

Remerciement

Au terme de ce travail , j'adresse mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé de près au de loin à la réalisation de ce projet et plus particulièrement « DIEU » le tout puissant et le miséricordieux qui m'a offert le courage pour faire aboutir ce travail.

Je remercie mon promoteur Pr .BOUKRAA SALAH qui m'a dirigé et m'a conseillé pour mener à bout ce travail .

Je voudrais remercier tous les enseignants qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Je remercie également mes parents pour leurs sacrifices et leur soutien.

Je remercie tous les collègues le mon option: structures aéronautiques. sans oublier mes très chers amis.

Mohammed

Tableau des matières

Résumé	1
Introduction générale	2
Organisation du mémoire.....	3

Chapitre I système dynamique et chaos

I.1 Définitions et notations.....	4
I.1.1 Systèmes dynamiques.....	4
I.1.2 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques.....	4
I.2 Systèmes non linéaires et points d'équilibres.....	5
I.2.1 Description mathématique du système non linéaire.....	5
I.2.2 Points d'équilibres.....	5
I.3 Systèmes autonomes et non autonomes.....	6
I.3.1 Systèmes non autonomes.....	6
I.3.2 Autonomes.....	6
I.4 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs.....	6
I.5 Etude qualitative des systèmes dynamiques.....	7
I.6 La théorie du chaos	7
I.6.1 Introduction au chaos.....	7
I.6.2 Définition du chaos.....	8
I.6.3 La différence entre chaos et phénomènes aléatoires.....	9
I.6.4 Caractéristiques du chaos.....	10
I.6.5 Evolution d'un système non chaotique vers le chaos.....	11
I.6.5.1 Par intermittences.....	11

I.6.5.2	Par doublement de la période.....	12
I.7	Les systèmes oscillatoires.....	12
I.7.1	Définition.....	12
I.7.2	Degrés de liberté d'un système et espace des phases.....	13
I.7.3	Degrés de liberté.....	13
I.7.4	Espace des phases.....	13
I.7.5	Analyse dans le plan de phase.....	14
I.7.6	Les portraits de phase.....	15
I.7.7	Le comportement des portraits de phase.....	16
I.7.8	Les cycles limites.....	17
I.7.9	Définition des cycles limites.....	19
I.7.10	Classification des cycles limites.....	19
I.8	Application du chaos.....	20
I.8.1	Introduction.....	20
I.8.2	Communication par les systèmes chaotiques	20
I.8.3	En biologie.....	21
I.9	Conclusion.....	22

Chapitre II étude dynamique du pendule

II.1	Introduction.....	23
II.2	Description du pendule.....	23
II.3	La modélisation: Application du formalisme de Lagrange.....	24
II.4	Etude de mouvement des différents cas du pendule.....	28
II.4.1	Le mouvement du pendule simple.....	28
II.4.2	Le mouvement du pendule amortie.....	29

II.5	Etude de la période d'un pendule simple.....	30
II.5.1	Pour de petites amplitudes.....	32
II.5.2	Pour de plus grandes amplitudes.....	32
II.6	Espace de phase	34
II.6.1	Pendule simple.....	34
II.6.2	Pendule amortie	37
II.6.3	Pendule amortie forcé.....	39
II.7	Description du programme utilisé pour résoudre ces équations.....	40

Chapitre III étude dynamique de double pendule

III	Introduction	41
III .2	Présentation.....	41
III.2.1	Etude théorique.....	42
III.2.2	Coordonnées généralisées.....	42
III.2.3	Energies cinétiques.....	42
III.2.4	Energies potentielles.....	43
III.2.5	Les frottements.....	43
III.2.6	Lagrangien du système.....	44
III.2.7	Equations de mouvement.....	44
III.3	Méthode de résolution numérique.....	45
III.3.1	Introduction.....	45
III.3.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre.....	45
III.3. 3	Description du programme utilisé pour résoudre ces équations.....	49
III.4	Mouvement à la basse énergie.....	49
III.4 .1	Pour de petits élongations.....	49

III.5 Mouvement à la haute énergie.....	52
III.5 .1 Pour de grandes élongations.....	52
III. 6 Les sections de Poincaré.....	55
III. 6.1 Exemples de sections de Poincaré	55
III.6.2 Dynamiques générale du double pendule et section de Poincaré....	56
III .7 Conclusion.....	60
Conclusion générale.....	61
Bibliographie.....	62
Annexe A Programme du pendule	65
Annexe B Programme de double pendule	69
Annexe C Simulateur de double pendule.....	75

Listes des figures

Figure I .1 :	Représentation d'un mouvement chaotique d'un système oscillatoire....	9
Figure I .2 :	Représentation d'un mouvement oscillatoire	13
Figure I .3.1 :	(a) nœud stable, (b) nœud instable.....	16
Figure I .3.2 :	Point col.....	17
Figure I .3.3 :	(a) centre stable. (b) centre instable	17
Figure I .3.4 :	Point centre	18
Figure I.4 :	Cycles limites stables (a, b), instables (c, d).....	19
Figure I.5 :	Exemples d'électroencéphalogrammes.....	22
Figure I.6 :	Exemples de troubles du rythme cardiaque chez l'enfant	22
Figure II .1 :	Schéma de pendule à modéliser.....	24
Figure II .2 :	Le mouvement du pendule simple.....	28
Figure II .3 :	Le mouvement du pendule amortie.....	29
Figure II .4 :	Oscillations d'un pendule simple.....	30
Figure II .5 :	L'énergie mécanique du pendule en fonction de θ	31
Figure II .6 :	La période en fonction de paramètre λ	34
Figure II .7 :	Plan de phase d'un pendule simple.....	35
Figure II .8 :	Plan de phase d'un pendule amortie.....	37
Figure II .9 :	Diagramme de bifurcation pour un pendule atténué conduit par un couple constant	49

Figure II .9 : Portrait de phase du pendule amortie forcé.....	40
Figure III .1 : Représentation d'un double pendule.....	41
Figure III .2 : Algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre.....	46
Figure III .3 : Illustration dynamique avec de petits élongations.....	49
Figure III .4 : Variation de $\theta_1(t)$ avec le temps t.....	50
Figure III.5 : Variation de $\theta_2(t)$ avec le temps t.....	50
Figure III .6 : Différence de amplitude entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$	50
Figure III .7 : Portrait de phase de pendule1	51
Figure III .8 : Portrait de phase de pendule 2.....	51
Figure III .9 : Illustration dynamique avec de haute élongations.....	52
Figure III .10 : Variation de $\theta_1(t)$ avec le temps t.....	53
Figure III .11 : Variation de $\theta_2(t)$ avec le temps t.....	53
Figure III .12 : Différence de amplitude entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$	53
Figure III .13 : Portrait de phase de pendule1	54
Figure III .14 : Portrait de phase de pendule 2.....	54
Figure III .15 : Principe de la section de Poincaré.....	55
Figure III .16 : Section de Poincaré pour le total d'énergie = 5 Joules.....	56
Figure III .17 : Section de Poincaré pour le total d'énergie = 8 Joules.....	57
Figure III .18 : Section de Poincaré pour le total d'énergie = 15 Joules.....	58
Figure III .19 : Section de Poincaré pour le total d'énergie = 75 Joules.....	59
Figure III .20 : Section de Poincaré pour le total d'énergie = 5000 Joules.....	60

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Comparaison entre mouvement régulier et mouvement chaotique....10

Tableau I.2: Comparaison (les représentations classiques et dans le plan de phase des
systèmes dynamiques16

Abstract :

The non-linear dynamic systems now describe a large number of scientific phenomena and engineering. They are applied in many problems in physics, chemistry, mathematics, biology, medicine, economics and others. The resulting chaotic behavior has been one of the most difficult problems in the study of nonlinear dynamical systems. In our work, we introduce the chaotic behavior of a mechanical system is very simple double pendulum, through the numerical solution of its equations of motion in a phase space of four dimensions. Dependence with time variables of the problem is shown, as well as actual paths in space and Poincare sections.

Résumé :

Les systèmes dynamiques non-linéaires décrivent actuellement un grand nombre de phénomènes scientifiques et d'engineering. Ils sont appliqués dans de nombreux problèmes en physique, chimie, mathématique, biologie, médecine, économie et autres. Le comportement chaotique qui en découle a été l'un des problèmes les plus difficiles dans l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires. Dans notre travail, nous présentons le comportement chaotique d'un système mécanique très simple qui est le double pendule, à travers la résolution numérique de ses équations du mouvement dans un espace des phases à quatre dimensions. La dépendance en fonction du temps des variables du problème est montrée, ainsi que des trajectoires réelles dans l'espace et des sections de Poincaré.

ملخص

نظرية الأنظمة الديناميكية اللاخطية قد تطورت منذ القرن التاسع عشر أما الآن فان هذه الأنظمة الديناميكية اللاخطية تستعمل لتمثل عددا كبيرا من الظواهر العلمية و الهندسية. وهذه نظرية المطبقة بصفة واسعة في مصاعب المتواجدة في الفيزياء, الكيمياء, الرياضيات, البيولوجيا, الطب والاقتصاد و اختصاصات في ميدان الهندسة. يعتبر السلوك الفوضوي واحد من أصعب المشاكل في دراسة الأنظمة الديناميكية اللاخطية. في عملنا، ونحن نقدم السلوك الفوضوي للنظام الميكانيكية هو النواس المزدوج ، من خلال الحل العددي للمعادلات الحركة في مساحة المرحلة من أربعة أبعاد. يظهر الاعتماد مع المتغيرات الوقت للمشكلة، وكذلك مسارات الفعلية في الفضاء وأقسام بوانكاريه.

Introduction :

Des systèmes dynamiques non linéaires , ou simplement linéaires par morceau , peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles , qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes) . Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques (ayant des applications en physique ,en mécanique ,en biologie,...) décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre , on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui , de toute façon , est souvent sans espoir) , mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme , et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? » ou « le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? ».

Historiquement , les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques . Une des questions majeures et qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire . Les travaux de Lagrange sur le sujet consistèrent à interpréter l'influence des corps autres que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux : ces travaux retrouvent des échos dans le théorème KAM (Kolmogorov - Arnold - Moser).

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle. En effet , vers la fin du ce siècle le mathématicien , physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. [19]

Toujours au XIXe siècle , le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement . Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines , lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales . Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli , seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

En 1963 le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. c'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats.

Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales [20]. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés : systèmes chaotiques. c'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Evidemment, les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour la compréhension du chaos déterministe , mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques c'est l'ordinateur. en effet , les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et , sans ordinateur , leur résolution est en général impossible.

Organisation du mémoire:

Notre mémoire est organisée comme suit:

- Dans le premier chapitre , nous présentons les effets dynamiques des non linéarités , la méthode de formulation en termes de systèmes dynamiques, ainsi que quelques propriétés générales ,puis nous exposons les notions et définitions de la notion du chaos , et nous terminons ce chapitre avec leurs applications.
- Dans le second chapitre ,nous présentons la modélisation du pendule en appliquant formalisme de Lagrange , prenant en considération l'amortissement et le forçage appliqué sur le pendule pour arriver sur un modèle de mouvement généralisé , ainsi , la présentation du mouvement de chaque type de pendule , enfin la présentation dans plans de phase .
- Dans le troisième chapitre , nous présentons la modélisation de double pendule appliquant formalisme de Lagrange ,ainsi la méthode Range -Kutta qui nous permet de résoudre les équations numériquement, puis nous illustrons les résultats de simulation obtenues par la méthode de la section poincaré , et de donner les trajectoires chaotiques .
- Enfin , nous terminons par conclusion générale sur le travail réalisé.

Chapitre : I

Systeme dynamique et chaos

I.1 Définitions et notations :**I.1.1 Systèmes dynamiques :**

D'une manière générale, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps . Le terme « système » fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé « espace des phases ».

En mathématiques , en physique , en ingénierie un système dynamique est un système "classique" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale (c .à .d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent).
- déterministe (c .à .d qu'à une "condition initiale" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur "un et un seul état futur" possible).

Les systèmes "bruités" sont exclus car intrinsèquement stochastiques et relevant de la théorie des probabilités.

On définit un système dynamique par un triplet (X , T , f) constitué de l'espace d'états X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état

$f: X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant. [14]

I.1.2 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques :

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques , les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps , les variables statiques , encore appelés paramètres du système , sont fixes.

Dans le cas où la composante "temps" est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dy} = f(x, t, p) \text{ ou } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application itérative.

X_e est un point d'équilibre du système (1.4) si:

$$f(x, t) = 0, \forall t \quad (1.5)$$

pour la plus part des cas, on considère que l'origine de l'espace d'état est un point d'équilibre $X_e = 0$.

1.3 Systèmes autonomes et non autonomes:

1.3.1 Systèmes non autonomes:

Les systèmes non autonomes (1.4) sont des systèmes a dynamique qui dépendent du temps et de l'état .La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que les solutions dépendent

1.3.2 Systèmes autonomes:

Le système (1.4) est dit autonome ou système invariant si f ne dépend pas explicitement du temps t , la différence fondamentale entre les systèmes autonomes et non autonomes est que la trajectoire d'état des systèmes autonomes est indépendante du temps initial, par contre la trajectoire d'état des systèmes non autonomes généralement est dépendante du temps initial.

Cette différence nous exige de considérer explicitement le temps initial en définition de concepts de stabilité pour les systèmes non autonomes, et faire l'analyse plus difficile que celle des systèmes autonomes.[15]

1.4 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs :

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la

dynamique du système associée à chaque condition initiale X_0 un et un seul état final $x(t)$; il faut pour cela qu'il existe une application bijective ϕ de l'espace des phases.

$$\begin{aligned}\phi &: I \times R \rightarrow I \\ (x, t) &\rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t)\end{aligned}$$

Qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_t(x_0) &= x_0 \\ \phi_{t+s}(x_0) &= \phi_t(\phi_s(x_0)) \text{ pour } t, s \in R\end{aligned}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système. [14]

I.5 Etude qualitative des systèmes dynamiques :

L'étude qualitative d'une équation différentielle permet de s'affranchir de la détermination explicite de la solution et consiste à analyser le comportement des solutions particulièrement au voisinage de points d'équilibre.

Cette approche (locale) est avérée très féconde surtout lorsqu'elle est appliquée à des systèmes d'équations d'ordre élevé et non linéaires. Elle se base sur la linéarisation au voisinage des points d'équilibre.

Au début du siècle, sous l'impulsion d'Henri Poincaré ; cette démarche fut à l'origine du renouveau de l'étude des systèmes dynamiques et a donné naissance à la Théorie du chaos. [19]

I.6 La théorie du chaos :

I.6.1 Introduction au chaos :

Un phénomène chaotique est un phénomène défini de façon déterministe, non périodique, qui se caractérise par une hypersensibilité aux conditions initiales. C'est cette sensibilité aux conditions initiales qui rend le phénomène imprévisible.

Un système est dit chaotique lorsque son évolution au cours du temps présente une extraordinaire sensibilité aux conditions initiales : une infime variation de celles-ci

conduit le système , au bout d'un temps plus au moins long (dit temps caractéristique), à aboutir à des états extrêmement différents.

Cette variation des conditions initiales pouvant être infiniment petite , elle est extrêmement difficile et même rigoureusement impossible à mesurer ou à contrôler , ce qui entraîne que l'état du système au bout du temps caractéristiques est impossible à prédire , quelle que soit la qualité du modèle physique qui le décrit . La théorie mathématique du chaos développe des outils rigoureux qui sont adéquats pour décrire les phénomènes chaotiques qu'observe la physique une fois encore , la correspondance entre les phénomènes naturels et l'abstraction mathématique se trouve mise en évidence . [3][17][18]

I.6.2 Définition du chaos :

Le chaos est un mouvement , des dynamiques temporelles de systèmes simples qui peuvent être décrit en termes de plusieurs variables:

$$\dot{x}(t) = f(t, x, x_0, \dots) \quad (1.7)$$

Ce mouvement est:

- Irrégulier dans le temps (il n'est pas égal à la superposition des mouvements périodiques , il est réellement aperiodique) .
- Imprédictible dans un long terme et sensible aux conditions initiales.
- Complexe , mais ordonné. dans l'espace de phase : il est associé à une structure fractale.

Ces propriétés sont alors fortement et exceptionnellement limitées aux dynamiques chaotiques qu'elles peuvent être utilisées pour définir le « chaos ».

Les caractéristiques citées ci-dessus sont simultanément présentes: lorsqu'un système simple est aperiodique durant un long temps , son évolution doit être imprédictible . Ces trois caractéristiques sont nouvelles et surprenantes.

Les systèmes chaotiques sont des systèmes oscillatoires aperiodiques . La figure suivante illustre un mouvement irrégulier d'un système oscillatoire non-linéaire forcé en présence de frottement .

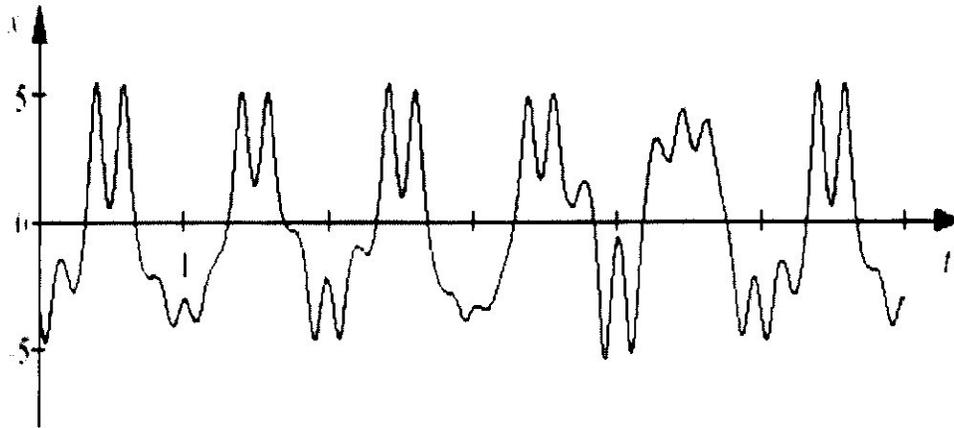


Fig. I.1 Représentation d'un mouvement chaotique d'un système oscillatoire.[15]

Le tableau suivant donne une comparaison entre les mouvements réguliers et chaotiques:

Mouvement régulier	Mouvement chaotique
<ul style="list-style-type: none"> • Périodique • Prédicible • De simple géométrie 	<ul style="list-style-type: none"> • Irrégulier • Imprédictible • De géométrie compliqué

Tableau .I.1 Comparaison entre mouvement régulier et mouvement chaotique

I.6.3 La différence entre chaos et phénomènes aléatoires :

La différenciation entre chaotique et aléatoire nous a paru le point le plus important de la compréhension du chaos . En effet , on a toujours tendance à considérer qu'un phénomène tire son imprédictibilité du nombre trop importants de paramètres en jeu dans sa description , ce qui nous pousse à en donner une approche

probabiliste qui, pour être parfaitement satisfaisante, garde par définition une marge d'aléatoire. Le mouvement brownien en est un exemple.

En ce qui concerne le chaos, il n'en est rien. En effet, un phénomène chaotique, comme nous l'avons vu, est décrit de manière déterministe, c'est à dire en particulier avec des outils mathématiques qui en permettent une approche précise et a priori "certaine". En réalité, il faut constater qu'aucun amalgame n'est possible entre chaos et aléatoire puisque même une approche probabiliste de l'évolution d'un système chaotique n'aboutirait à rien. En effet, même si l'on connaît parfaitement l'évolution d'un système dans des conditions initiales données, pour des conditions initiales extrêmement proches, toutes les évolutions sont encore "équiprobables": l'approche probabiliste n'apporte rien.

En outre, comme on le verra la suite, les systèmes chaotiques possèdent des propriétés qu'ils ne partagent pas plus avec les systèmes aléatoires qu'avec les systèmes déterministes non-chaotiques.

De manière concrète, il existe une définition rigoureuse qui permet de déterminer mathématiquement qu'un système est chaotique, mais son expression est assez complexe.

On peut dire en toute rigueur que, de manière générale, la part d'imprévisible est en réalité assez faible pour un système probabiliste par rapport à un système chaotique, pour lequel, au contraire, bien que le déterminisme soit total, la prévisibilité est nulle.

I.6.4 Caractéristiques du chaos :

On appelle chaotique tout système dynamique qui a les deux caractéristiques suivantes :

1) La sensibilité aux conditions initiales signifie, du point de vue théorique, que si l'on part de deux points très proches, un peu plus tard, ils seront moins proches, et encore un peu plus tard, ils seront très loin l'un de l'autre. Du point de vue pratique, cela signifie que les calculs que l'on effectue n'ont aucun sens. En effet une toute petite erreur dans les calculs (et les ordinateurs en font toujours) a de moins petites

conséquences au coup suivant, des conséquences aisément décelables en peu plus tard, et, si l'on attend encore un peu, des conséquences considérables.

2) Un point périodique (ou points fixe), c'est un point qui revient sur lui-même au bout d'un certain temps. Le système étant déterministe, un tel point ne peut que "boucler", c'est à dire refaire à l'infini la même boucle, tourner en rond. L'existence de points périodiques partout signifie qu'il y a un proche voisin de notre point de départ qui fera à peu près les mêmes premières n étapes, mais qui reviendra exactement au point initial, et se mettra alors à "boucler".

- Remarque enfin que la sensibilité aux conditions initiales signifie, que si l'on part de deux points très proches, un peu plus tard, ils seront moins proches, et encore un peu plus tard, ils seront très loin l'un de l'autre. Mais à cause de la périodicité, ces points peuvent ensuite et vont même très certainement se rapprocher, puis se séparer à nouveau, puis redevenir très proches. [22]

I.6.5 Evolution d'un système non chaotique vers le chaos :

Il existe plusieurs types d'évolution possibles d'un système périodique vers le chaos. Nous allons en exposer brièvement deux. Ces évolutions surviennent par augmentation des contraintes appliquées au système (par exemple, les vitesses angulaires dans le cadre des pendules).

I.6.5.1 Par intermittences :

Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise de nouveau ensuite, pour donner lieu à une nouvelle "bouffée" plus tard. En outre, les durées des phases chaotiques ne suivent aucune constante de même que la fréquence de ces phases, ce qui ajoute au caractère chaotique de l'évolution. On a constaté que la fréquence et la durée des phases chaotiques avaient tendance à s'accroître plus on s'éloignait de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition.

généralisée l'angle θ entre la ligne verticale OA et le fil OB qui porte la masse ni du pendule et la dérivée . On prend comme référence la ligne verticale OA. [15]

D'après la figure (II.1) et utilisant l'équation (2.1) on

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta - A \cos \Omega t \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Le Lagrangien L de ce système est la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie

Potentielle U :

$$L = T - U \quad (2.6)$$

Si l est la longueur de pendule alors l'énergie cinétique est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - \dot{y}^2) \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} = -l \dot{\theta} \sin \theta + \Omega \sin \Omega t \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Alors T est donnée par :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m ((l \dot{\theta} \cos \theta)^2 - (l \sin \theta - A \Omega \sin \Omega t)^2) \\
 &= \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + A^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t - 2 l \dot{\theta} A \sin \theta \sin \Omega t] \\
 &= \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + A^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t - 2 l \dot{\theta} A \Omega \sin \theta \sin \Omega t) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle du pendule est donnée par :

$$U = -mgy = -mg(l \cos \theta - A \cos \Omega t) \quad (2.10)$$

Donc le lagrangien du système est écrit :

$$\begin{aligned}
 L &= T - U \\
 &= \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + A^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t - 2 l \dot{\theta} A \Omega \sin \theta \sin \Omega t + \\
 &\quad + mg(l \cos \theta - A \cos \Omega t)) . \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

La fonction de dissipation associée à l'amortissement s'écrit:

$$D = \frac{1}{2} \lambda v^2 = \frac{1}{2} \lambda (l \dot{\theta})^2 \quad (2.12)$$

Rappelons que les équations de Lagrange du mouvement sont données par [12]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial l}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (2.13)$$

Ainsi

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = ml \dot{\theta} A \Omega \cos \theta \sin \Omega t - mgl \sin \theta \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = \lambda l^2 \dot{\theta} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \theta - m l t \Omega \sin \theta \sin \Omega t \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} - ml \sin \dot{\theta} \cos \Omega t - ml A \Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t \quad (2.17)$$

Finalement , l'équation de mouvement du pendule est donnée par l'équation suivante :

$$\{ m l^2 \ddot{\theta} + m l A \Omega \dot{\theta} \sin \Omega t - m l A \Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t - ml \dot{\theta} A \Omega \cos \theta \sin \Omega t + mgl \sin \theta + \lambda l^2 \dot{\theta} = 0 \} \quad (2.18)$$

Par simplification de cette équation nous trouvons :

$$m l^2 \ddot{\theta} - m l A \Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t + mgl \sin \theta + \lambda l^2 \dot{\theta} = 0$$

Où

$$\ddot{\theta} = \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{A \Omega^2}{l} \sin \theta \cos \Omega t \quad (2.19)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} ; \quad \text{avec } \omega \text{ est la fréquence d'oscillation de système.} \quad (2.20a)$$

$$\beta = \frac{\lambda}{m} ; \quad \text{avec } \beta \text{ est le coefficient d'amortissement.} \quad (2.20b)$$

$$F = \frac{A \Omega^2}{l} ; \quad \text{avec } F \text{ est l'amplitude de la force .} \quad (2.20c)$$

L'objectif de la modélisation est de fournir une estimation du modèle mathématique du système considéré afin de le simuler . La modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques, mécaniques et biologiques conduit à analyser des systèmes

dynamiques chaotiques . Ces systèmes sont indifféremment du second ordre, le caractère chaotique des systèmes dynamiques mis en évidence par des représentations numériques comme les portrait de phases.[2] [6]

II.4 Etude de mouvement des différents cas du pendule :

II.4.1 Le mouvement du pendule simple :

Dans le cas de l'absence d'amortissement et de forçage extérieur , le pendule est seulement soumis à la gravité. c.-à-d.: lorsque $\beta=0$ et $g(t) = 0$.

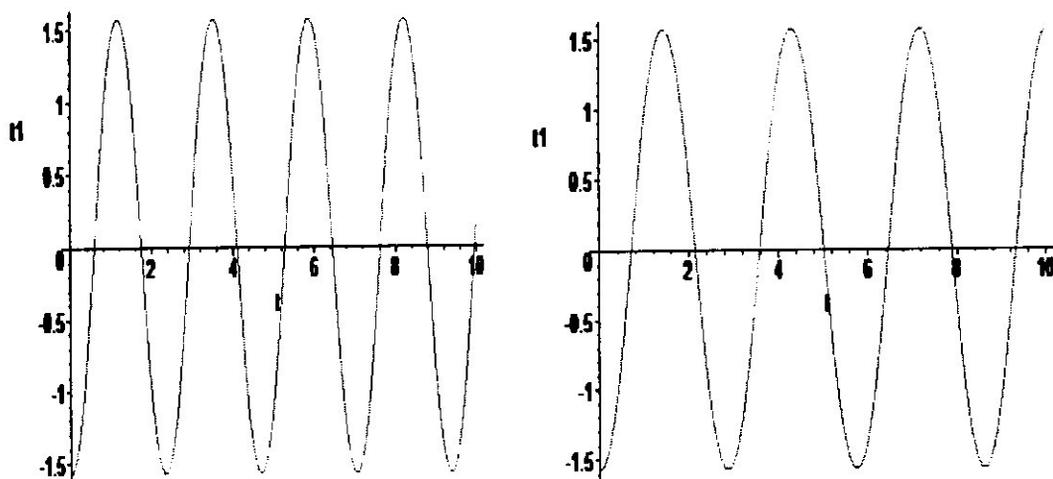
La résolution des équations du mouvement du pendule simple

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec , rappelons } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (2.21)$$

dont une solution est :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.22)$$

Dans la figure suivante (fig.2.2) , on présente un nombre de mouvements caractéristiques du pendule simple . Dans ces courbes on trace le déplacement angulaire en fonction de temps , et $\theta_0(t) = 0$, avec une variation des valeurs de la masse et la longueur du pendule $m = 1, 2.5$ et la langue $l = 1, 1.5$



Pour $m=1$ et $l=1$

pour $m=2.5$ et $l=1.5$

fig.II.2 Le mouvement du pendule simple

Cette solution générale vérifie l'équation différentielle du mouvement quelles que soient les valeurs de x_{\max} , et de φ_0 , mais à chaque mouvement correspond une solution particulière et une seule qui dépend des conditions initiales.

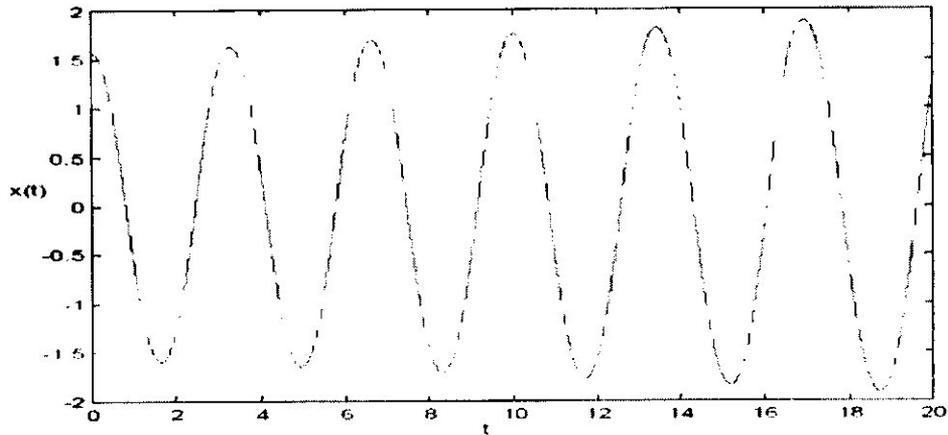


Fig.II.2 Représentation d'un mouvement oscillatoire.[15]

I.7.2 Degrés de liberté d'un système et espace des phases :

I.7.3 Degrés de liberté :

Un degré de liberté est un paramètre qui caractérise l'état du système considéré. Si on considère par exemple une roue, fixée à un axe, lui-même fixé dans le sol, le tout dans un matériau rigide, le seul "paramètre" qui peut changer d'un point de vue mécanique, c'est la vitesse angulaire algébrique de la roue. Ce "paramètre" est appelé degré de liberté. On dit alors qu'il s'agit d'un système à un degré de liberté. Maintenant, si cette roue a la possibilité de se déplacer le long d'un axe, on a deux nouveaux "paramètres" : l'abscisse et la vitesse le long de l'axe. Ce sont deux degrés de liberté de plus. Il s'agit donc d'un système à 3 degrés de liberté. Enfin, si on considère un point matériel, il a une position dans l'espace et une vitesse à 3 dimensions. Il a donc 6 degrés de liberté.

I.7.4 Espace des phases :

L'espace des phases d'un système physique est un espace muni d'un repère dont les axes de coordonnées correspondent aux différents degrés de liberté caractérisant le comportement du système. Ainsi, chaque point de l'"espace" créé représente un état unique du système, qu'il soit réellement atteint ou non. On choisit alors de

représenter l'évolution du système à partir de conditions initiales données (un point déterminé) par la trajectoire du point correspondant à ses "états" successifs dans l'espace des phases . Notons que cette représentation a pour particularité de ne pas prendre en compte le temps . Prenons par exemple un pendule idéal simple sans frottement. Son état , à un instant donné , est complètement déterminé dès que l'on connaît deux paramètres seulement : la position et la vitesse . Il s'agit donc d'un système à deux degrés de liberté. Pour ce système , l'espace des phases est donc un plan où l'état du système est représenté par un point : l'abscisse est la position du pendule et l'ordonnée , sa vitesse . L'état du système évolue conformément à la relation fondamentale de la dynamique . Le mouvement de va-et-vient du pendule est décrit, dans l'espace des phases , par le déplacement du point sur une courbe . Dans ce cas , la trajectoire du pendule dans l'espace des phases est une courbe fermée. Si on prend le cas réel , on constate une perte d'énergie liée aux frottements : l'amplitude des oscillations diminuant au cours du temps , la trajectoire dans l'espace des phases est une spirale dont le point central représente la position finale du pendule.[3]

I.7.5 Analyse dans le plan de phase:

L'analyse dans le plan de phase est une méthode graphique pour l'étude des systèmes du second ordre , qui a été introduite par des mathématiciens tel qu'Henri Poincaré . L'idée principale de la méthode est de générer , dans l'espace d'état d'un système dynamique du second ordre. les trajectoires du mouvement correspondent aux différentes conditions initiales , afin d'examiner les caractéristiques qualitatives des trajectoires.

L'analyse d'espace de phase présente des propriétés utiles . Premièrement , c'est une méthode graphique , elle permet de visualiser comment un système non-linéaire débute pour différentes conditions initiales , sans résoudre les équations non-linéaires analytiquement . deuxièmement , elle n'est pas restreinte pour les faibles non-linéarités, mais appliquée également pour les fortes non-linéarités . Finalement , quelques systèmes de contrôle pratique peuvent effectivement être approximés adéquatement comme des systèmes du second ordre , et la méthode de plan le phase peut être utilisée facilement pour leur analyse . Réciproquement , le désavantage fondamental

de la méthode est qu'elle est limitée pour les systèmes de second ordre (ou premier ordre) , parce que l'étude graphique des systèmes d'ordre supérieurs est computationnellement et géométriquement complexe.

Le tableau suivant donne une comparaison entre les représentations des dynamiques classiques et dans le plan de phase:

Représentation traditionnelle	Représentation dans le plan de phase
<ul style="list-style-type: none"> • Coordonnées instantanées. • dépendance de temps ($x(t)$, $v(t)$). • structure en temps. • individuelle. 	<ul style="list-style-type: none"> • points dans le plan de phase. • trajectoire ($v(x)$). • structure en espace de phase. • globale .

Tableau I. 2: Comparaison (les représentations classiques et dans le plan de phase des systèmes dynamiques. [15]

I.7.6 Les portraits de phase:

La méthode de plan de phase est concernée avec l'étude graphique (les systèmes autonomes du second ordre décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) & (1.10 \text{ a}) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) & (1.10 \text{ b}) \end{cases}$$

Avec x_1 et x_2 sont les états du système et f_1 et f_2 sont des fonctions non-linéaires des états. Géométriquement , l'espace d'état de ce système est un plan ayant x_1, x_2 comme coordonnées. Nous appellerons ce plan le plan de phase.

Donnant un ensemble des conditions initiales $x(0) = x_0$, l'équation (1.10) définit une solution $x(t)$. Pour $t \in [0, \infty[$, la solution $x(t)$ peut être représentée géométriquement comme une courbe dans l'espace de phase. Cette courbe est appelée une trajectoire du plan de phase. Un ensemble des trajectoires correspondant à diverses conditions initiales est appelé un portrait de phase du système.

I.7.7 Le comportement des portraits de phase:

Considérons le système non-linéaire du second ordre défini dans (1.10):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et possède un point d'équilibre à l'origine. L'analyse dans le plan de phase des systèmes non-linéaires est reliée avec celle des systèmes linéaires, parce que le comportement d'un système non-linéaire peut être approximé avec le comportement d'un système linéaire. Ce comportement est représenté comme suit :

- **Un nœud**: lorsque les trajectoires $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ convergent exponentiellement vers $(0, 0)$ sans oscillation, ce point d'équilibre correspond à un nœud stable, et dans le cas où elles divergent au point d'équilibre, ce point d'équilibre correspond donc à un nœud instable. Voir figure I.3.1

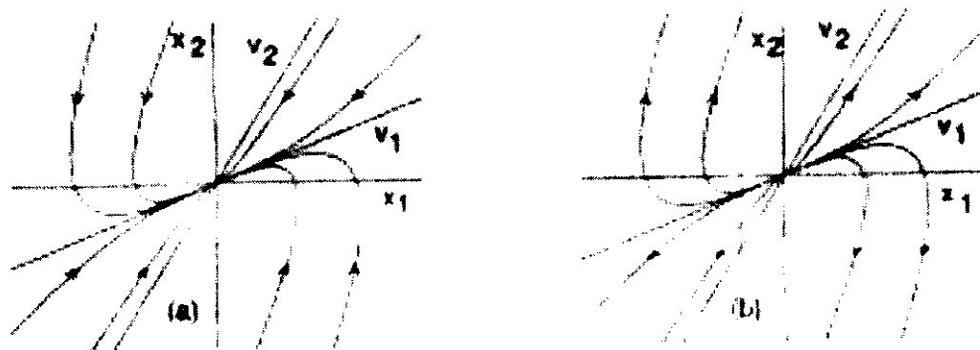


Fig. I.3.1 (a) nœud stable, (b) nœud instable.

- Un point col: presque toutes les trajectoires du système divergent à l'infini. Voir figure I.3.2 .

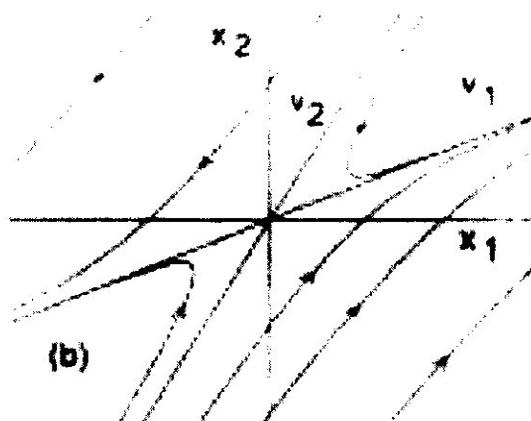


Fig.I.3.2 Point col.

- Un centre: lorsque les trajectoires $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ convergent vers $(0,0)$, et encerclent l'origine plusieurs fois avant de converger vers lui c.-à-d. elles oscillent puis convergent vers $(0,0)$, l'origine ici est un centre stable. Dans le cas contraire ou les trajectoires divergent à l'infini, le point d'équilibre est un centre instable. Voir figure I.3.3 .

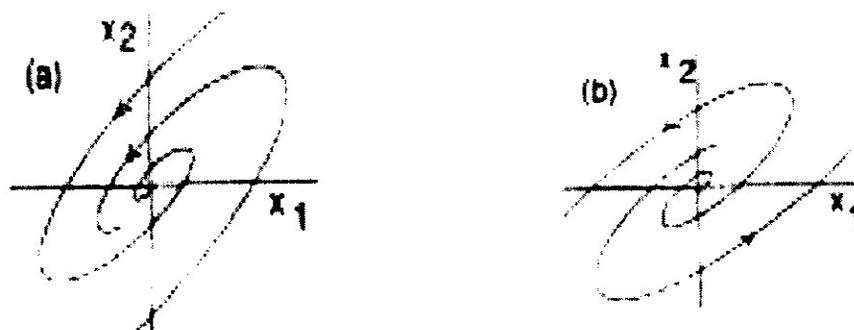


Fig. I.3.3 (a) centre stable. (b) centre instable.

• **Un point centre** : dans ce cas les trajectoires sont des ellipses et le point d'équilibre est le centre de ces ellipses comme le montre la figure I.3.4.

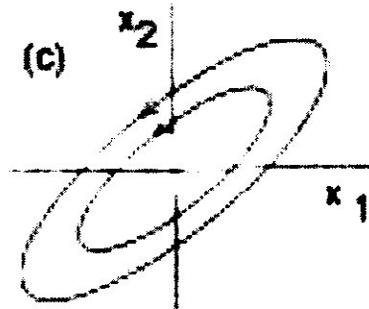


Fig.I.3.4 Point centre.

Cependant, les systèmes non-linéaires peuvent présenter des patrons beaucoup plus compliqués dans le plan de phase, comme points d'équilibre multiple et cycles limites

I.7.8 Les cycles limites:

Les systèmes non-linéaires peuvent exposer les oscillations d'amplitude fixe et période fixe sans excitation extérieure. Ces oscillations sont appelées cycles limites. Cet important phénomène peut simplement illustrer avec des oscillateurs dynamiques connus, premier étudié en 1920 par l'ingénieur électrique Balthasar Van der Pol. Les cycles limites représentent un phénomène important en systèmes non-linéaires. Ils peuvent être trouvés dans plusieurs domaines d'ingénierie. L'aile flottant d'avion, un cycle limite causé avec l'interaction des forces aérodynamiques et les vibrations structurelles, est fréquemment rencontré et quelques fois dangereux. Les cycles limites sont observés aussi dans les circuits électriques: dans les laboratoires des oscillateurs électroniques. Comme on peut voir d'après ces exemples, les cycles limites peuvent être indésirables dans certains cas, mais désirables dans d'autres. Un ingénieur doit comprendre comment les éliminer s'ils sont indésirables, et inversement comment les générer ou amplifier s'ils sont désirables.

I.7.9 Définition des cycles limites:

Un système $\dot{x} = f(x)$ possède un cycle limite C , s'il existe un intervalle de temps

$$[t_0 , t_0 + T [$$

et un point de départ $x_0 \in C$, tel que, en désignant par $\varphi(t)$ la solution du système avec pour condition initiale on est:

- $\varphi(t) \in C, \forall t [t_0 , t_0 + T [$
- $\varphi(t) = x_0$

Un cycle limite est une trajectoire fermée solution du système.

I.7.10 Classification des cycles limites:

D'après les comportements de mouvement des trajectoires au voisinage du cycle limite, nous pouvons distinguer trois types de cycles limites:

1. **Cycles limites stable:** toutes les trajectoires au voisinage du cycle limite convergent quand $t \rightarrow \infty$.
2. **Cycles limites instable:** toutes les trajectoires au voisinage de cycle limite divergent quand $t \rightarrow \infty$.
3. **Cycles limites semi-stable:** quelques trajectoires au voisinage du cycle limite convergent tandis que d'autres divergent de quand $t \rightarrow \infty$.

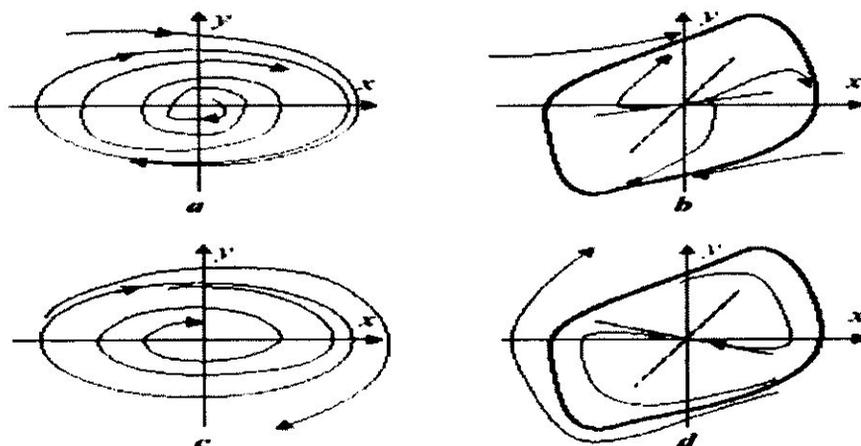


Fig. I.4 Cycles limites stables (a, b), instables (c, d). [15]

I.8 Application du chaos :

I.8.1 Introduction :

Pour nombre de scientifiques, la théorie du chaos représente le premier pas vers l'unification des sciences. En effet, il s'agit là d'une théorie dont les applications embrassent pratiquement toutes les sciences . Une autre option est d'utiliser un système dynamique physique pour produire des séquences chaotiques . Les circuits comme l'oscillateur de Chua peuvent être construits hors de composants communs , il peut être synchronisé et peut être contrôlé si l'application l'exige . Par conséquent, il est certain de dire que les séquences chaotiques utiles génératrices sont une réalité pratique . Dans ce chapitre nous concentrerons notre attention sur deux applications pratiques du chaos : cryptographie et estimation .

I.8.2 Communication par les systèmes chaotiques :

L'image d'un modèle chaotique est structuré autour d'un squelette constitué d'un ensemble d'orbites périodiques instables , cet ensemble est dense dans l'attracteur , ainsi que les orbites transitant entre elles , forment l'attracteur chaotique . L'idée d'utilisations du chaos dans les communications sécurisés à Multi-Utilisateurs sont souvent basées sur le contrôle et l'utilisation adéquate des d'orbites périodiques instables, l'idée principale est de se servir du squelette d'un attracteur chaotique comme un réservoir d'ondes potentiels de communications. De cette façon , le nombre d'utilisateurs , pourvus chacun d'un code propre dans le même canal .

L'intérêt des attracteurs multi-plis réside dans leur possibilité de permettre de générer des orbites plus courtes (par un chaos plus compliqué) et donc une transmission plus rapide des messages, ainsi qu'une meilleure sécurité dans les communications .

L'utilisation du chaos pour sécuriser les télécommunications est un sujet d'études depuis plusieurs années . Le chaos est obtenu à partir de systèmes non linéaires ; il correspond à un comportement stable , aperiodique et éventuellement borné , de ces systèmes , ce qui le fait apparaître comme du « *bruit* » pseudo aléatoire . Il peut donc

être utilisé pour masquer ou mélanger les informations dans une transmission sécurisée . L'originalité repose sur la prise en compte des propriétés de signaux chaotiques issus soit d'équations différentielles soit de récurrences discrètes non linéaires .

Il est possible d'identifier différentes possibilités pour utiliser en cryptographie les signaux chaotiques issus de récurrences discrètes et il y a un développement de fortes compétences dans le domaine des circuits micro-ondes et des transmissions CDMA (*Code Division Multiple Access*) à l'aide d'ondes chaotiques.

En particulier , les démonstrateurs ont mis en évidence certains problèmes théoriques , qu'une étude en commun permettrait d'appréhender de manière plus globale , dans le but de déboucher sur des applications effectives . Ils souhaitent maintenant arriver, pour améliorer la sécurité des transmissions , soit à des formes d'ondes impulsionnelles soit à des systèmes tout numériques . Cela soulève le problème de la conservation des propriétés théoriques des systèmes chaotiques après Discrétisation . Et cela amène par ailleurs à des modélisations par des équations non linéaires de dimensions supérieures à celles envisagées jusqu'alors . D'où la nécessité pour une étude plus précisément encore les caractéristiques dynamiques des signaux chaotiques , afin d'arriver à une réalisation de certain algorithmes qui soit la plus robuste possible.

I.8.3 En biologie :

Ainsi , la théorie du chaos permet , en biologie , d'expliquer les *variations des populations animales* , les *oscillations du cerveau* (un électroencéphalogramme , c'est-à-dire un enregistrement graphique de l'activité électrique du cerveau au moyen d'électrodes placées sur le cuir chevelu, est un attracteur étrange)... C'est parce que le fonctionnement du cerveau est chaotique que les déterminismes d'une personne, que sont les prédispositions génétiques , mais aussi l'itinéraire de la vie (développement intra-utérin , perceptions sensorielles , caractéristiques des sens , éducation , religion , sexe , tout ce que l'on a en mémoire...) , n'épuisent pas l'être , et qu'un réel degré d'incertitude , une série de possibilités indéterminables , persistent . Ce pourrait donc être en vertu de la théorie du chaos que l'homme est libre et unique.

Les *arythmies cardiaques* typiques de nombreuses maladies du cœur se trouvent aussi expliquées par la théorie du chaos. Dans un cœur normal , des impulsions électriques se répandent de manière régulière dans les fibres musculaires , qui forcent le ventricule du cœur à se contracter et à pomper le sang. Une fois contractées , les fibres sont insensibles aux signaux électriques ; on parle de période réfractaire . Ce sont ainsi les variations de la durée de la période réfractaire d'une zone du ventricule à un autre qui seraient la cause de la contraction spasmodique à l'origine d'une crise cardiaque.

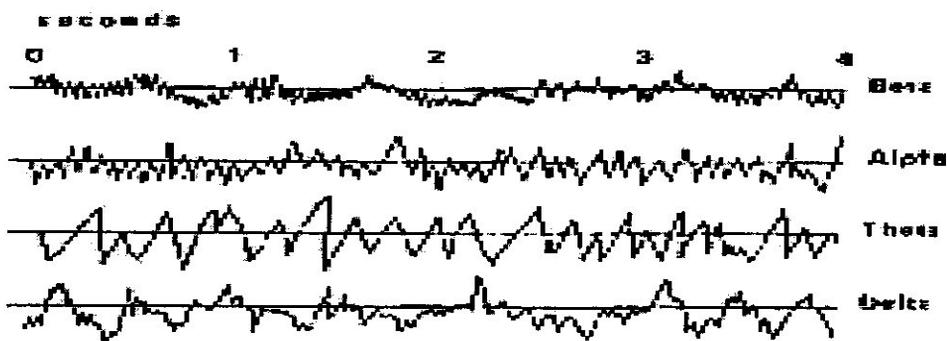


Fig.I.5 Exemples d'électroencéphalogrammes.

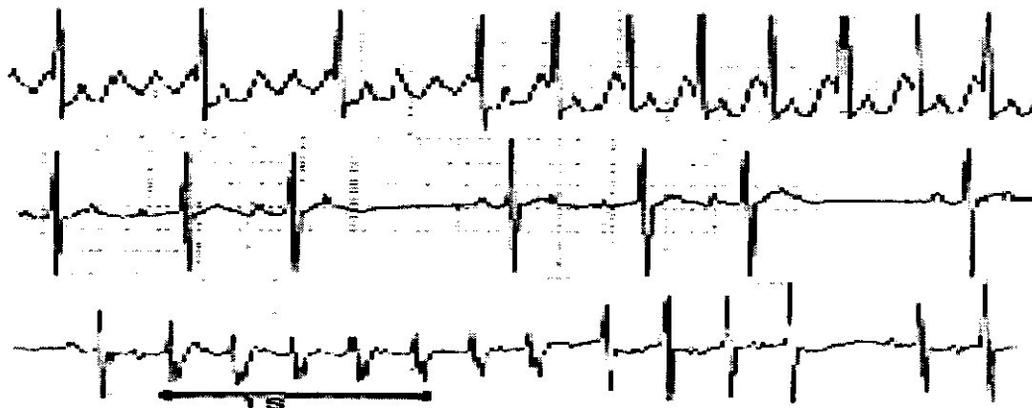


Fig.I.6 Exemples de troubles du rythme cardiaque chez l'enfant.

1.9 Conclusion :

Dans ce chapitre nous présentant les effets dynamiques des non linéarités , la méthode de formulation en termes de systèmes dynamiques , ainsi quelques propriétés générales du chaos , et leurs applications .

Chapitre : II

Etude dynamique du pendule

II.1 Introduction:

Des définitions précédentes des systèmes chaotiques , nous abordons le système physique qui est le but de ce travail: « le pendule» . Le choix du pendule comme un modèle du système a un grand historique dans la physique .

Comme un mécanisme pédagogique , le pendule a été un exemple mécanique standard aux introductions de physique et les cours classiques de mécanique . Quatre cents années après le travail initial de Galileo, le pendule reste encore un objet de recherche comme un système chaotique . [11] [15]

II.2 Description du pendule:

En physique , le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse et de longueur l . inextensible et sans raideur et oscillant sous l'effet de la pesanteur . Il s'agit du modèle du pendule pesant le plus simple . Il est parfois appelé pendule de gravité idéal et , par opposition tout pendule de gravité réel est appelé pendule pesant composé.

Il est possible d'approcher expérimentalement cet objet théorique suspendant une masse de faible dimension au bout d'un fil . A cause de sa nature relativement simple , il se prête à des études théoriques poussées sur le plan mathématique . Ces études ont trouvé plusieurs applications en physique théorique , notamment dans les systèmes harmoniques simples .

Sous l'effet de son poids, lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale) , le point matériel de masse m se déplace sur un arc de cercle : l'effet du poids tendant constamment à ramener le pendule vers sa position d'équilibre stable , celui-ci se met à osciller.

Lorsque les frottements ne sont pas négligeables , l'amortissement devient important, et son effet est supposé proportionnelle à la vitesse de la masse , avec un coefficient de frottement β , et lorsqu'on applique une force extérieure sinusoïdale verticale au niveau de la masse du pendule , la position verticale de la masse est donnée par:

$$g(t) = A \cos \Omega t \quad (2.1)$$

II.5 Etude de la période d'un pendule simple :

On se propose d'étudier le mouvement d'un pendule simple (masse m , longueur l) dans un champ de pesanteur uniforme d'intensité g , en fonction de son énergie mécanique E . Rappelons qu'un tel système mécanique est conservatif, et que cette énergie mécanique est une constante du mouvement et ne varie donc pas au cours du temps.

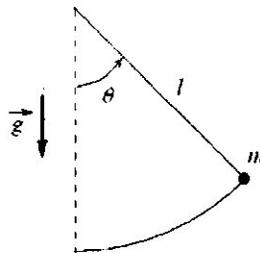


Fig. II.4 Oscillations d'un pendule simple.[6]

Si $\theta = \theta(t)$ désigne la position angulaire instantanée du pendule,

- son énergie cinétique s'écrit:
$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.25)$$

- son énergie potentielle est de la forme
$$E_p = m g l (1 - \cos \theta) \quad (2.26)$$

Si bien que l'intégrale du mouvement est :

$$\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m g l (\cos \theta) = E \quad (2.25)$$

Nous avons représenté sur le même graphique suivant, l'énergie potentielle du pendule en fonction de θ , ainsi que son énergie mécanique (constante au cours du temps, donc en fonction de θ).

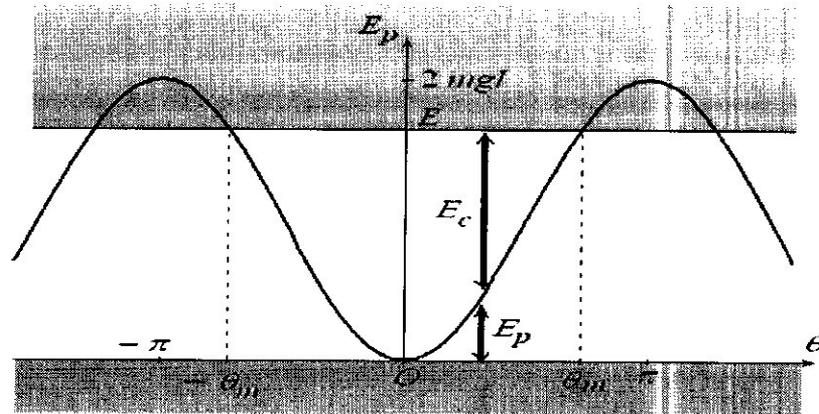


Fig .II.4 L'énergie mécanique du pendule en fonction de θ [6]

L'intérêt de ce graphe est de permettre de visualiser simplement l'énergie potentielle et la part complémentaire revenant à l'énergie cinétique, pour chaque position du pendule. Etant donné que l'énergie cinétique est une quantité positive, et qu'ici, l'énergie potentielle du pendule a été définie de manière à ne prendre que des valeurs positives, il apparaît :

- d'une part, que nécessairement, $E \geq 0$;
- et d'autre part, que les seuls mouvements possibles pour le pendule correspondent à des valeurs de θ telle que : $0 \leq E_p \leq E$

Précisément,

1 er cas : si $E = 0$.

Initialement à $\theta = 0$ et de vitesse nulle, le pendule reste en équilibre à cette position verticale ($\theta = 0$ est un minimum d'énergie potentielle, l'équilibre est stable).

2ème cas : si $0 < E < 2mgl$.

C'est le cas de la figure plus haut. Partant de $\theta = 0$, le pendule effectue des oscillations entre les positions extrêmes $-\theta_m$ et $+\theta_m$, avec :

II.5.1 Pour de petites amplitudes :

ou l'énergie proche de 0, dans cette hypothèse de faibles oscillations, l'énergie mécanique (1) peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m g l \frac{\theta^2}{2} = E \quad (2.26)$$

il vient simplement par dérivation temporelle l'équation du mouvement en θ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2.27)$$

montrant que le pendule simple est asymptotiquement un oscillateur harmonique et que ses faibles oscillations sont sinusoïdales (et bien de période T).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.28)$$

II.5.2 Pour de plus grandes amplitudes :

on peut utiliser pour la période :

La formule approchée de Borda :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4} K^2 + \frac{9}{64} K^4 + \dots \quad (2.29)$$

Avec ; $K = \sin \frac{\theta_m}{2}$ (2.30)

A la limite des petits angles θ_0 , cette expression prend la forme

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4} \theta^2 + \frac{9}{64} \theta^4 \quad (2.31)$$

où le développement à l'ordre 2 en θ_m correspond à la formule de Borda ,

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right) \quad (2.32)$$

3ème cas : si $E = 2mgl$

Partant de la position $\theta = 0$, le pendule monte jusqu'à atteindre, avec une vitesse nulle, la position verticale $\theta = \pi$ rad. Maintenant, $\theta_m = \pi$, la période devient infinie.

Notez enfin que si $\theta_m \rightarrow 180^\circ$, $T \rightarrow \infty$.

4ème cas : si $E > 2mgl$

Lancé de la position $\theta = 0$, le pendule effectue un mouvement de rotation (circulaire, mais pas uniforme) autour du point de fixation. Le mouvement est encore périodique, et la période se calcule comme cela a été fait au 2ème cas. Ainsi, il vient en posant :

$$E = 2mgl(1 - \lambda) \quad , \quad \lambda > 0 \quad (2.32)$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\lambda+1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{1}{\lambda+1} + \frac{9}{128} \frac{1}{(\lambda+1)^2} + \dots \right) \quad (2.33)$$

Si $\lambda \rightarrow 0$ ($E \rightarrow 2mgl$), la période sans surprise est infinie. Par contre,

Si $\lambda \rightarrow \infty$, la période tend vers 0 et la rotation du pendule infiniment rapide ... !

Puisque $0 < 1/(\lambda + 1) < 1$,

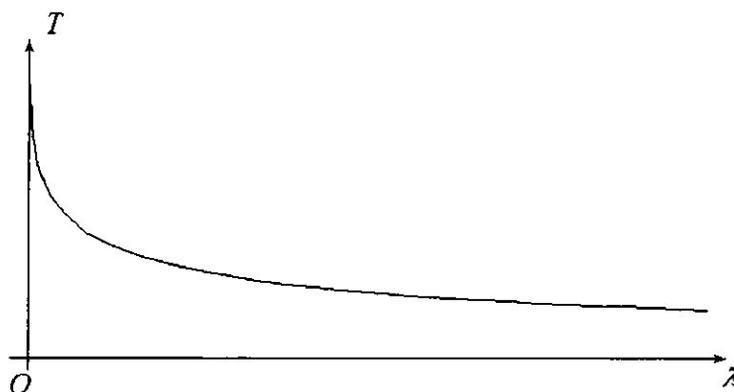


Fig.II.5 la période en fonction de paramètre λ

A titre d'exemple, pour $\lambda \cong 0,0289$ (ou $E \cong 2,0578 mgl$), la période de rotation du pendule est voisine de la période des petites oscillations.

II.6 Espace de phase :

Le mouvement d'un pendule est commodément montré graphiquement dans le plan de sa variable de phase, angle θ et vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$. Les points ou les courbes de caractéristique dans ces diagrammes s'appellent "attracteur" parce que indépendamment des conditions initiales, toute la trajectoire sont asymptotiquement attirées à elles. l'origine sera "attracteur de point" tandis que pour le mouvement périodique le, "attracteur périodique" aura la forme d'une ellipse.

II.6.1 Pendule simple :

où les constantes ont été choisies pour faire l'énergie potentielle disparaître à la position verticale de haut en bas du pendule. Systèmes avec la constante de l'énergie s'appellent les systèmes conservateurs. dans plan $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ Selon l'importance de l'énergie E ; il y a de trois différents types de trajectoire dans le plan de phase $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$.

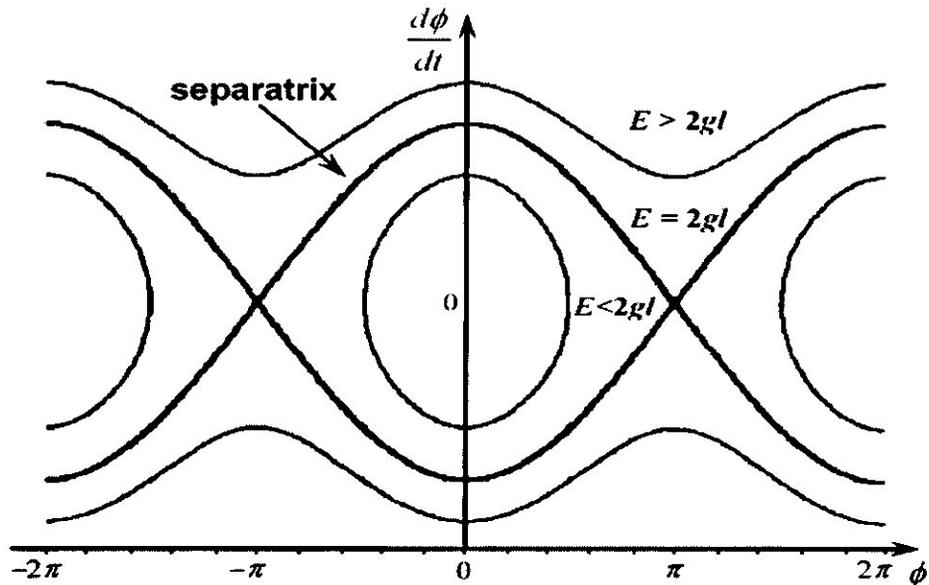


Fig.II.6 Plan de phase d'un pendule simple. [16]

l'expression générale pour l'énergie du pendule,

$$E = \frac{l^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + gl(1 - \cos\theta) \quad (2.34)$$

1 er cas $E < 2gl$,

L'énergie est moins que la valeur critique $2gl$, ce qui est l'énergie exigée pour le masse pour arrêter la position supérieure. Dans ces conditions, la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ disparaît pour quelques angles $\pm\theta$, le pendule est emprisonné dans un des minimum du cosinus potentiel bien, exécution des oscillations simples ("librations") autour de la position du minimum. Ce point fixe $\theta = \frac{d\theta}{dt} = 0$ s'appelle "un point fixe elliptique, puisque la trajectoire voisine ont la forme d'ellipses.

2ème cas : $E > 2gl$

Pour ce cas, il n'y a aucune restriction à l'angle θ , et le pendule balance par la position verticale $\theta = \pi$ et les marques accomplissent des rotations. Le deuxième point fixe ($\theta = \pi, \frac{d\theta}{dt} = 0$).

ce qui correspond au pendule se dirigeant vers le haut , est un ‘‘ hyperbolique’’ point fixe puisque prise voisine de trajectoire la forme d'hyperboles. Elle est suffisamment à étudier ces deux points d'équilibre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ depuis tous autres points fixes $\theta = n\pi$ avec $|n| > 1$ peut être déduit par périodicité.

Les orbites montrées dans fig.1.2 , qui sont périodiques à temps , s'appellent le ‘‘ cycles limite’’ Pour de petites énergies près de l'origine , les orbites sont les harmoniques simples avec une crête simple dans le spectre de puissance.

Pour de plus grandes énergies , le spectre de puissance contient également différents harmoniques de la fréquence principale . Les orbites spéciales sont l'une ou l'autre monoclinique , qui partent du point fixe hyperbolique et revenir alors à lui , ou heteroclinique , ce qui relie deux points fixes hyperboliques . Dans les points fixes hyperboliques , la tubulure stable fusionne avec la tubulure instable , de ce fait formant l'orbite heteroclinique . Cette orbite montre la stabilité d'échange entre le mouvement oscillant et tournant.

3ème cas : $E = 2gl$

Pour ce cas spécial , le pendule atteint la verticale position $\theta = \pi$ avec de l'énergie cinétique nulle, et elle restera dans ce point instable jusqu'à ce que la plus légère perturbation l'envoie dans une de la trajectoire deux intersectant en ce moment .

La trajectoire de frontière, qui est localisée entre des rotations et les librations, s'appelle le séparatrice , puisqu'il sépare différent types de mouvement (oscillations et rotations).L'équation du séparatrice peut être facilement obtenu à partir (2.34),

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\frac{\theta}{2} \quad (2.35)$$

Le temps t nécessaire pour atteindre l'angle θ est indiqué près

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3.36)$$

II.6.2 pendule amortie :

L'addition de l'atténuation à Eq.(2.34). Supposant que l'atténuation est proportionnelle à la vitesse angulaire, l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (3.37)$$

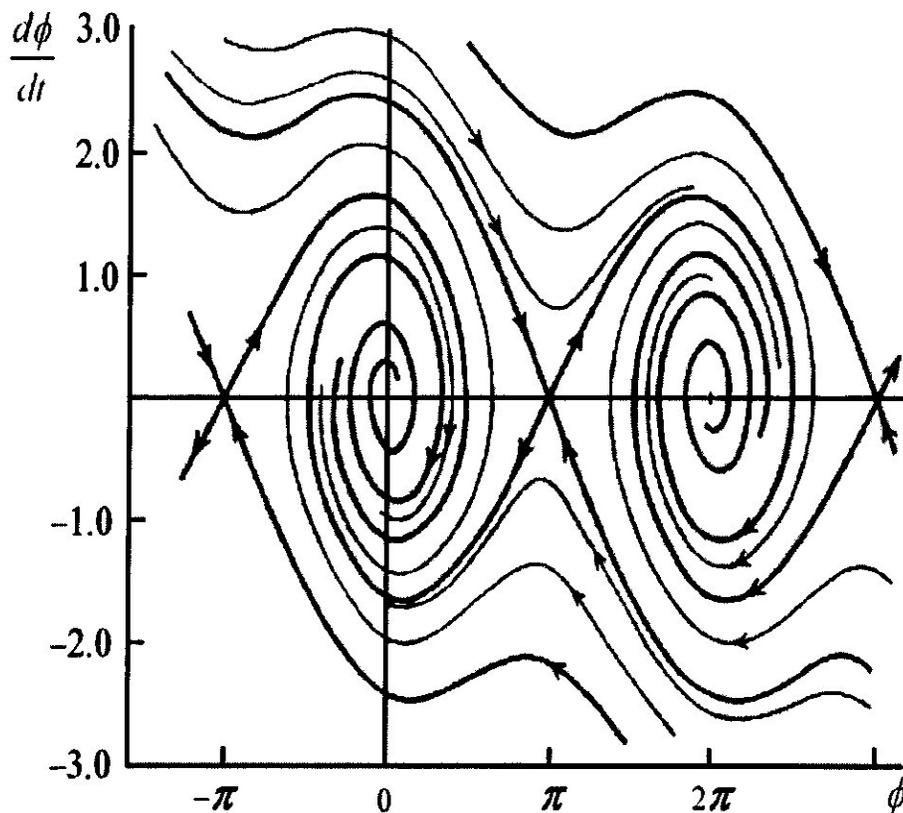


Fig.II.7 Plan de phase d'un pendule amortie [16]

L'équation de pendule avec le couple constant est obtenue en ajoutant constante a à Eq.(2.37),

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin\theta = a \quad (2.38)$$

Cette équation ne peut pas être résolue analytiquement, et nous présenterons les résultats des calculs numériques .

Pour $a = 0$, le pendule accroche en position de haut en bas, $\theta = 0$ Avec l'augmentation de a , l'état d'équilibre est incliné à $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{al}{g}\right)$,

approche $\theta = \frac{\pi}{2}$ à $a = \frac{g}{l}$.

pour $a > \frac{g}{l}$, les débuts de pendule à tourner , correspondance à la perte d'équilibre. Le type de rotation dépend de l'atténuation. Si β est petit, le pendule tourne avec une période finie .

Pour $a < \frac{g}{l}$, le pendule continue à tourner .

Pour $a \leq \frac{g}{l}$, si nous arrêtons le pendule tournant à la main et mettons le pendule près de son position d'équilibre, le pendule demeurera dans l'équilibre. Une autre particularité se produit quand le pendule est perturbé de la position d'équilibre $\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{al}{g}\right)$ en la libérant sans vitesse initiale .

La réaction du pendule dépend alors de la direction de la perturbation. Si la perturbation est orientée sur la direction verticale, le pendule revient à l'équilibre. Mais si la perturbation est assez grande et dirigé dans la direction opposée, le pendule se déplace la direction de la perturbation.

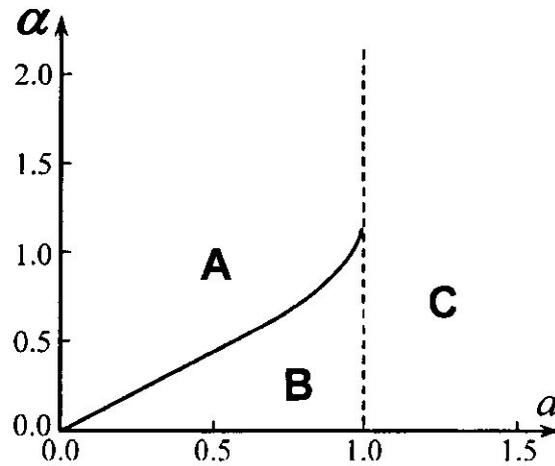


Fig. II.8 Diagramme de bifurcation pour un pendule atténué conduit par un couple constant. [16]

Régions avec les solutions stables : A) Stationnaire , B) Périodique ,C) Stationnaire et périodique .

II.6.3 Pendule amortie forcé :

Nous étudions donc un pendule forcé de manière sinusoïdale dont l'équation est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin\theta = A \cos(\Omega t) \quad (2.39)$$

le système est toujours dissipatif , il est attiré par le point de repos. Cependant , expérimentalement le pendule ne s'arrête jamais d'osciller , il n'atteint jamais le point de repos.

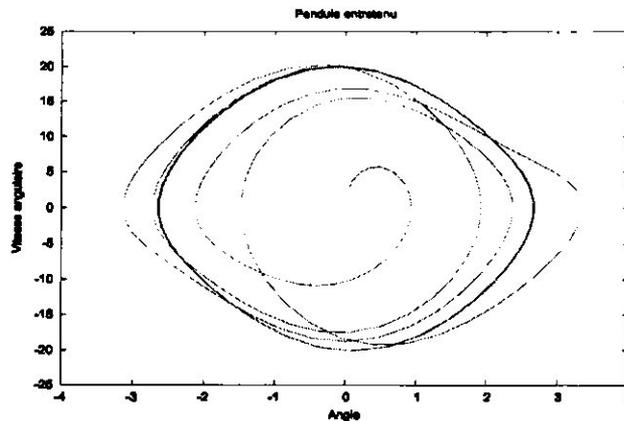


Fig. II.9 Portrait de phase du pendule amorti forcé

On observe (fig. 2.9) que, partant du point de repos, la trajectoire finit par se stabiliser sur une courbe fermée, on a alors un signal périodique en sortie de l'oscillateur. Cette convergence de la trajectoire vers une courbe fermée, est appelée cycle limite. Il faut en fait regarder ce qui se passe sur un temps infini pour observer la courbe fermée, d'où la notion de limite. [23]

II. 7 Description du programme utilisé pour résoudre ces équations :

Nous avons écrit un programme pour résoudre les équations. Ce programme a été réalisé en Maple. Il est entièrement graphique. Donc on peut ajuster facilement les paramètres avec la souris et visualiser les résultats sous forme de graphiques. Le programme est présenté en annexe A.

Chapitre : III

Etude dynamique de double pendule

III .1 Introduction :

Le double pendule fournit un système idéal pour étudier le mouvement chaotique. Le système est relativement simple , mais un changement infinitésimale petit des conditions initiales du pendule produit une trajectoire rigoureusement différente pour les énergies qui montrent le mouvement chaotique.[8]

III .2 Présentation :

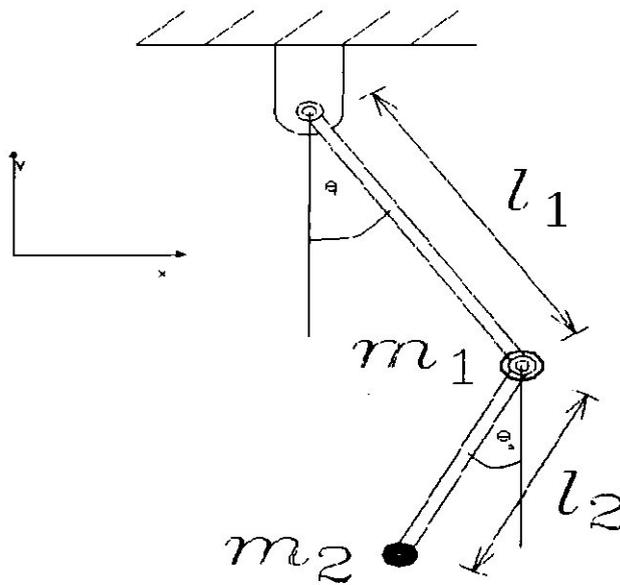


Fig . III.1 Représentation d'un double pendule [8]

Le premier pendule est relié à un point fixe et à la première masse appelé m_1 le deuxième pendule est relié au premier point de la masse de l'un côté et au le deuxième point de la masse a appelé le m_2 de l'autre côté. Les deux longueurs du pendant s'appellent l_1 pour le premier et l_2 pour le deuxième pendule.[12] [13]

III.2.1 Etude théorique :

Etablissons maintenant les grandes lignes du développement théorique d'un pendule double amorti . Pour ce faire , nous utiliserons les techniques de résolution lagrangienne.

III.2.2 Coordonnées généralisées :

Le problème rencontre deux degrés de liberté ce qui impose l'existence de deux coordonnées généralisées $q_i; i = 1, 2$.

Ces coordonnées généralisées sont :

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Calculons de suite les dérivées temporelles de ces coordonnées q_i :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 = \omega_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

III.2.3 Energies cinétiques :

Connaissant l'expression des vecteurs positions en fonction des q_i , on peut déterminer l'expression des énergies cinétiques T_i des deux masses en fonction des mêmes coordonnées q_i

on obtient :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

III.2.4 Energies potentielles :

Maintenant, exprimons les énergies potentielles U_i des deux masses à l'aide des q_i .

On trouve les expressions :

$$\begin{cases} U_1 = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) \\ U_2 = -m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \quad (3.4)$$

III.2.5 Les frottements :

Les frottements peuvent être introduits dans le formalisme lagrangien en introduisant un potentiel supplémentaire. Dans le cas de frottements proportionnels à la vitesse, ce potentiel est le potentiel de Rayleigh.

Evidemment, les deux pendules subissent des frottements donc il s'agit d'introduire un potentiel de Rayleigh pour chaque pendule.

Les potentiels de Rayleigh $V_{R,i}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} V_{R,1} = \frac{1}{2} \beta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ V_{R,2} = \frac{1}{2} \beta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Où les β_i sont les coefficients de frottements des deux pendules.

III.2.6 Lagrangien du système :

Vu tout ce qui a été calculé, il est facile de déterminer le lagrangien L

Du système :

$$L = T - U \quad (3.6)$$

A condition de prendre :

$$\begin{cases} T = T_1 + T_2 \\ U = U_1 + U_{R,1} + U_2 + U_{R,2} \end{cases} \quad (3.7)$$

III.2.7 Equations de mouvement :

Afin de connaître les deux équations de mouvement $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, il faut résoudre le système d'équation dit de Lagrange : [2]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{dL}{dq_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{dL}{dq_2} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Ces équations sont connues car on a déterminé L par l'équation (3.6), q_i par les équations (3.1) et on connaît \dot{q}_i par les équations (3.2). Donc au total, les équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = & - \frac{-m_1 g l_1 \sin(\theta_1) - m_2 g l_1 (\theta_1) - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2 \dot{\theta}_2 - \beta_2 \dot{\theta}_1 - \beta_1 \dot{\theta}_1 +}{l_1^2 (-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))^2} \\ & + \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) (-\beta_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2) + \beta_2 \dot{\theta}_1}{l_1 l_2 (-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)(-m_1 g l_1 \sin(\theta_1) - m_2 g l_1 \sin(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2 \dot{\theta}_2}{l_1^2(-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))^2} + \frac{-\beta_2 \dot{\theta}_1 - \beta_1 \dot{\theta}_1 - (m_1 + m_2)(-\beta_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2) + \beta_2 \dot{\theta}_1}{l_1 l_2 (-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))^2} \quad (3.10)$$

III.3 Méthode de résolution numérique :

III.3.1 Introduction :

Pour résoudre ces équations numériquement, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre à deux variables.

III.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre :

Pour ne pas alourdir le texte nous donnons dans ce qui suit une description succincte des résultats de la méthode RK4:

On part de la formule d'Euler, qui donne : $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$, et $x_{n+1} = x_n + h$

La méthode RK du quatrième ordre produit quatre coefficients K_1, K_2, K_3, K_4

tel que :

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5) \quad (3.11)$$

Une représentation géométrique de l'algorithme de Runge-Kutta est donnée sur la figure 3.2.

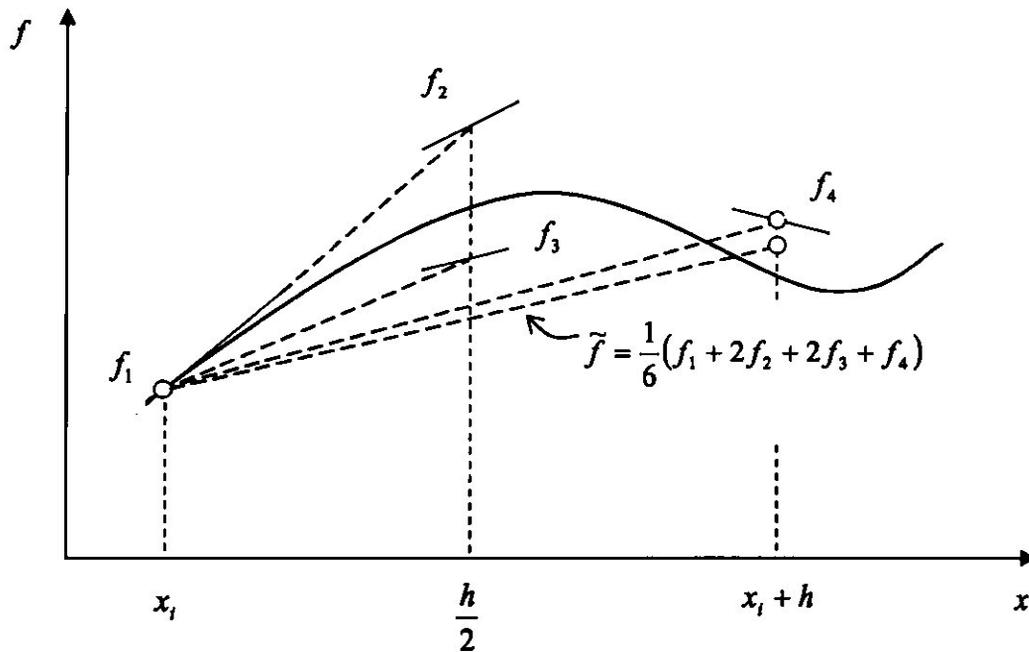


Fig. 3.2 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre.

La méthode RK4 utilise **plusieurs points intermédiaires** pour calculer la valeur de y_{i+1} à partir de la valeur de y_i :

- k_1 est la pente au début de l'intervalle ;
- k_2 est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y au point $x_n + \frac{h}{2}$ par le biais de la méthode d'Euler;
- k_3 est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y ;
- k_4 est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant k_3 .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

$$pente = \frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6} \quad (3.12)$$

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4 , ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4 .

Posons :

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad (3.13)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \quad (3.14)$$

Les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 = f_1(t, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2) = & \\ & - \frac{-m_1gl_1 \sin(\theta_1) - m_2gl_1(\theta_1) - m_2l_1l_2(\omega_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2\omega_2 - \beta_2\omega_1 - \beta_1\omega_1 +}{l_1^2(-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2)} \\ & + \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)(-\beta_2\omega_2 + m_2l_1(\omega_1)^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin(\theta_2) + \beta_2\omega_1}{l_1l_2(-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\dot{\omega}_2 = f_2(t, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)(-m_1gl_1 \sin(\theta_1) - m_2gl_1(\theta_1) - m_2l_1l_2(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2\omega_2}{l_1^2(-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2)} \\ & + \frac{-\beta_2\omega_1 - \beta_1\omega_1 - (m_1 + m_2)(-\beta_2\omega_2 + m_2l_1(\omega_1)^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin(\theta_2) + \beta_2\omega_1}{l_1l_2(-m_2 - m_1 + m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'algorithme de Runge-Kutta s'écrit de la manière suivante :

$$w_1(n+1) = w_1(n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.17)$$

$$w_2(n+1) = w_2(n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.18)$$

$$\theta_1(n+1) = h\omega_1(n) + \theta_1(n) \quad (3.19)$$

$$\theta_2(n+1) = h\omega_2(n) + \theta_2(n) \quad (3.20)$$

avec :

$$k_1 = f_1(t(n), \omega_1(n), \omega_2(n), \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.21)$$

$$j_1 = f_2(t(n), \omega_1(n), \omega_2(n), \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.22)$$

$$k_2 = f_1\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_1, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_1, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.23)$$

$$j_2 = f_2\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_1, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_1, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.24)$$

$$k_3 = f_1\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_2, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_2, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.25)$$

$$j_3 = f_2\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_2, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_2, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.26)$$

$$k_4 = f_1(t(n) + h, \omega_1(n) + hk_3, \omega_2(n) + hj_3, \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.27)$$

$$j_4 = f_2(t(n) + h, \omega_1(n) + hk_3, \omega_2(n) + hj_3, \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.28)$$

h est le pas temporel.

III.3.3 Description du programme utilisé pour résoudre ces équations:

Nous avons écrit un programme qui utilise la méthode de Runge-Kutta pour résoudre les équations. Ce programme a été réalisé en Maple. Il est entièrement graphique. Donc on peut ajuster facilement les paramètres avec la souris et visualiser les résultats sous forme de graphiques.

Le programme est présenté en annexe B.

III.4 Mouvement à la basse énergie :

III.4.1 Pour de petits élongations :

Pour la petite élongation le mouvement du pendule est presque périodique qui nous également observé dans l'ordinateur. Est présenté en annexe C.

Pour la simulation dans l'ordinateur nous prend comme paramètres pour les masses et la longueur $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 1$ et pour l'attraction universelle $g = 9.81$. En outre les vitesses initiales sont fixées par zéro. Ces paramètres durent au-dessus de la simulation de trou. L'exposition suivante d'images la régularité que nous avons vue par une élongation de $\theta_1 = 0.131 \text{ rad}$ et $\theta_2 = 1.87 \text{ rad}$

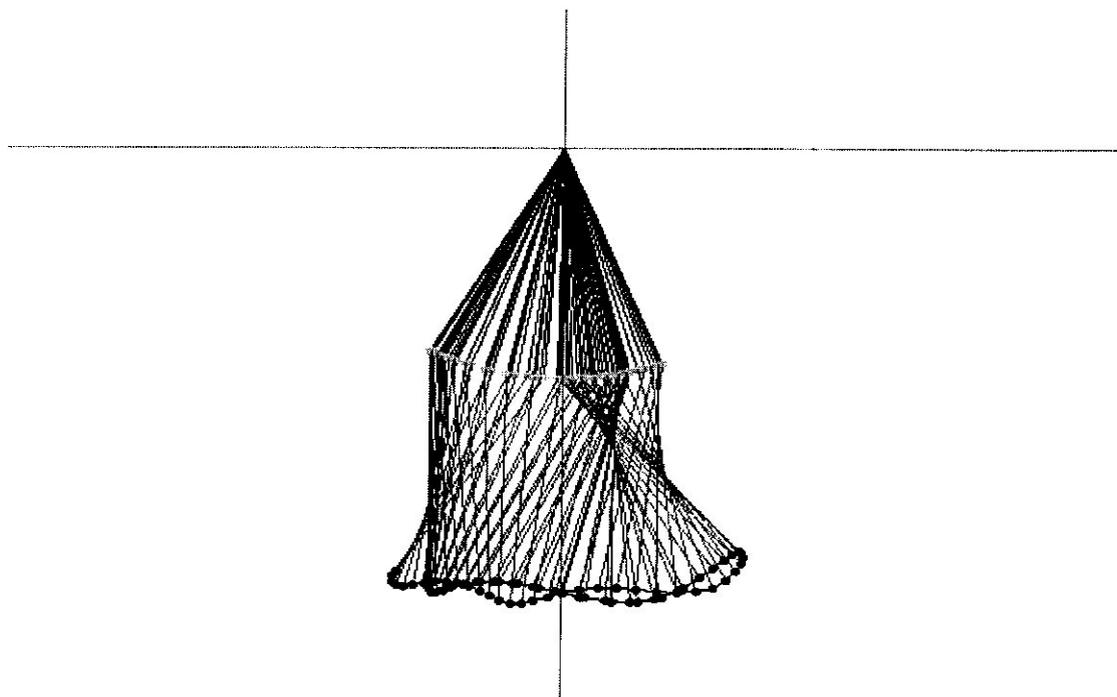


Fig. III.3 Illustration dynamique avec de petits élongations[8]

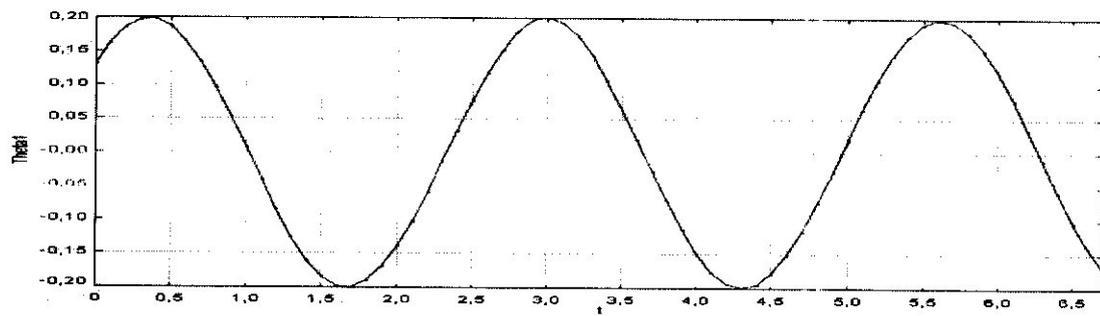


Fig.III.4 Variation de $\theta_1(t)$ avec le temps t

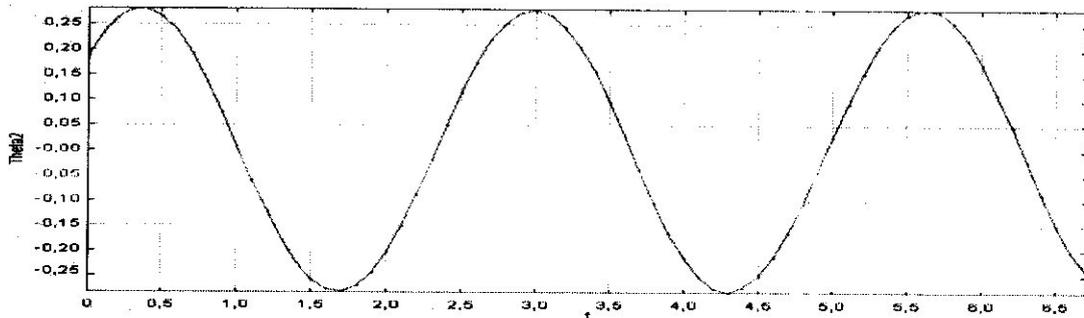


Fig.III.5 Variation de $\theta_2(t)$ avec le temps t

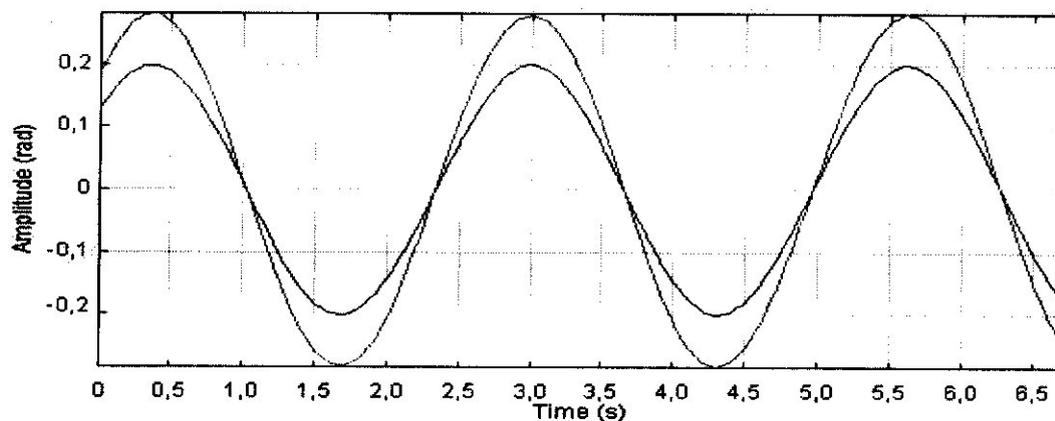


Fig.III.6 Différence de amplitude entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

III.3.3 Description du programme utilisé pour résoudre ces équations:

Nous avons écrit un programme qui utilise la méthode de Runge-Kutta pour résoudre les équations. Ce programme a été réalisé en Maple. Il est entièrement graphique. Donc on peut ajuster facilement les paramètres avec la souris et visualiser les résultats sous forme de graphiques.

Le programme est présenté en annexe B.

III.4 Mouvement à la basse énergie :

III.4.1 Pour de petits élongations :

Pour la petite élongation le mouvement du pendule est presque périodique qui nous également observé dans l'ordinateur. Est présenté en annexe C.

Pour la simulation dans l'ordinateur nous prend comme paramètres pour les masses et la longueur $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 1$ et pour l'attraction universelle $g = 9.81$. En outre les vitesses initiales sont fixées par zéro. Ces paramètres durent au-dessus de la simulation de trou. L'exposition suivante d'images la régularité que nous avons vue par une élongation de $\theta_1 = 0.131 \text{ rad}$ et $\theta_2 = 1.87 \text{ rad}$

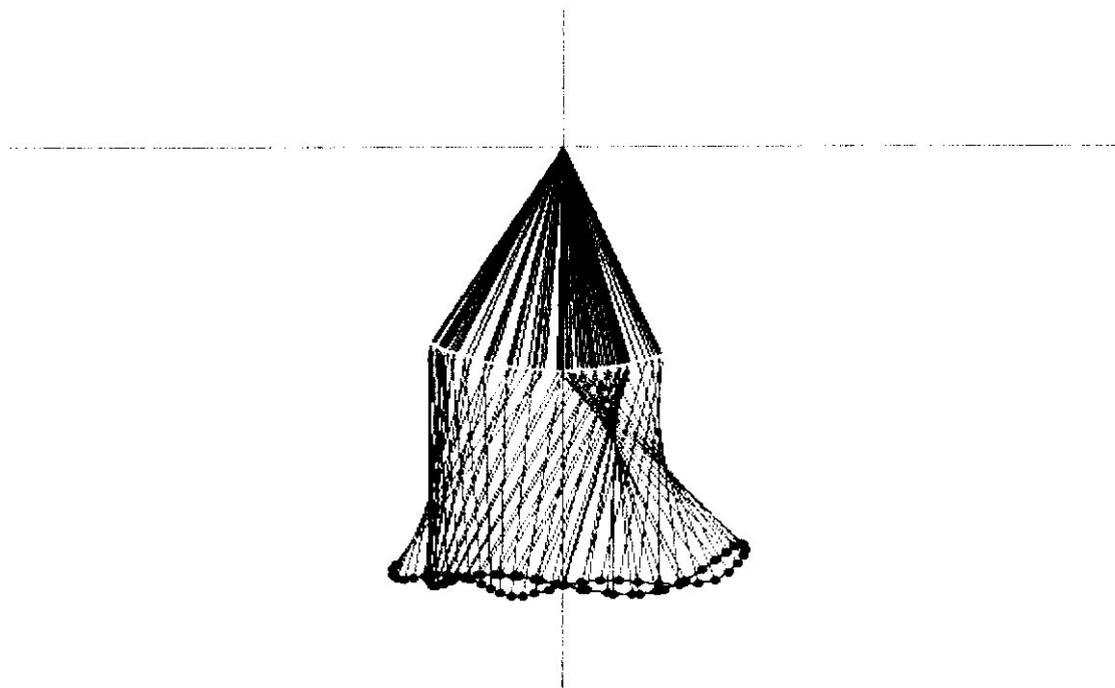


Fig. III.3 Illustration dynamique avec de petits élongations[8]

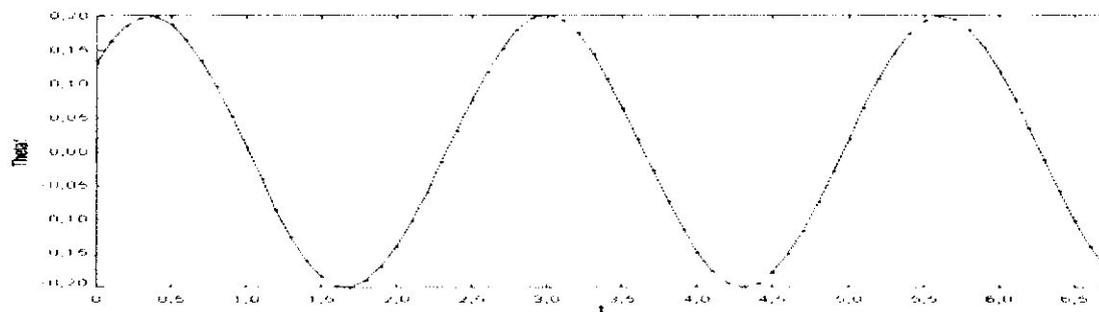


Fig.III.4 Variation de $\theta_1(t)$ avec le temps t

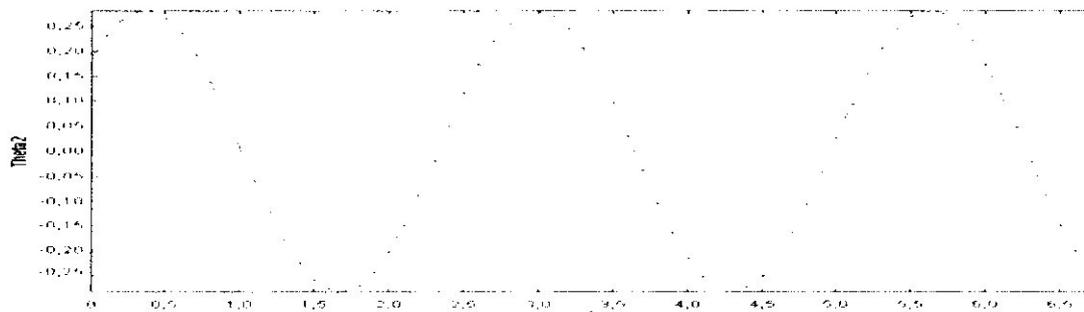


Fig.III.5 Variation de $\theta_2(t)$ avec le temps t

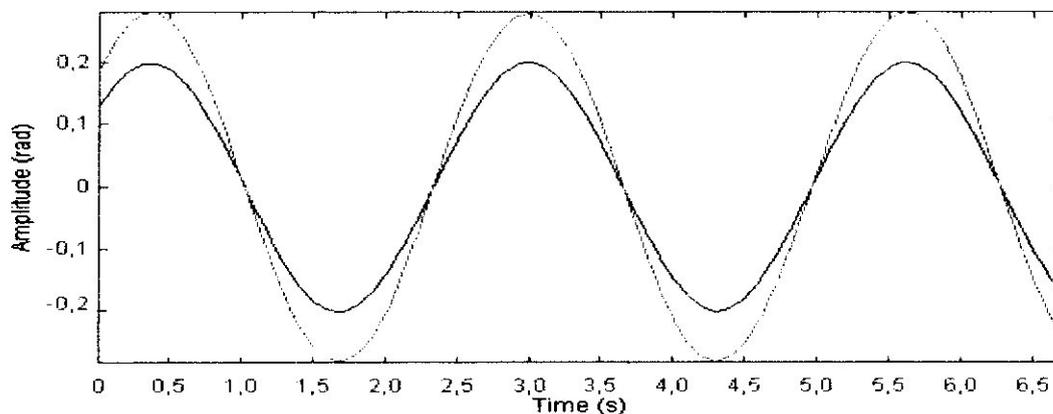


Fig.III.6 Différence de amplitude entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

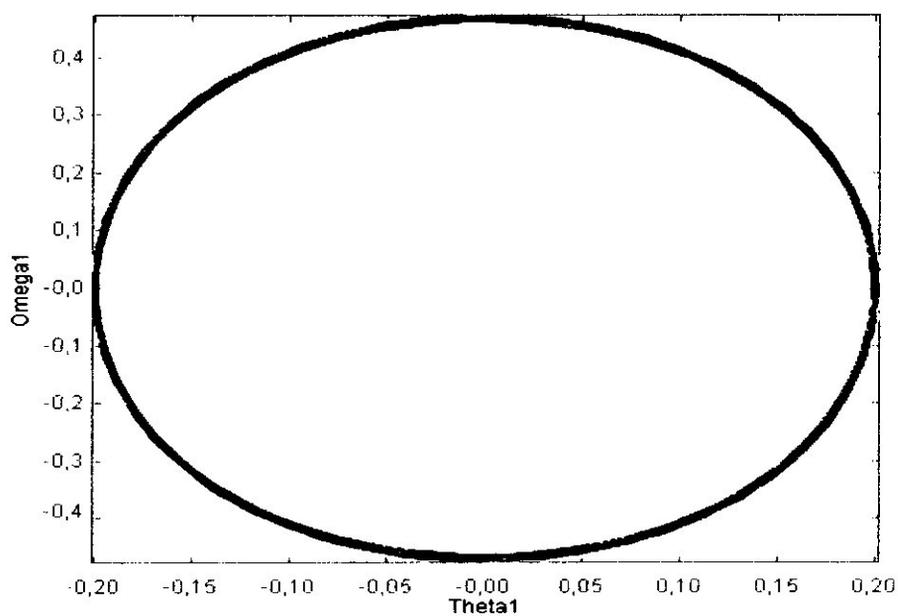


Fig .III.7 Portrait de phase de pendule 1

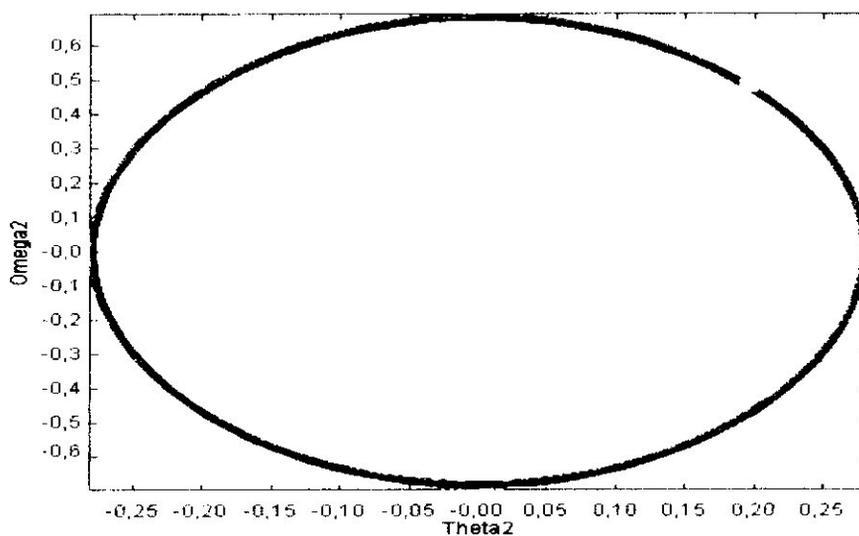


Fig .III.8 Portrait de phase de pendule 2

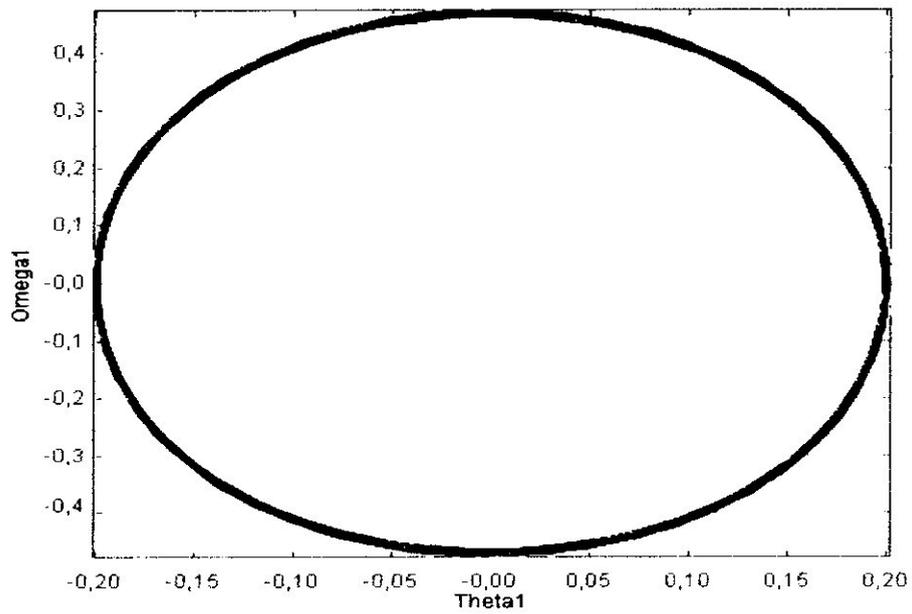


Fig .III.7 Portrait de phase de pendule 1

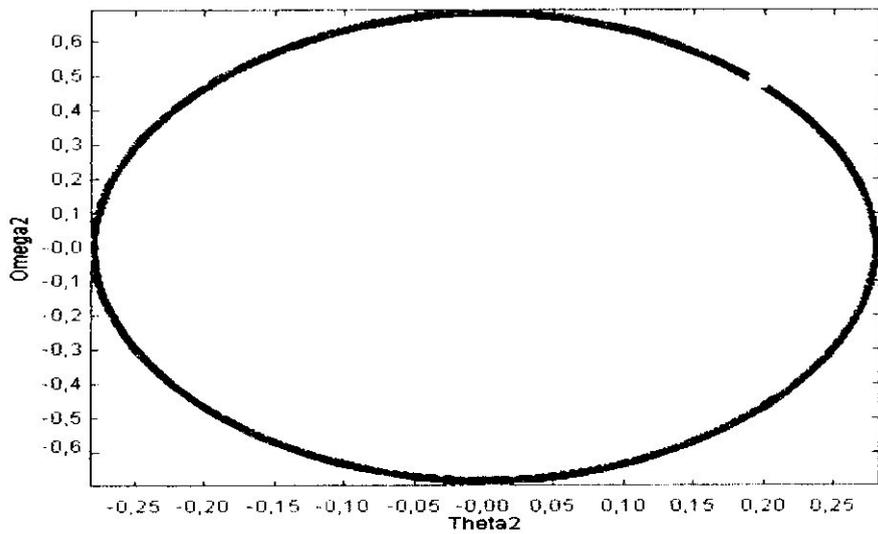


Fig .III.8 Portrait de phase de pendule 2

III.5 Mouvement à la haute énergie :

III.5.1 Pour de grande élongations :

Par une plus grande élongation le double pendule déplace chaotique.
nous avons observé les cas suivants par une première élongation de $\theta_1 = 1.5$
et $\theta_2 = 1.19$

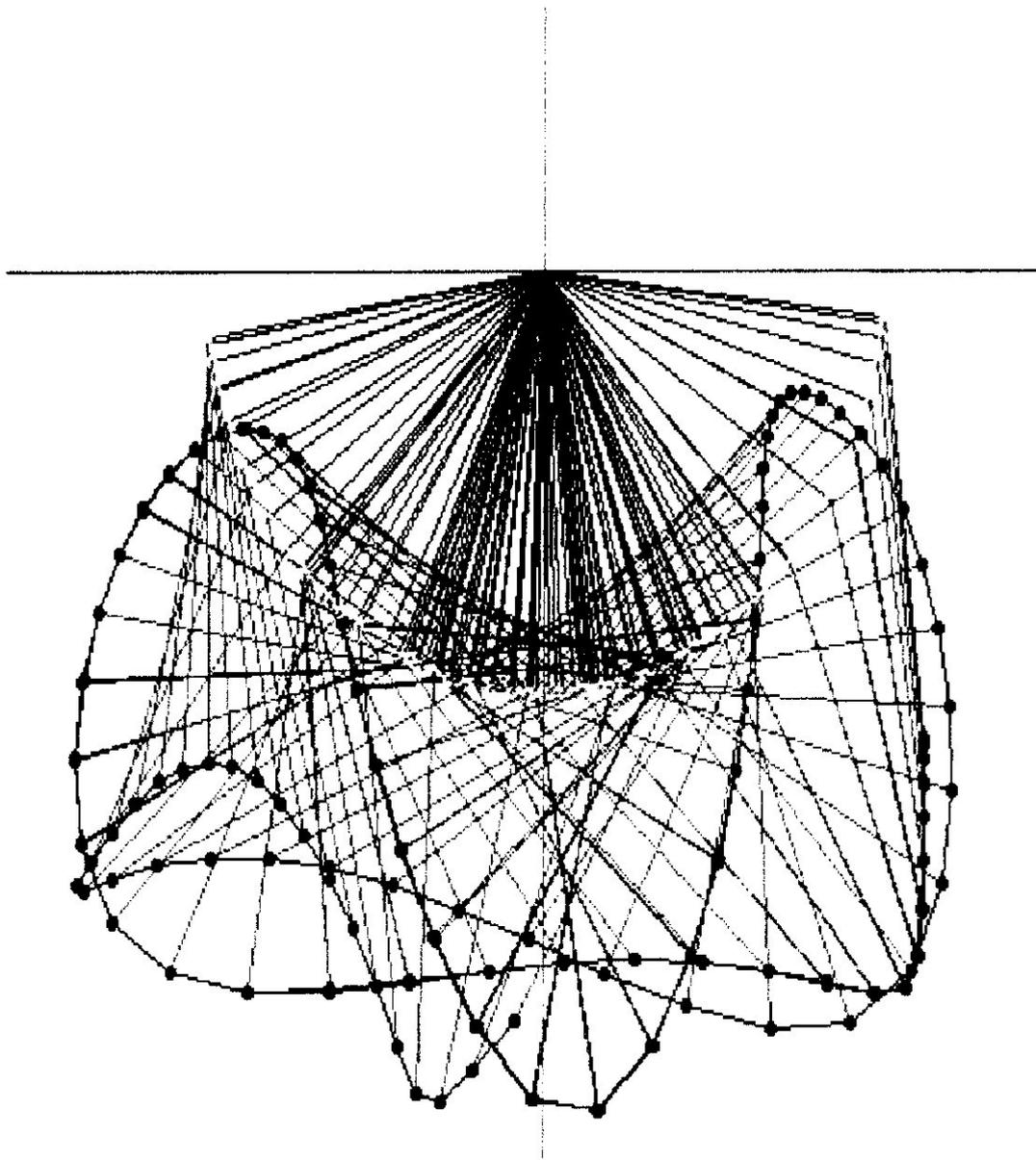
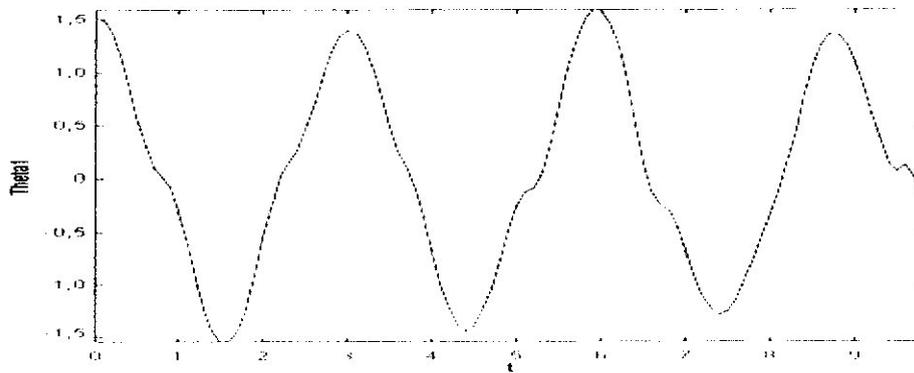
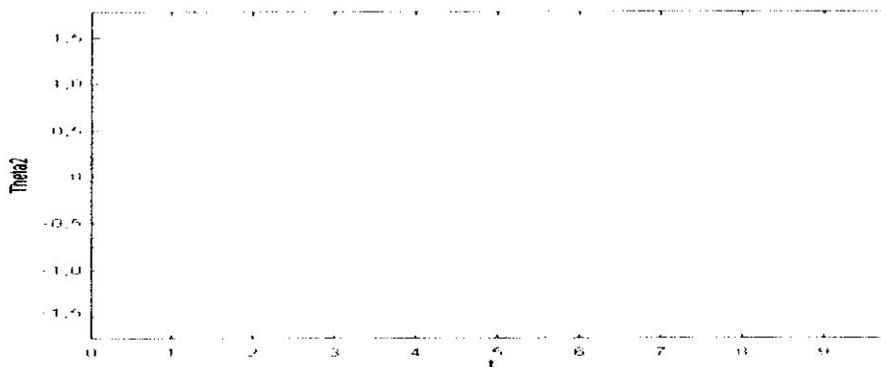
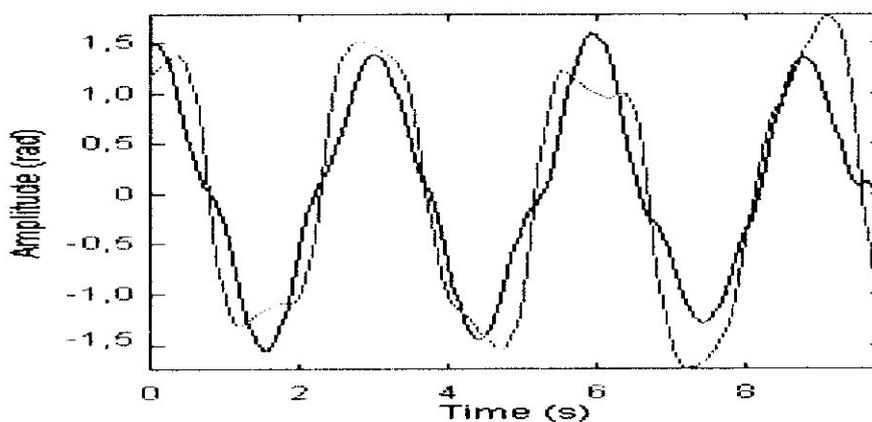


Fig.III.9 Illustration dynamique avec de haute élongations[8]

Fig .III.10 Variation de $\theta_1(t)$ avec le temps tFig .III.11 Variation de $\theta_2(t)$ avec le temps tFig.III.12 Différence de amplitude entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

Insistons sur le fait que le mouvement du pendule double dépend très fort des conditions initiales. Si on modifie légèrement les conditions initiales, le mouvement du pendule change très fort. Ceci a entraîné des difficultés lors des calculs numériques. Il a parfois fallu modifier légèrement (c'est-à-dire dans la fourchette des erreurs commises lors des mesures) les valeurs des paramètres pour obtenir la courbe attendue.

III.6.2 Dynamiques générale du double pendule et section de Poincaré

Dynamiques générale du pendule double peut être étudiée en analysant l'espace de phase pour des valeurs croissantes de toute l'énergie. L'espace de phase du pendule est tridimensionnel . (il y a quatre coordonnées , $\dot{\theta}_1$, θ_1 , $\dot{\theta}_2$ et θ_2 mais on peut éliminer un de ces derniers parce que de l'énergie est conservée.)

Les orbites périodiques produisent un ensemble fini de points dans la section de Poincaré , les orbites quasi-périodiques produisent une courbe continue, et les orbites chaotiques ont comme conséquence une dispersion des points dans une région énergétiquement accessible.

Nous employons la conservation de l'énergie pour éliminer $\dot{\theta}_2$ et choisir le plan de Poincaré pour être $\theta_2 = 0$. plan de poincaré ($\theta_1, \dot{\theta}_1$)

Les résultats : on utilise simulateur en java est présenté en annexe C.

Pour E = 5 joules , à cette basse énergie il n'y a aucune trajectoire chaotique . Le mouvement du pendule est régulier (périodique et quasi-périodique) aux valeurs basses de sa énergie totale. [5][7]

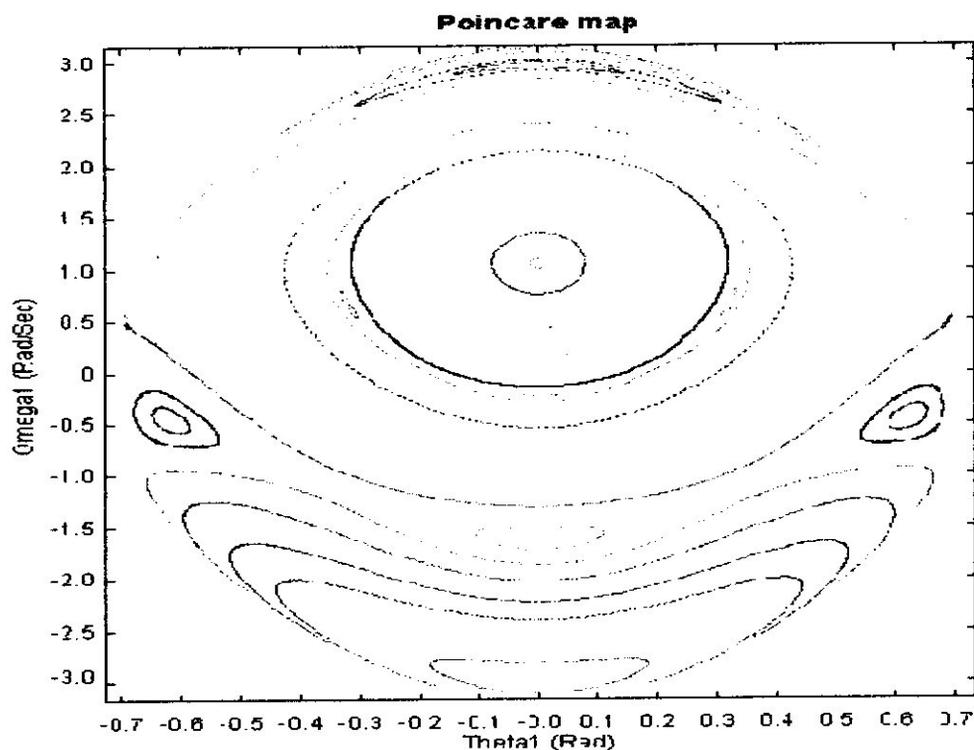


Fig.III.16 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 5 Joules

Pour $E = 8$ joules

Ici il y a un certain présent de chaos, mais la plupart des états sont toujours périodiques

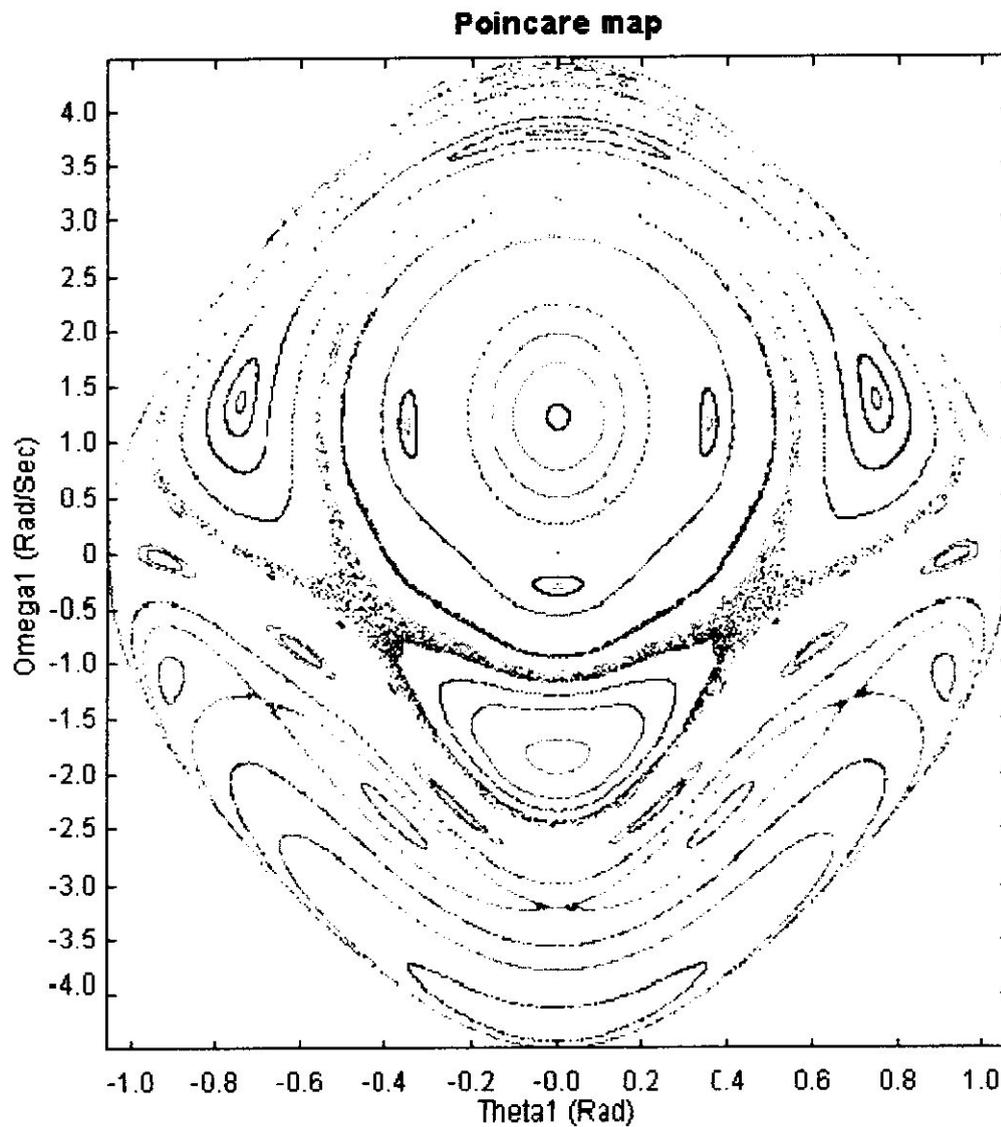


Fig.III.17 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 8 Joules

Pour $E = 15$ joules

Section de Poincaré pour le total d'énergie = 15 joules . La plupart des états permis sur cette carte donnent la trajectoire chaotique . Quelques états périodiques agissent en tant qu'attracteurs au mouvement chaotique comme montrés par les points roses

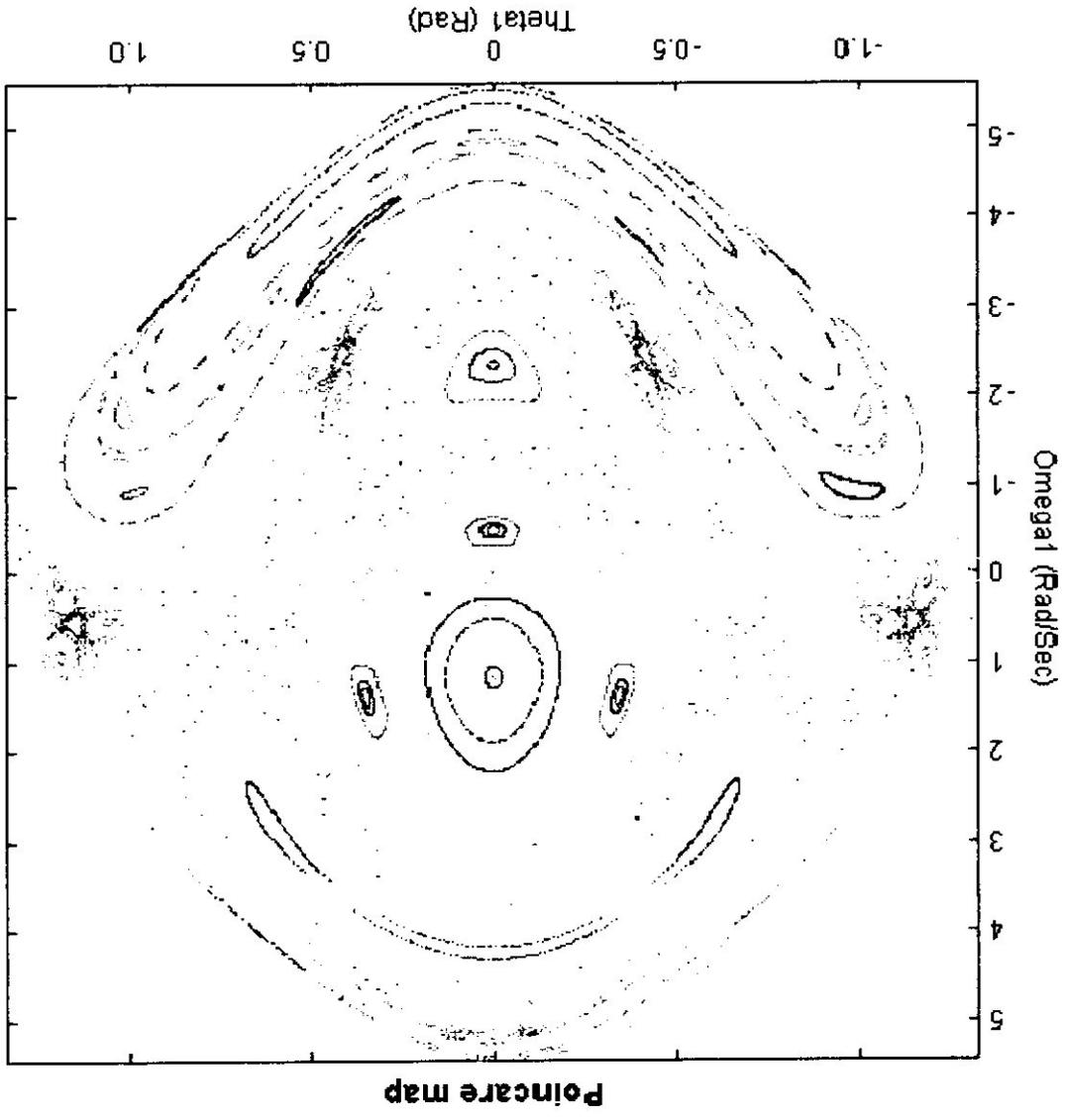


Fig. III.18 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 15 Joules

Pour $E = 75$ joules

la taille de la région chaotique augmente avec la perte d'orbites régulières,

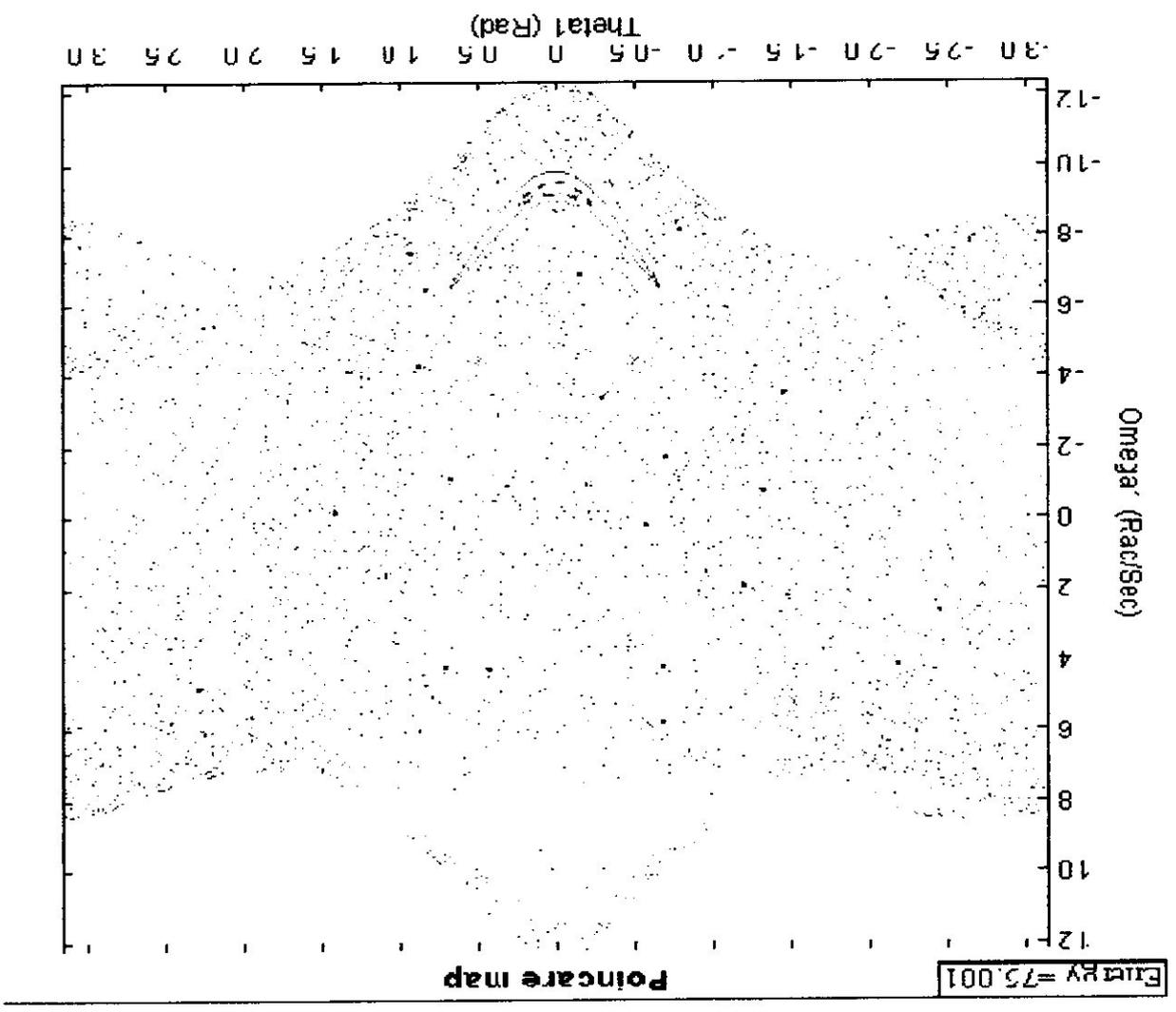


Fig.III.19 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 75 Joules

Pour $E = 75$ joules

la taille de la région chaotique augmente avec la perte d'orbites régulières,

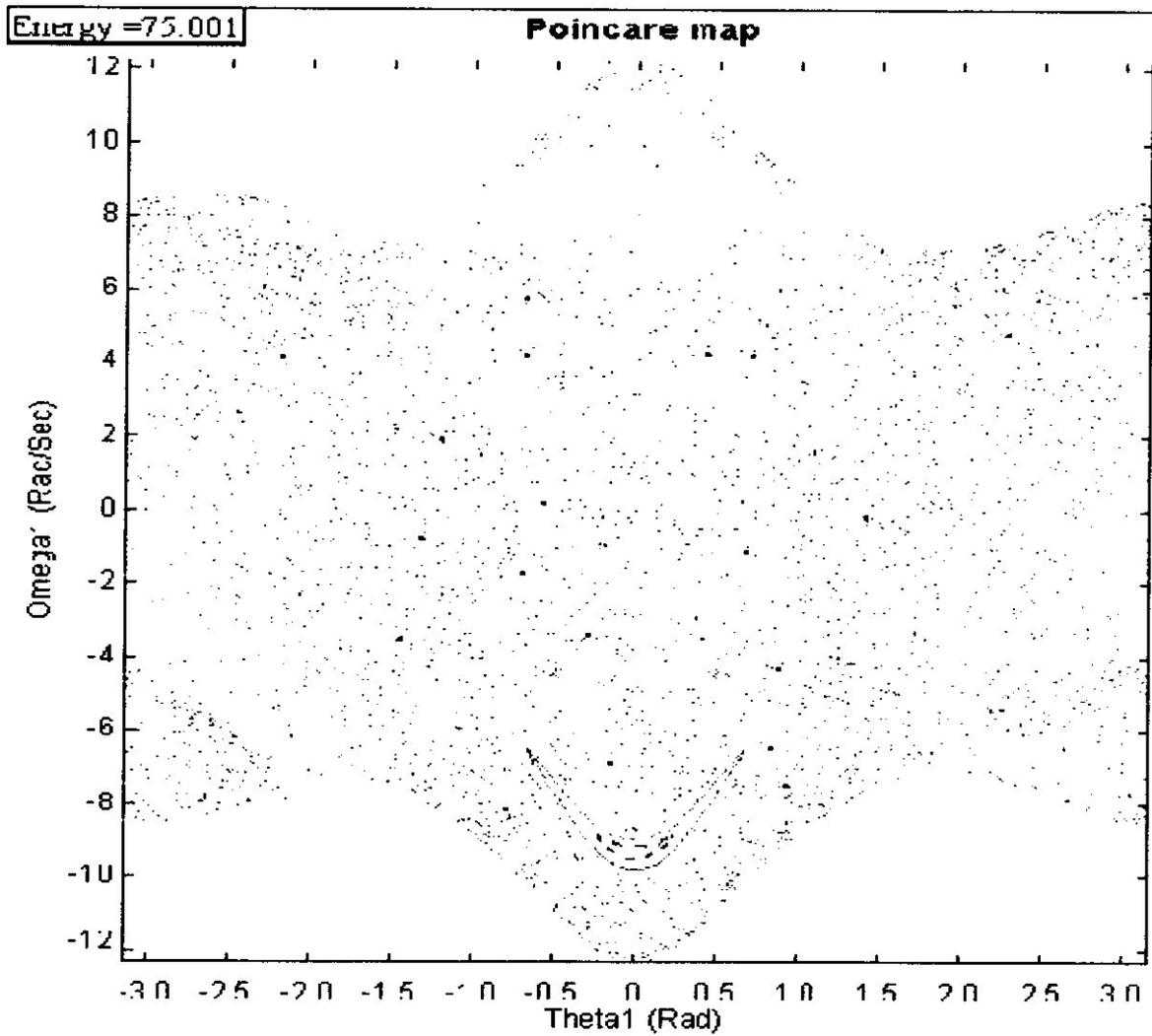


Fig.III.19 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 75 Joules

Pour $E = 15$ joules

Section de Poincaré pour le total d'énergie = 15 Joules . La plupart des états permis sur cette carte donnent la trajectoire chaotique . Quelques états périodiques agissent en tant qu'attracteurs au mouvement chaotique comme montrés par les points roses

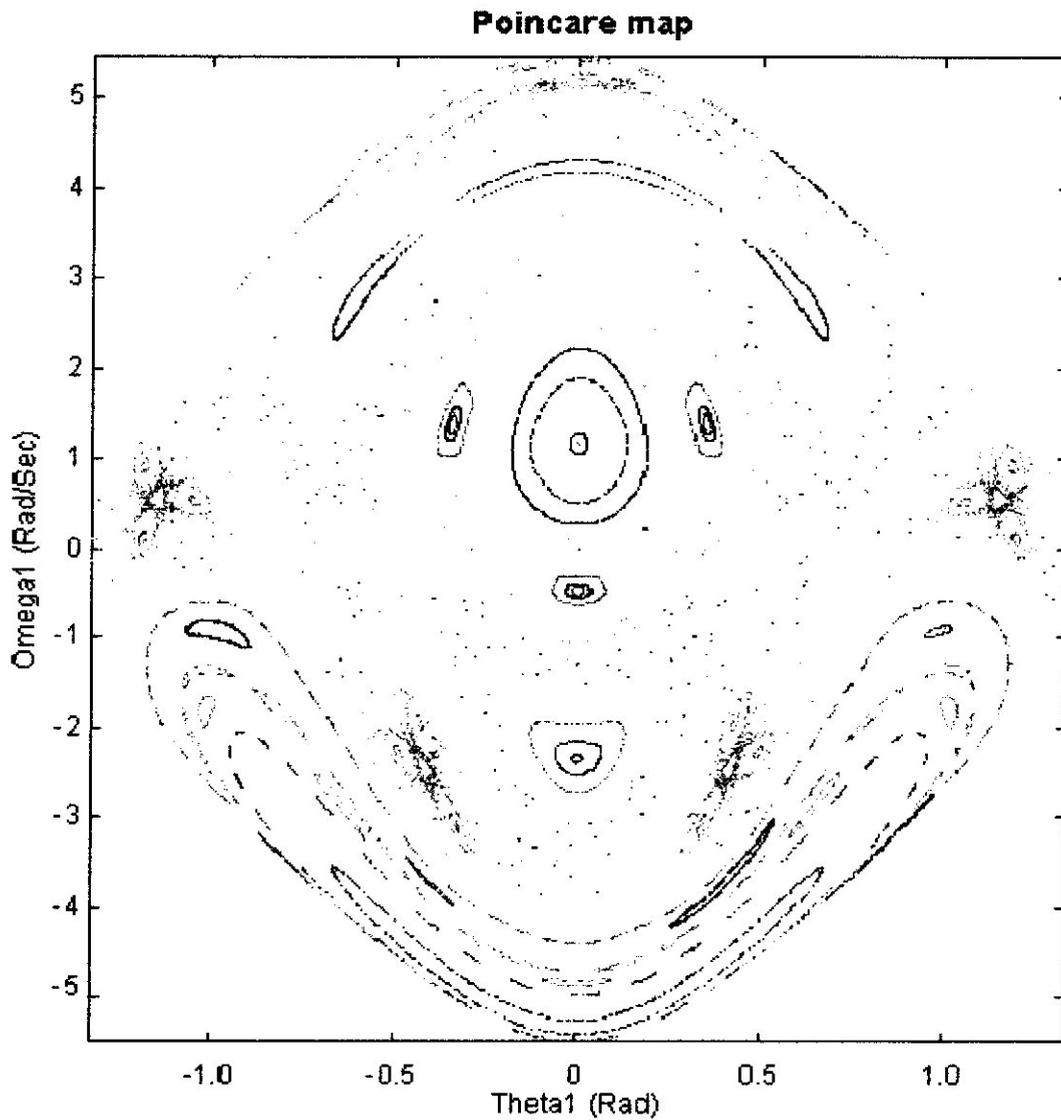


Fig .III.18 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 15 Joules

Pour $E = 8$ joules

Ici il y a un certain présent de chaos, mais la plupart des états sont toujours périodiques

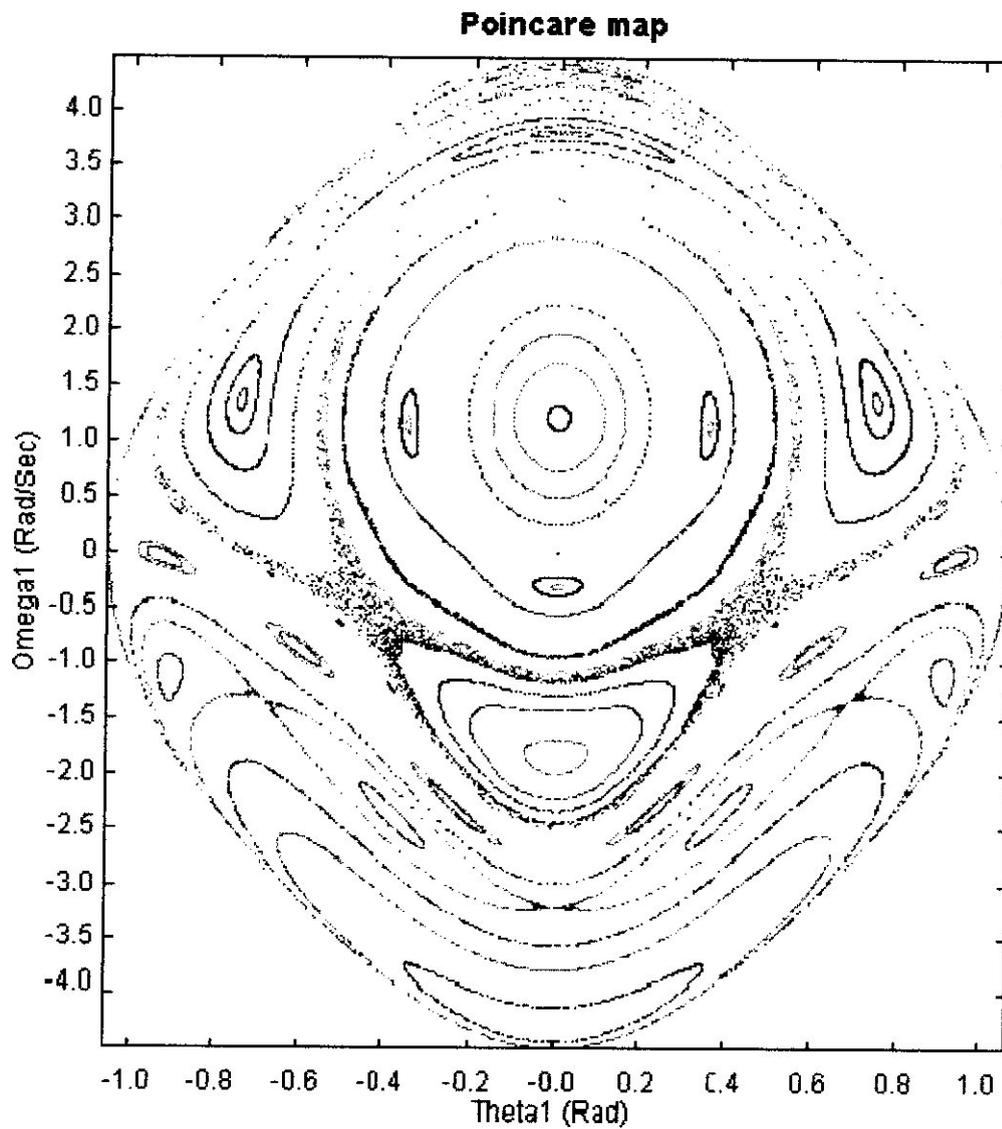


Fig.III.17 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 8 Joules

III.6.2 Dynamiques générale du double pendule et section de Poincaré

Dynamiques générale du pendule double peut être étudiée en analysant l'espace de phase pour des valeurs croissantes de toute l'énergie. L'espace de phase du pendule est tridimensionnel . (il y a quatre coordonnées , $\dot{\theta}_1$, θ_1 , $\dot{\theta}_2$ et θ_2 mais on peut éliminer un de ces derniers parce que de l'énergie est conservée.)

Les orbites périodiques produisent un ensemble fini de points dans la section de Poincaré , les orbites quasi-périodiques produisent une courbe continue, et les orbites chaotiques ont comme conséquence une dispersion des points dans une région énergétiquement accessible.

Nous employons la conservation de l'énergie pour éliminer $\dot{\theta}_2$ et choisir le plan de Poincaré pour être $\theta_2 = 0$. plan de poincaré $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$

Les résultats : on utilise simulateur en java est présenté en annexe C.

Pour E = 5 joules , à cette basse énergie il n'y a aucune trajectoire chaotique . Le mouvement du pendule est régulier (périodique et quasi-périodique) aux valeurs basses de sa énergie totale. [5][7]

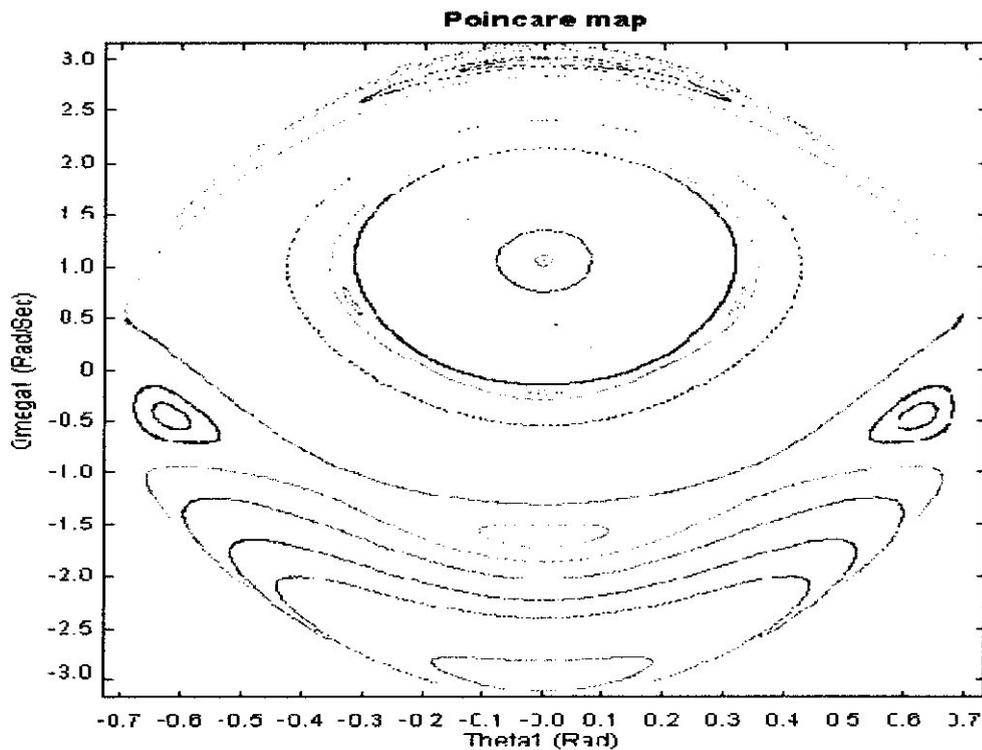


Fig.III.16 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 5 Joules



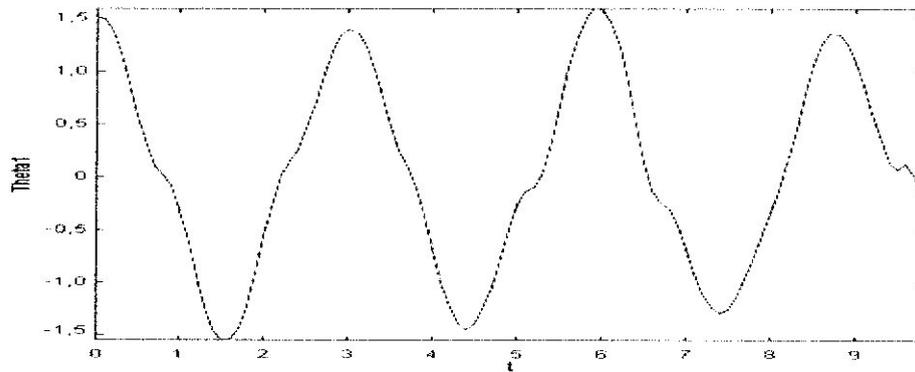


Fig.III.10 Variation de $\theta_1(t)$ avec le temps t

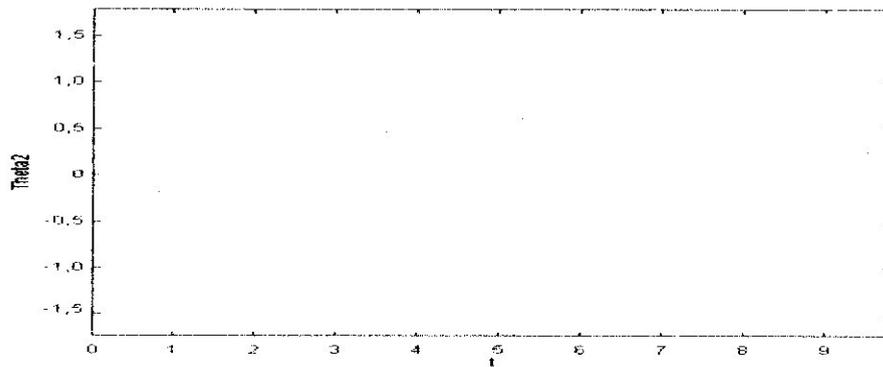


Fig.III.11 Variation de $\theta_2(t)$ avec le temps t

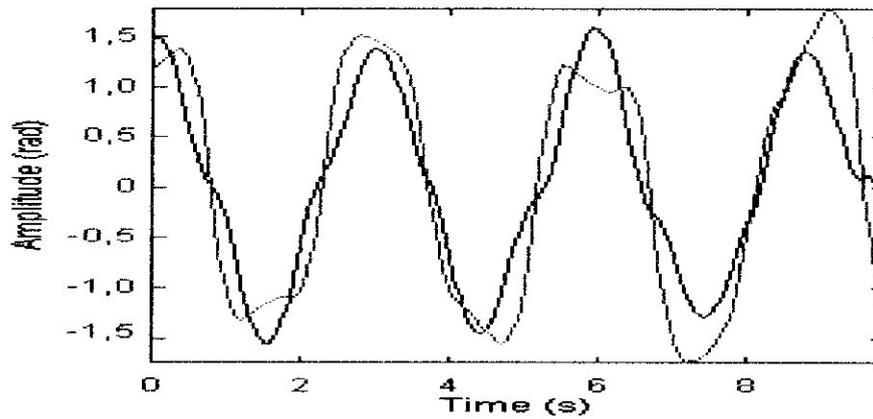


Fig.III.12 Différence de amplitude entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

Pour $E = 5000$ joules

Le mouvement du pendule devient régulier aux valeurs très élevées de E

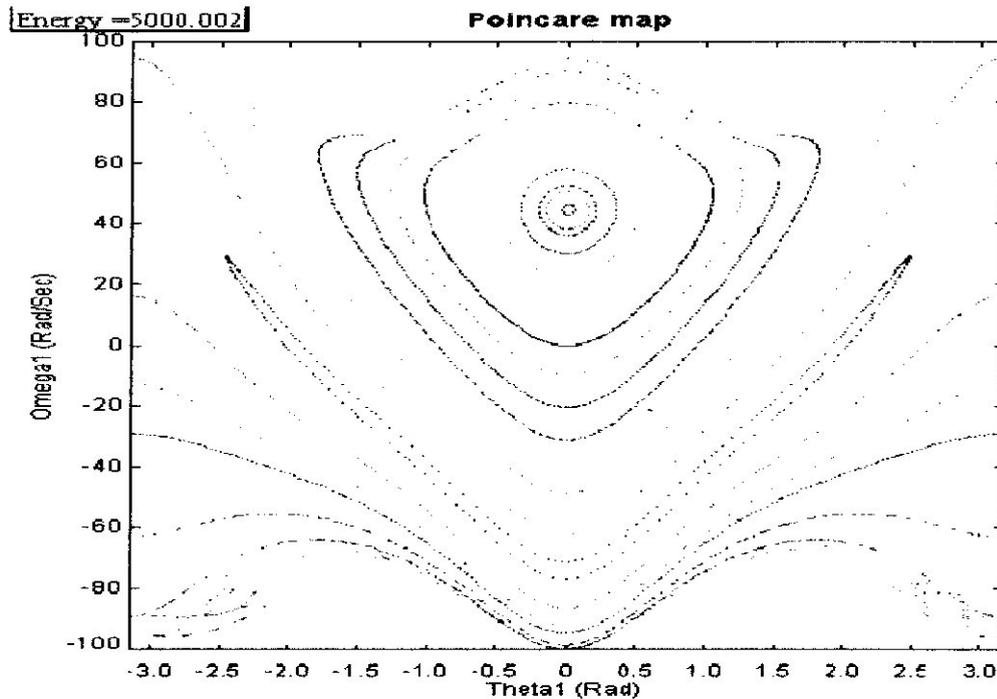


Fig .III.20 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 5000 Joules

III .7 Conclusion :

Le double pendule est un système conservateur, ce qui signifie que l'énergie mécanique totale du système est une constante.

Si l'énergie est assez faible, le mouvement est pratiquement périodique. Si l'énergie est assez grande, le mouvement devient chaotique. Cependant, afin d'obtenir une dynamique chaotique, il faut choisir soigneusement les conditions initiales parce que non toutes les valeurs initiales produiraient le chaos.

Pour $E = 5000$ joules

Le mouvement du pendule devient régulier aux valeurs très élevées de E

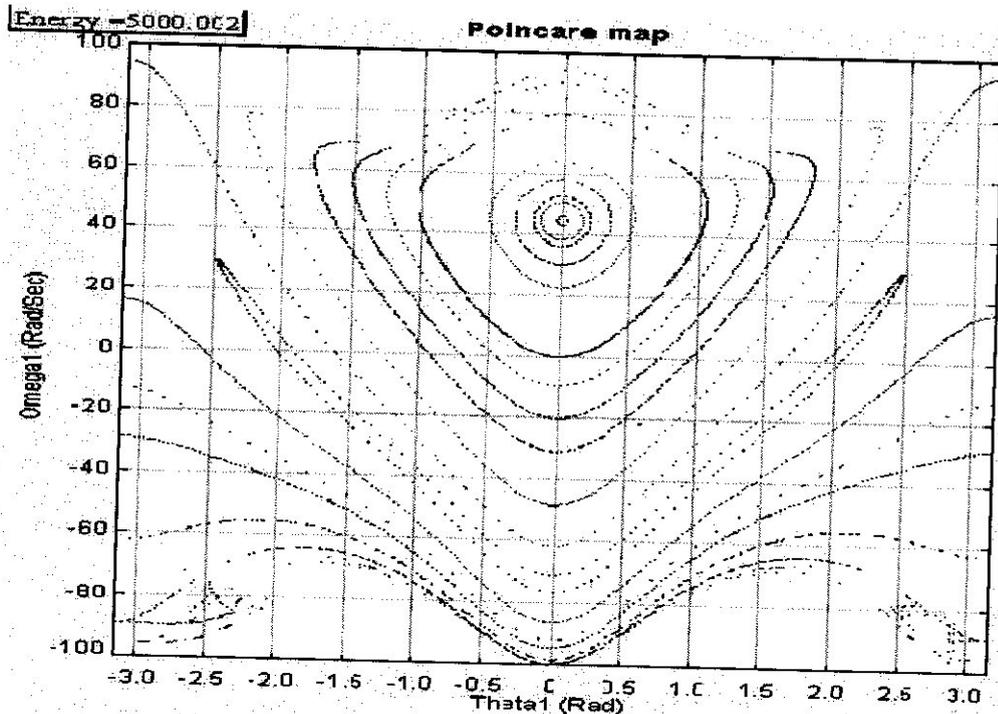


Fig. III.20 Section de Poincaré pour le total d'énergie = 5000 Joules

III.7 Conclusion :

Le double pendule est un système conservateur, ce qui signifie que l'énergie mécanique totale du système est une constante.

Si l'énergie est assez faible, le mouvement est pratiquement périodique. Si l'énergie est assez grande, le mouvement devient chaotique. Cependant, afin d'obtenir une dynamique chaotique, il faut choisir soigneusement les conditions initiales parce que non toutes les valeurs initiales produiraient le chaos.



Conclusion générale

Conclusion générale :

L'un des problèmes les plus importants des systèmes dynamiques non-linéaires est l'apparition de comportements chaotiques. Comme nous avons vu dans notre travail, la théorie du chaos est l'une des méthodes les plus utilisées pour étudier la stabilité des systèmes non-linéaires. Nous constatons que ce comportement, stable ou instable, est lié à la fois à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie.

Cependant, tous les systèmes non-linéaires ne sont pas réguliers, comme nous avons remarqué dans le deuxième chapitre, il nous est possible de dégager les conditions nécessaires pour observer des trajectoires chaotiques. Lorsqu'il n'existe pas toujours de solutions analytiques aux trajectoires calculées dans l'espace de phase, la méthode d'analyse des systèmes dans le plan de phase s'applique de façon générale à tout système décrit par un ensemble d'équations différentielles du second ordre. Cette méthode connue depuis longtemps, connaît un regain d'intérêt lié aux performances des calculateurs actuels qui rendent possible le calcul des trajectoires solutions par une intégration numérique.

Le chaos s'observe cependant dans bon nombres de systèmes physiques ou biologiques. Si on avait à trouver un point commun à la dynamique de ces systèmes si divers, ce serait leur grande sensibilité par rapport aux conditions initiales, ce qui signifie qu'une minuscule différence entre deux solutions tend à s'amplifier avec le temps. Notre étude du chaos s'est limité ici à un système physique très simple, soit le double pendule.

Le double pendule a été utilisé avec succès, pour modéliser un comportement complexe dans les systèmes dynamiques non-linéaires. La simulation de ce double pendule par la méthode de la section de Poincaré montre que ce système est stable (avec un mouvement périodique), lorsque que l'énergie mécanique totale est assez faible. Si l'énergie est assez grande, le système sera instable (le mouvement est chaotique). Un des avantages de la méthode est que l'information obtenue sur le système dynamique est que les orbites périodiques produisent un ensemble fini de points dans la section de Poincaré, les orbites quasi-périodiques produisent une courbe continue, et les orbites chaotiques ont comme conséquence une dispersion des points dans une région énergétiquement accessible.



Bibliographie

- [16] <http://www.worldscibooks.com/physics/7861.pdf>, "**The Chaotic Pendulum**".
- [17] H. Nagashima and Y. Baba, "**Introduction to chaos**", IOP Publishing, 1999.
- [18] M. Tabor, "**Chaos and Integrability in nonlinear .an Introduction**", John Wiley and sons, 1989.
- [19] H. Poincaré, "**sur le problème trois corps et les équations de la dynamique**", Acta math. (1890), 1-270.
- [20] E. N. Lorenz, "**Deterministic non-periodic flow**", journal of the Atmospheric sciences 20(2) 1963, 130 -141.
- [21] D. Hamilton and W. Christian, "**Chaotic of motion in the double pendulum**", <http://moodle.davidson.edu/>.
- [22] Eric Goncalvès, "**Introduction aux Systèmes Dynamiques et Chaos**", Institut National Polytechnique de Grenoble, avril 2004.
- [23] Henk Broer and Floris Takens, "**Dynamical Systems and Chaos**", March 29, 2009.

- [8] David Feldmann, “ Alexander Gorges, Andreas Müller ”, Martin Schwendke , Michael Walz, “**Oscillations**”, [http// www.chaoscope.org//](http://www.chaoscope.org/).
- [9] Thierry Dudok de Wit , “ **Physique Non-Linéaire** ”, Université d’Orléans, janvier 2012.
- [10] S. Yeung , “ **simulation of a chaotic planar double pendulum** ” , California Institute of technology ,15 .04 .1996 .
- [11] <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>, Double Pendulum, Eric W. Weisstein, consulté le 12 avril 2012.
- [12] http://www.physics.usyd.edu.au/~wheat/dpend_html/, Double Pendulum, Mike Wheatland, consulté le 5 mai 2012.
- [13] <http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html>, The Simple Pendulum, Daniel A. Russell, Kettering University, consulté le 23 juin 2012.
- [14] Mémoire de magistère en mathématique , Ibtissem Taïbi , “ **système dynamique non linéaires et phénomène du chaos** ”, département mathématique Université mentouri de Constantine , 29 / 06 / 2010.
- [15] Mémoire de magistère en automatique , Boudour Rima, “ **détermination La région de stabilité transitoire au sens de lypunouv d’un oscillatoire non linéaire force par l’approche graphique : application du pendule** ” , département automatique Université Ahmad Bougara - Boumerdès, 29 / 06 / 2010.

Bibliographie:

- [1] C. W. Akerlof, "**The Chaotic Motion of a Double Pendulum**", Department of Physics University of Michigan, April 12, 2010.
- [2] David Sénéchal, "**Mécanique II**", Département de physique Faculté des sciences Université de Sherbrooke, 18 décembre 2010.
- [3] [http:// www .juliensalort.org/Scolarité/Chaos Physique/Chaos.html](http://www.juliensalort.org/Scolarité/Chaos%20Physique/Chaos.html) , consulté le 25 juin 2012.
- [4] Lumay G. M.F, "**Etude expérimentale du pendule Simple**", double et inversé", 2002 – 2003.
- [5] Tomasz Stachowiak et Toshio Okada, "**A numerical analysis of chaos the double pendulum**", University of Agriculture and Technology, Naka-machi, Koganei-shi, Tokyo 184-8588, Japan , 10 August 2005.
- [6] M. MAMODE, "**A propos du pendule simple**", <http://www.univ-reunion.fr/~mamode>.
- [7] M. Z. Rafat , M. S. Wheatland , et T. R. Bedding, "**Dynamics of a Double pendulum with distributed mass** ", University of Sydney, Australia , 2006 .

- [16] <http://www.worldscibooks.com/physics/7861.pdf>, **“The Chaotic Pendulum”**.
- [17] H. Nagashima and Y. Baba, **”Introduction to chaos “**, IOP Publishing, 1999.
- [18] M. Tabor, **“Chaos and Integrality in nonlinear .an Introduction”**, John Wiley and sons, 1989.
- [19] H. Poincaré, **“sur le problème trois corps et les équations de la dynamique “**, Acta math. (1890), 1-270.
- [20] E .N. Lorenz, **“Deterministic non-periodic flow”**, journal of the Atmospheric sciences 20(2) 1963 ,130 -141.
- [21] D. Hamilton and W. Christian, **“ Chaotic of motion in the double pendulum”**, [http:// moodle.davidson.edu /](http://moodle.davidson.edu/).
- [22] Eric Goncalvès, **“Introduction aux Systèmes Dynamiques et Chaos”**, Institut National Polytechnique de Grenoble , avril 2004 .
- [23] Henk Broer and Floris Takens, **“Dynamical Systems and Chaos”**, March 29, 2009.



Annexe

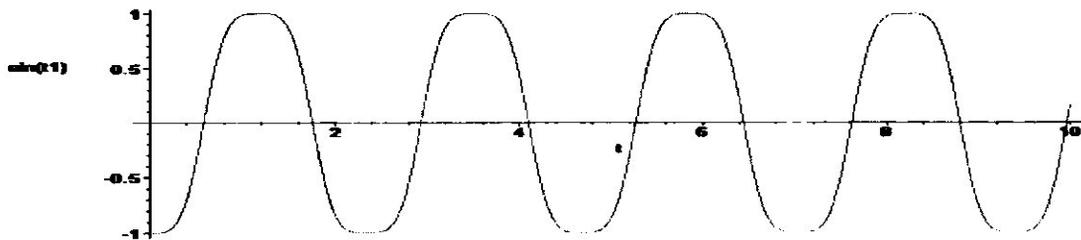
Annex A:

Pendule simple:

```

> restart;
> with(DEtools):with(plots):
> P:=m1*l1*g*(1-cos(t1(t)));
> x1:=l1*sin(t1(t));y1:=l1*(1-cos(t1(t)));
> K:=simplify(1/2*m1*(diff(x1,t)^2+diff(y1,t)^2));
> L:=K-P;
> LL:=subs({diff(t1(t),t)=a1},L);
> eq1:=subs({diff(t1(t),t)=a1(t)},diff(subs({a1=a1(t)},diff(LL,a1)),t))-
subs({a1=a1(t),t1=t1(t)},diff(subs({t1(t)=t1},LL),t1));
> eq3:=diff(t1(t),t)-a1(t);
> l1:=1.;m1:=1.;g:=10;
> g := dsolve({eq1,eq3,t1(0)=-Pi/2,a1(0)=.05},
{t1(t),a1(t)}, type=numeric, method=rkf45, maxfun=-1, output=procedurelist);
> g(0);
> g(1.);
> T:=10.;
> odeplot(g, [t,sin(t1(t))], 0..T, numpoints=500);

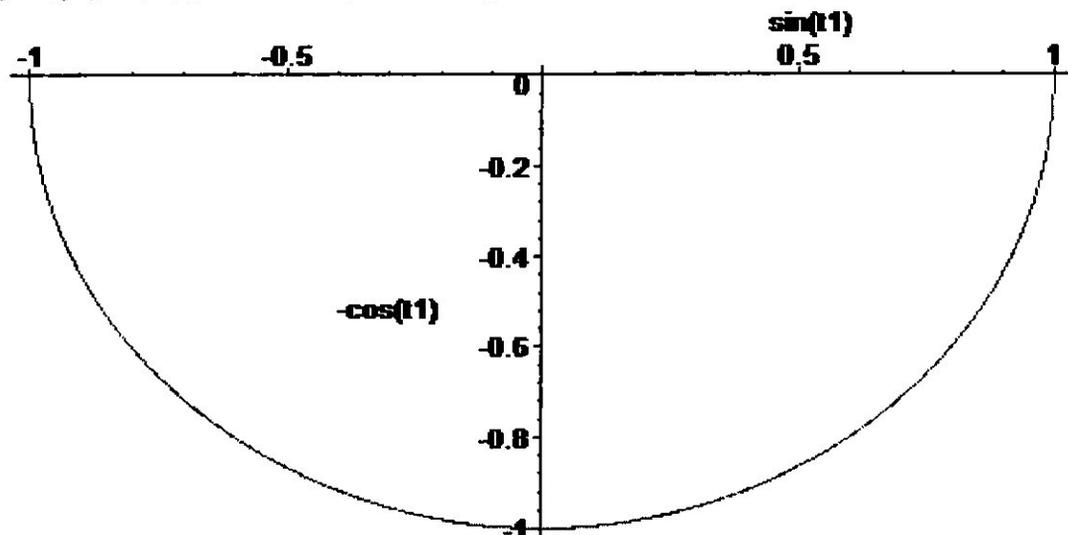
```



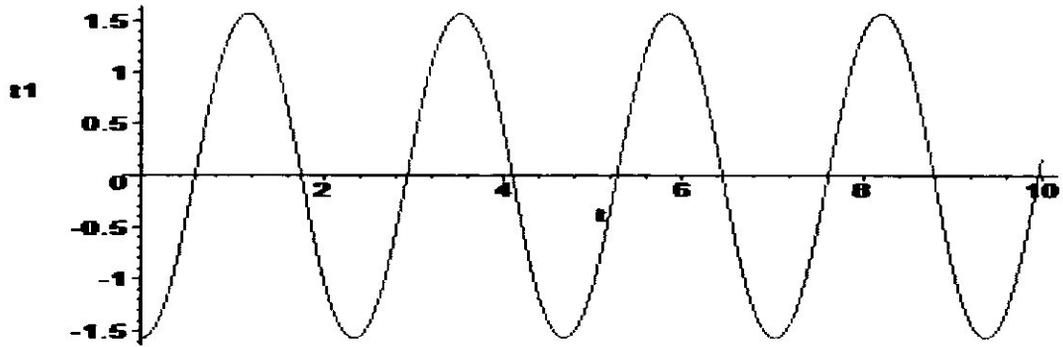
```

> odeplot(g, [sin(t1(t)), -cos(t1(t))], 0..T, numpoints=500);

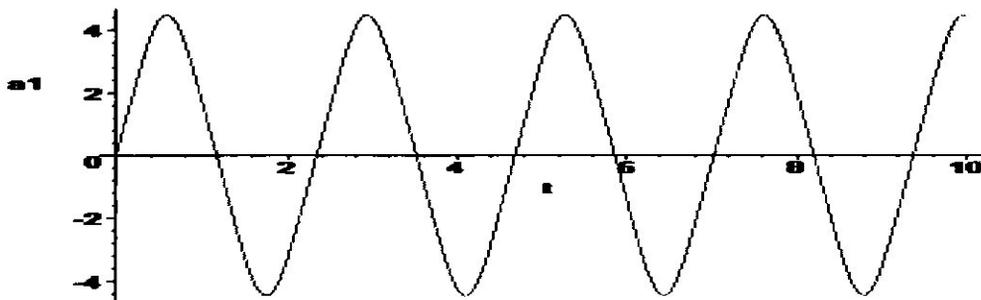
```



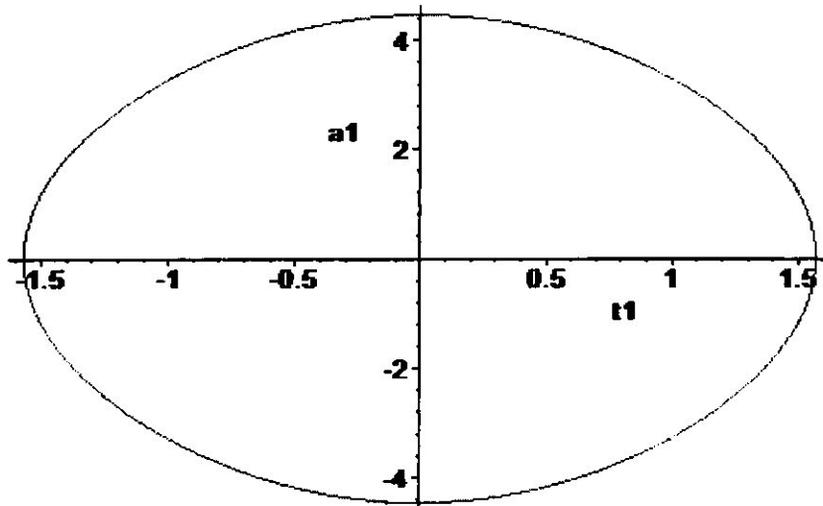
```
> odeplot(g, [t,t1(t)], 0..T, numpoints=500);
```



```
> odeplot(g, [t,a1(t)], 0..T, numpoints=500);
```

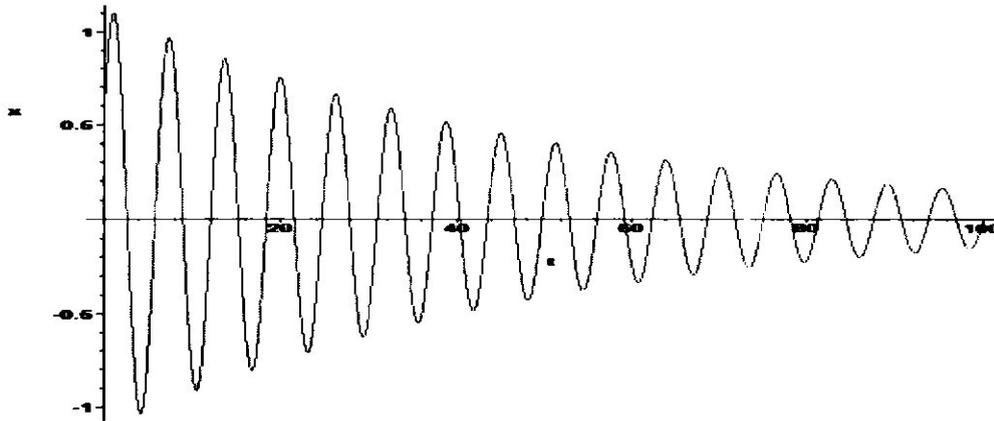


```
> odeplot(g, [t1(t),a1(t)], 0..T, numpoints=500);
```

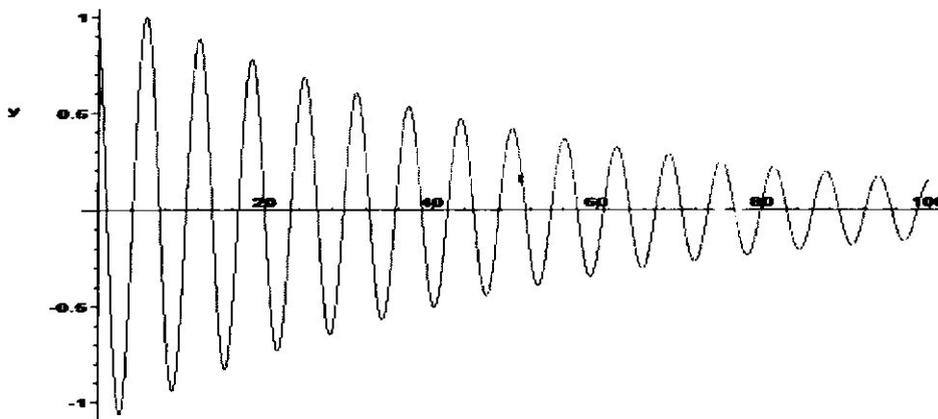


Pendule amortie:

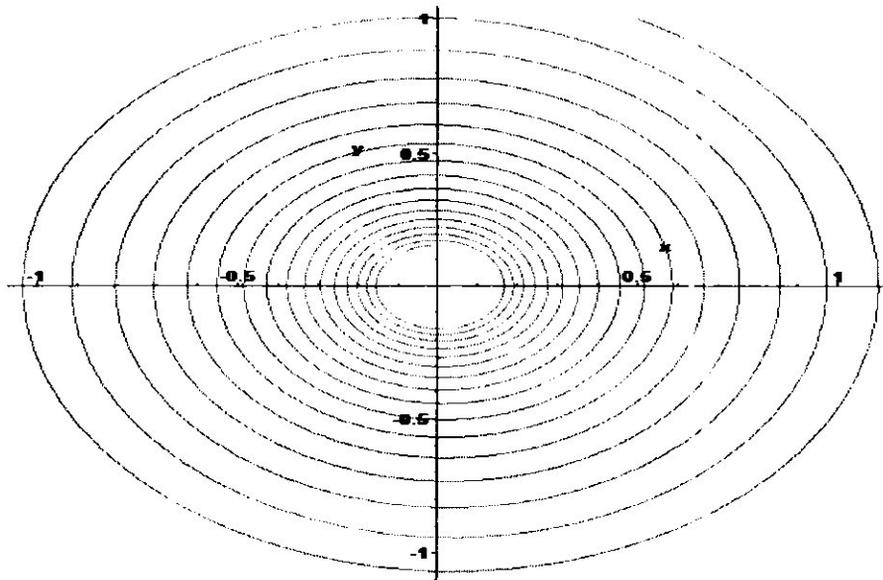
```
> restart;
> with(DEtools):with(plots):
> r:=.02:omega:=1:
> EQ1 := diff(x(t),t)-y(t);
> EQ2:= diff(y(t),t)+2*r*y(t)+omega^2*x(t);> ss := dsolve({EQ1,EQ2,x(0)=.5,y(0)=1.},
{x(t),y(t)}, type=numeric, method=rkf45, maxfun=-1, output=procedurelist):
> ss(0);
> ss(1.);
> T:=100;u:=2:num:=1000:
> odeplot(ss, [t,x(t)], 0..T, numpoints=num);
```



```
> odeplot(ss, [t,y(t)], 0..T, numpoints=num);
```

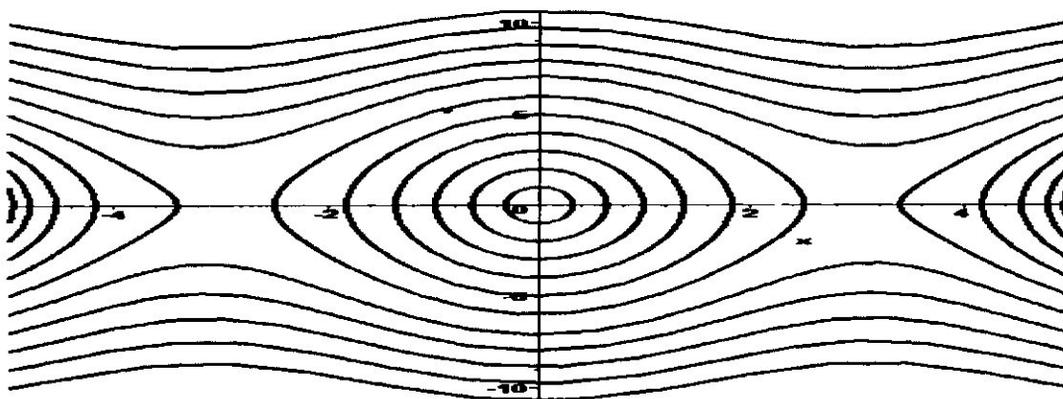


```
> odeplot(ss, [x(t),y(t)], 0..T, numpoints=num);
```



Pendule simple cas général :

```
> restart;
> with(DEtools);
> equadiff1:=diff(x(t),t$2)+10*sin(x(t))=0;
> equadiff2:=v=diff(x(t),t);
> equadiff3:=subs(diff(x(t),t)=v(t),equadiff1);
> phaseportrait([equadiff2,equadiff3],[x(t),v(t)],0..4,[seq([x(0)=-5,v(0)=i],i=-0..10),
seq([x(0)=5,v(0)=i],i=-10..0),seq([x(0)=0,v(0)=i],i=0..6)],x=-
5..5,stepsize=1.2,linecolor=BLUE,arrows=NONE);
```



Annexe B :**Double pendule :**

```

> restart;
> m1:=1;m2:=1;l1:=2;l2:=1:g:=10:
> l12:=l2/l1:om1:=sqrt(g/l1):mu2:=m2/(m1+m2):
> L:=l12;M:=mu2;K:=om1;

Digits:=40:

> F1:=(t,x,y,z,w)->-(cos(z)*L*sin(w)*y^2*M-sin(z)*L*cos(w)*y^2*M-K^2*sin(z)-
M*sin(z)^2*s
in(w)*x^2*cos(w)+M*sin(z)*sin(w)^2*K^2+M*sin(z)*sin(w)^2*cos(z)*x^2-
M*cos(z)*cos(w)^2*
sin(z)*x^2+M*cos(z)*cos(w)*sin(w)*K^2+M*cos(z)^2*cos(w)*x^2*sin(w))/(-
1+M*sin(z)^2*sin
(w)^2+2*M*sin(z)*sin(w)*cos(z)*cos(w)+M*cos(z)^2*cos(w)^2);
F2:=(t,x,y,z,w)->-(-
sin(z)*sin(w)^2*cos(z)*L*y^2*M+sin(z)^2*sin(w)*L*cos(w)*y^2*M-cos(
z)^2*cos(w)*L*sin(w)*y^2*M+cos(z)*cos(w)^2*sin(z)*L*y^2*M-
cos(z)*x^2*sin(w)+sin(z)*x^2
*cos(w)-sin(w)*K^2+sin(z)^2*sin(w)*K^2+cos(z)*cos(w)*K^2*sin(z))/L/(-
1+M*sin(z)^2*sin(
w)^2+2*M*sin(z)*sin(w)*cos(z)*cos(w)+M*cos(z)^2*cos(w)^2);
F3:=(t,x,y,z,w)->x;
F4:=(t,x,y,z,w)->y;

> n:=30000;

> t0:=0;
t1:=40;

> h:=evalf((t1-t0)/n);

> x(0):=0;
y(0):=0;
z(0):=0;
w(0):=1;

> x(0):=Pi/2;
y(0):=0;
z(0):=0;
w(0):=0;

> t(0):=t0;

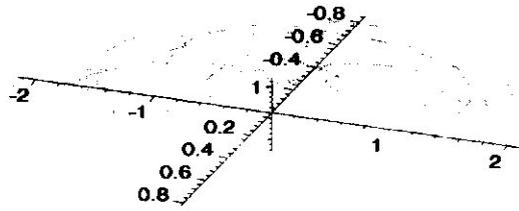
```

```

> II:=1:
> # print(0,t(0),x(0),y(0),z(0),w(0)):
for i from 0 to n-1 do
k10(i):=evalf(F1(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
k11(i):=evalf(F1(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k10(i),y(i),z(i),w(i)));
k12(i):=evalf(F1(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k11(i),y(i),z(i),w(i)));
k13(i):=evalf(F1(t(i)+h,x(i)+h*k12(i),y(i),z(i),w(i)));
k20(i):=evalf(F2(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
k21(i):=evalf(F2(t(i)+h/2,x(i),y(i)+h/2*k20(i),z(i),w(i)));
k22(i):=evalf(F2(t(i)+h/2,x(i),y(i)+h/2*k21(i),z(i),w(i)));
k23(i):=evalf(F2(t(i)+h,x(i),y(i)+h*k22(i),z(i),w(i)));
k30(i):=evalf(F3(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
k31(i):=evalf(F3(t(i)+h/2,x(i),y(i),z(i)+h/2*k30(i),w(i)));
k32(i):=evalf(F3(t(i)+h/2,x(i),y(i),z(i)+h/2*k31(i),w(i)));
k33(i):=evalf(F3(t(i)+h,x(i),y(i),z(i)+h*k32(i),w(i)));
k40(i):=evalf(F4(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
k41(i):=evalf(F4(t(i)+h/2,x(i),y(i),z(i),w(i)+h/2*k30(i)));
k42(i):=evalf(F4(t(i)+h/2,x(i),y(i),z(i),w(i)+h/2*k31(i)));
k43(i):=evalf(F4(t(i)+h,x(i),y(i),z(i),w(i)+h*k32(i)));
phi1(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)):=evalf(1/6*(k10(i)+2*k11(i)+2*k12(i)+k13(i)));
phi2(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)):=evalf(1/6*(k20(i)+2*k21(i)+2*k22(i)+k23(i)));
phi3(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)):=evalf(1/6*(k30(i)+2*k31(i)+2*k32(i)+k33(i)));
phi4(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)):=evalf(1/6*(k40(i)+2*k41(i)+2*k42(i)+k43(i)));
t(i+1):=evalf(t(i)+h);
x(i+1):=evalf(x(i)+h*phi1(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
y(i+1):=evalf(y(i)+h*phi2(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
z(i+1):=evalf(z(i)+h*phi3(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
w(i+1):=evalf(w(i)+h*phi4(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i)));
if (is(-.01 < w(i+1)) and is(w(i+1)<.01) ) then A(II):=x(i+1): B(II):=y(i+1):
C(II):=z(i+1): II:=II+1: fi:
# print(i+1,t(i+1),x(i+1),y(i+1),z(i+1),w(i+1)):
od:

> with(plots):
> points3D:= {seq([x(i),z(i),w(i)],i=0..n)}:
> pointplot3d(points3D,axes=normal, symbol=point);

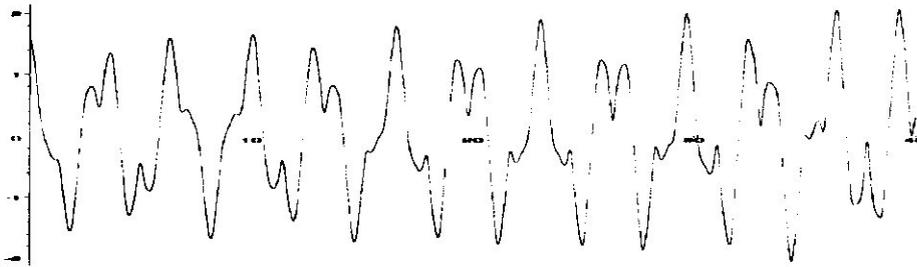
```



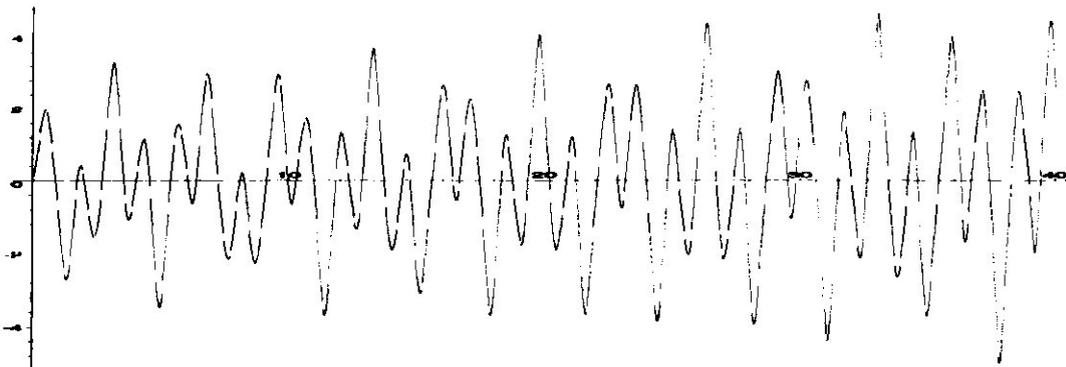
```
[x(0),y(0),z(0),w(0)];
```

```
[x(n),y(n),z(n),w(n)];
```

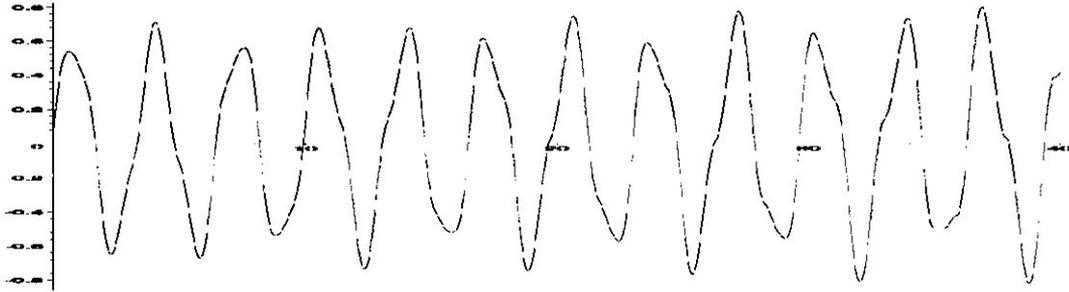
```
> pointsx:= {seq([t(i),x(i)],i=0..n)}:
  pointsy:= {seq([t(i),y(i)],i=0..n)}:
  pointsz:= {seq([t(i),z(i)],i=0..n)}:
  pointsw:= {seq([t(i),w(i)],i=0..n)}:
> pointplot(pointsx,axes=normal, symbol=point);
```



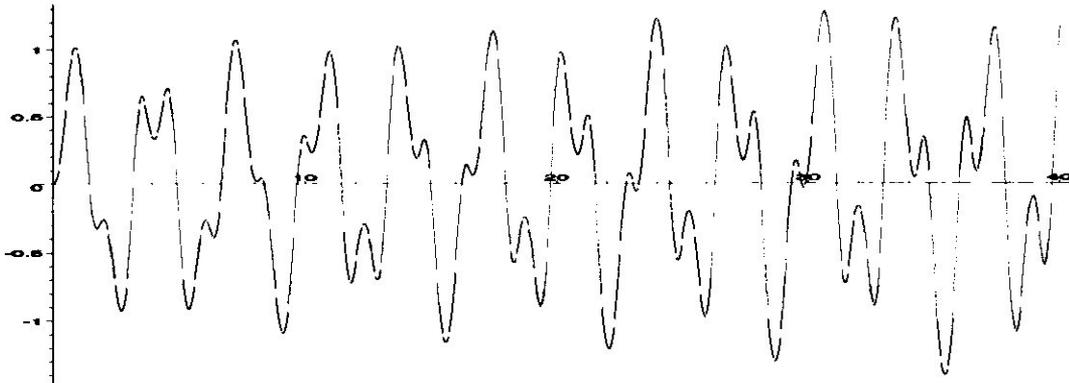
```
> pointplot(pointsy,axes=normal, symbol=point);
```



```
> pointplot(pointsz,axes=normal, symbol=point);
```

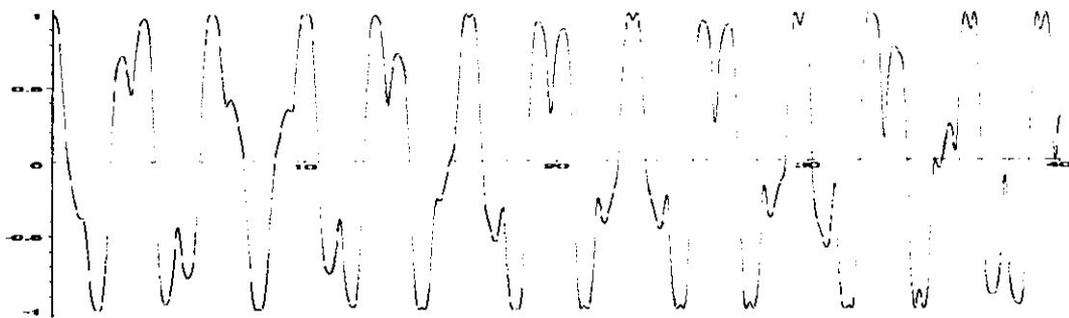


```
> pointplot(pointsw,axes=normal, symbol=point);
```

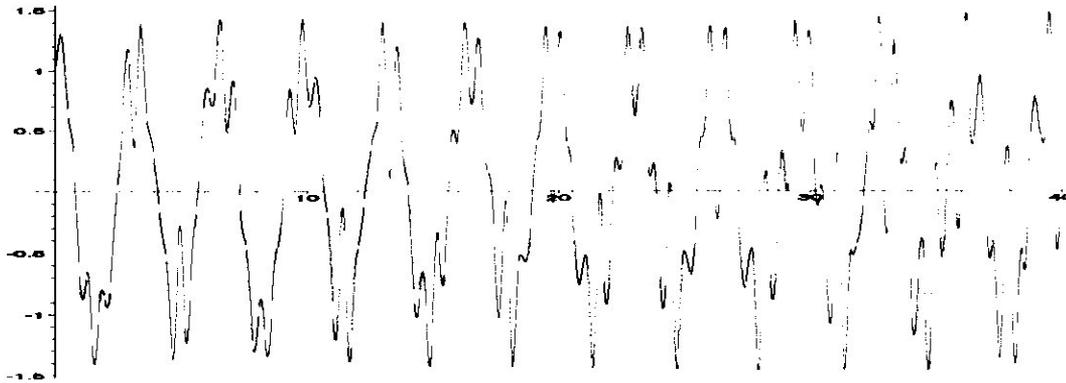


```
> points1:= {seq([t(i),sin(x(i))],i=0..n)};
```

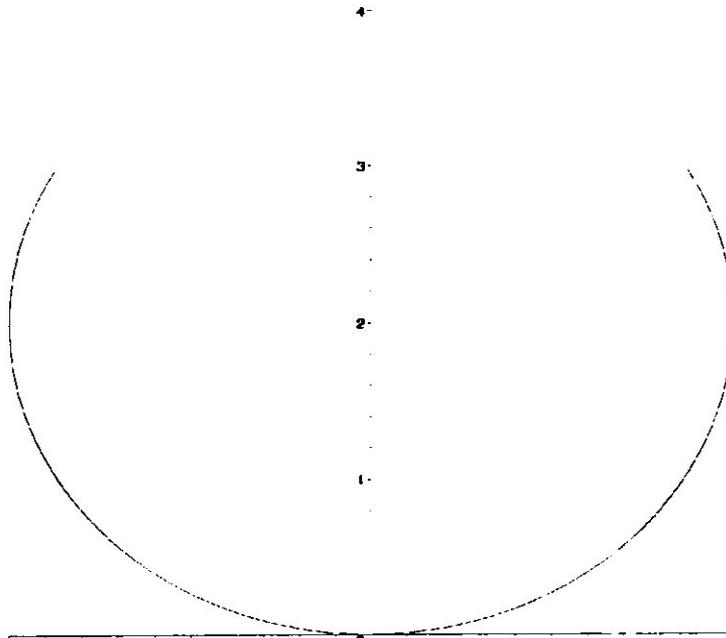
```
> pointplot(points1,axes=normal, symbol=point);
```



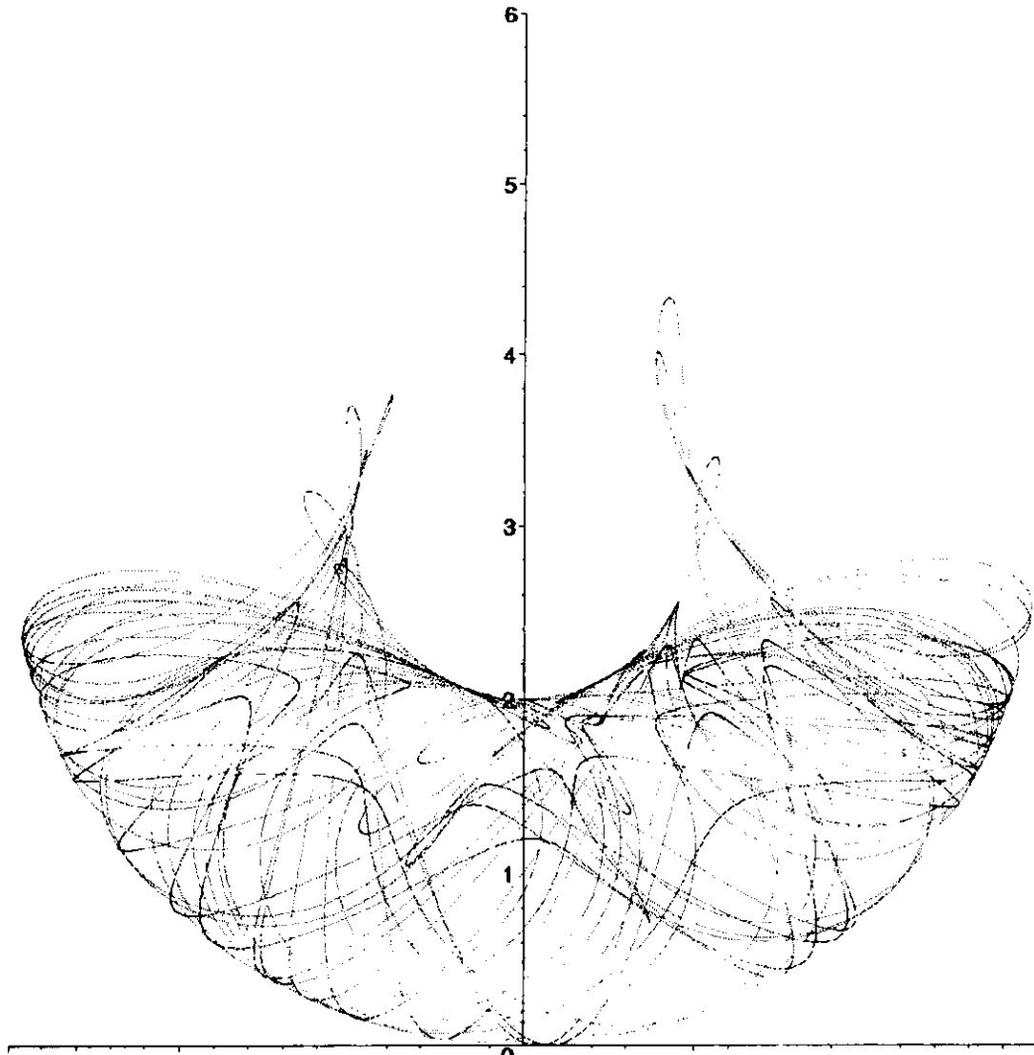
```
> points2:= {seq([t(i),sin(x(i))+L*sin(y(i))],i=0..n)}:  
> pointplot(points2,axes=normal, symbol=point);
```



```
> points3:= {seq([11*sin(x(i)),11*(1-cos(x(i)))],i=0..n)}:  
> pointplot(points3,axes=normal, symbol=point,view=[-11..11,0..2*11]);
```

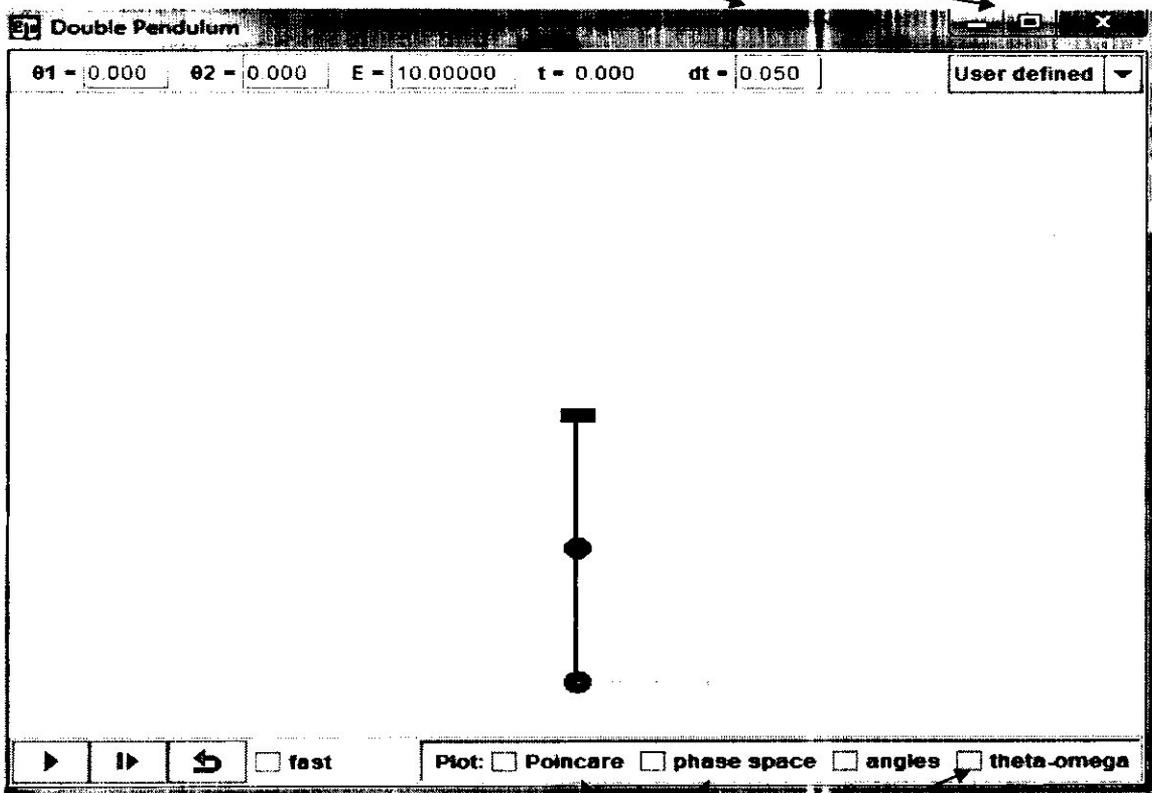


```
> points4: {seq([11*(sin(x(i))+L*sin(y(i))),11*((1-cos(x(i))+L*(1-cos(y(i))))],i=0..n)}:  
> pointplot(points4,axes=normal, symbol=point, view=[-11-12..11+12,0..2*(11+12)]);
```



Annexe C : Simulateur de double pendule

Fenêtre de réglage des paramètres



Fenêtre des graphes