u}_k} + p\overline{\hat{u}_k}) = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad 2.43$$

Où σ_k est l'équivalent d'un nombre de Prandtl turbulent. En le terme de dissipation s'écrira :

$$2\mu = \frac{\overline{\partial \hat{u}_i \partial \hat{u}_i}}{\partial x_k \partial x_k} = \rho \varepsilon \quad 2.44$$

Avec les hypothèses précédentes l'équation de k se met sous la forme :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \varepsilon \quad 2.45$$

Finalement en remplaçant ν_t par sa valeur en fonction de k et de ε on obtient

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \varepsilon \quad 2.46$$

Pour le modèle k - ε on obtient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \sigma^* \nu_t \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta^* k \varepsilon \quad 2.47$$

Où ν_t représente la viscosité cinématique turbulente qui s'exprime en fonction de k et ω par:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad 2.48$$

On retrouve dans cette équation une forme analogue à l'équation de transport de k dans le modèle k - ε avec au second membre un terme de diffusion moléculaire et turbulente suivi d'un terme de production et enfin d'un terme de dissipation de k , il reste cependant deux nouvelles constantes à déterminer : σ^* et β^* [12].

II.6.2.2. Equation de la dissipation spécifique ω :

L'équation pour ω est donnée par :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \sigma \nu_t \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta \omega^2 \quad 2.49$$

Les différents coefficients et constantes apparaissant dans ce modèle sont les suivant :

$$\alpha = 13/25 \quad \beta = \beta_0 f_\beta \quad \beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*} \quad \sigma = 1/2 \quad \sigma^* = 1/2 \quad \beta_0 = 9/125 \quad \beta_0^* = 9/100$$

$$f_{\beta} = \frac{1+70\chi_{\omega}}{1+80\chi_{\omega}} \quad \chi_{\omega} = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}\Omega_{ki}}{(\beta_0\omega)^3} \right|$$

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi_k \leq 0 \\ \frac{1+680\chi_{\omega}^2}{1+400\chi_{\omega}^2} & \text{si } \chi_k \geq 0 \end{cases} \quad \chi_k = \frac{k}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

Avec

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad 2.50$$

Ceci est la dernière itération du modèle $K-\omega$ due à Wilcox (1988). Comme on peut le voir dans ce modèle le terme χ_{ω} est nul dans le cas d'écoulement bidimensionnel. La dépendance de β avec χ_{ω} a un effet important pour les cas des jets ronds (où le modèle classique $k-\varepsilon$ donne de mauvais résultats). Les différentes constantes de ce modèle ont été obtenues de la même façon que pour le modèle $k-\varepsilon$ c'est à dire sur des cas de base comme la turbulence homogène isotrope et les écoulements de type couche limite. Un autre avantage de ce modèle concerne le traitement en proche paroi. Ce modèle peut être intégré dans la sous-couche visqueuse sans l'utilisation de fonction d'amortissement comme dans le cas du modèle $k-\varepsilon$. A la paroi, on impose simplement que l'énergie cinétique turbulente k est nulle, ω peut être spécifié en lui fixant une valeur : $\omega_{\omega} > 100\Omega_{\omega}$ [12].

II.6.3. Modèle SST (Shear Stress Transport)

Le modèle SST (Shear Stress Transport) ou transport des contraintes de cisaillement turbulentes, est dérivé du modèle $k-\omega$ Standard. Ce modèle combine la robustesse et la précision de la formulation du modèle $k-\omega$ dans la région proche de la paroi avec le modèle $k-\varepsilon$ et toutes ses qualités citées plus haut pour les écoulements libres loin de la paroi. Ce modèle inclue les améliorations suivantes :

Une fonction de combinaison est multipliée à la fois au modèle $k-\omega$ Standard et au modèle $k-\varepsilon$. Cette fonction commutera entre les valeurs "zéro" ou "un" suivant que l'on soit dans la région proche de la paroi, pour activer le modèle $k-\omega$ Standard ou dans la région loin de la paroi, pour activer le modèle $k-\varepsilon$.

La définition de la viscosité turbulente est modifiée pour prendre en compte le transport des contraintes de cisaillement turbulentes, dont voici une forme simplifiée :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}, f(\Omega, k, \omega, y)\right]} \quad 2.51$$

- $f(\Omega, k, \omega, y)$ est une fonction dépendant du taux de rotation de (Ω), de k , de ω et de la distance normale à la paroi (y).

Les améliorations apportées à ce modèle le rendent plus fiable pour une classe d'écoulements plus étendue, (écoulements à gradients de pression adverses, surfaces portantes –aviation-, ondes de choc transsoniques ...etc.), par rapport aux modèles $k-\omega$ Standard et la famille des modèles $k-\varepsilon$ [13][14].

II.7. Comparaison entre les différents modèles de turbulence [15].

Tableau (2.1) : Comparaison entre les différents modèles de turbulence

Modèle	Spécificité	Pertinence
$K-\varepsilon$ Standard	Facile d'utilisation, convergence assurée, "couteau suisse" de la turbulence. Modèle à 2 équations de transport.	Obtenir un premier résultat facilement, pas forcément très précis. Permet la comparaison avec une étude analogue sous Fluent
$K-\varepsilon$ RNG	Prend en compte de plus petites échelles de turbulence que $k-\varepsilon$ standard. Certaines constantes du modèle $k-\varepsilon$ ne le sont plus. Donne de meilleurs résultats pour les écoulements tournants et pour modéliser les cavités entraînées.	Pas d'intérêt particulier pour les autres configurations dont notre cas
Realizable $k-\varepsilon$	Modèle différent pour l'équation de dissipation par rapport à $k-\varepsilon$ standard	Modèle $k-\varepsilon$ amélioré mais on préférera utiliser le modèle standard pour la simplicité de ses résultats.
$k-\omega$ standard	Corrige les problèmes de séparation des couches limites du modèle $k-\varepsilon$ standard	Intéressant à tester
$k-\omega$ SST	Combinaison du modèle $k-\omega$ près des murs et de $k-\varepsilon$ au cœur de l'écoulement. Modèle à 2 équations de transport.	Plus intéressant à tester que le $k-\omega$ standard. Modèle complet et adapté à notre cas d'écoulement confiné.