

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



جامعة سعد دحلب البليدة
Université SAAD Dahlab de Blida



كلية علوم المهندس
Faculté des Sciences de l'Ingénieur



قسم علم الطيران
Département d'Aéronautique



Projet de Fin d'Études En vue de l'Obtention du Diplôme D'Ingénieur d'État en
Aéronautique



Spécialité : Construction Aéronautique

Option : Structure

Thème

ETUDE VIBRATOIRE DES POUTRES COMPOSITES
STRATIFIEES AVEC EFFET THERMIQUE

Présenté par :

Mr : BEKKOUCHE RABAH

Encadré par :

Mme : A. MAHI (HAMADOUCHE)

Promotion : 2011

REMERCIEMENT

Je tien à remercier en premier lieu, DIEU le tout puissant de m'avoir donné la foi et le courage afin de réaliser ce modeste travail.

Je remercie également mes parents pour leurs soutiens moral et financier durant les années d'étude ainsi qua mon frère et à mes sœurs.

Je tien à remercier ma promotrice Mme HAMADOUCHE qui m'a aidé, conseillé et guidé.

JE remercie aussi le personnel d'AIR ALGERIE, en particulier le personnel de l'atelier structure.

Résumé :

Dans ce travail la poutre composite stratifiée soumise à des contraintes thermiques initiales est étudiée la modélisation est réalisée grâce à la théorie des déformations du premier ordre. Le cisaillement transverse et l'inertie de rotation sont pris en considération. La résolution par la méthode variationnelle de Ritz permet de mettre en relief l'influence de la variation de température, du rapport longueur/épaisseur de l'orientation des fibres des différentes couches, du nombre de couches sur les fréquences naturelles (en Hertz) et sur les fréquences adimensionnelles de la poutre.

Summary:

In this work the laminated composite beam subjected to thermal stresses is studied initial modeling is achieved through the theory of deformations of the first order. The transverse shear and rotational inertia are considered. The resolution by the Ritz variational method allows to highlight the influence of temperature variation, the length / thickness of the fiber orientation of the different layers, the number of layers on natural frequencies (in Hertz) and the dimensionless frequency of the beam.

ملخص:

في هذا العمل سوف ندرس عارضة من المواد المركبة معرضة لضغوط حرارية أولية، وتتسم نمذجتها بواسطة نظرية تشوهات الدرجة الأولى، بإعتبار وجود القص العرضي وعطالة الدوران. من خلال الحل بطريقة ريتز التغيرية يمكن تسليط الضوء على تأثير إختلاف درجة الحرارة، طول على سمك العارضة، إتجاه ألياف طبقات العارضة و عدد طبقاتها على الترددات الطبيعية و لتردداتها بدون أبعاد .

Notations et symboles

A_{ij} : Matrice des rigidités;

a_x, a_y, a_z : Les composés du vecteur d'accélération du point M ;

b : Largeur de la poutre ;

G_{ij} : Coefficients de la matrice de rigidité [C] dans les axes principaux ;

C'_{ij} : Coefficients de la matrice de rigidité [C] en dehors des axes principaux ;

E_i : Module d'Young dans la direction i ;

E_c : Énergie cinétique ;

E_f, E_m : Module d'Young des fibres et de la matrice;

e_k : Epaisseur de la couche ;

$\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z$: Les efforts de volume exercent sur un solide ;

G_{12}, G_{13}, G_{23} : Module de cisaillement ;

G_f, G_m : Module de cisaillement des fibres et de la matrice ;

h : Epaisseur de la poutre ;

h_k : La cote algébrique de la face supérieure d'une couche de stratifiée ;

h_{k-1} : La cote algébrique de la face inférieure d'une couche de stratifiée ;

I_1, I_2, I_3 : Les termes d'inerties;

K : Le nombre des couches ;

k : Facteur de correction en cisaillement ;

\mathcal{L} : Lagrangien ;

L : Longueur de la poutre ;

M^T : Moment thermique ;

$M(x), M(y)$: Moments de flexion ;

$M(x, y)$: Moment de torsion ;

N_x, N_y, N_{xy} : Résultantes en membrane ;

- N^T : Force thermique par unité de longueur ;
 Q_{ij} : Constantes des rigidités réduites dans des axes principaux ;
 Q'_{ij} : Constantes des rigidités réduites en dehors des axes principaux ;
 V_f, V_m : Fractions en volumes des fibres et de la matrice ;
 U : Champs des déplacements ;
 U : Energie potentielle ;
 U_d : Energie de déformation ;
 u, v, w : Déplacements suivant les axes x, y et z ;
 $X_i(M), Y_i(M)$: Les fonctions poutre ;
 z_K : La cote du milieu de la couche K ;
 $\alpha_{ij}^{00}, \beta_{ij}^{00}, \alpha_{ij}^{11}, \beta_{ij}^{11}, \gamma_{ij}^{10}, \theta_{ij}^{01}, \alpha_{ij}^{01}, \alpha_{ij}^{10}$: Les constantes d'intégrations ;
 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: Champ des déformations ;
 $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$: Coefficient de Poissons du composite ;
 γ_f, γ_m : Coefficient de Poissons des fibres et de la matrice ;
 σ_i : Contrainte dans la direction i ;
 σ^T : Contrainte thermique ;
 θ : Angle d'orientation des fibres ;
 ρ : Masse volumique ;
 ρ_s : Masse surfacique ;
 $\bar{\omega}$: Fréquence adimensionnelle ;
 ω : Pulsation en rd/s ;
 ΔT : Différence de température ;
 α_i : Coefficient dilatation thermique suivant i ;
 FSDBT : First shear deformation beam theory ;

Liste des Figures

Figure (I.1) exemples de structure d'un composites.....3

Figure (I.2) : différent types de matériaux composites.....4

Figure (I.3) : Quelques exemples de composites5

Figure (I.4) : Les différentes familles de matrice.....5

Figure (I.5) : Fibre de verre.....6

Figure (I.6) : Fibre de Carbone.....7

Figure (I.7) : Fibre de Kevlar.....8

Figure (I.8) : Principaux matériaux de renfort.....8

Figure (I.9) : Les structures géométriques des composites :.....9

Figure (I.10) : Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite.....10

Figure (I.11) : Pli à Renforcement unidirectionnel.....11

Figure (I.12) : Matériau composite stratifié.....12

Figure (I.13) : Constitution d'un sandwich.....13

Figure (I.14) : Exemple d'une Poutre composite en L.....13

Figure (I.15) : les différents parties en composite d'un A320.....17

Figure (II.1) : Etat de contraintes et de déformations dans un solide.....21

Figure (II.2) : configuration des axes.....25

Figure (II.3) : Sollicitation de cisaillement.....28

Figure (II.4) : Géométrie du stratifié.....30

Figure (IV.1) : Poutre composite stratifiée encastre libre avec effet thermique54

Figure (IV.2) : Organigramme du programme utilisé.....57

Figure (V.1):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=0$ pour les 5^{er} Modes62

Figure (V.2):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=0$ pour les 5^{er} Modes.....63

Figure (V.3):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=40$ pour les 5^{er} Modes.....63

Figure (V.4):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=40$ pour les 5^{er} Modes.....64

Figure (V.5):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=60$ pour les 5^{er} Modes.....65

Figure (V.6):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=60$ pour les 5^{er} Modes.....65

Figure (V.7):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=100$ pour les 5^{er} Modes.....66

Figure (V.8):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs l/h avec la différence de température $\Delta T=100$ pour les 5^{er} Modes.....67

Figure (V.9): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=0$68

Figure (V.10):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour le Mode 5 avec $\Delta T=0$68

Figure (V.11): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=40$69

Figure (V.12):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=40$70

Figure (V.13): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=60$70

Figure (V.14): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=60$71

Figure (V.15): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=100$72

Figure (V.16): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=100$72

Figure (V.17):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ et de la différence de température pour le Mode 1.....73

Figure (V.18):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ et de la différence de température pour le Mode 5.....74

Figure (V.19):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température le Mode 1.....75

Figure (V.20) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur avec $n=4$ pour le Mode 5.....76

Figure (V.21) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1.....76

Figure (V.22) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5.....77

Figure (V.23) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=6$ et $n=6'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 1.....78

Figure (V.24) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=6$ et $n=6'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 5.....78

Figure (V.25) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=4$ et $n=4'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 1.....79

Figure (V.26) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=4$ et $n=4'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 5.....80

Figure (V.27) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1.....80

Figure (V.28) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5.....81

Figure (V.29) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1.....81

Figure (V.30) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5.....82

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (V.1) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=0$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle).....	62
Tableau (V.2) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=0$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles).....	62
Tableau (V.3) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=40$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle).....	63
Tableau (V.4) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=40$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles).....	64
Tableau (V.5) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=60$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle).....	64
Tableau (V.6) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=60$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles).....	65
Tableau (V.7): influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=100$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle).....	66
Tableau (V.8): influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=100$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles).....	66
Tableau (V.9): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=0$	67
Tableau (V.10): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=0$	68
Tableau (V.11) : Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=40$	69
Tableau (V.12) Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=40$	69
Tableau (V.13) : Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=60$	70

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (V.14) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=60$.....	71
Tableau (V.15) : Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=100$.....	71
Tableau (V.16) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=100$.....	72
Tableau (V.17) Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches et des différentes températures pour le mode 1.....	73
Tableau (V.18) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches et des différentes températures pour le mode 5	73

TABLE DES MATIERES

Introduction Générale

Chapitre I : Généralité

I.1 Introduction.....	2
I.2 Présentation Générale des Matériaux Composites.....	2
I.2.1 Définition d'un composite.....	3
I.2.2 Conception des matériaux composites.....	8
I.2.3 Caractéristiques des matériaux composites.....	9
I.2.4 Mise en œuvre des matériaux composites.....	9
I.2.5 Architecture des matériaux composites.....	11
I.3 Définition d'une poutre composite.....	13
I.4 Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés.....	13
I.5 Domaines d'Application des composites et des Poutres en composites.....	14
I.5.1 Les composites dans l'industrie automobile.....	14
I.5.2 Les composites dans la construction navale.....	15
I.5.3 Les composites dans l'aérospatiale.....	15
I.6 Conclusion.....	17

Chapitre II : Modélisation du comportement mécanique

II.1 Introduction.....	19
II.2 Conditions de compatibilité et le champ de déplacement.....	19
II.2.1 Expressions générales du champ de déplacement.....	20
II.2.2 Schémas du premier degré.....	20
II.3 Etat de contraintes et de déformations dans un solide.....	21
II.3.1 Tenseur des déformations.....	21
II.3.2 Champ de déformation.....	22
II.3.3 Tenseur des contraintes.....	22
II.3.4 Champ de contrainte.....	23
II.3.4.1 Simplification des tenseurs de rigidité dans le cadre de la théorie des stratifiés.....	23
II.3.4.2 Expression des constantes de rigidités d'un composite orthotrope dans les axes principaux en fonction des paramètres d'ingénieries.....	25

II.3.5 Expression des constantes de rigidité d'un composite orthotrope en dehors de ses axes principaux	26
II.4 Résultantes et moments.....	28
II.5 Equation constitutive d'un stratifié.....	30
II.5.1 Notation.....	30
II.5.2 L'équation constitutive d'une poutre stratifiée.....	31
II.6 Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré.....	31
II.6.1 La relation fondamentale de la dynamique.....	31
II.6.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane.....	32
II.6.3 Relations fondamentales relatives aux résultantes de cisaillement.....	32
II.6.4 Relations fondamentales relatives aux moments.....	33
II.7 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés.....	33
II.7.1 Energie de déformation.....	33
II.7.2 Energie de déformation thermique.....	34
II.7.3 L'énergie potentielle.....	34
II.7.4 Energie cinétique d'un stratifié.....	34
II.7.5 La fonctionnelle.....	35
II.7.6 Principe de Ritz.....	35
II.7.6.1 Généralité.....	36
II.7.6.2 Convergence.....	36
II.7.6.3 Expression des fonctions de base X_i	36
II.8 Conclusion.....	37

Chapitre III : la théorie générale des stratifiés

III.1 Introduction.....	39
III.2 Déplacements.....	39
III.3 Déformations.....	40
III.4 Contraintes.....	40
III.5 Efforts et moments.....	40
III.6 Les énergies.....	42
III.6.1 L'énergie cinétique.....	42
III.6.2 L'énergie potentielle ou de déformation.....	43
III.6.3 L'énergie de déformation thermique.....	45

III.7 Introduction de la variable adimensionnelle.....	46
III.8 La fonctionnelle.....	48
III.9 Résolution par la méthode de Ritz.....	48
III.10 Conclusion.....	52

Chapitre IV : Analyse numérique :

IV.1 Introduction	54
VI.2 Présentation de l’outil Maple.....	54
VI.3 Description du programme.....	55
VI.4 Description de la méthode de Ritz.....	56
IV.5 Organigramme.....	57
IV.6 Validation du programme	58
IV.7 Conclusion	59

Chapitre V : Résultats et interprétations

V.1 Introduction.....	61
V.2 Influence du rapport L/h sur les fréquences adimensionnelle.....	61
V.3 Influence de l’orientation des couches sur les fréquences adimensionnelle.....	67
V.4 Influence du nombre de couches sur les fréquences adimensionnelle.....	75
V.5 Interprétations des résultats.....	82
V.5.1 Influence du rapport longueur/épaisseur (L/h) sur le comportement vibratoire de la poutre.....	82
V.5.2 Influence de l’angle d’orientation sur le comportement vibratoire de la poutre	83
V.5.3 influence du nombre de couche sur le comportement vibratoire de la poutre.....	84
V.6 Conclusion.....	85

Conclusion générale

Bibliographie

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Un matériau composite est un Matériau en phase solide constitué d'au moins deux constituants dont les qualités respectives se complètent pour former un matériau aux performances globales améliorées.

Les matériaux composites stratifiés ou sandwiches sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel approprié. Les poutres en composite stratifiées sont aujourd'hui utilisées dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie. De plus en plus utilisés dans la conception et la fabrication de pièces mécaniques pour les structures aéronautiques, aérospatiales, maritime, et terrestres....etc. Grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques, elles sont capables de supporter à des sollicitations mécanique et/ou thermique sévères.

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement. Parmi les facteurs liés à l'environnement, ceux qui introduisent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans le cas des matériaux composites, ces phénomènes sont la conséquence de variation de température ou de l'absorption par la matrice polymère d'agent de gonflement tel que la vapeur d'eau. Ces phénomènes induisent des déformations et des contraintes qui peuvent modifier notablement le comportement mécanique des structures en matériaux composites : flambement, vibration libre, vibration forcée... etc.

Leur utilisation dans les différentes industries devient de plus en plus fréquente. Ceci est dû aux avantages appréciables qu'ils présentent, notamment leur légèreté et leur résistance. Cependant, leur emploi nécessite la maîtrise parfaite de leur comportement vibratoire.

Dans le présent travail nous nous proposons d'établir les équations du mouvement libre non amorti de poutre composite stratifiées soumises à des contraintes thermique

initiales. La résolution de ces équations nous permettra de déterminer les fréquences naturelles de la structure étudiée sous l'effet de différentes variations de température.

Ce mémoire sera donc organisé comme suit :

Le premier chapitre traitera quelques généralités sur les matériaux composites, leurs caractéristiques mécaniques et différents types de matériaux en donnant une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite.

Dans le deuxième chapitre, nous exposerons quelques lois du comportement mécanique des stratifiés et divers états de contrainte.

Dans le troisième chapitre, nous citerons les diverses théories des poutres stratifiées et leurs comportements, relations fondamentales et formulation énergétique.

Dans le chapitre quatre, sera réalisée la modélisation du comportement vibratoire de la poutre. par la suite nous présenterons la méthode de résolution du problème aux valeurs propres par l'élaboration d'un programme sous Maple.

Le chapitre cinq, nous présenterons les résultats relatifs aux cas des poutres étudiées lesquels seront interprétés.

Cette étude se terminera par une conclusion générale synthétisant les principaux résultats, suivis par des perspectives.

Chapitre 1
Généralités

Généralités

I.1 Introduction :

Rigidité et solidité sont les premières qualités attendues pour le plancher d'une automobile, pour le tablier d'un pont ou pour le fuselage d'un avion. Avec l'augmentation du coût des hydrocarbures liée à leur raréfaction, un autre critère a pris une grande importance : celui de la légèreté des matériaux qui permet de dépenser moins d'énergie pour déplacer les objets qu'ils constituent. Les propriétés mécaniques d'un objet dépendent bien sûr de sa forme et de la nature de ses constituants mais également de la façon dont ces derniers sont structurés et assemblés. Les progrès des matériaux de construction proviennent aussi bien des recherches relatives à leurs compositions chimiques que celles qui concernent les procédés de fabrication. À titre d'exemple, l'aluminium est de plus en plus utilisé car c'est un métal léger. Comme il est peu résistant aux contraintes mécaniques, il faut souvent l'associer à des pièces d'acier mais il s'avère difficile de faire adhérer solidement ces deux métaux l'un à l'autre.

L'emploi de matériaux plus légers sans perte de solidité et sans augmentation importante des coûts de production sont devenus le principal enjeu de la compétition actuelle entre Boeing et Airbus. Cet objectif est en bonne partie à l'origine de la création récente des ensembles métalliques et composites complexes, à cette fin, les chercheurs et les ingénieurs tendent à remplacer progressivement les pièces métalliques par des pièces hétérogènes dans lesquelles des fibres de carbone sont noyées dans une matrice en polymère. La présence des fibres renforce la résistance mécanique du matériau le long de son axe principal ; la présence de polymère assure à la fois la cohésion de l'ensemble et la résistance du matériau à des sollicitations transverses.

I.2 Présentation Générale des Matériaux Composites :

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les Caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit.

Actuellement, les composites à matrice organique représentent la majorité des matériaux composites; toutefois, il existe également des composites à matrice inorganique (métallique ou céramique) dont la diffusion reste encore marginale.

L'analyse du comportement des matériaux composites et la prévision de leurs propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages... Toutefois, les propriétés mécaniques, électriques, chimiques, photochimiques, thermiques sont largement affectées par celles de la matrice (en particulier par les températures de transition et de fusion pour les thermoplastiques) et cela d'autant plus que la fibre est plus courte et en plus faible proportion. Une bonne connaissance des plastiques renforcés doit donc être fondée sur celle des renforts et des matrices.

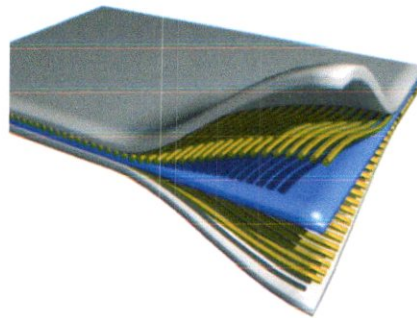


Figure (I.1) : exemples de structure d'un composites

I.2.1 Définition d'un composite :

Un composite est un matériau artificiel moderne dont la structure est composé de deux constituants ou plus, combinés à une échelle microscopique, et qui ne sont pas solubles entre eux. L'un des constituants est appelé **Renfort** noyé dans l'autre constituant appelé **Matrice**.

La phase de renforcement du matériau doit être sous la forme de fibres, particules, ou paillettes. La phase matrice du matériau est généralement continue.

Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique). Leur faible taux d'utilisation vient de son coût encore très élevé. Parmi les composites, on distingue deux types : les composites grandes diffusions (GD) et les composites hautes performances (HP).

Les GD représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (+ de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

Les HP, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP. Ces calculs feront l'objet de divers chapitres.

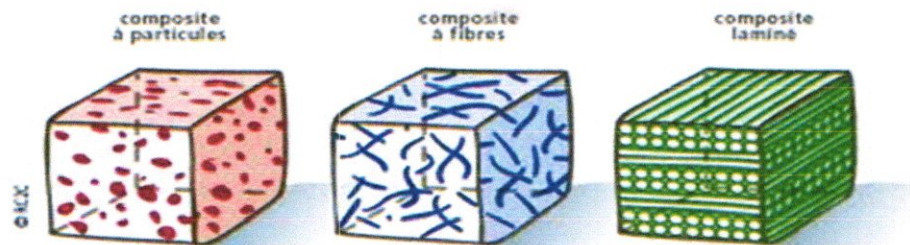


Figure (I.2) : Différent types de matériaux composites

Il faudra toujours tenir compte du fait que l'élaboration de la structure est liée à celle du matériau, que pour les pièces travaillantes, on utilisera plutôt des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotages on utilisera des plastiques renforcés.

Définitions de base :

- Homogène : même propriétés en tout point du matériau.
- Hétérogène : en 2 points différents, propriétés différentes.
- Isotrope : même propriétés dans toutes les directions.
- Isotrope transverse : il existe un axe de symétrie. Symétrie par rapport à une droite.
- Orthotrope : propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- Anisotrope : les propriétés sont différentes selon les différentes directions.

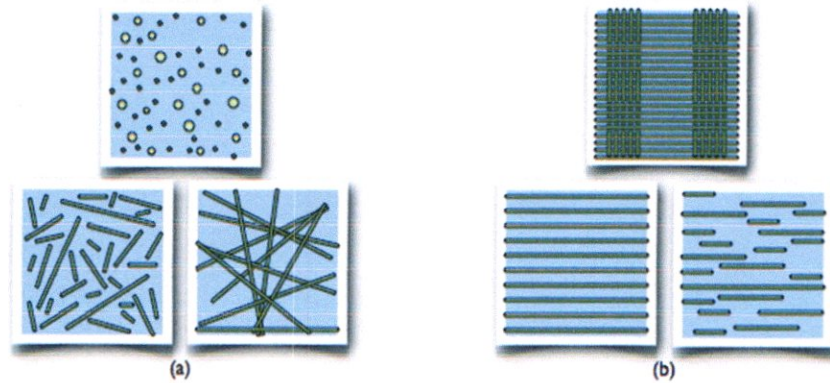


Figure (I.3) : Quelques exemples de composites : (a) ayant un comportement isotrope ou quasi-isotrope, (b) ayant un comportement fortement anisotrope.

❖ La matrice :

Pour des raisons de facilité de mise en œuvre sans pression, ce sont les polymères transformés à l'état liquide qui ont été initialement choisis pour servir de matrices et qui continuent à être le plus souvent employés. Aussi on trouve des matrices en métaux, céramique ou carbone selon le domaine d'utilisation. Les objectifs de l'utilisation de la matrice sont multiples, les plus importants sont :

- Support et protection chimique des fibres ou particules.
- Répartition et transfert de charges.
- Donner la forme désirée au produit final.

Il y a plusieurs types de matrice :

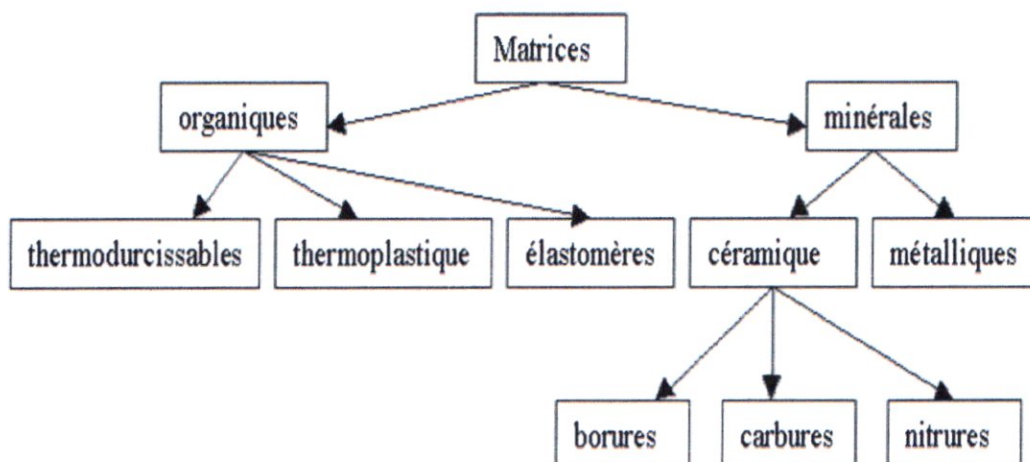


Figure (I.4) : Les différentes familles de matrice

❖ Le renfort :

Ce sont des particules d'environ 50 microns de diamètre. Il existe des renforts fibre courte (de l'ordre du mm), des renforts fibre moyenne ou mi-longue (de l'ordre du cm) et des renforts fibre longue (où les fibres font environ la taille de l'échantillon). Il représente l'armature, squelette, il assure la tenue mécanique (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques), les fibres les plus utilisées dans l'industrie.

- **Fibre de verre :** obtenue à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1500°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues de 3 à 20mm.

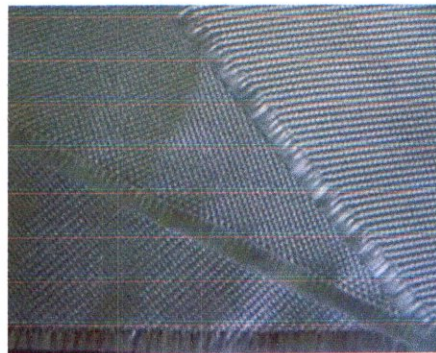


Figure (I.5) : Fibre de verre

Suivant l'application auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- **Fibre E** pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- **Fibre D** pour les applications dans la construction électrique ;
- **Fibre R** pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). Elles offrent, pour un prix raisonnable:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

En Europe, les fibres de verre sont utilisées principalement dans :

- la plupart des composites « GD » (automobile, construction.....)
- certains composites « HP » avec des fibres de verre « R »

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par une rigidité insuffisante pour certaines applications comme les pièces de structure primaire en aéronautique ; et un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

Les fibres de verre utilisées dans les composites ont un diamètre de l'ordre de 10micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (de l'ordre de 3micromètres) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des cancers.

- **Fibre de Carbone** : les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (spécialement une excellente tenue en température), une faible masse volumique, et une bonne conductibilité.

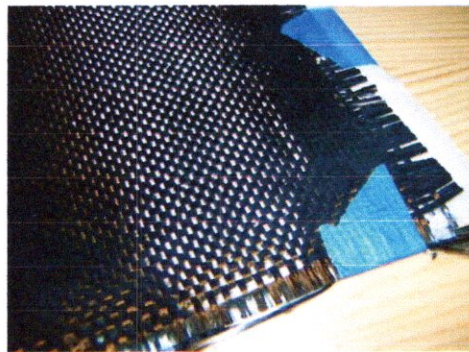


Figure (I.6) : Fibre de Carbone

L'utilisation de la fibre de carbone reste limitée aux secteurs de l'aéronautique et des sports et loisirs, à cause du prix. Cependant, les fibres de carbone souffrent aussi de certains handicaps techniques qui limitent également leur utilisation pour des structures composites tels que: L'allongement à la rupture est insuffisant (inférieur à 2%) comparé à celui des fibres de verre et d'aramide (3 à 4%) ; et aussi une caractérisation encore insuffisante pour permettre une conception fiable à Prix modéré.

- **Fibre Aramide 'Kevlar'** : ces fibres sont des Polyamides aromatiques, ces fibres ont une mauvaise tenue en compression, mais une bonne résistance au choc et à la fatigue. La fibre d'aramide (on la nomme souvent « **Kevlar** », qui est la marque de son créateur, (Dupont de Nemours) utilisée dans les protections balistiques gilets pare-balles.

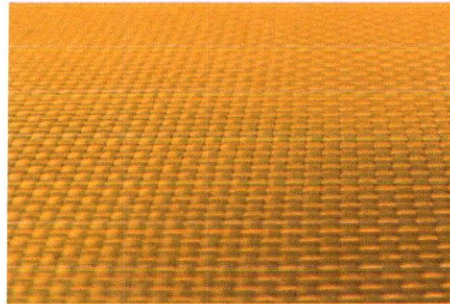


Figure (I.7) : Fibre de Kevlar

Et il y'a d'autre fibres :

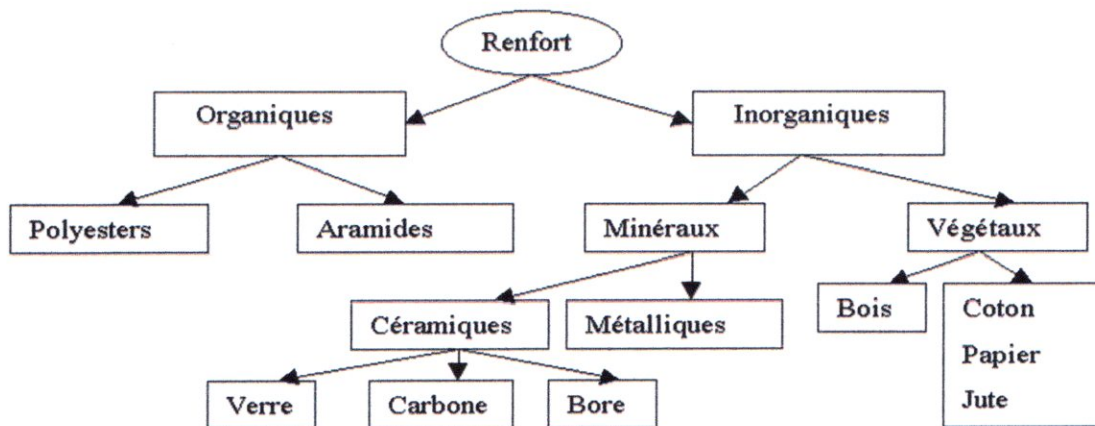


Figure (I.8) : Principaux matériaux de renfort

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Des produits chimiques (charges et additifs) entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de la structure composite.

I.2.2 Conception des matériaux composites :

On conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement, ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif.

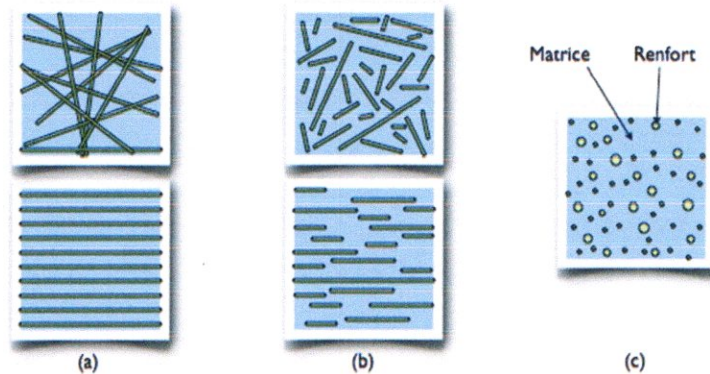


Figure (I.9) : Les structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules.

Pour un composite, on construit sa structure à la demande :

- la nature, la texture, la forme du renfort et son orientation (Figure I.9)
- le taux de renforcement
- la nature de la résine et des charges ou additifs
- la qualité de l'interface renfort-matrice
- la géométrie de la pièce à réaliser
- le procédé de mise en œuvre utilisé.

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts aux quels la structure est soumise pour optimiser le comportement mécanique dans une direction déterminée.

I.2.3 Caractéristiques des matériaux composites :

Les matériaux composites se caractérisent des matériaux classiques par un module élevé, une masse volumique faibles, une bonne tenue en fatigue, une absence de corrosion, et ne se plastifient pas. De plus, les formes complexes sont aisément réalisables par moulage, ils vieillissent sous l'action de l'humidité et la chaleur, ils sont insensibles aux produits chimiques courant de la mécanique comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole (sauf les décapants de peinture attaquent les résines époxydes), mais ils ont une tenue aux impacts et aux chocs très moyenne/matériaux métalliques.

I.2.4 Mise en œuvre des matériaux composites :

Les méthodes de mise en œuvre spécifiques aux matières plastiques renforcées ont contribué à l'évolution des termes utilisés pour désigner ces matériaux depuis leur origine, c'est-à-dire depuis une cinquantaine d'années.

Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans la rubrique « Composites ».

Trois opérations sont indispensables:

- 1- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- 2- Mise en forme à la géométrie de la pièce.
- 3- Durcissement du système.

Soit par polycondensation et réticulation (ou polymérisation) pour les matrices thermodurcissables, Soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques.

Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est par moulage :

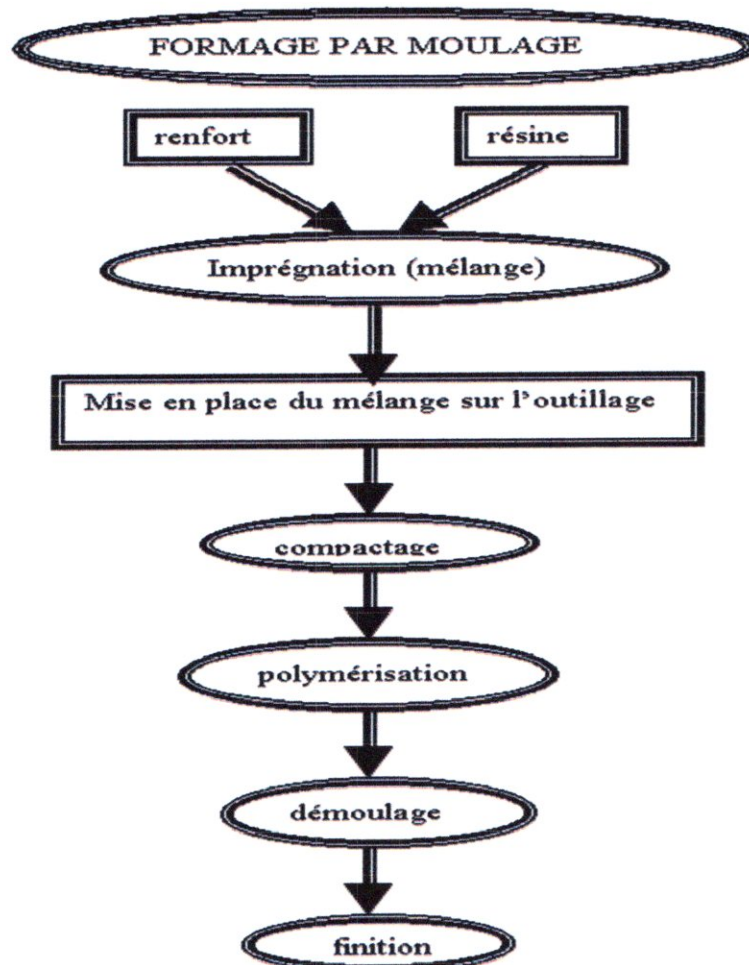


Figure (I.10) : Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite

Les procédés les plus importants sont :

Les procédés d'obtention de pièces composites les plus répandues sont :

1. Fabrication par Moulage
2. Pultrusion
3. Pultrusion Thermoplastique
4. Injection des Thermoplastiques Renforcés
5. Enroulement Filamentaire
6. Enroulement Filamentaire Thermoplastique
7. Centrifugation
8. Moulage des TRE

I.2.5 Architecture des matériaux composites :**a- Monocouches :**

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

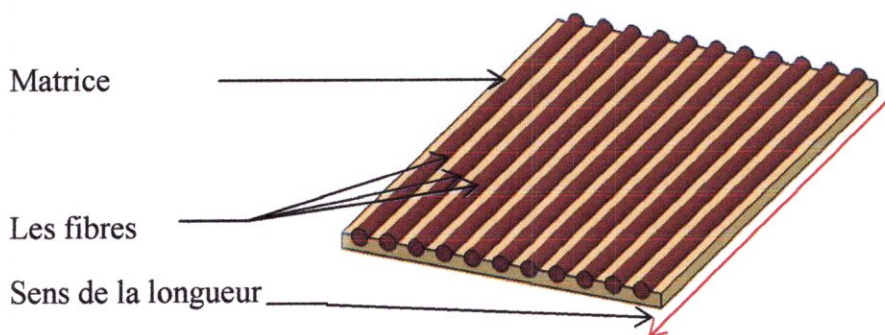


Figure (I.11) : Pli à Renforcement unidirectionnel

b- Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure I.12).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

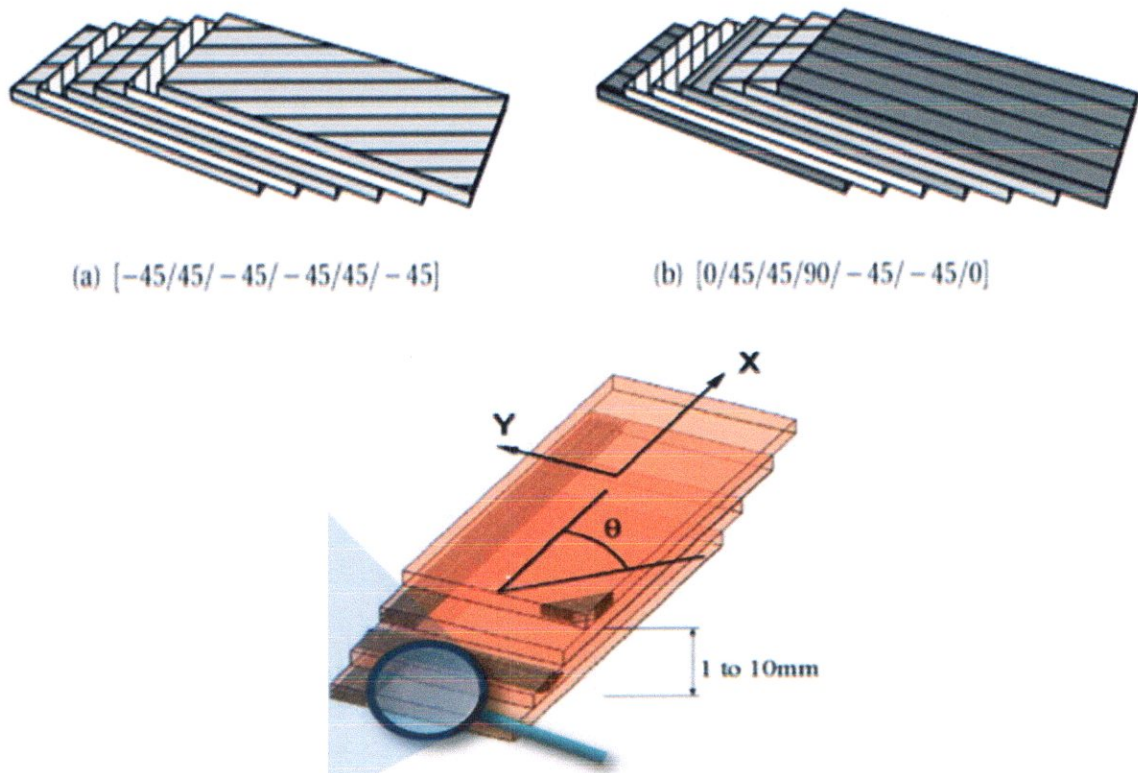


Figure (I.12) : Matériau composite stratifié

c- Sandwich :

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Fig.1.13). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu.

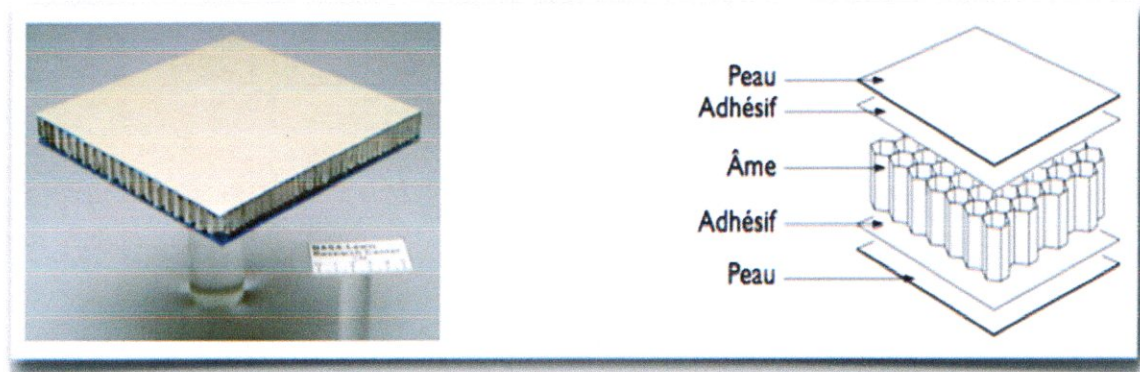


Figure (I.13) : Constitution d'un sandwich

Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

I.3 Définition d'une poutre composite :

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, les rails de chemin de fer, les ponts d'aérospatiale, la robotique et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions (Figure I.14).

En ingénierie moderne, une poutre classique est remplacée par une poutre composite pour sa légèreté et sa résistance.



Figure (I.14) : Exemple d'une Poutre composite en I

I.4 Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés :

Le collage est une technique d'assemblage courante consiste en l'adhésion par attraction moléculaire entre deux parties à coller et un adhésif interposé qui doit assurer la transmission des efforts.

On peut citer pour principaux avantages de ce mode d'assemblage des couches d'un stratifié :

- La répartition des contraintes de liaison sur une surface importante
- La possibilité d'optimiser la géométrie et les dimensions du collage
- La légèreté de l'assemblage
- Les propriétés d'isolation et d'étanchéité de l'adhésif.

I.5 Domaines d'Application des composites et des Poutres en composites :

Les poutres composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments... Les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire... Sports et loisirs,etc.

Pour beaucoup d'applications structurales, comme sur les plates-formes pétrolières offshore, les composites à matrice polymère apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux, du fait principalement de leur légèreté. Pourtant, l'industrialisation de solutions composites est délicate, car les avantages compétitifs sont amoindris par les surcoûts induits, et surtout, par la difficulté prévoira l'évolution des propriétés d'usage de ce type de matériaux, notamment sous sollicitations environnementales et mécaniques couplées.

I.5.1 Les composites dans l'industrie automobile :

Les matériaux organiques composites à matrices thermoplastiques ou thermodurcissables renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour satisfaire certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules.

Généralement, l'habitacle (habillage intérieur) d'un véhicule est essentiellement constitué de matériaux polymères et de composites, qui à eux seuls représentent environ 50 % de la quantité utilisée sur un véhicule tant en Europe qu'aux États-Unis :

- 48 % pour les véhicules nord-américains en 1994
- 50 à 60 % (y compris les insonorisant) pour l'ensemble de la gamme actuelle Renault.

Les principales applications concernent : la planche de bord et le poste de conduite, les ébénisteries et les habillages de portes, les garnitures de toit, les sièges, la tablette arrière, les tapis de sol et les textiles.

Les principales applications concernent aussi les accessoires tels que: les peaux de boucliers, les calandres, les grilles d'auvent, les enjoliveurs de roues, les rétroviseurs, les feux de signalisation, les bras d'essuie-vitre, les baguettes, les becquets, les ailerons, les poignées de porte, etc.

I.5.2 Les composites dans la construction navale:

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux Techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications navales.

A partir de 1955, l'apparition des tissés de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement...

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l'eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification.

I.5.3 Les composites dans l'aérospatiale :

Les constructeurs aéronautiques font de plus en plus appel aux matériaux composites du type matrice polymère/fibres de carbone continues pour réduire la masse des aéronefs.

La pénétration de ces matériaux est passée de 20 % pour l'Airbus A340 à plus de 50 % pour le futur Boeing B787. La réduction des coûts de fabrication à qualité mécanique constante passe par une intégration forte des phases de conception et de fabrication : sélection concomitante des constituants, semi-produits et modes d'assemblage.

L'essai peut lui-même être en phase de développement lorsqu'il s'agit d'un système original. Les poutres composites à base de fibres occupent une place de plus en plus importante dans la construction d'avions, d'hélicoptères, de missiles, de lanceurs et de satellites, avec, en tête, les composites renforcés par des fibres de carbone (CFRP), dont la masse est composée à 60 % de fibres et à 40 % de résine. Mais il existe également des structures sandwichs et alvéolaires, les stratifiés fibres-métal, les composites à fibres de verre, sans oublier les fibres céramiques destinés notamment aux environnements à température très élevées tels que les moteurs de fusées.

Le GLARE composé principalement d'aluminium et de fibre de verre est utilisé en aéronautique. Les composites ont fait leur entrée chez Airbus en 1972 lorsque l'avionneur décide de les utiliser pour les bords d'attaque de la dérive de l'A300B.

En 1982, très en avance sur le reste de l'industrie, l'avionneur européen étend leur présence aux déporteurs de sol et aux gouvernes de profondeur et de direction de l'A310-200. Les premières structures primaires, notamment de la dérive de l'A310-300 et de l'empennage horizontal et des volets de l'A320 suivent en 1987. Puis, c'est le tour de la gamme long-courrier avec l'empennage horizontal et vertical qui servent également de réservoirs de carburant, les gouvernes de profondeur et de direction, les volets, les ailerons, les déporteurs, les trappes d'atterrissage ainsi que divers éléments de carénage de l'A340. Et la série des innovations révolutionnaires continue ensuite, par exemple avec le développement d'un support de quille en CFRP pour l'A340-500/-600, et surtout avec le bouclier de pressurisation pour ce même modèle, première pièce composite destinée à la partie pressurisée d'un fuselage.

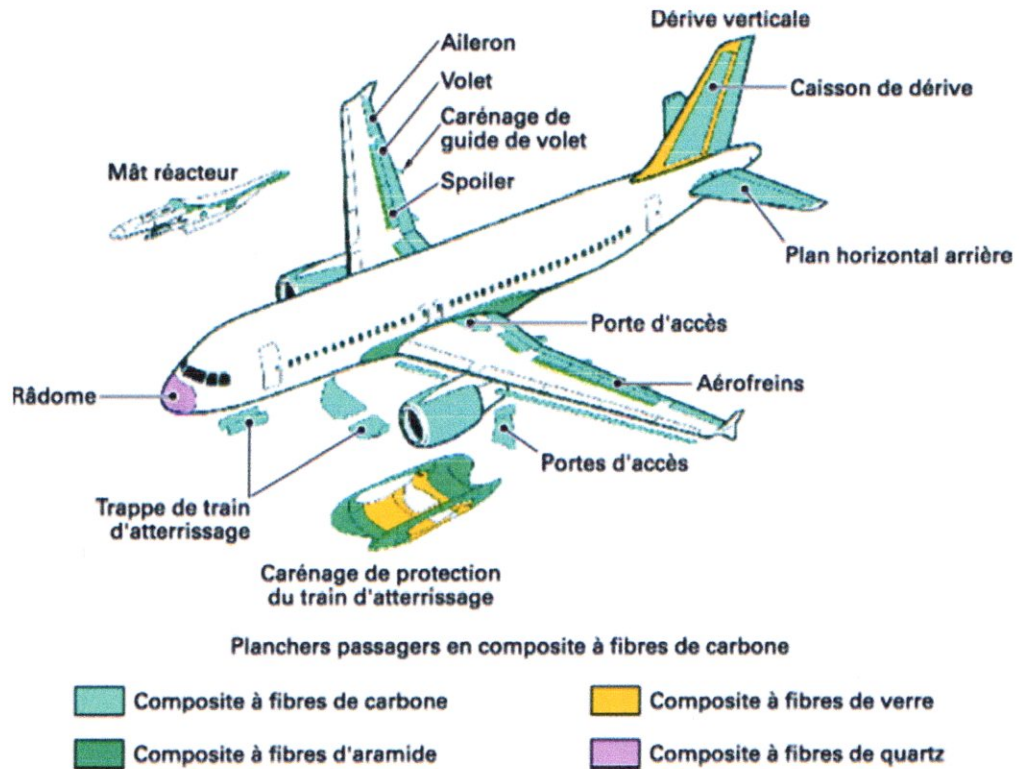


Figure (I.15) les différents parties en composite d'un A320

I.6 Conclusion:

Dans Ce chapitre nous somme arrives à avoir une idée sur les matériaux composites.

Nous avons vu leurs définitions, leurs constituants et leurs architectures, nous remarquons que les matériaux composites sont différents des matériaux classiques en se basant sur leurs excellentes propriétés mécaniques, à travers cela nous pouvons maintenant aborder le problème de vibration d'une poutre composite car la connaissance de quelques éléments mécaniques des composites est indispensable. Dans le chapitre qui suit, nous allons aborder la théorie des stratifiés.

Chapitre II

La théorie générale des stratifiés

La théorie générale des stratifiés

II.1 Introduction :

Les recherches menées durant les vingt dernières années permettent de mieux décrire le comportement des matériaux composites à matrice céramique ou organique.

La modélisation du comportement est un ensemble de lois qui a pour objectif de caractériser une classe limitée (même si elle est vaste) de milieux matériels soumis à certaines sollicitations extérieures d'origine mécanique ou thermique. Ces lois sont évidemment déduites de l'expérience. Toutefois, leur forme ne peut être totalement arbitraire. Une des premières exigences qu'on leur impose est de faire en sorte que le second principe de la thermodynamique soit satisfait.

Il sera également demandé aux lois de comportement de respecter les symétries du milieu matériel étudié et de vérifier des conditions liées à la stabilité des équilibres.

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres.

L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés.

II.2 Conditions de compatibilité et le champ de déplacement :

Il existe un lien entre déplacements et déformations, et entre les déformations elles-mêmes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right)$$

II.2.1 Expressions générales du champ de déplacement :

L'expression de déplacement en tout point M d'une poutre, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynôme en z , généralement limitée au degré trois, et de coefficients dépendant de (x, y) . Le champ de déplacement est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\psi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Cette forme du champ de déplacement répond aux conditions de compatibilité des déformations (II.1), et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des poutres et plaques lors de la déformation. Dans le cas d'un problème de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans la relation (II.2).

Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (II.2), en série de la variable z à coefficients en (x, y) , à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$. Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u(x, y, 0) \\ v_0(x, y) &= v(x, y, 0) \\ w(x, y) &= w(x, y, 0) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

II.2.2 Schémas du premier degré :

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Kirchhoff) se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Les schémas du premier degré permettent de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer au 2^e degré, voire au 3^e degré.

II.3 Etat de contraintes et de déformations dans un solide :

La notion de déformation d'un milieu continu naît de la comparaison entre une configuration dite « initiale » et une configuration qualifiée de « finale ».

Ce chapitre présente quelques notions générales portant sur les lois de comportement des milieux anisotropes et plus particulièrement des matériaux orthotropes et isotropes transverses parmi lesquels figurent les composites unidirectionnels.

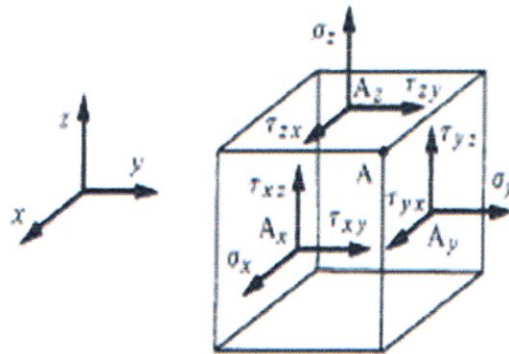


Figure (II.1) : Etat de contraintes et de déformations dans un solide

II.3.1 Tenseur des déformations :

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique défini par la théorie de linéarité (dite des petites déformations) par la formule :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), & \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (II.5)$$

Le tenseur des déformations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (II.6)$$

II.3.2 Champ de déformation :

Le champ des déformations se déduit de l'équation (II.2) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \psi_z + 2z\phi_z\end{aligned}\quad (\text{II.7})$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) + z \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial x} + 2\phi_x \right) + z^2 \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial x} + 3\varphi_x \right)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

II.3.3 Tenseur des contraintes :

En tout point P d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté $\sigma_{ij}(M)$ et représenté par la matrice :

$$\sigma_{ij}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \sigma_{ij} \quad (\text{II.8})$$

Par définition le tenseur des contraintes $\sigma_{ij}(M)$ est symétrique c.à.d.

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}.$$

La formulation de la contrainte s'écrit comme suit :

$$\sigma_x = Q'_{11}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + Q'_{12}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Pour une poutre} \quad Q'_{12}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) = 0.$$

$$\sigma_x = Q'_{11}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) \quad (\text{II.10})$$

II.3.4 Champ de contrainte :

Comme $\sigma(M)$ est symétrique, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ pour tout $i \neq j$, Nous utiliserons indifféremment les deux notations $(1,2,3) = (x, y, z)$.

L'état des contraintes en un point M de stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations, le champ de contrainte rapportée aux axes de référence du stratifié $(Oxyz)$ s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Où C'_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k .

Dans le cas général, le champ des déformations est donné par les expressions (II.7).

Il en résulte que les contraintes dans la couche k sont des polynômes en z . La théorie des stratifiés a pour objet de simplifier le problème à trois dimensions (x, y, z) , la réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur, cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments.

II.3.4.1 Simplification des tenseurs de rigidité dans le cadre de la théorie des stratifiés:

La théorie élémentaire des stratifiés fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la poutre, par rapport aux autres composantes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$.

Avec l'hypothèse précédente, la relation (II.10) contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Quelque simplification de tenseur de rigidité :

➤ **Matériau orthotrope :**

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère.

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

9 constantes d'élasticité

➤ **Matériau unidirectionnel :**

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe Oz. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{22}-C'_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

5 constantes d'élasticité

➤ **Matériau isotrope :**

Le matériau isotrope est un matériau possédant même propriétés dans toutes les directions.

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{11} & C'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{12} & C'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{11}-C'_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{11}-C'_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{11}-C'_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

2 constantes d'élasticité

II.3.4.2 Expression des constantes de rigidités d'un composite orthotrope dans les axes principaux en fonction des modules de l'ingénieur :

Les constantes de rigidités sont :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} C_{13} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} C_{23} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \tag{II.16}$$

$$C_{44} = G_{23} C_{55} = G_{13} C_{66} = G_{12}$$

$$\text{Avec } \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \tag{II.17}$$

Avec :

E_1, E_2, E_3 : Modules de YOUNG du composite dans les directions 1, 2 et 3 ;

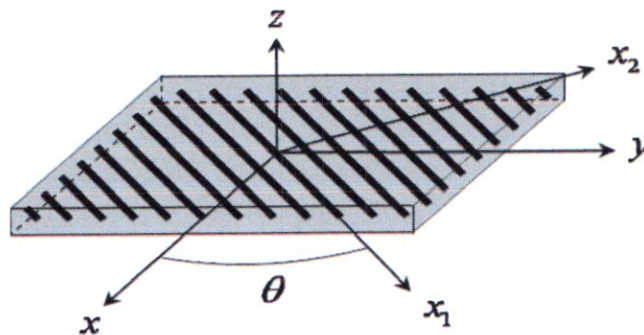
G_{12}, G_{13}, G_{23} : Module de cisaillement du composite

$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$: Coefficient de poisson du composite. Il existe un lien entre les modules

d'élasticité et les coefficients de Poisson : $\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$ (II.18)

II.3.5 Expression des constantes de rigidité d'un composite orthotrope en dehors de ses axes principaux :

La direction des fibres fait un angle θ avec la direction x de référence :



(x_1, x_2, z) Axes de référence d'un pli ; (x, y, z) Axes de référence d'un stratifié.

Figure (II.2) configuration des axes.

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
C'_{13} &= C_{13} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\
C'_{14} &= 0C'_{15} = 0 \\
C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \cos^4 \theta \\
C'_{23} &= C_{23} \cos^2 \theta + C_{13} \sin^2 \theta \\
C'_{24} &= 0C'_{25} = 0 \\
C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (\text{II.19}) \\
C'_{33} &= C_{33}C'_{34} = 0C'_{35} = 0 \\
C'_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta \\
C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\
C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
C'_{46} &= 0 \\
C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta \\
C'_{56} &= 0 \\
C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
\end{aligned}$$

L'état de contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ et les déformations $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$, correspond à l'état des contraintes planes. Les contraintes dans la couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité Q'_{ij} suivants :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Les coefficients Q'_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte planes hors axes principaux. Les expressions des coefficients Q'_{ij} de la matrice de rigidité réduite de la couche k sont:

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (\text{II.21}) \\
 Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
 \end{aligned}$$

Les coefficients Q_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte planes dans les axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$$E_{LT} = E_f V_f + E_m V_m \quad \nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

$$E_T = \frac{I}{\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}} \quad G_{LT} = \frac{I}{\frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f}} \quad (\text{II.23})$$

E_f, E_m : Modules de YOUNG des fibres et de la matrice respectivement ;

V_f, V_m : Fractions en volume des fibres et de la matrice respectivement ;

ν_f, ν_m : Coefficients de POISSON des fibres et de la matrice respectivement ;

G_f, G_m : Modules de cisaillement des fibres et de la matrice respectivement ;

La 5^{ème} constante élastique est en fonction des autres constantes et peut être déterminée du fait que la matrice $[Q]$ est symétrique.

$$\nu_{21} \cdot E_{11} = \nu_{12} \cdot E_{22} \quad ; \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}} \quad (\text{II.24})$$

II.4 Résultantes et moments :

1) Résultantes en poutre :

Le champ des résultantes en poutre, noté $N(x)$, est défini par :

$$N(x) = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \tag{II.25}$$

Et pour la contrainte thermique :

$$N^T(x) = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^T dz \tag{II.26}$$

$\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en poutre dans la couche K .

Soit dans le stratifié :

$$N(x) = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_x)^K dz \tag{II.27}$$

2) L'effort de cisaillement :

La résultante en cisaillement est définie par :

$$Q(x, z) = A_{55} \gamma_{xz} \tag{II.28}$$

$$\text{Tell que } A_{55} = bk \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_{55}]^K dz \tag{II.29}$$

Et k : est le facteur de correction du cisaillement.

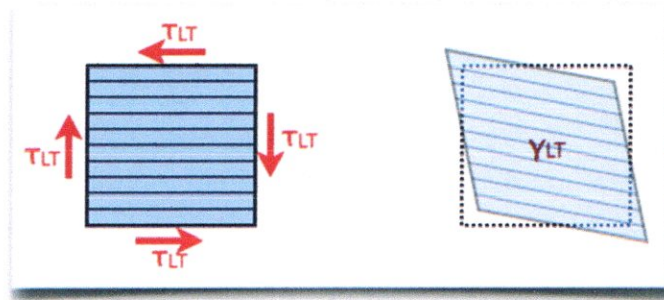


Figure (II.3) : Sollicitation de cisaillement "longitudinal/transversal".

3) Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \tag{II.30}$$

Où $\sigma_k(M)$ est le vecteur des contraintes en membrane dans la couche k .

Soit dans le stratifié :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{II.31})$$

4) Résultante en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{II.32})$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

5) Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{II.33})$$

M_x et M_y Sont les moments de flexion, et M_{xy} les moments de torsion.

II.5 Equation constitutive d'un stratifié :

II.5.1 Notation :

Le stratifié constitué de n couches numérotées de la face inférieure a la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence (Oxy) et l'axe O_z est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches, chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

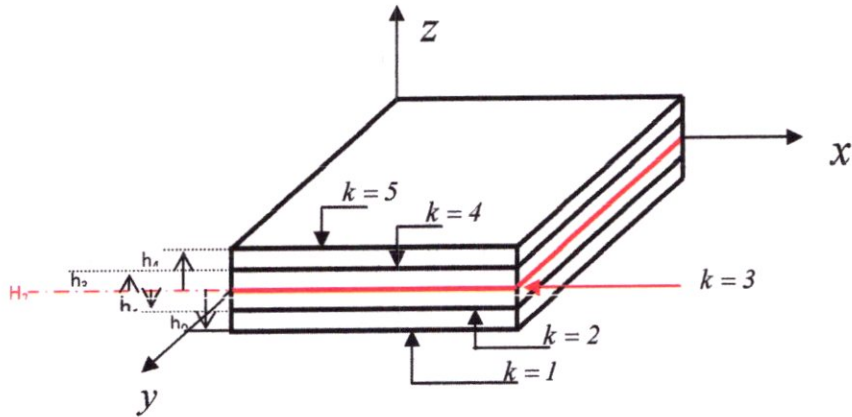


Figure (II.4) Géométrie du stratifié

II.5.2 L'équation constitutive d'une poutre stratifiée :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée, exprime les résultantes en membrane et en cisaillement et les moments de flexion et de torsion en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.31), (II.32) et (II.26), suivant une seule écriture matricielle sous la forme:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \tag{II.34}$$

Et: $Q_z = 0, \sigma_{zz} = 0$ (II.35)

Les termes des matrices peuvent être exprimés en introduisant; l'épaisseur e_k , et la cote z_k du centre de la couche k , sous la forme :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2)(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3)(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12}) \\
 F_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(C'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (C'_{ij})_k e_k
 \end{aligned} \tag{II.36}$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} ET F_{ij} de l'équation constitutive d'un stratifié, s'expriment donc à partir des constantes de rigidité des couches .

II.6 Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré :

II.6.1 La relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + \mathcal{F}_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \mathcal{F}_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \mathcal{F}_z &= \rho a_z\end{aligned}\tag{II.37}$$

$(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)$ sont les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, champ magnétique...)

(a_x, a_y, a_z) sont les composantes du vecteur accélération du point M.

ρ : Est la masse volumique en un point M.

En introduisant les relations (II.9) et (II.33) dans la relation (II.36). La relation fondamentale pour un stratifié s'écrit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}\tag{II.38}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}\tag{II.39}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\tag{II.40}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}\tag{II.41}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}\tag{II.42}$$

Les grandeurs ρ_s, R, I_{xy} sont déterminés pour un stratifié de masse volumique ρ_K pour chaque couche par :

$$\rho_s = I_1 = \sum_{K=1}^n \rho_K (h_K - h_{K-1})\tag{II.43}$$

$$R = I_2 = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n \rho_K (h_K^2 - h_{K-1}^2)\tag{II.44}$$

$$I_{xy} = I_3 = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^n \rho_K (h_K^3 - h_{K-1}^3)\tag{II.45}$$

II.6.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.46})$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{II.47})$$

II.6.3 Relations fondamentales relatives aux résultantes de cisaillement :

$$F_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.48})$$

II.6.4 Relations fondamentales relatives aux moments :

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.49})$$

$$B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{II.50})$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence des forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces.

II.7 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet. Dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche des solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés.

II.7.1 Energie de déformation :

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant l'expression :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv \quad (\text{II.51})$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déformations par :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \quad (\text{II.52})$$

Après développement de la formule d'énergie de déformation et en introduisons les efforts et les moments il a résulté :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left(A_{11} (\epsilon_x^0)^2 + 2B_{11} K_x \epsilon_x^0 + D_{11} K_x^2 + A_{11} \gamma_{xz}^2 \right) dx \quad (\text{II.53})$$

Et finalement la forme finale de l'énergie de déformation :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left(\Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (\text{II.54})$$

Dans le cas d'un stratifié symétrique $B_{11} = 0$ et Le déplacement longitudinal u est négligé devant le déplacement transversal w .

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_{11} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \Psi^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \quad (\text{II.55})$$

II.7.2 Energie de déformation thermique:

Sous l'influence de la variation de température sur les faces inférieure et supérieure du stratifié il y'a création de contrainte dite contrainte thermique qui agit sur la déformation avec une énergie de déformation thermique qui s'écrit :

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^L N^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{II.56})$$

En introduisant la contrainte N^T , donc :

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{N_x^T}{L} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 \cos^2 w t d\xi \quad (\text{II.57})$$

II.7.3 L'énergie potentielle :

$$U = U_d + U_T \quad (\text{II.58})$$

Donc pour un stratifié orthotrope, symétrique :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{A_{55}}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{dW}{d\xi} + \frac{N_x^T}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \right] \cos^2 \omega t d\xi \quad (\text{II.59})$$

II.7.4 Energie cinétique d'un stratifié :

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dv = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right) dv \quad (\text{II.60})$$

En prenant en compte le déplacement $\bar{U}(x, z, t)$, $\bar{W}(x, z, t)$ et on les intègre à notre équation nous retrouvons la forme suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dv \quad (\text{II.61})$$

En intégrant et en supposant que l'énergie cinétique de rotation due au cisaillement transverse est nulle et en substituant $\partial \Psi / \partial t$ dans l'équation :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + 2 I_2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] + I_4 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (\text{II.62})$$

II.7.5 La fonctionnelle :

Pour résoudre des problèmes de mécanique, on utilise des principes vibrationnels faisant intervenir la fonctionnelle, que l'on désigne le plus souvent sous le terme de « π ».

$$\pi = U - E_c \quad (\text{II.63})$$

E_c : Energie cinétique

U : L'énergie potentielle

II.7.6 Principe de Ritz :**II.7.6.1 Généralité :**

Les méthodes d'approximations sont utilisées lorsque les solutions exactes du problème de la mécanique des solides déformables ne peuvent être trouvées. Le principe générale de l'approximation d'une solution $u(M)$ consiste à rechercher la meilleure approximation, que nous noterons $\tilde{u}(M)$, satisfaisant au mieux les conditions physiques auxquelles obéit la solution $u(M)$ sur son domaine d'étude.

Parmi les méthodes d'approximation, la méthode de Ritz, basée sur une approche variation elle, fournit une méthode efficace pour obtenir des solutions approchées au problème de la mécanique des solides déformables. La méthode de Ritz consiste à rechercher une approximation appartenant au sous-espace de fonction de base $X_i(M)$ sous la forme :

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n A_i X_i(M) \quad (\text{II.64})$$

Les fonctions X_i sont des fonctions connues, choisies a priori et dont l'ensemble constitue la base fonctionnelle. Les coefficients A_i , à déterminer, sont appelés les coordonnées généralisées. Les fonctions de base X_i doivent satisfaire les conditions de continuité, les déplacements imposés aux frontières, et forment une base fonctionnelle complète pour assurer les conditions de convergence de l'approximation. Les fonctions de base doivent également être dérivables à un ordre au moins égal à celui correspondant aux équations différentielles. L'approximation recherchée est alors celle qui rend extrémale l'énergie approchée :

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t_1} \pi dt \right] = 0 \quad (\text{II.65})$$

Cette approximation est caractérisée par un extrémum relatif. L'énergie approchée apparaît donc sous forme d'une fonction des coefficients A_i et l'approximation recherchée est caractérisée par les n conditions de stationnarité de π par rapport aux coefficients A_i , suivant :

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = 0 \text{ et } \frac{\partial \pi}{\partial B_i} = 0 \quad (\text{II.66})$$

Remarque : $\pi = 0$ Pour le cas statique.

L'énergie s'écrit sous une forme quadratique des coefficients A_i , et il en résulte que les conditions de stationnarité conduisent à un système de n équations linéaires, permettant de déterminer les n coefficients de A_i .

II.7.6.2 Convergence :

Pour assurer une convergence des solutions approchées lorsque n augmente, la base fonctionnelle X_i doit être complète. Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction $u(M)$ dans le domaine de définition, en augmentant le nombre de coordonnées généralisées soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u(M) - \sum_{i=1}^n A_i X_i(M)] = 0 \quad (\text{II.67})$$

II.7.6.3 Expression des fonctions de base X_i :

Il existe deux solutions approchées, la solution par des fonctions polynomiales, et la solution par des fonctions trigonométriques et hyperboliques.

➤ La solution approchée par des fonctions polynomiales :

Nous choisissons des fonctions polynomiales de la forme :

$$X_i(M) = (x^2 - a x)^2 x^{i-1} \quad (\text{II.68})$$

Dans le cas où $i = 1$, l'approximation (II.68) réduit à :

$$X_1(M) = (x^2 - a x)^2 \quad (\text{II.69})$$

➤ La solution approchée par des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

Cette approximation développée par D. Young, pour obtenir les fréquences propres d'une poutre isotrope et adaptée par J.M. Whitney à l'étude de la flexion des stratifiés, consiste à exprimer les solutions approchées sous la forme :

$$X_i(M) = \cos \frac{\lambda_i x}{a} - \cosh \frac{\lambda_i x}{a} - \gamma_i \left(\sin \frac{\lambda_i x}{a} - \sinh \frac{\lambda_i x}{a} \right) \quad (\text{II.70})$$

II.8 Conclusion :

Dans ce chapitre on a développé les éléments qui sont applicables à la résolution d'un problème de comportement vibratoire d'un matériau composite, les relations établies précédemment dans le cas général se simplifient au cas où le problème peut être ramené à un problème moins compliqué cela dépendra de notre choix pour le type de matériau (stratifié ou non, à un pli ou à plusieurs, à une dimension ou plus, etc.) tous ces choix peuvent influencer sur la complexité de la résolution de notre problème.

Nous allons entamer notre analyse du comportement dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Modélisation du comportement mécanique des stratifiés

Modélisation du comportement mécanique des stratifiés

III.1 Introduction :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres.

L'importance de développer une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés à partir d'essais de flexion réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

Dans ce chapitre on a besoin de revoir les concepts et relations données par la résistance des matériaux appliquée aux poutres isotropes (en matériaux classiques), La théorie des poutres considère que la longueur L de la poutre est très supérieure à sa largeur b , l'objectif de ce chapitre est de schématiser le comportement mécanique des poutres stratifiées sollicitées à la flexion, pour simplifier au mieux l'analyse de la structure. Nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, z) de difficulté moindre.

Par la suite nous présenterons la méthode de Ritz qui va nous permettre de réaliser la résolution de notre problème.

III.2 Déplacements :

Le schéma de déplacement est un schéma du premier degré, qui est développé à partir du plan de référence, et fait ensuite une hypothèse supplémentaire, qui consiste à négliger le déplacement suivant la direction Oy (le déplacement est considéré comme indépendant de la coordonnée suivant la largeur de la poutre).

$$\bar{U}(x, z, t) = u(x, t) + z\psi(x, t) \quad (\text{III.1})$$

$$\bar{W}(x, z, t) = w(x, t)$$

III.3 Déformations :

Le champ des déformations s'écrit en tenant compte de l'hypothèse qui consiste à négliger $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}$ et γ_{yz} sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z K(x) \quad (\text{III.2})$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} = \psi(x, t) + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\text{Avec : } K(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$K(x)$: est appelée la courbure de la poutre sollicitée en flexion.

III.4 Contraintes :

Dans le cas général la contrainte s'écrit sous la forme :

$$\sigma_x = Q'_{11}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + Q'_{12}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \quad (\text{III.3})$$

Avec : $Q'_{12}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) = 0$ dans le cas de la poutre

$$\sigma_x = Q'_{11}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) \quad (\text{III.4})$$

Nous avons aussi la contrainte thermique :

$$\sigma_x^T = -Q'_{11}\alpha_x \Delta T \quad (\text{III.5})$$

III.5 Efforts et moments :

➤ Effort longitudinal :

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dydz = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz. \quad (\text{III.6})$$

Pour un composite stratifié : (pour la couche K)

$$N_x = b \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \left[\overline{Q}_{11} (\epsilon_x - \alpha_x \Delta T) \right]^K dz \quad (\text{III.7})$$

➤ Moments :

$$M_x = \int \sigma_x z dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dydz = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (\text{III.8})$$

Pour un composite stratifié :

$$M_x = b \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \left[\overline{Q}_{11} (\epsilon_x - \alpha_x \Delta T) \right]^K z dz \quad (\text{III.9})$$

K étant le numéro de la couche

➤ Effort et moment thermique :

Pour un composite stratifié :

$$N_x^T = b \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \left[\overline{Q}_{11} \alpha_x \Delta T \right]^K dz \quad (\text{III.10})$$

$$M_x^T = b \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \left[\overline{Q}_{11} \alpha_x \Delta T \right]^K z dz \quad (\text{III.11})$$

➤ L'effort de cisaillement :

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (\text{III.12})$$

$$Q_{xz} = A_{55} \gamma_{xz} \quad (\text{III.13})$$

➤ Sous forme matricielle :

L'équation constitutive exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

III.6 Les énergies :

L'énergie mécanique est une quantité utilisée en mécanique classique pour désigner l'énergie d'un système emmagasinée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (déformation + thermique).

III.6.1 L'énergie cinétique :

L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement réel.

$$E_c = \frac{1}{2} \int \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dv = \frac{1}{2} \int \left(\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right) dv$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dv$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \int \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \quad (\text{III.15})$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \int \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + 2z \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int \rho dA \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \int \rho z^2 dA \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + 2 \int \rho z dA \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \int \rho dA \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

En posant :

$$I_1 = \int_A \rho dA$$

$$I_2 = \int_A \rho z dA \quad (\text{III.16})$$

$$I_3 = \int_A \rho z^2 dA$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L [I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + 2I_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2] dx \quad (III.17)$$

En supposant que l'énergie cinétique de rotation due au cisaillement transverse =0 d'où $\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} = 0$

$$\text{Or: } \gamma_{xz} = \psi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0 \rightarrow \quad (III.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \quad (III.19)$$

En substituant $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ dans l'équation (III.16) par $(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}) \rightarrow$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L [I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 - 2I_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2] dx \quad (III.20)$$

La poutre étant symétrique $I_2 = 0$ et en négligeant le déplacement longitudinal devant le déplacement transversal alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L [I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2] dx \quad (III.21)$$

III.6.2 L'énergie potentielle ou de déformation :

L'énergie potentielle mécanique est une énergie qui est échangée par un corps lorsqu'il se déplace tout en étant soumis à une force conservative.

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \gamma_{ij} dv$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dv$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \quad (III.22)$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \int [\sigma_x (\varepsilon_x^0 + z k_x) + \sigma_{xz} \gamma_{xz}] dA dx$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L [N_x \varepsilon_x^0 + M_x k_x + Q_{xz} \gamma_{xz}] dx$$

Et n'oublions pas que d'après (III.6) et (III.8) :

$$N_x = \int_A \sigma_x dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_x z dA$$

$$Q_{xz} = \int_A \sigma_{xz} dA$$

Et d'après le développement de (III.14) nous avons :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + B_{11}k_x \\ M_x &= B_{11}\varepsilon_x^0 + D_{11}k_x \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Et en remplaçant dans l'équation (III.22) dans (III.23) nous obtenons :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L [N_x \varepsilon_x^0 + M_x k_x + Q_{xz} \gamma_{xz}] dx \quad (\text{III.24})$$

Le développement de cette dernière nous donne

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{1}{2} \int_0^L [(A_{11}\varepsilon_x^0 + B_{11}k_x)\varepsilon_x^0 + (B_{11}\varepsilon_x^0 + D_{11}k_x)k_x + A_{55}\gamma_{xz}^2] dx \\ U_d &= \frac{1}{2} \int_0^L [A_{11}(\varepsilon_x^0)^2 + 2B_{11}\varepsilon_x^0 k_x + D_{11}(k_x)^2 + A_{55}\gamma_{xz}^2] dx \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L [A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + A_{55}\gamma_{xz}^2] dx$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L [A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + A_{55} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2] dx$$

Une première simplification de l'analyse de la flexion des poutres en stratifiés consiste en l'étude de stratifiés symétriques, pour lesquels il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion : les termes B_{ij} sont nuls ($B_{11} = 0$) et le déplacement longitudinal u est négligé devant le déplacement transversal w .

$$D'où U_d = \frac{1}{2} \int_0^L [D_{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + A_{55}\psi^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2A_{55}\psi \frac{\partial w}{\partial x}] dx \quad (\text{III.26})$$

III.6.3 L'énergie de déformation thermique :

La chaleur, qui représente un échange d'énergie thermique, est aussi analogue à un travail dans le sens où elle représente une variation de l'énergie interne du système.

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int \sigma_x^T \varepsilon_x dv = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_x^T \varepsilon_x dx dA \quad (\text{III.27})$$

$$\text{Avec : } \sigma_x^T = -Q'_{11}\alpha_x \Delta T$$

Par définition :

$$\begin{aligned}
 U_d^T &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dv \\
 U_d^T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \boldsymbol{\sigma}_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dA \\
 U_d^T &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_V \boldsymbol{\sigma}_x^T dA \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

Nous avons enfin l'énergie de déformation thermique

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^L N_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \tag{III.29}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 N_x^T &= \int_A -Q'_{11} \alpha_x \Delta T dA \\
 N_x^T &= \int_0^b \int_0^L -Q'_{11} \alpha_x \Delta T dx dy
 \end{aligned} \tag{III.30}$$

$$N_x^T = \int_0^b dy \int_0^L -Q'_{11} \alpha_x \Delta T dx$$

$$N_x^T = -b \int_0^L Q'_{11} \alpha_x \Delta T dx$$

Pour le composite a « n » couches :

$$N_x^T = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\overline{Q}_{11} \alpha_x \Delta T \right]^k dz \tag{III.31}$$

Finalement nous avons nos trois énergies (rappel) :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_{11} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \Psi^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx$$

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^L N_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

III.7 Introduction de la variable adimensionnelle :

Maintenant nous passons de la variable x vers la variable adimensionnelle ξ .

$$\text{En posant } \xi = \frac{x}{L} \rightarrow x = \xi L \rightarrow dx = L d\xi \rightarrow d\xi = \frac{1}{L} dx \quad (\text{III.32})$$

Avant cette étape, remplaçons $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$ par $-\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ Pour des raisons de stabilité de la matrice masse.

$$\gamma_{xz} = \Psi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{III.34})$$

Remplaçons dans l'équation de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L [I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2] dx \quad (\text{III.35})$$

Maintenant passons à la variable adimensionnelle ξ dans les expressions des énergies :

➤ L'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^1 [I_1 L \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + I_3 L \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2] d\xi \quad (\text{III.36})$$

➤ L'énergie de déformation

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L [D_{11} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + A_{55} \Psi^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial w}{\partial x}] dx$$

$$U_d = \frac{1L}{2} \int_0^1 \left[\frac{D_{11}}{L^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + A_{55} \Psi^2 + \frac{A_{55}}{L^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{2A_{55}}{L} \Psi \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] d\xi \quad (\text{III.37})$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{A_{55}}{L} \left(\frac{\delta \partial w}{\delta \partial \xi}\right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\delta \partial w}{\delta \partial \xi} \right] d\xi$$

➤ L'énergie de déformation thermique

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^L N_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$U_d^T = \frac{1}{2} L \int_0^1 \frac{N_x^T}{L^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (\text{III.38})$$

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{N_x^T}{L} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nous posons } w(\xi, t) = \mathbf{W}(\xi) \cos \omega t \\ \Psi(\xi, t) = \mathbf{\Psi}(\xi) \cos \omega t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta w}{\delta t} = -\omega \mathbf{W} \sin \omega t \\ \frac{\delta \Psi}{\delta t} = -\omega \mathbf{\Psi} \sin \omega t \end{array} \right. \quad (\text{III.39})$$

Remplaçons (III.39) dans (III.36), (III.37) et (III.38) :

$$* E_c = \frac{\omega^2}{2} \int_0^1 [Ll_1 W^2 + Ll_3 \Psi^2] \sin^2 \omega t d\xi \quad (\text{III.40})$$

$$* U_d =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 \cos^2 \omega t + LA_{55} \Psi^2 \cos^2 \omega t + \frac{A_{55}}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \cos^2 \omega t + 2A_{55} \Psi \frac{dW}{d\xi} \cos^2 \omega t \right] d\xi$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{A_{55}}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{dW}{d\xi} \right] \cos^2 \omega t d\xi \quad (\text{III.41})$$

$$* U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{N_x^T}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \cos^2 \omega t d\xi \quad (\text{III.42})$$

En maximisant E_c avec $\sin^2 \omega t = 1$, nous obtenons :

$$E_c = \frac{\omega^2}{2} \int_0^1 [Ll_1 W^2 + Ll_3 \Psi^2] d\xi \quad (\text{III.43})$$

Et U_d, U_d^T avec $\cos^2 \omega t = 1$, nous obtenons :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{A_{55}}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{dW}{d\xi} \right] d\xi. \quad (\text{III.44})$$

$$U_d^T = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{N_x^T}{L} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (\text{III.45})$$

III.8 La fonctionnelle :

$$\text{La fonctionnelle } \pi = U_{max} - E_{c max} \quad (\text{III.46})$$

$$\text{Avec } U_{max} = U_{d max} + U_{d max}^T \quad (\text{III.47})$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{(A_{55} + N_x^T)}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] - L\omega^2 [I_1 W^2 + I_3 \Psi^2] d\xi \quad (\text{III.48})$$

III.9 Résolution par la méthode de Ritz:

La solution approchée (par la méthode de Ritz) est de la forme :

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N A_i X_i(\xi) \\ \Psi &= \sum_{i=1}^N B_i Y_i(\xi) \end{aligned} \right\} \text{ La méthode de Ritz est basée sur le choix judicieux des } \\ \text{fonctions tests } X_i, Y_i \text{ et } \pi \text{ doit avoir un extremum donc :}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{et} \quad \frac{\partial \pi}{\partial B_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial A_i} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{(A_{55} + N_x^T)}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - L\omega^2 (I_1 W^2 + I_3 \Psi^2) d\xi \right] = 0 \quad (\text{III.49})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial B_i} = \frac{\partial}{\partial B_i} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{(A_{55} + N_x^T)}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - L\omega^2 (I_1 W^2 + I_3 \Psi^2) d\xi \right] = 0 \quad (\text{III.50})$$

Pour les dérivations :

$$W = \sum_{i=1}^N A_i X_i(\xi) \frac{\partial W}{\partial A_i} = X_i \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{III.51})$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^N B_i Y_i(\xi) \frac{\partial \Psi}{\partial B_i} = Y_i \quad i = 1, \dots, N$$

➤ Le 1° sous-système :

Nous allons développer l'équation (III.49)

$$* \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \quad (\text{III.52})$$

Nous avons aussi :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right) = \sum_{i=1}^N A_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi} \implies \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial X_i}{\partial \xi} \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{III.53})$$

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 = 2 \sum_{j=1}^N A_j \frac{\partial X_j}{\partial \xi} \frac{\partial X_i}{\partial \xi} = 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \frac{\partial X_j}{\partial \xi}\right) A_j \quad (\text{III.54})$$

$$* \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\Psi \frac{\partial W}{\partial \xi}\right) = \Psi \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right) = \Psi \frac{\partial X_i}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^N B_j Y_j \frac{\partial X_j}{\partial \xi} \quad (\text{III.55})$$

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \left(\Psi \frac{\partial W}{\partial \xi}\right) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_j\right) B_j \quad (\text{III.56})$$

$$* \frac{\partial}{\partial A_i} (W)^2 = 2W \frac{\partial}{\partial A_i} W = 2 \sum_{j=1}^N (X_i X_j) A_j \quad (\text{III.57})$$

Cela nous donne en remplaçant dans (3.49) et pour $i = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{L} (A_{55} + N_x^T) 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \frac{\partial X_j}{\partial \xi}\right) A_j + 2A_{55} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_j\right) B_j - L\omega^2 I_1 2 \sum_{j=1}^N (X_i X_j) A_j \right] d\xi = 0 \quad (\text{III.58})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = \int_0^1 \left[\frac{1}{L} (A_{55} + N_x^T) \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \frac{\partial X_j}{\partial \xi}\right) A_j + A_{55} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_j\right) B_j - \omega^2 (L I_1 \sum_{j=1}^N (X_i X_j) A_j) \right] d\xi = 0 \quad (\text{III.59})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = \sum_{j=1}^N \left\{ \left[\frac{1}{L} (A_{55} + N_x^T) \int_0^1 \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \frac{\partial X_j}{\partial \xi}\right) d\xi A_j + A_{55} \int_0^1 \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_j\right) d\xi B_j - \omega^2 \left[L I_1 \int_0^1 (X_i X_j) d\xi A_j \right] \right\} = 0 \quad (\text{III.60})$$

Chaque membre de cette somme doit être identiquement nul d'où :

$$\frac{1}{L} (A_{55} + N_x^T) \int_0^1 \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \frac{\partial X_j}{\partial \xi}\right) d\xi A_j + A_{55} \int_0^1 \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_j\right) d\xi B_j - \omega^2 L I_1 \int_0^1 (X_i X_j) d\xi A_j = 0 \quad (\text{III.61})$$

Pour $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, N$

Système linéaire à coefficients constants de N équations pour rendre le système complet

ces N équations seront fournies par la 2° condition de Ritz soit : $\frac{\partial \pi}{\partial B_i} = 0$.

➤ Le 2° sous-système :

$$\frac{\partial \pi}{\partial B_i} = \frac{\partial}{\partial B_i} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{D_{11}}{L} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + LA_{55} \Psi^2 + \frac{(A_{55} + N_x^T)}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2A_{55} \Psi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - L\omega^2 (I_1 W^2 + I_3 \Psi^2) d\xi \right] = 0 \quad (\text{III.62})$$

Maintenant seuls les termes contenant Ψ seront dérivés par rapport à B_i .

$$* \frac{\partial}{\partial B_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial B_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) \quad (\text{III.63})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^N B_i Y_i = \sum_{i=1}^N B_i \frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \quad (\text{III.64})$$

$$\frac{\partial}{\partial B_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (\text{III.65})$$

$$\frac{\partial}{\partial B_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 = 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} \right) B_j \quad (\text{III.66})$$

$$* \frac{\partial \Psi}{\partial B_i} = 2 \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial B_i} = 2 \Psi \frac{\partial}{\partial B_i} \left(\sum_{i=1}^N B_i Y_i \right) = 2 \Psi Y_i = 2 \sum_{j=1}^N (Y_i Y_j) B_j \quad (\text{III.67})$$

$$* \frac{\partial}{\partial B_i} \left(\Psi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial B_i} \Psi = \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial B_i} \sum_{i=1}^N B_i Y_i = \frac{\partial W}{\partial \xi} Y_i \quad (\text{III.68})$$

$$\frac{\partial}{\partial B_i} \left(\Psi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = \sum_{j=1}^N A_j \frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_i \right) A_j \quad (\text{III.69})$$

Cela nous donne en remplaçant dans (III.50) avec $\frac{\partial \pi}{\partial B_i} = 0 \rightarrow$

$$\frac{\partial \pi}{\partial B_i} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left[\frac{D_{11}}{L} 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} \right) B_j + LA_{55} 2 \sum_{j=1}^N (Y_i Y_j) B_j + 2A_{55} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_i \right) A_j \right] - \omega^2 (LI_3 2 \sum_{j=1}^N (Y_i Y_j) B_j) \right] d\xi = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{III.70})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial B_i} = \sum_{j=1}^N \left\{ \left[\frac{D_{11}}{L} \int_0^1 \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} \right) d\xi B_j + A_{55} L \int_0^1 (Y_i Y_j) d\xi B_j + A_{55} \int_0^1 \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_i \right) d\xi A_j \right] - \omega^2 \left[LI_3 \int_0^1 (Y_i Y_j) d\xi B_j \right] \right\} = 0. \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (\text{III.71})$$

Chaque membre de cette somme doit être identiquement nul d'où :

$$\frac{D_{11}}{L} \int_0^1 \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} \right) d\xi B_j + A_{55} L \int_0^1 (Y_i Y_j) d\xi B_j + A_{55} \int_0^1 \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi} Y_i \right) d\xi A_j - \omega^2 \left[LI_3 \int_0^1 (Y_i Y_j) d\xi B_j \right] = 0 \quad \text{Pour } i = 1, \dots, N \text{ et } j = 1, \dots, N \quad (\text{III.72})$$

Système linéaire à coefficients constants de N équations à 2N inconnus A_i et B_i qui vont compléter le précédent système

➤ Les constantes intégrales :

Notons :

$$\alpha_{ij}^{00} = \int_0^1 (X_i X_j) d\xi$$

$$\beta_{ij}^{00} = \int_0^1 (Y_i Y_j) d\xi$$

$$\alpha_{ij}^{11} = \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{d\xi} \frac{dX_j}{d\xi} \right) d\xi$$

$$\beta_{ij}^{11} = \int_0^1 \left(\frac{dY_i}{d\xi} \frac{dY_j}{d\xi} \right) d\xi \tag{III.73}$$

$$\gamma_{ij}^{10} = \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{d\xi} Y_j \right) d\xi$$

$$\theta_{ij}^{01} = \int_0^1 \left(Y_i \frac{dX_j}{d\xi} \right) d\xi$$

$$\alpha_{ij}^{01} = \int_0^1 \left(X_i \frac{dX_j}{d\xi} \right) d\xi$$

$$\alpha_{ij}^{10} = \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{d\xi} X_j \right) d\xi$$

Où X_i et Y_i sont des fonctions connues (choisies au préalable).

Remplaçant (III.73) dans (III.61) et (III.72), alors notre système d'équations devient :

$$\frac{1}{L} (A_{55} + N_x^T) \alpha_{ij}^{11} A_j + A_{55} \gamma_{ij}^{10} B_j - \omega^2 L I_1 \alpha_{ij}^{00} A_j = 0 \tag{III.74}$$

$$A_{55} \theta_{ij}^{01} A_j + \left(\frac{D_{11}}{L} \beta_{ij}^{11} + A_{55} L \beta_{ij}^{00} \right) B_j - \omega^2 L I_3 \beta_{ij}^{00} B_j = 0 \tag{III.75}$$

Pour $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, N$

Sous forme matricielle le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L}(A_{55} + N_x^T)\alpha_{ij}^{11} & A_{55}\gamma_{ij}^{10} \\ A_{55}\theta_{ij}^{01} & \frac{D_{11}}{L}\beta_{ij}^{11} + A_{55}L\beta_{ij}^{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} LI_1 \alpha_{ij}^{00} & 0 \\ 0 & LI_3 \beta_{ij}^{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.76})$$

En développant les matrices :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} K_{11}^{AA} & \dots & K_{1n}^{AA} & K_{11}^{AB} & \dots & K_{1n}^{AB} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^{AA} & \dots & K_{nn}^{AA} & K_{n1}^{AB} & \dots & K_{nn}^{AB} \\ K_{11}^{BA} & \dots & K_{1n}^{BA} & K_{11}^{BB} & \dots & K_{1n}^{BB} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^{BA} & \dots & K_{nn}^{BA} & K_{n1}^{BB} & \dots & K_{nn}^{BB} \end{array} \right\} - \omega^2 \left\{ \begin{array}{cccccc} M_{11} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & M_{22} \end{array} \right\} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.77})$$

Notre système admet une solution unique si le déterminant=0.

Pour la résolution du système nous allons passer à l'analyse numérique avec l'outil de calcul Maple.

III.10 Conclusion :

Dans ce travail, la méthode de Ritz a été choisie comme méthode de résolution du problème des vibrations libres d'une poutre composite stratifiée soumise à des contraintes thermiques c'est pourquoi toutes les étapes du développement par la méthode de Ritz ont été explicitées jusqu'à l'obtention de l'équation final représentant le problème aux valeurs propres à résoudre équation (III.77).

Chapitre IV

Analyse numérique du comportement de la poutre

Analyse numérique du comportement de la poutre

IV.1 Introduction :

L'analyse modale consiste en la détermination des valeurs et vecteurs propres du système. Cette analyse permet de déterminer les fréquences naturelles du système structural pour chaque cas d'étude avec la prise en compte de l'effet thermique, la détermination de l'ensemble des valeurs propres permet d'analyser l'influence de la température sur le comportement vibratoire du système en fonction des paramètres étudiés.

Une fois les équations de vibration de la poutre établies, le problème est de caractériser le phénomène, autrement dit de déterminer : l'évolution des fréquences en fonction de la différence de température.

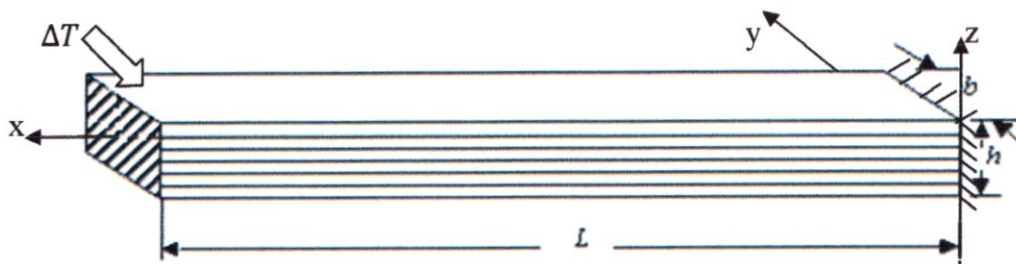


Figure (IV.1) : Poutre composite stratifiée encastre libre avec effet thermique

IV.2 Présentation de l'outil Maple :

Maple a été initialement développé à l'Université de Waterloo en Ontario (Canada) à partir de 1981. La première version publique date de 1985 (version 3.3).

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, fonctions, séries. Maple réalise des dérivations, intégrations, résolutions de systèmes d'équations linéaires, inversions de matrices, développements asymptotiques et résolutions d'équations différentielles. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en arithmétique des nombres et en combinatoire.

Il est possible de :

- Copier et coller les formules mathématiques correspondantes dans un traitement de texte ;
- Tracer des courbes ou des surfaces (en aspect 3D) ;

- Générer les programmes de calculs numériques (par exemple en C)

IV.3 Description du programme :

Dans cette partie, nous nous proposons de mettre en œuvre les outils informatiques nécessaires à l'exploitation numérique de la théorie (FSDBT).

Nous allons d'abord calculer le coefficient de poisson du 1^{er} ordre ν_{21} et les constantes de rigidités réduites, Puis nous allons construire les matrices élémentaires masse et rigidité développées précédemment, en passant par le calcul des fonctions poutres et les intégrales des constantes.

Enfin, dans un but de validation des algorithmes et matrices développés, nous ferons des applications numériques pour différentes variations de température.

Afin de concevoir notre programme de calcul, nous passons par les étapes suivantes :

- La spécification des paramètres d'entrées suivants :
 1. *les caractéristiques mécaniques de la poutre :*
 - E_1, E_2 : Les modules YOUNG.
 - ν_{12} : Coefficients de Poisson.
 - G_{13}, G_{12}, G_{23} : Les modules de cisaillement.
 - ρ : La masse volumique.
 2. *Les caractéristiques thermiques :*
 - ΔT : Différence de température.
 - α : Coefficients de dilatation thermique.
 3. *Les caractéristiques géométriques de la poutre :*
 - h : largeur de la poutre.
 - L : longueur de la poutre .
 - L/h : Le rapport d'épaisseur.
 - e : L'épaisseur de la poutre.
 - θ : Les angles d'orientation du stratifiées.
 - n : Nombre de couches.
- L'analyse modale par la résolution du problème aux valeurs propres : après la formation de la matrice rigidité \mathbb{K} et matrice masse \mathbb{M} , nous procéderons à la résolution du problème aux valeurs propres.

- Les résultats (output) : les sorties du programmes sont les valeurs propres correspondant aux fréquences adimensionnelle de notre poutre.

IV.4 Description de la méthode de Ritz :

L'erreur en relation de comportement est une notion utilisée en mécanique des milieux continus pour quantifier l'erreur commise lors de la résolution approchée d'un problème régi par des équations d'équilibre, des conditions aux limites et une relation de comportement lorsque les champs approchés sont admissibles.

Lorsque l'on cherche la solution à un problème du type trouver le champ de déplacement et de contrainte d'un solide soumis à un chargement donné et avec certains déplacements imposés, la méthode naturelle consiste à partir des équations locales d'équilibre et à les intégrer. Cependant selon le type de domaine et/ou de chargement cela peut s'avérer impossible.

On est alors amené à chercher des solutions approchées. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Les méthodes d'approximation sont utilisées lorsque justement les solutions exactes du problème de la mécanique des solides déformables ne peuvent être trouvées. Le principe général de l'approximation d'une solution consiste à rechercher la meilleure approximation sortis faisant au mieux les conditions physiques auxquelles obéit la solution sur son domaine d'étude. Parmi ces méthodes d'approximation, la méthode de Ritz fournit une méthode efficace pour obtenir des solutions approchées au problème de la mécanique des solides déformables.

La méthode de Ritz consiste à rechercher une approximation au point M sous la forme :

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i Q_i(M)$$

La fonction $Q_i(M)$ sont des fonctions connues choisis a priori et dont l'ensemble constitue la base fonctionnelle des coefficients a_i , à déterminer, sont appelés les coordonnées généralisées.

Les fonctions de base Q_i doivent former une base fonctionnelle complète pour assurer les conditions de convergence de l'approximation.

Cette méthode est pertinente si on a déjà une idée de la solution, mais n'est pas facilement programmable, et pose toujours un problème d'intégration si le domaine n'est pas simple.

IV.5 Organigramme :

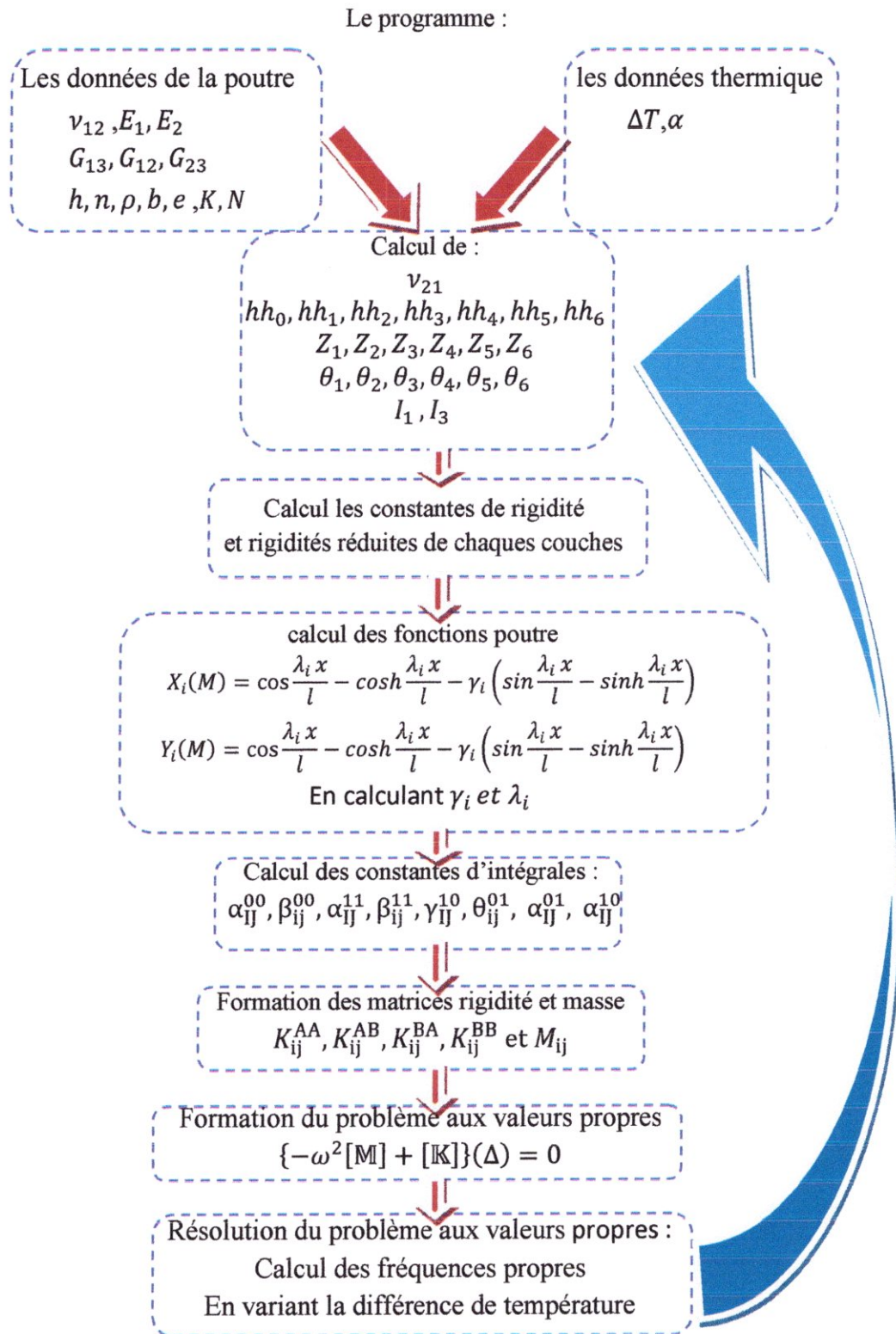


Figure (IV.2) : Organigramme du programme utilisé

IV.6 Validation du programme :

L'idéal pour la validation d'un programme numérique serait de confronter les résultats avec ceux de tests expérimentaux, ce qui à notre niveau, n'est pas possible (manque de moyens expérimentaux). Pour ce faire, nous devons faire une procédure de validation du code de calcul que nous avons réalisé. Nous exécuterons donc notre code de calcul pour le cas d'une poutre composite stratifiée symétrique en graphite-époxy [0/90/90/0] pour $\Delta T = 0$ et nous comparons les résultats obtenus avec ce de la référence [10] pour $L/h=15$.

mode	1	2	3	4	5
présenté	0.9241	4.8924	11.4396	18.6970	26.2192
Réf [chand]	0.9241	4.8925	11.4400	18.6972	26.2118
Erreur %	0%	0.2%	0.34%	0.1%	-2.82%

Tableau (IV.1) : comparaisons résultats/référence sur les fréquences adimensionnelles pour $\Delta T=0$

Nous exécutons encore une fois notre code de calcul pour une poutre composite stratifiée symétrique graphite-époxy [0/90/90/0] pour la variation de température $\Delta T = 200$ et nous comparons les résultats obtenus avec ceux de la référence [11] :

Mode	1	2	3	4	5
Présenté	0.789	4.744	11.293	18.538	26.510
Réf [MAHI]	0.948	4.835	11.360	18.587	26.068
Erreur %	17%	2%	1%	0.26%	-1.69%

Tableau (IV.2) : comparaisons résultats/référence sur les fréquences adimensionnelles pour $\Delta T=200$

Nous remarquons, suite à ces résultats, qu'il y'a une erreur qui varie 17% à -2.82%. Nous jugeons cette erreur acceptable vu que les méthodes de résolutions utilisées dans la résolution du problème dans les références [10] et [11] sont des méthodes analytique et

donc donnant des résultats exactes alors que la méthode que nous utilisons dans notre analyse et une méthode approximative (méthode de Ritz).

➤ Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre :

Nombre des couches: $n = 6$

Les modules YOUNG : $E_1 = 144,7899 \text{ Gpa}$, $E_2 = 9,653 \text{ Gpa}$

Les modules de cisaillement: $G_{23} = 3,447 \text{ Gpa}$, $G_{12} = G_{13} = 4,136 \text{ Gpa}$

Les Coefficients de POISSON: $\nu_{12} = 0,3$

Les Coefficients de dilatation thermique: $\alpha = 10$, $\alpha_1 = 4.5 \cdot 10^{-7} / ^\circ K$, $\alpha_2 = 27.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ K$

L'épaisseur du stratifié: $0,25 * b$

Largeur de la poutre: $b = 0,0254 \text{ m}$

Le coefficient de correction du cisaillement: $k=5/6$

IV.7 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons résolu les équations développées du mouvement vibratoire de la poutre composite soumise à des contraintes thermiques initial. La résolution de ces équations différentielles par une méthode analytique étant très difficile, nous avons opté pour une résolution basée sur la méthode énergétique variationnelle de Ritz.

Chapitre V

Résultats et Interprétations

Résultats et interprétations

V. Résultats et interprétations :

V.1 Introduction :

Une fois les résultats de l'investigation recueillis, on doit les mettre en perspective en les reliant au problème étudié et à l'hypothèse formulée au départ: c'est l'étape de l'analyse des résultats.

Cette analyse permet notamment de faire apparaître l'influence de certaines variables ou de certains facteurs sur le phénomène étudié. Il faut ensuite interpréter ces résultats, c'est-à-dire faire le rapport entre l'analyse des données, la problématique et le champ d'investigation au sein duquel la recherche s'est développée. Interpréter les résultats, c'est en fait énoncer les conséquences théoriques et établir les avenues de recherche suggérées par les résultats.

V.2 Influence du rapport d'épaisseur sur les fréquences adimensionnelle :

Dans ce chapitre nous allons travailler que sur des fréquences adimensionnelle et cela est dû au fait que les fréquences naturelle sont trop grandes et très décalés entre elles pour qu'elles puissent nous donner un bon aspect pour notre étude tandis que les fréquences adimensionnelles sont plus expressives. Pour obtenir ces fréquences adimensionnelle nous devisons l'ensemble des fréquences naturelle obtenues par la fréquence de référence ω_0 telle que $\omega_0 = \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$. (V.1)

En variant les différents rapports d'épaisseurs L/h (5,10,15,20,50) avec la différence de température ΔT (0, 40, 60, 100) pour une configuration de 6 couches (0/90/90/90/90/0), les 5 premières fréquences sont présentées dans les tableaux (V.1, V.2, V.3, V.4, V.5, V.6, V.7, V.8) pour une poutre en Graphite Epoxy.

1. Influence du rapport L/h sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=0$ selon (0/90/90/90/90/0)

Mode (Hz)	L/h				
	5	10	15	20	50
1	7103,619	2077,201	955,979	544,647	88,384
2	25935,428	9936,820	5167,821	3117,735	545,077
3	52249,939	21962,893	12268,450	7778,384	1489,055
4	76378,029	34470,989	20294,095	13394,842	2824,091
5	102097,054	47820,834	29230,851	19955,820	4746,453

Tableau (V.1) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=0$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle)

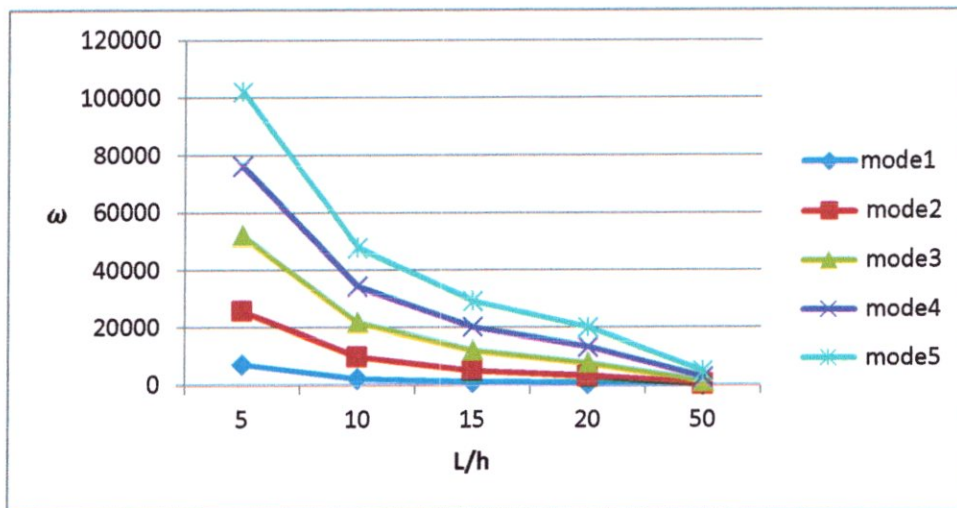


Figure (V.1):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=0$ pour les 5^{er} Modes

Mode	L/h				
	5	10	15	20	50
1	0,694	0,812	0,841	0,851	0,864
2	2,534	3,883	4,544	4,874	5,326
3	5,105	8,583	10,788	12,160	14,549
4	7,462	13,472	17,845	20,940	27,592
5	9,975	18,689	25,704	31,196	46,375

Tableau (V.2) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=0$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles)

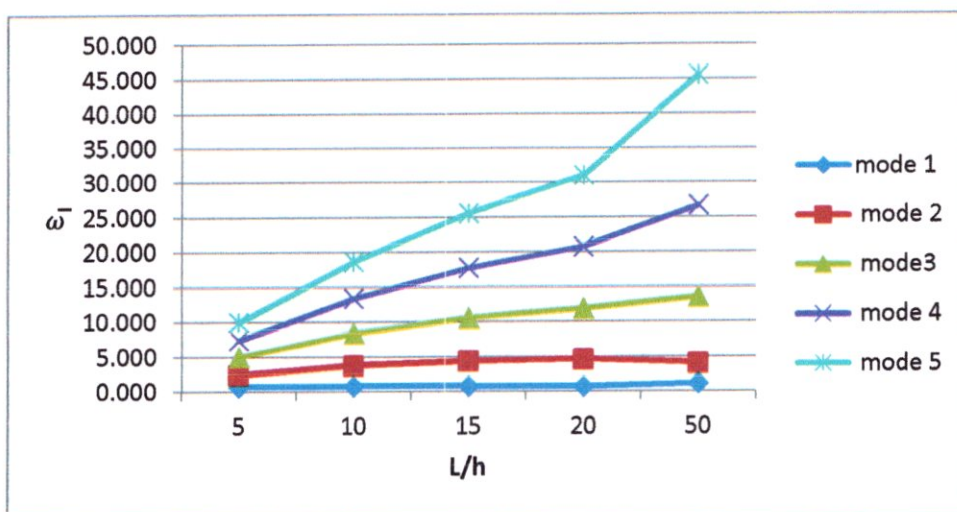


Figure (V.2):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=0$ pour les 5^{er} Modes

2. Influence du rapport L/h sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=40$ selon (0/90/90/90/90/0)

Mode (Hz)	L/h				
	5	10	15	20	50
1	7068,979	2040,499	917,943	505,466	25,640
2	25871,472	9889,832	5123,977	3074,645	500,976
3	52165,590	21911,284	12225,650	7738,847	1452,314
4	76266,191	34407,550	20245,504	13352,756	2788,787
5	101956,188	47743,934	29174,162	19908,401	4711,418

Tableau (V.3) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=40$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle)

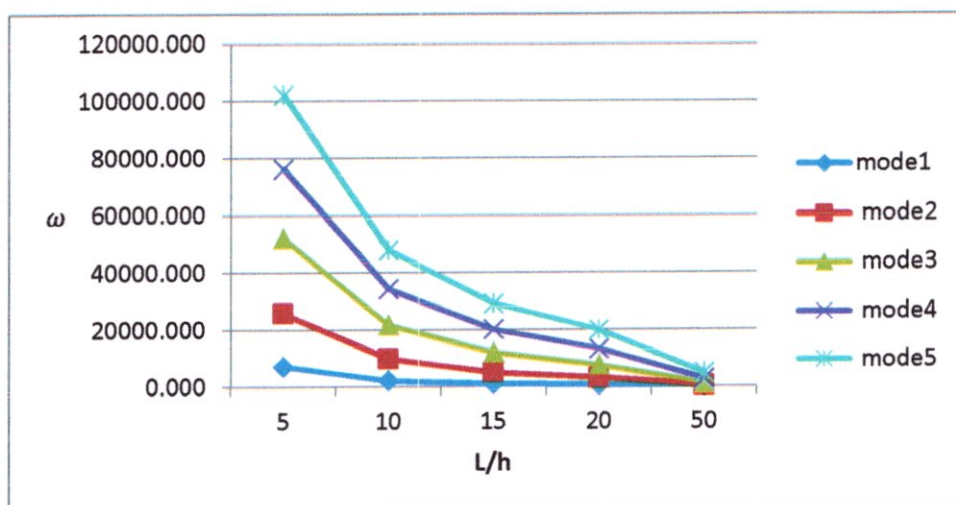


Figure (V.3):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=40$ pour les 5^{er} Modes

Mode	L/h				
	5	10	15	20	50
1	0,691	0,797	0,807	0,790	0,251
2	2,528	3,865	4,506	4,806	4,895
3	5,097	8,563	10,750	12,098	14,190
4	7,451	13,447	17,803	20,874	27,248
5	9,962	18,659	25,654	31,122	46,032

Tableau (V.4) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=40$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles)

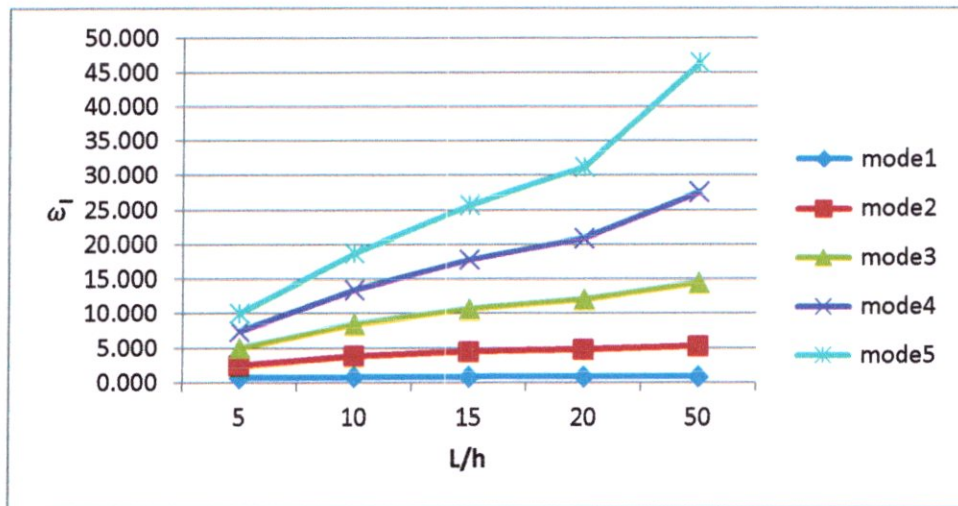


Figure (V.4):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=40$ pour les 5^{er} Modes

3. Influence du rapport L/h sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=60$ selon (0/90/90/90/90/0)

Mode (Hz)	L/h				
	5	10	15	20	50
1	7051,557	2021,787	898,104	484,307	58,210
2	25839,430	9866,240	5101,887	3052,834	477,311
3	52123,363	21885,433	12204,190	7718,995	1433,589
4	76210,325	34376,007	20220,952	13330,937	2770,997
5	101885,689	47705,454	29145,832	19884,623	4693,654

Tableau (V.5) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=60$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle)

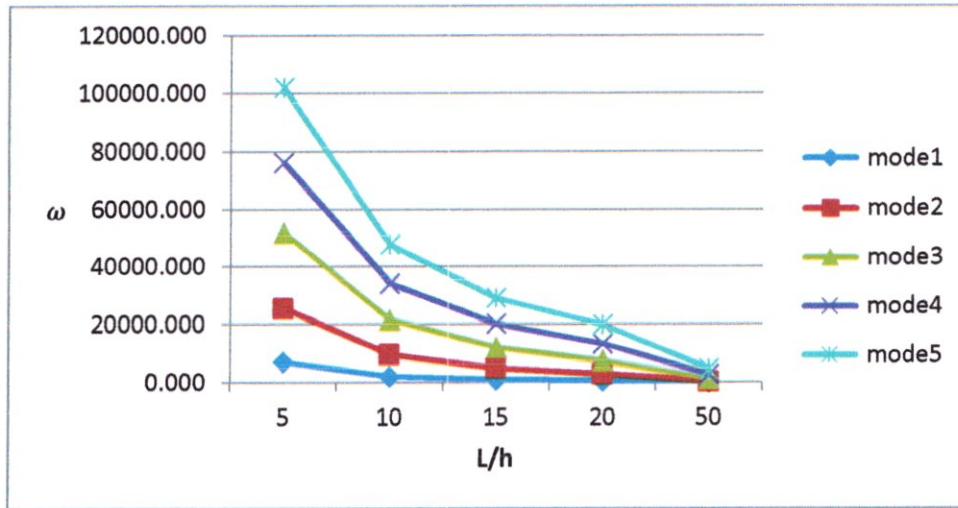


Figure (V.5):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=60$ pour les 5^{er} Modes

Mode	L/h				
	5	10	15	20	50
1	0,689	0,790	0,790	0,757	0,569
2	2,525	3,856	4,486	4,772	4,664
3	5,093	8,553	10,732	12,067	14,007
4	7,446	13,435	17,781	20,840	27,074
5	9,955	18,644	25,629	31,085	45,859

Tableau (V.6) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=60$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles)

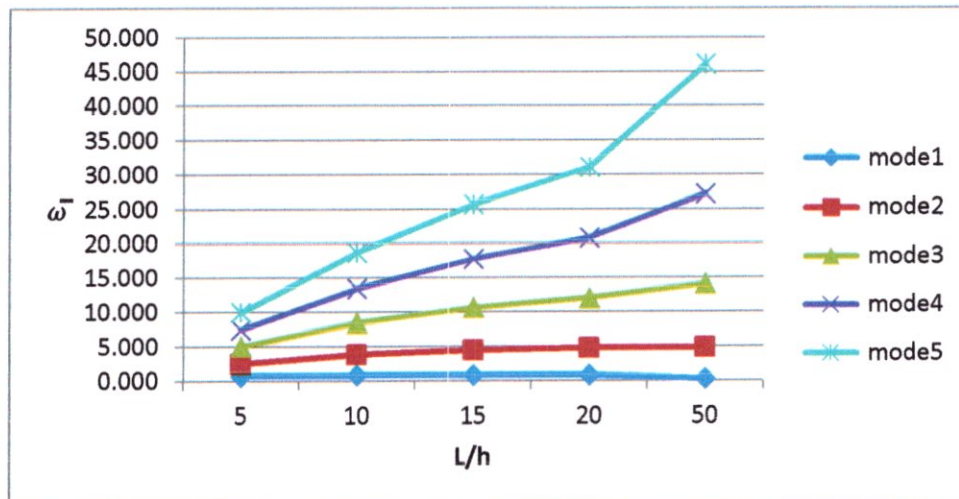


Figure (V.6):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=60$ pour les 5^{er} Modes

4. Influence du rapport L/h sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=100$ selon (0/90/90/90/90/0)

Mode (Hz)	L/h				
	5	10	15	20	50
1	7016,505	1983,605	856,577	438,038	113,764
2	25775,215	9818,859	5057,369	3008,663	426,325
3	52038,805	21833,636	12161,156	7679,137	1395,399
4	76098,162	34312,369	20172,274	13288,822	2735,004
5	101744,762	47628,316	29088,962	19837,051	4658,010

Tableau (V.7) : influence du rapport L/h sur ω avec $\Delta T=100$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences naturelle)

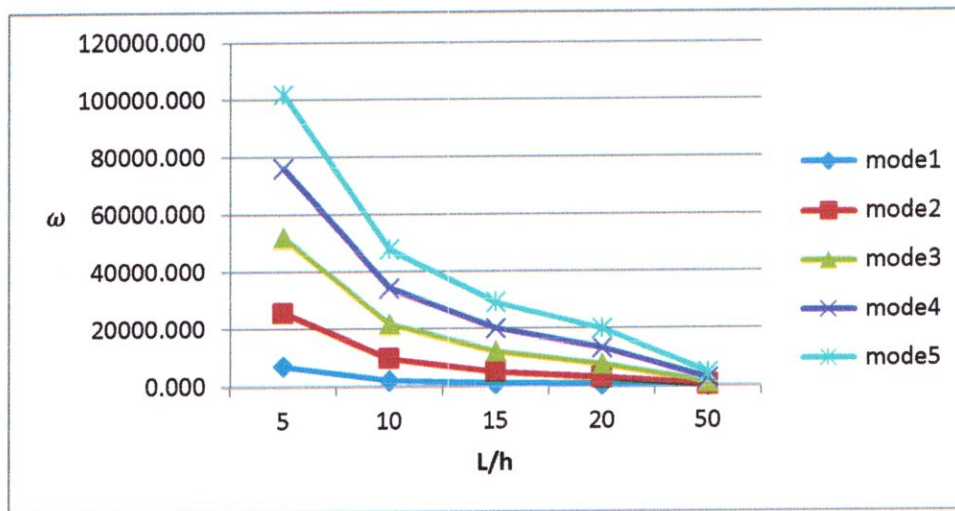


Figure (V.7):Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=100$ pour les 5^{er} Modes

Mode	L/h				
	5	10	15	20	50
1	0,686	0,775	0,753	0,685	1,112
2	2,518	3,837	4,447	4,703	4,165
3	5,084	8,533	10,694	12,004	13,634
4	7,435	13,410	17,738	20,774	26,722
5	9,941	18,614	25,579	31,010	45,511

Tableau (V.8) : influence du rapport L/h sur $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=100$ selon la configuration (0/90/90/90/90/0) (fréquences adimensionnelles)

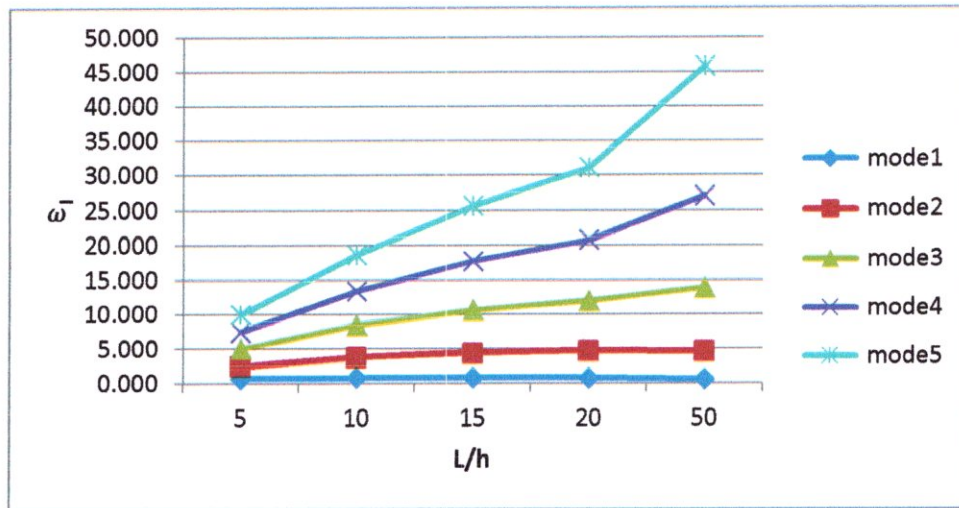


Figure (V.8):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseurs L/h avec la différence de température $\Delta T=100$ pour les 5^{er} Modes

V.3 Influence de l'orientation des couches sur les fréquences adimensionnelle :

En variant l'orientation des couches dans la configuration suivante (0/θ/θ/θ/θ/0) avec $\theta=(0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ)$ et le rapport d'épaisseurs $L/h=15$ et en variant la différence de température $\Delta T=(0, 40, 60, 100)$, les 5 premières fréquences sont définies dans les tableaux (V. 9, V.10, V.11,V.12) pour une poutre en Graphite Epoxy.

1. Influence de l'orientation θ sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=0$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	1116.782	1000.631	955.979	1000.631	1116.782
Mode 2	5883.684	5388.391	5167.821	5388.391	5883.684
Mode 3	13711.932	12754.921	12268.450	12754.921	13711.932
Mode 4	22368.275	21051.941	20294.095	21051.941	22368.275
Mode 5	31873.167	30270.482	29230.851	30270.482	31873.167

Tableau (V.9) : Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=0$

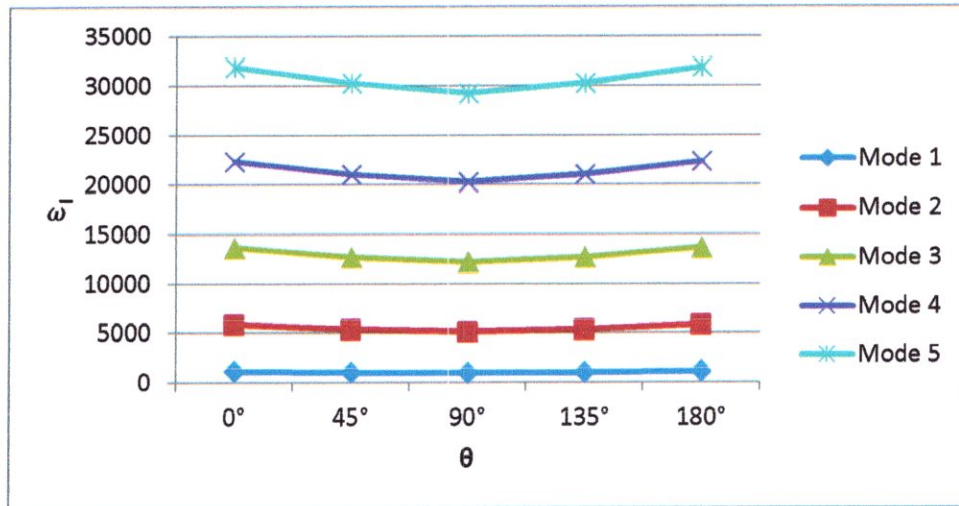


Figure (V.9):Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=0$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	0.982	0.880	0.841	0.880	0.982
Mode 2	5.174	4.738	4.544	4.738	5.174
Mode 3	12.057	11.216	10.788	11.216	12.057
Mode 4	19.669	18.512	17.845	18.512	19.669
Mode 5	28.027	26.618	25.704	26.618	28.027

Tableau (V.10) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=0$

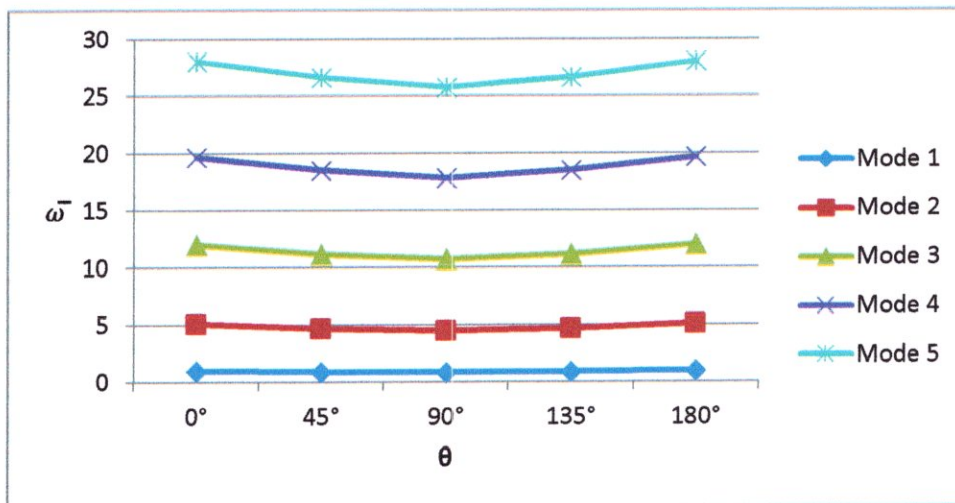


Figure (V.10):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=0$

2. Influence de l'orientation θ sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=0$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	1106.401	919.224	917.943	919.224	1106.401
Mode 2	5871.304	5296.523	5123.977	5296.523	5871.304
Mode 3	13699.480	12665.159	12225.650	12665.159	13699.480
Mode 4	22353.682	20949.743	20245.504	20949.743	22353.682
Mode 5	31855.991	30151.012	29174.162	30151.012	31855.991

Tableau (V.11): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=40$

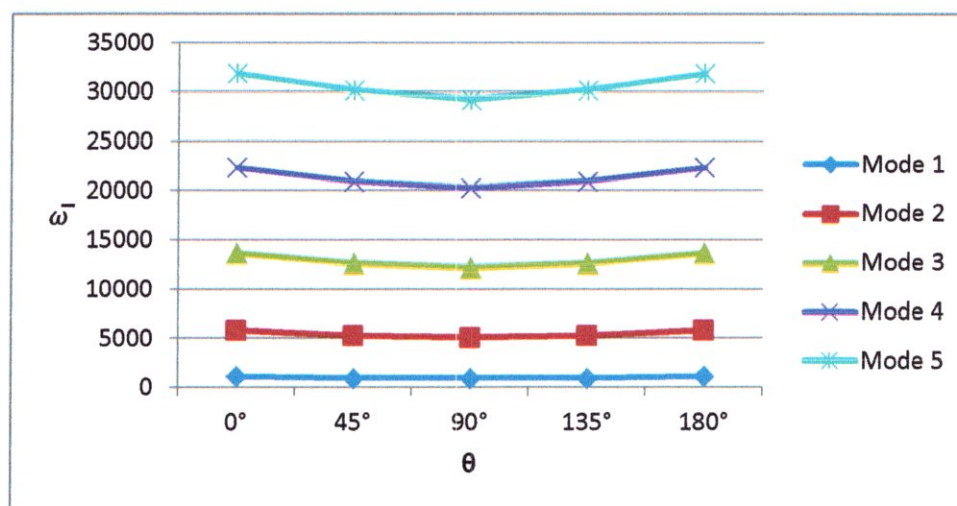


Figure (V.11): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=40$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	0.973	0.808	0.807	0.808	0.973
Mode 2	5.163	4.657	4.506	4.657	5.163
Mode 3	12.046	11.137	10.750	11.137	12.046
Mode 4	19.656	18.422	17.803	18.422	19.656
Mode 5	28.012	26.513	25.654	26.513	28.012

Tableau (V.12): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=40$

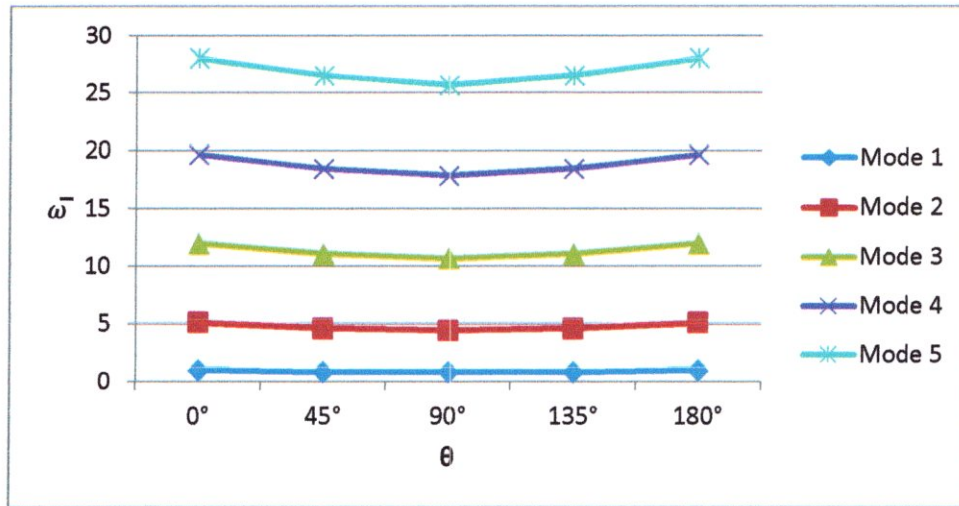


Figure (V.12):Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=40$

3. Influence de l'orientation θ sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=0$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	1101.160	874.676	898.104	874.676	1101.160
Mode 2	5865.102	5249.881	5101.887	5249.881	5865.102
Mode 3	13693.249	12620.027	12204.190	12620.027	13693.249
Mode 4	22346.569	20898.055	20220.952	20898.055	22346.569
Mode 5	31847.627	30091.276	29145.832	30091.276	31847.627

Tableau (V.13): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=60$

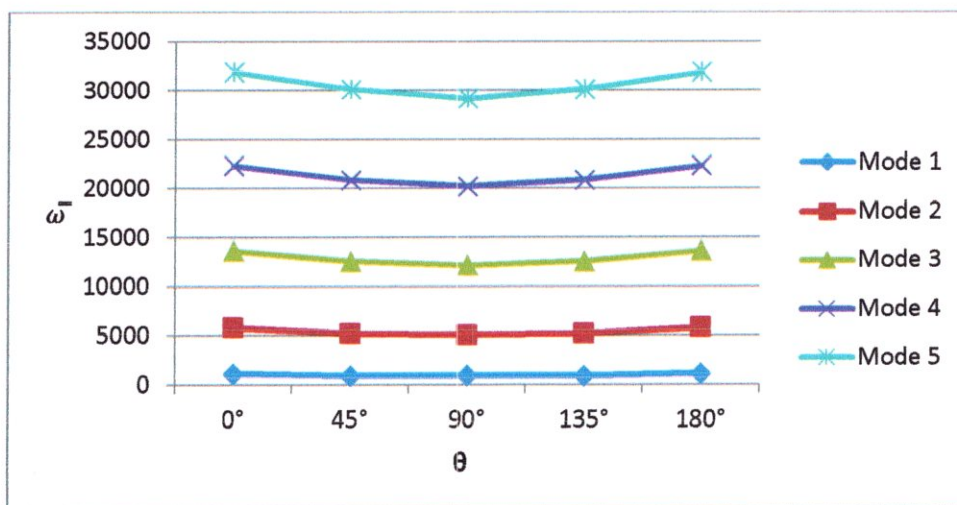


Figure (V.13) Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=60$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	0.968	0.769	0.790	0.769	0.968
Mode 2	5.157	4.616	4.486	4.616	5.157
Mode 3	12.041	11.097	10.732	11.097	12.041
Mode 4	19.650	18.376	17.781	18.376	19.650
Mode 5	28.005	26.460	25.629	26.460	28.005

Tableau (V.14): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=60$

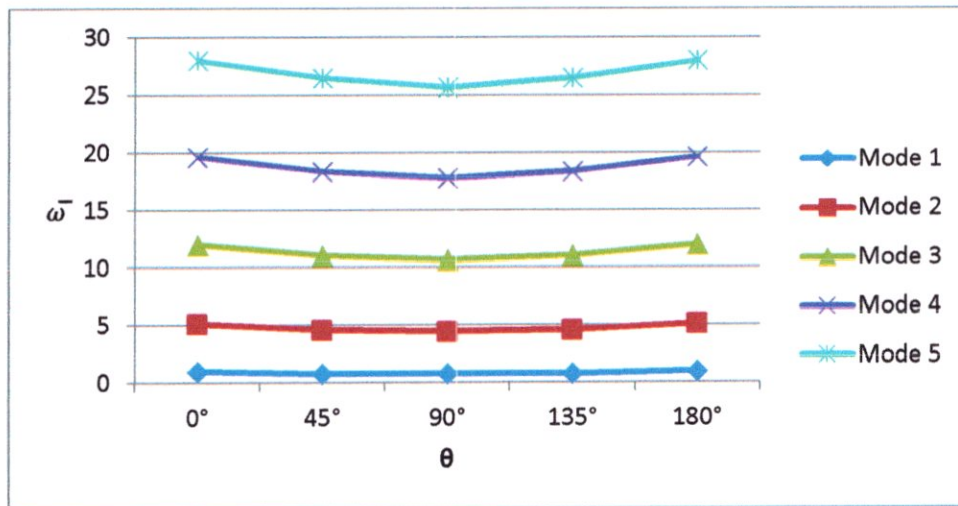


Figure (V.14) Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=60$

4. Influence de l'orientation θ sur ω et $\bar{\omega}$ avec $\Delta T=100$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	1090.574	775.481	856.577	775.481	1090.574
Mode 2	5852.674	5155.126	5057.369	5155.126	5852.674
Mode 3	13680.779	12529.261	12161.156	12529.261	13680.779
Mode 4	22332.169	20795.190	20172.274	20795.190	22332.169
Mode 5	31830.578	29971.114	29088.962	29971.114	31830.578

Tableau (V.15): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=100$

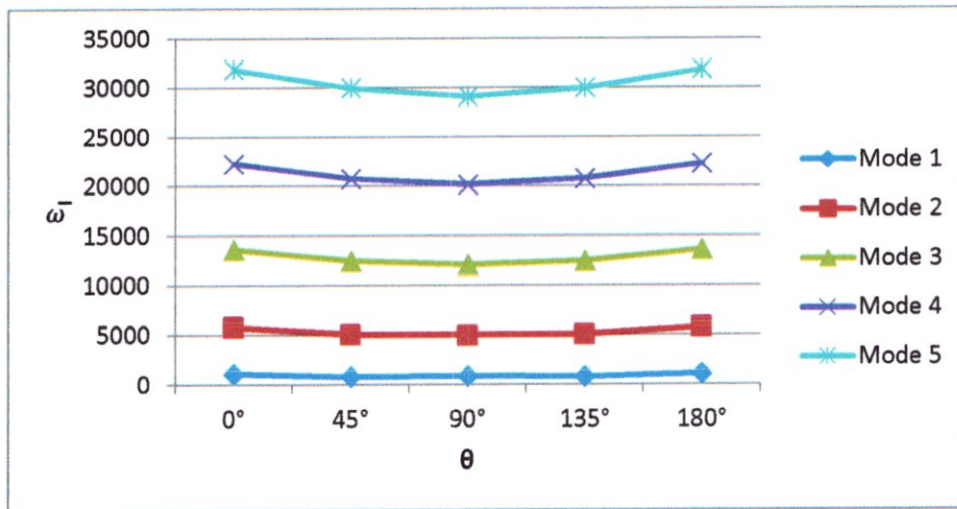


Figure (V.15): Variation de la fréquence naturelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=100$

Mode	θ				
	0°	45°	90°	135°	180°
Mode 1	0.959	0.682	0.753	0.682	0.959
Mode 2	5.146	4.533	4.447	4.533	5.146
Mode 3	12.030	11.017	10.694	11.017	12.030
Mode 4	19.637	18.286	17.738	18.286	19.637
Mode 5	27.990	26.355	25.579	26.355	27.990

Tableau (V.16): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches avec $\Delta T=100$

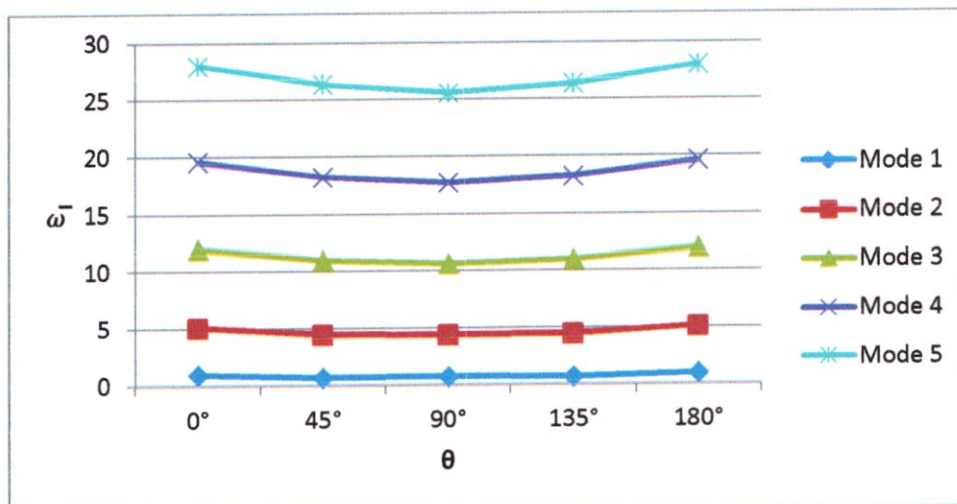


Figure (V.16): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ pour les 5^{er} Modes avec $\Delta T=100$

5. Influence de l'orientation des couches et de la différence de température sur les fréquences adimensionnelles du mode 1

ΔT	0°	45°	90°	135°	180°
0	0,982	0,88	0,841	0,88	0,982
40	0,973	0,808	0,807	0,808	0,973
60	0,968	0,769	0,79	0,769	0,968
100	0,959	0,682	0,753	0,682	0,959

Tableau (V.17): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches et des différentes températures pour le mode 1

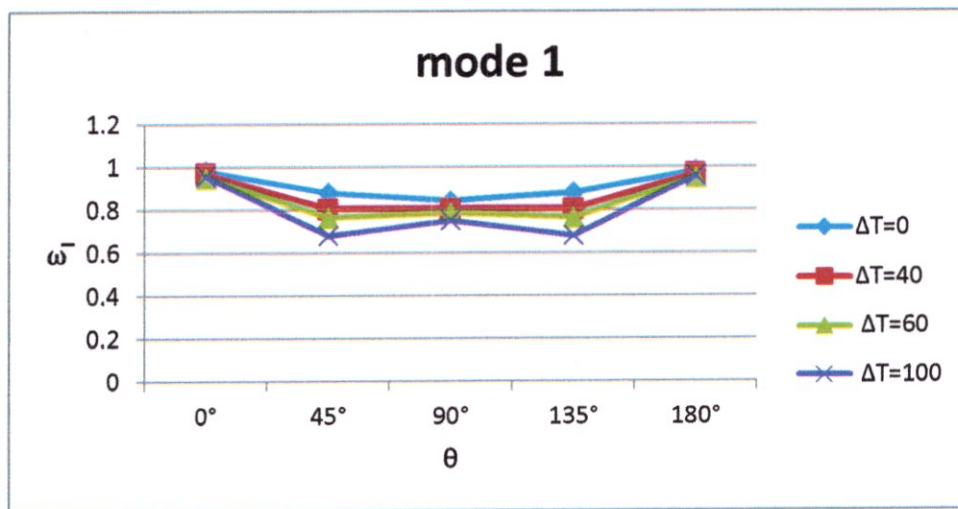


Figure (V.17): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ et de la différence de température pour le Mode 1

6. Influence de l'orientation des couches et de la différence de température sur les fréquences adimensionnelles du mode 5

ΔT	0°	45°	90°	135°	180°
0	28,027	26,618	25,704	26,618	28,027
40	28,012	26,513	25,654	26,513	28,012
60	28,005	26,46	25,629	26,46	28,005
100	27,99	26,355	25,579	26,355	27,99

Tableau (V.18): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation des couches et des différentes températures pour le mode 5

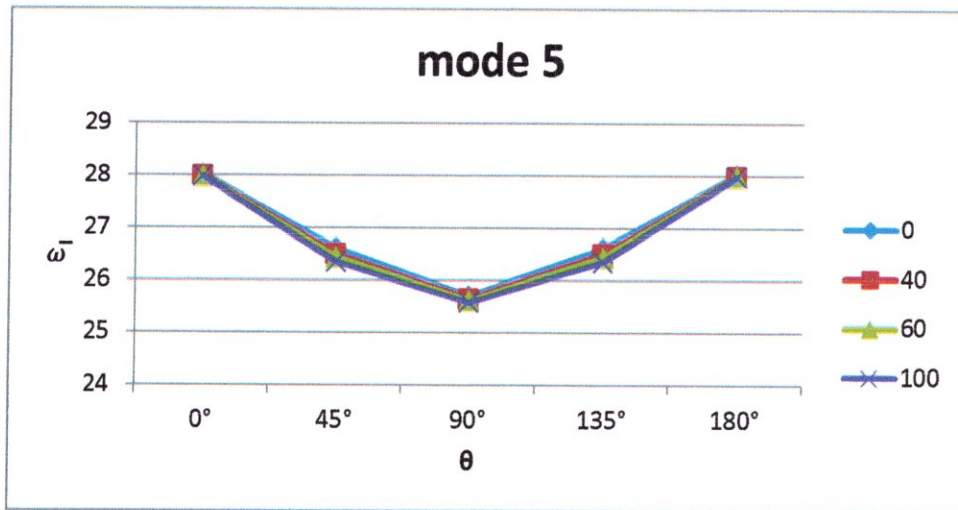


Figure (V.18): Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'orientation θ et de la différence de température pour le Mode 5.

V.4 Influence du nombre de couches sur les fréquences adimensionnelle :

Pour pouvoir donner l'influence du nombre de couches sur les fréquences adimensionnelles nous avons besoin d'étudier l'influence du rapport d'épaisseur sur une poutre à 4 couches et puis de la comparer avec celle à 6 couches pour une poutre en Graphite Epoxy avec la même épaisseur.

V.4.1 Influence de la différence de température sur les fréquences adimensionnelles pour différent nombre de couches:

Influence de la différence de température pour une poutre en Graphite Epoxy qui comporte en premier 4 couches $n=4$ avec la configuration suivante (0/90/90/0) et en second 6 couches $n=6$ avec la configuration (0/90/90/90/90/0) pour les différences températures $\Delta T=(0, 40, 60, 100)$.

1. Pour $L/h=5$:

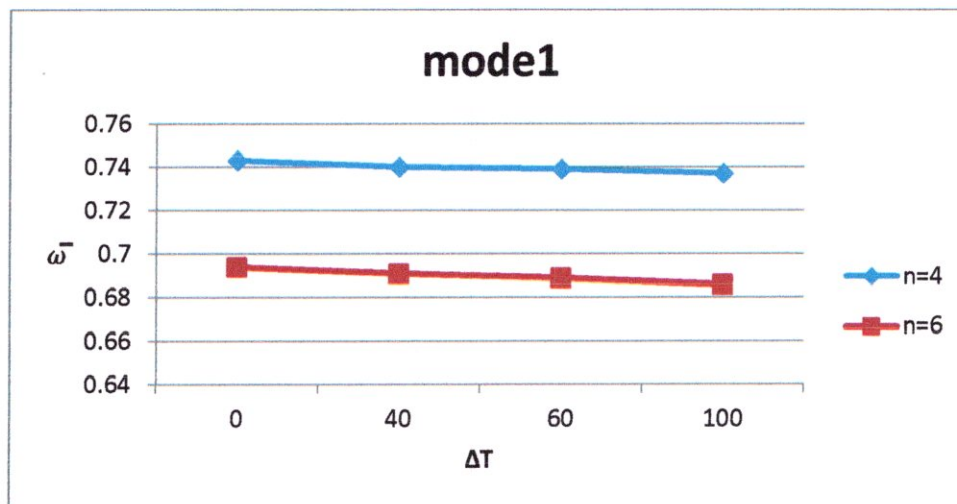


Figure (V.19) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1

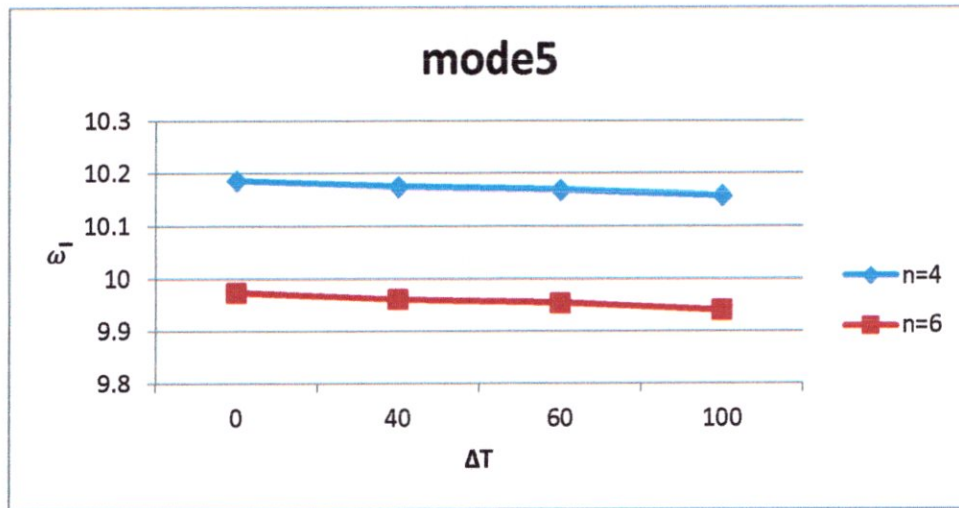


Figure (V.20) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5

2. Pour $L/h=20$:

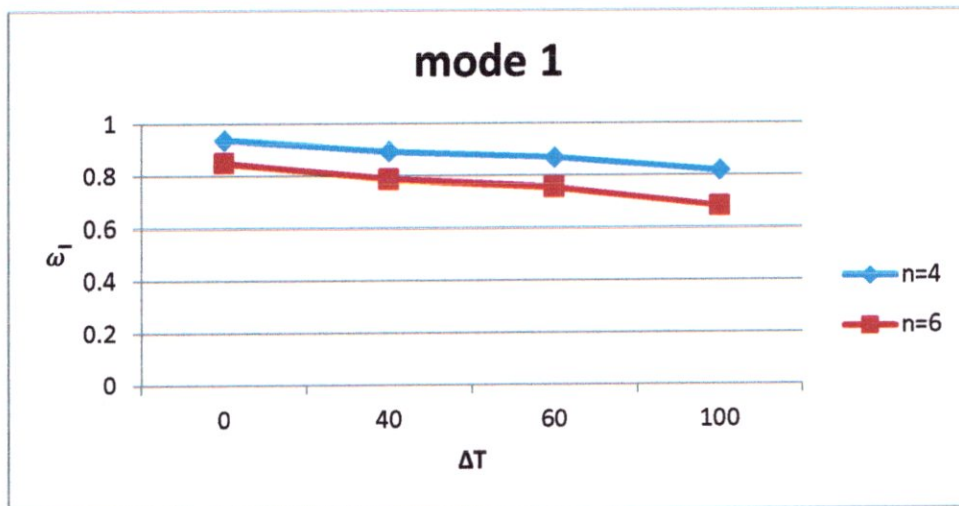


Figure (V.21) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1

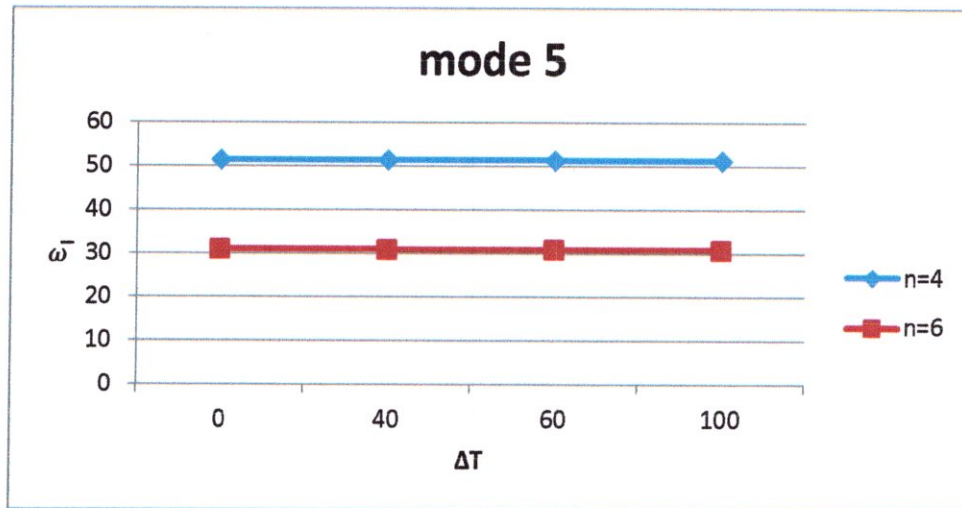


Figure (V.22) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5.

V.4.2 Influence de la différence de température sur les fréquences adimensionnelles quand la poutre à des couches croisées :

Influence de la différence de température une poutre en Graphite Epoxy qui comporte en premier 6 couches n=6' avec la configuration suivante (90/-90/90/90/-90/90) et en second 4 couches n=4' avec la configuration (90/-90/-90/90) les deux avec la même épaisseur

1. Pour n=6' (90/-90/90/90/-90/90):

Mode 1	L/h				
	5	10	15	20	50
$\Delta T=0$	0.254	0.261	0.262	0.262	0.263
$\Delta T=40$	0.238	0.181	0.807	0.311	0.522
$\Delta T=60$	0.229	0.119	0.256	0.471	0.812
$\Delta T=100$	0.210	0.162	0.442	0.708	0.855

Tableau (V.16) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur pour le Mode 1.

Mode 5	L/h				
	5	10	15	20	50
$\Delta T=0$	10.457	19.781	13.561	33.213	73.355
$\Delta T=40$	10.438	19.713	25.654	33.063	73.018
$\Delta T=60$	10.429	19.679	26.606	32.988	72.850
$\Delta T=100$	10.409	19.610	26.494	32.839	72.516

Tableau (V.17) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur pour le Mode 5.

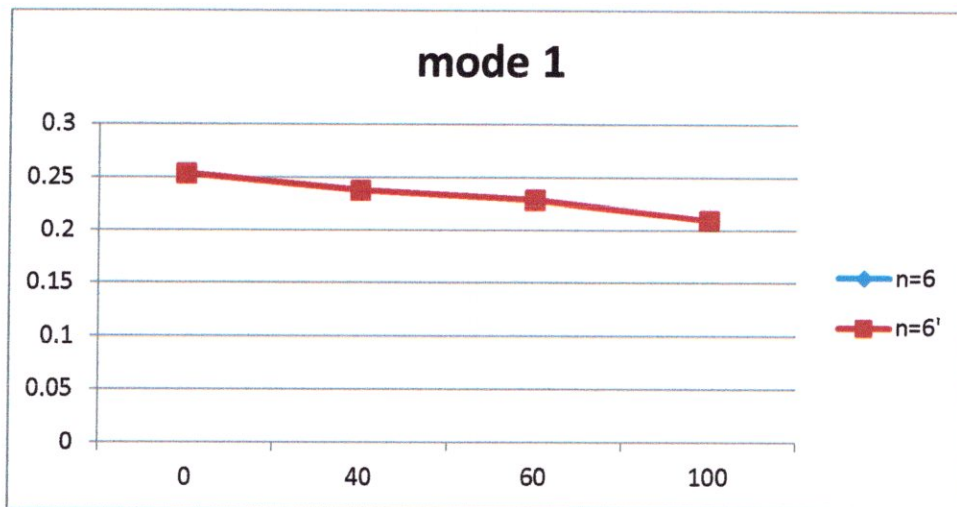


Figure (V.23) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=6$ et $n=6'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 1.

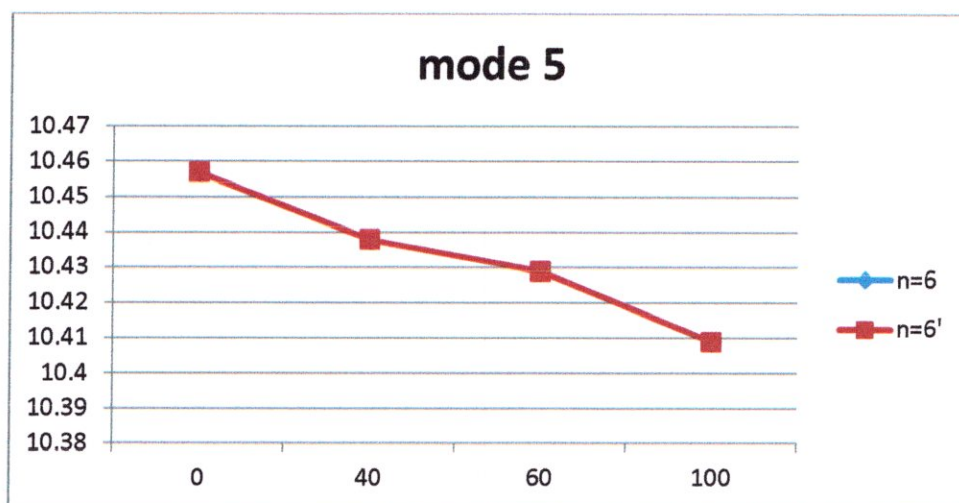


Figure (V.24) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=6$ et $n=6'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 5.

2. Pour $n=4'$ (90/-90/-90/90):

Mode 1	L/h				
	5	10	15	20	50
$\Delta T=0$	0.254	0.261	0.262	0.262	0.263
$\Delta T=40$	0.238	0.181	0.124	0.311	0.522
$\Delta T=60$	0.229	0.119	0.256	0.471	0.812
$\Delta T=100$	0.210	0.162	0.442	0.708	0.855

Tableau (V.18) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur pour le mode 1.

Mode 5	L/h				
	5	10	15	20	50
$\Delta T=0$	10.457	19.781	26.774	33.213	73.355
$\Delta T=40$	10.438	19.713	26.662	33.063	73.018
$\Delta T=60$	10.429	19.679	26.606	32.988	72.850
$\Delta T=100$	10.409	19.610	26.494	32.839	72.516

Tableau (V.19) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur pour le mode 5.

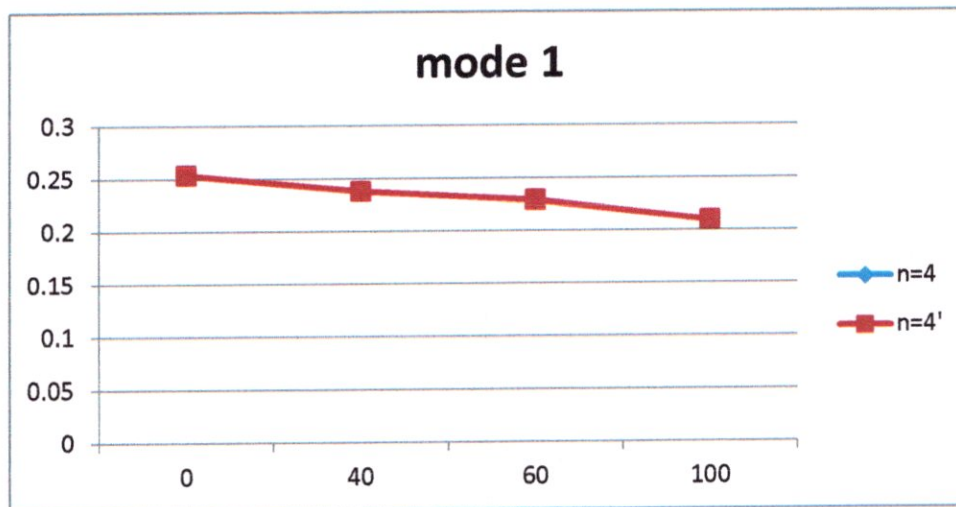


Figure (V.25) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=4$ et $n=4'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 1.

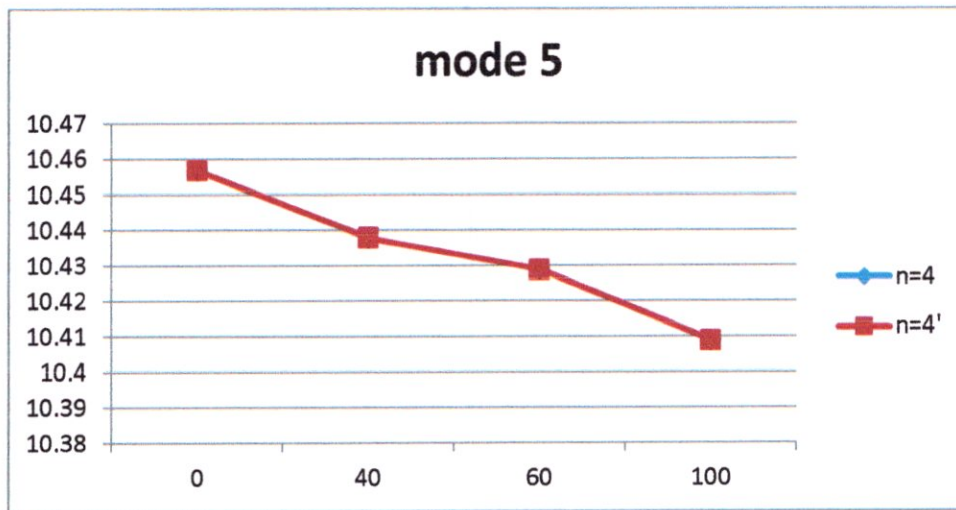


Figure (V.26) : Variation de la fréquence adimensionnelle pour $n=4$ et $n=4'$ en fonction de de la différence de température avec $L/h=5$ pour le Mode 5.

3. Pour $L/h=5$:

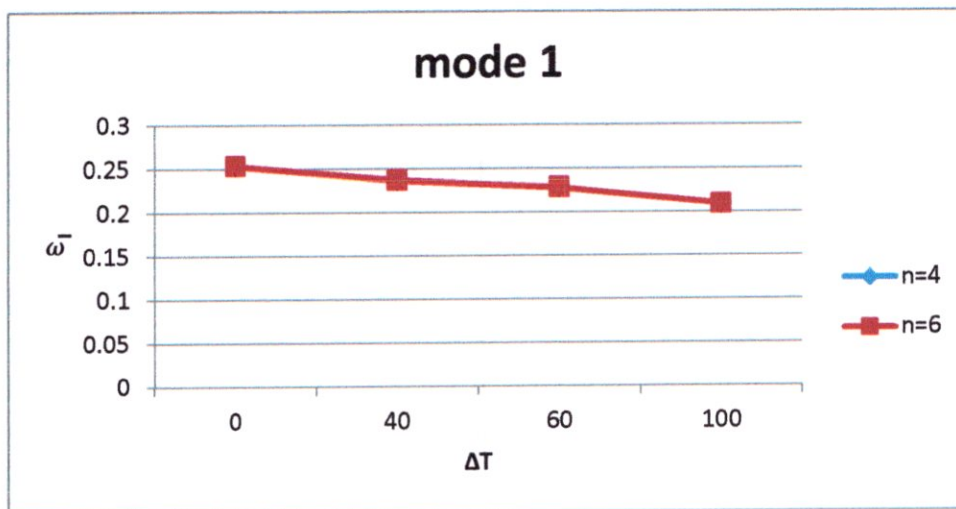


Figure (V.27) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1

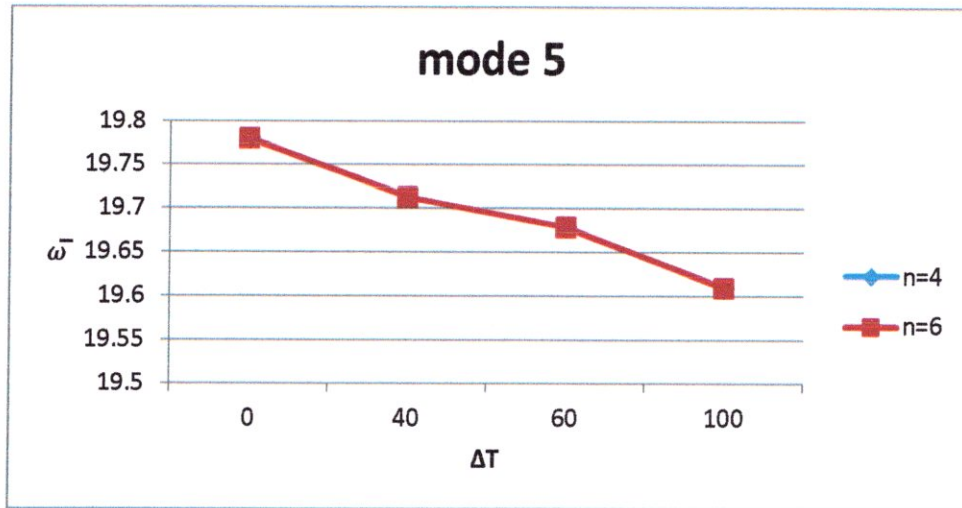


Figure (V.28) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5

4. Pour $L/h=50$:

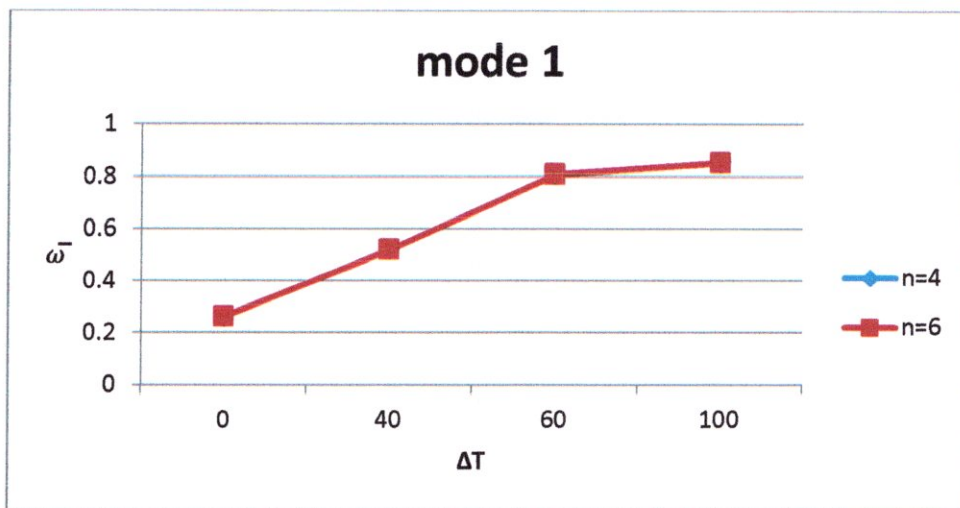


Figure (V.29) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 1

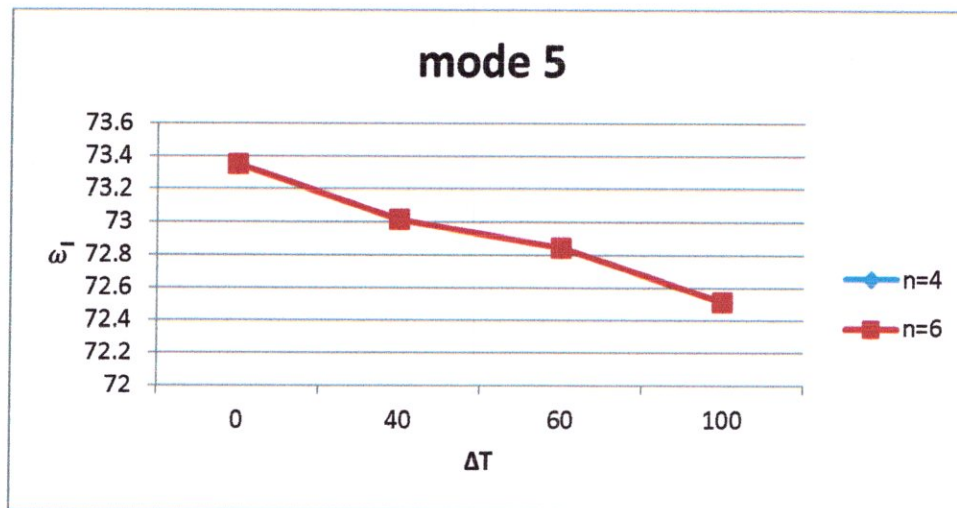


Figure (V.30) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du nombre de couches et de la différence de température pour le Mode 5

V.5 Interprétations des résultats :

V.5.1 Influence du rapport longueur/épaisseur (L/h) sur le comportement vibratoire de la poutre :

Pour expliquer l'effet du rapport longueur/épaisseur sur les fréquences de vibrations, nous allons étudier les cas suivants :

Une poutre en graphite-époxy avec différents rapports d'épaisseurs $L/h = (5, 10, 15, 20, 50)$ et des différences de températures $\Delta T = (0, 40, 60, 100)$, avec une configuration à 6 couches (0/90/90/90/90/0), les 5 premières fréquences adimensionnelles sont données dans les tableaux (V.1) à (V.8).

Les fréquences adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport L/h , par contre les fréquences naturelles (en hertz) diminuent ceci s'explique par le fait que la poutre devient plus flexible dans la direction transversale.

En augmentant la variation de la température imposée à la poutre composite stratifiée, nous constatons que les modes sont clairement affectés. Lorsque la température augmente les fréquences naturelles des différents modes diminuent fig.(V.1) à (V.8).

L'augmentation de la température a donc le même effet que l'augmentation de L/h sur la poutre autrement dit la diminution de la fréquence naturelle quel que soit le mode.

Là aussi nous pouvons dire que l'augmentation de la température affecte (diminue) la rigidité de la poutre.

Pour un rapport L/h donné le mode 5 est moins affecté par l'augmentation de la température que le mode 1 particulièrement lorsque L/h est grand.

L'effet de la température sur les fréquences propres est plus prononcé pour une poutre longue (L/h grand) que pour une poutre courte (L/h petit) fig. (V. 8).

Les fréquences adimensionnelles sont proportionnelles avec le changement de la température selon la valeur de α_1 .

V.5.2 Influence de l'angle d'orientation sur le comportement vibratoire de la poutre :

Pour expliquer l'effet de l'orientation des fibres sur les fréquences dimensionnelles, nous allons étudier les cas suivants :

Une poutre en graphite/époxy ayant six couche suivante la configuration $(\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta)$ avec $\theta=(0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ)$ et le rapport d'épaisseurs $L/h=15$ et en variant la différence de température $\Delta T= (0, 50, 100, 120)$, les 5 premières fréquences adimensionnelles sont représentés sur les courbes de (V.9) à (V.16).

La fréquence d'une poutre en composite unidirectionnelle est plus grande que celle d'une poutre stratifiée non unidirectionnelle quel que soit le mode de vibration considéré.

Donc l'orientation des fibres a une influence non négligeable sur les fréquences de vibrations, ceci s'explique par le changement de la rigidité globale de la poutre quant à l'orientation des fibres. Le même phénomène est observé lorsque la température augmente.

Avec l'angle d'orientation égale 90° , On constate une parfaite symétrie dans les fréquences adimensionnelles ainsi chaque deux angles supplémentaires ont la même fréquence adimensionnelle, et une fréquence adimensionnelles maximale avec l'orientation $(0^\circ, 180^\circ)$.

Lorsque la température augmente les fréquences de vibrations diminuent et c'est inversement vrai pour l'augmentation de température et cela est dû au faite que lorsque la

température augmente elle agit sur le composite est le rend plus flasque et ceci est dû à l'augmentation des efforts internes qui provoquent l'augmentation de la contrainte résiduelle (thermique).

Pour une orientation donnée des fibres, plus le mode augmente plus l'effet de la température diminue.

Les fréquences adimensionnelles sont proportionnelles au changement de la température selon la valeur de α_1 .

V.5.3 influence du nombre de couche sur le comportement vibratoire de la poutre :

Pour expliquer l'effet de l'orientation des fibres sur les fréquences adimensionnelles nous allons étudier les cas suivants :

Une poutre en graphite/époxy avec les différents rapports d'épaisseurs L/h (5,10,15,20,50) pour des différences de températures $\Delta T = (0, 50, 100, 120)$ avec une configuration à 4 couches (90/-90/-90/90) et à 6 couches (90/-90/90/90/-90/90), les fréquences adimensionnelles du mode 1 et 5 sont définies dans les tableaux (V.19) à (V.30).

L'augmentation de la température affecte plus le composite croisé que le composite unidirectionnel.

Les fréquences fondamentales adimensionnelles change presque linéairement avec le changement de la température pour tous les cas. Un comportement typique de la fréquence adimensionnelle comme une fonction linéaire de changement de la température est montré dans les figures (V.19) à (V.30).

C'est aussi évident que les lignes des fréquences adimensionnelle correspondant aux couches $n=4$ et $n=6$ pour la même épaisseur (h) sont presque parallèles l'une avec l'autre, figures (V.19) à (V.21) et confondus pour les figures (V.22) à (V.30). c'est pour dire l'influence du nombre de couches affecte les fréquences de vibrations, plus le nombre augmente plus les fréquences diminuent et inversement cela est dû à la rigidité qui augmente pour notre cas.

Pour les figures (V.22) à (V.30) les fréquences ont les mêmes valeurs pour des numéros de couches différentes ou pour des couches croisées

L'ensemble des lignes correspondent aux différentes valeurs d'épaisseurs avec des inclinaisons différentes mais, les valeurs des fréquences adimensionnelles changent proportionnellement avec le changement de la température.

V.6 CONCLUSION :

Dans ce chapitre consacré aux résultats et à leurs interprétations nous avons déterminé les fréquences de vibration des cinq premiers modes et nous avons vu l'influence de l'effet de la température, du rapport d'épaisseur et des différentes configurations et orientations des couches. Différentes interprétations physiques de ces résultats ont été proposées.

Conclusion générale

Conclusion Générale

Aujourd'hui l'utilisation des structures et des matériaux composites est parmi Les technologies les plus prometteuses pour une efficacité maximale et une fiabilité améliorée.

L'objectif de la recherche dans ce domaine est de comprendre et de prévoir le comportement statique et dynamique de tout nouveau matériau composite. Dans ce travail nous avons apporté une modeste contribution à l'étude du comportement vibratoire des poutres composites stratifiée soumises à des contraintes thermiques initiales. La résolution du problème aux valeurs propres a été réalisée grâce à l'élaboration d'un code de calcul basé sur la méthode variationnelle de Ritz.

Nous avons essayé de regrouper plusieurs éléments qui sont respectivement : les matériaux composites (stratifiés orthotropes), les différentes théories étudiant leur comportement dynamique et leurs projections sur le domaine aéronautique.

Nous avons effectué en premier lieu une étude générale sur la théorie des stratifiés (théorie classique et FSDBT), puis une modélisation dynamique qui nous a permis de réduire le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, z) de moindre difficulté.

Nous avons résolu le problème aux valeurs propres et nous avons étudié l'influence des différents paramètres du stratifié sur l'évolution des fréquences adimensionnelles. L'ensemble des résultats obtenus montre l'influence des charges thermiques sur le comportement dynamique des structures poutres.

En perspective, nous pouvons suggérer comme travail futur, l'étude de l'influence de la variation de la température sur des poutres stratifiées non symétriques. Il sera également intéressant d'introduire des théories d'ordre supérieur dans la modélisation du composite pour mieux approcher les fréquences naturelle particulièrement lorsque la poutre est épaisse. Nous pouvons aussi étendre l'étude à d'autres conditions aux limites et d'autres méthodes de résolution.

Références bibliographiques :

- [1] S. P. Timoshenko - Théorie de l'élasticité- université Polytechnique PARIS.
- [2] D. Gay, matériaux composites, 3^e édition, éditions Hermes, 1991.
- [3] J. M. Cieux - Flexion dynamique des poutres composites à phases isotropes- Validité du domaine quasi-statique - Thèse de doctorat de l'Université Toulouse 1988.
- [4] M. Carrier - Comportement dynamique des poutres composites - Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier Toulouse juin 1988.
- [5] J.M. Berthelot - Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3^e édition - Paris : Editions Masson, 1999.
- [6] Mme Hamadouche : cour aéroélasticités -DAB-Blida-2011.
- [7] O. Soufane, N. Medjadji : Etude et Modélisation d'une Structure en Nids d'Abeilles et Application Aéronautique- Ecole Supérieure de l'Air- 2006.
- [8] N. Jiahlouli : Cours Matériaux Composites / DESS Mécanique avancée et Stratégie industrielle-IPST-ULP.
- [9] J. Molimard : Mécanique des Matériaux composites- Version 2, Septembre 2004.
- [10] Mlle Benkhedda : cour matériaux composites-DAB-Blida-2011.
- [11] Article (an analytical method for free vibration analysis of composite beams subjected to initial thermal stresses) - département aéronautique BLIDA -Mai 2010.
- [12] J.N. Reddy-Energy principles and variational methods in applied mechanics, department of engineering Texas university-Edition John Wiley & Sons.
- [13] S. Laroze - résistance des matériaux et structures - tome 3 - MASSON, EYROLLES - 1983.
- [14] K. J. Sohn, J. H. Kim: Structural stability of functionally graded panels subjected to aero-thermal loads. Composite Structures 82(2008)317-325, September 2007.
- [15] T. Prakash a, M. Ganapathi: Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects. Composite Structures 72(2006)10-18. 2004.
- [16] E.H. Dowell, E.F. Crawley, H.C. Curtiss, D.A. Peters, R.H. Scanlan, and F.A. Sisto Modern course in Aeroelasticity-Kluwer Academic-oème édition-1995.
- [17] R.L. Bisplinghoff, H. Ashly : Principles of Aeroelasticity, Dover-New-York-1975.