



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة-1-
Université Saad Dahlab Blida -1-



Mémoire de fin D'études

En vue de l'obtention du diplôme Master

Faculté des Sciences
Département : Mathématiques

Spécialité : Modélisation stochastique et statistique

THEME

**Inférence Statistique De La Distribution De Laplace Pour
Des Données Progressivement Censurées De Type II**

Présenté par :
AGHBAL Anis
MEBROUKI Fatma Zahra

Soutenu le : 10/07/2021

Devant le Jury :
Président : O.TAMI MCB **Université de Blida 1**
Promoteur: A. RASSOUL Prof. **ENSH de Blida**
Examineur : R.FRIHI MAA **Université de Blida 1**

Promotion : 2020/2021

Remerciements

A tous ceux nous disons

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, notre encadreur Mr Abdelaziz RASSOUL pour ses précieux conseil set son orientation ficelée durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury, Mr O.TAMI et Mr R.FRIHI pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

On n'oublie pas nos familles et nos amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour :

*A celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoirs, à la source
d'amour Incessible, à la mère des sentiments fragiles qui ma bénie
par ce*

Prièrema mère

*A mon support dans ma vie, qui m'a appris m'a supporté et ma
dirigé Vers gloiremon père*

A mes chers frères

A toutes les personnes de ma grande famille

A mes meilleurs

Amies

Mebrouki Fatma-Zohra

Dédicace

Je dédie ce mémoire

*A mes chers parents ma mère et mon père Pour leur
patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A mes sœurs, mon frère et leurs enfants.

A mes amies et mes camarades.

*Sans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire,
du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Aghbal Anis

تلخيص

في هذا العمل، نحن مهتمون بتوصيف توزيع لابلاس والتوزيعات المتعلقة بهذا التوزيع. يتم تقديم الاستدلال الإحصائي لتوزيع المكان من خلال عدة طرق موجودة في الأدبيات (الاحتمالية القصوى، اللحظات)، بناءً على طريقة "أفضل مقدر خطي غير متحيز (الأزرق: أفضل مقدر خطي غير متحيز) لتقدير المعلمات. توزيع لابلاس من أجل البيانات الخاضعة للرقابة التدريجية من النوع الثاني في النهاية، نقدم دراسة محاكاة على هذا النموذج مع تقدير المعلمات، ثم تطبيق على البيانات الحقيقية المتعلقة بوقت كسر السائل العازل.

الكلمات المفتاحية

توزيع لابلاس ، الاحتمالية القصوى ، التقدير ، مقدر خطي غير متحيز ، النوع الثاني من الرقابة التدريجية

Résumé

Dans ce travail, nous intéressons par la caractérisation de la distribution de Laplace, et les distributions liées à cette distribution. L'inférence statistique pour la distribution de Laplace est présentée par plusieurs méthodes existantes dans la littérature (Maximum de Vraisemblance, Moments), en se basant sur la méthode "Meilleur estimateur linéaire non biaisé (BLUE: Best Linear Unbiased Estimator) pour estimer les paramètres de la distribution de Laplace pour des données progressivement censurées de type II. A la fin, nous présentons une étude de simulation sur ce modèle avec l'estimation des paramètres, ensuite une application sur des données réelles concernant le temps de rupture du fluide isolant.

Mot clés : Distribution de Laplace, Maximum de Vraisemblance, estimation, BLUE, censure progressive de type II

Abstract

In this work, we are interested in the characterization of the Laplace distribution, and the distributions related to this distribution. Statistical inference for the Laplace distribution is presented by several existing methods in the literature (Maximum Likelihood, Moments), based on the Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) method for estimating the parameters of the Laplace distribution for progressively censored type II data. At the end, we present a simulation study on this model with the estimation of the parameters, followed by an application on real data concerning the breaking time of the insulating fluid.

Keywords : Laplace distribution, Maximum Likelihood , estimation , BLUE , type II progressive censoring

ABBREVIATIONS ET NOTATIONS

Abbreviations

i.i.d	indépendant, distribué de manière identique
BLUE	meilleur estimateur linéaire sans biais
MLE	estimateur du maximum de vraisemblance
MME	méthode d'estimation des moments
IC	Intervalle de confiance
GH	distribution hypoexponentielle
CDF	cumulative distribution fonction
MGF	fonction génératrice de moment

Notations

$cl(\theta, s)$	distribution de Laplace classique avec moyenne θ et paramètre d'échelle s
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels
$\stackrel{d}{=}$	égalité des distributions
\mathbb{N}	l'ensemble des nombres naturels
v_p	variable aléatoire géométrique de moyenne $\frac{1}{p}$
γ_1	le coefficient d'asymétrie
γ_2	le coefficient d'aplatissement
(Ω, \mathcal{A}, P)	espace de probabilité.
(Ω, \mathcal{A})	espace mesurable

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	2
1 Distribution de Laplace symétrique classique	4
1.1 Introduction	4
1.2 Généralités sur les variables aléatoires	4
1.2.1 Moments	6
1.2.2 Caractéristique d'asymétrie et d'aplatissement	7
1.2.3 Fonction génératrices	8
1.2.4 Fonction génératrice des moments	8
1.2.5 Fonction caractéristiques	9
1.3 Notion essentielle de quantile	10
1.4 Généralité sur la distribution de Laplace	10
1.4.1 Fonction de densité et de distribution	10
1.4.2 Fonction caractéristique	12
1.4.3 Fonction génératrice des moments	12
1.4.4 Moments et paramètres associés	13
1.4.4.1 Cumulant	13
1.4.4.2 Moments	14
1.4.4.3 L'écart moyen	15
1.4.4.4 Quartiles et Quantiles	15
1.4.4.5 Entropie	16
1.4.5 Caractéristique d'asymétrie et d'aplatissement	16
1.4.6 Distribution de log-Laplace	17
1.5 Simulation	17
1.5.1 Estimation des paramètres	17
1.5.2 Méthode d'inversion sur loi de Laplace	18

2	Représentations et caractérisations	19
2.1	Mélange de distributions normales	20
2.2	Relation à la distribution exponentielle	21
2.3	Relation avec la distribution de Pareto	23
2.4	Relation à 2×2 déterminants normaux unitaires	24
2.5	Statistique d'ordre	24
2.5.1	Distribution d'une statistique d'ordre unique.	25
2.5.2	Etendue, Centre, et Médiane d'un échantillon :	28
2.5.2.1	Moments des statistiques d'ordre :	28
3	Inférence statistique	30
3.1	Inférence exacte pour la distribution de Laplace sous censure progressive de type II	32
3.1.1	Données de censure	32
3.1.1.1	Différents types de censures	32
3.1.2	Estimation des paramètres de Laplace sous censurs de type II	34
3.1.3	Fonction de densité exacte des pivots basés sur BLEU et estimation d'intervalle	38
3.1.3.1	Fonction de densité exactes de la combinaison linéaire de Laplace standard statistiques de commande censurées progressivement de type II	38
3.1.3.2	Intervalle de confiance pour θ et S	42
3.1.4	Estimateur quantile basé sur les BLEUS, sa distribution exacte et son intervalle de confiance pour le quantile de population	43
3.1.5	Autres problèmes inférentiels	45
3.1.5.1	Intervalle de confiance exact pour la fonction de fiabilité	45
3.1.5.2	Intervalle de confiance exact pour la fonction de risque cumulé :	45
3.2	Estimation ponctuelle	46
3.2.1	Estimation par maximum de vraisemblance :	46
3.2.2	Estimation du maximum de vraisemblance sous censure	49
3.2.3	Estimation du maximum de vraisemblance des paramètres de localisation monotone	50
3.3	Méthode des moments	52
4	Simulation et Application	55
4.1	Introduction	55
4.2	Simulation d'un échantillon progressivement censuré	55
4.3	Préparation des échantillons censurés de type II de la distribution de Laplace :	57

4.4	Application sur claquage d'un fluide isolant	58
4.5	Exemple illustratif	59
4.6	Remarques finales	61

TABLE DES FIGURES

1.1	Densité de la distribution de Laplace standard	11
4.1	La représentation graphique du claquage d'un fluide isolant	59
4.2	Diagramme Q–Q pour les données du tableau (4.1), avec niveau de confiance exactes à 95 %	60
4.3	Courbe de Kaplan-Meier pour la fonction de survie estimée pour les données du tableau(4.4) avec un niveau de confiance exact de 95 % . . .	61

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Résumé des représentations de la distribution de Laplace classique standard présentée dans cette section.	24
4.1	Echantillon de Laplace progressivement censuré type II	57
4.2	Valeurs de a_i de la distribution de Laplace	57
4.3	Valeurs de b_i de la distribution de Laplace	57
4.4	Temps de connexion censurés progressivement de type II jusqu'aux données de panne sur le fluide isolant testé à 34 Kilovolts de Nelson (1982)	60
4.5	BLEU de θ et s sur la base des données du tableau 3, avec leurs erreurs types et IC à 95 %	61

12 juillet 2021

INTRODUCTION GÉNÉRALE

En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Jeux de dés, tirage de boules dans des urnes et jeu de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir les expériences aléatoires. Ces premières, approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou au plus dénombrable. Certaines questions ont cependant fait apparaître des lois à support infini non dénombrable; par exemple, lorsque le nombre de tirages de pile ou face effectués tend vers l'infini, la répartition des fréquences avec lesquelles le côté pile apparaît s'approche d'une loi normale.

Des fluctuations ou de la variabilité sont présentes dans presque toute valeur qui peut être mesurée lors de l'observation d'un phénomène, quelle que soit sa nature, de plus presque toutes les mesures ont une part d'erreur intrinsèque. Les lois de probabilités permettent de modéliser ces incertitudes et de décrire des phénomènes physiques, biologiques, économiques, etc. Le domaine de la statistique permet de trouver des lois de probabilités adaptées aux phénomènes aléatoires.

Le but de cette monographie est assez modeste : elle tente d'être un exposé systématique de tout ce qui est apparu dans la littérature et nous était connu à la fin du 20^{ième} siècle sur la distribution de Laplace et ses nombreuses généralisations et extensions. Pendant de nombreuses années, la distribution de Laplace a été un sujet populaire en théorie des probabilités en raison de la simplicité de sa fonction caractéristique et de sa densité, le curieux phénomène qu'une variable aléatoire avec seulement une fonction caractéristique légèrement différente perd la simplicité de la fonction de densité et d'autres nombreuses caractéristiques probabilistes attrayantes dont bénéficie cette distribution, Peut-être l'une des premières sources dans laquelle la distribution de Laplace est discutée comme une loi d'erreurs dans la langue anglaise est l'article de 1911 du célèbre économiste et probabiliste *J.M.Keynes* dans le journal de la royal

statistical society, 74, nouvelle Série, pp (322 – 331).

L'échantillonnage censuré se produit dans une expérience de test de durée de vie chaque fois que l'expérimentateur n'observe pas (intentionnellement ou non) les temps de défaillance de toutes les unités soumises à un test de durée de vie. L'inférence basée sur un échantillonnage censuré a été étudié au cours des 50 dernières années par de nombreux auteurs pour un large éventail de distributions de durée de vie telles que normale, exponentielle, gamma, Rayleigh, Weibull, valeur extrême, log-normale, gaussienne inverse, logistique, Laplace et Pareto. Naturellement, il existe de nombreuses formes différentes de censure qui ont été discutées dans le Littérature.

Dans ce mémoire, nous présentons essentiellement l'inférence statistique de la distribution de Laplace pour les données progressivement censurées de type II organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement généralités sur les variables aléatoires et un aperçu de la distribution de Laplace et quelques notions de bases .

dans le deuxième chapitre on passe à des représentations différentes de la variable aléatoire standard de Laplace ,en termes d'autre variables aléatoires bien connues,nous décrivons quelques caractérisations des distribution de Laplace ,en particulier celles liées à la somme géométrique .

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude d'estimation des paramètres de la distribution de Laplace pour des données progressivement censurées de type II, est présenté par plusieurs méthode comme Maximum de Vraisemblance et la méthode des moments, en se basant sur la méthode BLEU "Meilleure estimateur linéaire non biaisé", ensuite, en utilisant logiciel R, pour présenter une étude de simulation sur la distribution de Laplace progressivement censurés à droite de type II ,finalement, Nous effectuons des application numérique sur des données réelles concernant le temps de rupture du fluide isolant

CHAPITRE 1

DISTRIBUTION DE LAPLACE SYMÉTRIQUE CLASSIQUE

1.1 Introduction

Au cours de notre étude de la distribution de Laplace et de ses généralisation, nous avons remarqué dans la littérature que cette distribution statistique est souvent utilisée, non pas pour ses propres mérites mais comme sous de contre exemple pour d'autres (principalement normaux) à été créé uniquement pour fournir des exemples de curiosité, de non régularité et de comportement pathologique. Dans les études à contenu probabiliste, la distribution sert d'outil pour limiter les théorèmes et les représentation en mettant l'accent sur l'analyse de ses différences par rapport à la théorie classique basée sur les fondations "sonores" on à l'impression que "l'aiguille pointue " à l'origine de la distribution Laplace ou se concentre l'essentiel de la densité génère un effet d'entraînement qui affecte le comportement sur tout son support y compris les queues, une étude initiale détaillée de la distribution de Laplace sur ses propres mérites sans comparaison et analogues intrus constants.

1.2 Généralités sur les variables aléatoires

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité , où (Ω, \mathcal{A}) est un espace mesurable et \mathbf{P} est une mesure de probabilité sur \mathcal{A} . Une variable aléatoire X est une fonction mesurable $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ où \mathcal{B} est la tribu borélienne de \mathbb{R} . On écrit parfois $X = X(\omega)$ pour souligner le fait qu'il s'agit d'une fonction de $\omega \in \Omega$.

Définition 1.1 *La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ définie par*

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X(\omega) \leq x) \quad (1.1)$$

C'est une fonction monotone croissante, continue à droite et telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

La fonction F sera aussi appelé la loi (ou la distribution) de X .

IL existe deux principaux types de variables aléatoires : les variables discrètes et les variables continues .

Variable discrète : X est une variable aléatoire dont les valeurs appartiennent à un ensemble fini où dénombrable .

Exemple 1.1 1. la variable de poisson est une variable discrète dont l'ensemble des valeurs est dénombrable : pour $\lambda > 0$, la loi de X est donnée par

$$\mathbf{P}(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

2. loi Bernouilli $X \rightarrow \mathbf{B}(p)$

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$$

et

$$\mathbf{P}(X = 1) = p$$

3. loi Binomiale $X \rightarrow \mathbf{B}(n, p)$

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n.$$

4. loi Géométrique $X \rightarrow \mathbf{G}(p)$

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

Variable continue : X est une variable aléatoire dont la loi admet une densité $f \geq 0$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .i.e

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \tag{1.2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la fonction de répartition de X est différentiable presque partout sur \mathbb{R} et la densité de probabilité de X est égal à la dérivée

$$f(x) = F'(x)$$

presque partout . On note $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \tag{1.3}$$

Exemple 1.2 $a, b, m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}$

1. loi Uniforme $x \rightarrow U[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b].$$

2. Loi Normale $x \rightarrow N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

3. Loi Exponentielle $x \rightarrow Exp(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$$

4. Loi Gamma $x \rightarrow G(\alpha, \lambda)$

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}, x > 0.$$

5. Première loi de Laplace $x \rightarrow Laplace(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

1.2.1 Moments

La moyenne (où la l'espérance mathématique) d'une variable aléatoire X définie par :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} xP(x=i) \text{ si } x \text{ un variable aléatoire discrète} \quad (1.4)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ si } x \text{ un variable aléatoire continue} \quad (1.5)$$

Le moment d'ordre $k(k=1, 2, \dots)$ de X définie par :

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$$

Est le moment centré d'ordre k par :

$$E(X - E(X))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k dF(x). \quad (1.6)$$

Un cas particulier est la variance σ^2 (moment centré d'ordre 2)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{Var}(X) \\ &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E^2(X)\end{aligned}\tag{1.7}$$

La racine carée de la variance s'appelle l'écart type de X :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

On notera que l'écart-type s'exprime dans la même unité que X .

1.2.2 Caractéristique d'asymétrie et d'aplatissement

Définition 1.2 La fonction de répartition de loi X est dite *symétrique par rapport à zéro* (où tout simplement *symétrique*) si

$$F(x) = 1 - F(-x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$: ($f(x) = f(-x)$ dans le cas continu).

Définition 1.3 La fonction de répartition de loi X est dite *symétrique par rapport à $\mu \in \mathbb{R}$* si

$$F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$: ($f(\mu + x) = f(\mu - x)$ dans le cas continu).

On peut qualifier les loi asymétrique comme étant "proche" où "élaguées" de distribution symétrique. A cette fin, en introduisant (pour tout loi de probabilité vérifiant $E(|X|^3) < \infty$) le coefficient d'asymétrie :

$$\gamma_1 = \frac{E(X - E(X))^3}{\sigma^3}.$$

Le coefficient d'aplatissement γ_2 est définie de la façon suivante : si le 4^{ème} moment centré de la variable X existe, alors

$$\gamma_2 = \frac{E(X - E(X))^4}{\sigma^4} - 3.$$

1.2.3 Fonction génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , pour toute loi de probabilité $P_k = P\{X = k\}$ en désignons par $G(s)$ la fonction génératrice de X :

$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} P_k s^k. \quad (1.8)$$

Proposition 1.1 *La fonction génératrice $G_X(s)$ admet dérivée gauche $G'(1)$ en $S = 1$, si et seulement si $E(x)$ existe et est fini,*

$$E(X) = G'_X(1).$$

Théorème 1.1 *Si X et Y des variable aléatoire indépendantes alors*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Corollaire 1.1 1. *Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, dont la fonction génératrice est $G(s)$ alors la fonction génératrice est $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est donnée par :*

$$G_{S_n}(s) = (G(s))^n.$$

2. *La fonction génératrice de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ où N est une variable aléatoire à valeurs entières indépendantes de la suite (X_n) , est la fonction composée*

$$\begin{aligned} G_{S_N}(s) &= G_N(G_X(s)) \\ &= G_N \circ G_X(s). \end{aligned}$$

1.2.4 Fonction génératrice des moments

Définition 1.4 *Soit X une variable aléatoire réelle telle que la fonction*

$$f_X(u) = E[e^{ut}]$$

cette fonction appellé fonction génératrice des moments de X .

Proposition 1.2 1. *Pour a, b réelles, on a*

$$g_{aX+b}(u) = e^{bu} g_X(au),$$

2. *La fonction $g_x(-u)$ est aussi une fonction génératrice des moments,*

3. *La fonction g_x est convexe.*

Théorème 1.2 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune admet une fonction génératrice des moments, alors la somme $X + Y$ admet une fonction génératrice des moments et l'on a

$$g_{X+Y} = g_X g_Y.$$

1.2.5 Fonction caractéristiques

Définition 1.5 Soit X une variable aléatoire réelles, on appelle fonction caractéristique de X , la fonction de la variable réelle t définie par :

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$$

Remarque 1.1 1. Si X est une variable aléatoire discrète alors

$$\varphi(t) = \sum_k P_k e^{itx}.$$

2. Si X est une variable aléatoire continue de densité f , alors

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx.$$

Proposition 1.3 1. φ est une fonction définie et continue pour tout nombre réel t .

2. φ est bornée, est en fait pour tout réel, on a $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$

3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

4. pour tout a, b réels, on a pour tout réel t , l'identité :

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at).$$

Théorème 1.3 Soit (x, y) un couple de variable aléatoire indépendantes, pour tout réel t , on a

$$\varphi_{x+y}(t) = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$$

Définition 1.6 Soient X une variable aléatoire réelle $\varphi(t)$ sa fonction caractéristique, on appelle seconde fonction caractéristique de X la fonction

$$\Psi(t) = \log \varphi(t), t \in \mathbb{R}$$

1.3 Notion essentielle de quantile

Définition 1.7 On appelle quantile d'ordre q de la variable X , ou $q \in [0,1]$, la valeur x_q telle que

$$P(X \leq x_q) = q$$

ou de même $F_X(x_q) = q$.

La notion de quantile est directement liée à celle de fonction de répartition. Tout valeur de \mathbb{R} peut être vue comme un quantile d'un certain ordre. Cette notion de quantile est essentielle du fait que l'ordre d'un quantile permet de positionner la valeur correspondante sur la distribution considérée.

Ainsi le quantile d'ordre 0,5 alias la médiane, est une sorte de centre où milieu de la distribution.

En statistique apparaîtra la nécessité de fixer des limites de plausibilité pour les valeurs d'une loi donnée et l'usage est de prendre pour cela les quantiles $x_{0,025}$ et $x_{0,975}$, soit des valeurs à l'intérieur desquelles la variable aléatoire à une probabilité 0.95 de se trouver.

Dans le cas continu, à tout ordre $q \in [0,1]$ correspond une valeur x_q du fait de la continuité de F_X . Généralement F_X est strictement croissant sur l'ensemble des valeurs de x ou $0 < F_X(x) < 1$ et x_q est donc unique pour $q \in]0,1[$.

Dans le cas discret, nous avons vu que F_X est une fonction en escalier et il peut donc y avoir tout un intervalle de valeurs possibles si q correspond au niveau d'une marche de F_X , ou aucune valeurs si q est entre deux marches. En pratique on convient de prendre la valeur la plus faible dans la premier cas et d'interpoler linéairement entre les deux valeurs possibles x_i et x_{i+1} telles que $F_X(x_i) < q$ et $F_X(x_{i+1}) > q$ dans la deuxième cas.

1.4 Généralité sur la distribution de Laplace

1.4.1 Fonction de densité et de distribution

Définition 1.8 La distribution de Laplace classique est une distribution de probabilité sur \mathbb{R} , donnée la fonction de densité par :

$$f(x; \theta, s) = \frac{1}{2s} e^{-\frac{|x-\theta|}{s}}, x \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

et θ est le paramètre de position et s paramètre d'échelle. [1], il a été nommé d'après Pierre-Simon Laplace (1749-1827), qui en 1774 a obtenu (1.9) comme distribution dont la probabilité est maximisée lorsque le paramètre de localisation est fixé à la médiane. la distribution de Laplace est également connue sous le nom de loi de la différence entre deux variables

aléatoires exponentielles. Par conséquent, elle est également connue sous le nom de distribution exponentielle double, 8 ainsi que de distribution exponentielle bilatérale [2] et la loi exponentielle bilatérale [3].

Corollaire 1.2 Si $\theta = 0$ et $S = 1$, la loi de Laplace est dite standard :

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

A partir de l'équation (1.10) on obtient sur \mathbb{R} le graphe de la densité de Laplace standard.

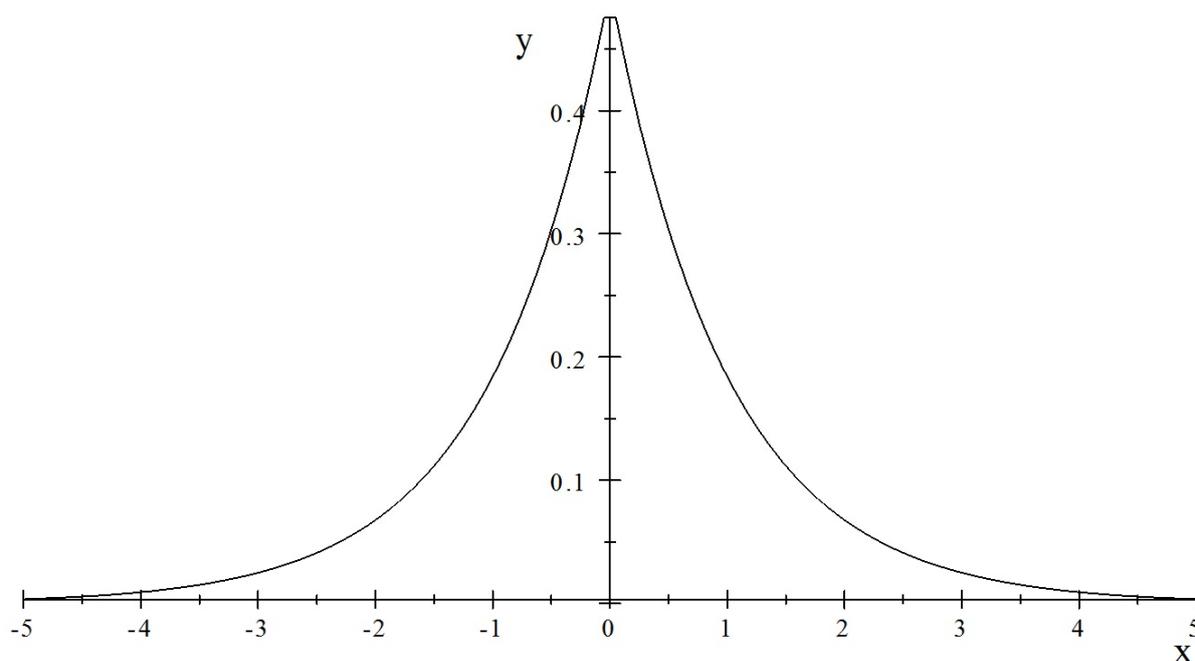


FIGURE 1.1 – Densité de la distribution de Laplace standard

Définition 1.9 La fonction de répartition cumulative correspondant à la densité 1.9 est

$$F(x; \theta, S) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \theta, S) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{|x-\theta|}{S}} & \text{si } x < \theta \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{|x-\theta|}{S}} & \text{si } x \geq \theta \end{cases} \quad (1.11)$$

1.4.2 Fonction caractéristique

La fonction caractéristique correspondant à la variable aléatoire de Laplace classique standard $X \text{ cl}(0,1)$ avec densité équation (1.10) est :

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= E[e^{itx}] & (1.12) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ &= \frac{1}{1+t^2}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pour la variable aléatoire de Laplace classique générale Y avec la distribution l'équation $\text{cl}(\theta, S)$ nous avons $Y = Sx + \theta$ donc

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= E[e^{it(Sx+\theta)}] & (1.13) \\ &= e^{it\theta} \varphi_x(S t) \\ &= \frac{e^{it\theta}}{1+S^2 t^2}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

IL est bien connu mais néanmoins curieux que la paire de transformées de Fourier l'équation (1.10) et (1.12) se produisent dans l'ordre inverse pour la distribution de Cauchy, à savoir la distribution de Cauchy standard avec densité

$$f_c(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$$

à la fonction caractéristique donnée par

$$\varphi_x(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice de moment de la variable aléatoire de Laplace classique standard X avec densité l'équation (1.10) est :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] & (1.14) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ &= \frac{1}{1-t^2}, t \in [-1, 1[\end{aligned}$$

pour la variable aléatoire de lapalce classique générale Y de densité (1.9) ona

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= e^{t\theta} M_x(S t) \\ &= \frac{e^{t\theta}}{1 - S^2 t^2}, t \in \left[\frac{-1}{S}, \frac{1}{S} \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Par conséquent, les fonctions génératrices cumulantes, $\log M_Y(t)$ est $M_x(t)$ correspondant à l'équation (1.9) et (1.10) sont :

$$t\theta - \log(1 - S^2 t^2) \quad (1.16)$$

et

$$-\log(1 - t^2)$$

respectivement.

1.4.4 Moments et paramètres associés

1.4.4.1 Cumulant

le nième cumulant d'une variable aléatoire de Laplace classique X, noté K_n , est définie comme le coefficient de $\left(\frac{t^n}{n!}\right)$ dans l'expression de Taylor (environ $t = 0$) de la fonction génératrice cumulative de X .

Les formules (1.16) pour la fonction génératrice de cumulant génèrent les cumulant des distribution de Laplace de manière simple . En effet , en utilisant le développement Taylor de $\log(1 - Z)$ autour $Z = 0$ nous avons

$$-\log(1 - t^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k}$$

Aussi, pour la variable aléatoire de Laplace classique standard X donnée par l'équation (1.10) on a :

$$K_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \\ 2(n-1) & \text{si } n \text{ est paire} \end{cases} \quad (1.17)$$

Par conséquent, pour une variable aléatoire de Laplace classique générale Y avec distribution l'équation $cl(\theta, S)$:

$$K_n(Y) = \begin{cases} \theta & \text{si } n=1 \\ 2S^n(n-1)!t & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} \quad (1.18)$$

Depuis

$$K_n(Y) = K_n(\theta + Sx) = S^n K_n(x), \text{ pour } n \geq 2.$$

1.4.4.2 Moments

La moyenne (où l'espérance mathématique) d'une variable aléatoire de la distribution de Laplace est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta, S) dx = \theta \quad (1.19)$$

Preuve..

$$x \rightsquigarrow \text{lalpalce}[\theta, S], S > 0$$

$$f(x; \theta, S) = \frac{1}{2S} e^{-\frac{|x-\theta|}{S}}$$

$$E(X) = \frac{1}{2S} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{|x-\theta|}{S}} dx$$

donc

$$E(X) = \frac{1}{2S} \left[\int_{-\infty}^{\theta} x e^{-\frac{x-\theta}{S}} dx + \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-\frac{\theta-x}{S}} dx \right]$$

par intégration par partie alors

$$E(x) = \frac{1}{2S} [\theta S - S^2 + \theta S + S^2] = \theta.$$

■

Et le nième moment centré dordre n de la variable aléatoire de Laplace classique générale Y de densité (1.9)

$$E(Y - \theta)^n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est impaire} \\ S^n n!, & \text{si } n \text{ est paire} \end{cases} \quad (1.20)$$

On peut obtenir le moment centrale absolu d'une distribution de Laplace classique en observant qu'il est égal au moment central but de distribution exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{S}$, ou plus directement :

$$E(Y - \theta)^\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{1}{S} e^{-\frac{x}{S}} dx = S^\alpha \Gamma(\alpha + 1)$$

Un cas particulier est la variance σ^2 (moment centré d'ordre 2) :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sigma^2 = E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 2S^2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

La racine carrée de la variance est l'écart type de la variable aléatoire de Laplace : $\sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{2}S$

De sorte que pour $\theta \neq 0$, les coefficient de variation de Y est

$$\frac{\sqrt{E(Y - E(Y))^2}}{|E(Y)|} = \frac{\sqrt{2}S}{\theta} \tag{1.22}$$

Le nième moment autour de zéro du classique Laplace r.v. Y avec densité (1.9) est donné par [4],[5]

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= n! \sum_{j=0}^n \frac{1 + (-1)^{j+1}}{2j!} \theta^j S^{n-j} \\ &= n! \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\theta^{n-2i}}{(n-2i)!} S^{2i} \end{aligned} \tag{1.23}$$

où $[[x]]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1.4.4.3 L'écart moyen

l'écart moyen d'une variable aléatoire classique Y de densité (1.9) est

$$E|Y - E(Y)| = E|Y - \theta| = S$$

de plus ,nous anons

$$\frac{\text{écart - moyen}}{\text{écart - type}} = \frac{S}{\sqrt{2}S} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Rappelons que pour toutes les distribution normales ,le rapport ci-dessus est donnée par $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0.798$

1.4.4.4 Quartiles et Quantiles

En raison de la disponibilité d'une forme explicite de la fonction de cumulative ,les quantiles d'une distribution de Laplace classique peuvent s'écrire de la manière

suivant :

$$\xi_q = \begin{cases} \theta + S \log(2q), & q \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \theta - S \log[2(1-q)], & q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (1.24)$$

En particulier, les premiers et troisième quartiles sont données par :

$$Q_1 = \xi_{\frac{1}{4}} = \theta - S \log 2$$

$$Q_3 = \xi_{\frac{3}{4}} = \theta + S \log 2$$

Évidemment, le deuxième quartile est médian est égale θ .

1.4.4.5 Entropie

l'entropie d'une variable aléatoire de Laplace classique Y est facile à calculer

$$\begin{aligned} H(Y) &= E[-\log f(Y)] & (1.25) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\log 2S + \frac{|x-\theta|}{S} \right] \frac{1}{2S} e^{-\frac{|x-\theta|}{S}} dx \\ &= \log(2S) + \frac{E(Y-\theta)}{S} \\ &= \log(2S) + 1 \end{aligned}$$

La distribution de Laplace maximise l'entropie au sein de la classe des distributions continues sur \mathbb{R} avec un moment absolu donné [6], ainsi qu'au sein de la classe des distributions conditionnellement gaussiennes [7],[8],[9],[10].

1.4.5 Caractéristique d'asymétrie et d'aplastissement

La distribution est symétrique autour de θ , c'est à dire pour tout réel X que nous avons

$$f(\theta - x; \theta, S) = f(\theta + x; \theta, S) \quad (1.26)$$

et

$$F(\theta - x; \theta, S) = 1 - F(\theta + x; \theta, S)$$

Pour un distribution d'une variable aléatoire avec un moment centré d'ordre 3 et une écart-type supérieure à zéro, le coefficient d'asymétrie est une mesure de symétrie définie par :

$$\gamma_1 = \frac{E(x - E(x))^3}{(E(x - E(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.27)$$

Par l'équation (1.20), le coefficient d'asymétrie de la distribution de Laplace (1.9) est égal à zéro (comme c'est le cas pour tout distribution symétrique à le moment centré d'ordre 3).

Pour une variable aléatoire X , avec un moment centé d'ordre 4, le coefficient d'aplatissement existe il est définie comme

$$\gamma_2 = \frac{E(x - E(x))^4}{(Var(x))^2} - 3 \quad (1.28)$$

C'est une mesure du pic et d la lourdeur des queues (correctement ajustée ,de sort que $\gamma_2 = 0$ pour une distribution normale)et est indépendante de l'échelle ,il $\gamma_2 > 0$, la dis est dite leptokurtique ;sinon platykurtique. vu (1.20) :

$$\gamma_2 = \frac{S^4 4!}{(2S^2)^2} - 3 = 3 \quad (1.29)$$

Donc la distribution de Laplace est leptokurtique ,indiquant un grand degré de pic par rapport à la distribution normale [11],[12] pour plus de détails..

1.4.6 Distribution de log-Laplace

Par analogie avec les systèmes de distribution log-normaux, S_u et S_B [13] a considéré le système

$$X = \begin{cases} \theta + S \log Y & (S_l \text{ système}) \\ \theta + S \sinh^{-1} Y & (S_u \text{ système}) \\ \theta + S \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) & (S_b \text{ système}) \end{cases} \quad (1.30)$$

où Y a la distribution de Laplace classique standard. Le système de distributions S'_L est connu sous le nom de distributions log-Laplace (par analogie avec les distributions log-normales) [14],[15],[16]

1.5 Simulation

1.5.1 Estimation des paramètres

Etant donné un échantillon de N variable iid , x_1, x_2, \dots, x_N un estimateur de est médiane empirique ,et un estimateur par maximum de vraisemblance de S est

$$\hat{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - \hat{\theta}| \quad (1.31)$$

1.5.2 Méthode d'inversion sur loi de Laplace

Etant donné une variable U , tirée selon une loi uniforme continue dans l'intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, la variable

$$X = \theta - S \operatorname{sgn}(U) \ln(1 - 2|U|) \quad (1.32)$$

Est distribuée selon la loi de Laplace de paramètre θ et S . Ce résultat provient de l'expression de l'inverse de la fonction de répartition et de la méthode d'inversion.

Preuve.. Soit U une loi uniforme standard

$$X \rightsquigarrow \text{Laplace}[\theta, S]$$

$$1^{\text{ère}} \text{ cas } X \leq \theta$$

$$F(X; \theta, S) = \frac{1}{2} e^{-\frac{-(X-\theta)}{S}}$$

$$F(x; \theta, S) = U = \frac{1}{2} e^{-\frac{-(x-\theta)}{S}}$$

$$2U = e^{-\frac{-(x-\theta)}{S}}$$

$$\ln(2U) = \frac{-(x-\theta)}{S}$$

$$x = \theta - S \ln(2U)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas } X \geq \theta$$

$$F(x; \theta, S) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{-(x-\theta)}{S}}$$

la même méthode

$$x = \theta - S \ln(2 - 2U)$$

■

CHAPITRE 2

REPRÉSENTATIONS ET CARACTÉRISATIONS

Dans la première partie de cette section, nous présentons diverses représentations de la variable de Laplace, en termes d'autres variables aléatoires bien connues, nous concentrerons sur la variable aléatoire classique de Laplace X avec densité 1.9 et fonction caractéristique $\varphi_x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ comme déjà mentionné pour une variable aléatoire de Laplace générale Y avec densité 1.9, les représentations correspondantes de Y découlent de la relation $Y \stackrel{d}{=} \theta + SX$ lors de l'écriture d'égalité dans une distribution, nous suivrons la convention standard selon laquelle, les variables aléatoires apparaissant du même côté de l'équation sont indépendantes.

La caractérisation des distributions est un sujet populaire et bien développé de la théorie des probabilités moderne cela fournit un aperçu supplémentaire de la structure des distributions, en particulier celles qui, comme la distribution de Laplace, sont définies par une simple densité et une fonction caractéristique la simplicité d'une formule ne transmet pas toujours des caractéristiques évidentes et masque les surprises qui peuvent être intégrées dans une distribution particulière dans le cas de la distribution de Laplace, ses caractérisations dévoilent des propriétés assez intrigantes que l'on ne soupçonnerait pas de sa fonction de densité "modeste".

Dans la deuxième partie de cette section nous décrivons quelques caractérisations des distributions de Laplace, en particulier celles liées à la somme géométrique

$$S_p = X_1 + X_2 + \dots + X_{v_p} \quad (2.1)$$

où v_p est une variable aléatoire géométrique de moyenne $\frac{1}{p}$ et fonction de probabilité

$$P(v_p = k) = (1-p)^{k-1} p, k \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Tandis que les X_i sont des variables aléatoires i.i.d indépendantes de v_p , il s'avère que sous sommation géométrique (2.1), la distribution de Laplace joue un rôle ana-

logue à celui de la distribution gaussienne sous sommation ordinaire.

2.1 Mélange de distributions normales

Tout variable aléatoire de Laplace peut être considéré comme une variable Gaussien avec une moyenne nulle et une variance stochastique qui a une distribution exponentielle, plus formellement une variable aléatoire Laplace a la même distribution que le produit d'une variable aléatoire normale et indépendant à distribution exponentielle.

Proposition 2.1 Une variable aléatoire de Laplace classique standard X à la représentation

$$X \stackrel{d}{=} \sqrt{2W}Z \quad (2.3)$$

où les variable aléatoire W et Z ont respectivement les distributions standards exponentielle et normale .

Preuve.. Soit W une variable aléatoire exponentielle standard de densité

$$f_W(w) = \lambda e^{-\lambda w}, w > 0,$$

et la fonction génératrice de moment

$$M_w(t) = \frac{1}{1-t}, t < 1.$$

Soit Z une variable aléatoire normale standard de densité

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in \mathbb{R},$$

et la fonction caractéristique

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}.$$

La fonction caractéristique du produit $\sqrt{2W}Z$ coïncide avec la fonction caractéristique de Laplace classique standard (1.12) en effet, en conditionnant sur W , on obtient

$$\begin{aligned} E \left[e^{it\sqrt{2\pi}z} \right] &= E \left[E \left[\frac{e^{it\sqrt{2\pi}z}}{w} \right] \right] \\ &= E \left[\varphi_z(t\sqrt{2\pi}) \right] \\ &= E \left[e^{-t^2 w} \right] \\ &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

la proposition est prouvée. ■

Remarque 2.1 Une autre preuve de la proposition (2.2.1) utilisant les densités de W et Z est esquissée, la relation (2.3) écrit en termes densités devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-|x|} &= \int_0^{\infty} f_z\left(\frac{x}{\sqrt{2w}}\right) \frac{1}{\sqrt{2w}} f_W(w) dw \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi w}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2w} + 2w\right)} dw \end{aligned} \quad (2.4)$$

Remarque 2.2 Pour une variable aléatoire de Laplace générale Y de densité 1.9, nous avons la représentation

$$Y \stackrel{d}{=} \theta + \sqrt{2s} w^{\frac{1}{2}} z$$

Remarque 2.3 Représentation (2.3) peut s'écrire

$$X \stackrel{d}{=} RZ \quad (2.5)$$

où Z est comme avant et la variable aléatoire $R = \sqrt{2W}$ à une distribution de Rayleigh avec densité

$$f_R(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0.$$

Remarque 2.4 Une représentation connexe discutée dans loh(1984) est obtenue en notant $T = \frac{1}{\sqrt{W}}$, puis

$$X \stackrel{d}{=} \sqrt{2} \frac{Z}{T} \quad (2.6)$$

ici la variable aléatoire T à une distribution de fracture fragile avec densité

$$f_T(x) = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x > 0.$$

[17],[13]

2.2 Relation à la distribution exponentielle

La fonction caractéristique (1.12) d'une distribution de Laplace classique standard peut être factorisée comme suit

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-it} \frac{1}{1+it} \quad (2.7)$$

notons que le premier facteur est un fonction caractéristique d'une variable aléatoire exponentielle standard W de densité $f_W(w) = \lambda e^{-\lambda w}, w \geq 0$, tandis que le second

est la fonction caractéristique de $-W$, puisque pour la variable aléatoire indépendantes le produit des fonction caractéristique correspond à leur somme, nous arrivons à une représentation d'une variable aléatoire de Laplace classique standard en termes de deux variables aléatoires exponentielles indépendantes la proposition suivante est donc valide .

Proposition 2.2 Une variable aléatoire de Laplace standard classique X admet la représentation

$$X \stackrel{d}{=} W_1 - W_2 \quad (2.8)$$

où W_1 et W_2 sont des variables aléatoires exponentielles standard i.i.d.

Remarque 2.5 Pour une variable aléatoire de Laplace générale Y avec de densité (1.9), on a

$$Y \stackrel{d}{=} \theta + S(W_1 - W_2).$$

Remarque 2.6 Désignant $H_i = 2W_i, i = 1, 2, \dots$, on obtient

$$Y \stackrel{d}{=} \theta + \frac{S}{2}(H_1 - H_2)$$

où H_1 et H_2 sont i.i.d avec la distribution X avec deux degrés de liberté (ayant une densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$).

Remarque 2.7 Notons que la relation suivante pour une distribution de la v.a. X selon la loi de Laplace classique standard découle immédiatement de (2.8),

$$X \stackrel{d}{=} \log \frac{u_1}{u_2}$$

où u_1 et u_2 sont des variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur $[0,1]$. [19],[18]

La fonction caractéristique de Laplace classique standard peut également être décomposée comme suit

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-it} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+it} \quad (2.9)$$

La partie droite de (2.9) est la fonction caractéristique du produit IW , où la variable symétrique discrète I prend des valeurs ± 1 avec des probabilités $\frac{1}{2}$, tandis que W est un exponentiel indépendant de I standard. ainsi, la distribution de Laplace classique standard est un simple mélange exponentiel, ce que est indiqué dans le résultat suivant.

Proposition 2.3 Une variable aléatoire de Laplace classique X admet la représentation

$$X \stackrel{d}{=} IW \quad (2.10)$$

Ou W est exponentiel standard tandis que I prend des valeurs ± 1 avec des probabilités $\frac{1}{2}$.

Remarque 2.8 Pour une variable aléatoire de Laplace générale Y de densité (1.9), on a

$$Y \stackrel{d}{=} \theta + SIW$$

Remarque 2.9 Il découle directement de (2.10) que si X est une variable aléatoire standard, alors $|X|$ est une variable aléatoire exponentielle standard W . Si X_1, \dots, X_n sont i.i.d variable aléatoire standard Laplace, alors toute statistique dépendant uniquement des valeurs absolues $|X_1|, \dots, |X_n|$ peut être représentée en termes de χ^2 variables aléatoires (puisque comme déjà indiqué, $2W$ est une variable aléatoire χ^2 avec deux degrés de liberté).

2.3 Relation avec la distribution de Pareto

Une variable aléatoire exponentielle standard W est liée à une variable aléatoire de type Pareto I, P de densité

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x \geq 0,$$

comme suit

$$W \stackrel{d}{=} \log P \tag{2.11}$$

Par conséquent, la représentation (2.8) peut être reformulée en termes de deux variables aléatoire de Pareto indépendantes.

Proposition 2.4 Une variable aléatoire de Laplace classique X admet la représentation

$$X \stackrel{d}{=} \log \frac{P_1}{P_2} \tag{2.12}$$

Ou P_1 et P_2 sont des variables aléatoire I de type Pareto i.i.d avec densité $\frac{1}{x^2}, x \geq 1$.

Preuve.. Notez que $W_1 = \log P_1$ a une distribution exponentielle standard de densité $e^{-x}, x \geq 0$ le resultat découle maintenant directement de la . ■

Remarque 2.10 Pour la variable aléatoire de Laplace classique générale Y de densité (1.9), nous avons

$$Y \stackrel{d}{=} \log \left[e^\theta \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^s \right]$$

Par conséquent, la variable aléatoire log-Laplace $e^{\frac{(Y-\theta)}{s}}$ a la même distribution que le rapport de deux variable aléatoire de type I Pareto indépendantes.

2.4 Relation à 2×2 déterminants normaux unitaires

Le lieu suivant entre les distribution Laplace et normales , mentionné au ,a été établi par [20] il y a près de 50 ans et a fait l’objet de plusieurs lettres au rédacteur en chef du statisticien américain au cours des dernières décennies .

Proposition 2.5 Une variable aléatoire classique de Laplace X admet la représentation

$$X \stackrel{d}{=} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = U_1 U_4 - U_2 U_3 \quad (2.13)$$

ou les U_s sont i.i.d variables aléatoire normales standard.

TABLE 2.1 – Résumé des représentations de la distribution de Laplace classique standard présentée dans cette section.

variables	représentation
$\sqrt{2}WZ$	Z v. a. normal standard et W v. a. exponentielle standard
$R.Z$	$f(w) = we^{-\frac{w^2}{2}}$ et Z variable aléatoire normal
$\frac{\sqrt{2}Z}{T}$	$f(t) = 2t^{-3}e^{-\frac{1}{t^2}}$ et Z variable aléatoire normal
$W_1 - W_2$	W_1 et W_2 deux v. a. exponentielle standard
$\frac{(H_1 - H_2)}{2}$	H_1 et H_2 Norme de v. a. chi-carré
$I.W$	je prends un signe aléatoire \pm avec des prob égales et W v. a. exponentielle
$\log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$	$f(p) = \frac{1}{p^2}, P_1, P_2$ Pareto v. a. de type I.
$\log\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$	U_1, U_2 Deux variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$
$U_1 \cdot U_2 - U_2 \cdot U_3$	U_1, U_2, U_3, U_4 Variables aléatoire normales

2.5 Statistique d’ordre

Dans cette section, nous aborderons les statistiques d’ordre des variables aléatoires ayant une distribution de Laplace. Soit les mesures obtenues à partir d’un échantillon de taille n , représentées par des variables aléatoires X_1, \dots, X_n . Les X_i sont mutuellement indépendantes et chacune a la même fonction de distribution cumulative (et la même fonction de densité de probabilité, si elle existe). Nous introduisons maintenant n nouvelles variables aléatoires

$$X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$$

qui sont les variables aléatoires originales disposées par ordre croissant de magnitude de sorte que

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$$

Les variables aléatoires $X_{r:n}$, où $1 \leq r \leq n$, sont appelées statistiques d'ordre (à la différence des statistiques de rang d'ordre égal à $1, 2, 3, \dots, n$ pour $X_{1:n}, X_{2:n}, X_{3:n}, \dots, X_{n:n}$, qui sont parfois aussi appelées statistiques d'ordre).

En particulier, $X_{1:n}$ est le minimum des X_i , $X_{n:n}$ est le maximum. Une autre statistique d'ordre courante est $X_{k+1:2k+1}$, qui coïncide avec la médiane de l'échantillon lorsque la taille de l'échantillon est impaire ($n = 2k + 1$). Au cours des 50 dernières années, les statistiques d'ordre ont joué un rôle de plus en plus important dans l'inférence statistique. et sont apparues dans de nombreux domaines de la théorie et de la pratique statistiques.

2.5.1 Distribution d'une statistique d'ordre unique.

Étant donné la distribution parentale de X_1 (ou de manière équivalente de X_i , $i = 1, \dots, n$), par exemple si F désigne la fonction de distribution cumulative. de X_1 , alors la fonction de distribution cumulative de $X_{n:n}$ est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} F_{n:n}(x) &= P(X_{n:n} \leq x) \\ &= P(X_i \leq x) \\ &= [F(x)]^n \end{aligned}$$

De même, pour une statistique d'ordre général, nous avons :

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n I_i \geq r\right) \end{aligned}$$

où I_i sont des variables aléatoires indicateurs i.i.d. définis comme étant :

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{si } X_i > x \end{cases}$$

La somme $\sum_{i=1}^n I_i$ est une variable aléatoire binomiale avec probabilité de succès $p = P(X_i \leq x) = F(x)$ de sorte que :

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \quad (2.14)$$

Dans le cas continu, la fonction de densité de probabilité correspondante est :

$$f_{r:n}(x) = r \binom{n}{i} [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r} f(x) \quad (2.15)$$

où f est la densité correspondant à F . Nous allons maintenant supposer que X_1, \dots, X_n sont i.i.d., issus de la distribution de Laplace classique $cl(\theta, s)$. Dénotons la fonction de distribution cumulative et la fonction de densité de probabilité des statistiques d'ordre r par $F_{r:n}(\cdot; \theta, s)$ et $f_{r:n}(\cdot; \theta, s)$, respectivement. Pour la distribution standard $cl(0, 1)$, nous omettrons les paramètres et écrivons simplement $F_{r:n}(\cdot)$ et $f_{r:n}(\cdot)$. Nous déduisons ci-dessous les distributions d'ordre liées à la distribution classique standard de Laplace. Pour obtenir la distribution correspondante dans le cas d'une distribution de Laplace générale, utilisez les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x; \theta, s) &= F_{r:n}\left(\frac{x - \theta}{s}\right) \\ \text{et } f_{r:n}(x; \theta, s) &= \frac{1}{s} f_{r:n}\left(\frac{x - \theta}{s}\right) \end{aligned}$$

Le résultat suivant est obtenu par application directe des formules (2.14) - (2.15) .

Proposition 2.6 Soit $X_{r:n}$ la statistique d'ordre r liée à un échantillon de taille n de la distribution de Laplace classique standard $cl(0, 1)$. Alors la fonction de distribution cumulative et la fonction de densité de probabilité de $X_{r:n}$ sont respectivement :

$$F_{r:n}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \begin{cases} e^{ix} (2 - e^x)^{n-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-(n-i)x} (2 - e^{-x})^i & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

et

$$f_{r:n}(x) = r \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{r} \begin{cases} e^{rx} (2 - e^x)^{n-r} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-(n-r+1)x} (2 - e^{-x})^{r-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Remarque 2.11 Pour la distribution classique de Laplace $cl(\theta, s)$, nous avons la densité

$$f_{r:n}(x) = \frac{r}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{r} \begin{cases} e^{\frac{r(x-\theta)}{s}} \left(2 - e^{\frac{(x-\theta)}{s}}\right)^{n-r} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-(n-r+1)\frac{(\theta-x)}{s}} \left(2 - e^{\frac{(\theta-x)}{s}}\right)^{r-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

En particulier, nous avons les cas particuliers suivants :

- **Le minimum** : La statistique de premier ordre liée à un échantillon de taille n de la distribution $cl(\theta, s)$ a la fonction de distribution cumulative et la fonction de densité de probabilité suivants :

$$F_{1:n}(x; \theta, s) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\theta)}{s}}\right)^n & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n(\theta-x)}{s}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

et

$$f_{1:n}(x; \theta, s) = \frac{n}{2^n s} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{r} \begin{cases} e^{\frac{(x-\theta)}{s}} \left(2 - e^{\frac{(x-\theta)}{s}}\right)^{n-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{\frac{n(\theta-x)}{s}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

- **Le maximum** : La $n^{\text{ième}}$ statistique d'ordre liée à un échantillon de taille n de la distribution $Cl(\theta, s)$ a la fonction de distribution cumulative et la fonction de densité de probabilité suivants :

$$F_{n:n}(x; \theta, s) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{cases} e^{\frac{n(x-\theta)}{s}} (2 - e^x)^{n-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \left(2 - e^{\frac{(\theta-x)}{s}}\right)^n & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

et

$$f_{1:n}(x; \theta, s) = \frac{n}{2^n s} \begin{cases} e^{\frac{n(x-\theta)}{s}} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{\frac{(\theta-x)}{s}} \left(2 - e^{\frac{(\theta-x)}{s}}\right)^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

La symétrie des expressions pour $f_{1:n}$ et $f_{n:n}$ résulte de la relation suivante :

$$X_{1:n} \stackrel{d}{=} 2\theta - X_{n:n}$$

- **La médiane** : Soit $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ et que $X_{k+1:n}$ soit la médiane de l'échantillon \tilde{X} de X_1, X_2, \dots, X_n . La fonction de densité de probabilité de $X_{k+1:n}$ est alors la suivante :

$$f_{k+1:n}(x) = \frac{n!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \frac{1}{s} e^{-(k+1)\frac{|x-\theta|}{s}} \left(2 - e^{-\frac{|x-\theta|}{s}}\right)^k. \quad (2.23)$$

La médiane :

Proposition 2.7 Soit X_1, \dots, X_n est un échantillon aléatoire de la distribution classique standard de Laplace

$Cl(0, 1)$. Alors, pour tout $1 \leq r < r' \leq n$, la distribution conjointe de $X_{r:n}$ et $X_{r':n}$ a pour densité

$$f_{r,r':n}(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^n c(n, r, r') u(x, y) \quad (2.24)$$

où la constante $c(n, r, r')$ est donnée par :

$$c(n, r, r') = \frac{n!}{(r-1)!(r'-r-1)!(n-r)!} \quad (2.25)$$

et

$$u(x, y) = \begin{cases} e^{rx+y} [e^y - e^x]^{r'-r-1} [2 - e^y]^{n-r'} & \text{si } x \leq y \leq 0 \\ e^{rx-(n-r'+1)y} [2 - e^{-y} - e^x]^{r'-r-1} & \text{si } x \leq 0 \leq y \\ e^{-(x+(n-r'+1)y)} [e^{-x} - e^{-y}]^{r'-r-1} [2 - e^{-x}]^{r-1} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{si } x > y \end{cases} \quad (2.26)$$

2.5.2 Etendue, Centre, et Médiane d'un échantillon :

Les trois statistiques couramment utilisées qui sont des fonctions de seulement deux statistiques d'ordre sont :

$$\begin{aligned} R &= X_{n:n} - X_{1:n} && \text{la gamme des } X_i \\ MR &= \frac{X_{n:n} + X_{1:n}}{2} && \text{la gamme moyenne des } X_i \\ \tilde{X} &= \frac{X_{2k:k} + X_{k+1:2k}}{2} && \text{la médiane de l'échantillon lorsque } n = 2k \text{ est pair} \end{aligned}$$

Dans la proposition suivante, nous dérivons la distribution de R [22].

2.5.2.1 Moments des statistiques d'ordre :

Le calcul des moments centraux des statistiques d'ordre liées à une distribution de Laplace classique générale est simple. en utilisant la densité explicite (2.18) de la $r^{ième}$ statistique d'ordre $X_{r:n}$, on obtient

$$E[(X_{r:n} - \theta)^k] = s^k \frac{n! \Gamma(k+1)}{(r-1)!(n-r)!} \times \left\{ (-1)^k \sum_{j=0}^{n-r} a_j + \sum_{j=0}^{r-1} b_j \right\} \quad (2.27)$$

où

$$a_j = (-1)^j \frac{(n-r)!}{j!(n-r-j)!} 2^{-(r+j+1)} (r+j)^{-(k+1)} \quad (2.28)$$

et

$$b_j = (-1)^j \frac{(r-1)!}{j!(r-1-j)!} 2^{-(n-r+j+2)} (n-r+1+j)^{-(k+1)} \quad (2.29)$$

En particulier, pour n impair, la moyenne de la médiane de l'échantillon $X_{\frac{(n+1)}{2}:n}$ est égale à θ ; la variance de la médiane de l'échantillon est :

$$E \left[\left(X_{\frac{(n+1)}{2}:n} - \theta \right)^2 \right] = \frac{4s^2 n!}{\left(\frac{n-1}{2} \right)!} \sum_{j=0}^{\frac{(n+1)}{2}} c_j \quad (2.30)$$

où

$$c_j = (-1)^j \left[j! \left(\frac{n-1}{2} - j \right)! 2^{j+\frac{(n+1)}{2}} \left(\frac{n+1}{2} + j \right)^3 \right]^{-1} \quad (2.31)$$

Lorsque la taille de l'échantillon $n = 2k$ est paire, la moyenne de la médiane de l'échantillon est toujours égale à θ . La variance de la médiane de l'échantillon a été calculée par [23]. Sa valeur pour la distribution classique standard de Laplace est :

$$\frac{n!}{[(k-1)!]^2} 2^{2-k} \left(\sum_{j=0}^{k-2} d_j + 2^{-k-3} k^{-4} [(-1)^{k-1} + 1] \right) \quad (2.32)$$

où

$$d_j = \frac{(k-1)!}{j!(k-1-j)!} (-2)^{-j} (k-1-j)^{-1} \left\{ (k+1+j)^{-3} - (2k)^{-3} \right\} \quad (2.33)$$

CHAPITRE 3

INFÉRENCE STATISTIQUE

Dans ce chapitre, nous discutons la théorie de base de la statistique et la méthodologie de la distribution de Laplace. Nous signalons que les preuves présentées ici peuvent être difficiles mais est une expérience assez enrichissante. Avant de procéder aux résultats d'estimation et du test, faisons quelques remarques concernant la famille de distributions en échelle de localisation classique de Laplace avec la densité

$$f(x; \theta, s) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x - \theta}{s}\right), \theta \in \mathbb{R}, s \in [0, \infty[, x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

où f est la densité de Laplace classique standard (voir équation (1.10)). Nous commençons par l'observation que notre classe n'est pas un membre de la famille exponentielle des distributions, c'est-à-dire que la densité (3.1) ne peut pas s'écrire

$$f(x; \theta, s) = a(\theta, S) b(x) e^{\sum_{i=1}^k c_i(\theta, S) d_i(x)}, \theta \in \mathbb{R}, s \in [0, \infty[, x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

où $a(\theta, S)$ et $c_i(\theta, S)$, $1 \leq i \leq k$, sont des fonctions du paramètre vectoriel (θ, S) et $b(x)$ et $d_i(x)$, $1 \leq i \leq k$, sont des fonctions de x . Par conséquent, de nombreux résultats standards valides pour les familles exponentielles de distributions ne sont pas disponibles pour la distribution de Laplace.

Soit X_1, \dots, X_n une suite des variables aléatoires i.i.d. chacun avec une densité (3.1). Si la densité était de la forme (3.2), alors les données pourraient être réduites à l'ensemble de k statistiques suffisantes (T_1, \dots, T_k) , où

$$T_i = T_i(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n d_i(X_j) \quad (3.3)$$

Puisqu'il ne s'agit pas de famille exponentielle, ce n'est pas le cas. De toute évidence, l'ensemble de toutes les statistiques de commande

$$T = (X_{1:n}, \dots, X_{n:n}) \quad (3.4)$$

est suffisant, comme pour toute suite i.i.d. d'observations. De plus, une plus grande réduction des données n'est pas possible ici, puisque la statistique T est également suffisante minimale [voir, par exemple, [24]].

Proposition 3.1 *Soit P la famille des densités (3.1), et soit les variables X_1, \dots, X_n i.i.d. chacun avec une densité $f(\cdot; \theta, s) \in P$. Alors la statistique T donnée par (3.23) est suffisante minimale pour P .*

La preuve de la proposition (3.1) s'articule autour du lemme suivant, présenté dans [24]

Lemme 3.1 *Si P est une famille de distributions à support commun et $P_0 \subset P$, et si T est suffisant minimal pour P_0 et suffisant pour P , il est suffisant minimal pour P .*

Preuve..[24] ■

Nous passons maintenant à une étude de la quantité d'information de Fisher contenue dans un échantillon aléatoire de la distribution avec densité (3.1). Pour la famille d'échelle de localisation avec densité (1.3), les entrées de la matrice d'information de Fisher

$$I(\theta, S) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

sont donnés par

$$I_{11} = \frac{1}{s^2} \int \left(\frac{f'(y)}{f(y)} \right)^2 f(y) dy \quad (3.6)$$

$$I_{22} = \frac{1}{s^2} \int \left(\frac{yf'(y)}{f(y)} + 1 \right)^2 f(y) dy \quad (3.7)$$

et

$$I_{12} = I_{21} = \frac{1}{s^2} \int y \left(\frac{f'(y)}{f(y)} \right)^2 f(y) dy \quad (3.8)$$

[voir, par exemple, [24]]., nous obtenons

$$I(\theta, S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Il convient de noter $\int \left(\frac{f'(y)}{f(y)} \right)^2 f(y) dy$ qui vaut 1 pour les densités de Laplace et normales mais a une valeur différente pour d'autres distributions symétriques telles que la logistique et Cauchy.

Remarque 3.1 *Notez que la densité de Laplace ne satisfait pas les hypothèses de dif-*

férentiabilité standard requises pour le calcul de la matrice d'information de Fisher, puisque f n'est pas dérivable à zéro. Cependant, les relations (3.6) - (3.8) sont valides sous une hypothèse plus faible que f est absolument continue, ce qui est le cas pour la densité de Laplace [voir, par exemple, [25],].

3.1 Inférence exacte pour la distribution de Laplace sous censure progressive de type II

Dans cette section, en utilisant les expressions connues pour le meilleur estimateurs linéaire non biaisés (Best linear unbiased estimation) (*BLEU*) pour avoir des estimateurs des paramètres de localisation et d'échelle de la distribution de Laplace basés sur un échantillon progressivement censuré à droite de type II , nous dérivons la fonction génératrice de moment exact (MGF) de la combinaison linéaire de Laplace standard statistiques de commande. En utilisant ce MGF, nous obtenons la fonction de densité exacte du combinaison linéaire. Cette fonction de densité est ensuite utilisée pour développer des intervalles de confiance (IC) pour les paramètres d'échelle de de position par le biais de certains quantités. Ensuite, nous dérivons la densité exacte de l'estimateur du quantile basé sur BLUEs et les utilisés pour développer des IC pour le quantile de population. Une brève mention est faite sur la fiabilité et les fonctions de risque cumulatif et sur la façon dont les IC peuvent être exacts construit pour ces fonctions sur la base des BLEUS. Une étude de simulation de Monte Carlo est ensuite effectuée pour évaluer la performance des résultats inférentiels développés.

3.1.1 Données de censure

Les données de censure sont des observations ne correspondant pas à de vraies valeurs de la variable d'intérêt. Cependant, nous disposons tout de même d'une information partielle permettant par exemple de fixer une borne inférieure (censure à droite) ou une borne supérieure (censure à gauche).

Les raisons de cette censure peuvent être le fait que le patient soit toujours vivant des raisons personnelles (immigration , mutation ,).

3.1.1.1 Différents types de censures

Il exist différents types de censures :

- Censure de types I , si le temps de censure est fixé par le chercheur comme étant la fin de l'étude .

- Censure de types II , se caractérise par le fait que l'étude cesse aussitôt que se produit un nombre d'événements prédéterminés par l'expérimentateur.
- Une autre possibilité de censure aléatoire est que la censure n'est plus du tout sous le contrôle du chercheur et (ou) que le temps d'entrée varie aléatoirement.

Quelques détails et exemples de différents cas de censure suivent.

Censure à droite : La durée de vie est dite censurée à droite si l'individu n'a pas subi l'événement à sa dernière observation. En présence de censure à droite , les durées de vie (Y) ne sont pas toutes observées, pour certaines d'entre elles, on sait seulement qu'elles sont supérieures à une certaine valeur connue . Soit R une variable aléatoire de censure, au lieu d'observer le couple de variables (Z, δ) avec $Z = \min(Y, R)$ et $\delta = 1_{\{Y \leq R\}}$, où δ est appelé indicateur de censure puisque ses valeurs nous informent sur le fait que l'observation est complète (si $\delta = 1$) ou censuré à droite (si $\delta = 0$).

Un exemple illustratif est lorsqu'on s'intéresse à la durée de vie d'un genre de machines précis mais que ces dernières tombent en panne s'il se produit une surtension d'électricité. Ici , la durée de vie de la machine est censurée à droite par l'instant auquel se produit la surtension .

C'est le type de censure la plus fréquente dans la pratique .

Censure à gauche : La censure à gauche correspond au cas où l'individu a déjà subi l'événement avant qu'il ne soit observé. On sait uniquement que la valeur d'intérêt est inférieure à une certaine valeur connue représentée par une variable aléatoire L . Pour chaque individu , on peut associer un couple de variable aléatoire (Z, δ) telles que $Z = \max(Y, L)$ et $\delta = 1_{\{Y \geq L\}}$. Un des premiers exemples de censure à gauche rencontré dans la littérature concerne le cas d'observateurs qui s'intéressent à l'heure où les babouins descendent de leurs arbres pour aller manger (les babouins passent la nuit dans les arbres). Le temps d'événement (descente de l'arbre) est observé si le babouin descend de l'arbre après l'arrivée des observateurs : dans ce cas on sait uniquement que l'heure de descente est inférieure à l'heure d'arrivée des observateurs. On observe donc le maximum entre l'heure de descente des babouins et l'heure d'arrivée des observateurs .

Censure double : Par exemple, une étude s'est intéressée l'âge auquel les enfants d'une communauté africaine apprennent à accomplir certaines tâches. Au début de l'étude, certains enfants savaient déjà effectuer les tâches étudiées, on sait seulement alors que l'âge où ils ont appris est inférieur à leur âge à la date du début de l'étude. A la fin de l'étude, certains enfants ne savaient pas encore accomplir ces tâches et on sait alors seulement que l'âge auquel ils apprendront éventuellement ont appris est supérieur à leur âge à la fin de l'étude. L'âge au début de l'étude (variable de censure à gauche L) est évidemment inférieure à l'âge

à la fin de l'étude (variable de censure à droite R). L'âge d'intérêt est observé ssi il se trouve dans la période d'étude. Nous observons $Z = \max(\min(Y, R), L)$ avec un indicateur de censure. Ce modèle a été étudié dans Turnbull [46] qui a introduit un estimateur implicite de la fonction de survie de Y donné comme solution d'une équation de self-consistance.

Censure par intervalle : Une observation est censurée par intervalle si au lieu d'observer avec certitude le temps de l'événement, la seule information disponible est qu'il se trouve dans un intervalle. Par exemple, dans le cas d'un suivi médical du diabète, les personnes sont souvent suivies par intermittence (pas en continu), on sait alors uniquement que l'événement (pic de la glycémie) s'est produit entre deux temps d'observations (deux analyses).

Ce modèle généralise ceux de la seule censure à droite (ou à gauche).

Dans certains cas, il n'y a pas de raison de supposer que la variable de censure à gauche est inférieure à celle de censure à droite. De plus, dans le cas de données censurées on ne peut pas toujours déterminer un intervalle auquel appartient la valeur d'intérêt.

Censure mixte : Nous disons qu'il y a censure mixte lorsque deux phénomènes de censure (l'un à gauche et l'autre à droite) peuvent empêcher l'observation du phénomène d'intérêt sans qu'on puisse nécessairement déterminer un intervalle auquel il appartient. Dans le modèle I décrit dans l'article de [Patilea et Rolin (2006)], au lieu d'observer un échantillon de la variable d'intérêt Y , on observe un échantillon du couple $(Z; A)$ avec $Z = \max(\min(Y, R), L)$ et

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si } L < Y \leq R \\ 1 & \text{si } L < R < Y \\ 2 & \text{si } \min(Y, R) \leq L \end{cases}$$

où L et R sont des variables de censure et A est l'indicateur de censure. Un exemple de ce modèle est donné par un système formé par trois composants, dont deux sont placés en série (le composant dont le temps de fonctionnement nous intéresse et un autre). Un troisième est placé en parallèle avec ce système en série. Ici, il est clair qu'il n'est pas raisonnable de supposer que le temps de fonctionnement d'un composant soit inférieur à un autre.

3.1.2 Estimation des paramètres de Laplace sous censurs de type II

Commençons par quelques résultats connus sur les statistiques de commande du distribution de Laplace standard

Lemme 3.2 [26] Soit $Y_{com} = (Y_{1:n} < \dots < Y_{n:n})$ les statistiques d'ordre d'une suite

observée à partir de la distribution de Laplace standard. Ensuite, nous avons les expressions suivantes pour deux premiers moments simples de $(Y_{i:n})$ et le moment produit de $(Y_{i:n})$ et $(Y_{j:n})$:

$$\begin{aligned}\alpha_{i:n} &= E(Y_{i:n}) \\ &= 2^{-n} \left[\sum_{\ell=n-i+1}^n \binom{n}{\ell} S_1(\ell, n-i+1) - \sum_{\ell=i}^n \binom{n}{\ell} S_1(\ell, i) \right]\end{aligned}\quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_{i:n}^{(2)} &= E(Y_{i:n}^2) \\ &= 2^{-n} \left\{ \sum_{l=n-i+1}^n \binom{n}{l} [S_2(l, n-i+1) + S_1^2(l, n-i+1)] + \sum_{l=i}^n \binom{n}{l} [S_2(l, i) + S_1^2(l, i)] \right\}\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j:n} &= E(Y_{i:n} Y_{j:n}) \\ &= 2^{-n} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{l=n-i+1}^n \binom{n}{l} [S_2(l, n-i+1) + S_1(l, n-i+1) S_1(l, n-j+1)] \\ &- \sum_{l=i}^{j-1} \binom{n}{l} S_1(l, i) S_1(n-j+1, n-1) \\ &+ \sum_{l=j}^n \binom{n}{l} [S_2(l, j) + S_1(l, i) S_1(l, j)] \end{aligned} \right\}\end{aligned}\quad (3.12)$$

où $S_p(i_1, i_2) = \sum_{i=i_1}^{i_2} i^{-p}$ pour $i_1 \leq i_2$ et $p = 1, 2$.

Utilisons $Y_{ps} = (Y_{1:r:n} \leq \dots \leq Y_{r:r:n})$ pour désigner le vecteur $(r \times 1)$ de progressivement statistique d'ordre censure à droite de type II à partir d'un échantillon de taille n avec un schéma de censure progressif prédéfini (R_1, \dots, R_r) . Ensuite, chacun progressivement à droite de type II censure la statistique d'ordre correspond à une statistique d'ordre habituelle à partir des n durées de vie d'origine, i.e $Y_{j:r:n} = Y_{kj:n}$, où kj , le rang de $Y_{j:r:n}$ dans l'échantillon complet, peut prendre les valeurs $k_{j-1} + 1, k_{j-1} + 2, \dots, kj + R_1 + R_2 + \dots + R_j - 1$ pour $j = 2, 3, \dots, r$. et $k_1 = 1$. Nous désignons le vecteur de rang par $k = (k_1, \dots, k_r)$. [27] ont alors montré que la fonction de probabilité conjointe de masse (PMF) de rang le vecteur peut être exprimé comme

$$P(k_1, \dots, k_r) = P(k_1) \prod_{i=2}^r P(k_i | k_1, \dots, k_{i-1}) \quad (3.13)$$

avec $P(k_1 = 1) = 1$ et

$$P(k_i|k_1, \dots, k_{i-1}) = \frac{\binom{n-k_i}{\sum_{j=1}^{i-1} R_j + i - k_i}}{\binom{n-k_{i-1}}{\sum_{j=1}^{i-1} R_j + i - k_{i-1} - 1}}, \quad i = 2, \dots, r.$$

Ainsi, si nous avons M tel vecteur de rang kI , $I = 1, 2, \dots, M$, répertoriés à partir du schéma de censure progressive (R_1, \dots, R_r) , alors pour chaque vecteur de rang KI , on peut définir un indicateur $(r \times n)$ matrice DI dont le (j, k_j) éme élément vaut 1 pour $j = 1, \dots, r$ et 0 sinon, de sorte que $Y_{ps} = DIY_{com}$ pour certains I , et Y_{com} est le vecteur $(n \times 1)$ des statistiques d'ordre habituelles issues à partir de l'échantillon complet de taille n de la distribution particulière d'intérêt. Puis, notant $E(Y_{COM})$ par α_{com} et $Var(Y_{com})$ par Σ_{com} , pl la fonction de masse de probabilité du vecteur de rang correspondant à DI , $I = 1, 2, \dots, M$, obtenue à partir de (3.13), on peut obtenir le vecteur moyen et la matrice de variance covariance de la statistique d'ordre censuré à droite de type II comme

$$\begin{aligned} \alpha &= E(Y_{ps}) \\ &= E[E(Y_{ps}|D_I)] \\ &= \left(\sum_{l=1}^M D_l p_l \right) \alpha_{com} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= Var(Y_{ps}) \\ &= \sum_{l=1}^M D_l \left(\sum_{com} + \alpha_{com} \alpha'_{com} \right) D'_l p_l - \alpha \alpha' \end{aligned} \quad (3.15)$$

Lors de l'utilisation des expressions des valeurs attendues, des seconds moments et du produit moments des statistiques d'ordre de Laplace présentées dans le lemme précédente et les équation (3.14) et (3.15), le vecteur moyen α et la matrice de variance covariance Σ peuvent être facilement calculés pour tout système de censure progressif donné. Ces quantités sont nécessaires pour la calcul des BLEUS de θ et S comme décrit ci-dessous.

A cet égard, soit $X = (X_{1:r:n}, \dots, X_{r:r:n})'$ désignent progressivement un données censurées droit de type II de (1.9) dans (3.13) avec un schéma de censure progressive (R_1, \dots, R_r) . De plus, notons $1 = (1, 1, 1, \dots, 1)'_{(r \times 1)}$. Ensuite, les BLEUS de θ et S sont donnés par

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &= \frac{\alpha' \Sigma^{-1} \alpha 1' \Sigma^{-1} - \alpha' \Sigma^{-1} 1 \alpha' \Sigma^{-1}}{(\alpha' \Sigma^{-1} \alpha)(1' \Sigma^{-1} 1) - (\alpha' \Sigma^{-1} 1)^2} X \\ &= \sum_{i=1}^r b_i X_{i:r:n} \stackrel{d}{=} S \sum_{i=1}^r b_i Y_{i:r:n} + \theta\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \frac{1' \Sigma^{-1} 1 \alpha' \Sigma^{-1} - 1' \Sigma^{-1} \alpha 1' \Sigma^{-1}}{(\alpha' \Sigma^{-1} \alpha)(1' \Sigma^{-1} 1) - (\alpha' \Sigma^{-1} 1)^2} X \\ &= \sum_{i=1}^r a_i X_{i:r:n} \stackrel{d}{=} S \sum_{i=1}^r a_i Y_{i:r:n}\end{aligned}\quad (3.17)$$

avec α et Σ calculés comme décrit ci-dessus ; $\stackrel{d}{=}$ désigne "distribué comme". De plus, on sait que

$$\sum_{i=1}^r a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^r b_i = 0;$$

voir [28]. Pour une description détaillée, on peut se référer à [29] et [30]. De plus, les variance et la covariance de ces BLEUS sont données par

$$\begin{aligned}Var(\tilde{\theta}) &= S^2 \frac{\alpha' \Sigma^{-1} \theta}{(\alpha' \Sigma^{-1} \alpha)(1' \Sigma^{-1} 1) - (\alpha' \Sigma^{-1} 1)^2} \\ Var(\tilde{S}) &= S^2 \frac{1' \Sigma^{-1} 1}{(\alpha' \Sigma^{-1} \alpha)(1' \Sigma^{-1} 1) - (\alpha' \Sigma^{-1} 1)^2} \\ Cov(\tilde{\theta}, \tilde{S}) &= -S^2 \frac{\alpha' \Sigma^{-1} 1}{(\alpha' \Sigma^{-1} \alpha)(1' \Sigma^{-1} 1) - (\alpha' \Sigma^{-1} 1)^2}\end{aligned}$$

Remarque 3.2 Bien que les BLEUS de θ et S dans (3.16) et (3.17) ne soient pas des expressions explicites, ce sont bien des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre de Laplace avec des coefficients déterminés numériquement pour un n , r et (R_1, \dots, R_r) donnés.

Notre objectif ici est d'utiliser les propriétés distributionnelles de Laplace les statistiques d'ordre progressivement censuré de type II pour développer une inférence exacte pour les paramètres et les quantiles ainsi que les intervalles de confiance pour les fonctions de fiabilité et de risque cumulatif basées sur les BLEUS $\tilde{\theta}$ et \tilde{S} .

3.1.3 Fonction de densité exacte des pivots basés sur BLEU et estimation d'intervalle

3.1.3.1 Fonction de densité exactes de la combinaison linéaire de Laplace standard statistiques de commande censurées progressivement de type II

Dans cette section, nous dériverons le (1.11) d'une combinaison linéaire de Laplace standard progressivement des statistiques d'ordre censurées de type II, à savoir $\sum_{i=1}^r c_i Y_{i:r:n}$. La densité conjointe de $(Y_{1:r:n}, \dots, Y_{r:r:n})$ est donnée par

$$f_{(Y_{1:r:n}, \dots, Y_{r:r:n})}(y_{1:r:n}, \dots, y_{r:r:n}) = c_{i=1}^r f(y_{i:r:n}) [1 - F(y_{i:r:n})]^{R_i} \quad (3.18)$$

où

$$c = n(n - R_1 - 1) \dots (n - R_1 - R_2 - \dots - R_{r-1} - r + 1);$$

voir [31].

Même si on ne saura pas si une statistique d'ordre spécifique $Y_{i:r:n}$ est supérieure à 0 ou inférieure à 0 puisque θ est inconnu, il est clair que la densité en (3.18) prend différentes formes algébriques en fonction du nombre progressivement censuré de type II les statistiques d'ordre sont inférieure à 0. Pour cette raison, nous devons adopter une approche conditionnelle et notons D ($0 \leq D \leq r$) pour le nombre d'observation dans progressivement le type II données censurées inférieures à 0.

Théorème 3.1 *Étant donné $D = d$ i.e $Y_{d:r:n} < 0 < Y_{d+1:r:n}$, $(Y_{1:r:n}, \dots, Y_{d:r:n})$ et $(Y_{d+1:r:n}, \dots, Y_{r:r:n})$ sont statistiquement indépendants [32]. De plus, conditionnellement à $D = d$, les variables aléatoires $Z_{d+1}^{(d)}, \dots, Z_r^{(d)}$, où*

$$Z_i^{(d)} = \begin{cases} (r - i + 1 + \sum_{j=i}^r R_j Y_{i:r:n}), & \text{si } i = d + 1 \\ \left(r - i + 1 + \sum_{j=i}^r R_j \right) (Y_{i:r:n} - Y_{i-1:r:n}) & \text{si } d + 2 \leq i \leq r \end{cases} \quad (3.19)$$

Sont tous statistiquement indépendants et distribués sous forme d'exponentielle standard, i.e $Z_i^{(d)}$ iid Exp(1) pour $i = d + 1, \dots, r$.

Corollaire 3.1 *Soit Z toute combinaison linéaire de $Y_{i:r:n}$ de la forme $Z = \sum_{i=1}^r c_i Y_{i:r:n}$, où c_i sont des costants donnés. Alors, pour $t < \frac{1}{\max|c_i|}$, on a*

$$E(e^{tZ}) = \sum_{d=0}^r \left\{ \left[\sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d=0}^{R_d} p d l_{i=1}^d \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^i c_j t}{i + \sum_{j=1}^i l_j} \right)^{-1} \right] \prod_{i=d+1}^r \left(1 - \frac{\sum_{j=i}^r c_j t}{r - i + 1 + \sum_{j=i}^r R_j} \right) \right\} \quad (3.20)$$

où

$$pdl = c(-1)^{\sum_{i=1}^d l_i} 2^{-\left(r + \sum_{j=d+1}^r R_j + \sum_{i=1}^d l_i\right)} \prod_{i=1}^d \left[\binom{R_i}{l_i} \left(1 + \sum_{j=1}^i l_j\right)^{-1} \right] \prod_{i=d+1}^r \left(r - i + 1 + \sum_{j=i}^r R_j \right)^{-1}$$

Preuve.. Comme nous pouvons l'exprimer

$$E(e^{tZ}) = \sum_{d=0}^r E(e^{tZ}|D = d)P(D = d),$$

nous devons donc obtenir des expressions pour $E(Z|D = d)$ et $P(D = d)$ pour dériver le MGF de Z . D'après le théorème (3.19) indiquant que $(Y_{1:r:n}, \dots, Y_{d:r:n})$ et $(Y_{d+1:r:n}, \dots, Y_{r:r:n})$ sont conditionnellement statistiquement indépendant, $E(Z|D = d)$ peut alors s'écrire

$$E(e^{tZ}|D = d) = E\left(e^{\sum_{i=1}^d t c_i Y_{i:r:n}} e^{\sum_{i=d+1}^r t c_i Y_{i:r:n}} | D = d \right).$$

Maintenant, le deuxième terme de (3.20) peut être obtenu en utilisant la propriété d'espacement dans le théorème (3.19) comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=d+1}^r t c_i Y_{i:r:n} &= \left(t \sum_{j=d+1}^r c_j \right) Y_{d+1:r:n} + \sum_{i=d+2}^r \left(t \sum_{j=i}^r c_j \right) (Y_{i:r:n} - Y_{i-1:r:n}) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{i=d+1}^r \left(t \sum_{j=i}^r c_j \right) \frac{Z_i^{(d)}}{r - i + 1 + \sum_{j=i}^r R_j}. \end{aligned}$$

Ensuite, la densité conjointe de $(Y_{1:r:n}, \dots, Y_{r:r:n})$ et D est

$$f(y_{1:r:n}, \dots, y_{r:r:n}, d) = c_{i=1}^d \frac{1}{2} e^{y_{i:r:n}} \left(1 - \frac{1}{2} e^{y_{i:r:n}}\right)^{R_i} \prod_{i=d+1}^r \frac{1}{2^{R_i+1}} e^{-(R_i+1)y_{i:r:n}}$$

où $y_{1:r:n} < \dots < y_{d+1:r:n} < \dots < y_{r:r:n}$. Ensuite, le premier terme de (3.20) est obtenu par une intégration directe du PDF conjoint comme suit :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^{y_{2:r:n}} \int_0^{\infty} \dots \int_{y_{r-1:r:n}}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^d c_i y_{i:r:n}} c_{i=1}^d \frac{1}{2} e^{y_{i:r:n}} \left[1 - \frac{1}{2} e^{y_{i:r:n}}\right]^{R_i} \times \prod_{i=d+1}^r \frac{1}{2^{R_i+1}} e^{-(R_i+1)y_{i:r:n}} dy_{r:r:n} \dots dy_{d+1:r:n} \\ &= \sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d}^{R_d} Pdl_{i=1}^d \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^i c_j t}{i + \sum_{j=1}^i l_j}\right)^{-1} \end{aligned}$$

où Pdl est tel que défini précédemment . ■

A partir du MGF de Z dans (3.20), on observe que $\sum_{d=0}^r \sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d=0}^{R_d} Pdl = 1$. Puisque les coefficients Pdl ne sont pas nécessairement non négatifs, les distributions sont bien distributions de mélange généralisées de $\sum_{i=1}^r h_i(c) E_i(1)$ avec des coefficients Pdl , donné par

$$Z = \sum_{i=1}^r c_i Y_{i:r:n} \stackrel{d}{=} \sum_{d=0}^r \sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d=0}^{R_d} Pdl \left(\sum_{i=1}^r h_i(c) E_i(1) \right) \quad (3.21)$$

où $E_i(1)$ sont toutes des variables aléatoires exponentielles standard indépendantes et

$$h_i(c) = \begin{cases} \frac{-\sum_{j=1}^i c_j}{i + \sum_{j=1}^i l_j} & \text{si } i = d + 1 \\ \frac{\sum_{j=i}^r c_j}{r - i + 1 + \sum_{j=i}^r R_j} & i \geq d + 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Donc, pour obtenir le CDF de

$$Z = \sum_{i=1}^r c_i Y_{i:r:n},$$

nous avons besoin du CDF de $\sum_{i=1}^r h_i(c) E_i(1)$. puisque $h_i(c)$ ne sont pas nécessairement positifs, $|h_i(c) E_i(1)|$ sont des variable aléatoires exponentielles avec les paramètres d'échelle $|h_i(c)|$. Ainsi, $\sum_{i=1}^r h_i(c) E_i(1)$ peut être traité comme la somme de tous variables exponentielles positives moins la somme des variables exponentielles négatives, i.e

$$\sum_{i=1}^r h_i(c) E_i(1) = \sum_{i \in A} h_i(c) E_i(1) - \sum_{i \in B} -h_i(c) E_i(1)$$

où $A = \{i : h_i(c) > 0\}$ et $B = \{i : h_i(c) < 0\}$. Maintenant, introduisons une notation. Supposer $W = \sum_{i=1}^n X_i$, où X_1, \dots, X_n sont des variable aléatoire exponentielles indépendantes avec les paramètres d'échelle $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ et les paramètres de débit correspondantes $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

Supposons que X_1, \dots, X_n se résume à K distinctes variables aléatoires avec des paramètres de taux distincts $\eta_j, j = 1, \dots, K$ et r_j termes de variables exponentielles identiques avec le même paramètre de taux η_j . Alors $W = \sum_{i=1}^n X_i$ est dit suivre une distribution hypoexponentielle (GH) généralisée avec des paramètres $(\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et $r = (r_1, \dots, r_k)$. A partir de la définition ci-dessus de la distribution GH, nous peut dire que $\sum_{i \in A} h_i(c) E_i(1)$ et $\sum_{i \in B} -h_i(c) E_i(1)$ sont des variables aléatoires GH. Nous peut également déterminer les paramètres de GH à partir de la valeur de $h_i(c), i = 1, \dots, r$. Puis le CDF de $\sum_{i=1}^r h_i(c) E_i(1)$ peut être

obtenu en utilisant le lemme suivant.

Lemme 3.3 [33] soit $W_1 \sim GH(\lambda_1)$, où $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}) = (\eta_{11}^{-1}, \dots, \eta_{1n}^{-1})$ et $r_1 = (r_{11}, \dots, r_{1n})$. De plus, soit $W_2 \sim GH(\lambda_2)$ être indépendant de W_1 , avec $\lambda_2 = (\lambda_{21}, \dots, \lambda_{2m}) = (\eta_{21}^{-1}, \dots, \eta_{2m}^{-1})$ et $r_2 = (r_{21}, \dots, r_{2m})$. Alors, la CDF de $W = W_1 - W_2$ est donné par

$$F(w) = 1 - \left(\prod_{i=1}^n \dots r_{1i} \eta_{1i} \prod_{j=1}^m \dots r_{2j} \eta_{2j} \right) \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l_1=1}^{r_{1i}} \sum_{l_2=1}^{r_{2j}} \sum_{k=0}^{r_{1i}-l_1} \frac{\Psi_{i,n,l_1}(-\eta_{1i}) \Psi_{j,m,l_2}(-\eta_{2j}) w^{r_{1i}-l_1-k} e^{-\eta_{1i}w}}{(r_{2j}-l_2)!(l_2-1)!k!(r_{1i}-l_1-k)!(l_1-1)!} \\ \times \left[\frac{(r_{2j}-l_2+k)! \eta_{2j}}{(\eta_{1i} + \eta_{2j})^{r_{2j}-l_2+k+1}} - \frac{(r_{2j}-l_2+k-1)!(r_{2j}-l_2)}{(\eta_{1i} + \eta_{2j})^{r_{2j}-l_2+k}} \right],$$

où

$$\Psi_{i,h,l_p}(x) = \frac{\partial^l p^{-1}}{\partial x^l p^{-1}} \left(\prod_{s=0, s \neq i}^h (\eta_{ps} + x^{-r_{ps}}) \right), \eta_{10} = \eta_{20} = 0, r_{10} = r_{20} = 1.$$

Dans le cas où $w < 0$, le CDF peut être obtenu par l'identité

Lemme 3.4

$$\begin{aligned} F(w) &= P(W \leq w) \\ &= P(-W > -w) \\ &= 1 - P(-W \leq -w) \end{aligned}$$

, où $P(-W \leq -w) = F(-w)$ est comme dans (3.23).

Remarque 3.3 Pour le cas particulier où tout $r_{1i} = 1$ et $r_{2j} = 1$, le CDF de $W = W_1 - W_2$ est donné par

$$F(w) = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \eta_{2j} e^{-\eta_{1i}w}, w \geq 0$$

où

$$c_{ij} = \prod_{i=1}^n \eta_{1i} \prod_{j=1}^m \eta_{2j} \frac{\Psi_{i,n,l_1}(-\eta_{1i}) \Psi_{j,m,l_2}(-\eta_{2j})}{\eta_{1i} + \eta_{2j}}.$$

Bien sûr, pour $w < 0$, $F(w)$ peut être obtenu en utilisant la relation de symétric donnée ci-dessus.

3.1.3.2 Intervalles de confiance pour θ et S

Considérons maintenant le pivot pour θ comme

$$T = \frac{\tilde{\theta} - \theta}{\tilde{S}} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i Y_{i:r:n}}{\sum_{i=1}^r a_i Y_{i:r:n}}$$

Donc, trouver les $\frac{\alpha}{2}$ points de pourcentage inférieure et supérieure de cette quantité, notés T_L et T_U , respectivement, équivaut à trouver la valeur de satisfaisant

$$P\left(\sum_{i=1}^r (b_i - ta_i) Y_{i:r:n} \leq 0\right) = \frac{\alpha}{2}$$

et

$$P\left(\sum_{i=1}^r (b_i - ta_i) Y_{i:r:n} > 0\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

respectivement. La distribution exacte requise de $\sum_{i=1}^r (b_i - ta_i) Y_{i:r:n}$ peut être facilement obtenu à partir de (3.21) avec des coefficients $b_i - ta_i$ et l'utilisation du . Puis le l' IC exact à $100(1 - \alpha)\%$ pour θ peut être déterminé comme $(\tilde{\theta} - \tilde{S}T_U, \tilde{\theta} - \tilde{S}T_L)$. Dans un similaire façon, grâce à l'utilisation du pivot

$$\begin{aligned} T' &= \frac{\tilde{\theta} - \theta}{\tilde{S}} \\ &= \sum_{i=1}^r b_i Y_{i:r:n} \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{d=0}^r \sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d=0}^{R_d} Pdl \left(\sum_{i=1}^r h_i(b) E_i(1) \right) \end{aligned}$$

et sa distribution exacte donnée dans (3.21) et l'utilisation du Lemme (3.1.4.1), les IC $(1 - \alpha)\%$ exacts pour θ peut être obtenu comme $(\tilde{\theta} - St_1, \tilde{\theta} - St_2)$ lorsque θ est connu. Ici t_1 et t_2 sont les α supérieur et inférieur 2 points de pourcentage, respectivement, de T . Lorsque le paramètre S est inconnue, elle peut être remplacée par \hat{S} , et c'est ce qu'on appelle la "méthode plug-in". Bien sûr, une telle méthode plug-in peut ne pas conserver son niveau de confiance exactement à $100(1 - \alpha)\%$. Ensuite, considérons le pivot pour S comme

$$\begin{aligned}
 T'' &= \frac{\tilde{S}}{S} \\
 &= \sum_{i=1}^r a_i Y_{i:r:n} \\
 &\stackrel{d}{=} \sum_{d=0}^r \sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d=0}^{R_d} P d l \left(\sum_{i=1}^r h_i(b) E_i(1) \right)
 \end{aligned}$$

Ici encore, en utilisant la forme de (3.21) et en utilisant le lemme(3.1) nous pouvons déterminer

$$\begin{aligned}
 &P(T'' > t_1'') \\
 &= P(T'' < t_2'') \\
 &= \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

l'IC exact à $100(1 - \alpha)\%$ pour S peut alors être déterminé comme $\left(\frac{\tilde{S}}{t_1''}, \frac{\tilde{S}}{t_2''}\right)$.

3.1.4 Estimateur quantile basé sur les BLEUS, sa distribution exacte et son intervalle de confiance pour le quantile de population

Soit q le quantile de la distribution standard (1.10). Ensuite, le BLUE-based l'estimateur quantile pour la distribution (1.9) est simplement

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_q &= q\tilde{S} + \tilde{\theta} \\
 &\stackrel{d}{=} qS \sum_{i=1}^r a_i Y_{i:r:n} + S \sum_{i=1}^r b_i Y_{i:r:n} + \theta
 \end{aligned}$$

Alors, la distribution exacte de $\frac{\tilde{Q}_q - \theta}{S}$ est une distribution de mélange généralisée donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_q - \theta}{S} &= \sum_{i=1}^r (qa_i + b_i) Y_{i:r:n} \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{d=0}^r \sum_{l_1=0}^{R_1} \dots \sum_{l_d=0}^{R_d} P d l \left(\sum_{i=1}^r h_i(d) E_i(1) \right) \end{aligned}$$

où $d = (d_1, \dots, d_t)$ et $d_i = qa_i + b_i$.

Maintenant, en utilisant le Lemme , nous pouvons obtenir une expression explicite pour la CDF exact de $\frac{\tilde{Q}_q - \theta}{S}$. Supposons maintenant que (W_L, W_U) soit un intervalle tel que

$$P\left(W_L \leq \frac{\tilde{Q}_q - \theta}{S} \leq W_U\right) = 1 - \alpha$$

Ensuite, un intervalle de confiance exact de $100(1 - \alpha)\%$ pour Q , noté (Q_L, Q_U) , peut être déterminé comme

$$\begin{aligned} Q_L &= SW_L + \theta \\ &\text{et} \\ Q_U &= SW_U + \theta \end{aligned}$$

les paramètres θ et S étant inconnus, on peut remplacer (θ, S) par les BLEUS $(\tilde{\theta}, \tilde{S})$, ce qui donnerait un IC plug-in pour

$Q_q = \theta + qS$. Au lieu de cela, on peut considérer le pivot comme

$$T_{Q_q} = \frac{\tilde{Q}_q - Q_q}{\tilde{S}}$$

Dans ce cas, nous avons

$$T_{Q_q} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^r (qa_i + b_i) Y_{i:r:n} - q}{\sum_{i=1}^r a_i Y_{i:r:n}}$$

puis trouver les $\frac{\alpha}{2}$ points de pourcentage inférieure et supérieure de cette quantité, notés par T_{QL} et T_{QU} , équivaut à trouver la valeur de t satisfaisant

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^r [(q-t)a_i + b_i] Y_{i:r:n} - q \leq 0\right) &= \frac{\alpha}{2} \\ &\text{et} \\ P\left(\sum_{i=1}^r ([q-t]a_i + b_i) Y_{i:r:n} \leq 0\right) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

respectivement. La distribution exacte de $\sum_{i=1}^r ([q-t]a_i + b_i) Y_{i:r:n}$ peut être facilement obtenu à partir de (3.21) et ainsi son CDF peut être obtenu en utilisant le Lemme 3.1.4. Ensuite, l'exact IC $100(1-\alpha)\%$ pour Q_q est donnée par $(\tilde{\theta} + \tilde{S}(q - T_{QU}), \tilde{\theta} + \tilde{S}(q - T_{QL}))$.

Pour Q_q est exact contrairement au plug-in IC ci-dessus. Ces IC peuvent également être utilisés pour déterminer les limites dans un graphique $Q-Q$; voir la figure (4.2) pour un tel exemple.

3.1.5 Autres problèmes inférentiels

3.1.5.1 Intervalle de confiance exact pour la fonction de fiabilité

Un estimateur naturel de la fiabilité à l'instant de la mission est le suivant :

$$\tilde{S}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{\tilde{\theta}-t}{\tilde{s}}} & \text{si } t < \tilde{\theta} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{\tilde{\theta}-t}{\tilde{s}}} & \text{si } t \geq \tilde{\theta} \end{cases} \quad (3.24)$$

Ensuite, la fonction de distribution de $\tilde{S}(t)$ peut être obtenue comme suit :

$$P(\tilde{S}(t) \leq v) = \begin{cases} P(\tilde{\theta} + \log(2(1-v))\tilde{s} \leq t) & \text{si } t < \tilde{\theta}, v < \frac{1}{2} \\ P(\tilde{\theta} - \log(2v)\tilde{s} \leq t) & \text{si } t \geq \tilde{\theta}, v > \frac{1}{2} \end{cases}$$

à partir duquel on peut obtenir un intervalle de confiance exact à $100(1-\alpha)\%$. Ces intervalles de confiances peuvent également être utilisés pour déterminer les limites de confiance pour la courbe de Kaplan-Meier ou $P-P$ tracé, comme indiqué sur la figure 4.3.

3.1.5.2 Intervalle de confiance exact pour la fonction de risque cumulé :

Un estimateur naturel de la fonction de risque cumulé au temps t est le suivant :

$$\tilde{\Lambda}(t) = -\ln(\tilde{S}(t))$$

où $\tilde{S}(t)$ est tel que défini dans (3.24). Alors, la fonction de distribution de $\tilde{\Lambda}(t)$ peut être exprimée comme :

$$P(\tilde{\Lambda}(t) \leq h) = P(\tilde{S}(t) \geq e^{-h}) = 1 - P(\tilde{S}(t) < e^{-h})$$

Par conséquent, si un intervalle de confiance exact et équivoque de $100(1-\alpha)\%$ pour $S(t)$ est (s_l, s_u) , alors un intervalle de confiance exact et équivoque de $100(1-\alpha)\%$ pour $\Lambda(t)$ devient simplement $(-\log(s_u), -\log(s_l))$.

3.2 Estimation ponctuelle

Nous commençons par le problème de l'estimation des paramètres de la distribution de Laplace. Puisque la théorie de l'estimation pour la distribution de Laplace classique est bien développée, nous nous en tiendrons à la paramétrisation $Cl(\theta, s)$. Nous supposons que X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes avec la fonction de densité de probabilité (1.9), $-\infty \leq x \leq \infty$, tandis que X_1, \dots, X_n sont leurs réalisations particulières

3.2.1 Estimation par maximum de vraisemblance :

La fonction de vraisemblance basée sur un échantillon de taille n provenant de la distribution classique de Laplace avec l'échelle S et la localisation θ est

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta, s) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta, s) = \left(\frac{1}{2s}\right)^n e^{-\frac{1}{s} \sum_{i=1}^n |x_i - \theta|} \quad (3.25)$$

Considérons trois cas, deux où l'un des paramètres est connu et un où les deux paramètres sont inconnus .

Cas 01 : La valeur de S est connue : Il est clair que trouver la valeur maximale de f_n par rapport à θ , c'est la même chose que de minimiser l'expression

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \theta| \quad (3.26)$$

par rapport à θ . Notez que (3.26) est la valeur attendue $E|Y - \theta|$, où Y est une variable aléatoire discrète prenant chacune des valeurs X_1, \dots, X_n avec la probabilité $\frac{1}{n}$. Par conséquent, la valeur de θ qui minimise (2.5) est la médiane de Y , qui coïncide ici avec la médiane de l'échantillon des observations X_1, \dots, X_n . [voir [39]] ,Ainsi, pour n impair, l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) de θ , noté $\hat{\theta}_n$, est défini de manière unique comme l'observation moyenne $X_{(n+1)/2:n}$. Pour n pair, en peut être choisi comme une valeur quelconque entre les deux observations du milieu. Par commodité, dans ce cas, la médiane canonique, qui est la moyenne arithmétique des deux valeurs centrales, est généralement utilisée dans la pratique.

Proposition 3.2 Soit X_1, \dots, X_n sont i.i.d. avec la distribution (1.9), où s est connu et $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. Alors MLE de θ ,

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} X_{k+1:n} & \text{pour } n = 2k + 1 \\ \frac{1}{2} \{X_{k:n} + X_{k+1:n}\} & \text{pour } n = 2k \end{cases} \quad (3.27)$$

où $X_{r:n}$ désigne la statistique d'ordre r , est

(i) sans biais .

(ii) cohérente .

(iii) asymptotiquement normale c'est-à-dire que la distribution de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge vers une distribution normale avec moyenne zéro et variance s^2 .

Proposition 3.3 Soit $\{F(x - \theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ une famille de fonctions de distributions absolument continues sur \mathbb{R} dépendant d'un paramètre de décalage θ . Si la médiane canonique de l'échantillon donnée par (3.27) est la (MLE) de θ pour une taille d'échantillon paire $n \geq 4$, alors F doit être une fonction de distribution de Laplace de sorte que

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}, \quad x \neq 0.$$

Nous renvoyons le lecteur à [40] pour une preuve assez avancée du résultat.

Remarque 3.4 Plus généralement, si pour certains $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ une combinaison linéaire de deux statistiques d'ordre consécutives de la forme

$$W = a_i X_{i:n} + a_{i+1} X_{i+1:n} \tag{3.28}$$

est la MLE de θ , où $n \geq 3$ et

$$a_i + a_{i+1} = 1 \tag{3.29}$$

$a_i, a_{i+1} > 0$.

alors F doit être une fonction de distribution de Laplace asymétrique correspondant à la densité

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-b_1|x|}, & \text{si } x \leq 0 \\ ce^{-b_2|x|}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

où b_i est une constante positive, $b_2 = \frac{i}{n-i} b_1$, et c est choisi de telle sorte que la densité (3.30) s'intègre à 1 [40].

En particulier, la proposition 2.6.3 est toujours valable si la médiane de l'échantillon canonique est remplacée par une médiane arbitraire [de la forme (3.28) avec $i = \frac{n}{2}$].

Cas 2 : La valeur de θ est connue. Ici, la fonction de vraisemblance est maximisée par le premier moment absolu de l'échantillon.

Proposition 3.4 Soit X_1, \dots, X_n n v.a. i.i.d. avec la distribution $cl(\theta, S)$ (1.9), où θ est connu et $S > 0$ est inconnu. Puis le MLE de S ,

$$\hat{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \theta|, \tag{3.31}$$

(i) sans biais;

(ii) fortement cohérent;

(iii) asymptotiquement normal; c'est-à-dire que $\sqrt{n}(\hat{S}_n - S)$ converge en distribution vers une distribution normale avec une moyenne de zéro et une variance S^2 .

(iv) efficace.

Proposition 3.5 Soit $\{F(\frac{x}{s}), s > 0\}$ une famille de distributions absolument continues sur \mathbb{R} , dépendant d'un paramètre d'échelle S . Supposons que la densité $f(x) = F'(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

(i) f est continue sur

(ii)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda y)}{f(y)} = 1, \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \quad (3.32)$$

Si pour toutes les tailles d'échantillon n , une MLE de S est donnée par $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$, alors F est Laplace et

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

cas 3 : les deux θ et S sont inconnus. De même que ci-dessus, ici la MLE de θ est la médiane de l'échantillon en donnée par (3.27), tandis que la MLE du paramètre d'échelle s est égale à l'écart absolu moyen

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |X_j - \hat{\theta}| \quad (3.33)$$

Nous démontrerons que ces estimateurs sont cohérents et asymptotiquement normaux. Pour prouver ces résultats, on pourrait utiliser la théorie générale de l'estimation du maximum de vraisemblance et ses asymptotiques. Nous avons plutôt décidé de donner des dérivations plus explicites en utilisant la structure spécifique des estimateurs du maximum de vraisemblance pour les distributions de Laplace.

Nous nous limitons au cas d'une taille d'échantillon impaire, c'est-à-dire $n = 2k + 1$. Le cas d'une taille d'échantillon paire peut être dérivé d'une manière analogue avec quelques ajustements mineurs pour la forme différente de la médiane. Nous supposons donc que $n = 2k + 1$.

Théorème 3.2 Soit $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de i.i.d. variables aléatoires ayant une distribution $cl(\theta, S)$. Alors la paire d'estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{S}, \hat{\theta})$ de (θ, S) est cohérente, asymptotiquement normale et efficace. La matrice de covariance asymptotique a la forme

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & S^2 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

3.2.2 Estimation du maximum de vraisemblance sous censure

Soit X_1, \dots, X_n un i.i.d. échantillon de la distribution de Laplace classique avec densité $f(\cdot; \theta, S)$ donnée par (1.9) et fonction de distribution $F(\cdot; \theta, S)$ donnée par (1.11). Lorsque les r plus petites et les r plus grandes observations sont censurés, nous obtenons un échantillon censuré de type II (symétriquement)

$$X_{r+1:n} \leq \dots \leq X_{n-r:n} \quad (3.35)$$

Si $X_{r+1:n} \leq \dots \leq X_{n-r:n}$ est une réalisation particulière de (3.35), alors la fonction de vraisemblance est

$$L(\theta, S) = \frac{n!}{(r!)^2} \left\{ F(x_{r+1:n}; \theta, S) [1 - F(x_{n-r:n}; \theta, S)] \right\}^r \prod_{i=r+1}^{n-r} f(x_{i:n}; \theta, S). \quad (3.36)$$

En utilisant (1.9) et (1.11) on obtient

$$L(\theta, S) = \frac{n!}{2^n (r!)^2 S^{2n-2}} \times \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(x_{n-r:n}-\theta)}{S}} (2 - e^{-\frac{(x_{r+1:n}-\theta)}{S}})}{e^{\sum_{i=r+1}^{n-r} \frac{(x_{i:n}-\theta)}{S}}}, & \theta < x_{r+1:n} \\ \exp\left\{ \frac{-r}{S} (x_{n-r:n} - x_{r+1:n}) - \sum_{i=r+1}^{n-r} \left| \frac{x_{i:n}-\theta}{S} \right| \right\}, & \theta \in [x_{r+1:n}, x_{n-r:n}] \\ \frac{e^{\frac{(x_{r+1:n}-\theta)}{S}} (2 - e^{\frac{(x_{n-r:n}-\theta)}{S}})}{e^{\sum_{i=r+1}^{n-r} \frac{(x_{i:n}-\theta)}{S}}}, & \theta > x_{n-r:n} \end{cases}. \quad (3.37)$$

Nous fixons maintenant $S > 0$ et maximisons la fonction L par rapport à θ . La fonction de vraisemblance est monotone croissante par rapport à θ sur $(-\infty, x_{r+1:n})$ décroissante clairement et monotone par rapport à θ sur $(x_{n-r:n}, \infty)$, de sorte que les valeurs maximales de L doivent se produire pour certains θ dans $[x_{r+1:n}, x_{n-r:n}]$, mais sur ce dernier intervalle, la fonction L est maximisée si la somme

$$\sum_{i=r+1}^{n-r} \left| \frac{x_{i:n}-\theta}{S} \right|$$

est minimale, donc la *MLE* de θ est la médiane de l'échantillon censuré (qui est la même que celle de l'échantillon d'origine). La substitution de la médiane $\hat{\theta}_n$ de l'échantillon est donnée par (3.27) dans la fonction de vraisemblance (3.37) aboutit à la fonction suivante de S à maximiser,

$$g(s) = L(\hat{\theta}_n, s) = \frac{n!}{2^n (r!)^2 S^{n-2r}} e^{-\frac{c}{s}}, \quad (3.38)$$

où

$$c = r(x_{n-r:n} - x_{r+1:n}) + \sum_{i=r+1}^{n-r} |x_{i:n} - \hat{\theta}_n| > 0. \quad (3.39)$$

Puisque la fonction g est maximisée en $s = \frac{c}{n-2r}$, nous obtenons la *MLE* suivante de s [41] :

$$\hat{S}_n = \frac{1}{n-2r} \left\{ \sum_{i=[(n+1)/2]+1}^{n-r} x_{i:n} - \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_{i:n} + r(x_{n-r:n} - x_{r+1:n}) \right\}. \quad (3.40)$$

Remarque 3.5 [41] ont dérivé le biais et l'efficacité des estimateurs ci-dessus (par rapport aux BLEU discutés ci-dessous); voir également [48] pour le calcul de l'erreur quadratique moyenne de ces estimateurs. [41] ont obtenu des estimateurs explicites similaires de θ et S sous censure à droite de type II, tandis que [42] ont étendu les résultats à un échantillon censuré général de type II.

3.2.3 Estimation du maximum de vraisemblance des paramètres de localisation monotone

Soit pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$, $f(x; \theta_i)$ la densité (1.9) de la distribution classique de Laplace $cl(\theta_i, S)$ avec le paramètre de localisation θ_i et le paramètre d'échelle $s = 1$. Supposons que n_i éléments

$$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in} \quad (3.41)$$

sont choisis dans la distribution de densité $f(x; \theta_i)$, et que les k échantillons résultants sont indépendants. Notre objectif est de trouver des estimations c de $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ telles que

$$\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2 > \dots > \hat{\theta}_k \quad (3.42)$$

[43] à examiné des problèmes de ce type lorsque $f(x; \theta)$ est membre d'une famille exponentielle de distributions (qui comprend la distribution normale avec une moyenne inconnue ou un écart-type inconnu mais n'inclut pas la distribution de Laplace), tandis que [44] à développé une procédure pour trouver des estimations restreintes (3.42) pour une classe de distributions contenant la loi de Laplace classique. Plus d'informations sur les débuts de ces problèmes sont données dans [43].

Une procédure pour obtenir des estimations restreintes du maximum de vraisemblance développée par [44] suppose que la famille de fonctions $\{f(x; \theta), \theta \in \Theta\}$, où Θ est un ensemble connexe de nombres réels, satisfait les quatre conditions suivantes :

(A₁) $f(x; \theta)$ à le support S qui est le même pour tous les $\theta \in \Theta$.

(A₂) Pour chaque $X \in S$, la fonction $f(x; \theta)$ est continue en θ .

(A₃) Si $X_1, \dots, X_n \in S$, alors la fonction de vraisemblance

$$L(\theta; X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (3.43)$$

(A₄) Si $X_1, \dots, X_n \in S$ et $Y_1, \dots, Y_m \in S$ et M_x, M_y sont les modes des fonctions de vraisemblance $L(\theta; X_1, \dots, X_n)$ et $L(\theta; Y_1, \dots, Y_m)$ respectivement, alors M_{xy} est entre M_x et M_y , où M_{xy} est le mode de $L(\theta; X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$.

Les conditions (A₃) et (A₄) ne supposent pas que le mode est unique [les résultats antérieurs similaires de [45] ont supposé l'unicité du mode], bien que la condition A₄ nécessite l'existence d'une certaine règle par laquelle le mode doit être sélectionné.

Dans ce paramètre, soit M_i le mode de la fonction de vraisemblance du $i^{\text{ème}}$ échantillon (3.41), et pour $1 \leq R \leq S \leq k$, soit $M(R, S)$ mode de la fonction de vraisemblance

$$\prod_{i=R}^S \prod_{j=1}^{n_i} f(x_{ij}; \theta) \quad (3.44)$$

des observations combinées des échantillons R th à S th. L'objectif est de trouver un point $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ dans l'ensemble

$$S_k = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Theta, \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k\} \quad (3.45)$$

pour laquelle la fonction de vraisemblance

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} f(x_{ij}; \alpha_i) \quad (3.46)$$

est maximisée. Le principal résultat de [44] affirme que dans les conditions A₁ A₄ il existe un point dans S_k maximisant la fonction de vraisemblance (3.46) et admet la représentation

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_j &= \min_{1 \leq R \leq j} \max_{R \leq S \leq k} M(R, S) \\ &= \max_{j \leq S \leq k} \min_{1 \leq R \leq S} M(R, S) \end{aligned} \quad (3.47)$$

De plus, si $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \geq \dots \geq \hat{\theta}_k$ et si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |M_i - \theta_i| = 0, \quad (3.48)$$

puis avec une probabilité

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |\hat{\theta}_i - \theta_i| = 0 \quad (3.49)$$

où $m = \min(n_1, \dots, n_k)$ [voir [44]].

Evidemment, la famille des densités de Laplace avec l'emplacement $\theta \in \Theta = (-\infty, \infty)$ et un paramètre d'échelle donné s (par commodité supposé être un) satisfait les conditions A1 – A3 ci-dessus. Ici, le mode de la fonction de vraisemblance (la MLE de θ) est la médiane de l'échantillon. De plus, si dans le cas d'une taille d'échantillon paire, la médiane est choisie comme dans (3.27) comme étant la moyenne des deux valeurs médianes, alors la condition A4 est également satisfaite. Par conséquent, nous avons le résultat suivant [voir [44]].

Proposition 3.6 *Supposons que nous ayons k échantillons aléatoires indépendants, où le i ème échantillon, donné en (3.41), provient de la distribution de Laplace classique avec le paramètre de localisation θ_i et les paramètres d'échelle $S = 1$. et $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \geq \dots \geq \hat{\theta}_k$, où $\hat{\theta}_j$ est donné par (3.47), est les MLE de $\theta_1, \dots, \theta_k$ soumis à la condition (3.42).*

De plus, comme la note de [44], la médiane de l'échantillon du i ème échantillon, M_i , converge presque sûrement vers θ_i par le théorème de Glivenk-Cantelli, donc par (3.48) nous avons la convergence presque sûre (3.49) des MLE restreints.

3.3 Méthode des moments

Soit X_1, \dots, X_n est un échantillon aléatoire de la distribution classique de Laplace avec la densité (1.9). Comme dans le cas des estimateurs maximum de vraisemblances (MLE), nous considérerons trois cas, deux lorsque l'un des paramètres est connu et un lorsque les deux sont inconnus. l'un des paramètres est connu et un lorsque les deux sont inconnus.

3.3.0.0.1 Cas 1 : La valeur de s est connue. Puisque la moyenne de la variable aléatoire $Cl(0, s)$ est égale à 0, l'estimateur de la méthode des moments (EMM)

de θ est la moyenne de l'échantillon.

$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.50)$$

Il est clair que l'estimateur 3.50 n'est pas biaisé pour θ . De plus, en vertu de la loi forte des grands nombres et du théorème de la limite centrale, il est cohérent et statistiquement normal.

le théorème de la limite centrale, il est cohérent et asymptotiquement normal.

3.3.0.0.2 Cas 2 : La valeur de θ est connue. Puisque la variable aléatoire $X_i - \theta$ a la distribution $Cl(0, s)$, sans perte de généralité, nous supposons que $\theta = 0$. Par la relation de moment 1.20, nous avons $E(X_i^2) = 2s^2$, donc la (EMM) de s est

$$\tilde{s}_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (3.51)$$

Remarque 3.6 Notez que la variance asymptotique du s_n est plus grande que celle du s_n de l'(EMM)

3.3.0.0.3 Cas 3 : s et θ sont deux inconnus. Soit

$$\hat{m}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.52)$$

$$\text{et } \hat{m}_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (3.53)$$

sont les premier et second moments d'échantillon pour l'échantillon aléatoire X_1, \dots, X_n de la distribution $Cl(0, s)$. Puisque les deux premiers moments de X_1 sont

$$E(X_1) = \theta \quad (3.54)$$

$$E(X_1^2) = \theta^2 + 2s^2 \quad (3.55)$$

[voir 1.23], en résolvant les équations 3.54 pour θ et s en fonction des deux premiers moments et en substituant les moments de l'échantillon 3.52, nous

arrivons aux (EMM) suivantes de θ et s :

$$\tilde{\theta}_n = \hat{m}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.56)$$

$$\tilde{s}_n = \sqrt{\frac{\hat{m}_{2n} - \hat{m}_{1n}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n} (X_i - \bar{X}_i)} \quad (3.57)$$

Comme précédemment, la cohérence et la normalité asymptotique des estimateurs 3.56 découlent des arguments standard de la théorie des grands échantillons [voir par exemple [46]].

4.1 Introduction

Les distributions de Laplace ont trouvées et continuent de trouver des applications dans une variété de disciplines qui vont de la reconnaissance d'images et de la parole (distributions d'entrée) et de l'ingénierie océanique (distributions de erreurs de navigation) à la finance (distributions de log-retours d'une marchandise). Maintenant, ils sont rapidement devenues des distributions de premier choix chaque fois que "quelque chose" avec des queues plus lourdes que gaussiennes est observée dans les données. Par conséquent, un grand nombre des travaux dans diverses revues et monographies mentionner les lois de Laplace comme la "bonne" distribution, et c'est une tâche ardue de les trouver et de les rapporter toutes.

Dans cette section, en présentant une application dans les données connues sous le nom "**breakdown**", cet ensemble des données breakdownes est disponible sur le package "**UsingR**" du logiciel **R**, les données représentant le (log-temps jusqu'à la rupture d'un fluide isolant) a récemment été suggérée. Des commentaires similaires s'appliquent au cas multivarié qui est une généralisation des distributions de Laplace.

4.2 Simulation d'un échantillon progressivement censuré

Dans cette section, nous présentons une méthode de simulation de Monte Carlo pour générer un échantillon progressivement censuré de type II. Premièrement, pour $\theta = 1$ fixé et des différents choix de n et r , nous avons généré des échan-

tillons censurés de type II à partir de la distribution de Laplace, en utilisant l'algorithme proposé par Balakrishnan [47], comme suit :

Algorithme des données censurées de type II :

1. Générer Z_i de $U(0, 1)$ pour $i = 1, \dots, r$
2. Définir $V_i = Z_i^{\frac{1}{a_i}}$, $a_i = i + n - r$, $i = 1, \dots, r$
3. Définir $U_i = 1 - V_{r-i+1} V_{r-i+2} \dots V_r$, $i = 1, \dots, r$
4. Ainsi, $X_i = F^{-1}(U_i)$, $i = 1, \dots, r$ est l'échantillon censuré de type II souhaité à partir de la distribution de Laplace.

Algorithme des données progressivement censurées de type II :

Cet algorithme, ainsi que la transformation inverse du CDF, pour simuler un échantillon progressivement censuré de type II à partir de n'importe quelle distribution continue d'une manière simple et efficace, Nous définirons tout d'abord un échantillon censuré progressif de type II. En vertu de ce schéma de censure, n unités identiques sont soumises à un test de durée de vie; après le premier échec, les éléments survivants R_1 sont retirés au hasard d'autres observation; après le prochain échec, les éléments survivants R_2 sont supprimé au hasard, et ainsi de suite. enfin, après le dernier échec, R , les éléments restants sont retirés. Ainsi, dans ce type d'échantillonnage, on observe dans tous les m échecs $R_1 + R_2 + \dots + R_m$, les éléments sont progressivement censurés de sorte que

$$n = m + (R_1 + R_2 + \dots + R_m)$$

Soit $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(m)}$ être un échantillon censuré de Type-II progressif de la distribution Uniforme $(0, 1)$.

On voit alors facilement que la fonction de densité conjointe de $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(m)}$ est :

$$f_{U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(m)}}(u_1, u_2, \dots, u_m) = C \prod_{i=1}^m (1 - u_i)^{R_i} \quad , 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m < 1$$

où

$$C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 1) \dots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$$

soit

$$V_i = \frac{1 - U_{(m-i+1)}}{1 - U_{(m-i)}} \quad , i = 1, 2, \dots, m - 1 \quad , V_m = 1 - U_{(1)}$$

De plus, posons

$$W_i = V_i^{i+R_m+R_{m-1}+\dots+R_{m-i+1}} \quad , i = 1, 2, \dots, m$$

Alors W_i ($i = 1, 2, \dots, m$) sont des variables i.i.d Uniforme $(0, 1)$

4.3 Préparation des échantillons censurés de type II de la distribution de Laplace :

Pour préparer un échantillon progressivement censurée de type II, en utilisant le package de software logiciel de la statistique **R** sous le nom "pcensmix". A partir d'un échantillon de lois de Laplace de taille $n = 20$, avec les paramètres $\theta = 25$ et $s = 5$. Un échantillon progressivement de type II censuré à droite de taille $r = 10$, à partir de l'échantillon de taille $n = 20$ de la distribution de Laplace, on obtien le schéma de censure $R = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 4)$. Cet échantillon a été simulé à l'aide de l'algorithme donné à la 4.2. L'échantillon censuré à droite progressivement de type II simulé est le suivant :

TABLE 4.1 – Echantillon de Laplace progressivement censur type II

19.2117	21.9736	23.4178	23.6625	23.8022
24.2302	25.6207	25.8699	26.4800	27.5534

En utilisant les équations (3.10) et (3.11), (3.12), nous sommes maintenant en mesure de calculer les valeurs simples et les moments du produit, et donc les variances et covariances, de progressivement Statistiques d'ordre censurées à droite de type II avec schéma de censure R du distribution de Laplace; voir [47]. Cela a été fait en utilisant logiciel R version (4.1.0), avec des résultats exacts (forme fractionnaire). En utilisant ces résultats et les formules des meilleurs estimateurs linéaires sans biais pour les paramètres d'emplacement et d'échelle donné dans (3.16) et (3.17), les meilleurs estimateurs linéaires sans biais pour θ et s étaient obtenu. Les coefficients $a_{i:m:n}$ pour le BLEU de θ , à 10 décimales, sont données par :

TABLE 4.2 – Valeurs de a_i de la distribution de Laplace

-0.0215281009	0.0098155747	0.0069570375	-0.0901429654	0.2068718600
0.0772377616	0.1039355790	0.2099103064	0.1371049958	0.3598379513

et les coefficients $b_{i:m:n}$ pour le BLEU de s sont donnés par :

TABLE 4.3 – Valeurs de b_i de la distribution de Laplace

-0.1310403616	0.0930984026	-0.0957542723	-0.2299462758	0.0918178668
-0.0494235976	-0.0299327584	0.0453859038	0.0594679977	0.4325239001

Ainsi, sur la base de l'échantillon censuré à droite progressivement de type II donné ci-dessus, nous obtenons les BLUEs de θ et s :

$$\theta^* = 26.26607179, SE(\theta^*) = 0.7233296358,$$

$$s^* = 2.640711801, SE(s^*) = 0.2897210562$$

La variance du BLEU de θ est de $0,0750292328 \times s^2$,
la variance du BLEU de s est de $0,1097132433 \times s^2$,
et la covariance des BLUEs est de $0,0108583470 \times s^2$.

Remarque 4.1 *En utilisant les résultats donnés dans [26], les variances et covariance des BLUE pour un échantillon conventionnel de type II censuré à droite de taille 10 à partir d'un échantillon de taille $n = 20$ à partir d'une distribution de Laplace ont également été calculés. Dans ce cas, le motif de censure peut être écrit sous la forme $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10)$. La variance du BLEU de θ est de $0,0700s^2$, la variance du BLEU de s est de $0,1095s^2$, et la covariance des BLEUS est de $0,0133s^2$. Ces variances, ne sont que légèrement plus favorables que les écarts donnés ci-dessus pour la censure motif $(2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 4)$. Cependant, pour ce schéma de censure (R), les éléments censurés au début peuvent être utiles à l'expérimentateur.*

4.4 Application sur claquage d'un fluide isolant

Nous utilisons le package (UsingR) du logiciel R pour recevoir des informations sur les tests de fluide isolant, la commande `data(breakdown)` pour obtenir les données de claquage d'un fluide isolant identique dans une base de données avec 75 observations sur les 2 variables suivantes. :

Tension : Nombre de kilos Volt (KV)

temps : temps en minutes

La représentation graphique du claquage d'un fluide isolant, nous utilisons la commande suivante :

`plot(log(time) ~voltage, data = breakdown)`

Nous obtenons le graphe suivant :

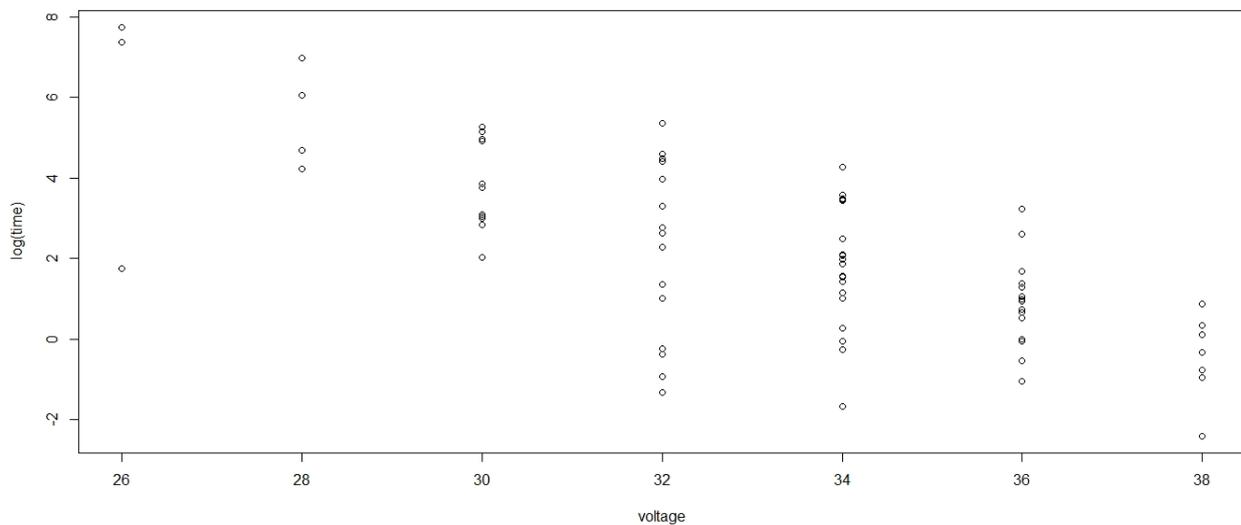


FIGURE 4.1 – La représentation graphique du claquage d’un fluide isolant

4.5 Exemple illustratif

Les données, présentées dans le tableau(4.1), sont des temps logarithmiques progressivement censurés pour le claquage d’un fluide isolant testé à 34 Kilovolts, généré à partir de l’ensemble des données fournies par ([35]). ([36]) ont analysé ces données en supposant une distribution de Laplace. Ici, nous analysons ces données en supposant une distribution de Laplace et calculer les *BLUEs* ainsi que l’exact, le *plug-in* et *IC* a 95% asymptotiques pour les paramètres θ et s . Ces résultats sont présentés dans le tableau (4.2). Nous avons également déterminé les *IC* à 95 % exacts pour les fonctions de quantile et de fiabilité et ceux-ci sont présentés dans les Figure(4.2) et (4.3), respectivement. Les figures (4.2) et (4.3) fournissent un justification graphique de l’hypothèse de la distribution de Laplace pour la Données censurées de type II dans le tableau (4.1); bien sûr, un test formel d’adéquation peut être développé à partir de la figure (4.1) sur la base de la distance absolue de la courbe K-M et de la fonction de survie ajustée avec la valeur p correspondante déterminée à partir d’un estimateur paramétrique de procédure d’amorçage.

Nous utilisons le package (*pcensmix*) sur R pour recevoir des données progressivement censurées de type II pour claquage d’un fluide isolant testé à 34 Kilovolts .

Library(*pcensmix*)

la commande (*pcgen*) pour obtenir les données progressivement censurés de

type II pour claquage d'un fluide isolant testé à 34 Kilovolts identiques dans une base de données avec 8 observations sur 2 variables .

`w=breakdown[35 :53,]$time`

`v=log(w)`

`x=pcgen(r=8,p=0.4,data=v)`

Nous obtenons le tableau suivant :

TABLE 4.4 – Temps de connexion censurés progressivement de type II jusqu'aux données de panne sur le fluide isolant testé à 34 Kilovolts de Nelson (1982)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_{i:8:19}$	-1.6608	-0.2485	-0.0409	0.2700	1.0224	1.5789	1.8718	1.9947
R_i	0	0	3	0	3	0	0	5

Nous utilisons la commande suivante (`qqplot`) pour obtenir le graphe suivant :

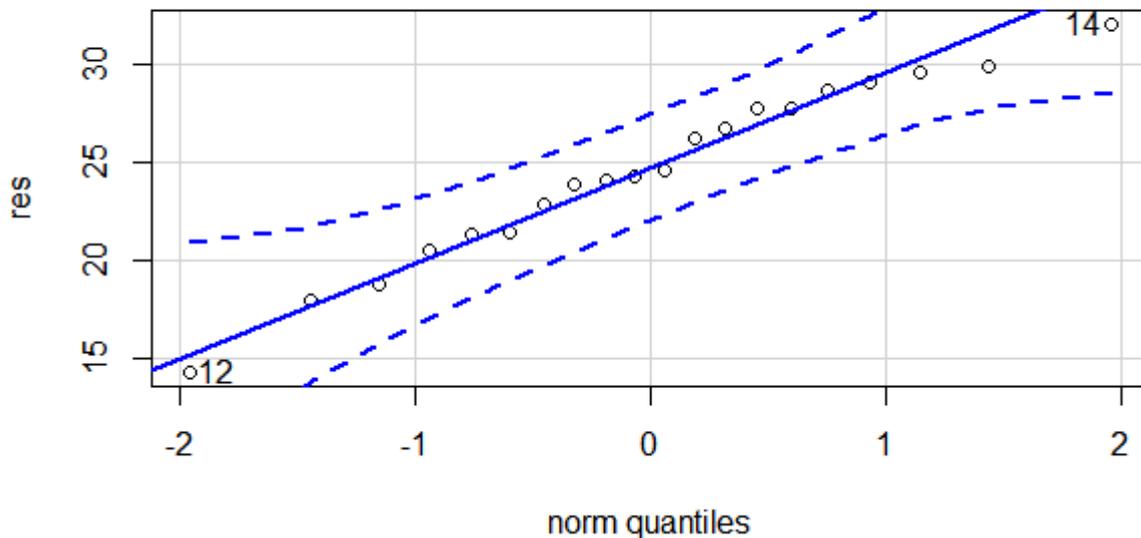


FIGURE 4.2 – Diagramme Q–Q pour les données du tableau (4.1), avec niveau de confiance exactes à 95 %

D'après les équations (3.16) et (3.17) nous obtenons le tableau suivant :

D'après l'équation (3.24), en utilisant le package (`survival`) pour obtenir l'intervalle de confiance exact pour la fonction de fiabilité présentée dans le graphe suivant :

TABLE 4.5 – BLEU de θ et s sur la base des données du tableau 3, avec leurs erreurs types et IC à 95 %

Paramètre	BLUEs	SE	IC exacts	IC Plug-in	IC Asymptotic
θ	1.9863	0.4	(1.1829, 3.1850)	(1.1335, 2.8566)	(1.1826, 3.1771)
s	1.3242	0.4621	(0.7440, 3.0923)	(0.7415, 3.1009)	

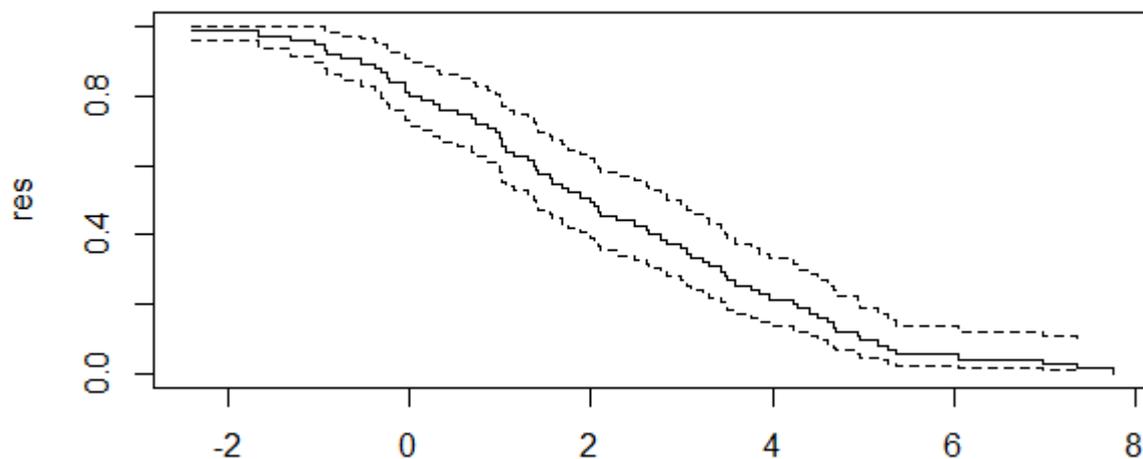


FIGURE 4.3 – Courbe de Kaplan-Meier pour la fonction de survie estimée pour les données du tableau(4.4) avec un niveau de confiance exact de 95 %

4.6 Remarques finales

Dans cette application, nous avons dérivé les distributions exactes des estimateurs des quantiles de la distribution de Laplace basés sur les méthodes BLUEs et les BLUEs-des quantiles de la distribution de Laplace sur la base d'échantillons progressivement censurés à droite de type II. Nous avons également développé des IC exacts pour l'emplacement et l'échelle. les paramètres, les quantiles et les fonctions de fiabilité et de hasard cumulatif. Ces IC exacts sont également utilisés pour développer des limites de confiance exactes pour le diagramme Q-Q et la courbe de Kaplan-Meier.

Dans le prolongement de ce travail, on peut également envisager de développer des méthodes inférentielles exactes sous des échantillons censurés hybrides généraux, voir [37] pour un examen détaillé de la censure hybride et des pro-

blèmes inférentiels associés. En outre, [38] ont examiné certaines techniques d'ajustement de la distribution de Laplace basées sur la censure hybride. Pour la distribution de Laplace sur la base d'un échantillon complet. Il sera naturellement intéressant de développer des tests d'adéquation exacts pour la distribution de Laplace basée sur des échantillons complets et progressivement censurés.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce travail est l'inférence statistique de la distribution de Laplace pour des données progressivement censurées de type II .

Dans la première partie du ce travail, on a effectué une généralité sur la distribution de Laplace et la relation de la distribution de Laplace avec d'autres distributions.

Dans le deuxième partie du ce travail, on a effectué une estimation des paramètres de cette distribution pour les données progressivement censures de type II avec BLEU (meilleur estimateurs linéaire non biaisés) et MLE (maximum de vraisemblance).

Enfin, simulation pour générer des échantillons censurés de type II de la distribution de Laplace nous à permis de faire une application sur claquage d'une fluide isolant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). Continuous Univariate Distributions - 2 (2nd ed.), Wiley, New York.
- [2] Greenwood, J.A., Akin, I. and Savage, I.R. (1962). Index to Annals of Mathematical Statistics, Volumes 1-31, 1930-1960. University of Minnesota, Minneapolis St. Paul : North Central Publishing.
- [3] Feller, W. (1971). Introduction to the Theory of Probability and its Applications, Vol. 2 (2nd ed.), Wiley, New York.
- [4] Farison, J.B. (1965). On calculating moments for some common probability laws, IEEE Trans. Inform. Theory 11(4), 586-589.
- [5] Farison, J.B. (1965). On calculating moments for some common probability laws, IEEE Trans. Inform. Theory 11(4), 586-589.
- [6] Kagan, A.M., Linnik, Yu. V. and Rao, C.R (1973). Characterization Problems in Mathematical Statistics, Wiley, New York.
- [7] Levin, A. and Tchemitser, A. (1999). Multifactor gamma stochastic variance Value-at-Risk model, Presentation at the Conference Applications of Heavy Tailed Distributions in Economics, Engineering, and Statistics, American University, Washington, DC, June 3-5, 1999.
- [8] Levin, A. and Tchemitser, A. (1999). Multifactor gamma stochastic variance Value-at-Risk model, Presentation at the Conference Applications of Heavy Tailed Distributions in Economics, Engineering, and Statistics, American University, Washington, DC, June 3-5, 1999.
- [9] Levin, A. and Albanese, C. (1998). Bayesian Value-at-Risk : Calibration and Simulation, Presentation at the SIAM Annual Meeting'98, Toronto, July 13-17, 1998.

- [10] Levin, A. and Albanese, C. (1998). Bayesian Value-at-Risk : Calibration and Simulation, Presentation at the SIAM Annual Meeting'98, Toronto, July 13-17, 1998.
- [11] Balanda, K.P. (1987). Kurtosis comparisons of the Cauchy and double exponential distributions, *Comm. Statist. Theory Methods* 16(2), 579-59.
- [12] Horn, P.S. (1983). A measure for peakedness, *Amer. Statist.* 37(1),55-56.
- [13] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions - 1* (2nd ed.), Wiley, New York.
- [14] Uppuluri, V.R.R. (1981). Some properties of log-Laplace distribution, in *Statistical Distributions in Scientific Work*, Vol 4 (eds., GP. Patil, C. Taillie and B. Baldessari), Reidel, Dordrecht, pp. 105-110.
- [15] Chipman, J.S. (1985). Theory and measurement of income distribution, in *Advances in Econometrics*, Vol. 4 (eds., R.L. Basmann and GF. Rhodes, Jr.), JAI Press, Greenwich, pp. 135-165.
- [16] Kotz, S., Johnson, N.L. and Read, C.B. (1985). Log-Laplace distribution, in *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 5 (eds., S. Kotz, N.L. Johnson, and C.B. Read), Wiley, New York, pp. 133-134.
- [17] Black, C.M., Durham, S.D., Lynch, I.D. and Padgett, w.J. (1989). A new probability distribution for the strength of brittle fibers, *Fiber-Tex 1989*, The Third Conference on Advanced Engineering Fibers and Textile Structures for Composites, NASA Conference Publication 3082, 363-374.
- [18] Lukacs, E. and Laha, RG (1964). *Applications of Characteristic Functions*, Hafner Publishing Company, New York.
- [19] Lukacs, E. and Laha, RG (1964). *Applications of Characteristic Functions*, Hafner Publishing Company, New York.
- [20] Nyquist, H., Rice, S.O. and Riordan, J. (1954). The distribution of random determinants, *Quart. Appl. Math.* 12(2),97-104.
- [21] Younes, L. (2000). Orthogonal expansions for a continuous random variable with statistical applications, Ph.D. Thesis, University of Barcelona, Barcelona, Spain.
- [22] Edwards, L. (1948). The use of normal significance limits when the parent population is of Laplace form, *J. Institute of Actuaries Students' Society* 8,87-99.
- [23] Asrabadi, B.R (1985). The exact confidence interval for the scale parameter and the MVUE of the Laplace distribution, *Comm. Statist. Theory Methods* 14(3), 713-733.

- [24] Lehmann, E.L. and Casella, G (1998). Theory of Point Estimation (2nd ed.), Springer, New York.
- [25] Huber, P.J. (1981). Robust Statistics, Wiley, New York.
- [26] Govindarajulu Z (1963) Relationships among moments of order statistics in samples from two related populations. *Technometrics* 5(4) :514–518.
Govindarajulu Z (1966) Best linear estimates under symmetric censoring of the parameters of a double exponential population. *J Am Stat Assoc* 61(313) :248–258
- [27] Thomas DR, Wilson WM (1972) Linear order statistic estimation for the two-parameter Weibull and extreme-value distributions from Type-II progressively censored samples. *Technometrics* 14(3) :679–691
- [28] Arnold BC, Balakrishnan N, Nagaraja HN (1992) A first course in order statistics. Wiley, New York
- [29] David H A, Nagaraja H N (2003) order statistics, 3rd edn. Wiley, Hoboken
- [30] Balakrishnan N, Cohen AC (1991) order statistics and inference : estimation methods. Academic Press, Boston
- [31] Balakrishnan N, Cramer E (2014) The art of progressive censoring. Birkhäuser, Boston
- [32] Iliopoulos G, Balakrishnan N (2009) Conditional independence of blocked ordered data. *Stat Probab Lett* 79(8) :1008–1015
- [33] Zhu X, Balakrishnan N (2016) Exact inference for Laplace quantile, reliability, and cumulative hazard functions based on Type-II censored data. *IEEE Trans Reliab* 65(1) :164–178
- [34] Balakrishnan N, Sandhu RA (1995) A simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. *Am Stat* 49(2) :229–230
- [35] Nelson W (1982) Applied life data analysis. Wiley, New York
- [36] Viveros R, Balakrishnan N (1994) Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. *Technometrics* 36(1) :84–91
- [37] Balakrishnan N, Kundu D (2013) Hybrid censoring : models, inferential results and applications. *Comput Stat Data Anal* 57(1) :166–209 (with discussions)
- [38] Puig P, Stephens MA (2000) Tests of fit for the Laplace distribution, with applications. *Technometrics* 42(4) :417–424
- [39] Hombas, v.c. (1986). The double exponential distribution : Using calculus to find a maximum likelihood estimator, *Amer. Statist.* 40(2), 178.

- [40] Buczolic, Z. and Szekely, G (1989). When is a weighted average of ordered sample elements a maximum likelihood estimator of the location parameter? *Adv. Appl. Math.* 10,439-456.
- [41] Balakrishnan, N. and Cutler, C.D. (1994). Maximum likelihood estimation of the Laplace parameters based on Type-II censored samples, in H.A. David Festschrift Volume (eds., D.F. Morrison, H.N. Nagaraja, and P.K. Sen), Springer-Verlag, New York, pp. 145-151.
- [42] Childs, A and Balakrishnan, N. (1997b). Maximum likelihood estimation of Laplace parameters based on general type-II censored examples, *Statist. Papers* 38(3), 343-348.
- [43] Brunk, H.D. (1955). Maximum likelihood estimation of monotone parameters, *Ann. Math. Statist.* 26, 607- 616.
- [44] Robertson, T. and Waltman, P. (1968). On estimating monotone parameters, *Ann. Math. Statist.* 39(3), 1030-1039.
- [45] Van Eeden, C. (1957). Maximum likelihood estimation of partially or completely ordered parameters, I and II, *Indag. Math.* 19, 128-136,201-211.
- [46] Rao, C.R. (1965). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, Wiley, New York.
- [47] Maximum likelihood estimation of the Laplace parameters based on progressive Type-II censored samples, In *Advances in Methods and Applications of Probability and Statistics* (N.Balakrishnan, Ed.), Gordon and Breach Publishers, Newark, New Jersey (to appear).
- [48] Childs, A and Balakrishnan, N. (1997a). Some extensions in the robust estimation of parameters of exponential and double exponential distributions in the presence of multiple outliers, in *Handbook of Statistics-Robust Methods*, Vol. 15 (eds., c.R. Rao and GS. Maddala), North-Holland, Amsterdam, pp. 201-235.