

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Saad Dahleb Blida 1



Faculté des Sciences
Département de Physique

Mémoire de Fin D'études
Pour l'obtention du diplôme de Master en

Physique Théorique

Thème :

Matière noire et calcul de la densité relique

présenté par :

Aissa Samiha

Ayache Imane

Soutenu publiquement le 14 février 2021, devant le jury composé de :

Dr. Mounir Ould Mohamed	Université Blida1	Président
Dr. Abdelkader Yanallah	Université Blida1	Examineur
Prof. Bahia Si Lakhel	ENP, Alger	Encadreur
Dr. Nouredine Bouayed	Université Blida1	Co-Encadreur

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force, la santé et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude pour nos chers parents qui déployèrent leurs efforts considérables pour la réussite de nos études.

Enfin, nous tenons à remercier Madame B. Si Lakhal et Monsieur N. Bouayed pour leur encadrement, leurs conseils et la disponibilité qu'ils nous ont témoignées pour nous permettre de mener à bien ce travail.

Nos remerciements vont aussi à Mr M. Ould Mohamed qui a accepté de présider le jury de soutenance de notre mémoire de master et à Mr A. Yanallah de nous avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner ce travail.

Nos remerciements s'étendent également à tous nos enseignants durant toutes nos années d'études.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

De nombreuses observations cosmologiques tel que le comportement des vitesses de rotation des étoiles dans notre galaxie, les fluctuations du fond diffus cosmologique, et la distribution de masse des amas de galaxies, indiquent qu'il y a de grandes quantités de masse manquante dans l'Univers. Cette matière sombre manquante n'interagit que par gravité. Elle présente en fait une abondance cinq fois plus importante que la matière visible dont est fait le monde qu'on peut palper autour de nous. De plus elle ne peut être décrite par aucune des particules élémentaires du modèle standard des interactions fondamentales. Donc elle trouverait plutôt, son origine dans une autre forme de particules élémentaires qui auraient aussi existé dans l'Univers primordial comme ce fut le cas pour les particules élémentaires du monde visible, et qui aurait interagit avec ces dernières. Et qu'au cours de l'inflation de l'Univers ces particules du monde invisible se serait découplées de celles du monde visible. Ceci aurait transformé ces particules sombres en particules fossiles isolées dont la densité résiduelle serait en train de se diluer avec l'expansion de l'Univers. Et qu'actuellement cette densité relique a la valeur 0.1197 ± 0.0022 tel que divulguée par le satellite Planck.

Dans ce mémoire de master, on revient de façon plus approfondie sur les caractéristiques et le contexte de cette matière noire ainsi que sur les différents candidats qu'offre la physique des particules pour la décrire. On s'attarde plus particulièrement sur les nouveaux bosons scalaires que fourni le modèle du doublet scalaire inerte (*IDM* pour Inert Doublet Model). Puis, on établit le lien avec la densité relique via deux scénarios. Le scénario du freeze-out impliquant des particules massives interagissant faiblement (*WIMP* pour Weakly interacting Massives Particles) initialement en équilibre thermiques avec les particules du modèles standard. Et le scénario du freeze-in impliquant des particules massives très faiblement interagissant (*FIMP* pour Feebly Interacting Massive Particle) et en états d'hors équilibre thermique. La procédure de calcul de la densité relique à travers l'utilisation de l'équation de Boltzman est explicitée dans chacun de ces deux scénarios. Puis, un passage au calcul numérique est effectué à travers l'utilisation du code MicrOmegas.

Mots-clés : Cosmologie, Physique des particules, Matière noire, Équation de Boltzmann, Densité relique, Code MicrOmegas, *IDM*, Freeze-out, *WIMP*, Freeze-in, *FIMP*.

Notation

Concernant les unités, nous utilisons la convention des unités "naturelles" où la vitesse de la lumière, la constante de Planck et la constante de Boltzmann sont égales à 1

$$c = \hbar = k_B = 1 \quad (1)$$

1) Les constantes fondamentales et cosmologiques[7] :

Constante	Symbole	Valeur
Constante de Planck	\hbar	$6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k_B	$8.617 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$
Vitesse de la lumière	c	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante gravitationnelle	G	$6,6738(8) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de Planck	M_p	$2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$
Constante de Hubble	H_0	$70.0 \pm 2.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$
Constante de Hubble réduite	h	0.700
Densité critique	ρ_{c0}	$1.87847(23) \times 10^{-29} h_0^2 \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$
Paramètre de Densité de matière	Ω_m	0.27 ± 0.03
Paramètre de Densité d'énergie noire	Ω_Λ	0.73(3)
Paramètre de Densité de baryons	Ω_b	0.045
Âge de l'Univers	t_0	$13.74 \pm 0.11 \text{ Gyr}$
Masse Solaire	M_\odot	$1.9885(2) \times 10^{30} \text{ kg}$
Luminosité Solaire	L_\odot	$3.828 \times 10^{26} \text{ W}$
Température actuelle de l'Univers	T	2.726 K
Densité d'entropie actuelle de l'Univers	s_0	2889.2 cm^{-3}

2) Liste des acronymes :

<i>RG</i>	Relativité Générale
<i>FLRW</i>	Friedman-Lemaître-Robertson-Walker
<i>QCD</i>	Quantum Chromo Dynamics
<i>BBN</i>	Big Bang Nucleosynthesis
<i>MS</i>	Modèle Standard
<i>IDM</i>	Inert Doublet Model
<i>DM</i>	Dark Matter
<i>CMB</i>	Cosmic Microwave Background
<i>COBE</i>	COsmic Background Explorer
<i>WMAP</i>	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe
<i>MACHOS</i>	MAssive Compact Halo Objects
<i>HDM</i>	Hot Dark Matter
<i>CDM</i>	Cold Dark Matter
<i>WDM</i>	Warm Dark Matter
<i>LHC</i>	Large Hadron Collider
<i>DD</i>	Détection Directe
<i>DI</i>	Détection Indirecte
<i>LSR</i>	Local Standard of Rest
<i>SHM</i>	Standard Halo Model
<i>WIMP</i>	Weakly Interacting Massive Particle
<i>FIMP</i>	Feebly Interacting Massive Particle

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction au modèle standard cosmologique	3
1.1 Introduction	3
1.2 Le Modèle du Big Bang	4
1.2.1 Quelques notions de relativité générale	4
1.2.2 Équations d'Einstein	5
1.2.3 Principe cosmologique	7
1.2.4 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker (<i>FLRW</i>)	7
1.2.5 Équation de Friedmann	8
1.2.6 La loi de Hubble et décalage spectral vers le rouge	9
1.2.7 Distance cosmologique	11
1.2.8 Densité critique et paramètres cosmologiques	12
1.2.9 Évolution du facteur d'échelle	13
1.3 Histoire thermique de l'Univers	13
1.3.1 Découplage	13
1.3.2 Équilibre thermodynamique	14
1.3.3 Nombre de degrés de libertés relativistes	16
1.3.4 La densité d'entropie	16
1.3.5 les principales étapes de l'histoire de l'Univers	18
2 Modèle Standard des interactions	20
2.1 Aperçu sur le modèle standard de la physique des particules	20
2.2 Les succès du modèle standard des interactions	23
2.3 Les limites du modèle standard des interactions	24
2.4 Les extensions du modèle standard des interactions	24
3 Matière noire	26
3.1 Introduction	26

3.2	La preuve de la présence de la matière noire	27
3.2.1	À l'échelle galactique	27
3.2.2	À l'échelle des amas galactiques	28
3.2.3	À l'échelle cosmologique	28
3.3	Nature de la matière noire	31
3.3.1	Matière noire baryonique	31
3.3.2	Matière noire non-baryonique	31
3.3.3	Zoologie des candidats non-baryoniques à la matière noire	31
3.4	Diverses techniques de détection de la matière noire	33
3.4.1	Production dans les accélérateurs ($\mathcal{MS} + \mathcal{MS} \rightarrow \mathcal{DM} + \mathcal{DM}$)	34
3.4.2	Détection directe ($\mathcal{DM} + \mathcal{MS} \rightarrow \mathcal{DM} + \mathcal{MS}$)	34
3.4.3	Détection indirecte ($\mathcal{DM} + \mathcal{DM} \rightarrow \mathcal{MS} + \mathcal{MS}$)	38
4	Le calcul de la densité relicue et code MicrOmegas	41
4.1	Introduction	41
4.2	Densité relicue dans le mécanisme du freeze-out	41
4.2.1	Équation de Boltzmann	42
4.3	Densité relicue dans le mécanisme du Freeze-in	51
4.3.1	Freeze-in direct de la matière noire (le processus $1 \rightarrow 2$)	51
4.3.2	Freeze-in indirect de la matière noire (le processus $2 \rightarrow 1$)	53
4.3.3	Le processus $2 \rightarrow 2$	54
4.4	le code MicrOmegas et Modèle du Doublet Inerte (\mathcal{IDM})	56
4.4.1	Structures de code MicrOmegas	56
4.4.2	Modèle du Doublet Inerte du Higgs	58
4.5	Résultats numériques	60
	Conclusion	63
	A Déduction des équations d'Einstein	65
	B Calcul des symboles de Christoffel	67
	C Vitesse de Møller et moyennes thermiques	70
C.1	La vitesse de Møller	70
C.2	La moyenne thermique de la section efficace effective	71
C.3	La moyenne thermique de la section efficace	74
	D Nouvelles limites d'intégration	79
	E Calcul du taux de désintégration	81
	F Programme Mathematica	84

Table des figures

1.1	Les trois formes possibles de l'Univers	8
1.2	Représentation graphique de la loi de Hubble	9
1.3	Illustration d'un décalage spectral vers le rouge et bleu	10
1.4	Évolution de g_{eff} et h_{eff} au cours du temps.	18
1.5	Schéma de l'histoire thermique de l'Univers après le Big-Bang	19
2.1	Modèle Standard des particules élémentaires.	23
2.2	Contenu en particule du modèle supersymétrique minimal	25
3.1	Répartition des composants energetiques de l'Univers	26
3.2	Courbe de la distribution de vitesse de rotation des étoiles de la galaxie	28
3.3	Carte de température \mathcal{CMB} obtenue à partir des observations de Planck.	29
3.4	Fluctuations de température dans le \mathcal{CMB} détectées par Planck.	30
3.5	Représentation des trois techniques possibles pour détecter la matière noire	34
3.6	Schéma du principe de la détection d'un $WIMP$ par le noyau d'un détecteur	36
3.7	Courbes d'exclusion dans le diagramme section efficace indépendante du spin.	38
4.1	Évolution de la densité relique pour le freeze-out et freeze-in	42
4.2	Processus d'annihilation $XX \rightarrow W^+W^- \rightarrow W^+e^-\bar{\nu}_e$	60
4.3	Organigramme récapitulatif le calcul de la densité relique.	64

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques des interactions fondamentales	21
2.2	Les trois familles de fermions du modèle standard des particules	21

Introduction

Depuis l'aube de l'humanité, l'être humain a été fasciné par la splendeur de l'Univers et son contenu en objets célestes (Lune, Soleil, étoiles, etc..). Une des questions fondamentales qu'il ne cessa de se poser, au fil des temps, est " qu'elle est l'étendue de l'Univers et de quoi est-il constitué?".

Le développement de la physique, notamment le modèle standard de la cosmologie, aida à comprendre la matière ordinaire (matière baryonique, c'est-à-dire la matière composée de protons et de neutrons) qui forme les étoiles, les planètes et tout ce qu'on rencontre au quotidien. Ce modèle, combiné avec les observations des abondances des éléments légers (comme l'hydrogène, le deutérium et l'hélium) et les observations de l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers à grandes échelles, aida à estimer uniquement la quantité de matière ordinaire dans l'Univers.

L'une des révélations les plus étonnantes de ce modèle est que la matière baryonique ordinaire, n'est pas la forme dominante de matière dans l'Univers. Des mesures faites à la moitié du siècle dernier, estime qu'elle ne représente que 4% du contenu total de l'Univers. Il s'avéra qu'il existe une nouvelle forme étrange de matière invisible et non lumineuse, appelée matière noire (\mathcal{DM} pour Dark Matter), non pas parce qu'elle est noire mais plutôt pour quantifier notre ignorance sur la composition ou bien les caractéristiques de cette composante de l'Univers.

De nos jours, identifier la nature de la matière noire est l'une des questions ouvertes en physique. Parce qu'elle est invisible, alors on doit compter sur les objets visibles pour la détecter, qui vont agir comme des traceurs. Il existe plusieurs méthodes de détection de \mathcal{DM} , parmi lesquelles :

1. la recherche dans les accélérateurs de particules où les particules du modèle standard entrent en collision à des énergies de plusieurs TeV pour la création des particules de matière noire.
2. la détection directe où une particule de matière noire entre en collision élastique avec une particule du modèle standard appartenant à un noyau et on cherche à observer le recul élastique.
3. Enfin il y a la détection indirecte, visant à observer les produits d'annihilation de particules de matière noire comme les rayons gamma, l'antimatière et les neutrinos provenant de régions galactiques de densité accrue.

Par ailleurs, le mécanisme le plus étudié et sans doute le plus naturel pour générer l'abondance actuelle de matière noire est sa production thermique, où la matière noire est généralement supposée être en équilibre thermique avec les particules du modèle standard du plasma primordial (chaud). Dans ce processus, les particules de matière noire ont une grande densité

thermique initiale, et lorsque l'Univers est en expansion, la température décroît jusqu'à ce que le taux d'annihilation des particules de \mathcal{DM} devienne plus lent que le taux d'expansion de l'Univers. De plus, dans ce processus, la densité nombre de particules de \mathcal{DM} diminue et les annihilations deviennent de plus en plus improbables. Ainsi, le nombre de particules \mathcal{DM} reste constant. C'est donc des particules fossiles dont la densité relative reste constante et qu'on nomme "densité relique". Ce mécanisme s'appelle le processus de freeze-out.

Plusieurs candidats à \mathcal{DM} sont proposés. En particulier, avec ce mécanisme, l'un des candidats communément mentionné, est appelé particule massive interagissant faiblement (*WIMP* pour Weakly Interacting Massive Particle). C'est une particule hypothétique, élémentaire qu'on ajoute en plus des particules du modèle standard, classée dans la catégorie de matière noire froide, vu les vitesses non relativistes des particules. Par définition, les *WIMPS* n'interagissent entre elles que faiblement via de nouveaux couplages faibles ou via l'interaction gravitationnelle et n'interagissent que très rarement avec la matière ordinaire. Jusqu'à présent, la nature des *WIMPS* n'est pas spécifiée.

Une alternative intéressante est le mécanisme de freeze-in. Dans ce cas, les interactions des particules de matière noire sont très faibles avec les particules du modèle standard qu'elles sont incapables d'atteindre l'équilibre thermique et chimique dans le plasma primordial de l'Univers, et par conséquent son abondance reste inférieure à celle d'équilibre thermique tout au long de l'histoire de l'Univers. En particulier, avec ce mécanisme, l'un des candidats communément mentionné, est appelé le particule massive interagissant très faiblement (*FLIMP* pour Feebly Interacting Massive Particle).

L'objectif de ce mémoire de master est l'étude théorique de la matière noire à travers le calcul de la densité relique. Pour atteindre cet objectif, on procède de deux manières : un calcul à la main reflétant tous les détails de calculs puis un calcul via le code automatique, spécifique MicrOmegas.

Comme exemple pratique, nous appliquons ces calculs, via le code MicrOmegas, au cas du doublet inerte du Higgs (*IDM* pour Inert Doublet Model), qu'on choisit comme fournisseur de candidat à \mathcal{DM} .

Ce mémoire est organisé comme suit :

Après une brève introduction sur la matière noire et les moyens de sa détection, le chapitre 1 est consacré à l'introduction au modèle standard cosmologique. Des notions de relativité générale, essentielles à la construction de ce modèle sont exposées pour arriver aux équations d'Einstein. La prise en compte du principe cosmologique (valable à de grandes distances, au delà de $100Mpc$), mène aux Univers décrits par les équations de Friedmann. On en tire l'évolution thermique de l'Univers qui décrit son aspect thermodynamique et les principales étapes de son évolution, des tout premiers instants du big bang jusqu'à l'époque actuelle.

Le chapitre 2 est consacré au modèle standard des particules élémentaires, qui composent la matière baryonique ordinaire.

Dans le chapitre 3, nous passons en revue les preuves concluantes de la matière noire à différentes échelles astrophysiques. Ensuite, nous résumons la nature de la matière noire baryonique et non baryonique pour identifier ses candidats les plus importants. Nous décrivons également les diverses techniques de détection. Dans le chapitre 4, nous présentons les étapes du calcul de la densité relique dans les deux scénarios, freeze-out et freeze-in. Puis, nous présentons le code Micromegas et on l'applique, dans le cadre de l'*IDM*, pour déterminer la densité relique dans les deux scénarios.

Enfin, nous présentons nos conclusions et perspectives.

Introduction au modèle standard cosmologique

1.1 Introduction

Le modèle standard de la cosmologie est le nom donné au modèle cosmologique qui s'intéresse à l'étude de la structure à grande échelle de l'espace cosmique. Le modèle cosmologique se préoccupe de répondre aux questions fondamentales sur la structure, l'origine, la formation et le développement de l'Univers et d'essayer de prédire le chemin de sa fin, c'est-à-dire l'histoire et la destinée de l'Univers. Le véritable début du modèle cosmologique, connue sous nom de big bang, est envisagé au $XX^{\text{ème}}$ siècle [1]. Ce modèle reproduit avec succès et de façon simple un très grand nombre d'observations [1]. Plusieurs étapes furent nécessaires à sa construction ; sa vision moderne naît en 1915 avec la théorie de la relativité générale (\mathcal{RG}) d'Albert Einstein [2][3]. Au fait, en 1916, tout à fait au début de l'élaboration de la théorie de la \mathcal{RG} , Einstein a découvert, à travers ses équations, que l'Univers n'est pas statique et qu'il est soit en expansion ou en contraction et étant donné la croyance à ce moment-là que l'Univers est statique, Einstein a ajouté à ses équations la constante cosmologique, de sorte qu'il en résulte un Univers stable d'extension finie [2][3]. En 1922, le scientifique Alexander Friedman a présenté des solutions aux équations d'Einstein pour le champ, décrivant un Univers connu sous le nom de métrique de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (\mathcal{FLRW}) qui est sujet à l'expansion ou à la contraction [4]. Quelques années plus tard et particulièrement, en 1929, une découverte expérimentale vient confirmer que l'Univers est en expansion [5]. En effet, Edwin Hubble a observé, avec son télescope, un ensemble de galaxies dont il a tiré les vitesses v , en mesurant le décalage spectral vers le rouge z de ces galaxies et les distances correspondantes par rapport à la Voie Lactée (tirées à partir de la mesure de la variation de la luminosité des étoiles variables, les céphéides, dont la période est reliée à la luminosité absolue (voir détails plus loin))[5]. Ensuite, il a remarqué qu'il existe une relation linéaire entre le décalage spectral vers le rouge d'une galaxie et sa distance.

$$v = cz = H_0 d.$$

c est la vitesse de la lumière et H_0 est la constante de Hubble [5]. L'indice 0 est utilisé pour indiquer la valeur de la constante à l'instant actuel. A noter que cette loi linéaire n'est valable que pour des décalages spectraux faibles ; à défaut, il faut apporter des corrections d'ordres supérieurs par rapport à z .

Cette relation est une preuve expérimentale que l'Univers est en expansion. Elle s'appelle maintenant la loi de Hubble-Lemaître [6].

Le modèle du Big-Bang suppose que, dans son état initial, l'Univers était très dense et très chaud, puis, étant en expansion, il s'est refroidi et sa densité a diminué. Ce modèle permet de décrire l'histoire thermique de l'Univers, les principales étapes de l'histoire de l'Univers, le fond diffus cosmologique, la densité nombre des particules, la formation des grandes structures (galaxies, amas de galaxies) et le contenu de l'Univers actuel.

1.2 Le Modèle du Big Bang

1.2.1 Quelques notions de relativité générale

- L'intervalle de longueur est noté

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{en supposant la métrique symétrique} \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

- Les indices grecs (μ, ν, \dots) prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, tandis que les indices latins (i, j, \dots) couvrent les valeurs 1, 2, 3.
- La signature de la métrique est choisie : (+1, -1, -1, -1).
- Les transformations de coordonnées

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

agissent sur les vecteurs contravariants selon

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

et sur les vecteurs covariants selon

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu$$

- Le tenseur $g^{\mu\nu}$ est défini comme l'inverse de la métrique $g_{\mu\nu}$, avec $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$.
- Les indices sont élevés ou abaissés avec la métrique $g_{\mu\nu}$ selon

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

- En relativité restreinte, l'espace plat et statique est décrit par la métrique de Minkowski

$$n_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- La dérivée covariante agit sur les tenseurs selon :

$$\Delta_\nu T^\alpha{}_\mu{}^\beta = \frac{\partial T^\alpha{}_\mu{}^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha T^{\rho\beta} + \Gamma_{\nu\rho}^\beta T^\alpha{}_\mu{}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T^\alpha{}_\rho{}^\beta \quad (1.1)$$

et on définit les symboles de Christoffel, qu'on appelle aussi connexions affines, à partir du tenseur métrique

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (1.2)$$

- Le tenseur de Riemann se construit à partir des symboles de Christoffel

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}. \quad (1.3)$$

Il contient toute l'information sur la courbure de l'espace-temps. Il mesure le changement d'un 4-vecteur lors de son transport parallèle sur un chemin fermé.

On définit le tenseur de Ricci comme une contraction du tenseur de Riemann

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} \quad (1.4)$$

et le scalaire de Ricci (courbure scalaire) par la trace du tenseur de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \quad (1.5)$$

1.2.2 Équations d'Einstein

Les équations d'Einstein ou les équations du champ d'Einstein, sont établies pour la première fois par Albert Einstein[2]. Ces équations sont la généralisation relativiste de l'équation newtonienne du champ, analogue à la loi de Gauss pour le champ électromagnétique (l'équation de Poisson)[2].

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi(x) = -4\pi G\rho(x) \quad (1.6)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta\phi(x) = 4\pi G\rho(x) \quad (1.7)$$

où :

- $\phi(x)$ est le potentiel gravitationnel (avec $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi(x)$);
- $\rho(x)$ est la masse volumique;
- G est la constante gravitationnelle.

D'un autre côté, l'équation de Poisson est une équation qui est fonction du laplacien, ce qui fait que la généralisation tensorielle de l'équation (1.7) doit être du second ordre et prend la forme suivante :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

Cette équation s'appelle l'équation d'Einstein, où :

- $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein;
- $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion;
- κ est une quantité scalaire nommée la constante d'Einstein déduite à partir de la limite newtonienne par l'expression

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.9)$$

où c est la vitesse de la lumière. D'après (1.9), l'équation (1.8) devient :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Cette équation relie la géométrie de l'espace (coté gauche de l'équation) au contenu en matière ou énergie (coté droit de l'équation).

Maintenant, nous allons essayer de construire l'expression de $G_{\mu\nu}$, par des considérations physiques, c'est-à-dire en utilisant notre intuition physique. Pour cela, on va faire les tentatives

suivantes :

Constructions de $G_{\mu\nu}$:

Puisque $G_{\mu\nu}$ est relié à la courbure de l'espace-temps (la géométrie), donc le candidat le plus évident pour construire $G_{\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ qui est un tenseur du quatrième ordre, dont la connaissance déterminera complètement la courbure de l'espace

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}) \quad (1.11)$$

Comme $G_{\mu\nu}$ est un tenseur du second ordre, il faut faire appel au tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ (tenseur du second ordre obtenu par une contraction du tenseur de Riemann).

Toutefois, cette première tentative pose un problème car $\nabla_\nu R^{\mu\nu} \neq 0$ alors que $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Pour cela on cherche à rajouter d'autres ingrédients à $G_{\mu\nu}$.

Puisque la tenseur $T_{\mu\nu}$ est conservatif : $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$, alors il ne peut évaluer qu'un autre tenseur conservatif : $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$. Mais $\nabla^\nu R_{\mu\nu} \neq 0$ alors $G_{\mu\nu}$ pourrait contenir d'autres tenseurs autre que $R_{\mu\nu}$; les seules quantités qui pourraient raisonnablement intervenir dans la construction de $G_{\mu\nu}$ et vérifier en même temps les conditions $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$, sont les autres contractions du tenseur de Riemann et la métrique elle même. D'où

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

où :

- Λ est la constante cosmologique.¹ ;
- R est la courbure scalaire ;
- $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci ;
- $g_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps (espace de la relativité générale) ;
- b est une constante astreinte à prendre la valeur $-\frac{1}{2}$ pour que l'équation (1.12) soit conservative c'est-à-dire $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$.

Par conséquent, l'équation (1.10) prendra la forme suivante :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Si on pose $c = 1$, alors (1.13) devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

Ces équations indiquent que le contenu énergétique (représenté par $T_{\mu\nu}$) est relié à la géométrie de l'espace-temps (représenté par la métrique $g_{\mu\nu}$).

Si l'on modélise le contenu de l'Univers par un fluide parfait de pression P et de densité d'énergie ρ , alors le principe cosmologique impose, pour la forme du tenseur énergie-impulsion l'expression suivante :

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} \quad (1.15)$$

1. la constante cosmologique, initialement introduite par Einstein pour décrire un Univers statique ; il la retira par la suite de son équation quand les observations d'Edwin Hubble furent interprétées comme une preuve que l'Univers était en expansion. Elle est aujourd'hui réintroduite dans l'équation pour rendre compte de l'expansion accélérée de l'Univers.

où u^μ est le quadri-vecteur vitesse. Si le fluide est au repos $u^\mu = \{1, \vec{0}\}$, alors $T_{00} = \rho$ et $T_{ij} = -Pg_{ij}$. Par conséquent $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, P, P, P)$.

Les différents types de fluide sont définis par l'équation d'état $P = \omega\rho$ avec :

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si les particules sont relativistes} \\ 0 & \text{si les particules sont non-relativistes} \\ -1 & \text{si constante cosmologique} \end{cases}$$

1.2.3 Principe cosmologique

Le principe cosmologique stipule que l'Univers est un système homogène et isotrope aux grandes échelles. L'homogénéité de l'Univers signifie qu'il est identique en tout temps en tout point de l'espace. Quant à l'isotropie de l'Univers, cela indique qu'il est identique dans toutes les directions. Par conséquent, vu à une échelle suffisamment grande, l'Univers est le même pour tous les observateurs.

Le principe cosmologique est une hypothèse forte qui est appliqué à de très grandes échelles, c'est-à-dire plus de 100 Mpc mais cela reste incorrect à de petites échelles.

La supposition d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers nous conduit à choisir le système de coordonnées d'espace-temps telle que la métrique prenne une forme simple, d'abord obtenue par Friedmann comme solution des équations d'Einstein et ensuite retrouvée par Robertson et Walker en se basant uniquement sur les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.

1.2.4 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker (\mathcal{FLRW})

La métrique de \mathcal{FLRW} est une forme qui décrit l'Univers ayant un espace-temps de géométrie homogène et isotrope. En cosmologie, cette métrique est utilisée pour la description de l'Univers aux grandes échelles. Elle s'écrit, en coordonnées sphériques (t, r, θ, ϕ) , sous cette forme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.16)$$

où :

- La métrique $g_{\mu\nu}$ est, d'après l'équation (1.16) de la forme :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta a(t)^2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

- $a(t)$ est le facteur d'échelle (dépendant du temps), qui permet de décrire l'expansion de l'Univers.

• k est le paramètre de courbure de l'univers, astreint à prendre 3 valeurs uniquement selon la courbure de l'espace (voir la Figure 1.1)

$$k = \begin{cases} +1 & \text{si l'Univers est fermé} \\ 0 & \text{si l'Univers est plat} \\ -1 & \text{si l'Univers est ouvert} \end{cases}$$

Les données expérimentales actuelles donnent $k \simeq 0$, indiquant que l'Univers semble être plat.

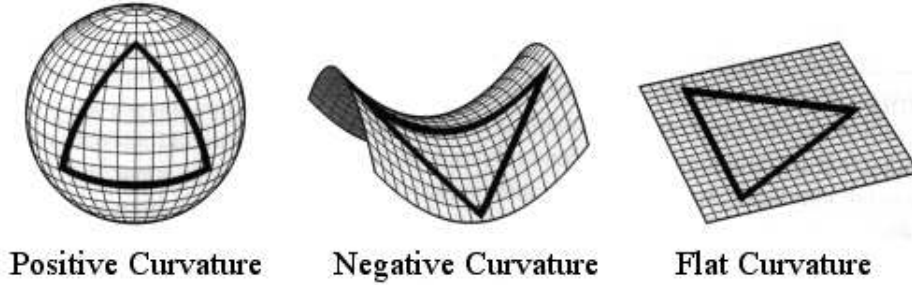


FIGURE 1.1 – Les trois formes possibles de l'Univers. ²

1.2.5 Équation de Friedmann

Nous allons maintenant retrouver les équations régissant l'Univers lorsque celui-ci est décrit par la métrique de \mathcal{FLRW} . Pour ce faire, nous utiliserons les équations d'Einstein en prenant comme matière un fluide parfait qui décrira notre Univers homogène et isotrope, on trouve deux équations de Friedmann suivantes[4] :

Pour la composant $\mu = \nu = 0$

$$-3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \frac{1}{2}(-6) \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] - \Lambda = 8\pi GP$$

Ce qui nous donne la première équation de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.18)$$

où H est le paramètre de Hubble.

Pour la composante ij , on trouve :

$$-\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right] g_{ij} - \frac{1}{2}(-6) \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] g_{ij} - \Lambda g_{ij} = 8\pi(-P)Gg_{ij}$$

Ce qui nous donne la deuxième équation de Friedmann (appelée aussi équation de Raychaudhuri)

$$2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP + \Lambda \quad (1.19)$$

2. <https://harrisonhartle.wordpress.com/2014/08/04/non-euclidean-geometry-art/>

Par conservation du tenseur énergie impulsion, on a :

$$\Delta_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.20)$$

A partir de l'équation (1.15), on trouve l'équation de continuité [4] :

$$\dot{\rho} + 3H(P + \rho) = 0 \quad (1.21)$$

1.2.6 La loi de Hubble et décalage spectral vers le rouge

En 1929, Edwin Hubble a observé en premier une relation linéaire entre la distance et la vitesse (radiale) à laquelle les galaxies se déplacent (Voir la Figure 1.2), où il a étudié les galaxies uniquement près de la voie lactée au moyen d'un télescope appelé, aujourd'hui le télescope Hubble [5]. Cette relation est :

$$v = H_0 d \quad (1.22)$$

où :

- v est la vitesse d'éloignement de la galaxie ;
- d est la distance entre la Terre et la galaxie ;
- $H_0 = H(t_{\text{indice}}0)$: c'est le paramètre de Hubble estimé à l'instant actuel t -indice 0 et est estimée aujourd'hui à près de $70 \pm 2.2 \text{ km/s/Mpc}$. Ce paramètre est une grandeur fondamentale pour la cosmologie qui décrit le taux d'expansion, spécifie l'âge de l'Univers ($t_H = 1/H_0 = 13.75 \pm 0.13 \text{ Gyr}$) et les densités des composantes de l'Univers.

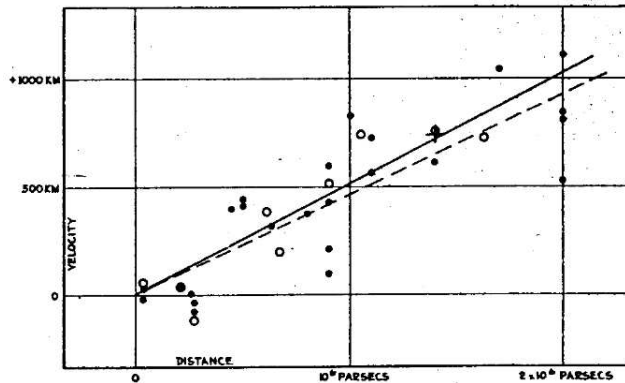


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de la loi de Hubble.³

Pour mesurer la vitesse de déplacement des galaxies, il est utile d'utiliser une grandeur sans dimension qui est le décalage spectral vers le rouge (ou en utilisant le décalage spectral vers le bleu). Le spectre lumineux des galaxies s'éloignant est décalé vers les grandes longueurs d'onde, vers le rouge, d'où le terme anglais de redshift. Il est montré dans la Figure 1.3.

3. <http://www.astrosurf.com/luxorion/hubble-law-redshift1929.htm>

4. <http://a-levelphysicstutor.com/wav-doppler.php>

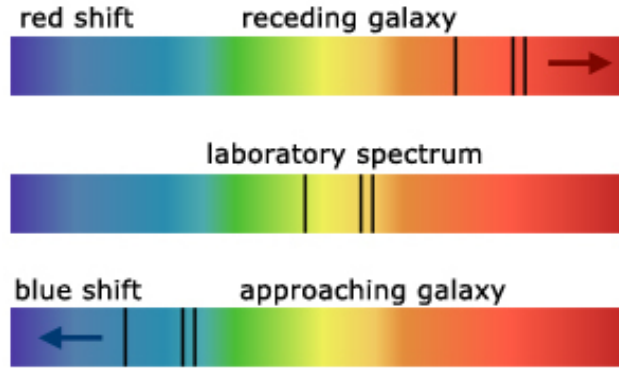


FIGURE 1.3 – Illustration d'un décalage spectral vers le rouge et bleu.⁴

On définit la variation de la longueur d'onde électromagnétique d'un photon entre le moment de son émission λ_e et le moment de son observation λ_0 sur la Terre par :

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 \Rightarrow \begin{cases} z > 0 & \text{redshift} \\ z < 0 & \text{blueshift} \end{cases} \quad (1.23)$$

On va examiner maintenant la loi de la variation du redshift en fonction du facteur d'échelle. En utilisant l'expression de la métrique de \mathcal{FLRW} , la trajectoire radiale d'un rayon lumineux est donnée par :

$$ds^2 = 0 \Rightarrow dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0 \Rightarrow \frac{dt^2}{a^2(t)} = \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (1.24)$$

Considérons que ce rayon lumineux a été émis d'une galaxie de coordonnées $(r, 0, 0)$ au temps t_e pendant un intervalle de temps δt_e , à $r = r_e$. Il est ensuite réceptionné au temps t_0 au niveau de l'observateur à $r = r_0 = 0$ avec un intervalle de temps actuel δt_0 . On a donc :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad \text{et} \quad \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.25)$$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.26)$$

Nous pouvons diviser les intégrales de chaque côté en deux parties :

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.27)$$

et donc

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.28)$$

Le facteur d'échelle $a(t)$ peut être pris comme approximativement constant dans les intégrales. Alors l'expression (1.28) devient :

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \quad (1.29)$$

Si l'Univers subit une expansion, c'est-à-dire $a(t_0) > a(t_e)$, on aura $\delta t_0 > \delta t_e$. En plus, si on considère les intervalles δt_0 et δt_e comme étant des périodes électromagnétiques, on peut réécrire l'équation précédente en utilisant les longueurs d'onde

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}. \quad (1.30)$$

Alors on déduit le redshift en fonction du facteur d'échelle

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.31)$$

1.2.7 Distance cosmologique

Distance comobile

La distance comobile est la distance entre deux points de l'Univers en s'affranchissant de l'effet d'expansion

$$d_C = a(t_0) \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.32)$$

Si l'on considère que l'Univers est plat ($k = 0$), alors cette distance s'écrit comme suit :

$$d_C = a(t_0)r_e \quad (1.33)$$

Distance angulaire

La distance angulaire d_A est définie comme le rapport entre le diamètre apparent D d'un objet et sa taille angulaire θ observée sur le ciel

$$d_A = \frac{D}{\theta} \quad (1.34)$$

Comme D évolue avec le facteur d'échelle, c'est-à-dire que $D = a(t_e)r d\theta$, on a :

$$d_A = a(t)r = \frac{a(t_0)r}{1+z} = \frac{d_C}{1+z} \quad (1.35)$$

Distance de luminosité

Soit une source émettant une luminosité absolue L et émettant de manière isotrope. Le flux reçu F en un point de l'espace sera alors lié à sa luminosité absolue L (en Watt) par sa distance de luminosité d_L la séparant de la source lumineuse suivant l'équation

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (1.36)$$

Ce qui définit la distance de luminosité de la source comme suit[3] :

$$d_L = (1+z)d_C = (1+z)^2 d_A \quad (1.37)$$

1.2.8 Densité critique et paramètres cosmologiques

Densité critique

On définit la densité critique ρ_c comme la densité qu'aurait un Univers homogène et isotrope en expansion pour que sa courbure spatiale k soit nulle. De l'équation (1.18) avec $k=0$ et $\Lambda = 0$, on obtient :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.38)$$

dont la valeur actuelle est :

$$\rho_{c_0} = 1.87847(23) \times 10^{-29} \cdot h_0^2 \cdot g \cdot cm^{-3} \quad (1.39)$$

où h_0 est un paramètre sans dimension défini par :

$$h_0 = \frac{H_0}{100km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}} = 0.70 \quad (1.40)$$

Paramètres cosmologiques

Dans le modèle cosmologique très simplifié décrit auparavant, l'intégralité de l'histoire est déterminée par un petit nombre de paramètres cosmologiques ($H, \rho_m, \rho_r, \rho_\Lambda$)[3].

Il est cependant usuel et pratique en cosmologie, d'employer des quantités a-dimensionnelles que l'on nomme paramètres de densité et qui sont définis par :

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t) \quad , i = m, r, \Lambda, k \quad (1.41)$$

L'intérêt des densités (1.41) devient plus évident quand on les utilise pour ré-exprimer l'équation de Friedmann (1.18). On a alors :

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (1.42)$$

où :

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m \quad (1.43)$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r \quad (1.44)$$

$$\Omega_k = \frac{-k}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \left(\frac{-3k}{8\pi G a^2} \right) = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_k \quad (1.45)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \left(\frac{\Lambda}{8\pi G} \right) = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda \quad (1.46)$$

sont les paramètres de densité de matière, rayonnement, courbure et constante cosmologique respectivement.

Grâce à l'équation (1.42), on constate que les valeurs de Ω_m, Ω_r , et Ω_Λ déterminent la courbure spatiale de l'Univers comme suit :

- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow$ Univers ouvert

- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow$ Univers plat
- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1 \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ Univers fermé

avec la densité cosmologique totale de l'Univers notée Ω_{tot} est la somme de ces différentes densités

$$\Omega_{tot} = \sum_{i=m,r,\Lambda} \Omega_i = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \quad (1.47)$$

1.2.9 Évolution du facteur d'échelle

L'évolution du facteur d'échelle $a(t)$ est donnée par les équations de Friedmann et l'équation de continuité avec l'équation d'état du fluide qui est $P = \omega\rho$. La solution de l'équation de continuité (1.21) est la densité d'énergie ρ en fonction du facteur d'échelle

$$\rho \propto a(t)^{-3(1+\omega)} \quad (1.48)$$

Suivant la valeur que peut prendre ω , on trouve qu'il y a trois types de dominations de l'Univers :

• **Domination de la matière (particules non-relativistes)** : courbure et constante cosmologique sont ici négligeables ; donc l'équation de Friedmann se simplifie . Ce qui conduit à :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m \quad (1.49)$$

$\omega = 0$: $\rho_m \propto a^{-3}$ et $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = t^{\frac{2}{3}}$

• **Domination de la constante cosmologique ou de l'énergie noire** : courbure et la densité sont ici négligeables. Ce qui conduit à

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \quad (1.50)$$

$\omega = -1$: $\rho_\Lambda \propto \text{Cste}$ et $a(t) \propto e^{\frac{\Lambda}{3}t}$

• **Domination du rayonnement (particules relativistes)** : l'équation de Friedmann prend la même forme que ci-dessus en remplaçant ρ_m par ρ_r . Donc :

$\omega = 1/3$: $\rho_r \propto a^{-4}$ et $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$

1.3 Histoire thermique de l'Univers

1.3.1 Découplage

À tout moment, l'Univers contiendra une distribution de corps noir de photons avec une certaine température T . Si une espèce interagit (directement ou indirectement) avec les photons à un taux d'interaction Γ_i qui est plus grand que le taux d'expansion de l'Univers H ($\Gamma_i \gg H$), alors ces particules auront la même température que les photons : $T_i = T$ (équilibre thermique). Mais en général, cela peut ne pas être le cas et l'Univers pourrait être peuplé de différentes espèces, chacune avec sa propre température. En règle générale , une espèce i maintiendra une distribution d'équilibre lorsqu'il y a de nombreuses interactions de photon dans le temps nécessaire à l'Univers pour se développer de manière significative, c'est-à-dire, il se découplera du bain thermique lorsque le taux d'interaction descendra en dessous du taux d'expansion $\Gamma_i \ll H$.

On parle alors de freeze-out et freeze-in de l'espèce (voir chapitre 4). On distingue deux catégories de découplage :

- Le cas ultra-relativiste : le découplage a lieu lorsque $T \ll m$.
- Le cas non-relativiste : le découplage a lieu lorsque $T \gg m$.

1.3.2 Équilibre thermodynamique

La thermodynamique statistique peut être utilisée pour trouver la densité d'énergie, la densité de particules et la pression dans l'Univers primordial en équilibre. Pour ce faire, les statistiques de Bose-Einstein (Fermi-Dirac) sont utilisées pour décrire les distributions des bosons (fermions). La principale différence entre les deux découle du principe d'exclusion de Pauli qui stipule que deux fermions identiques ne peuvent occuper le même état quantique en même temps. Les bosons, en revanche, peuvent occuper le même état quantique en même temps. Il existe donc des différences dans les quantités que nous calculons pour les bosons et les fermions. Pour obtenir les informations sur les quantités thermodynamiques, nous commençons par la fonction de distribution :

$$f(\vec{p}, T) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} \quad (1.51)$$

où :

- $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ est l'énergie ;
- T est la température ;
- le signe $+(-)$ correspond aux fermions (bosons) ;
- μ est le potentiel chimique de l'espèce. Si cette espèce est également en équilibre chimique avec le milieu,

$$\mu = \sum_{j \in \text{état final}} \mu_j - \sum_{i \in \text{état initial}} \mu_i \quad (1.52)$$

À l'aide de la fonction de distribution, on peut alors définir localement la densité de particules, la densité d'énergie, et la pression :

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}, T) d^3p = \frac{g}{2\pi^2} \int f(\vec{p}, T) p^2 dp \quad (1.53)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E f(\vec{p}, T) d^3p = \frac{g}{2\pi^2} \int E f(\vec{p}, T) p^2 dp \quad (1.54)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p}, T) d^3p = \frac{g}{2\pi^2} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} p^2 f(\vec{p}, T) dp \quad (1.55)$$

où :

- g est le nombre de degrés de liberté de chaque particule ($g = 2$ pour les photons, $g = 3$ pour un boson massif, $g = 1$ pour le champ de Higgs et $g = 2$ pour un fermion de Dirac) ;
- $d^3p = 4\pi p^2 dp$.

Les intégrales précédentes peuvent être calculées analytiquement dans la limite ultra-relativiste et non-relativiste.

La limite ultra-relativiste ($m \ll T$ pour $\mu \ll T$)

Dans ce cas, nous négligeons le potentiel chimique ($\mu \ll T$) et définissons $E \simeq p$ ($m \ll T$). Par la suite, nous utilisons les formules suivantes pour effectuer les intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-x} &= \Gamma(n+1) = n! \\ \int_0^{+\infty} dx \frac{x^n}{e^x - 1} &= \zeta(n+1)\Gamma(n+1) \\ \int_0^{+\infty} dx \frac{x^n}{e^x + 1} &= (1 - 2^{1-n})\zeta(n+1)\Gamma(n+1) \end{aligned}$$

où :

- $\zeta(n+1)$ est la fonction zêta de Riemann ;
- $\Gamma(n+1)$ est la fonction gamma. On trouve donc

$$n = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_B T^3 & \text{pour les bosons} \\ \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_F T^3 & \text{pour les fermions} \end{cases} \quad (1.56)$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_B T^4 & \text{pour les bosons} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_F T^4 & \text{pour les fermions} \end{cases} \quad (1.57)$$

$$P = \frac{\rho}{3} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{90} g_B T^4 & \text{pour les bosons} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} g_F T^4 & \text{pour les fermions} \end{cases} \quad (1.58)$$

où $\zeta(3) \simeq 1,20205$ est la constante d'Apéry.

La limite non-relativiste ($m \gg T$) :

Dans ce cas, les distributions de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein peuvent être approchées par celle de Maxwell-Boltzmann, soit $f(p, T) \sim \exp(-(E - \mu)/T)$, avec

$$E = (p^2 + m^2)^{1/2} = m \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right)^{1/2} \simeq m + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{m^3}\right) \quad (1.59)$$

En définissant $x = p/\sqrt{2mT}$, nous avons pour la densité de particules

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int p^2 e^{-\left(\frac{m-\mu}{T} + \frac{p^2}{2mT}\right)} dp = \frac{g}{2\pi^2} e^{-\left(\frac{m-\mu}{T}\right)} (2mT)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad (1.60)$$

On peut alors utiliser le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$$

et en prenant $n = 1$, $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, on obtient :

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}} e^{\frac{\mu}{T}} \quad (1.61)$$

Aussi dans ce cas, on peut écrire $E \simeq m$ car on a $T \ll m$. Donc on obtient la densité d'énergie et la pression

$$\rho = nm \quad (1.62)$$

$$P = nT \quad (1.63)$$

La densité d'énergie ρ dans cette limite a changé en une densité de masse. En corollaire, on peut noter que dans cette limite $P \ll \rho$ et que la dernière équation est la loi des gaz parfaits ($k_B = 1$).

1.3.3 Nombre de degrés de libertés relativistes

La densité totale et la pression d'une espèce non relativiste sont exponentiellement plus petites que celles d'une espèce relativiste, donc est donnée par[8] :

$$\rho = \rho_{tot} = g_{eff}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (1.64)$$

et

$$P = P_{tot} = \frac{\rho_{tot}}{3} = g_{eff}(T) \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (1.65)$$

où $g_{eff}(T)$ est le nombre effectif de degrés de liberté des particules relativistes sans masse[8]

$$g_{eff}(T) = \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \quad (1.66)$$

où :

- le facteur relatif de $\frac{7}{8}$ explique la différence dans les statistiques Fermi et Bose ;
- T_i est la température effective de chaque espèce ;
- La somme se fait sur toutes les particules présentes dans l'Univers.

Les particules qui contribuent majoritairement sont les particules qui sont en équilibre thermique avec des photons ($T_i = T$), les espèces découplées ayant une température $T_i < T$.

1.3.4 La densité d'entropie

Le premier principe de la thermodynamique pour un système en équilibre avec un potentiel chimique négligeable, s'écrit :

$$TdS = dE + PdV \quad (1.67)$$

où :

- S est l'entropie
- $E = \rho V$ est l'énergie ;
- $V = a^3$ est le volume.

Alors :

$$dS = \frac{1}{T} [d(\rho V) + PdV] = \frac{1}{T} [(\rho + P)dV + Vd\rho] = \frac{1}{T} [d(V(P + \rho)) - VdP] \quad (1.68)$$

Pour montrer que l'entropie est conservée en équilibre, nous considérons

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{T} \left[\frac{d(V(\rho + P))}{dt} - V \frac{dP}{dt} \right] \\
&= \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho + P}{T} 3H \frac{V}{T} \\
&= \frac{V}{T} (\dot{\rho} + 3H(P + \rho)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.69}$$

En utilisant le fait que l'énergie et l'entropie sont des quantités extensives, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{E}{V}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{S}{V} \tag{1.70}$$

on peut écrire l'équation (1.67) sous la forme :

$$T \frac{\partial S}{\partial V} dV + T \frac{\partial S}{\partial T} dT - p dV = \frac{\partial E}{\partial V} dV + \frac{\partial E}{\partial T} dT \tag{1.71}$$

$$\left(T \frac{S}{V} - P \right) dV + T \frac{\partial S}{\partial T} dT = \frac{E}{V} dV + \frac{\partial E}{\partial T} dT \tag{1.72}$$

où nous avons pris $S = S(V, T)$ et $E = E(V, T)$. En identifiant les termes en dV et dT , cela donne :

$$\frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} \tag{1.73}$$

$$\frac{E}{V} = T \frac{S}{V} - P \tag{1.74}$$

A partir de la seconde égalité, on trouve pour l'entropie :

$$\frac{1}{T} (E + PV) = \frac{V}{T} (\rho + P) \tag{1.75}$$

On peut définir la densité d'entropie $s = S/V$, qui est donc donnée par :

$$s = \frac{1}{T} (P + \rho) \tag{1.76}$$

La densité d'entropie est dominée par la contribution des particules relativistes, (1.64) et (1.65), de sorte que

$$s = \frac{2\pi^2}{45} h_{eff} T^3 \tag{1.77}$$

avec

$$h_{eff}(T) = \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \tag{1.78}$$

Dans le cas de l'équilibre thermique, on remarque que $g_{eff} = h_{eff}$, c'est-à-dire que les particules ont la même température ($T_i = T$), comme le montre la Figure 1.4 (en utilisant le code MicrOmegas).

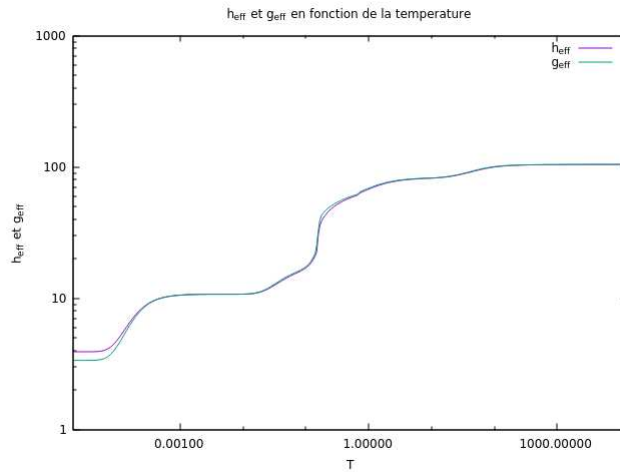


FIGURE 1.4 – Évolution de g_{eff} et h_{eff} au cours du temps.

1.3.5 les principales étapes de l'histoire de l'Univers

Les cosmologistes ont tenté d'extrapoler la physique connue actuellement jusqu'à l'ère de Planck, soit $t \simeq 10^{-43}$ après le Big-Bang. A partir de ce moment, correspondant à $T \simeq 10^{19} GeV$, nous allons donner les points importants de l'histoire de l'Univers qui est illustrée dans la figure 1.5.

Au départ, la matière est en équilibre thermique total avec le rayonnement par absorption et émission. Puis avec l'expansion de l'Univers, la densité et la température diminuent ce qui entraîne une rupture progressive de l'équilibre. L'histoire de l'Univers est donc une succession de ruptures d'équilibre :

- $t \simeq 10^{-36} s$ ($T \simeq 10^{16} GeV$) : Brisure de la symétrie de grande unification : les interactions forte et électrofaible se séparent pour donner le groupe de jauge du Modèle Standard des particules $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.
- t entre 10^{-36} et $10^{-32} s$ après le Big Bang : Ère inflationnaire. L'Univers entre dans une phase d'expansion rapide, homogène et isotrope dans laquelle apparaît la graine des formations des futures structures (étoiles, galaxies, ..).
- $t \simeq 10^{-12} s$ ($T \simeq 10^2 GeV$) : Brisure électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. La force faible se dissocie de la force électromagnétique.
- $t \simeq 10^{-8} - 10^{-12} s$ ($T \simeq 10^1 - 10^3 GeV$) : Les particules de matière noire dont la masse est de l'ordre du GeV au TeV.
- $t \simeq 10^{-6} s$ ($T \simeq 0.3 GeV$) : Translation de phase de chromodynamique quantique (QCD pour Quantum Chromo Dynamics) ; les quarks et les gluons se combinent en hadrons.
- $t \simeq 1 s$ ($T \simeq 1 MeV$) : Découplage des neutrinos de la matière et gel de la densité de neutrons.
- $t \simeq 10^2 s$ ($T \simeq 100 KeV$) : Les taux de toutes les interactions faibles deviennent inférieurs au taux d'expansion de l'Univers. C'est le début de la nucléosynthèse primordiale (BBN pour Big Bang Nucleosynthesis). Les protons et neutrons fusionnent en noyaux d'éléments légers (D^3, He^4, He^3, Li).
- $t \simeq 10^{12} s$ ($T \simeq 1 eV$) : La densité de matière devient très proche de la densité de rayonnement.
- $t \simeq 380000 ans \simeq 3000 K$ ($T \simeq 0.4 eV$) : Le découplage des photons produit le rayonnement fossile appelé fond diffus cosmologique .

- $t \simeq 400 \text{ à } 700 * 10^6 \text{ ans}$ ($T \simeq 60 \text{ eV}$) : Formation des premières étoiles.
- $t \simeq 10^9 \text{ ans}$ ($T \simeq 30 \text{ eV}$) : Formation des premières galaxies.
- $t \simeq 13.7$ ($T \simeq 10^{-4} \text{ eV} \simeq 2.7 \text{ K}$) : aujourd'hui

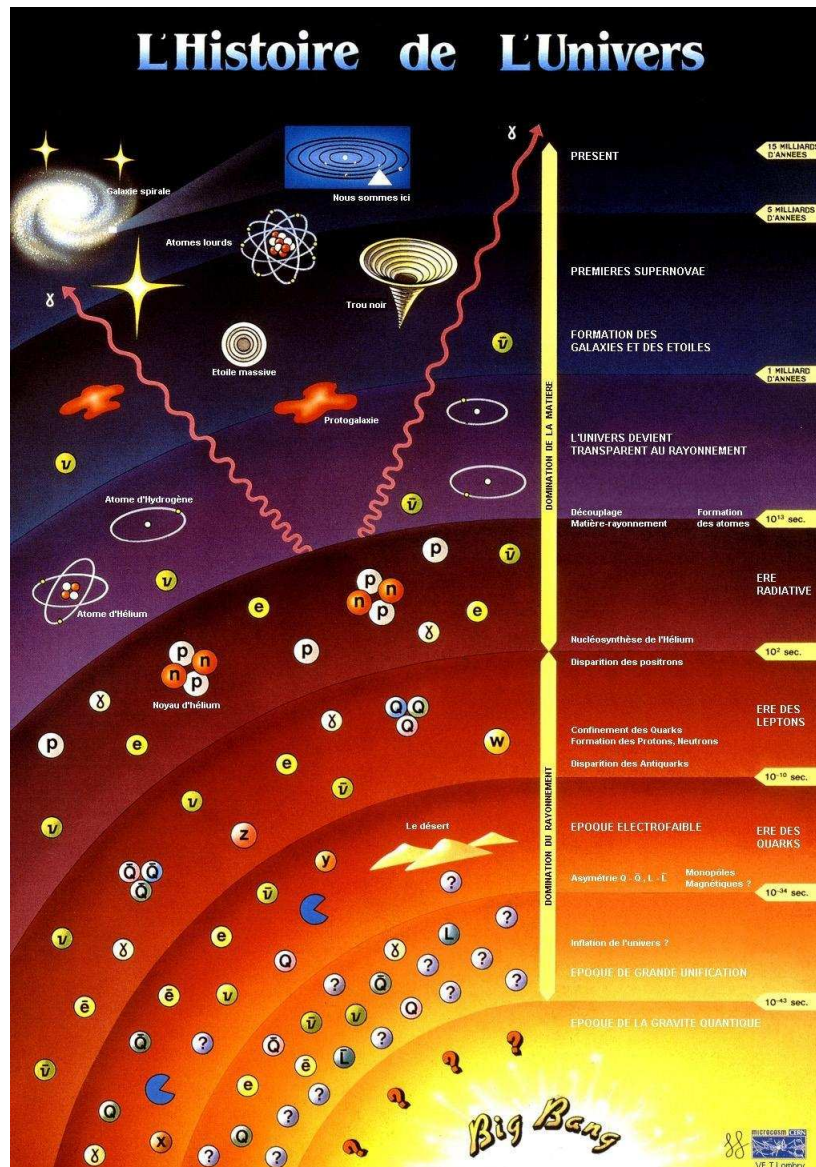


FIGURE 1.5 – Schéma de l'histoire thermique de l'Univers après le Big-Bang. ⁵

5. <http://www.astrosurf.com/luxorion/cosmos-bigbang4.htm>

Le Modèle Standard de la physique des particules

2.1 Aperçu sur le modèle standard de la physique des particules

La physique des particules élémentaires s'intéresse aux constituants fondamentaux de la matière ainsi qu'aux interactions qui règnent entre ces particules élémentaires. Il s'avère que sur le plan fondamental, la matière est constituée de communautés de saveurs de particules non discernables ayant pour chaque saveur la même masse, les mêmes charges (électrique et autres) et le même spin. Par exemple les électrons sont tous identiques, il n'y a pas d'électron plus âgé qu'un autre ou d'électron plus massif qu'un autre. En fait, l'information expérimentale collectée au fil des temps concernant ce monde de particules élémentaires, s'est soldée par la construction du modèle standard de la physique des particules. Ce modèle initialement proposé dans les années soixante-dix par Weinberg [9], Glashow [10] et Salam [11] dans le but d'unifier d'une part l'interaction électromagnétique et l'interaction faible via l'introduction de la symétrie de jauge d'isospin faible et d'hypercharge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, et d'autre part pour prendre en considération la génération des masses des particules élémentaires via la notion de brisure spontanée de la symétrie électrofaible, le mécanisme de Higgs et l'interaction de Yukawa. Ensuite, ce modèle a été aussi perfectionné dans les années quatre-vingt en incluant l'interaction forte via l'incorporation de la symétrie de jauge de couleur $SU(3)_c$ [12].

Ceci a permis de construire le modèle standard de la physique des particules basé sur le groupe de symétrie de jauge locale :

$$G_{MS} = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (2.1)$$

Par ailleurs, la gravitation dont l'effet est relativement négligeable à l'échelle des particules élémentaires (voir tableau 2.1) réside toujours hors du lot d'unification, et est plutôt régie par la relativité générale qui trouve son application sur des échelles cosmologiques. L'hypothétique graviton dans les théories au delà du modèle standard est relié au tenseur d'ordre deux décrivant l'espace temps en relativité générale. Il serait par conséquent une particule non pas vectorielle mais plutôt tensorielle d'ordre deux ; donc une particule de spin 2. De plus, du fait que l'interaction gravitationnelle est de portée infinie, le graviton serait de masse nulle. Par ailleurs, la

Interaction :	Intensité relative :	Portée :	Particules susceptible :	Action sur :
Forte	1	$10^{-15} m$	Quarks et Gluons	Charge de couleur
Électromagnétique	10^{-2}	∞	Particules chargées	Charge électrique
Faible	10^{-5}	$10^{-18} m$	Quarks et Leptons	Saveurs
Gravitationnelle	10^{-40}	∞	Toutes les particules	Masse et Énergie

TABLE 2.1 – Caractéristiques des interactions fondamentales

gravité quantique quelque soit sa version proposée, serait applicable à des échelles de l'ordre de la longueur de Planck¹ $l_P = \frac{\hbar}{m_P c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35} m$. Cette échelle est loin de l'exploration expérimentale actuelle en physique des particules. En fait, le \mathcal{LHC} explore actuellement des échelles de l'ordre de $l_{\mathcal{LHC}} = \frac{\hbar c}{E_{\mathcal{LHC}}} \simeq 10^{-19} m$. Il reste donc 16 ordres de grandeur à franchir. Et si jamais on y arrive le photon explorateur aurait une longueur d'onde inférieure à l'échelle de Planck d'où une énergie qui le transformerait en trou noir. D'où l'impossibilité d'observer directement de tels domaines d'énergie.

Par ailleurs, il importe de noter que l'interaction nucléaire entre hadrons de couleur neutre tel que protons et neutrons dans les noyaux atomiques est une force résiduelle de l'interaction forte au même titre que la force résiduelle électromagnétique qui règne entre atomes neutres constituants les molécules.

Alors dans le modèle standard les briques fondamentales sont des fermions de spin 1/2 ainsi que leurs antifermions correspondants, circulant à des vitesses relativistes et sont par conséquent représentés par des champs spinoriels ψ_f respectant l'équation de Dirac. Ces fermions sont groupés en trois familles. Dans chaque famille les fermions d'hélicité gauche $\psi_{f,L} = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_f$ sont traités différemment de leurs correspondants d'hélicité droite $\psi_{f,R} = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi_f$. Ainsi, les fermions gauchers sont ajustés en doublet d'isospin faible alors leur correspondant droitiers sont considérés comme étant des singlets d'isospin faible (voir tableau 2.2).

$$\begin{aligned}
1^{\text{ère}} \text{ famille} &\rightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \nu_{eR}, e_R, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_R, d_R \\
2^{\text{ème}} \text{ famille} &\rightarrow \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \nu_{\mu R}, \mu_R, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, c_R, s_R \\
3^{\text{ème}} \text{ famille} &\rightarrow \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \nu_{\tau R}, \tau_R, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, t_R, b_R
\end{aligned}$$

TABLE 2.2 – Les trois familles de fermions du modèle standard des particules

Les interactions entre ces fermions sont introduites via l'imposition de symétries de jauge.

1. $c \simeq 3 \cdot 10^8 m/s$, $\hbar = 4.1357 \cdot 10^{-15} eV.s$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$

On a le groupe $U(1)_Y$ d'hypercharge avec son champ vectoriel de jauge $B_\mu(x)$, le groupe $SU(2)_L$ d'isospin faible avec ces trois champs vectoriels de jauge $W_{1,\mu}(x)$, $W_{2,\mu}(x)$ et $W_{3,\mu}(x)$, et le groupe $SU(3)$ de couleur avec ces huit champs vectoriels de jauge $G_{a,\mu}$ avec $a = 1, \dots, 8$. Ces symétries de jauge apparaissent au niveau du lagrangien fermionique via le remplacement dans le terme cinétique du lagrangien de fermion libre $\bar{\psi}_f i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_f$ de la quadri-dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ correspondante et ceci par respect d'une part du principe de couplage minimal et d'autre part aux particules suspectées de ressentir l'interaction en question (voir tableau 2.1). Par exemple pour les :

électrons droitiers :

$$\partial_\mu \psi_{e,R} \rightarrow D_\mu^{(e,R)} \psi_{e,R} = (\partial_\mu - ig'Y B_\mu(x)) \psi_{e,R}$$

électrons gauchers :

$$\partial_\mu \psi_{e,L} \rightarrow D_\mu^{(e,L)} \psi_{e,L} = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}gW_{a,\mu}(x)\sigma^a - ig'Y B_\mu(x) \right) \psi_{e,L}$$

quarks up gauchers :

$$\partial_\mu \psi_{u,L} \rightarrow D_\mu^{(u,L)} \psi_{u,L} = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g_s G_{\alpha,\mu}(x)\lambda^\alpha - \frac{i}{2}gW_{a,\mu}(x)\sigma^a - ig'Y B_\mu(x) \right) \psi_{u,L}$$

où :

- Y est l'hypercharge ;
- g est la constante de couplage du champ de jauge d'isospin faible ;
- g' la constante de couplage du champ de jauge d'hypercharge ;
- g_s est la constante de couplage du champ de jauge de couleur.

Il importe ici de signaler que les champs de jauge introduits sont des champs vectoriels et par suite correspondent à des particules de spin 1. Le lagrangien cinétique qui leur correspond s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{a,\mu\nu}W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{b,\mu\nu}G^{b,\mu\nu}. \quad (2.2)$$

où les intensités des champs $B_{\mu\nu}$, $W_{a,\mu\nu}$ et $G_{b,\mu\nu}$ sont données par :

$$\begin{cases} B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ W_{a,\mu\nu} = \partial_\mu W_{a,\nu} - \partial_\nu W_{a,\mu} + g\epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c \\ G_{\bar{a},\mu\nu} = \partial_\mu G_{\bar{a},\nu} - \partial_\nu G_{\bar{a},\mu} + g_s f_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} G_\mu^{\bar{b}} G_\nu^{\bar{c}}. \end{cases} \quad (2.3)$$

On remarque que jusqu'à présent tous les champs qu'ils soient fermioniques ou bien vectoriels sont sans masses par rapport à l'invariance de jauge imposée au lagrangien $\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$. où :

$$\mathcal{L}_F = \sum_f \bar{\psi}_f(x) i\gamma^\mu D_\mu^{(f)} \psi_f(x) \quad (2.4)$$

Pour générer les masses respectives de toutes les particules du modèle standard, on introduit le doublet champ scalaire de Higgs $\Phi(x)$ gouverné par le lagrangien scalaire \mathcal{L}_S suivant :

$$\mathcal{L}_S = \left(D^{\mu(\Phi)} \Phi(x) \right)^\dagger \left(D_\mu^{(\Phi)} \Phi(x) \right) - \mu^2 \Phi^\dagger(x) \Phi(x) - \lambda \left(\Phi^\dagger(x) \Phi(x) \right)^2 \quad (2.5)$$

avec :

$$D_\mu^{(\Phi)} = \partial_\mu - \frac{i}{2}gW_{a,\mu}(x)\sigma^a - ig'Y B_\mu(x) \quad (2.6)$$

Alors, en considérant que le Higgs vit actuellement au voisinage de son état d'énergie minimale, le potentiel d'auto-interaction du Higgs avec lui même lui confère sa masse observée au \mathcal{LHC} . L'interaction des champs vectoriels électrofaibles avec le Higgs via le couplage minimal permet aux bosons vecteurs médiateurs de l'interaction faible d'acquérir de la masse. Et l'interaction de Yukawa entre les champs spinoriels et le champ de Higgs donne aux fermions du modèle standard leurs masses respectives. La Figure 2.1 résume les points essentiels sur lesquels se base le modèle standard des particules élémentaires.

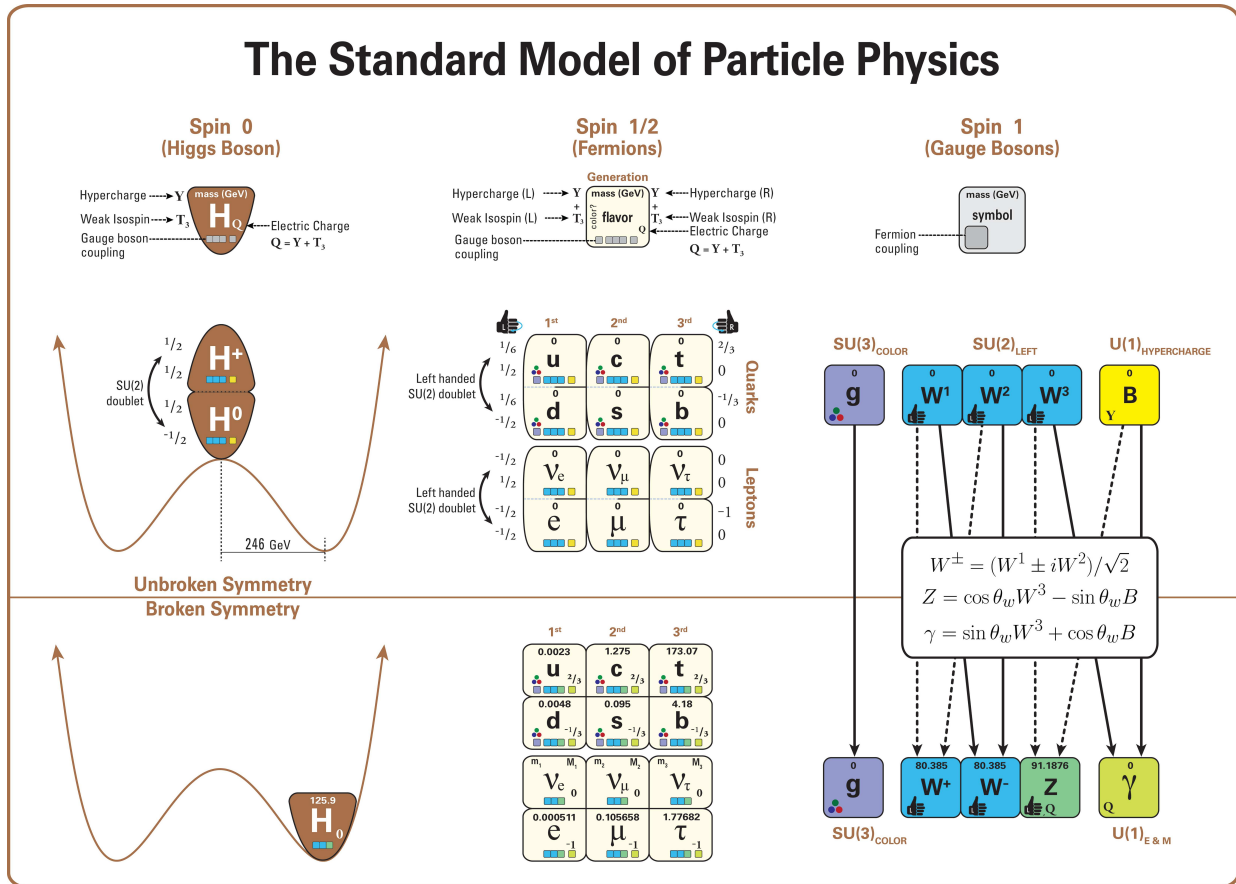


FIGURE 2.1 – Résumé des points essentiels du modèle standard des particules élémentaires.²

2.2 Les succès du modèle standard des interactions

Les points forts du modèle standard \mathcal{MS} de la physique des particules sont :

1. Le \mathcal{MS} a d'abord permis l'unification des trois forces fondamentales forte, faible et électromagnétique.
2. La prédiction du boson de Higgs recherché pendant un demi siècle et finalement découvert au \mathcal{LHC} en 2012.
3. La prédiction des bosons vecteurs faibles massifs W et Z , ainsi que la prédiction des gluons, du quark charm et du quark top avant qu'ils ne soient tous découverts.

2. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_Of_Particle_Physics--Most_Complete_Diagram.p

4. La prédiction avec une grande précision du moment dipolaire magnétique anomal de l'électron et du muon [13] :

$$\begin{cases} a_{e,(th)} = 0.001159652181643(764) \\ a_{e,(exp)} = 0.00115965218073(28) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} a_{\mu,(th)} = 0.00116591804(51) \\ a_{\mu,(exp)} = 0.0011659209(6) \end{cases} \quad (2.8)$$

5. La prédiction avec précision des masses des bosons vecteurs faibles W et Z [14] :

Quantité	Masses Observée (GeV)	Masse prédite par le \mathcal{MS} (GeV)
Masse du boson W	80.379(12)	80.390(18)
Masse du boson Z	91.1876(21)	91.1874(21)

2.3 Les limites du modèle standard des interactions

Malgré les succès spectaculaires du \mathcal{MS} , il existe des phénomènes naturels observés qui ne trouvent pas d'explication dans le cadre du \mathcal{MS} . Notons dans ce cadre en particulier :

1. Dans l'Univers actuel la matière domine. Par suite, il y a asymétrie entre matière et antimatière qui au début de l'Univers étaient en principe symétriques. L'ampleur de cette asymétrie ne trouve pas son explication dans \mathcal{MS} qui fournit une faible contribution via le mélange des saveurs de quarks.
2. Dans le \mathcal{MS} les corrections à boucles aux masses font intervenir des grandeurs dépendant du carré de la masse de Planck. Soit donc des corrections incompatibles avec les faibles valeurs de masses observés ce qui nécessite un ajustement précis (donc anormal et pas naturel) de manière à annuler le grand effet de l'échelle de Planck sur l'échelle électrofaible dans laquelle nous vivons. C'est le problème dit de la hiérarchie des masses.
3. Le \mathcal{MS} est une théorie basée sur un espace temps plat et par suite incompatible avec la relativité générale qui prône la courbure de l'espace temps.
4. Le \mathcal{MS} ne fournit pas de candidat à mesure d'expliquer la quantité de matière sombre observée et n'a pas d'explication pour l'énergie sombre.

Ainsi, le \mathcal{MS} est une théorie effective d'une autre théorie qui reste toujours à découvrir.

2.4 Les extensions du modèle standard des interactions

Comme le \mathcal{MS} est une théorie incomplète, plusieurs extensions ont été proposées :

1. On peut faire une extension du groupe de jauge. Ceci permet l'introduction de nouvelles interactions. Les médiateurs de ces nouvelles interactions dans la littérature sont : W' , Z' , γ' ,...

2. On peut aussi étendre le secteur fermionique en introduisant de nouveaux fermions tel que les fermions miroirs, fermions à interaction de type vectoriel,...
3. On peut aussi étendre le secteur scalaire en ajoutant de nouveaux singlets, doublets, triplets,... scalaires. Dans ce cadre on trouve par exemple, le modèle du doublet inerte (\mathcal{IDM} pour Inert Doublet Model) qui fournit un candidat à la matière sombre.
4. Les modèles supersymétriques (voir Figure 2.2) qui a chaque fermion lui associent un partenaire bosonique et vice versa, introduisent en fait une extension simultanée des secteurs scalaire, spinoriel et de jauge. Ces modèles ont l'avantage de résoudre le problème de la hiérarchie, de permettre l'unification des constantes de couplage électrofaible et forte et de fournir des candidats viables pour la matière sombre en plus de permettre l'introduction de la supergravité. Néanmoins, aucun indice de supersymétrie n'a été révélé par le \mathcal{LHC} .
5. D'autres extensions peuvent aussi être envisagées tel que l'extension des dimensions de l'espace, ou bien l'introduction de la non commutativité de l'espace temps.

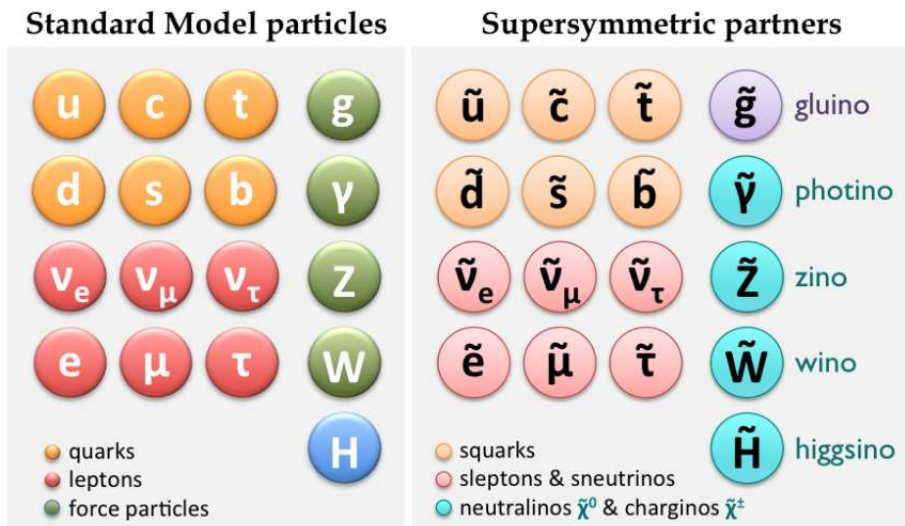


FIGURE 2.2 – Contenu en particule du modèle supersymétrique minimal. ³

3. https://ific.uv.es/sct/physics_susy

Matière noire

3.1 Introduction

En astronomie et cosmologie, la matière noire ou matière sombre (DM pour Dark Matter) est une composante hypothétique de l'Univers qui est censée expliquer une grande partie de la masse totale de l'Univers et effets gravitationnels. La matière noire ne peut pas être vue directement à l'aide de télescopes (car matière non lumineuse).

Dans les années 1930, Jean Oort, en étudiant le mouvement des étoiles dans la galaxie et Fritz Zwicky, en analysant la dynamique des galaxies dans l'amas du Coma, arrivèrent à la conclusion que la masse induisant ces mouvements était supérieure à la masse de la matière lumineuse [1], interagissant très faiblement avec la matière ordinaire, baptisée à l'occasion, matière noire. Selon le résultat de satellite Planck, la somme de la masse-énergie dans l'Univers contient 4% de la matière ordinaire (matière baryonique), 22% de matière noire et 74% d'énergie noire (voir Figure 3.1). Ainsi, la matière noire représente 84.5% de la masse totale de l'Univers, tandis que l'énergie noire, en plus de la matière noire, représente 96% du contenu total de l'Univers.

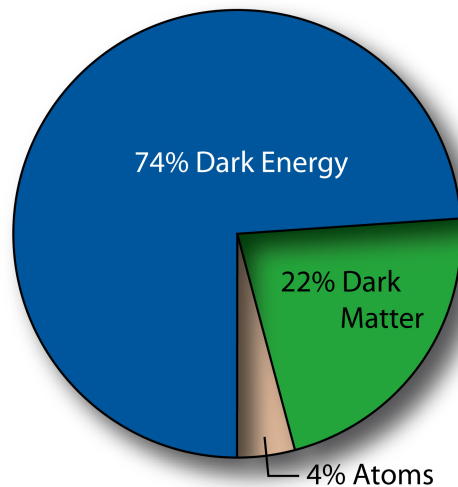


FIGURE 3.1 – Répartition des composants énergétiques de l'Univers [1]

Les effets de cette matière noire s’observent à différentes échelles astrophysiques et cosmologiques. Mais la nature des particules composant la matière noire est encore inconnue. Il existe de nombreux candidats possibles tels que les neutrinos du modèle standard ou des candidats présents dans des modèles au delà du modèle standard.

3.2 La preuve de la présence de la matière noire

3.2.1 À l’échelle galactique

Parmi les signes les plus évidents pour prouver l’existence de la matière noire est l’étude des courbes de rotation des galaxies spirales [1]. Ces courbes sont obtenues en mesurant la vitesse de mouvement circulaire des étoiles et du gaz (la vitesse de rotation du disque de galaxie) en fonction de leur distance r par rapport au centre galactique, pour des galaxies spirales généralement vues de profil. Les vitesses sont mesurées grâce au décalage Doppler des raies d’émission [15]. Si on modélise la galaxie comme une distribution sphérique de masse, la vitesse de rotation des étoiles se déduit de la mécanique newtonienne par la relation suivante :

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM(r)}{r^2} \quad (3.1)$$

alors

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (3.2)$$

où :

- r : est la distance au centre galactique ;
- $M(r)$ représente la masse totale contenue dans le disque de rayon r et elle est donnée par cette relation

$$M(r) = 4\pi \int \rho(r)r^2 dr \quad (3.3)$$

où $\rho(r)$ est le profil de densité de masse. Au delà du rayon optique du disque, la masse $M(r)$ devient quasiment constante, et la loi de Newton prédit que la vitesse de rotation du gaz et des étoiles décroît en $1/\sqrt{r}$, au delà du disque optique [16]. Néanmoins, des mesures observationnelles viennent désavouer ce fait. En effet, dans les années 1970, Vera Rubin et al. mesurèrent les vitesses de rotation $v(r)$ des étoiles et des nuages de gaz dans les galaxies spirales en fonction de leur distance au centre galactique [16]. Ces vitesses présentent un comportement plat (les courbes de rotation présentent souvent un plateau), jusqu’au-delà de la partie visible du disque, voir Figure 3.2.

Cela veut dire que la vitesse est constante loin du disque visible. Le fait que la vitesse reste assez constante au delà du disque lumineux ne peut pas être expliqué seulement que par la matière ordinaire, mais implique l’existence de halo non visible dit de matière noire, avec $M(r) \propto r$ et donc un profil de densité de masse $\rho \propto 1/r^2$. Même s’il existe un consensus sur la forme des halos de matière noire à de grandes distances par rapport au centre galactique, pour l’instant son comportement dans la région interne de la galaxie reste encore une question à éclaircir et peut avoir de grandes influences sur l’existence de la matière noire.

1. <https://www.cea.fr/comprendre/Pages/matiere-univers/essentiel-sur-matiere-noire.aspx>

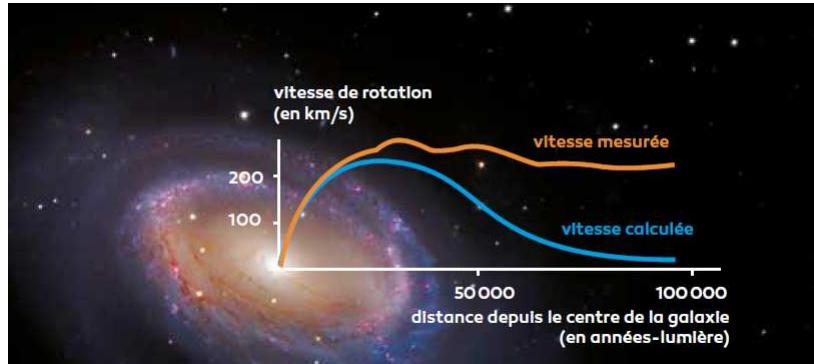


FIGURE 3.2 – Courbe de la distribution de vitesse de rotation des étoiles de la galaxie¹.

3.2.2 À l'échelle des amas galactiques

Les amas de galaxies sont des ensembles de galaxies liées gravitationnellement. Les plus massifs d'entre eux peuvent contenir jusqu'à plusieurs milliers de galaxies et font partie des plus grandes structures de l'Univers.

Dans les années 1933, l'astronome Suisse Fritz Zwicky a étudié le mouvement des galaxies dans l'amas de Coma [16] [15] et en utilisant le théorème du viriel, pour un système gravitationnellement lié en équilibre. Ce théorème est donné par :

$$2T + U = 0 \quad (3.4)$$

où :

- $T = \frac{MV^2}{2}$ est l'énergie cinétique d'un amas d'étoiles, avec V la vitesse moyenne des étoiles dans l'amas.
- $U = -\frac{GM^2}{2R}$ est l'énergie potentielle gravitationnelle, avec R la distance moyenne entre deux étoiles de l'amas.

On tire la masse totale de l'amas de galaxies :

$$M = \frac{2RV^2}{G} \quad (3.5)$$

Les vitesses de dispersion des galaxies mesurées au sein de l'amas, par Zwicky indiquèrent une masse totale $M \simeq 4.5 \times 10^{13} M_{\odot}$. Connaissant la luminosité moyenne d'une galaxie et leur nombre dans l'amas, il en déduisit que le rapport masse sur luminosité de ces galaxies devaient être de l'ordre de $M/L \simeq 500 M_{\odot}/L_{\odot}$, c'est-à-dire que la masse dynamique (déduite de la loi de Newton) de l'amas est cent fois supérieure à la masse lumineuse (déduite de la quantité de lumière émise par l'amas). C'est le début du problème de la masse manquante de l'Univers, qui peut être résolu en supposant l'existence de matière non-lumineuse interagissant très faiblement avec la matière ordinaire. On parle alors de matière noire.

3.2.3 À l'échelle cosmologique

En dépit des preuves observationnelles de l'existence de la matière noire (comme discuté dans les sections précédentes), il n'est pas possible, à partir de ces observations, de déterminer la quantité totale de matière noire dans l'Univers. Heureusement, ces informations peuvent

être extraites du rayonnement de fond diffus cosmologique (\mathcal{CMB} acronyme pour Cosmic Microwave Background). Nous allons passer en revue l'implication des données du \mathcal{CMB} sur la détermination des paramètres cosmologiques.

L'existence d'un rayonnement de fond diffus cosmologique provenant de la propagation des photons dans l'Univers primordial à 380 000 ans après le big-bang (une fois qu'ils se sont découplés de la matière) était déjà prédite par George Gamow et ses collaborateurs en 1948. Mais c'est en 1965 que ce rayonnement a été découvert, de façon fortuite, par Arno Penzias et Robert Wilson [16]. Le \mathcal{CMB} est mesuré de plus en plus précisément notamment par les expériences \mathcal{COBE} (Cosmic Background Explorer), \mathcal{WMAP} (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) et Planck [16]. Ces expériences ont révélé que le \mathcal{CMB} est très isotrope, avec de minuscules fluctuations de température de l'ordre de 10^{-5} et suit avec une précision extraordinaire le spectre d'un corps noir correspondant à une température $T = 2.726K$, comme montré sur la Figure 3.3.

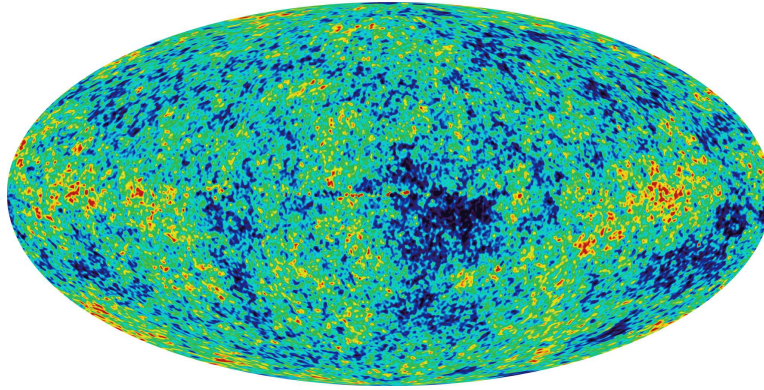


FIGURE 3.3 – Carte de température \mathcal{CMB} obtenue à partir des observations de Planck. Les couleurs différentes représentent les fluctuations de température dans l'Univers primordial.²

La carte des anisotropies de température du \mathcal{CMB} est une image de la distribution de densité dans l'Univers primordial. Elle permet de tester les modèles cosmologiques et de poser des contraintes sur les paramètres cosmologiques.

L'anisotropie de température en un point du ciel (dans une certaine direction angulaire (θ, ϕ)) peut être décomposée en harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.6)$$

où T est la température moyenne et $\Delta T(\theta, \phi) = T(\theta, \phi) - T$. Les coefficients a_{lm} ont une variance C_l qui, sous l'hypothèse des fluctuations de température gaussiennes, sont donnés par [16] :

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \quad (3.7)$$

C_l correspond à l'amplitude du multipôle l et s'appelle le spectre de puissance. La donnée de C_l en fonction de l donne l'information sur la variance de la température lorsque l'on compare

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Fond_diffus_cosmologique

un grand nombre de fois les températures de deux points éloignés d'un angle correspondant au multipôle considéré.

Sous l'hypothèse que les fluctuations de température soient gaussiennes, alors toute l'information contenue dans les cartes \mathcal{CMB} est donnée par C_l en fonction de l . En pratique, c'est la quantité $l(l+1)C_l/2\pi$ en fonction de l qui est tracée (voir la Figure 3.4).

L'étude des anisotropies de température de \mathcal{CMB} permet de mesurer la densité totale de matière et la densité de matière baryonique dans l'Univers. Des mesures du \mathcal{WMAP} donnent [17] :

$$\Omega_m h^2 = 0.1334^{+0.0056}_{-0.0055} \quad (3.8)$$

$$\Omega_b h^2 = 0.02260 \pm 0.00053 \quad (3.9)$$

La première observation essentielle est que ces deux nombres sont différents ; la matière baryonique n'est pas la seule forme de matière dans l'Univers. Nous concluons donc que la matière noire existe.

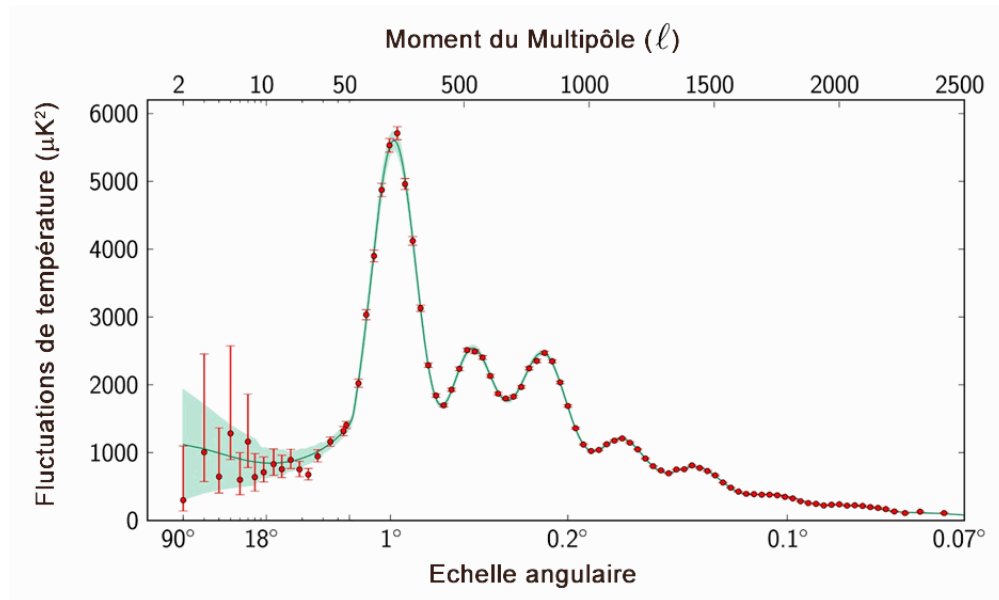


FIGURE 3.4 – Fluctuations de température dans le \mathcal{CMB} détectées par Planck à différentes échelles angulaires du ciel. Cette courbe est connue sous le nom de spectre de puissance. Les plus grandes échelles angulaires sont affichées sur le côté gauche, tandis que les échelles de plus en plus petites sont montrées vers la droite. ³

3. <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept17/Freese/Freese3.html>

3.3 Nature de la matière noire

La nature de la matière noire est représentée en deux types :

3.3.1 Matière noire baryonique

En astronomie et cosmologie, la matière baryonique désigne toute matière composée de particules composites appelées baryons (protons, neutrons , etc). En pratique, elle est composée de toutes les structures visibles dans l'Univers (étoiles, galaxies etc.) Les principaux candidats sont appelés objets compacts massifs (*MACHOS* pour Massive Compact Halo Objects).

MACHOS sont des objets compacts n'émettant pas de rayonnement ou trop peu pour être détectés. Ils peuvent être constitués de planètes flottantes (n'orbitant pas autour d'une étoile), de naines brunes (astres très froids qui n'atteignent pas le stade d'étoile car ils ne sont pas assez massifs pour déclencher des réactions nucléaires en leur sein), de naines blanches (étoiles mortes composées d'éléments lourds), ou encore de très faibles étoiles, d'étoiles à neutrons, voire de trous noirs stellaires. Ces astres ne seraient toutefois pas assez nombreux pour constituer l'ensemble de la matière noire.

3.3.2 Matière noire non-baryonique

Il existe trois types de matière noire non baryonique qui sont la matière noire chaude (*HDM* pour Hot Dark Matter), la matière noire froide (*CDM* pour Cold Dark Matter) et la matière noire tiède (*WDM* pour Warm Dark Matter). La différence étant la vitesse des particules relativistes de matière noire chaude (une très grande vitesse donc la masse est petite) et la vitesse des particules non-relativistes de matière noire froide (vitesse très lente donc la masse est grande). Quant à la matière noire tiède, elle présente des caractéristiques intermédiaires entre les propriétés de la matière noire chaude et les propriétés de la matière noire froide (vitesse moyenne).

Plusieurs candidats sont alors évoqués et qu'on traitera dans la section suivante.

3.3.3 Zoologie des candidats non-baryoniques à la matière noire

Neutrinos du modèle standard

Les neutrinos représentent le type connu de matière noire chaude qui contribuent à la densité d'énergie cosmique. Cependant, Si nous appelons m_i la masse du $i^{\text{ème}}$ neutrino , leur densité relique totale devrait être [16]

$$\Omega_\nu h^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{93eV} \quad (3.10)$$

La meilleure contrainte sur la masse des neutrinos provient des expériences, en laboratoire, de la désintégration β du tritium à Troitsk et Mainz [18] en fournissant une limite supérieure sur la masse du neutrino électronique [16]

$$m_\nu < 2.05eV(95\% \quad (\text{C.L : Confidence Limite})) \quad (3.11)$$

Bien sûr, cette limite s'applique pour les 3 générations de neutrinos. Ce qui implique une limite supérieure pour la contribution de la densité relique totale des neutrinos

$$\Omega_\nu h^2 < 0.07 \quad (3.12)$$

On remarque que les neutrinos ne sont tout simplement pas assez abondants pour être les composants dominants de la matière noire. Une contrainte plus stricte sur la densité relique des neutrinos provient de l'analyse des anisotropies du \mathcal{CMB} , combiné avec des données de structure à grande échelle, suggérant que, [16]

$$\Omega_\nu h^2 < 0.0067(95\% \text{ C.L}) \quad (3.13)$$

On conclut que le neutrino n'est pas considéré comme le candidat le plus important à la matière noire.

Neutrinos stériles

Les neutrinos stériles sont d'hypothétiques particules similaires aux neutrinos du modèle standard mais n'interagissant que par l'intermédiaire de la gravité. Ces particules pourraient être créées dans l'Univers primordial mais par mélange aux neutrinos actifs du \mathcal{MS} . Les neutrinos stériles peuvent représenter le type de matière noire froide, en cas de faible asymétrie leptonique.

Axions

L'axion est une particule élémentaire hypothétique. proposée en 1977 par Roberto Peccei et Helen Quinn [19] pour résoudre le problème de violation de la symétrie \mathcal{CP} (charge-parité) dans le lagrangien de la \mathcal{QCD} dans la physique des particules. Cette particule est supposée être un boson, sans aucune charge électrique et une section efficace d'interactions forte et faible réduite.

Des recherches en laboratoire, le refroidissement stellaire ainsi que la dynamique de supernova 1987, contraignent les axions à être très légers, $m_a \lesssim 0,01eV$ [16]. On devrait s'attendre à ce que ces particules interagissent très faiblement, via l'interaction faible, avec les particules ordinaires. Bien que cette particule soit extrêmement légère, elle pourrait exister en nombre suffisant pour agir comme candidate à la matière noire. Néanmoins, le calcul de la densité relique reste encore incertain [16].

Trous noirs primordiaux

Les trous noirs primordiaux (\mathcal{PBHS} pour Primordial Black Holes) sont un type de trou noir hypothétique formé pendant les premiers instants de l'Univers, par effondrement gravitationnel des sur-densités présentes dans le plasma primordial. Puis, par expansion de l'Univers, ces \mathcal{PBHS} se sont dispersés et pourraient être, par attraction gravitationnelle, responsables de la formation des grandes structures telles qu'on les connaît aujourd'hui. Ces \mathcal{PBHS} seraient encore présents sous forme de halos autour de ces galaxies, ce qui est caractéristique de la matière noire. Les contraintes astrophysiques actuelles donnent une masse aux trous noirs primordiaux entre 25 et 100 fois la masse du Soleil [20]. Les mesures récentes d'ondes gravitationnelles par les expériences LIGO/VIRGO ont fait naître de nouveau l'intérêt de ces trous noirs comme candidats à la matière noire [20].

WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles)

Les particules générales qui traduisent les meilleures propriétés de la matière noire dans l'Univers sont les *WIMPS*. Ce sont des particules élémentaires lourdes, qu'on note généralement χ , dont la masse peut aller de quelques GeV à une centaine de TeV et sont donc classées dans la catégorie de matière noire froide. Ces particules interagissent faiblement avec la matière ordinaire par interaction gravitationnelle et force faible.

Les *WIMPS* sont des particules stables et peuvent donc être des résidus des premiers instants de l'Univers après le big bang et être les responsables de la densité relique de \mathcal{DM} .

FIMPs (Feebly Interacting Massive Particles)

Le *FIMP* peut être comparé au *WIMP* avec la différence qu'il interagit beaucoup plus faiblement. En conséquence, l'abondance de ces reliques est déterminée en interactions hors équilibre.

La particule Kaluza-Klein

La théorie de Kaluza-Klein est construite autour de l'existence d'une cinquième dimension invisible compacte dans l'espace, en plus des quatre dimensions spatio-temporelle que nous connaissons (hauteur, largeur, profondeur et temps). Cette théorie, précurseur de la théorie des cordes, prédit l'existence d'une particule qui pourrait être une particule de matière noire, qui aurait la même masse que 550 à 650 protons [22].

WIMPzillas

Des particules superlourdes dans la gamme de masse $10^{21} - 10^{28} eV$, également connues sous le nom de WIMPzillas, qui interagissent encore plus faiblement que les *WIMPS*, auraient pu être produites au début de l'Univers et pourraient représenter une matière noire froide.

Autres candidats

La matière noire légère scalaire, les Monopoles Magnétiques, les Cordes cosmiques, candidats supersymétriques (neutralino, sneutrino, gravitino, axino) ...etc.

3.4 Diverses techniques de détection de la matière noire

Il y a un énorme effort et un large éventail d'expériences utilisant différentes techniques pour détecter les particules de \mathcal{DM} , en particulier les *WIMPS*. Les techniques de détection sont généralement divisées en trois types (voir Figure 3.5) :

1. Production de particules de matière noire dans des accélérateurs,
2. Détection directe par diffusion élastique des particules de matière noire sur les noyaux cibles,
3. Observation indirecte des particules de la matière noire par la détection des produits d'annihilation ou de désintégration des particules de matière noire.

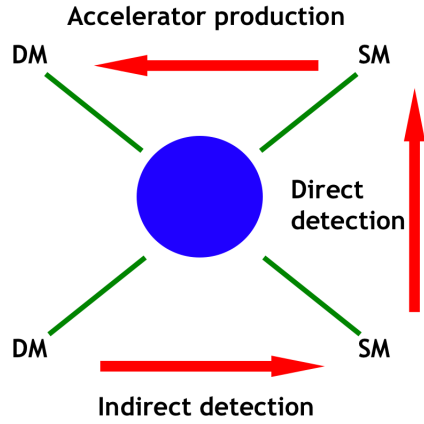


FIGURE 3.5 – Représentation des trois techniques possibles pour détecter la matière noire [21].

3.4.1 Production dans les accélérateurs ($MS + MS \rightarrow DM + DM$)

Des particules de DM peuvent être produites lorsque des particules du MS entrent en collision dans les accélérateurs, à des énergies extrêmement élevées, tel que dans le LHC qui est un accélérateur harmonique proton-proton fonctionnant à $13TeV$ [23].

Plusieurs théories prévoient que les particules de matière noire seraient assez stables et neutres et donc suffisamment légères pour être produites au LHC . Dans ce cas, elles traverseraient les détecteurs sans être repérées. Elles seraient toutefois porteuses d'énergie et d'impulsion. Il serait donc possible de déduire leur existence de l'énergie et de l'impulsion manquantes après une collision [15].

Malgré l'importance des collisionneurs dans la découverte de nouvelles particules, ils n'ont pas encore découvert les particules de DM . De plus, même en cas de découverte de particule, rien n'indique que cette dernière compose bien la DM , car les accélérateurs ne peuvent pas, par exemple, démontrer que son temps de vie est bien supérieur à l'âge de l'Univers. Pour cela, d'autres modes de détection sont aussi possibles.

3.4.2 Détection directe ($DM + MS \rightarrow DM + MS$)

Le principe de la détection directe (DD) repose sur la diffusion élastique d'une particule de DM sur un noyau cible. Techniquement, on place un dispositif très sensible, qui contient une grande quantité de certains éléments, qui peuvent détecter de très petits mouvements et interactions des atomes qu'il contient. Si le halo de la Voie lactée est composé de $WIMPS$, alors beaucoup d'entre eux devraient traverser la Terre et donc le détecteur. Ce faisant, il est possible de rechercher l'interaction de telles particules avec la matière ordinaire, en enregistrant l'énergie de recul des noyaux résultant de la diffusion élastique des $WIMPS$ sur les noyaux cibles d'un détecteur.

Cette détection a été proposée pour la première fois par Goodman et Witten et puis développé encore plus par Drukier et Stodolsky, Freese et Spergel au milieu des années 1980 [28].

Le flux de matière noire

Pour avoir une idée du flux de \mathcal{DM} , nous estimons d'abord que $WIMP$ se déplace dans notre système, avec le même potentiel gravitationnel qui agit sur le Soleil. Nous supposons donc que la vitesse de $WIMP$ est la même que la vitesse des étoiles aux bords de la galaxie à proximité du Soleil, c'est-à-dire le référentiel au repos local (\mathcal{LSR} pour Local Standard of Rest), qui est d'environ $v = 220km/s = 0.75 \times 10^{-3}c$ et sa masse quelque part dans la galaxie est d'environ $m_\chi = 100GeV/c^2$. On retrouve clairement l'utilisation d'énergie cinétique de $WIMP$

$$T = \frac{1}{2}m_\chi v^2 = 28keV \sim 30keV \quad (3.14)$$

De plus, la densité locale de $WIMP$, au niveau de l'orbite solaire, est $\rho_0 = 0.3GeV/cm^3$. Ainsi, la densité nombre de particules est $n_0 = \rho_0/m_\chi$. Nous obtenons donc le flux de matière noire :

$$\phi_0 = n_0 \times v = \frac{\rho_0}{m_\chi} \times v = 6.6 \times 10^4 cm^{-2} s^{-1} \quad (3.15)$$

Malgré ce grand flux attendu sur Terre, cela rend la détection directe difficile car le détecteur peut distinguer tout signal parasite, qui provient des rayons cosmiques. C'est pourquoi les expériences de détection directe se font sous une certaine épaisseur de couche terrestre. A titre d'exemple, le flux de rayons cosmiques à 1600m sous terre est environ un million de fois plus faible qu'à la surface.

Le taux d'événement et énergie de recul

À partir d'expériences de DD , nous pouvons obtenir le taux d'événements dR/dE_R pour la diffusion élastique du $WIMP$ et l'énergie de recul E_R des noyaux, comme suit :

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_0}{m_N m_\chi} \int_{v_{min}}^{v_{max}} v f(v) \frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R}(v, E_R) dv \quad (3.16)$$

$$E_R = \frac{q^2}{2m_N} = \frac{2\mu_N^2 v^2}{m_N} \times \cos^2 \theta_R \quad (3.17)$$

où :

- m_N est la masse du noyau ;
- m_χ est la masse de $WIMP$;
- v et $f(v)$ sont la vitesse et la fonction de distribution du $WIMP$ dans le halo galactique, respectivement ;
- $d\sigma_{\chi N}/dE_R(v, E_R)$ est la section efficace différentielle du $WIMP$ -noyau
- p est le transfert d'impulsion ;
- θ_R est l'angle entre la vitesse initiale du $WIMP$ et la direction du recul nucléaire du noyau (voir Figure 3.6) ;
- μ_N est la masse réduite entre le $WIMP$ et le noyau :

$$\mu_N = \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N} \quad (3.18)$$

- $v_{max} \simeq 544Km/s$ est la vitesse d'échappement du $WIMP$ dans le référentiel terrestre ;
- La vitesse minimale nécessaire à un $WIMP$ pour créer un recul nucléaire d'énergie E_R est :

$$v_{min} = \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu_N}} \quad (3.19)$$

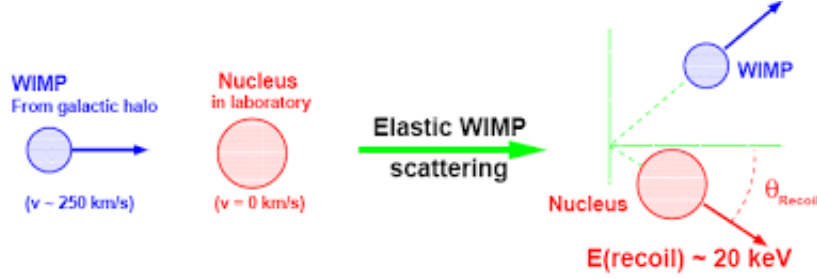


FIGURE 3.6 – Schéma du principe de la détection d'un $WIMP$ par le noyau d'un détecteur. ⁴

Section efficace d'interaction $WIMP$ -noyau

La section efficace d'interaction $WIMP$ -noyau dépend fondamentalement du couplage entre les $WIMPS$ et les quarks. Cependant, étant donné que la section efficace $WIMP$ -noyau intervient dans le calcul du taux d'événement, la distribution de quarks dans le nucléon et la distribution de nucléons dans le noyau vont jouer un rôle crucial. En général, la section efficace du $WIMP$ -noyau peut être séparée en une contribution indépendante du spin (SI pour Spin-Independent) et une contribution dépendante du spin (SD pour Spin-Dependent) [30] :

$$\frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} = \left(\frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} \right)_{SD} + \left(\frac{d\sigma_{\chi N}}{dE_R} \right)_{SI} = \frac{m_N}{2\mu_N^2 v^2} \left(\sigma_0^{SD} F_{SD}^2(E_R) + \sigma_0^{SI} F_{SI}^2(E_R) \right) \quad (3.20)$$

où :

- σ_0^{SD} et σ_0^{SI} sont les sections efficaces dépendantes du spin et indépendantes du spin à transfert d'impulsion nul, respectivement [29, 30] ;
- F_{SD} et F_{SI} sont les facteurs de forme nucléaire, qui dépendent du transfert d'impulsion, $p = \sqrt{2m_N E_R}$ [29, 30].

Le taux d'événements devient donc :

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_0}{2m_\chi \mu_N^2} \left(\sigma_0^{SD} F_{SD}^2(E_R) + \sigma_0^{SI} F_{SI}^2(E_R) \right) \int_{v_{min}}^{max} \frac{f(v)}{v} d^3v \quad (3.21)$$

La distribution de vitesse de $WIMP$ dans le halo galactique

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.2.1, la mesure des courbes de rotation montre que la vitesse de rotation des étoiles est constante en fonction de la distance au centre galactique, à de grandes distances, dans le halo galactique. Il est possible de montrer que l'on peut expliquer ce phénomène en considérant un modèle de halo standard (SHM pour Standard Halo Model) [29, 30], qui décrit une sphère isotherme anisotrope de particules sans collisions

4. <https://www.desy.de/~horns/lectures/physikv/chap11.4.pdf>

avec un profil de densité $\rho(r) \propto r^{-2}$. La distribution de vitesse dans le halo Galactique est une distribution de Maxwell-Boltzmann [30]

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(\frac{-v^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad (3.22)$$

où la dispersion de vitesse est liée à la vitesse circulaire locale $\sigma_v = \sqrt{3/2}v_c$ avec $v_c = 220 \text{ km/s}$.

La distribution de vitesse $WIMP$ dans le halo Galactique est calculée en effectuant une transformation galiléenne dépendant du temps :

$$v \rightarrow \tilde{v} = v + v_e(t) \quad (3.23)$$

Le mouvement de la Terre par rapport au halo Galactique, $v_e(t)$, a trois composantes : le mouvement du référentiel au repos local, $v_{\mathcal{LSP}}$, le mouvement particulier du Soleil par rapport au \mathcal{LSR} , v_{\odot} et l'orbite de la Terre autour du Soleil v_{orbit} , qui a une dépendance temporelle explicite

$$v_e(t) = v_{\mathcal{LSP}} + v_{\odot} + v_{orbit} \quad (3.24)$$

En particulier, le mouvement de la Terre autour du Soleil donne lieu à une modulation annuelle du taux d'événement. En fait, le $v_e(t)$ peut être exprimé comme [15, 16]

$$v_e(t) = 220 (1.05 + 0.07 \cos[2\pi(t - t_m)/an]) \quad (3.25)$$

où t_0 est approximativement le début de juin et les temps sont en unités d'années. Le résultat de cet effet est un $\sim 7\%$ de variation du flux $WIMP$ et du taux de détection directe au cours de l'année [16].

Efforts expérimentaux

La \mathcal{DD} de la matière noire est devenue un domaine de recherche très dynamique au cours des dernières années. Il y a environ 20 expériences en cours ou en préparation dans le monde entier. Dans ces nombreuses expériences, des techniques ont été développées pour mesurer le recul nucléaire produit par diffusion de matière noire. Certaines de ces méthodes incluent l'observation de la scintillation (utilisé par DAMA/LIBRA [31] et KIMS [32]), phonons (utilisé par CRESST [33]) et ionisation (utilisée par GENIUS [34] et COGENT [35]).

Certaines expériences utilisent plusieurs techniques, telles que CDMS [36] et EDELWEISS [37] qui utilisent à la fois des techniques d'ionisation et de phonons, CRESST-II [38] qui utilise à la fois les techniques de scintillation et de phonons et le XENON100 [39], ZEPLIN-II [40], ZEPLIN-III [41], DarkSide [42], qui utilisent à la fois la scintillation et techniques d'ionisation. L'utilisation d'un si large éventail de techniques et de technologies est importante non seulement pour accélérer les progrès sur le terrain, mais aussi pour varier les erreurs d'expérience en expérience, permettant une évaluation critique d'un signal positif.

- **phonons** : Une vibration dans le réseau cristallin du détecteur a causé, par le léger mouvement d'un noyau sur lequel un $WIMP$ a reculé, détectée, comme une élévation de température dans le noyau. Ce type de détecteurs est un système de bolomètres extrêmement sensible et situé autour du détecteur, permettant d'enregistrer toute variation de température.

- **Ionisation** : Une particule incidente donne à un électron dans le détecteur suffisamment d'énergie pour échapper à l'attraction de son noyau. Un petit champ électrique est mis en place

dans le détecteur pour pousser la nouvelle charge vers une paroi du détecteur (les électrons sont collectés à la surface du cristal) où elle peut être enregistrée et comptée comme un événement d'ionisation.

- **scintillation** : La scintillation est causée lorsqu'un électron absorbe suffisamment d'énergie pour atteindre un état d'énergie supérieur. Après un temps court, l'électron perdra cette énergie en émettant un photon.

Les résultats des expériences de détection directe sont donnés sous forme d'une figure, où la section efficace d'interaction de la particule *WIMP* avec la matière ordinaire est donnée en fonction de la masse de la particule *WIMP* (Voir la Figure 3.7). Cette Figure dresse le bilan de la détection directe de *WIMPS* dans le cas des interactions indépendantes de spin, à travers les régions de détection de signal ou bien d'exclusion dans le diagramme section efficace-masse du *WIMP*.

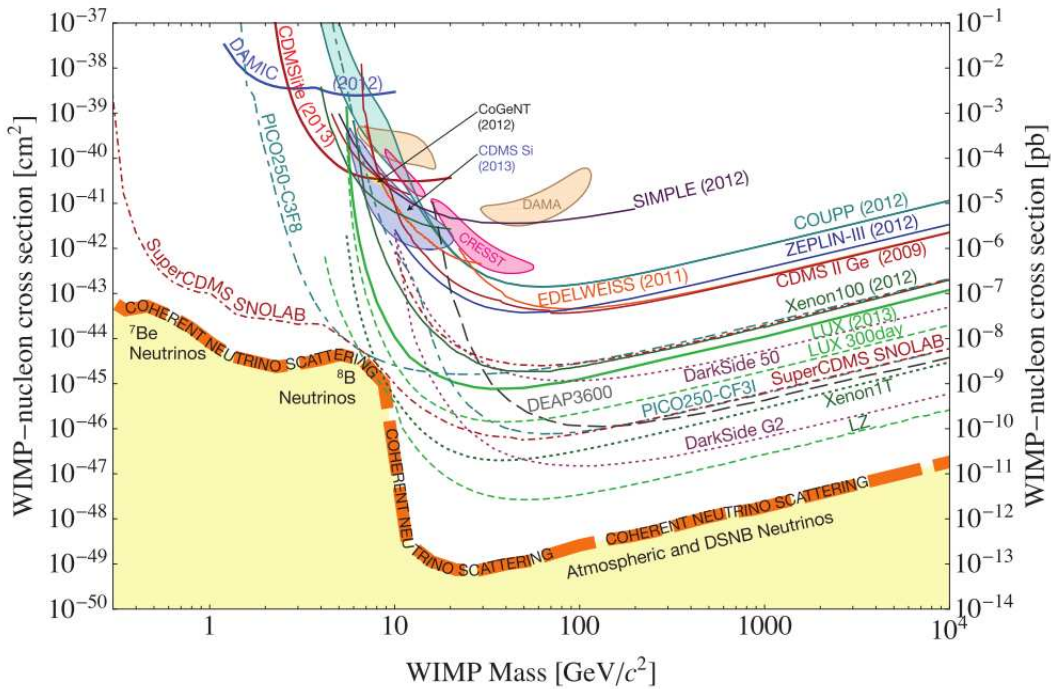


FIGURE 3.7 – Courbes d'exclusion dans le diagramme section efficace indépendante du spin en fonction de la masse par les différentes expériences de détection directe de matière noire (courbes solides). Les courbes sont fermées dans le cas d'une détection supposée. Les courbes en pointillées sont les limites futures attendues. La ligne pointillée orange indique la sensibilité à partir de laquelle les expériences de détection directe commence à voir les neutrinos astrophysiques [30].

3.4.3 Détection indirecte ($DM + DM \rightarrow MS + MS$)

La détection indirecte (*DI*) de matière noire est une technique qui consiste à observer les produits de désintégration de la matière sombre (*WIMP*) lors de son annihilation ou de sa

coannihilation (c'est-à-dire annihilation en \mathcal{DM} de saveurs différentes).

Comme on s'intéresse à l'annihilation ($WIMP_1$ - $WIMP_1$), la quantité physique cruciale est évidemment le taux d'annihilation associé [16]. Ce dernier étant proportionnel au carré de la densité de \mathcal{DM} : $\Gamma_A \propto \rho_{\mathcal{DM}}^2$ [16, 15]. Il est alors judicieux de pointer les détecteurs vers les régions où la densité est la plus élevée. Ces régions, par exemple, le Soleil, la Terre ou bien le centre galactique sont donc des endroits propices aux observations. Les produits issus de l'annihilation incluent notamment les rayons gamma, les neutrinos et l'antimatière [16]. Cette observation donne des informations très importantes pour la recherche de la matière noire.

Rayons gamma

On pense que les annihilations $WIMP$ - $WIMP$, donnant lieu à des rayons gamma, se produisent le plus fréquemment dans le centre galactique. L'un des processus peut avoir lieu à travers l'annihilation de $WIMP$ qui donne un quark et antiquark, qui produisent ensuite un jet à partir duquel un spectre de rayons gamma est libéré.

Une deuxième forme de production de rayons gamma est la désintégration des $WIMP$ directement en rayons γ ($\chi\chi \rightarrow \gamma\gamma$ ou γZ). Dans ce cas, l'énergie des photons produits est proportionnelle à la masse du $WIMP$. Si l'on considère des particules de masse électro-faible, soit d'une valeur de 100 GeV, ce sont des rayons γ de très hautes énergies. Bien que le flux soit faible et assez difficile à détecter, l'observation d'une telle raie gamma serait une indication évidente pour l'annihilation de matière noire et de sa masse (la masse du $WIMP$).

MAGIC, HESS, VERITAS et CANGAROO sont des expériences au sol d'étude des rayons gamma. Elles ont détecté un certain nombre de sources des rayons gamma de l'ordre du TeV. Le télescope spatial EGRET a établi un large catalogue de sources gamma dont beaucoup restent non-identifiées. De plus EGRET [44] a mesuré un excès de rayons gamma provenant du centre galactique. Il reste difficile d'interpréter cet excès comme provenant d'annihilation de $WIMPS$ mais plus probablement comme produit de processus astrophysiques.

L'observatoire spatial Fermi/GLAST (lancé en juin 2008) devrait prendre, améliorer la mesure du spectre des rayons γ et être complémentaire des expériences basées au sol.

Neutrinos

Les neutrinos peuvent être un autre produit important de l'annihilation de $WIMP$. Lorsque les $WIMPS$ voyagent à travers l'Univers, ils perdent de petites quantités d'énergie en raison de la diffusion des noyaux. Par conséquent, les $WIMPS$ peuvent se rassembler dans de larges puits gravitationnels tels que les objets compacts. Donc les particules de matière noire ($WIMPS$) peuvent s'accumuler dans un volume donné et augmentent leur densité jusqu'à ce que leur taux d'annihilation soit égal à la moitié du taux de capture (deux $WIMPS$ sont nécessaires pour l'annihilation, où un seul est nécessaire pour la capture). Il se trouve que le soleil réunit des conditions favorables à une telle équation pour une grande majorité des modèles, et qu'il est proche de la Terre. Le soleil est donc une source d'observation privilégiée pour l'annihilation $WIMP$ - $WIMP$ en neutrinos. Seuls les neutrinos issus d'annihilation $WIMP$ - $WIMP$ ont une chance de s'échapper de l'objet compact dans lequel s'est produite l'annihilation du fait qu'ils interagissent très faiblement avec la matière. C'est pourquoi on ne s'intéresse qu'aux neutrinos et pas aux autres produits issus de l'annihilation.

Puisque les neutrinos interagissent très faiblement, les télescopes à neutrinos doivent être

massifs pour détecter un signal significatif. Ces télescopes sont de grands réservoirs d'eau dans lesquels sont placés des photomultiplicateurs sensibles à la lumière Cerenkov produite par le passage d'un muon résultant de l'interaction du neutrino avec la matière placée devant le détecteur. L'observation des signaux venant du Soleil doit se faire quand ce dernier passe l'horizon. Ainsi, le détecteur AMANDA au pôle sud utilise des lignes de photomultiplicateurs enfouis dans la glace de calotite polaire entre 1000 et 2000 mètres de profondeur dans un cylindre de rayon 100 m, soit un volume $v \approx 0.03 km^3$. Les neutrinos reconstruits par AMANDA sont compatibles avec le flux de neutrinos atmosphériques attendu. La collaboration AMANDA a construit un détecteur dont le volume effectif est de $1 km^3$ qui se nomme Ice-Cube. Dans l'hémisphère nord, l'expérience AMANDA utilise des lignes de photomultiplicateurs placés au large de Toulon, en méditerranée.

Anti-matière

L'anti-matière peut être un excellent signal pour une annihilation $WIMP$ - $WIMP$ parce qu'elle est relativement rare dans l'univers et beaucoup de processus astrophysiques qui créent d'anti-matière dans l'univers sont bien compris. La matière noire, lorsqu'elle s'annihile en une paire quark-antiquark ($\chi\chi \rightarrow q\bar{q}$) peut, après hadronisation, produire des antiprotons. Un autre exemple de production d'anti-matière via l'annihilation de $WIMP$ - $WIMP$ est lorsque des positrons secondaires sont créés à partir des d'annihilations primaires comme W^+ , c'est-à-dire $\chi_1^0\chi_1^0 \rightarrow W^-W^+$ puis $W^+ \rightarrow e^+\nu_e$. Contrairement aux rayons gamma ou aux neutrinos, ces produits sont chargés électriquement et donc affectés par les champs magnétiques dans l'espace et perdent également de l'énergie. En raison de l'effet Compton-inverse et l'effet synchrotron, nous ne pouvons pas faire des conclusions sur les endroits où les annihilations se sont produites. Nous étudions donc le flux d'anti-matière sur l'ensemble du halo galactique et non plus sur des sources denses comme le centre galactique. Lorsqu'une particule d'anti-matière atteint l'atmosphère terrestre, elle interagit pour donner naissance à des gerbes de particules. C'est pourquoi les observatoires des rayons cosmiques d'anti-matière, doivent être en orbite, au dessus de l'atmosphère.

Le calcul de la densité relique et code MicrOmegas

4.1 Introduction

Les observations du fond diffus cosmologique suggèrent que les particules du modèle standard ont été en équilibre thermique dans l'Univers primordial. On peut supposer que les particules de matière noire hypothétiques font partie du même bain thermique. Dans ce scénario, la matière noire est une relique thermique, appelée particules *WIMPS* (Weakly Interacting Massive Particle) et produite de manière similaire aux particules du modèle standard par le biais d'un mécanisme de gel thermique (freeze-out) [47].

Cependant, la matière noire n'a peut-être jamais été en équilibre thermique et l'abondance observée de matière noire pourrait avoir été générée par un mécanisme de gel non thermique (freeze-in) impliquant des particules *FLIMPS* (Feebly Interacting Massive Particle).

Dans ce chapitre, nous allons apprendre la façon de calculer la densité relique des particules lourdes de la matière noire (*WIMPS*) et (*FLIMPS*). D'abord, nous allons utiliser l'équation de Boltzmann pour trouver une valeur théorique pour la densité relique dans les deux scénarios freeze-out et freeze-in. Ceci permet d'éclaircir les étapes de calcul implémentées dans le code MicrOmegas. Nous procédons alors au calcul numérique à travers le code MicrOmegas et dans le cadre du modèle *IDM*.

4.2 Densité relique dans le mécanisme du freeze-out

Dès les années 1965, on s'est aperçu que si une nouvelle particule *WIMP*, (qu'on notera χ) stable existait aux premiers âges de l'Univers, elle pourrait avoir actuellement une abondance cosmologique considérable. Cette particule χ , de masse m_χ , était en équilibre thermique et abondante dans l'Univers primordial, tant que la température de l'Univers T était supérieure à la masse de la particule m_χ ($T \gg m_\chi$).

Son abondance à l'équilibre serait maintenue dû à l'annihilation entre cette particule χ et son antiparticule $\bar{\chi}$ en éléments plus légers X ($\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}$) et par les réactions inverses ($X\bar{X} \rightarrow \chi\bar{\chi}$). Lorsque l'univers se refroidit à des températures $T \ll m_\chi$, l'abondance de matière

noire (la densité de particule χ) chute exponentiellement à cause du facteur de Boltzmann $\exp(-m_\chi/T)$ jusqu'au moment où le taux d'expansion H de l'Univers devient plus rapide que le taux des réactions d'annihilation Γ_χ .

A ce moment, l'abondance des particules de matière noire devient figée et totalement découplée du bain thermique. On parle alors de freeze-out (voir la Figure 4.1). Le mécanisme de freeze-out se produit généralement à une température d'environ 20 à 30 fois inférieure à la masse de la particule de matière noire *WIMP* [50].

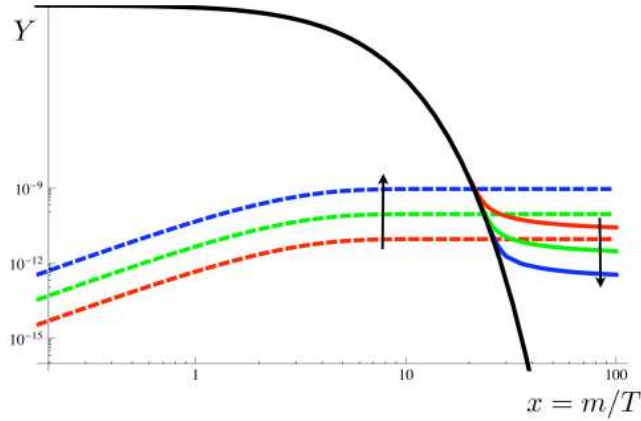


FIGURE 4.1 – Évolution de la densité relicue pour le freeze-out (lignes pleines de couleur) et freeze-in (pointillé de couleur) en fonction $x = m/T$, s'écartant de la densité d'équilibre (noire plein). Les flèche del'augmentation de la force de couplage pour les deux processus [51].

4.2.1 Équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann est une équation intégral-différentielle de la théorie cinétique et c'est l'une des équations fondamentales de la statistique hors équilibre qui décrit l'évolution de la fonction de distribution d'espace des phases $f(\vec{x}, \vec{v})$ d'une particule de matière noire *WIMP* (notée χ) dans le halo. Cela donne la probabilité $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3x d^3v$ de trouver la particule dans un volume élémentaire $d^3x d^3v$. La conservation des probabilités impose

$$\int f(\vec{x}, \vec{v})d^3x d^3v = 1 \quad ; \quad \forall t \quad (4.1)$$

L'équation de Boltzmann indique que :

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f] \quad (4.2)$$

où \hat{L} et \hat{C} représentent respectivement les opérateurs de Liouville (c'est-à-dire la partie décrivant la dynamique) et l'opérateur de collision.

L'équation (4.2) permet de décrire la matière noire à travers ses interactions potentielles au cours de l'évolution de l'Univers.

L'opérateur de Liouville

L'opérateur de Liouville donne, pour une matière noire assimilée à un fluide, l'évolution de sa distribution d'espace des phases f . En d'autres termes, il renseigne sur le taux de variation en fonction du temps, le long du flux de matière noire. Il dépend du modèle cosmologique de l'Univers et de ses caractéristiques. La forme la plus générale de cet opérateur, en relativité générale, est :

$$\hat{L}[f] = \frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{d\tau} = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\beta\gamma}^u p^\beta p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \quad (4.3)$$

Lorsque l'Univers est homogène et isotrope, ce qui semble l'être d'après les résultats expérimentaux, il est plus simple de travailler avec la forme covariante de \hat{L} . En effet, avec la métrique de \mathcal{FLRW} , la densité d'espace des phase est isotrope et homogène et ne dépend alors plus que de l'énergie des particules E et du temps t . Dans ce cas là, l'opérateur de Liouville prend la forme suivante :

$$\hat{L}[f] = p^0 \frac{\partial f}{\partial x^0} - \Gamma_{\beta\gamma}^0 p^\beta p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^0} = E \frac{\partial f}{\partial t} - \Gamma_{\beta\gamma}^0 p^\beta p^\gamma \frac{\partial f}{\partial E} \quad (4.4)$$

Le calcul des symboles de Christoffel donne (voir Annexe B)

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} = -H g_{ij}.$$

D'où l'équation (4.4) devient :

$$\hat{L}[f] = E \frac{\partial f}{\partial t} - H(-g_{ij} p^i p^j) \frac{\partial f}{\partial E} = E \frac{\partial f}{\partial t} - H |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}, \quad (4.5)$$

où $H = \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble. Il est plus commode d'écrire cette équation non plus en fonction de f , mais plutôt en fonction de la densité de particules n

$$n = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(E, t) \quad (4.6)$$

où g est le nombre de degrés de liberté de la particule considérée. Ainsi l'équation (4.5) prend la forme :

$$g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{L}[f]}{E} = \frac{\partial n}{\partial t} - gH \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} \quad (4.7)$$

L'hypothèse d'isotropie permet d'écrire $d^3p = 4\pi p^2 dp$ et $E dp = p dp$ et après une intégration partie, on obtient alors :

$$\begin{aligned} g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{L}[f]}{E} &= \dot{n} - \frac{gH}{2\pi^2} \int d\vec{p} \frac{\vec{p}^4}{E} \frac{\partial \vec{p}}{\partial E} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \\ &= \dot{n} - \frac{gH}{2\pi^2} \int d\vec{p} \vec{p}^3 \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \dot{n} - \frac{gH}{2\pi^2} \left\{ [p^2 f]_0^\infty - \int_0^\infty 3p^2 f dp \right\} \\ &= \dot{n} + 3H \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f \end{aligned} \quad (4.8)$$

Alors :

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \hat{L}[f] = \frac{dn}{dt} + 3Hn \quad (4.9)$$

Partant de l'opérateur de Liouville exprimé en terme de la fonction de distribution d'espace des phases, on s'est ramené à une expression faisant intervenir la densité de particules n . L'équation de Boltzmann (4.2) peut alors se réécrire :

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \hat{L}[f] = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \hat{C}[f] \quad (4.10)$$

et avec l'équation (4.9), on obtient :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \hat{C}[f] \quad (4.11)$$

L'opérateur de collision

L'opérateur de collision \hat{C} inclut les interactions entre les particules de \mathcal{DM} , par exemple les $WIMP$, notées χ_i et les particules du \mathcal{MS} notées X_i dans le bain thermique. Cet opérateur peut prendre une forme compliquée selon les interactions autorisées des particules.

Dans le cas de l'équilibre thermique, l'opérateur de collision \hat{C} est défini pour les réactions d'annihilation du type $\chi_1\bar{\chi}_2 \leftrightarrow X_3\bar{X}_4$, comme [43] :

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \hat{C}[f] = & \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi^4) \times \\ & \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \left[f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) |M_{34 \rightarrow 12}|^2 - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) |M_{12 \rightarrow 34}|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

où :

- f_i est la fonction de distribution d'espace de phase, pour la particule i ;
- Le signe moins $-$ s'applique aux fermions et le signe plus $+$ aux bosons ;
- Le terme $|M_{x \rightarrow y}|$ est l'élément de matrice pour le processus $x \rightarrow y$;
- Le delta de Dirac $\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ assure la conservation des quadri-impulsions.

Il est possible de réduire l'équation (4.12) sous une forme beaucoup plus maniable grâce aux étapes suivantes :

Le cas non-relativiste :

Pour ce cas, la température de chaque espèce satisfait $T_i \ll E_i - \mu_i$. On peut alors négliger le facteur \pm provenant de la statistique. De plus les facteurs $(1 \pm f_i)$ peuvent être estimés à 1, ce qui simplifie les calculs. Pour cela, la fonction de distribution peut s'écrire comme suit :

$$f \simeq \exp\left(\frac{\mu - E}{T}\right) \quad (4.13)$$

Par conséquent, la dernière ligne de l'équation (4.12) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) |M_{34 \rightarrow 12}|^2 - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) |M_{12 \rightarrow 34}|^2 \\ = e^{-(E_1 + E_2)/T} \left[e^{(\mu_3 + \mu_4)/T} - e^{(\mu_1 + \mu_2)/T} \right] |M|^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

où nous avons utilisé la conservation de l'énergie : $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ et la conservation de la symétrie \mathcal{CP} : $|M_{12 \rightarrow 34}|^2 = |M_{34 \rightarrow 12}|^2 = |M|^2$.

Maintenant, nous pouvons exprimer l'équation (4.14) par des densités de particules n_i et des densités de particules en équilibre n_i^{eq} , où :

$$\begin{aligned} n_i &= g_i e^{\frac{\mu_i}{T}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{E_i}{T}} \\ n_i^{eq} &= g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{E_i}{T}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Donc l'équation (4.14) devient :

$$e^{-(E_1+E_2)/T} \left[e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T} \right] |M|^2 = e^{-(E_1+E_2)/T} \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{eq} n_2^{eq}} \right] |M|^2 \quad (4.16)$$

avec

$$n_i/n_i^{eq} = \exp(\mu_i/T) \quad (4.17)$$

Enfin, nous pouvons substituer l'équation (4.16) dans la dernière ligne de l'équation (4.12)

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E} \hat{C}[f] &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} e^{(-E_1+E_2)/T} \\ &\left[\int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi^4) \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |M|^2 \right] \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{eq} n_2^{eq}} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

De plus, la relation bien connue reliant la section efficace σ à l'élément de matrice permet d'écrire [43] :

$$\left[\int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi^4) \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |M|^2 \right] = 4g_1 g_2 \sigma \sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} \quad (4.19)$$

En remplaçant l'équation (4.19) dans l'équation (4.18), nous trouvons :

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E} \hat{C}[f] = g_1 g_2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \sigma v_M e^{(-E_1+E_2)/T} \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{eq} n_2^{eq}} \right] \quad (4.20)$$

où v_M est la vitesse relative de Møller (voir Annexe C.1), qui est définie comme :

$$v_M = \sqrt{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 - |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|^2} = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{E_1 E_2} \quad (4.21)$$

Sachant que la moyenne thermique de la section efficace $\langle \sigma v_M \rangle$, multipliée par la vitesse relative, est définie comme :

$$\langle \sigma v_M \rangle = \frac{g_1 g_2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \sigma v_M e^{(-E_1+E_2)/T}}{n_1^{eq} n_2^{eq}}, \quad (4.22)$$

On peut enfin réécrire l'opérateur de collision sous sa forme standard

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E} \hat{C}[f] = n_1^{eq} n_2^{eq} \langle \sigma v_M \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{eq} n_2^{eq}} \right] \quad (4.23)$$

En considérant que les particules 3 et 4 sont en équilibre thermique avec le bain de photons, et si les particules 1 et 2 sont identiques, nous concluons que : $n_3 = n_3^{eq}$, $n_4 = n_4^{eq}$ et $n_1 = n_2 = n$, $n_1^{eq} = n_2^{eq} = n^{eq}$. L'équation (4.23) devient :

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \hat{C}[f] = \langle \sigma v_M \rangle \left[(n^{eq})^2 - n^2 \right] \quad (4.24)$$

En injectant la forme finale de l'opérateur de collision (4.24), l'équation de Boltzmann (4.11) devient comme ceci :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \langle \sigma v_M \rangle \left[(n^{eq})^2 - n^2 \right] \quad (4.25)$$

Reformulation de l'équation de Boltzmann

La densité de particules décroît avec l'expansion de l'Univers et il est utile d'évaluer cet effet en définissant la quantité $Y = n/s$, où $s = S/a^3$ est la densité entropie et l'entropie S est constante avec le temps (c'est-à-dire $dS/dt = 0$. Pour rappel voir chapitre 1). Nous obtenons alors :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d(sa^3)}{dt} = a^3 \frac{ds}{dt} + 3sa^2 \dot{a} = 0 \iff \frac{ds}{dt} + 3Hs = 0 \quad ; \quad (H = \frac{\dot{a}}{a}) \quad (4.26)$$

Et la dérivée de Y est :

$$\frac{dY}{dt} = \dot{Y} = \frac{\dot{n}s - n\dot{s}}{s^2} = \frac{\dot{n} + 3Hn}{s} \quad (4.27)$$

Par conséquent, (4.25) se réécrit comme :

$$\frac{dY}{dt} = s \langle \sigma v_M \rangle \left[(Y^{eq})^2 - Y^2 \right] \quad (4.28)$$

où $Y^{eq} = n^{eq}/s$.

L'équation ci-dessus est exprimée en fonction de la variable du temps t . Il est préférable d'utiliser plutôt une variable qui dépend de la température. Ainsi, on introduit la variable $x = m_\chi/T$. En ré-exprimant la dérivée temporelle relativement à x , on a :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dY}{dx} = -\frac{m_\chi}{T^2} \frac{dT}{dt} \frac{dY}{dx} \quad (4.29)$$

De plus :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dT} \frac{dT}{dt} = -3Hs \iff \frac{dT}{dt} = -3Hs \frac{1}{ds/dT} \quad (4.30)$$

En remplaçant les équations (4.29) et (4.30) dans équation (4.28), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= -\frac{T^2}{m_\chi} \frac{1}{dT/dt} \frac{dY}{dt} \\ &= \frac{T^2}{m_\chi} \frac{1}{3H} \frac{ds}{dT} \langle \sigma v_M \rangle \left[(Y^{eq})^2 - Y^2 \right] \\ &= \frac{m_\chi}{x^2} \frac{1}{3H} \frac{ds}{dT} \langle \sigma v_M \rangle \left[(Y^{eq})^2 - Y^2 \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aussi, en utilisant la densité d'énergie (équation (1.64)) et la dérivée densité d'entropie (équation (1.77)) en termes de degrés de liberté effectifs $g_{eff}(T)$ (équation (1.66)) et $h_{eff}(T)$

(équation (1.78))

$$\rho = g_{eff}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (4.32)$$

$$s = h_{eff}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3 \Rightarrow \frac{ds}{dT} = \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{dh_{eff}(T)}{dT} T^3 + 3h_{eff}(T) T^2 \right) \quad (4.33)$$

et par l'utilisation de l'équation de Friedmann (1.49) dans un univers dominé par la radiation

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \pi T^2 \sqrt{\frac{4\pi G g_{eff}(T)}{45}}, \quad (4.34)$$

on obtient :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{m_\chi}{x^2} \sqrt{\frac{\pi}{45G}} \frac{1}{\sqrt{g_{eff}(T)}} \left(\frac{dh_{eff}(T)}{dT} \frac{T}{3} + h_{eff}(T) \right) \langle \sigma v_M \rangle [(Y^{eq})^2 - Y^2] \quad (4.35)$$

On pose :

- $M_p = 1/\sqrt{G}$ (masse de Planck);
- et on définit $\sqrt{g^*}$ par :

$$\sqrt{g^*} = \frac{h_{eff}(T)}{\sqrt{g_{eff}(T)}} \left[1 + \frac{T}{3h_{eff}(T)} \frac{dh_{eff}(T)}{dT} \right] \quad (4.36)$$

- et Λ' par : $\Lambda' = m_\chi M_p \sqrt{\frac{\pi}{45}} \sqrt{g^*}$.

L'équation (4.35) prend alors la forme :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\Lambda'}{x^2} \langle \sigma v_M \rangle [(Y^{eq})^2 - Y^2] \quad (4.37)$$

Solution approximative

Pour obtenir une solution numérique itérative approximative de l'équation (4.37), on définit $\Delta = Y - Y^{eq}$ (qui exprime la déviation de l'équilibre), d'où :

$$\Delta' = -\frac{dY^{eq}}{dx} - \frac{\Lambda'}{x^2} \langle \sigma v_M \rangle \Delta [2Y^{eq} + \Delta] \quad ; \quad (\Delta' = \frac{d\Delta}{dx}) \quad (4.38)$$

que nous pouvons maintenant résoudre numériquement dans différentes limites [8] :

- Avant le freeze-out, lorsque $x \ll x_{out}$, Y est très proche de Y^{eq} ; donc les deux Δ et Δ' sont petits et donc une solution approximative est obtenue en prenant $\Delta' = 0$,

$$\Delta \simeq -\frac{x^2}{\langle \sigma v_M \rangle \Lambda'} \frac{dY^{eq}}{dx} \quad (4.39)$$

D'après les relations (1.61) et (4.33), la quantité Y^{eq} s'exprime en terme de la variable x comme suit :

$$\begin{aligned} Y^{eq} &= \frac{n^{eq}}{s} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{45}{2\pi^2} \frac{g}{h_{eff}(T)} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} \\ &= K x^{\frac{3}{2}} e^{-x} \end{aligned} \quad (4.40)$$

où n^{eq} , K sont :

$$n^{eq} = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}, \quad K = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{45}{2\pi^2} \frac{g}{h_{eff}(T)} \quad (4.41)$$

Ainsi la dérivée de Y^{eq} s'écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{dY^{eq}}{dx} = -Y^{eq} + \frac{3}{2}Y^{eq}x^{-1} \\ = -Y^{eq} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases} ; \quad (\text{limite non-relativiste } x \gg 1) \quad (4.42)$$

• Après le freeze-out, lorsque $x_{out} \ll x$, Y^{eq} est négligeable, alors $\Delta = Y$. L'équation (4.38) devient alors :

$$\frac{1}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{dx} = -\Lambda' \frac{\langle \sigma v_M \rangle}{x^2} \quad (4.43)$$

En intégrant cette équation de x_{out} à ∞ , nous utilisons la solution approximative du système de laboratoire $\langle \sigma v_M \rangle$ (voir Annexe C.3)

$$\langle \sigma v_M \rangle = a^{(0)} + \frac{3}{2} \frac{a^{(1)}}{x} + \frac{15}{8} \frac{a^{(2)}}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (4.44)$$

où a^n indique la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\langle \sigma v_M \rangle$.

En utilisant le fait que $\Delta(x_{out}) \gg \Delta_\infty$, $Y^{eq} \rightarrow 0$ et $x_\infty \gg x_{out}$, on obtient donc une solution de Y_∞ (voir Annexe C.3)

$$Y_\infty = \sqrt{\frac{45}{\pi}} \frac{1}{m_\chi M_p \sqrt{g^*}} \frac{x_{out}}{\left[a^{(0)} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}} \right]} \quad (4.45)$$

• Pour déterminer le temps du freeze-out x_{out} , on rappelle que lorsque $x \simeq x_{out}$, Y n'est pas proche de Y^{eq} . De manière équivalente, on peut dire que Δ devient de l'ordre de Y^{eq} . En fait, nous pouvons le définir formellement à travers :

$$\Delta(x_{out}) = Y(x_{out}) - Y^{eq}(x_{out}) = Y^{eq}(x_{out}) \left(\frac{Y(x_{out})}{Y^{eq}(x_{out})} - 1 \right) = Y^{eq}(x_{out})c \quad (4.46)$$

où c est une constante numérique on peut estimer.

En injectant les équations (4.46) et (4.42) dans l'équation (4.39), on trouve :

$$Y^{eq} = \frac{x_{out}^2}{\langle \sigma v_M \rangle \Lambda' c (c+2)} \quad (4.47)$$

En faisant correspondre les équations (4.40) et 4.47, on trouve :

$$e^{-x_{out}} = \frac{x_{out}^{1/2}}{\langle \sigma v_M \rangle K \Lambda' c (c+2)} \quad (4.48)$$

On trouve ainsi la solution itérative de x_f

$$x_{out} = \ln \left[\frac{\Lambda' K c (c+2) \langle \sigma v_M \rangle}{x_{out}} \right] \quad (4.49)$$

$$= \ln \left[\frac{0.03824c(c+2)M_p m_\chi \langle \sigma v_M \rangle g_{eff}}{x_{out}^{1/2} \sqrt{g^*}} \right] \quad (4.50)$$

Détermination de la densité relique

Finalement, nous pouvons calculer la densité relique de la matière noire dont la relation est définie comme étant le rapport de la densité réelle ρ_χ à la densité critique ρ_c :

$$\Omega_{out}h^2 = \frac{\rho_\chi}{\rho_c}h^2 = \frac{m_\chi n_\chi}{\rho_c}h^2 = \frac{m_\chi s_0 Y_\infty}{\rho_c}h^2, \quad (4.51)$$

où s_0 est la densité d'entropie actuelle de l'Univers, soit 2889.2 cm^{-3} et la densité critique vaut $\rho_c = 1.05375 \times 10^{-5} h^2 \text{ GeV.cm}^{-3}$. Alors on obtient :

$$\Omega_{out}h^2 = 2.7418 \times 10^8 \frac{m_\chi}{\text{GeV}} Y_\infty \quad (4.52)$$

et en remplaçant l'équation (4.45), on trouve aussi :

$$\Omega_{out}h^2 = \frac{1.03769 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1} x_f}{M_p} \frac{1}{\sqrt{g^*} \left[a^{(0)} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}} \right]} \quad (4.53)$$

Co-annihilations, conversions et désintégrations impliquant quatre particules

Considérons que nous ayons N particules du secteur sombre différentes χ_i ($i = 1 \dots N$) qui se couplent au bain thermique de masses m_i et de degrés de liberté internes g_i . Admettons également que $m_1 \leq \dots \leq m_{N-1} \leq m_N$, tel que χ_1 est la plus légère. Ici, nous supposons également qu'il existe une sorte de symétrie Z_2 sous laquelle toutes les χ_i soient impaires et toutes les autres particules (\mathcal{SM}) soient paires. En raison de cette symétrie, toutes les χ_i se désintègrent en au moins une particule du secteur sombre. Par conséquent, il est cinématiquement interdit à la particule la plus légère du secteur sombre χ_1 de se désintégrer, ce qui la rend stable et donc un candidat viable de la \mathcal{DM} .

On a vu que l'équation de Boltzmann permettait de décrire l'évolution de la densité de particules n_i de la particule i au cours du temps d'une espèce donnée. Afin de l'écrire correctement, elle doit inclure les processus physiques pertinents, ceux ayant un impact sur la densité des particules. Pour les particules du secteur sombre donnons dans un premier temps, l'équation de Boltzmann complète, puis expliquons les différents termes présents dans l'égalité [16] :

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & -3Hn_i - \sum_{j=1}^N \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) \\ & - \sum_{j \neq i}^N \left[\langle \sigma'_{X} v \rangle_{ij} (n_i n_X - n_i^{eq} n_X^{eq}) - \langle \sigma'_{X} v \rangle_{ji} (n_j n_X - n_j^{eq} n_X^{eq}) \right] \\ & - \sum_{j \neq i}^N \left[\Gamma_{ij} (n_i - n_i^{eq}) - \Gamma_{ji} (n_j - n_j^{eq}) \right] \quad (4.54) \end{aligned}$$

- Le premier terme dans le côté droit de l'équation 4.54 est évidemment le terme dû à l'expansion de l'Univers et à fortiori à la dilution du nombre des particules par unité de co-volume.
- Le second terme exprime la co-annihilation et correspond à tous les diagrammes du type $\chi_i \chi_j \rightarrow XY$. On peut tout à fait avoir $i = j$ et dans ce cas on retrouve l'annihilation.

$$\sigma_{ij} = \sum_{X,Y} \sigma(\chi_i \chi_j \rightarrow XY) \quad (4.55)$$

- Le troisième terme décrit les conversions dans les processus $\chi_i X \rightarrow \chi_j Y$ (n_i diminue) et $\chi_j Y \rightarrow \chi_i X$ (n_i augmente) par la diffusion d'une particule du secteur sombre dans le bain thermique.

$$\sigma'_{ij} = \sum_Y \sigma(\chi_i X \rightarrow \chi_j Y) \quad (4.56)$$

- Le dernier terme explique les désintégrations de χ_i , avec le taux de désintégration Γ inclus

$$\Gamma_{ij} = \sum_{X,Y} \Gamma(\chi_i \rightarrow \chi_j XY) \quad (4.57)$$

Selon l'équation (4.22), on peut définir la moyenne thermique par la relation :

$$\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle = \frac{\int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \sigma_{ij} v_{ij} f_i f_j}{\int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} f_i f_j} \quad (4.58)$$

avec f_i est sa fonction de distribution dans l'espace de phase et comme dans les sections précédentes, nous assumerons l'approximation de Maxwell-Boltzmann qui définit $f_i = e^{-\frac{E_i}{T}}$.

Généralement, les temps de vie des particules de \mathcal{DM} χ_i autres que la plus légère qui est stable, sont très inférieurs à l'âge de l'Univers. Ainsi, après un certain temps, on peut considérer que toutes ces particules se sont désintégrées, de sorte qu'il ne reste plus que la particule la plus légère χ_1 . Ainsi, l'abondance finale n'est autre que la somme des abondances associées aux χ_i

$$n = \sum_{i=1}^N n_i \quad (4.59)$$

Si on remplace cette somme dans l'équation (4.54), on réalise que le troisième terme et le quatrième terme à droite de l'équation (4.54) sont identiques. Ce n'est pas surprenant puisque ces dernières ne changent pas le nombre global des particules sombres. De plus, on a vu que les distributions restaient à l'équilibre. Ça reste vrai pour les quotients. On a alors,

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \sum_{ij} \langle \sigma v \rangle_{ij} (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) \quad (4.60)$$

et

$$\frac{n_i}{n} = \frac{n_i^{eq}}{n^{eq}} \quad (4.61)$$

En combinant ces deux équations ci dessus, on peut écrire :

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn \langle \sigma_{eff} v \rangle (n^2 - (n^2)^{eq}) \quad (4.62)$$

avec

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \sum_{ij} \langle \sigma v \rangle_{ij} \frac{n_i^{eq} n_j^{eq}}{(n^2)^{eq}} \quad (4.63)$$

Edjso et Gondolo ont reformulé la moyenne thermique pour aboutir à une expression plus pratique [16](voir Annexe C).

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \frac{\int_0^\infty dp_{eff} p_{eff}^2 W_{eff} K_1\left(\frac{\sqrt{s'}}{T}\right)}{m_1^4 T \left[\sum_i \frac{g_i}{g_1} \frac{m_i^2}{m_1^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \right]} \quad (4.64)$$

où :

- K_i sont les fonctions de Bessel modifiées du second type et d'ordre i ;
- la quantité W_{eff} est définie comme :

$$W_{eff} = \sum_{ij} \frac{p_{ij} g_i g_j}{p_{11} g_1^2} W_{ij} = \sum_{ij} \sqrt{\frac{[s' - (m_i - m_j)^2][s' - (m_i + m_j)^2]}{s'(s' - 4m_1^2)}} \frac{g_i g_j}{g_1^2} W_{ij} \quad (4.65)$$

où :

- $W_{ij} = 4E_i E_j \sigma_{ij} v_{ij}$;
- p_{ij} est la quantité de mouvement de la particule χ_i ou χ_j dans le repère du centre de masse de la paire $\chi_i \chi_j$;
- et $s' = m_i^2 m_j^2 + 2E_i E_j - 2|p_i||p_j| \cos \theta$.

La procédure précédente suivant l'équation (4.25) peut alors être réappliquée pour extraire la densité relique.

4.3 Densité relique dans le mécanisme du Freeze-in

Il existe un autre mécanisme alternatif de production non thermique de la matière noire appelé freeze-in [50][51]. Dans ce mécanisme, on considère qu'au début de l'Univers primitif, les particules du modèle standard sont en équilibre thermique. On suppose aussi qu'il y existe une particule \mathcal{FLMP} χ , qui est découplé du bain thermique, car ses interactions avec les particules du \mathcal{MS} sont extrêmement faibles. Bien que les interactions soient faibles, elles peuvent conduire à une certaine production de χ via la désintégration des particules du bain. Supposons que l'abondance initiale de χ soit faible. La densité comobile na^3 de particule de χ "freezes-in" est constante à mesure que l'Univers se dilate et se refroidit. Par contre la densité n de χ augmente. Le mécanisme de freeze-in se produit à une température d'environ 2 à 5 fois inférieure à la masse de la particule en désintégration[50].

4.3.1 Freeze-in direct de la matière noire (le processus $1 \rightarrow 2$)

Dans le cas simple, la production de freeze-in est dominée par $1 \rightarrow 2$ désintégrations. Pour ce canal de production, considérons que le \mathcal{FLMP} χ est elle-même la particule de matière noire et est couplée à deux particules du bain, $\lambda \psi_1 \psi_2 \chi$. Alors pour $m_{\psi_1} > m_{\psi_2} + m_\chi$, le processus dominant de freeze-in est via la désintégration en particules plus lourdes du bain

$$\psi_1 \rightarrow \psi_2 + \chi \quad (4.66)$$

Pour trouver la densité des particules (4.11), nous allons résoudre l'équation de Boltzmann pour le processus $1 \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} + 3Hn = & \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_1}} \int \frac{d^3 p_{\psi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_2}} \int \frac{d^3 p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\psi_2}^\mu + p_\chi^\mu - p_{\psi_1}^\mu) \\ & \times \left[f_{\psi_1}(1 \pm f_{\psi_2})(1 \pm f_\chi) |M_{\psi_1 \rightarrow \psi_2 \chi}|^2 - f_{\psi_2} f_\chi (1 \pm f_{\psi_1}) |M_{\psi_2 \chi \rightarrow \psi_1}|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

On peut simplifier l'équation de Boltzmann ci-dessus, en supposant l'invariance \mathcal{CP} par rapport aux éléments de la matrice et en utilisant l'approximation $(1 \pm f_i) = 1$ (statistique de Maxwell-Boltzmann). En outre, le mécanisme de freeze-in nécessite que l'abondance initiale de χ soit négligeable. Nous pouvons donc écrire $f_\chi = 0$. Par conséquent, l'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_1}} \int \frac{d^3 p_{\psi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_2}} \int \frac{d^3 p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\psi_2}^\mu + p_\chi^\mu - p_{\psi_1}^\mu) f_{\psi_1} |M|^2 \quad (4.68)$$

En utilisant l'expression du taux de désintégration Γ_ψ (voir Annexe E.1), l'équation de Boltzmann peut s'écrire :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = 2g_{\psi_1} \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_1}} \Gamma_\psi m_{\psi_1} f_\psi = g_{\psi_1} \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 E_{\psi_1}} m_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1} f_{\psi_1} \quad (4.69)$$

Les particules du bain sont en équilibre thermique $f_{\psi_1} \simeq e^{-\frac{E_{\psi_1}}{T}}$. En écrivant l'élément d'impulsion $d^3 p = 4\pi p^2 dp$ et $pdp = EdE$, on trouve :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{m_{\psi_1} g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1}}{2\pi^2} \int_{m_{\psi_1}}^{\infty} (E_{\psi_1}^2 - m_{\psi_1}^2)^{1/2} e^{-\frac{E_{\psi_1}}{T}} dE_{\psi_1} \quad (4.70)$$

L'équation (4.70) peut être résolue en termes de fonctions spéciales (voir l'Annexe F). Donc l'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{m_{\psi_1}^2 g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1}}{2\pi^2} T K_1(m_{\psi_1}/T) \quad (4.71)$$

où $K_1(m_{\psi_1}/T)$ est la fonction modifiée de Bessel du second type, du premier ordre.

En utilisant la dérivée de la quantité $Y_\chi = n/s$ par rapport au temps, on trouve :

$$\dot{Y}_\chi = \frac{\dot{n} + 3Hn}{s} = \frac{m_{\psi_1}^2 g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1} T}{2\pi^2 s} K_1(m_{\psi_1}/T) \quad (4.72)$$

Étant donné que la température est $T = 1/a(t)$, nous avons $\dot{T} = -HT \Rightarrow dt = -\frac{dT}{HT}$. On obtient donc :

$$Y_\chi(T_{max}) - Y_\chi(T_{min}) = - \int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{m_{\psi_1}^2 g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1}}{2\pi^2} \frac{K_1(m_{\psi_1}/T)}{sH} dT \quad (4.73)$$

En utilisant la relation donnant la densité d'entropie par $s = \frac{2\pi^2}{45} h_{eff} T^3$ et $H = 1.66 T^2 \sqrt{g_{eff}}/M_p$ et en supposant que h_{eff} et $\sqrt{g_{eff}}$ sont constantes, on obtient :

$$Y_\chi(T_{max}) - Y_\chi(T_{min}) = - \frac{45}{(1.66)4\pi^4} \frac{M_p m_{\psi_1}^2 g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1}}{\sqrt{g_{eff}} h_{eff}} \int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{K_1(m_{\psi_1}/T)}{T^5} dT \quad (4.74)$$

Sachant que la variable $x = m_{\psi_1}/T$, on trouve que $dT/dx = -T^2/m_{\psi_1}$. Par conséquent, l'équation (4.74) peut être exprimée en termes de x :

$$Y_\chi(x_{max}) - Y_\chi(x_{min}) = \frac{45}{(1.66)4\pi^4} \frac{M_p g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1}}{m_{\psi_1}^2 \sqrt{g_{eff}} h_{eff}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} K_1(x) x^3 dx \quad (4.75)$$

Pour intégrer l'équation (4.75), nous utilisons les limites $x_{min} = 0$ et $x_{max} = \infty$, pour arriver au résultat suivant (voir l'Annexe F) :

$$Y_\chi(\infty) = \frac{45}{(1.66)4\pi^4} \frac{M_p g_{\psi_1} \Gamma_{\psi_1}}{m_{\psi_1}^2 \sqrt{g_{eff}} h_{eff}} \frac{3\pi}{2} \quad (4.76)$$

Enfin, la densité de particules pour le processus $1 \rightarrow 2$ produit par le mécanisme de freeze-in, est :

$$Y_\chi = \frac{135g_{\psi_1}}{8\pi^3(1.66)\sqrt{g_{eff}}h_{eff}} \left(\frac{M_p \Gamma_{\psi_1}}{m_{\psi_1}^2} \right) \quad (4.77)$$

Pour calculer la densité relique de matière noire dans ce processus, on remplace Y dans l'équation (4.52)

$$\Omega_{in} h^2 \simeq \frac{2.15 \times 10^{26} g_{\psi_1} m_\chi \Gamma_{\psi_1}}{\sqrt{g_{eff}} h_{eff} m_{\psi_1}^2} \quad (4.78)$$

En remplaçant la valeur du taux de désintégration $\Gamma_{\psi_1} = \lambda^2 m_{\psi_1} / 8\pi$ [50] et en utilisant $\Omega_{in} h^2 = 0.12$ [52], nous pouvons trouver la constante de couplage λ

$$\lambda \simeq 1.18 \times 10^{-13} \left(\frac{m_{\psi_1}}{m_\chi} \right)^{1/2} (\sqrt{g_{eff}} h_{eff})^{1/2} \quad (4.79)$$

Soit alors $\lambda \sim 10^{-13}$ en accord avec notre hypothèse initiale.

4.3.2 Freeze-in indirect de la matière noire (le processus $2 \rightarrow 1$)

Il existe d'autres possibilités dans le cadre du freeze-in concernant la production de la matière noire. Lorsque la particule \mathcal{FLMP} , est instable et se désintègre en matière noire si la masse du \mathcal{FLMP} est supérieure à la masse de la particule de la matière noire. Dans ce cas, nous étudions la possibilité la plus simple que l'interaction responsable de la freeze-in produise également la désintégration. Si χ a un couplage à deux particules de bain, $\lambda_\chi \psi_1 \psi_2$. Pour $m_\chi > m_{\psi_1} + m_{\psi_2}$, la production de matière noire est dominée par des désintégrations inverses de χ :

$$\psi_1 + \psi_2 \rightarrow \chi \quad (4.80)$$

L'équation de Boltzmann pour le processus $2 \rightarrow 1$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} + 3Hn = & \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_1}} \int \frac{d^3 p_{\psi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_2}} \int \frac{d^3 p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi^\mu - p_{\psi_1}^\mu - p_{\psi_2}^\mu) \\ & \times \left[f_{\psi_1} f_{\psi_2} (1 \pm f_\chi) |M_{\psi_1 \psi_2 \rightarrow \chi}|^2 - f_\chi (1 \pm f_{\psi_1}) (1 \pm f_{\psi_2}) |M_{\chi \rightarrow \psi_1 \psi_2}|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.81)$$

L'équation (4.81) peut être simplifiée d'avantage, comme dans la section précédente

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_1}} \int \frac{d^3 p_{\psi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_2}} \int \frac{d^3 p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi^\mu - p_{\psi_1}^\mu - p_{\psi_2}^\mu) f_{\psi_1} f_{\psi_2} |M|^2 \quad (4.82)$$

En utilisant la conservation de l'énergie

$$f_{\psi_1} f_{\psi_2} = e^{-\frac{E_{\psi_1}}{T}} e^{-\frac{E_{\psi_2}}{T}} = e^{-\frac{E_{\psi_1} + E_{\psi_2}}{T}} = e^{-\frac{E_\chi}{T}} = f_\chi^{eq}, \quad (4.83)$$

on obtient :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \int \frac{d^3 p_{\psi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_1}} \int \frac{d^3 p_{\psi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\psi_2}} \int \frac{d^3 p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi^\mu - p_{\psi_1}^\mu - p_{\psi_2}^\mu) f_\chi^{eq} |M|^2 \quad (4.84)$$

En comparant les équations (4.84) et (4.68), nous pouvons écrire la forme finale de Y_{ψ_1} comme suit :

$$Y_{\psi_1} = \frac{135g_\chi}{8\pi^3(1.66)\sqrt{g_{eff}}h_{eff}} \left(\frac{M_p \Gamma_\chi}{m_\chi^2} \right) \quad (4.85)$$

où Γ_χ est le taux de désintégration de $\chi \rightarrow \psi_1\psi_2$. En supposant que ψ_1 est la particule de la matière noire qui se sépare de l'équilibre thermique, et en plus que la contribution de freeze-in provenant des désintégrations de χ domine l'abondance conventionnelle de freeze-out de ψ_1 . Donc la densité relique finale de la matière noire est :

$$\Omega_{in}h^2 \simeq \frac{2.15 \times 10^{26} m_\psi \Gamma_\chi}{\sqrt{g_{eff}} h_{eff} m_\chi^2} \quad (4.86)$$

En remplaçant $\Gamma_\chi = \lambda^2 m_\chi / 8\pi$ [50] et $\Omega_{in}h^2 = 0.12$ [52] dans (4.86), nous obtenons la constante de couplage

$$\lambda \simeq 1.18 \times 10^{-13} \left(\frac{m_{\psi_1}}{m_\chi} \right)^{1/2} (\sqrt{g_{eff}} h_{eff})^{1/2} \quad (4.87)$$

qui est aussi de l'ordre $\sim 10^{-13}$ donc interagissant très faiblement.

4.3.3 Le processus $2 \rightarrow 2$

Après le Freeze-in direct et indirect de la matière noire, nous présenterons le cas où la particule \mathcal{FILMP} χ est scalaire et interagit avec trois particules scalaires φ_1 , φ_2 et φ_3 du bain via le couplage $\lambda\chi\varphi_1\varphi_2\varphi_3$, par les contributions suivantes :

$$\varphi_1 + \varphi_2 \rightarrow \varphi_3 + \chi \quad (4.88)$$

Compte tenu de cette interaction, nous pouvons écrire l'équation de Boltzmann comme suit :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = 3 \int \frac{d^3p_{\varphi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\varphi_1}} \int \frac{d^3p_{\varphi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\varphi_2}} \int \frac{d^3p_{\varphi_3}}{(2\pi)^3 2E_{\varphi_3}} \int \frac{d^3p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\varphi_1}^\mu + p_{\varphi_2}^\mu - p_{\varphi_3}^\mu - p_\chi^\mu) f_{\varphi_1} f_{\varphi_2} |M_{\varphi_1\varphi_2 \rightarrow \varphi_3\chi}|^2 \quad (4.89)$$

où le facteur 3 explique le fait que nous pouvons avoir $\varphi_1\varphi_2 \rightarrow \varphi_3\chi$, $\varphi_1\varphi_3 \rightarrow \varphi\chi$ et $\varphi_2\varphi_3 \rightarrow \varphi_1\chi$ contribuant au rendement \mathcal{FILMP} tous avec le même taux. On suppose que les masses des 3 particules scalaires sont négligeable devant la masse de la particule χ .

Définissons une nouvelle variable

$$\zeta = \int \frac{d^3p_{\varphi_3}}{(2\pi)^3 2E_{\varphi_3}} \int \frac{d^3p_\chi}{(2\pi)^3 2E_\chi} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\varphi_1}^\mu + p_{\varphi_2}^\mu - p_{\varphi_3}^\mu - p_\chi^\mu) \quad (4.90)$$

Par la conservation des impulsions et conservation de l'énergie, on peut écrire la variable comme

$$\zeta = \frac{1}{16\pi^2} \int \int \delta(E_{\varphi_1} + E_{\varphi_2} - E_{\varphi_3} - E_\chi) \delta^3(p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2} - p_{\varphi_3} - p_\chi) \frac{d^3p_{\varphi_3} d^3p_\chi}{E_{\varphi_3} E_\chi} \quad (4.91)$$

Pour l'intégration sur p_{φ_3} et utilisant $E = \sqrt{m^2 + p^2}$, on obtient :

$$\zeta = \frac{1}{16\pi^2} \int \delta(E_{\varphi_1} + E_{\varphi_2} - \sqrt{m_{\varphi_3}^2 + p_{\varphi_3}^2} - \sqrt{m_\chi^2 + p_\chi^2}) \frac{dp_\chi^3}{E_{\varphi_3} E_\chi} \quad (4.92)$$

L'hypothèse d'isotropie permet d'écrire $d^3p_\chi = 4\pi p_\chi^2 dp_\chi$ et en écrivant $p = -p_\chi = p_{\varphi_3}$ (car on travaille dans le repère du \mathcal{CM} , où $p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2} = p_{\varphi_3} + p_\chi = 0$), on obtient :

$$\zeta = \frac{1}{4\pi} \int \delta(\sqrt{s'} - \sqrt{m_{\varphi_3}^2 + p^2} - \sqrt{m_\chi^2 + p^2}) \frac{p^2 dp}{E_{\varphi_3} E_\chi} \quad (4.93)$$

Avec s' est la variable de Mandelstam, qui est une grandeur scalaire représentant la conservation de l'énergie et de l'impulsions (pour l'énergie du centre de masse) qui est définie comme

$$s' = (p_{\varphi_1}^\mu + p_{\varphi_2}^\mu)^2 = (E_{\varphi_1} + E_{\varphi_2})^2 \quad (4.94)$$

En faisant correspondre l'équation (4.93) à l'équation (E.6), nous pouvons écrire ζ comme

$$\zeta = \frac{1}{4\pi} \frac{p_{\varphi_3\chi}}{\sqrt{s'}}, \quad (4.95)$$

où $p_{\varphi_3\chi}$ est :

$$p_{\varphi_3\chi} = \frac{\sqrt{[s' - (m_{\varphi_3} + m_\chi)^2][s' - (m_{\varphi_3} - m_\chi)^2]}}{2\sqrt{s'}} \quad (4.96)$$

En substituant la solution de ζ et f_i dans l'équation de Boltzmann, nous trouvons :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{3}{4\pi} \int \int |M|^2 \frac{p_{\varphi_3\chi}}{\sqrt{s}} \frac{d^3p_{\varphi_1}}{(2\pi)^3 2E_{\varphi_1}} \frac{d^3p_{\varphi_2}}{(2\pi)^3 2E_{\varphi_2}} e^{-\frac{E_{\varphi_1}}{T}} e^{-\frac{E_{\varphi_2}}{T}} \quad (4.97)$$

L'élément de volume espace-impulsion peut être écrit comme [53] :

$$d^3p_{\varphi_1} d^3p_{\varphi_2} = 4\pi p_{\varphi_1}^2 dp_{\varphi_1} 2\pi p_{\varphi_2}^2 dp_{\varphi_2} \sin\theta d\theta = 4\pi |\vec{p}_{\varphi_1}| E_{\varphi_1} dE_{\varphi_1} 4\pi |\vec{p}_{\varphi_2}| E_{\varphi_2} dE_{\varphi_2} \frac{1}{2} d\cos\theta \quad (4.98)$$

où θ est l'angle entre p_{φ_1} et p_{φ_2} . Ensuite, nous changeons les variables d'intégration de $E_{\varphi_1}, E_{\varphi_2}, \theta$ à E_+, E_- et s' , données par [53]

$$E_+ = E_{\varphi_1} + E_{\varphi_2} \quad (4.99)$$

$$E_- = E_{\varphi_1} - E_{\varphi_2} \quad (4.100)$$

$$s' = m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi_2}^2 + 2E_{\varphi_1}E_{\varphi_2} - 2|\vec{p}_{\varphi_1}||\vec{p}_{\varphi_2}|\cos\theta \quad (4.101)$$

En suivant les mêmes étapes de l'Annexe C.2, on obtient le résultat final :

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{3T}{512\pi^5} \int 4p_{\varphi_3\chi} p_{\varphi_1\varphi_2} |M|^2 K_1(\sqrt{s'/T}) \frac{ds'}{\sqrt{s'}} \quad (4.102)$$

Les masses φ_1, φ_2 et φ_3 sont négligeables par rapport à la masse de χ , donc nous pouvons approximer $p_{\chi\varphi_3} p_{\varphi_1\varphi_2} = (s' - m_\chi^2)/4$ et l'élément de la matrice est $|M|^2 = \lambda^2$ [51] laissant

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{3T\lambda^2}{512\pi^5} \int_{m_\chi^2}^{\infty} \frac{ds'(s' - m_\chi^2) K_1(\sqrt{s'/T})}{\sqrt{s'}} \quad (4.103)$$

En intégrant sur s' , en introduisant des fonctions spéciales, nous obtenons (voir Annexe F)

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{3T\lambda^2}{512\pi^5} m_\chi K_1(\sqrt{s'/T}) \quad (4.104)$$

D'après l'équation ci-dessus, nous trouvons la dérivée de la variable Y_χ

$$\dot{Y}_\chi = -\frac{3\lambda^2 m_\chi T^2}{128\pi^5} \frac{K_1(\sqrt{s'/T})}{sH} = -\frac{3\lambda^2 K_1(\sqrt{s'/T})}{1.66T^3 \sqrt{g_{eff}} h_{eff}} \frac{45M_p m_\chi}{256\pi^7} \quad (4.105)$$

En intégrant sur x et en utilisant les approximations limites $x = 0$ et $y = \infty$, on arrive enfin au résultat (voir Annexe F)

$$Y_\chi = \frac{135\lambda^2 M_p}{256\pi^7(1.66)\sqrt{g_{eff}h_{eff}m_\chi}} \int_0^\infty xK_1(x)dx = \frac{1.65 \times 10^{-4}\lambda^2 M_p}{\sqrt{g_{eff}h_{eff}m_\chi}} \quad (4.106)$$

En utilisant l'équation (4.52) et en remplaçant toutes les valeurs pertinentes, la densité relique de la matière noire est :

$$\Omega_{in}h^2 \simeq \frac{1.08 \times 10^{23}}{\sqrt{g_{eff}h_{eff}}}\lambda^2 \quad (4.107)$$

Donc la constante de couplage est :

$$\lambda \simeq 1,05 \times 10^{-12}(\sqrt{g_{eff}h_{eff}})^{1/2} \quad (4.108)$$

Aussi de l'ordre 10^{-12} donc représentant un couplage très faible en accord avec notre hypothèse de départ pour le freeze-in.

Toute les résultat analytique précédent pour les deux mécanisme freeze-out et freeze-in sont implémenté dans les fichiers omega.c et freezin.c du répertoire source du code MicrOmegas.

4.4 le code MicrOmegas et Modèle du Doublet Inerte (*IDM*)

Le code MicrOmegas est un programme automatique , écrit en langage C et en fortran, qui calcule les propriétés de la \mathcal{CDM} dans un modèle générique de physique des particules. D'abord développé pour calculer la densité relique de la matière noire dans les mécanismes de freeze-out et de freeze-in, il calcule également les taux de détection directe et indirecte de la matière noire. Le code est un outil pour les études de \mathcal{CDM} en générique extensions du modèle standard dans la notation de CalcHEP [46].

CalcHEP est un paquet général qui définit la nature de toutes les particules du modèle (spin, charges), les paramètres (masses, couplages), les règles de Feynman associées décrivant les interactions des particules et le calcul de la section efficace d'annihilation et de co-annihilation.

Dans ce travail de mémoire, nous avons choisi comme le modèle du Doublet Inerte du Higgs (*IDM* pour Inert Doublet Model) pour tester nos calculs trouvés théoriquement avec les résultats que donnent le code MicrOmegas.

4.4.1 Structures de code MicrOmegas

Structure des fichiers

calc	calculatrice
calchep.ini	spécifie les polices des graphiques dans CalcHEP
Makefile	pour compiler le noyau du paquet
README	brève description sur la façon d'exécuter le code

CalcHEP_src/	générateur d'éléments matriciels pour le code
Packages/	codes externes
clean	pour supprimer les fichiers compilés
man/	contient le manuel : description des routines Micromegas
newProject	pour créer une structure d'un répertoire pour un nouveau modèle
sources/	code MicrOmegas
include/	contient des fichiers pour les routines de MicrOmegas ou des codes
externes	
lib/	contient la librairie micromegas.a lorsque MicrOmegas est compilé

- **Répertoire du modèle *IDM* :**

IDM/	
Makefile	pour compiler le code et l'exécutable pour ce modèle
main.c[pp]	fichiers avec des exemples de programmes <i>main</i>
data.par	fichier contenant les valeurs numériques des paramètres libres du modèle
lib/	répertoire des routines spécifiques à ce modèle
Makefile	pour compiler la bibliothèque du code auxiliaire <i>lib/aLib.a</i>
*.c *.f *.h *.inc	codes source des fonctions auxiliaires
work/	répertoire de travail CalcHEP pour la génération d'éléments de matrice
Makefile	pour compiler la bibliothèque work/work_aux.a
lanhep/	répertoire contenant les fichiers de modèle source LanHEP
models/	répertoire des fichiers qui spécifie le modèle
	les fichiers *1.mdl sont utilisés dans les sessions MicrOmegas.
	Autres fichiers *.mdl sont destinés à la session interactive CalcHEP.
vars1.mdl	variables libres
func1.mdl	variables contraintes
prtcls1.mdl	particules
lgrng1.mdl	Règles de Feynman
tmp/	répertoires auxiliaires pour les sessions CalcHEP
results/	résultats
so_generated/	stockage des éléments de matrice générés par la session CalcHEP

- **Répertoires des autres modèles qui ont la même structure que *IDM* /**

MSSM/ (Modèle supersymétrique minimal), NMSSM/ (Modèle supersymétrique quasi-minimal), CPVMSSM/ (MSSM avec des paramètres complexes), UMSSM/ (U(1) extension du MSSM), LLL_singlet/ (Modèle simplifié avec lepton chargé singulet et matière noire scalaire réelle), LHM/ (Petit modèle du Higgs), SingletDM/ (Modèle de matière sombre scalaire singulet avec symétrie Z_2), Z3IDM/ (Modèle de doublet inerte avec symétrie discrète Z_3), Z4IDSM/ (Modèle doublet et singulet inerte avec symétrie Z_4), ZpPortal/ (Modèle simplifié avec un portail en Z' et fermion de matière noire) et mdlIndep/ (Pour le calcul indépendant du modèle des signaux de matière noire).

Structure des modules

Chaque modèle, inclus dans MicrOmegas, est accompagné d'un fichier d'exemple écrit en langage C qui appelle les routines MicrOmegas, appelé main.C. Ce fichier se compose de nombreux modules dont chacun contenant un code pour un problème spécifique. Ci-dessous, les modules qu'on aura besoin pour l'étude du modèle *IDM*. Il existe d'autres modules, dans le code, que nous n'avons pas cité ici :

```
#define MASSES_INFO           //Affiche des informations sur le spectre de masse
#define CONSTRAINTS          //Affiche sgamma, Bs-> mumu, gmuon et
                             //vérifie les limites de masse du LOP
#define OMEGA                 //Calcule la densité  relique
dans le mécanisme du
                             //freeze-out
#define FREEZEIN              //Calcule la densité  relique dans le mécanisme du
                             // freeze-in
#define INDIRECT_DETECTION    //Signaux d'annihilation de la matière noire dans
                             //un halo galactique
#define CDM_NUCLEON           //Calcule les amplitudes et les sections efficaces
                             //pour les collisions DM-nucléon
#define NEUTRINO              //Calcule le flux de neutrinos solaires et
                             //le flux de muons correspondant
#define DECAYS                //Calcule les largeurs de désintégration et les ramifications
#define CROSS_SECTIONS        //Calcule les sections efficace
#define CLEAN                 //Supprime les fichiers intermédiaires
#define SHOWPLOTS             //active les fonctionnalités graphiques de Micromegas
```

Paramètres de ligne de commande

Les versions par défaut des programmes main.C ont besoin de certains arguments qui doivent être spécifiés dans les lignes de commande. S'il est lancé sans argument, main explique quel paramètre est nécessaire. En règle générale, main a besoin du nom d'un fichier contenant les valeurs numériques des paramètres libres du modèle. Par exemple, un fichier d'entrée de modèle de *IDM* (utilisons le fichier data1.par) contient :

Nom	Valeur	# commentaire
Mh	125	# masse du modèle standard Higgs
MHC	600	# masse de particule \tilde{X}
MH3	601	# masse de Higgs impairs \tilde{H}_3
MHX	604	# masse de Higgs chargés \tilde{H}^+

4.4.2 Modèle du Doublet Inerte du Higgs

Le modèle *IDM* est une extension du modèle standard, qui comprend : doublet de Higgs H_1 pour le *MS* et deuxième doublet de Higgs H_2 qui est impair sous une symétrie discrète Z_2 .

$$\begin{cases} H_2 \rightarrow -H_2 \\ H_1 \rightarrow +H_1 \end{cases} \quad (4.109)$$

Cette symétrie discrète empêche le couplage direct de H_2 aux fermions $:\bar{\psi}H_2\psi$, car ce terme est impair sous Z_2 . Ceci est crucial pour la stabilité de la matière noire. Le potentiel scalaire le plus général que l'on puisse alors écrire pour H_1, H_2 est [48] :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \mu_1^2|H_1|^2 + \mu_2^2|H_2|^2 + \lambda_1|H_1|^4 + \lambda_2|H_2|^4 + \lambda_3|H_1|^2|H_2|^2 \\ & + \lambda_4|H_1^+H_2|^2 + \frac{\lambda_5}{2} \left[(H_1^+H_2)^2 + h.c \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

où après brisure spontanée de la symétrie électrofaible les champs H_1 et H_2 s'écrivent :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} H^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X+iH3) \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

où :

- μ_i, λ_i sont des paramètres réels ;
- $v = \sqrt{2}\langle 0|H_1|0\rangle = 246 \text{ GeV}$ [48] est la valeur moyenne de H_1 relativement à l'état du vide.

Dans le code MicrOmegas le lagrangien du modèle \mathcal{IDM} est implémenté d'abord via LanHEP qui permet de tirer les règles de Feynman, ces règles sont alors communiquées à CalcHEP qui pour un processus donné calcule la section efficace correspondante. Les résultats de cette section efficace sont utilisés par MicrOmegas pour calculer la densité relicte.

Le modèle \mathcal{IDM} se compose de quatre nouveaux états de particules scalaires physiques : deux particules scalaires chargées H^\pm et deux particules scalaires neutres X et $H3$. L'un ou l'autre pourrait être de la matière noire. Dans ce qui suit, nous choisissons X comme la particule inerte la plus légère : $M_X^2 < M_{H3}^2, M_{H^\pm}^2$. Par conséquent, la particule X est notre candidat pour la matière noire. Les masses des particules scalaires inertes sont données par :

$$M_X^2 = \mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)v^2 = M_{H^\pm}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v^2 = M_{H3}^2 + \lambda_5v^2 \quad (4.112)$$

$$M_{H3}^2 = \mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5)v^2 \quad (4.113)$$

$$M_{H^\pm}^2 = \mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3)v^2 \quad (4.114)$$

Puisque X est la particule la plus légère, alors : $\lambda_4 + \lambda_5 < 0$ et $\lambda_5 < 0$. D'autres contraintes théoriques et expérimentales permettent d'obtenir les conditions suivantes [49] :

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > -2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \lambda_3 + \lambda_4 - |\lambda_5| = 2\lambda_L > -2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \quad (4.115)$$

où : $\lambda_L = (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)/2$

Les particules de matière noire X peuvent s'annihiler entre elles pour donner des particules du modèle standard tel que WW^*, ZZ^*, hh^* et tt^* . La figure 4.2 illustre le processus d'annihilation : $XX \rightarrow W^+W^- \rightarrow W^+e^-\bar{\nu}_e$.

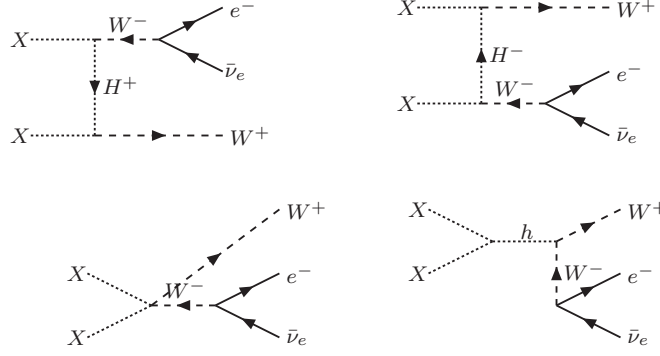


FIGURE 4.2 – Processus d’annihilation $XX \rightarrow W^+W^- \rightarrow W^+e^-\bar{\nu}_e$

4.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous utilisons le code `MicrOmegas` pour calculer numériquement la densité relicue dans le cadre du modèle \mathcal{IDM} et selon les deux schémas *freeze-out* et *freeze-in*. Nous comparons ensuite les résultats obtenus avec la valeur expérimentale récente de la densité relicue selon Planck [56] :

$$\Omega_{exp} h^2 = 0.1175 < 0.1197 < 0.1219 \quad (4.116)$$

Les valeurs numériques utilisées sont :

$$M_X = 550\text{GeV}, \quad M_{H3} = 551\text{GeV}, \quad M_{H\pm} = 552\text{GeV}, \quad \lambda_L = 0.0193, \quad \lambda_2 = 0.01$$

$$M_h = 125\text{GeV}, \quad M_W = 80.45\text{GeV}, \quad M_Z = M_W/C_W, \quad \alpha = 1/137$$

où :

- C_W est le cosinus de l’angle de Weinberg : $C_W = \cos \theta_W$;
- θ_W est l’angle de Weinberg.
- α est la constante de structure fine.

Pour travailler avec l’un des modèles déjà inclus dans le code `MicrOmegas`, il faut accéder au répertoire du modèle approprié. Dans notre cas, nous utiliserons le modèle \mathcal{IDM}

```
cd IDM
```

Exécution du code avec l’exemple de fichier de données

```
./main dataImproveCS.par
```

Cela conduira à la sortie suivante

```
Dark matter candidate is '~X' with spin=0/2 mass=5.50E+02
```

```
=== MASSES OF HIGGS AND ODD PARTICLES: ===
```

```
Higgs masses and widths
```

h 125.00 2.84E-03

Masses of odd sector Particles:

\tilde{X} : MHX = 550.000 || \tilde{H}_3 : MH3 = 551.000 || \tilde{H}^+ : MHC = 552.000

==== Calculation of relic density =====

PROCESS: $\tilde{X}, \tilde{X} \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

PROCESS: $\tilde{H}_3, \tilde{X} \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

PROCESS: $\tilde{H}_3, \tilde{H}_3 \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

PROCESS: $\tilde{H}_3, \tilde{H}^+ \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

PROCESS: $\tilde{H}^+, \tilde{X} \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

PROCESS: $\tilde{H}^+, \tilde{H}^+ \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

PROCESS: $\tilde{H}^+, \tilde{H}^- \rightarrow \text{AllEven}, 1 * x \{A, Z, G, W^+, W^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, \nu_{\text{charm}}, \nu_{\text{bottom}}, \nu_{\text{top}}, s, S, t, T, b, B, h\}$

Xf=2.61e+01

Omega freeze-out=1.21e-01

Channels which contribute to 1/(omega) more than 1%.

Relative contributions in % are displayed

18% $\tilde{X} \tilde{X} \rightarrow W^+ W^-$
14% $\tilde{X} \tilde{X} \rightarrow Z Z$
13% $\tilde{H}^+ \tilde{H}^- \rightarrow W^+ W^-$
9% $\tilde{H}_3 \tilde{H}_3 \rightarrow W^+ W^-$
7% $\tilde{H}^+ \tilde{X} \rightarrow A W^+$
7% $\tilde{H}_3 \tilde{H}_3 \rightarrow Z Z$
6% $\tilde{H}_3 \tilde{H}^+ \rightarrow A W^+$
5% $\tilde{H}^+ \tilde{H}^- \rightarrow A A$
4% $\tilde{H}^+ \tilde{H}^- \rightarrow A Z$
3% $\tilde{H}^+ \tilde{X} \rightarrow Z W^+$
3% $\tilde{H}_3 \tilde{H}^+ \rightarrow Z W^+$
2% $\tilde{H}^+ \tilde{H}^- \rightarrow Z Z$

Omega freeze-in=7.075E+30

Channels which contribute to omega h² via freeze-in

1.079E-01 $W^-, \tilde{H}^+ \rightarrow Z, \tilde{X}$
1.079E-01 $Z, \tilde{H}^+ \rightarrow W^+, \tilde{X}$
9.852E-02 $W^+, \tilde{H}_3 \rightarrow W^+, \tilde{X}$
4.755E-02 $b, \tilde{H}^+ \rightarrow t, \tilde{X}$
4.755E-02 $T, \tilde{H}^+ \rightarrow B, \tilde{X}$
4.755E-02 $U, \tilde{H}^+ \rightarrow D, \tilde{X}$
4.755E-02 $d, \tilde{H}^+ \rightarrow u, \tilde{X}$

4.755E-02 C, \tilde{H}^+ \rightarrow S, \tilde{X}
4.755E-02 s, \tilde{H}^+ \rightarrow c, \tilde{X}
2.791E-02 A, \tilde{H}^+ \rightarrow W+, \tilde{X}

Ces résultats concernant les taux processus d'annihilation sont en accord avec ceux de la référence [56]. De plus, nous trouvons que dans le cas du freeze-out la densité relique est :

$$\Omega_{out}h^2 = 0.121 \quad (4.117)$$

Cette valeur est cohérente avec la valeur expérimentale. Par contre pour le cas du Freeze-in, nous trouvons :

$$\Omega_{in}h^2 = 7.075 \times 10^{30} \gg 1 \quad (4.118)$$

Cette valeur n'est pas cohérente avec le résultat de Planck. De plus elle est illogique car on sait que $\sum_i \Omega_i = 1$ (voir l'équation 1.47). Cela s'explique par le fait que le point de référence utilisé est incompatible avec le cas du freeze-in.

Nous déduisons que le modèle \mathcal{IDM} fournit un candidat viable pour décrire la matière noire puisqu'il permet de retrouver la valeur expérimentale de la densité relique même à l'arbre.

Conclusion

Dans ce mémoire de master, nous avons étudié la nature de la matière invisible dans l'Univers, qu'on appelle communément matière noire (ou \mathcal{DM} pour Dark Matter). La nature et l'origine de la matière noire restent inconnues jusqu'à maintenant. Cependant, son existence a été vérifiée par les effets de la gravité et observée dans plusieurs contextes complémentaires : dans le comportement des courbes de rotation des galaxies, dans l'évolution des structures cosmiques, dans le fond diffus cosmologique ainsi que dans la distribution de masse des amas de galaxies.

Il existe différents candidats pour expliquer la matière noire en physique des particules. Car la matière noire est de composante inconnue, il est tout indiqué d'aller puiser dans les prédictions des extensions du modèle standard, telles que la supersymétrie et l' \mathcal{IDM} . En effet, différentes expériences ont été développées au cours des dernières décennies, comme la production dans les accélérateurs, la détection directe et la détection indirecte, qui visent à détecter divers signaux produits par des collisions de matière noire avec des baryons et des annihilations ou des désintégrations de la matière noire.

Dans ce travail, nous avons focalisé notre étude sur le calcul de la densité relique de la matière noire à travers deux mécanismes différents :

1. Le mécanisme du freeze-out impliquant des particules massives interagissant faiblement, ce qu'on appelle " \mathcal{WIMPS} " qui domine la matière noire, de sorte que ce mécanisme produit des interactions entre les particules \mathcal{DM} et \mathcal{SM} . Ces dernières doivent être suffisamment fortes pour les amener à un équilibre thermique et chimique dans le plasma primordial de l'Univers.
2. Le mécanisme du freeze-in impliquant des particules massives interagissant très faiblement qu'on appelle " \mathcal{FILMPS} ". Dans ce cas, la matière noire n'atteint jamais l'équilibre thermique, car les couplages avec d'autres particules sont extrêmement faibles.

En outre, nous avons utilisé le code MicrOmegas pour calculer la densité relique de matière noire pour les deux mécanismes. Notre choix s'est porté sur le modèle \mathcal{IDM} . Ensuite, nous avons développé le formalisme nécessaire pour résoudre les équations de Boltzmann en faisant le moins d'hypothèses possibles sur les distributions d'espace de phase des particules impliquées dans le processus de production de matière noire.

Les résultats que nous avons obtenus, pour la densité relique dans le mécanisme de freeze-out, concordent avec la valeur expérimentale de Planck. Par contre, en ce qui concerne le mécanisme de freeze-in, les résultats sont très éloignés et incohérents.

L'organigramme 4.3 résume la démarche suivie pour le calcul de la densité relique dans les deux scénarios freeze-out et freeze-in ainsi que l'utilisation de code MicrOmegas.

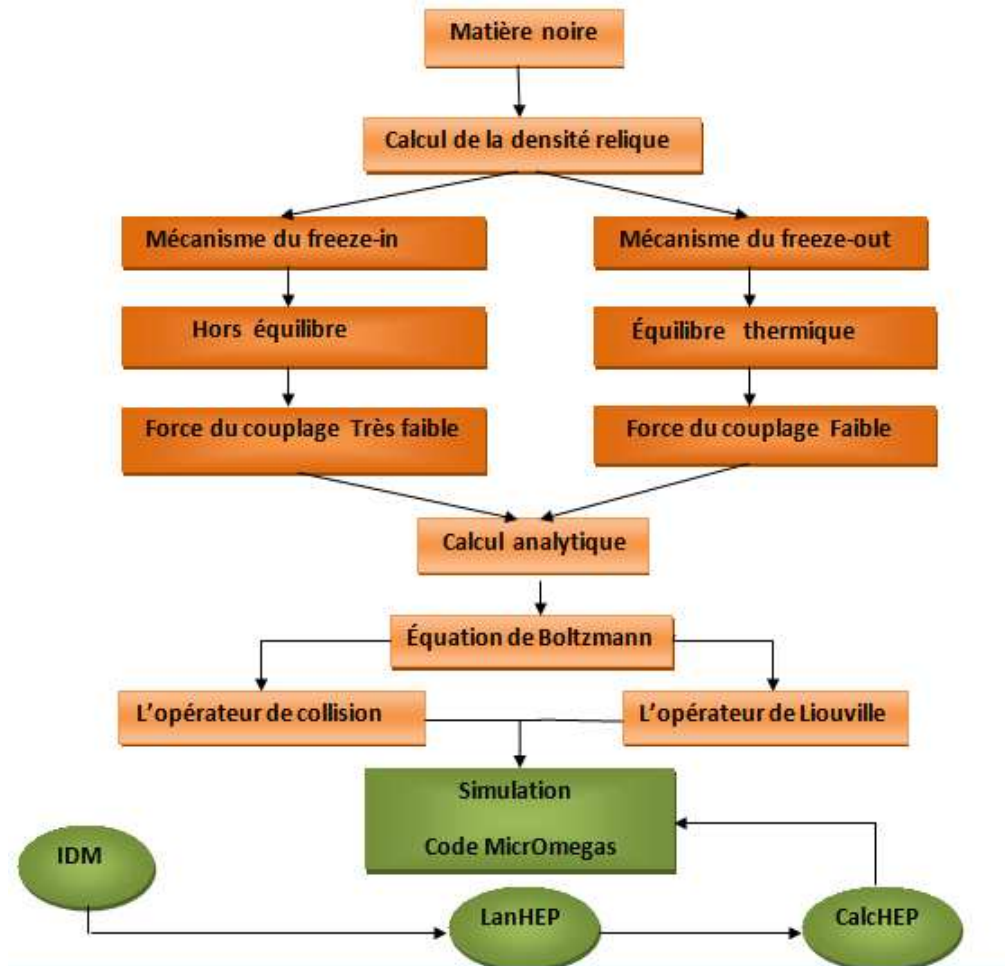


FIGURE 4.3 – Organigramme récapitulatif le calcul de la densité relique.

Bien que, dans ce mémoire de master, nous ayons eu un aperçu global de la matière noire, cette dernière reste encore quelque chose de vague et un puzzle de l'Univers. Enfin, nous espérons tout de même que cette revue puisse être utile et servir de référence pour les étudiants et chercheurs intéressés par cette branche de l'astroparticule physique.

"La plus belle chose que nous puissions expérimenter est le mystérieux. C'est la source de tout art véritable et de toute science".

Albert Einstein

Déduction des équations d'Einstein à partir de l'action d' Hilbert-Einstein

Le modèle standard de la cosmologie est basé sur la relativité générale (\mathcal{RG}), qui stipule que la gravité est une propriété géométrique de l'espace-temps et peut être dérivée du à partir de l'action de la relativité générale, appelée action d' Hilbert-Einstein

$$S = S_g + S_m \quad (\text{A.1})$$

où :

- S_g est l'action pour le champ gravitationnel ;
- S_m est l'action des champs de matière.

Nous commençons d'abord par S_g qui doit satisfaire les condition suivantes :

1. Invariance sous les transformations générales de coordonnées : $x^\mu \Rightarrow x'^\mu = f(x^0, x^1, x^2, x^3)$.
2. Localité, c'est-à-dire : $S_g = \int d^4x L_g$.
3. Au plus des dérivées secondes par rapport au temps dans les équation du mouvement.

Alors, d'après ces conditions, on peut écrire :

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.2})$$

où :

- G est la constante de gravitation du Newton ;
- g est le déterminant de la métrique de l'espace-temps ;
- R est la courbure scalaire ;
- Λ est la constante cosmologique.

et concernant S_m , elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$S_m = \int d^4x L_m \sqrt{-g} \quad (\text{A.3})$$

où L_m est lagrangien pour les champs de matière.

D'après les équations (A.1) et (A.2), l'équation (A.1) devient

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + \int d^4x L_m \sqrt{-g} \quad (\text{A.4})$$

Calculons maintenant la variation de cette action par applique le principe de moindre action $\delta S = 0$

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G} \int (\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\delta R - 2\Lambda\delta\sqrt{-g}) d^4x + \int (\delta L_m\sqrt{-g} + L_m\delta\sqrt{-g}) d^4x = 0 \quad (\text{A.5})$$

sachant que :

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$$

où :

- $g_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps ;
- $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci.

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{16\pi G} \int \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} + \Lambda\sqrt{-g}g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ & + \frac{1}{2} \int 2 \left(\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (\text{A.7})$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion :

$$T_{\mu\nu} = 2 \left(\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m \right)$$

Donc (A.7) devient :

$$\frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

On obtient alors l'équation de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{A.9})$$

Calcul des symboles de Christoffel dans le cas de la métrique de \mathcal{FLRW}

Les symboles de Christoffel (ou coefficients de Christoffel, ou connexions affines), qui tirent leur nom du mathématicien Elwin Bruno Christoffel, sont une expression de la connexion de Levi-Civita dérivée du tenseur métrique, qui prend la forme suivante

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas de la Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker où les masses ont une distribution sphérique, nous savons que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta a(t)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

où :

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{a(t)^2}{1-kr^2}, \quad g_{22} = -r^2 a(t)^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta a(t)^2 \quad (\text{B.3})$$

Maintenant développons les calculs pour trouver les symboles de Christoffel pour ces coordonnées :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_1 g_{\sigma 1} + \partial_1 g_{1\sigma} - \partial_{\sigma} g_{11}) \quad \sigma = 0, 1, 2, 3 \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{01}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{02}(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{03}(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_2 g_{\sigma 2} + \partial_2 g_{2\sigma} - \partial_\sigma g_{22}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{22}^0 &= \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{02} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) \\
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{22}) \\
\Gamma_{22}^0 &= r^2 a \dot{a}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_3 g_{\sigma 3} + \partial_3 g_{3\sigma} - \partial_\sigma g_{33}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{33}) \\
\Gamma_{33}^0 &= r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{B.6}$$

D'après les équations B.4, B.5 et B.6, nous concluons que

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij} = -H g_{ij} \quad \text{avec } i = j = 1, 2, 3 \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(\partial_0 g_{\sigma 1} + \partial_1 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{01}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{01} - \partial_1 g_{01}) \\
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11}) \\
\Gamma_{01}^1 &= H = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(\partial_2 g_{\sigma 2} + \partial_2 g_{2\sigma} - \partial_\sigma g_{22}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{22}) \\
&= -r(1 - kr^2)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(\partial_3 g_{\sigma 3} + \partial_3 g_{3\sigma} - \partial_\sigma g_{33}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{33}) \\
\Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_1 g_{\sigma 2} + \partial_2 g_{1\sigma} - \partial_\sigma g_{12}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22}) \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_3 g_{\sigma 3} + \partial_3 g_{3\sigma} - \partial_\sigma g_{33}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_1 g_{33}) \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_2 g_{\sigma 3} + \partial_3 g_{2\sigma} - \partial_\sigma g_{23}) \quad , \sigma = 0, 1, 2, 3 \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33}) \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = \Gamma_{23}^3
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Toutes les autres possibilités pour les symboles de Christoffel sont nulles

$$\Gamma_{ij}^0 = 0, \quad i \neq j = 0, 1, 2, 3 \tag{B.14}$$

Vitesse de Møller et moyennes thermiques

C.1 La vitesse de Møller

Pour calculer la vitesse de Møller v_M , nous utilisons les relations suivantes : $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ et $\vec{p} = \vec{v}E$, où v_M est :

$$v_M = \sqrt{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2 - |\vec{v}_i \wedge \vec{v}_j|^2} = \frac{\sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - (m_i m_j)^2}}{E_i E_j} \quad (\text{C.1})$$

Nous utilisons d'abord la relation de vitesse relative

$$|\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2 = \left| \frac{\vec{p}_i}{E_i} - \frac{\vec{p}_j}{E_j} \right|^2 = \frac{1}{E_i^2 E_j^2} [E_j^2 |\vec{p}_i|^2 + E_i^2 |\vec{p}_j|^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j E_i E_j] \quad (\text{C.2})$$

aussi :

$$m_i^2 m_j^2 = (E_i^2 - |\vec{p}_i|^2)(E_j^2 - |\vec{p}_j|^2) = E_i^2 E_j^2 + |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 - |\vec{p}_i|^2 E_j^2 - |\vec{p}_j|^2 E_i^2 \quad (\text{C.3})$$

alors :

$$|\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2 = \frac{1}{E_i^2 E_j^2} [E_i^2 E_j^2 + |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 - m_i^2 m_j^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j E_i E_j] \quad (\text{C.4})$$

Nous avons aussi :

$$(p_i \cdot p_j)^2 = (E_i E_j - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)^2 = E_i^2 E_j^2 + (\vec{p}_i \vec{p}_j)^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j E_i E_j \quad (\text{C.5})$$

Nous concluons la relation suivante :

$$E_i^2 E_j^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j E_i E_j = (p_i \cdot p_j)^2 - (\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)^2 \quad (\text{C.6})$$

Maintenant, nous remplaçons cette relation dans l'équation (C.4)

$$\begin{aligned}
|\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2 &= \frac{1}{E_i^2 E_j^2} \left[(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2 + |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 - (\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)^2 \right] \\
&= \frac{1}{E_i^2 E_j^2} \left[(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2 + |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 - |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 \cos^2 \theta \right] \\
&= \frac{1}{E_i^2 E_j^2} \left[(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2 + |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 (1 - \cos^2 \theta) \right] \\
&= \frac{1}{E_i^2 E_j^2} \left[(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2 + |\vec{p}_i|^2 |\vec{p}_j|^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= \frac{1}{E_i^2 E_j^2} \left[(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2 + (\vec{p}_i \wedge \vec{p}_j)^2 \right]
\end{aligned} \tag{C.7}$$

où θ est l'angle entre \vec{p}_i et \vec{p}_j . Enfin on trouve :

$$|\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2 - |\vec{v}_i \wedge \vec{v}_j|^2 = \frac{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}{E_i^2 E_j^2} \tag{C.8}$$

C.2 La moyenne thermique de la section efficace effective

Nous commençons par ré-exprimer la définition de $\langle \sigma_{eff} v \rangle$, donnée dans l'équation (4.63), sous une forme plus pratique

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \sum_{i,j=1}^N \langle \sigma v \rangle_{ij} \frac{n_i^{eq} n_j^{eq}}{n^{eq} n^{eq}} = \frac{A}{(n^{eq})^2} \tag{C.9}$$

Tout d'abord, nous simplifions le dénominateur comme :

$$n^{eq} = \sum_i n_i^{eq} = \sum_i g_i \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} e^{-\frac{E_i}{T}} \tag{C.10}$$

où nous avons utilisé les relations $d^3 p_i = 4\pi p_i^2 dp_i$, $p_i dp_i = E_i dE_i$ et $p_i = \sqrt{E_i^2 - m_i^2}$

$$n^{eq} = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} \int_{m_i}^{\infty} dE_i E_i \sqrt{E_i^2 - m_i^2} e^{-\frac{E_i}{T}} \tag{C.11}$$

L'équation (C.11) peut être résolue en termes de fonctions spéciales (voir l'Annexe F). Alors nous pouvons écrire

$$n^{eq} = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} T m_i^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \tag{C.12}$$

où $K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$ est la fonction de Bessel modifiée du second type d'ordre 2.

Le numérateur A est le taux d'annihilation total par unité de volume à la température T . D'après l'équation (C.9) nous pouvons écrire :

$$A = \sum_{i,j}^N \langle \sigma v \rangle_{ij} n_i^{eq} n_j^{eq} = \sum_{i,j}^N \frac{g_i g_j}{(2\pi)^6} \int \int d^3 p_i d^3 p_j f_i f_j \sigma_{ij} v_{ij} \tag{C.13}$$

Il est pratique de reprendre ce terme, sous une forme covariante explicite, comme :

$$A = \sum_{i,j}^N g_i g_j \int \int W_{ij} f_i f_j \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}, \quad (\text{C.14})$$

où W_{ij} est le taux d'annihilation non polarisé par unité de volume qui est égal à

$$W_{ij} = 4E_i E_j \sigma_{ij} v_{ij} = 4\sigma_{ij} \sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2} = 4\sigma_{ij} p_{ij} \sqrt{s'} \quad (\text{C.15})$$

où nous avons utilisé la définition de la vitesse de Møller donnée dans l'équation (C.1). D'après l'équation (E.23), on obtient :

$$p_{ij} = \sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2} = \frac{\sqrt{[s' - (m_i + m_j)^2][s' - (m_i - m_j)^2]}}{2\sqrt{s'}} \quad (\text{C.16})$$

En faisant la moyenne sur les états internes initiaux et en additionnant les états internes finaux, la contribution à W_{ij} d'un état final général à n corps est :

$$W_{ij}^{n\text{-corps}} = \frac{1}{g_i g_j S_f} \sum \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j - \sum_f p_f) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (\text{C.17})$$

où S_f est un facteur de symétrie prenant en compte des particules d'état final identiques (s'il y a K ensembles de N_k particules identiques, $k = 1, \dots, K$, alors $S_f = \prod_{k=1}^K N_k!$). En particulier, la contribution d'un état final à deux corps peut s'écrire :

$$W_{ij \rightarrow kl}^{2\text{-corps}} = \frac{1}{g_i g_j S_f} \sum \int \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j - p_k - p_l) \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2E_l}, \quad (\text{C.18})$$

où S_f est égal à 2 si les particules finales sont identiques ou à 1 si elles sont différentes. On désigne les particules initiales (entrées) avec i, j et les particules finales (sorties) par k, l . Le calcul de l'intégrale sur $d^3 p_k$ ensuite sur $d^3 p_l$, on trouve [53] :

$$W_{ij \rightarrow kl} = \frac{p_{kl}}{16\pi^2 g_i g_j S_f \sqrt{s'}} \sum \int d\Omega |M|^2 \quad (\text{C.19})$$

Nous réduisons maintenant l'intégrale dans l'expression covariante pour A , équation (C.14), de 6 dimensions à 1. Utiliser les statistiques de Maxwell-Boltzmann au lieu de statistiques génériques f_i, f_j , il lit :

$$A = \sum_{i,j} g_i g_j \int \int W_{ij} e^{-\frac{E_i}{T}} e^{-\frac{E_j}{T}} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \quad (\text{C.20})$$

Suite à la réf [53], nous pouvons réécrire l'élément de volume espace-impulsion comme :

$$d^3 p_i d^3 p_j = 4\pi |\vec{p}_{\varphi_i}| E_{\varphi_i} dE_{\varphi_i} 4\pi |\vec{p}_{\varphi_j}| E_{\varphi_j} dE_{\varphi_j} \frac{1}{2} d\cos\theta \quad (\text{C.21})$$

Ensuite, nous changeons les variables d'intégration de E_i, E_j, θ à E_+, E_- et s' , donnés par [53] :

$$E_+ = E_i + E_j \quad (\text{C.22})$$

$$E_- = E_i - E_j \quad (C.23)$$

$$s' = m_i^2 + m_j^2 + 2E_i E_j - 2|\vec{p}_{\varphi_i}||\vec{p}_{\varphi_j}| \cos \theta \quad (C.24)$$

Par conséquent, l'élément de volume devient :

$$\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{p_i p_j}{2} |\det \{J\}|^{-1} dE_+ dE_- ds' = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{dE_+ dE_- ds'}{8} \quad (C.25)$$

où J est le jacobien de la transformation

$$\det \{J\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_+}{\partial E_i} & \frac{\partial E_+}{\partial E_j} & \frac{\partial E_+}{\partial \cos \theta} \\ \frac{\partial E_-}{\partial E_i} & \frac{\partial E_-}{\partial E_j} & \frac{\partial E_-}{\partial \cos \theta} \\ \frac{\partial s'}{\partial E_i} & \frac{\partial s'}{\partial E_j} & \frac{\partial s'}{\partial \cos \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2E_j - 2p_j \frac{E_i}{p_i} \cos \theta & 2E_i - 2p_i \frac{E_j}{p_j} \cos \theta & -2|\vec{p}_{\varphi_i}||\vec{p}_{\varphi_j}| \end{bmatrix} = 4|\vec{p}_{\varphi_i}||\vec{p}_{\varphi_j}|$$

Et les limites d'intégration $E_i \geq m_i, E_j \geq m_j$ et $|\cos \theta| \leq 1$ se transforme en [53] (voir Annexe D)

$$s' \geq (m_i + m_j)^2, \quad E_+ \geq \sqrt{s'}, \quad |E_- - E_+ \frac{m_i^2 - m_j^2}{s'}| \leq 2p_{ij} \sqrt{\frac{E_+^2 - s'}{s'}} \quad (C.26)$$

En utilisant les nouvelles variables E_+, E_- , et s' , l'équation (C.20) peut être exprimée comme :

$$A = \sum_{i,j} \frac{g_i g_j}{8(2\pi)^4} \int W_{ij}(s') ds' \int e^{-\frac{E_+}{T}} dE_+ \int dE_- \quad (C.27)$$

La fonction de distribution d'équilibre ne dépend que de E_+ , et ainsi nous pouvons immédiatement intégrer sur E_-

$$\int dE_- = 4p_{ij} \sqrt{\frac{E_+^2 - s'}{s'}} \quad (C.28)$$

En tenant compte de la région d'intégration (C.27), on obtient :

$$A = \sum_{i,j} \frac{4g_i g_j}{8(2\pi)^4} \int p_{ij} W_{ij}(s') \frac{ds'}{\sqrt{s'}} \int e^{-\frac{E_+}{T}} dE_+ \sqrt{E_+^2 - s'} \quad (C.29)$$

Nous effectuons l'intégrale sur E_+ donne la première fonction de Bessel modifiée du second type

$$A = \frac{T}{32\pi^4} \sum_{i,j} \int_{(m_i+m_j)^2}^{\infty} g_i g_j p_{ij} W_{ij}(s') K_1(\sqrt{s'}/T) ds' \quad (C.30)$$

où $K_1(\frac{m_i}{T})$ est la fonction de Bessel modifiée du second type d'ordre 1.

Maintenant, nous définissons les quantités [53] :

$$p_{eff} = p_{11} = \frac{\sqrt{s' - 4m_1^2}}{2} \quad (C.31)$$

En d'autres termes

$$W_{eff} = \sum_{i,j} \frac{p_{ij}}{p_{eff}} \frac{g_i g_j}{g_1^2} W_{ij}(s') = \sum_{i,j} \sqrt{\frac{[s' - (m_i + m_j)^2][s' - (m_i - m_j)^2]}{s'(s' - 4m_1^2)}} \frac{g_i g_j}{g_1^2} W_{ij}(s') \quad (C.32)$$

Puisque $W_{ij}(s') = 0$ pour $s' \leq (m_i + m_j)^2$, le racine n'est jamais négatif, avec ces définitions équation (C.31) devient maintenant :

$$A = \frac{Tg_1^2}{32\pi^4} \int_{4m_1^2}^{\infty} ds' p_{eff} p_{eff}^2 W_{eff} K_1(\sqrt{s'}/T) \quad (C.33)$$

Cela peut être écrit sous une forme plus adaptée à l'intégration numérique en utilisant p_{eff} au lieu de s' comme variable d'intégration. De l'équation (C.31), on a $ds' = 8p_{eff} dp_{eff}$, d'où :

$$A = \frac{Tg_1^2}{4\pi^4} \int_0^{\infty} dp_{eff} p_{eff}^2 W_{eff} K_1(\sqrt{s'}/T) \quad (C.34)$$

avec

$$s' = 4p_{eff}^2 + 4m_1^2 \quad (C.35)$$

D'après équations (C.34) et (C.12), la moyenne thermique de la section efficace donne par :

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} dp_{eff} p_{eff}^2 W_{eff} K_1(\sqrt{s'}/T)}{m_1^4 T [\sum_i \frac{g_i m_i^2}{g_1 m_1^2} K_2(m_i/T)]^2} \quad (C.36)$$

Notez que la formule exacte ci-dessus pour la moyenne thermique de la section efficace dans le cas de co-annihilations peut être réduite à une formule exacte pour la moyenne thermique dans le cas standard, c'est-à-dire deux particules annihilantes de masse identique. Cela peut être fait en observant que la définition de W_{eff} dans le cas standard devient :

$$W_{eff} = W_{11} \quad (C.37)$$

Ainsi équation (C.36) s'avère être

$$\langle \sigma_{eff} v \rangle = \frac{1}{(m_1^2 K_2(m_i/T))^2} \int_0^{\infty} dp_{11} p_{11}^2 W_{11} K_1(\sqrt{s'}/T) \quad (C.38)$$

C.3 La moyenne thermique de la section efficace

La forme principale de la moyenne thermique de la section efficace que nous avons utilisée de l'opérateur de collision est :

$$\langle \sigma v_M \rangle = \frac{\int \sigma v_M e^{-\frac{E_1}{T}} e^{-\frac{E_2}{T}} d^3 p_1 d^3 p_2}{\int e^{-\frac{E_1}{T}} e^{-\frac{E_2}{T}} d^3 p_1 d^3 p_2} \quad (C.39)$$

Selon la référence [55], l'équation (C.39) peut être résolue en suivant les mêmes étapes que nous avons faites dans l'annexe C.2. En utilisant la fonction de Bessel et les variables E_+ , E_- et s' et en prenant la même masse $m_1 = m_2 = m$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\langle \sigma v_M \rangle = \frac{1}{8m^4 T K_2(m/T)^2} \int_{4m^2}^{\infty} \sigma(s' - 4m^2) \sqrt{s'} K_1(\sqrt{s'}/T) ds' \quad (C.40)$$

On peut donner une solution approximative à la forme $\langle \sigma v_M \rangle$, dans la limite non relativiste, peut être présentée dans le cas annihilation de deux particules de masse identique.

$$\langle \sigma v_M \rangle \rightarrow \langle \sigma v_{lab} \rangle^{lab} \quad (C.41)$$

où lab signifie que nous effectuons le calcul dans le repère du laboratoire de la particule 1 (Le cadre dans lequel la particule 1 est au repos).

Dans la limite non relativiste, nous avons :

$$E = (p^2 + m^2)^{1/2} = m \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right)^{1/2} \simeq m + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{m^3}\right) \quad (\text{C.42})$$

et ainsi $\langle \sigma v_{lab} \rangle^{lab}$ devient :

$$\langle \sigma v_{lab} \rangle_{n.r}^{lab} = \frac{\int \int \sigma v_{lab} e^{-p_1^2/2mT} e^{-p_2^2/2mT} d^3 p_1 d^3 p_2}{\int \int e^{-p_1^2/2mT} d^3 p_1 e^{-p_2^2/2mT} d^3 p_2} = \frac{L}{Q} \quad (\text{C.43})$$

où l'indice $n.r$ signifie non relativiste. Nous commençons par calculer le dénominateur de Q , pour être :

$$Q = \int \int e^{-p_1^2/2mT} d^3 p_1 e^{-p_2^2/2mT} d^3 p_2 = \left(\int e^{-p^2/2mT} d^3 p \right)^2 \quad (\text{C.44})$$

En utilisant $d^3 p = 4\pi p^2 dp$ et la variable $y = p/2mT$ on trouve :

$$Q = \left(4\pi(2mT)^{3/2} \int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy \right)^2 \quad (\text{C.45})$$

On obtient :

$$Q = 8(\pi m T)^3 \quad (\text{C.46})$$

Pour calculer le numérateur L de l'équation (C.43), nous commençons par changer les variables d'intégration comme :

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{p}_{tot} + \vec{p}_r}{2}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{p}_{tot} - \vec{p}_r}{2} \quad (\text{C.47})$$

où \vec{p}_{tot} est le vecteur impulsion total défini par $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et \vec{p}_r est le vecteur d'impulsion relatif, défini par $\vec{p}_r = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$. Après cette opération, le numérateur L devient :

$$L = \frac{1}{8} \int \int \sigma v_{lab} e^{-p_{tot}^2/4mT} e^{-p_r^2/4mT} d^3 p_{tot} d^3 p_r \quad (\text{C.48})$$

où le préfacteur $1/8$ est le déterminant du jacobien de la transformation (C.47). Notant que σv_{lab} ne dépend que de \vec{p}_r , on peut intégrer sur \vec{p}_{tot} en obtenant :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{8} \int e^{-p_{tot}^2/4mT} d^3 p_{tot} \int \sigma v_{lab} e^{-p_r^2/4mT} d^3 p_r \\ &= \frac{1}{2} (4\pi m T)^{3/2} \pi \int_0^\infty \sigma v_{lab} |\vec{p}_r|^2 e^{-p_r^2/4mT} d|\vec{p}_r| \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Pour aller plus loin, il faut trouver la relation entre $|\vec{p}_r|$ et l'énergie cinétique totale par unité de masse dans le cadre du laboratoire, ϵ

$$\epsilon = \frac{(E_{1lab} - m) + (E_{2lab} - m)}{2m} = \frac{E_{2lab} - m}{2m} = \frac{s' - 4m^2}{4m} \quad (\text{C.50})$$

où E_{2lab} est défini par la variable s' . Dans le cas de particules de masses égales, on a que[54]

$$E_{2lab} = \frac{s' - 2m^2}{2m} \quad (\text{C.51})$$

et nous avons

$$\vec{v}_{1cm} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2} \quad (\text{C.52})$$

où \vec{v}_{1cm} est la vitesse de la particule 1 dans le cadre du centre de masse à partir de laquelle on trouve que \vec{p}_{1cm} est simplement donné par

$$\vec{p}_{1cm} = \vec{v}_{1cm}m = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} = -\vec{p}_{2cm} \quad (\text{C.53})$$

En comparant cette relation avec la définition de \vec{p}_r , on obtient :

$$|\vec{p}_{1cm}| = |\vec{p}_{2cm}| = |\vec{p}_{cm}| = \frac{|\vec{p}_r|}{2} \quad (\text{C.54})$$

Il peut également être défini comme suit :

$$|\vec{p}_r|^2 = 4|\vec{p}_{cm}|^2 = s' - 4m^2 = 4m^2\epsilon \quad (\text{C.55})$$

et donc :

$$\epsilon = \frac{|\vec{p}_r|^2}{4m^2} \quad (\text{C.56})$$

Grâce à cette relation, nous pouvons changer les variables d'intégration dans le numérateur L

$$L = 16\pi^{5/2}(mT)^{\frac{3}{2}}m^3 \int_0^\infty \sigma v_{lab} e^{-m\epsilon/T} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \quad (\text{C.57})$$

En référence [55], Le développement de Taylor de σv_{lab} en puissances de ϵ est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma v_{lab} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \sigma v_{lab}}{\partial \epsilon^n} \Big|_{\epsilon=0} \epsilon^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \epsilon^n \quad \text{avec} \quad a^{(n)} = \frac{\partial^n \sigma v_{lab}}{\partial \epsilon^n} \Big|_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

donc :

$$L = 16\pi^{5/2}(mT)^{\frac{3}{2}}m^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \int_0^\infty e^{-m\epsilon/T} \epsilon^{n+1/2} d\epsilon \quad (\text{C.59})$$

En effectuant un autre changement de variable de ϵ à $t = m\epsilon/T$, nous avons :

$$\begin{aligned} L &= 16\pi^{5/2}(mT)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \left(\frac{T}{m}\right)^n \int_0^\infty e^{-t} t^{n+1/2} dt \\ &= 16\pi^{5/2}(mT)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \left(\frac{T}{m}\right)^n \int_0^\infty e^{-t} t^{(3+2n)/2-1} dt \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

On peut alors utiliser le résultat de la fonction gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \text{Re}z > 1 \quad (\text{C.61})$$

On obtient :

$$L = 16\pi^{5/2}(mT)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \frac{1}{x^n} \Gamma\left(\frac{3+2n}{2}\right) \quad (\text{C.62})$$

Maintenant grâce au propriété de la fonction Gamma

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(\alpha-2)!!}{2^{(\alpha-1)/2}} \sqrt{\pi} \quad (\text{C.63})$$

où α est un entier, le dernier facteur de l'équation (C.62) devient :

$$\Gamma\left(\frac{3+2n}{2}\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{C.64})$$

On obtient la forme finale du numérateur L

$$L = 8(\pi m T)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \frac{1}{x^n} \frac{(2n+1)!!}{2^n} \quad (\text{C.65})$$

Enfin, en prenant le rapport entre l'équation (C.65) et l'équation (C.46), on obtient l'expansion en puissances de $1/x$ de la moyenne thermique, $\langle \sigma v_{lab} \rangle_{n,r}^{lab}$, dans l'approximation non relativiste, nous obtenons [55]

$$\begin{aligned} \langle \sigma v_{lab} \rangle_{n,r}^{lab} &= \frac{L}{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \frac{1}{x^n} \frac{(2n+1)!!}{2^n} \\ &= a^{(0)} + \frac{3}{2} \frac{a^{(1)}}{x} + \frac{15}{8} \frac{a^{(2)}}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

Finalement, l'équation (C.41) devient :

$$\frac{1}{8m^4 T K_2^2(M/t)} \int_{4m^2}^{\infty} \sigma(s-4m^2) \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}/T) ds \rightarrow a^{(0)} + \frac{3}{2} \frac{a^{(1)}}{x} + \frac{15}{8} \frac{a^{(2)}}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (\text{C.67})$$

le calcul final de la solution approximative de Boltzmann

Étant donné la solution approximative de $\langle \sigma v_M \rangle$, on peut intégrer l'équation (4.43)

$$\int_{\Delta(x_f)}^{\Delta(\infty)} \frac{d\Delta}{\Delta^2} = -\Lambda' \int_{x_f}^{x_\infty} \frac{\langle \sigma v_M \rangle}{x^2} dx \quad (\text{C.68})$$

Pour calculer l'intégrale gauche de l'équation (C.68), En utilisant $\Delta(x_f) \gg \Delta(\infty)$ et $Y^{eq} \rightarrow 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(x_f)}^{\Delta(\infty)} \frac{d\Delta}{\Delta^2} &= \frac{1}{\Delta_f} - \frac{1}{\Delta_\infty} \\ &\simeq -\frac{1}{\Delta_\infty} \\ &\simeq -\frac{1}{Y_\infty} \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Pour calculer l'intégrale droite de l'équation (C.68), en utilisant $x_\infty \gg x_{out}$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\Lambda' \int_{x_f}^{x_\infty} \frac{\langle \sigma v_M \rangle}{x^2} dx &= -\Lambda' \int_{x_{out}}^{x_\infty} \left[a^{(0)} + \frac{3}{2} a^{(1)} \frac{1}{x} \right] \frac{1}{x^2} \\ &= -\Lambda' \left[\frac{a^{(0)}}{x_{out}} - \frac{a^{(0)}}{x_\infty} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}^2} - \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_\infty^2} \right] \\ &= -\Lambda' \left[\frac{a^{(0)}}{x_f} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}^2} \right] \\ &= \frac{-\Lambda'}{x_f} \left[a^{(0)} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

En faisant correspondre l'équation (C.69) et équation (C.70), on conclut :

$$\begin{aligned}
 Y_\infty &= \frac{x_{out}}{\Lambda' \left[a^{(0)} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}} \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{45}{\pi}} \frac{1}{m_\chi M_p \sqrt{g^*}} \frac{x_{out}}{\left[a^{(0)} + \frac{3}{4} \frac{a^{(1)}}{x_{out}} \right]}
 \end{aligned} \tag{C.71}$$

Nouvelles limites d'intégration dans le centre masse pour l'équation 4.97

Après changement de variables :

$$E_+ = E_i + E_j \quad (\text{D.1})$$

$$E_- = E_i - E_j \quad (\text{D.2})$$

$$s' = m_i^2 + m_j^2 + 2E_i E_j - 2|\vec{p}_i||\vec{p}_j| \cos \theta \quad (\text{D.3})$$

On a :

$$E_i \geq m_i \quad (\text{D.4})$$

$$E_j \geq m_j \quad (\text{D.5})$$

$$|\cos \theta| \leq 1 \quad (\text{D.6})$$

L'addition des deux équations (D.4) et (D.5) permet d'écrire :

$$(E_i + E_j)^2 \geq (m_i + m_j)^2 \quad (\text{D.7})$$

En utilisant la variable de Mandelstam $s' = (E_i + E_j)^2 = (p_i + p_j)^2$, on obtient :

$$s' \geq (m_i + m_j)^2 \quad (\text{D.8})$$

A partir des équations (D.1), (D.2) et (D.3), on obtient la limite de la variable E_+

$$E_+ \geq \sqrt{s'} \quad (\text{D.9})$$

Les valeurs de E_- peuvent être trouvées à partir de la définition de s dans l'équation (C.24), après avoir imposé la limite absolue $|\cos \theta| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 \theta \leq 1$. la limite de cosinus carré de l'angle θ , peut s'écrire

$$\cos \theta = \frac{s' - m_i^2 - m_j^2 - 2E_i E_j}{-2|p_i||p_j|} \leq 1 \quad (\text{D.10})$$

Alors

$$\cos^2 \theta \leq 1 \Rightarrow (m_i^2 + m_j^2 - s' + 2E_i E_j)^2 \leq 4|p_i|^2 |p_j|^2 \quad (\text{D.11})$$

On modifie l'équation ci-dessus

$$\left(m_i^2 + m_j^2 + 2\left(\frac{E_+ + E_-}{2}\right)\left(\frac{E_+ - E_-}{2}\right) - s'\right)^2 \leq 4 \left(\frac{(E_+ + E_-)^2 - 4m_i^2}{4}\right) \left(\frac{(E_+ - E_-)^2 - 4m_j^2}{4}\right) \quad (\text{D.12})$$

$$(2m_i^2 + 2m_j^2 + E_+^2 - E_-^2 - 2s')^2 \leq (E_+^2 + E_-^2 - 4m_i^2 + 2E_+E_-) (E_+^2 + E_-^2 - 4m_j^2 - 2E_+E_-) \quad (\text{D.13})$$

$$s'E_-^2 + 2E_+(m_j^2 - m_i^2)E_- + [s'^2 + m_i^4 + m_j^4 - 2m_i^2m_j^2 - 2s'(m_i^2 + m_j^2)] - s'E_+^2 + 2E_+(m_i^2 + m_j^2) \leq 0 \quad (\text{D.14})$$

$$s'E_-^2 + 2E_+(m_j^2 - m_i^2)E_- + \lambda(s', m_i, m_j) + E_+^2(2m_i^2 + 2m_j^2) - s' \leq 0 \quad (\text{D.15})$$

où $\lambda(s', m_i, m_j)$ est une grandeur dynamique exprimée par la variable Mandelstam (dans le repère du \mathcal{CM})[54]

$$\lambda(s', m_i, m_j) = s'^2 + m_i^4 + m_j^4 - 2m_i^2m_j^2 - 2s'(m_i^2 + m_j^2) \quad (\text{D.16})$$

La résolution de l'équation (D.15) du second ordre relativement à E_+^2 , nous permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\left|E_- - E_+ \frac{m_i^2 - m_j^2}{s'}\right| \leq 2 \frac{\sqrt{\lambda(s', m_i^2, m_j^2)}}{2\sqrt{s'}} \sqrt{\frac{E_+^2 - s'}{s'}} \quad (\text{D.17})$$

Donc

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_j| = \frac{\sqrt{\lambda(s', m_i^2, m_j^2)}}{2\sqrt{s'}} \quad (\text{D.18})$$

Calcul du taux de désintégration pour le processus $A \rightarrow B + C$

Considérons une particule instable A, qui se désintègre en d'autres particules $A=1+2+\dots+n$ de l'état initial $|i\rangle$ à l'état final $|f\rangle$. Le taux de désintégration pour le canal $f = 1\dots n$ est

$$\Gamma_f = \frac{1}{2E_A} \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_A - \sum_{j=1}^n p_j) |M_{fi}(A \rightarrow 1\dots n)|^2 \quad (\text{E.1})$$

Le taux de désintégration pour le processus $A \rightarrow B + C$ est :

$$\Gamma_A = \frac{(2\pi)^4}{2E_A} \int \int |M|^2 \delta^4(p_C + p_B - p_A) \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \quad (\text{E.2})$$

Par La conservation des impulsions et conservation d'énergie on peut écrire :

$$\Gamma_A = \frac{(2\pi)^4}{2E_A} \int \int |M|^2 \delta(E_C + E_B - E_A) \delta^3(p_C + p_B - p_A) \frac{d^3 p_B d^3 p_C}{(2\pi)^6 4E_B E_C} \quad (\text{E.3})$$

Si on pose $p_A = 0 \Rightarrow E_A = m_A$, on obtient :

$$\Gamma_A = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int \int |M|^2 \delta(E_C + E_B - E_A) \delta^3(p_C + p_B) \frac{d^3 p_B d^3 p_C}{E_B E_C} \quad (\text{E.4})$$

Pour l'intégration sur p_B , on obtient :

$$\Gamma_A = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int |M|^2 \delta(E_C + E_B - E_A) \frac{d^3 p_C}{E_B E_C} \quad (\text{E.5})$$

L'hypothèse d'isotropie permet d'écrire $d^3 p_C = 4\pi p_C^2 dp_C$ et en écrivant $p_C = -p_B$, on obtient :

$$\Gamma_A = \frac{1}{8\pi m_A} \int |M|^2 \delta(\sqrt{m_C^2 + p_C^2} + \sqrt{m_B^2 + p_C^2} - m_A) \frac{p_C^2 dp_C}{E_B E_C} \quad (\text{E.6})$$

En utilisant les relation :

$$\begin{cases} G(p_C) = \frac{p_C^2}{E_B E_C} \\ H(p_C) = \sqrt{m_C^2 + p_C^2} + \sqrt{m_B^2 + p_C^2} - m_A \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

L'équation (E.6) peut être écrite comme :

$$\Gamma_A = \frac{1}{8\pi m_A} \int |M|^2 G(p_C) \delta(H(p_C)) dp_C \quad (\text{E.8})$$

Afin de résoudre l'équation (E.8), nous devons utiliser les propriétés de la fonction δ et trouver l'expression pour $\delta(H(p_C))$. Partons de la définition de la fonction δ

$$\int_A^B \delta(y) dy = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 0 < b \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

En remplaçant y par $H(p)$ avec $H(p_0) = 0$ on obtient :

$$\int_{p_1}^{p_2} \delta(H(p)) \frac{dH}{dp} dp = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 < p_0 < p_2 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Mais la fonction Delta est différente de zéro à p_0

$$\int_{p_1}^{p_2} \delta(H(p)) H'(p_0) dp = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 < p_0 < p_2 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

D'après les propriétés de la fonction delta de Dirac, on peut écrire :

$$\int_{p_1}^{p_2} \delta(H(p)) dp = \frac{1}{H'(p_0)} \int_{p_1}^{p_2} \delta(p - p_0) dp \quad (\text{E.10})$$

En retirer les intégrales, nous obtenons l'expression

$$\delta(H(p)) = \frac{\delta(p - p_0)}{H'(p_0)} \quad (\text{E.11})$$

D'après l'équation (E.11) Γ_A peut être écrit comme :

$$\Gamma_A = \frac{1}{8\pi m_A} \int |M|^2 G(p_C) \frac{\delta(p_C - p_0)}{H'(p_C)} dp_C \quad (\text{E.12})$$

Alors :

$$\Gamma_A = \frac{|M|^2}{8\pi m_A} \frac{G(p_0)}{H'(p_0)} \quad (\text{E.13})$$

H' peut être écrit comme :

$$H' = \frac{dH}{dp_C} = \frac{p_C}{\sqrt{m_C^2 + p_C^2}} + \frac{p_C}{\sqrt{m_B^2 + p_C^2}} = \frac{p_C}{E_C} + \frac{p_C}{E_B} = \frac{p_C(E_B + E_C)}{E_B E_C} \quad (\text{E.14})$$

En remplaçant H' et G dans l'équation (E.13), on obtient :

$$\Gamma_A = \frac{|M|^2}{8\pi m_A} \frac{p_0^2}{E_B E_C} \frac{E_B E_C}{p_0(E_B + E_C)} \quad (\text{E.15})$$

où $E_C + E_B = E_A = m_A$ donc, on trouve :

$$\Gamma_A = \frac{|M|^2 p_0}{8\pi m_A^2} \quad (\text{E.16})$$

On peut obtenir Une expression pour p_0 à partir de

$$H(p_0) = 0 \quad (\text{E.17})$$

$$\sqrt{m_C^2 + p_0^2} + \sqrt{m_B^2 + p_0^2} = m_A \quad (\text{E.18})$$

Après quelques étapes :

$$2\sqrt{(m_C^2 + p_0^2)(m_B^2 + p_0^2)} = m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 - 2p_0^2 \quad (\text{E.19})$$

$$4(m_C^2 + p_0^2)(m_B^2 + p_0^2) = (m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 - 2p_0^2)^2 \quad (\text{E.20})$$

$$2m_B^2 m_C^2 = m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_A^2 m_B^2 - 4m_A^2 p_0^2 \quad (\text{E.21})$$

$$4m_A^2 p_0^2 = (m_B^4 - 2m_B^2 m_C^2 + m_C^4) - m_A^2 (m_B^2 - 2m_B m_C + m_C^2) - m_A^2 (m_B^2 + 2m_B m_C + m_C^2) + m_A^4 \quad (\text{E.22})$$

On arrive finalement au résultat :

$$p_0 = \frac{\sqrt{[m_A^2 - (m_B + m_C)^2][m_A^2 - (m_B - m_C)^2]}}{2m_A} \quad (\text{E.23})$$

Programme Mathematica pour le calcul des intégrales (4.70), (4.75), (4.103), (4.106), et (C.11)

- Solution de l'équation (4.70)

```
A=Simplify[Integrate[Sqrt[Energy^2-m^2]*Exp[- Energy/T],
{Energy, m, Infinity}, GenerateConditions \rightarrow False], m > 0]
```

```
résultat= mT BesselK[1,\frac{m}{T}]
```

- Solution de l'équation (4.75)

```
B= Integrate[BesselK[1, x]* x ^3, {x, 0, Infinity}]
```

```
résultat= \frac{3\pi}{2}
```

- Solution de l'équation (4.103)

```
C= Simplify[Simplify[Integrate[(s- m^2)* BesselK[1, Sqrt[s] / T]
Sqrt[s], {s, m^2, Infinity}], m > 0], T > 0]
```

```
résultat=4m T^2 BesselK[1,\frac{m}{T}]
```

- Solution de l'équation (4.106)

```
D= Integrate[BesselK[1, x]* x , {x, 0, Infinity}]
```

```
résultat= \frac{\pi}{2}
```

- Solution de l'équation (C.11)

```
C=Simplify[Integrate[ Energy*Sqrt[Energy^{2}-m^{ 2}]*Exp[- Energy/T],  
{Energy, m, Infinity}, GenerateConditions \rightarrow False], m > 0]
```

```
résultat= m^{2}T BesselK[1,\frac{m}{T}]
```

Bibliographie

- [1] G. Chalons, "Corrections radiatives en Supersymétrie et applications au calcul de la densité relique au-delà de l'ordre dominant", 2010. Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- [2] T.A. Moore (Auteur), R. Taillet (Traduction), "Relativité Générale", De Boeck Supérieur, 2014.
- [3] M. Hobson, G. Efstathiou, et A. Lasenby, "Relativité Générale", De Boeck Bruxelles, 2010.
- [4] Un peu de physique, <http://chaours.rv.pagesperso-orange.fr/physique/Cosmo/flrw.htm>
- [5] N. A. Bahcall, "Hubble's Law and the expanding universe", <https://www.pnas.org/content/112/11/3173>.
- [6] H. Reboul, "Le statut de l'origine en cosmologie moderne", <https://journals.openedition.org/cerri/2850>.
- [7] E. Bergren et D.E. Groom, "astrophysical constants and parameters", <https://pdg.lbl.gov/2012/reviews/rpp2012-rev-astrophysical-constants.pdf>
- [8] E. Kolb et M. Turner, "The Early Universe", Westview Press, 1994.
- [9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264;
- [10] S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579; S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, Phys. Rev. D2 (1970) 1285.
- [11] A. Salam, Originally printed in "Svartholm : Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden", Stockholm (1968) 367-377,
- [12] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, "Advantages of the color octet gluon picture", Physics Letters B47, p365 (1973).
- [13] T. Kinoshita "Quantum Electrodynamics", <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1>
- [14] K. Aoki , Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, et T. Muta, "Electroweak Theory", Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No 73, (1982)
- [15] K. Garrett et G. Duda, "Dark Matter : A Primer", arXiv :hep-ph/1006.2483.
- [16] G. Bertone et al, "Particle Dark Matter : Evidence, Candidates and Constraints", arXiv :hep-ph/0404175.
- [17] N. Jarosik et al, "Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP1) Observations : Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results", arXiv :astro-ph/1001.4744.
- [18] C. Weinheimer, "Proceedings of 10th International Workshop on Neutrino Telescopes", arXiv :hep-ex/0306057.

- [19] R. D. Peccei et Helen R. Quinn 1977.
- [20] K. Kohri et T. Terada, "Primordial Black Hole Dark Matter et LIGO/Virgo Merger Rate from Inflation with Running Spectral Indices : Formation in the Matter-and/or Radiation-Dominated Universe", arXiv :astro-ph/1802.06785.
- [21] J. L. Feng, "Dark Matter and Indirect Detection in Cosmic Rays", arXiv :astro-ph/1211.3116
- [22] H. Cheng et al, "Radiative Corrections to Kaluza-Klein Masses", arXiv :hep-ph/0204342.
- [23] A. M. Sirunyan, "Performance of missing transverse momentum reconstruction in proton-proton collisions at $\sqrt{s}=13\text{TeV}$ using the CMS detector", arXiv :hep-ex/1903.06078.
- [24] J. E. Kim et G. Carosi, "Axions and the Strong CP Problem", arXiv :hep-ph/0807.3125.
- [25] K. Abazajian, G.M. Fuller et al, "Sterile Neutrino Hot, Warm, et Cold Dark Matter", arXiv :astro-ph/0101524.
- [26] X. Shi, G. M. Fuller, "A New Dark Matter Candidate : Non-thermal Sterile Neutrinos", arXiv :astro-ph/9810076.
- [27] S. Dodelson et L. M. Widrow, "Sterile Neutrinos as Dark Matter", arXiv :hep-ph/9303287.
- [28] K. Drukier, K. Freese and D. N. Spergel, Phys. Rev. D33, 3495 (1986).
- [29] A. M. Green et al, "Direct detection of WIMPs", arXiv :astro-ph/1002.1912.
- [30] L. Baudis, "Direct dark matter detection : the next decade", arXiv :astro-ph/1211.7222.
- [31] R. Bernabei, P. Belli, et al, "Final model independent result of DAMA/LIBRA-phase1", arXiv :astro-ph/1308.5109.
- [32] S. C. Kim, H. Bhang et al, "New Limits on Interactions between Weakly Interacting Massive Particles and Nucleons Obtained with CsI(Tl) Crystal Detectors", arXiv :astro-ph/1204.2646.
- [33] P. Meunier, M. Bravin, et al, "Discrimination between Nuclear Recoils and Electron Recoils by Simultaneous Detection of Phonons and Scintillation Light", arXiv :physics/9906017
- [34] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, et al, "GENIUS - a Supersensitive Germanium Detector System for Rare Events", arXiv :hep-ph/9910205.
- [35] C. E. Aalseth, et al, "CoGeNT : A Search for Low-Mass Dark Matter using p-type Point Contact Germanium Detectors", arXiv :astro-ph.CO/1208.5737.
- [36] Z. Ahmed, et al, "Results from the Final Exposure of the CDMS II Experiment", arXiv :astro-ph.CO/0912.3592 .
- [37] L. Berge, et al, "Status of the EDELWEISS Experiment", arXiv :astro-ph/9801199.
- [38] G. Angloher, A. Bento, et al, "Results on light dark matter particles with a low-threshold CRESST-II detector", arXiv :astro-ph.CO/1509.01515.
- [39] E. Aprile, M. Alfonsi, et al, "Dark Matter Results from 225 Live Days of XENON100 Data", arXiv :astro-ph.CO/1207.5988.
- [40] G. J. Alner, H. M. Araujo, et al, "First limits on WIMP nuclear recoil signals in ZEPLIN-II : a two phase xenon detector for dark matter detection", arXiv :astro-ph/0701858.
- [41] D. Y. Akimov, H. M. Araujo, et al "WIMP-nucleon cross-section results from the second science run of ZEPLIN-III", arXiv :astro-ph.CO/1110.4769.

- [42] P. Agnes, T. Alexander, et al, "First Results from the DarkSide-50 Dark Matter Experiment at Laboratori Nazionali del Gran Sasso", arXiv :astro-ph.CO/1410.0653.
- [43] M. Lisanti, "Lectures on Dark Matter Physics", arXiv :hep-ph/1603.03797.
- [44] D. D. Dixon et al, "Evidence for a galactic gamma-ray halo", arXiv :astro-ph/9803237
- [45] Micromegas, <https://lapth.cnrs.fr/micromegas/>
- [46] A. Pukhov, "CalcHEP 2.3 : MSSM, structure functions,event generation, batchs, and generation ofmatrix elements for other packages", arXiv :hep-ph/0412191.
- [47] J. Henri, "FIMP Dark Matter Genesis Produced via Non-Thermal Freeze-In Mechanism",2019.Thèse de master, Université de Jyväskylä.
- [48] L. L. Honorez, "The inert doublet model of dark matter revisited", arXiv :hep-ph/1003.3125.
- [49] L. L. Honorez et al, "The Inert Doublet Model :an Archetype for Dark Matter", arXiv :hep-ph/0612275.
- [50] G. Bélanger, F. Boudjema et al. MicrOMEGAs5.0 : freeze-in. arXiv :hep-ph/1801.03509.
- [51] Lawrence J. Hall , Karsten Jedamzik et al, "Freeze-In Production of FIMP Dark Matter", arXiv :hep-ph/ 0911.1120.
- [52] N. Aghanim et al, "Planck 2018 results. VI. cosmological parameters", arXiv :hep-ph/1807.06209.
- [53] J. Edsjo and P. Gondolo, "Neutralino relic density including coannihilations", arXiv :hep-ph/9704361.
- [54] L. Marleau, "Introduction à la physique des particules", 1997.
- [55] P. Gondolo et G. Gelmini, "Cosmic abundances of stable particles : Improved analysis",Nucl. Phys. B360 (1991).
- [56] S. Banerjee , F. Boudjema et al, "Relic density of Dark Matter in the Inert Doublet Model beyond Leading Order. I) The Heavy Mass Case", arXiv :hep-ph/1906.11269.