

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université SAAD DAHLEB de Blida
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département D'Aéronautique

Projet
De Fin D'études

En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur D'état en Aéronautique

Option : Installation

THEME

**Contribution à l'étude de l'hybridation INS/GPS par couplage faible
pour la navigation aérienne**

Fait par :

Mr. BENZERROUK HAMZA

Promoteur:

Mr .BENOUARED .A

Juillet 2005

Dédicaces

Je ne sais par quoi commencer si ce n'est de remercier dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de continuer à fournir des efforts et d'arriver au point au quel je suis arrivé aujourd'hui.

Je voudrai dédier et en même temps faire partager ce modeste travail doué d'un sentiment spécial à mes parents qui ont toujours été la pour moi, et qui m'ont toujours encourager à aller au bout de mes rêves les plus fous ! je ne vous remercierai jamais assez !

Un remerciement spécial à mes deux frères Ilakim et Djafar en qui j'ai toujours trouver source d'idées et sujets de réflexion même de la part du plus jeune , puissent ils aboutir eux aussi à l'accomplissement de leur rêves.

Une dédicace spéciale à mes grands parents, à mes tantes et mes oncles, cousins et cousines ainsi qu'à toute ma famille.

Je ne pourrai certainement pas citer toutes les personnes qui sont intervenus à un moment ou à un autre de ma vie, mais sachez mes amis que je vous serai toujours et entièrement reconnaissant rien que pour les secondes que vous m'avez accordé et pour les aides que vous m'avez apporté !

je dédie ce travail à mon ami de toujours Mahdi ainsi qu'à toute sa famille et j'espère vraiment avoir été à la hauteur à tout mes amis de PUSTHB (Belaid, Kada, Mahdi, Mohamed, Mohamed, Lamine, Tarek, Mihoub, Chowki, Idir, Mustapha Rebihi, Mustapha Hamadou, Hicham, Yousscf, Zohir, Imad, Hilal, Khalcd, Houssinc, Badr -Eddine, Adcl, Amine, Nassim, Allal, Rachid, Samir et plus particulièrement le groupe B3 de l'année 2001/2002, avec un merci spécial à mon compagnon d'armes « Sami ».

il ne faut surtout pas oublier mes collègues de l'IAB en faisant allusion au gens d'Installation en particulier : Abdelkader, lamine, Hamza, Mohamed, Mustapha, Djamel, Samir, Hicham, Salhi, Salim et Abdennour ainsi qu'à toutes nos collègues ; aux collègues des autres options « Fares, Latif, Karim et Safi » plus particulièrement, je vous souhaite à tous toute la réussite possible .

à tout mes amis contrôleurs aériens : Mahdi, Rafik, Fowzi, Wissam, Issam, Keddour, Mustapha, Rabi, Tarek, Younes, Adiene, Nabil el Hadj, Ahmed, Hamza, Brahim et tout les autres de la 1ère, 2ème et 3ème promotion.

je voudrai faire un hommage particulier à un monsieur assez spécial ; « Mr Djedjigue » mon enseignant de mathématique au lycée, l'homme qui m'a fait aimer les études et les mathématiques en particulier ! merci à vous ! sans oublier un certain Zine-el-Abidine qui a toujours répondu présent pour moi.

Merci à tous !

Remerciements

Je ne sais par quoi commencer si ce n'est de remercier dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de continuer à fournir des efforts et d'arriver au point au quel je suis arrivé aujourd'hui.

Je voudrai en premier remercier le directeur de l'INCT « institut national de cartographie et de teledetection » le L.COLONTEI OUKACI pour le stage qui m'a été autorisé d'accomplir au niveau de cet établissement concernant le GPS. mes remerciements aussi à monsieur HADDAD sous directeur du département « recherche et développement » pour toute l'aide qu'il m'a apporté .

Un grand merci aussi à monsieur LOUMACHI du département de photographie aérienne pour toute l'attention qui m'a été portée. Ainsi qu'à toute les personnes qui m'ont été d'une grande aide et plus précisément au niveau de la bibliothèque.

je voudrai aussi faire un hommage à Mr Megueliati et de le remercier en lui souhaitant une très bonne continuation.

Une très bonne continuation aussi à tout les professeurs de notre département.

Un remerciement aussi à mon cousin Le Docteur Boudjit Mokhtar de l'université de Grenoble pour l'aide qu'il m'a apporté, ce travail lui est aussi dédié.

Mes remerciements aussi pour Mr François Bateman de l'école des pilotes de chasse du salon de Provence qui m'a beaucoup aidé de par la documentation qu'il m'a envoyée, un grand merci lui est dédié aussi.

Enfin je voudrai faire un hommage particulier à Mr Benward Abdelhalim pour le soutien et l'aide précieuse qu'il m'a apporté, je lui en serai toujours reconnaissant !

Je terminerai ces remerciements par un souhait envers tous les étudiants à venir, les futurs ingénieurs comme les futurs techniciens en leur souhaitant de réussir et de faire honneur à cette spécialité si noble qu'est l'Aéronautique.

MERCI

Résumé :

Les centrales inertielles que ce soit les centrales « à plates formes stabilisées » ou les centrales à composants liés dites « Strap Down » présente l'avantage d'offrir une très grande précision à court terme mais dont les erreurs dérivent dans le temps et peuvent engendrer une dérive de la trajectoire au delà des limites admissibles. Mon mémoire a pour but de remédier au problème de la dérive en effectuant un recalage par filtrage de kalman étendu de la trajectoire inertielle grâce aux positions et vitesses données par un moyen de navigation de grande précision à long terme mais tout à fait différent qu'est le GPS. Les résultats obtenus sont le fruit d'un recalage de position et de vitesse fournies par le système satellitaire.

Abstract :

In my these ,the inertial centrals , both « inertial stabilised » and « strap down » present the advantage of a very good précision at short term , but errors derive at the time and could cause a derive of trajectory far from authrised limits. My memory should solve the problem by doing a correction using extend kalman filter of inertial trajectory thanks to positions and speeds given by a navigation system of high precision at long time but really different wich is the GPS. The results obtained from the correction of position and speed given by the satellitary system.

Problématique et organisation du travail :

L'objectif de l'hybridation étant de fusionner deux systèmes dont les avantages de l'un représentent les inconvénients de l'autre et vis versa. L'hybridation de tels systèmes devrait mener à la création d'un nouveau système optimal améliorant l'efficacité des deux fusionnés, et optimisant leurs caractéristiques respectives dans le domaine dans le quel ils évoluent .

En automatisme en générale, les systèmes hybrides sont définis comme des sous-systèmes continus et discrets interagissant entre eux. On distingue en générale deux grandes classes de systèmes hybrides :

La première est intrinsèquement hybride de par la présence de deux types de dynamique dans le même système. De tels systèmes se rencontrent dans les industries du domaine **aéronautique** (comme dans notre cas), **spatial**, **automobile** et **l'agro-alimentaire**.

La seconde classe de systèmes hybrides concerne des processus continus pilotés par un contrôleur (ou superviseur) à événements discrets du type automates à états finis, Réseau de Pétri ou Graf ect. Ce type de système se rencontre dans le domaine du génie des procédés (ce genre d'hybridation n'est pas pris en compte dans ma thèse).

Pour ce qui est de ce que l'on appelle hybridation inertielle, la combinaison des deux systèmes inertielle et satellitaire permet de palier les insuffisances de chacun d'eux. le GPS étant précis à long terme mais qui peut avoir des bruits et des insuffisances momentanées de mesure alors que l'inertielle possède une très bonne précision à court terme mais qui dérive dans le temps .

Dans ma thèse, dont le but est l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique option « INSTALLATION », les deux systèmes GPS(global positioning system) et INS (inertial navigation system),deux systèmes de navigation prépondérants aux caractéristiques complémentaires ont été hybridés par un couplage faible en boucle ouverte.

Un grand homme a dit un jour : « c'est par la logique qu'on démontre et c'est par l'intuition qu'on invente »*, et comme ici, il n'est pas question d'inventer, mais de démontrer l'apport de l'hybridation INS/GPS pour la navigation aérienne ; j'ai décidé de répartir mon travail en cinq chapitres en essayant de suivre une certaine logique afin d'aboutir à des résultats cohérents et significatifs :

Le premier chapitre consiste à décrire tout les outils nécessaires à la bonne compréhension de la navigation inertielle tels que les différents repères utilisés en navigation ; les deux types de centrales inertielles « à plates formes » et « à composantes liées » ou « strapdown », ainsi que leur composantes respectives en détaillent beaucoup plus le fonctionnement des centrales inertielles « STRAP-DOWN » ; centrales que j'ai choisi d'utiliser pour l'hybridation en question.

Le deuxième chapitre consiste compte à lui à décrire le système de positionnement par satellites GPS (GLOBAL POSITIONING SYSTEM) ;tout ses différentes composantes , principes et modes de fonctionnement y sont décrits , se terminant par une synthèse de ses avantages et de ses inconvénients .

Une fois les deux systèmes décrits ; et leur complémentarité démontrée ; l' idée de les hybrider commence à avoir un sens et à se justifier, néanmoins la fusion de données INS et

GPS nécessite l'utilisation d'un outil mathématique puissant et original qu'est le filtre de KALMAN (basé sur le filtrage statistique), et plus précisément le filtre de kalman étendu pour les cas non linéaires (EKE ; détaillé dans le chapitre(III)) en raison de la non linéarité des équations d'évolution des deux systèmes . Toutes les étapes de l'algorithme de kalman seront expliquées en détail dans le chapitre (III).

Le quatrième chapitre consistera à expliciter les différents types d'hybridation INS/GPS (couplage faible, couplage serré) ainsi que leur modélisations lors de l'utilisation du filtre de kalman .

Le cinquième chapitre sera compte à lui consacré à la partie simulations, résultats et interprétations.

Enfin ; une conclusion générale portant sur le travail accompli ainsi que les différents manières de l'améliorer et de le compléter à l'avenir.

Etat de l'art :

L'hybridation INS/GPS a pris une ampleur considérable durant cette dernière décennie, passant d'abord par des applications typiquement militaires comme pour :

- le guidage des drones (UAV).

- le guidage de missiles.

- l'implémentation de cette fusion dans des avions de combats tels que les F-14, F-15 et F-16 américains.

- l'orientation des robots utilisant une fusion multi capteurs pour l'augmentation de la précision dans la localisation et le positionnement. Et à titre d'exemples voici les principaux organismes militaires et civils ayant participé au développement de cette méthode révolutionnaire de navigation:

- Dassault aviation, pionnier de l'hybridation INS/GPS et de son application dans le domaine de la navigation aérienne.

- le laboratoire « smart system research » de la NASA a orienté d'énormes efforts dans cette voie pour l'amélioration du guidage des navettes spatiales

- les multiples publications de la « Navsys corporation » au sujet de l'hybridation du GPS et a même effectué des tests sur des F-16 en septembre 2003 et a démontré des résultats surprenants durant toute la durée du vol.

- le centre GODDARD de la NASA consacre actuellement énormément de temps et d'effort au développement de la navigation inertielle.

- le laboratoire de recherche « ONERA » à Toulouse ne cesse de publier des articles sur le thème de l'hybridation inertielle employant différentes approches que ce soit par la méthode d'étudier les rotations et de les modéliser, ou par la diversité des méthodes de filtrage appliquées.

- les travaux sur la fusion INS/GPS de l'école de surveillance et d'information spatiales de l'université « New-South-Wales » ,SYDNEY,AUSTRALIE en collaboration avec l'école d'Avionique et de Télécommunications de la Koré du Sud.

- les rapports de recherche de « l'Air Force Institut of Technologie » et comme mentionnés plus haut, les travaux menés par la « Marine and industrial Dynamic », group d'analyse et de recherche en Angleterre et visant à perfectionner le control en vol des UAV tactiques « Unmanned Arial Vehicles » afin d'augmenter le plus possible les chances de réussite de leurs missions.

- ainsi que les travaux menés par le département d'ingénierie de l'institut indien de technologie de Bombay.

Sans oublier les applications civils, que ce soit en aéronautique ou en Topométrie, en robotique, agriculture ou en Photogrammétrie, le problème de l'intégrations des systèmes satellitaires et inertiels est vite devenu un centre d'intérêt commun, ce qui a amené l'hybridation INS/GPS à se développer au stade où elle est arrivé aujourd'hui.

Pour ce qui est de l'aviation civile , aujourd'hui presque tout les avions commerciaux de nouvelles génération sont équipés de navigateurs hybrides ; c'est le cas pour les Boeing 737 Nouvelle génération 600,700, 800 et 900. De nos jours, les applications commerciales de plus en plus exigent des solutions d'INS/GPS et le progrès rapide de la technologie d'INS/GPS réduit le coût et améliore les systèmes. Les solutions de l'INS/GPS sont compactes, fiables, rentables et emploient les technologies de navigation les plus sophistiquées comme : l'utilisation des méthodes d'accouplement, lâchement couplé au système ultra étroitement couplé INS/GPS pour réaliser des systèmes rentables.

Tout ces travaux cités comme exemples sont en fait les raisons de notre préoccupation et de notre investissement dans l'apport que pourrait apporter l'hybridation INS/GPS pour la navigation aérienne.

SOMMAIRE

Problématique et organisation du travail

Etat de l'art

Chapitre I la navigation inertielle

I.1 Introduction.....	2
I.2 Définition.....	2
I.3 Repères de référence	3
I.3.1 trièdre inertielle	3
I.3.2 trièdre terrestre	3
I.3.3 trièdre de navigation	3
I.3.4 trièdre lié au mobile	3
I.4 Centrales inertielles	4
I.4.1 composants d'une centrale inertielle	4
I.4.2 les types de centrales inertielles	6
I.4.2.a centrales inertielles à plate forme stabilisée	6
I.4.2.b centrales inertielles à composants liés « strap down »	7
I.4.3 classe d'une centrale inertielle	10
I.5 Modèles d'erreurs dans les capteurs inertiels	10
I.5.1 les biais	10
I.5.2 les facteurs d'échelles	11
I.5.3 les non-linéarités	12
I.5.4 les bruits	12
I.5.5 les non-orthogonalités	12
I.5.6 les erreurs gyroscopiques et accelerometriques	12
I.6 Equations de navigation et de mécanisation	14
I.6.1 estimation de l'orientation	14
I.6.2 estimation de la position	15
I.6.3 équation dynamique de vitesse	16
I.6.4 la mécanisation	17
I.6.4.a compensation d'erreur	17
I.6.4.b integration d'attitude	18
I.6.4.c integration de vitesse et de position	18
I.7 Avantages et inconvénients du système inertielle	20
Conclusion	21

Chapitre II Le GPS « GLOBAL POSITIONNING SYSTEM »

II.1 Generalités.....	23
II.2 Principe de mesure.....	25
II.2.1 mesure par le code	25
II.2.2 mesure par la phase	26
II.2.3 biais et bruits de mesure	27
II.3 Positionnement par GPS	28
II.3.1 positionnement absolu	28
II.3.2 positionnement différentiel.....	28
II.3.3 lissage du code par la phase	29
II.3.4 RTK (real time kinematics)	29
II.3.5 positionnement en bi fréquences	29

II.4 Evolution vers l'intégrité	30
II.4.1 le GPS	30
II.4.2 Galileo	31
II.4.3 EGNOS	31
II.5 Niveau de précision	33
II.6 les avantages et les inconvénients du GPS	33
Conclusion	35
Chapitre III Filtrage de Kalman	36
III.1 Rappel sur le filtrage de Kalman	37
III.1.1 filtre de Kalman linéaire	38
III.1.1.a initialisation	39
III.1.1.b prédiction temporelle	39
III.1.1.c correction et mise à jour des mesures	40
III.2 linéarisation des problèmes non linéaires	40
III.2.1 filtre de Kalman non linéaire	41
III.2.2 filtre de Kalman étendu	44
III.3 conclusion	48
Chapitre IV La navigation hybride	49
IV.1.Introduction	50
IV.2 Les différentes modes d'hybridation	50
IV.2.1. le mode non couplé	50
IV.2.2. le mode faiblement couplé	51
IV.2.3. Le mode fortement couplé	53
IV.3. Implémentation de la fusion INS/GPS	54
IV.3.1.les équations du modèle d'évolution	54
IV.3.2.Remarque sur l'alignement	59
IV.3.3.Les équations d'observation du GPS	60
IV.4.Illustration pratique d'un système hybride	62
Conclusion	62
Chapitre V simulation et interprétation des résultats	63
V.1. modèle et algorithme de simulation	64
V.2.a- simulation du navigateur inertiel et tracé de trajectoire	69
V.2.b-simulation de l'apport du recalage en position.....	77
V.2.c- simulation de l'apport du recalage en vitesse au recalage en position.....	84
V.2.d- simulation du recalage en position et vitesse.....	91
V.2.e-simulation du recalage position et vitesse dans des virages.	99
Conclusion générale	
Bibliographie	
Annexes :	
Annexe A systèmes de référence et coordonnées géodésiques	
Annexe B probabilités	
Annexe C linéarisation par différenciation	

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : Relation entre les différents repères liés au mouvement de l'aéronef.....	3
Figure I.2 : Gyroscope mécanique.....	5
Figure I.3 : Principe de l'accéléromètre.....	6
Figure I.4 : Composants d'une centrale inertielle à plate forme stabilisée.....	7
Figure I.5 : Fixité dans l'espace de l'horizontalité de centrale à plate forme.....	7
Figure I.6 : Diagramme schématique simplifié d'un système RLG INS de MARCONI.....	8
Figure I.7 : Photo d'un gyrolazer.....	9
Figure I.8 : Type d'erreur de mesure classique.....	10
Figure I.9 : synoptique d'une centrale inertielle STRAP DOWN.....	19

Chapitre II

Figure II.1 : Satellite GPS.....	23
Figure II.2 : Constellation des satellites GPS.....	23
Figure II.3 : Système DGPS.....	24
Figure II.4 : Mesure par le code.....	25
Figure II.5 : Principe de positionnement.....	26
Figure II.6 : Extraction de la position dans l'espace.....	26
Figure II.7 : Mesure par la phase.....	27
Figure II.8 : Trajectoire des satellites géostationnaires INMARSAT.....	32
Figure II.9 : précision des systèmes de navigation par satellites.....	33

Chapitre III

Figure III.1 : Filtre de Kalman linéaire.....	39
Figure III.2 : Linéarisation du filtre de Kalman non linéaire.....	42
Figure III.3 : Filtre de Kalman linéarisé.....	44
Figure III.4 : Linéarisation du filtre de Kalman étendu.....	46
Figure III.5 : Filtre de Kalman étendu.....	47
Figure III.6 : Extension du filtre aux systèmes non linéaires.....	47

Chapitre VI

Figure IV.1 : Mode non couplé.....	50
Figure IV.2 : Mode d'intégration faiblement couplé en boucle ouverte.....	51
Figure IV.3 : Mode d'intégration faiblement couplé en boucle fermée.....	53
Figure IV.4 : Mode fortement couplé.....	54
Figure IV.5 : non alignement de la centrale inertielle.....	60
Figure IV.6 : photo d'une hybridation INS/GPS faiblement et fortement couplés.....	62

Chapitre V

Figure V.1 : Modèle de simulation	64
Figure V.2 : Sous programme inertiel.....	65
Figure V.3 : Sous programme « trajectoire de référence ».....	66
Figure V.4 : Sous programme « filtre de Kalman ».....	67
Figure V.5 : Programme principal.....	68

Génération de trajectoires :

Figure V.6 : Trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant l'équateur	70
Figure V.7 : Trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien Greenwich.....	71
Figure V.8 : Trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien $G=20^{\circ} E$	72
Figure V.9 : Trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien $L=40^{\circ}N$	73
Figure V.10 : Trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien $L=45^{\circ}N$	74
Figure V.11.a) : Trajectoire de l'aéronef biaisée	75
Figure V.11.b) : Influence des biais accélérométriques sur la trajectoire	76

Recalage de la trajectoire inertielle par positions GPS :

Figure V.12 : Recalage de position sur la latitude chaque 30 minutes.....	79
Figure V.13 : Recalage de position sur la longitude chaque 30minutes.....	79
Figure V.14 : La longitude en fonction de la latitude.....	80
Figure V.15 : La latitude en fonction de la longitude.....	80
Figure V.16 : Recalage de position sur la longitude chaque 15 minutes.....	81
Figure V.17 : Recalage de position sur la latitude chaque 15 minutes.....	81
Figure V.18 : La longitude en fonction de la latitude.....	82
Figure V.19 : La latitude en fonction de la longitude.....	82

Recalage de la trajectoire inertielle par positions puis par positions et vitesses GPS :

Figure V.20 : Recalage de position chaque 30minutes sur la latitude.....	86
Figure V.21 : Recalage de position chaque 30minutes sur la longitude.....	86
Figure V.22 : La longitude en fonction de la latitude.....	87
Figure V.23 : La latitude en fonction de la longitude	87
Figure V.24 : Recalage de position et vitesse chaque 30min sur la latitude.....	88
Figure V.25 : Recalage de position et vitesse chaque 30min sur la longitude.....	88
Figure V.26 : La longitude en fonction de la latitude.....	89
Figure V.27 : La latitude en fonction de la longitude.....	89

Recalage de la trajectoire inertielle par positions et vitesses GPS :

Figure V.28 : Recalage de position et vitesse chaque 60min sur la latitude.....	92
Figure V.29 : Recalage de position et vitesse chaque 60min sur la longitude.....	93
Figure V.30 : La longitude en fonction de la latitude.....	94
Figure V.31 : La latitude en fonction de la longitude.....	94
Figure V.32 : Recalage de position et vitesse chaque 30min sur la latitude.....	95
Figure V.33 : Recalage de position et vitesse chaque 30min sur la longitude.....	95
Figure V.34 : La longitude en fonction de la latitude.....	96
Figure V.35 : La latitude en fonction de la longitude.....	96

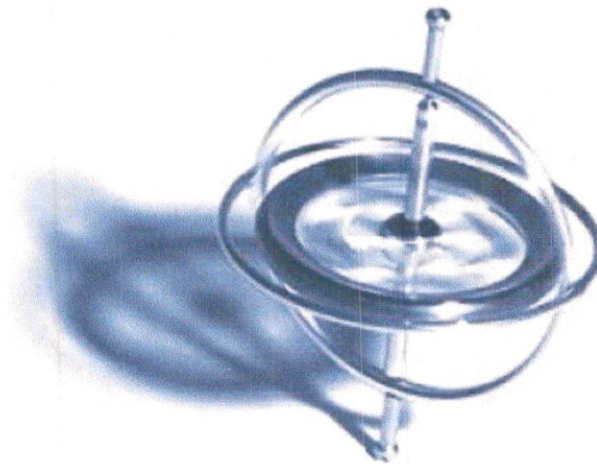
Figure V.36 : Recalage de position et vitesse chaque 15min sur la latitude.....	97
Figure V.37 : Recalage de position et vitesse chaque 15min sur la longitude.....	97
Figure V.38 : La longitude en fonction de la latitude.....	98

Recalage de la trajectoire inertielle par GPS dans des virages :

Figure V.39 : Recalage de 60 min sur la latitude avec virage (lacet+roulis).....	100
Figure V.40 : Recalage de 60 min sur la longitude avec virage (lacet+roulis).....	100
Figure V.41 : Recalage de 30 min sur la latitude avec virage (lacet+roulis).....	102
Figure V.42 : Recalage de 30 min sur la longitude avec virage (lacet+roulis).....	102
Figure V.43 : Recalage de 15 min sur la latitude avec virage (lacet+roulis).....	103
Figure V.44 : Recalage de 15 min sur la longitude avec virage (lacet+roulis).....	103

Chapitre I

La navigation inertielle



Résumé :

Dans ce chapitre, les bases de la navigation inertielle ont été décrites en commençant par la notion de repères de références, le repère inertiel (i), le repère terrestre (e), le repère de navigation (n) ou nommé aussi repère TGL (trièdre géographique local) ; les différents types de centrales inertielles (centrales inertielles à plate forme stabilisée ; centrales inertielles à composantes liées), leur composantes ainsi que les équations de mécanisation suivies des équations d'erreurs des navigateurs inertiels « strap-down » y seront décrites, celles-ci seront utilisées plus loin en simulation lors de l'utilisation du filtre de kalman.

Ce chapitre se terminera en citant les avantages et les inconvénients des navigateurs inertiels et fera ressentir les insuffisances de telles centrales en matière de navigation ou de vols long courrier ; ce qui fera apparaître à son tour le besoin d'hybrider les centrales inertielles à d'autres systèmes de navigation aux caractéristiques aussi complémentaires que différentes.

I. La navigation inertielle :

I.1. Introduction :

L'objectif de la navigation inertielle, est d'estimer de façon autonome la position et la vitesse d'un véhicule par rapport à la terre à partir d'une Unité de Mesure Inertielle (UMI) qui comprend des capteurs inertiels, accéléromètres, gyromètres et d'un calculateur de bord qui élabore la solution de navigation. Ceci repose sur l'intégration des forces spécifiques (accélération absolue moins la gravité) mesurées par les accéléromètres (en nombre de 3), et projetées dans le repère de navigation à partir des informations fournies par les gyromètres. Il existe deux types de centrale inertielle. Les centrales inertielles à plate-forme et les centrales inertielles à composants liés.

I.2. Définition d'une centrale inertielle :

Une centrale inertielle (CI ou IMU) est un dispositif muni de gyroscopes, et d'accéléromètres. En ajoutant un calculateur qui permet à un véhicule de connaître sa position et sa vitesse dans l'espace, la CI devient un système de navigation inertielle SNI (ou INS).

Le gyroscope est un appareil qui permet de mesurer une variation d'orientation d'un véhicule.

L'accéléromètre est un appareil qui mesure l'accélération linéaire. Pour avoir une position en trois dimensions, la centrale inertielle doit comporter trois accéléromètres mesurant les accélérations linéaires selon chaque axe, cette accélération contient la pesanteur, l'accélération du véhicule, l'accélération centrifuge, l'accélération de Coriolis et du bruit .

Trois gyroscopes mesurent les vitesses angulaires pour avoir l'orientation du véhicule dans l'espace.

Le calculateur effectue les calculs qui permettent de passer des informations retournées par les gyroscopes et les accéléromètres à la position et à la vitesse du véhicule. En fait, il doit faire une intégration de l'accélération pour trouver la vitesse, puis une deuxième intégration de la vitesse pour en déduire la position.

Les systèmes de navigation inertiels ont l'avantage de ne pas avoir besoin de références externes « autonomes » contrairement au GPS qui dépend des satellites disponibles.

Cependant, les données du capteur inertielle dérivent avec le temps en raison de la nécessité d'intégrer les données brutes pour rapporter la position. N'importe quelle petite erreur constante est amplifiée après l'intégration. Les capteurs inertielles sont peu convenables pour le positionnement précis sur une longue période de temps, mais la précision à court terme est bonne et les fréquences d'acquisition peuvent être très élevées

Pour la bonne compréhension de la navigation inertielle, il nous faut maîtriser et distinguer les différents repères liés à la navigation inertielle entre autre ; le repère inertielle (i), le repère terrestre (e), le repère de navigation (n) et le repère lié à l'aéronef « repère mobile » ou noté encore repère « body » noté (b). Comme le montre la figure à la page suivante :

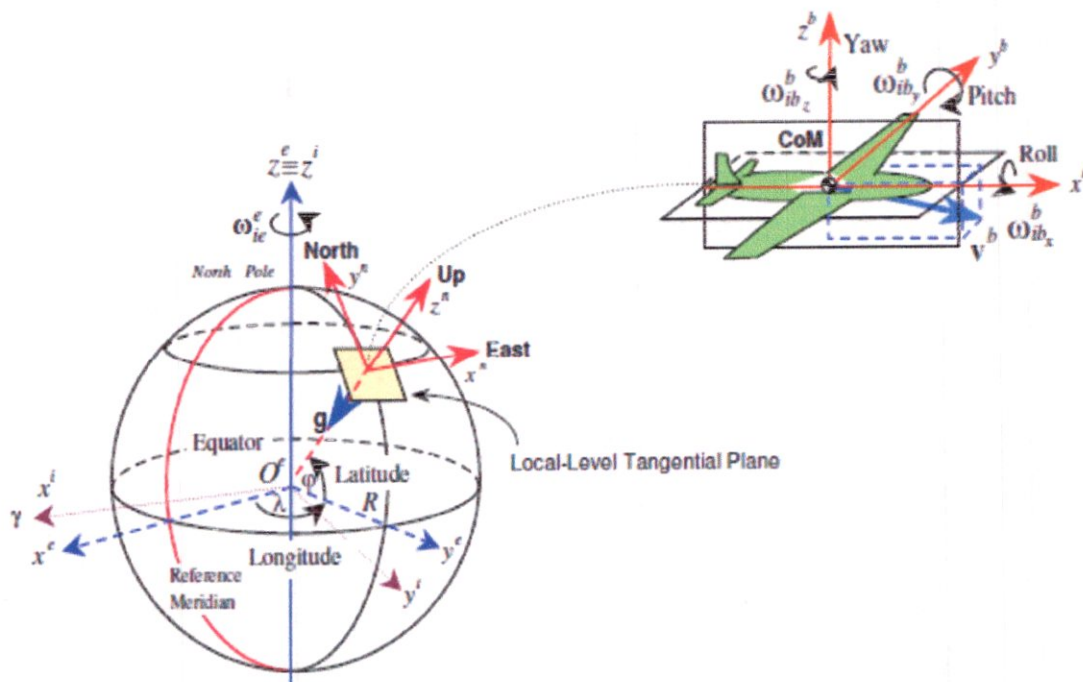


Figure 1.1 : relation entre les différents repères liés au mouvement de l'aéronef

1.3. Repères de Référence :

Quatre trièdres sont concernés (I.1) :

1.3.1. trièdre inertielle [i] : Ce repère est centré sur la Terre, ses axes ayant une direction fixe par rapport aux étoiles. L'axe X_i , pointe vers l'équinoxe vernal, l'axe Z_i coïncide avec l'axe du moment angulaire de la Terre, et l'axe Y_i complète le trièdre direct.

1.3.2. trièdre Terrestre [e] : déduit du précédent par la rotation (ω_{ie}) de la terre.

1.3.3. trièdre géographique local (TGL), ou de navigation [n] : est un repère couramment utilisé en navigation ; il se déplace à la surface de l'ellipsoïde terrestre en même temps que l'aéronef. Son origine est située en O projection de M (lieu du véhicule) sur l'ellipsoïde terrestre et ses trois axes sont dirigés respectivement vers le Nord, vers l'Est et vers la verticale descendante.

1.3.4. trièdre lié au mobile [b] :

c'est le repère lié au véhicule porteur des accéléromètres et des gyromètres. L'orientation des axes est conventionnelle. L'axe x est dirigé selon l'axe de symétrie longitudinal et vers l'avant de l'aéronef, l'axe z est perpendiculaire au plan de la voilure est dirigé vers l'intrados du corps et l'axe y contenu dans le plan de la voilure complète le trièdre. Il définit l'attitude de l'engin par

rapport au repère TGL; dans un système traditionnel cette définition fait intervenir : un angle de lacet , un angle de tangage et un angle de roulis .

Les accéléromètres mesurent les forces spécifiques dans les trois directions (x; y; z), qui matérialisent le repère engin, attache au mobile. La vitesse angulaire de ce trièdre par rapport au repère inertielle est mesurée par les gyromètres.

I.4.Centrales inertielle :

Les systèmes inertielle de navigation (INS), dont le nom est dû au fait qu'ils utilisent les propriétés inertielle de la matière ou de la lumière, déterminent une trajectoire par discrétisation (dead reckoning). Les lois de la mécanique classique, formulée par Sir Isaac Newton, sont à la base du calcul de vitesse par intégration de l'accélération. Le positionnement dans un système de référence nécessite la connaissance de l'orientation spatiale des accélérations ou vitesses.

Les systèmes INS sont donc composés d'accéléromètres que l'on oriente à l'aide de gyroscopes. Les premiers systèmes INS se nomment *plates-formes inertielle* ; ils utilisaient des gyroscopes mécanique (fig.1.2). Leur attitude est conservée fixe dans le temps et le positionnement se fait simplement par double intégration des accélérations. Pour conserver une attitude fixe dans le temps, deux solutions sont possibles. La première se base sur l'effet gyroscopique d'une masse en mouvement. Celle-ci va permettre le maintien d'une direction fixe, pour autant qu'un système mécanique de cardans lui laisse la liberté de mouvement. Une autre solution est de compenser les mouvements de rotation détectés par des gyroscopes par une rotation inverse effectuée par un moteur. Ces systèmes mécanique sont malheureusement complexes, coûteux et encombrants. Les progrès technologiques et l'avènement de l'informatique ont donné naissance à un autre type de système INS « STRAP DOWN » qui est l'objet utilisé dans ce mémoire.

I.4.1.composants d'une centrale inertielle :

Les centrales inertielle se composent essentiellement de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres .nous verrons plus de détails dans ce qui va suivre.

I.4.1.a)-GYROSCOPES :

Définition :

Un gyroscope est essentiellement constitué par un solide de révolution animé d'un mouvement de rotation rapide autour de son axe de symétrie.

Le solide de révolution est appelé : rotor ou toupie gyroscopique.

L'axe de rotation du rotor est appelé axe de rotation propre du gyroscope. L'inertie gyroscopique, appelée aussi effet gyroscopique, constitue la propriété fondamentale des gyroscopes. Il importe tout d'abord de comprendre ce que signifie le mot « inertie ». Il s'agit d'un principe selon lequel tous les objets résistent naturellement à l'accélération ou au changement de direction. (Par exemple, les occupants d'une voiture sont projetés vers l'avant quand celle-ci s'arrête brusquement parce qu'en raison de leur inertie, les corps continuent leur mouvement vers l'avant même si la voiture s'est arrêtée.)

Lorsqu'on parle d'inertie gyroscopique, on fait allusion à l'inertie que possède un corps qui tourne. Tous les objets tournant autour d'un axe ont tendance à maintenir une orientation fixe,

c'est-à-dire une direction de rotation et une position fixes, si aucune force n'intervient. **En d'autres mots, un objet qui tourne a tendance à rester dans la même position.**

Sur terre, les gyroscopes en mouvement finissent par s'arrêter en raison de la friction et de la résistance de l'air. Toutefois, cela ne se produit pas dans un environnement idéal comme l'espace. En voici deux illustrations en images :

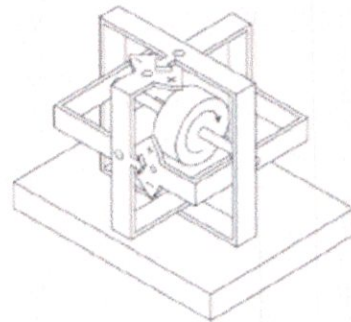
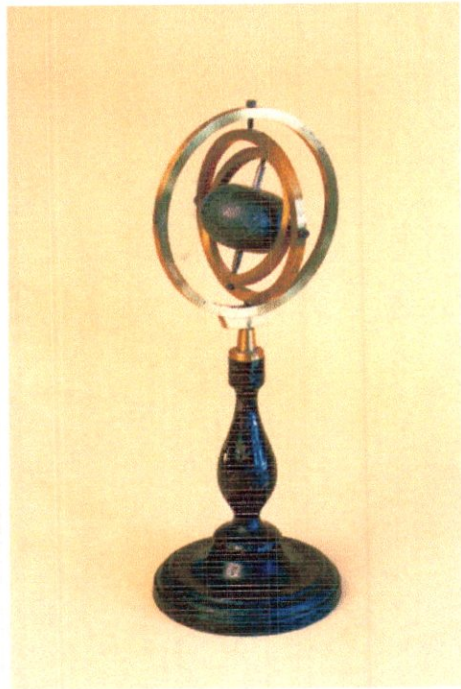


Figure I.2: Gyroscopie Mécanique

I.4.1.b)-Accéléromètre :

Un accéléromètre est essentiellement constitué par une masselotte pouvant coulisser sans frottement sur un rail parfaitement rigide et reliée à un boîtier par un ressort de raideur K . L'axe de ce rail est appelé : axe sensible de l'accéléromètre.

-Principe de fonctionnement des accéléromètres :

Considérons un accéléromètre dont l'axe est orienté verticalement comme illustré par la figure(1.3) . Posé sur une table par exemple, l'appareil n'est pas accéléré et en équilibre on trouve pour la force du ressort F (F représentant les forces s'appliquant sur le système)

$$F = -W \tag{1-1}$$

Où W est la force gravitationnelle. Et en effet, l'accéléromètre donne : $f = F/m$
 f est la force spécifique, et m est la masse.

Si maintenant l'appareil est accéléré vers le haut, le bilan de force selon la deuxième loi de Newton donne :

$$ma = F + W \quad (I-2)$$

Et la force spécifique fournie par l'accéléromètre est donc la vraie accélération moins l'accélération gravitationnelle, donc :

$$f - a - w \quad (I-3)$$

Avec, $w = W/m$

En complétant notre considération des cas particuliers, on remarque qu'en chute libre ($a = w$) la sortie du capteur sera zéro.

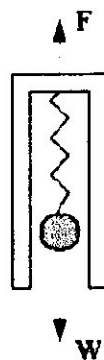


Figure 1.3: Principe d'un accéléromètre

En conclusion, pour connaître a il faut connaître w , qui malheureusement dépend de l'endroit de la mesure et peut changer considérablement, surtout dans les applications aéronautiques.

Un modèle de gravitation approprié doit donc être développé.

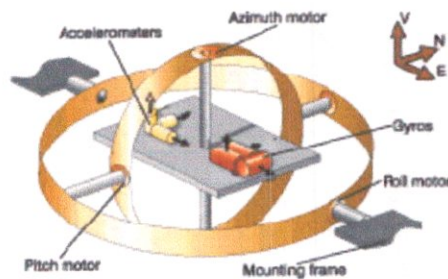
Dans [HUL 98], [SAL 98], [FET 98], on peut trouver plus d'informations et une description plus détaillée sur les accéléromètres et les différents types de gyromètres et de gyroscopes ainsi que sur l'association de ces capteurs (ce qui donne des centrales inertielles).

1.4.2.les types de centrales inertielles :

1.4.2.a.centrale inertielle à plate forme stabilisée :

Dans ce genre de centrale inertielle, les accéléromètres sont installés sur une plate-forme mécanique isolée des mouvements angulaires du véhicule par des suspensions de cardan. La plate-forme est asservie en position horizontale grâce à des gyroscopes. Ainsi, les accéléromètres sont

constamment dirigées selon les directions du Trièdre Géographique Local (TGL). Leurs signaux après intégration et prise en compte d'un modèle de pesanteur permettent d'obtenir la vitesse et la position de l'aéronef..



Fig(I.4) : : centrale inertielle à plate forme stabilisée

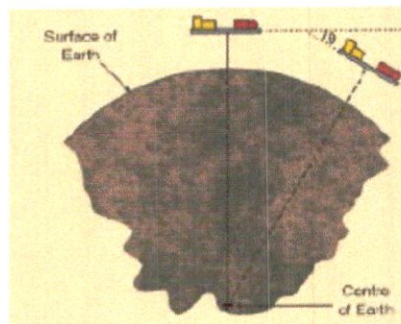


Fig (I.5) : horizontalité de la plate forme en tout lieu

Les systèmes « strap-down » :

Les accéléromètres et les gyroscopes sont fixés rigidement à l'élément en mouvement. L'attitude et la position se calculent à partir des informations gyroscopiques et accélérométriques. Les cardans des plates-formes sont en quelque sorte remplacés par un ordinateur qui effectue la transformation de coordonnées et le calcul des composantes de l'accélération dans un repère local (North, East, Down).

Ces systèmes «strapdown » sont des structures plus simples et sont plus résistants aux chocs, ils sont fortement avantageux au niveau des coûts et de la taille de l'appareil et sont particulièrement appropriés pour l'application dans le domaine aéronautique.

En contrepartie, ils n'atteignent pas encore la précision des systèmes à plate-forme, et l'alignement est difficile et nécessite souvent, pour les gyroscopes de moindre qualité, un système de navigation additionnel tel que le GPS. C'est ce qui est appelé alignement par transfert.

Cette évolution a été rendue possible par l'apparition de nouvelles méthodes de mesure qui ont permis de simplifier considérablement les capteurs. Les gyroscopes actuels utilisent des techniques basées sur des principes optiques ou sur l'analyse des vibrations ([MOU 99] et [FOX 95])

Le principe de base des gyroscopes vibrants a été mis en évidence par Foucault au milieu du 19^{ème} siècle. Il a démontré qu'un élément vibrant tendait à maintenir son plan de vibration lors d'une rotation. La détermination de la vitesse angulaire s'effectue de la manière suivante : le mouvement vibratoire induit une vitesse oscillatoire. Si le capteur tourne autour d'un axe orthogonal à cette vitesse, on retrouve une accélération de Coriolis. Cette accélération de Coriolis modifie le mouvement vibratoire et c'est cette modification qui est détectée et qui sert à déterminer la vitesse angulaire.

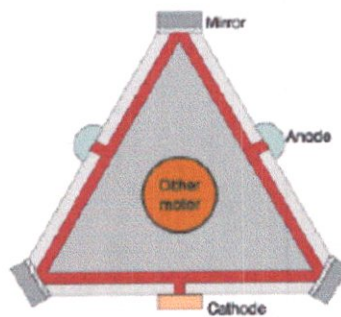


Figure I.6: Diagramme schématisé simplifié d'un système RLG INS de GEC Marconi

Avec le développement de la technologie et le dilemme rencontré entre « rapidité et coût » les gyroscopes mécaniques exposés au part avant ne sont plus utilisés malgré leur très grande précision et ont été remplacés par une nouvelle génération de gyromètres comme les « GYRO LAZER » fonctionnant grâce à l'effet SAGNAC.

Il y a deux types de gyroscope « strapdown » disponibles, gyroscopes à fibre optique (FOG) ou Gyrolasers (RLG). Le principe physique exploité pour les FOG et RLG emploie l'effet de Sagnac : deux faisceaux laser sont introduits dans des directions opposées dans le chemin des faisceaux du capteur. Des miroirs ou un câble à fibre optique sont employés pour le transfert de faisceaux.



Fig1.7: GYRO-LAZER

Si le capteur est au repos, les deux faisceaux ont une fréquence identique. S'il est sujet à une rotation angulaire autour d'un axe perpendiculaire au plan du capteur, la longueur du chemin d'un des faisceaux augmente tandis que l'autre diminue, ayant pour résultat un décalage de fréquences directement proportionnel à la vitesse angulaire. Les avantages de R.L.G sont les possibilités d'obtenir une excellente fiabilité et stabilité.

Pour les accéléromètres (fig1.3), il n'est pas possible de mesurer l'accélération inertielle translative en utilisant de la lumière comme dans les gyroscopes optiques, l'effet de Sagnac ne s'appliquant qu'aux rotations. Pour les accéléromètres, il ne reste donc que les systèmes électromécaniques ou, depuis une dizaine d'années, leurs pendants miniaturisés MEMS « systèmes « micro-électro-mécaniques ».

1.4.3. Classe d'une centrale inertielle :

La grandeur de la dérive limite la durée d'utilisation sans recalage de la centrale inertielle. On distingue alors la qualité technologique par le niveau de cette dérive :

- classe engins : 10 à 0,1 °/h.
- classe aéronautique : 0,1 à 0,001 °/h.

1.5. Modèles d'erreurs dans les capteurs inertiels :

Le capteur inertielle utilisé dans ce travail est de type « Strapdown ». Et comme pour tout capteur, il y a des erreurs de mesure. Dans un premier temps, nous allons nous pencher sur les erreurs typiques de mesure connues dans la théorie ([GRE 01a] et [STO 97]). Une erreur de mesure est la déviation de la valeur obtenue à la sortie du capteur par rapport à la vraie valeur de la grandeur à l'entrée.

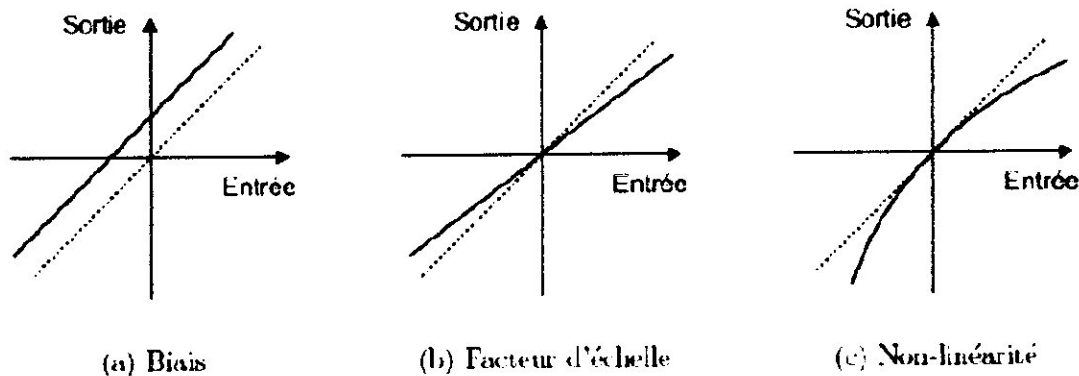


Fig 1.8: type d'erreurs de mesures classiques

1.5.1. Biais :

Le biais est l'erreur la plus évidente. Il s'agit tout simplement d'une valeur additionnelle :

$$\begin{aligned} a_{sortie} &= a_{entree} + \delta a_{biais} \\ \omega_{sortie} &= \omega_{entree} + \delta \omega_{biais} \end{aligned} \quad (I.4)$$

Le biais peut être facilement déterminé quand l'entrée est nulle. Cependant, il est différent chaque fois qu'on remet en marche la centrale. Les variations possibles à chaque mise sous tension sont souvent données sous le nom de « stabilité de biais » dans les spécifications techniques d'une CI. En outre, le biais évolue souvent légèrement avec le temps. Cette évolution, nommée dérive, est entre autre due aux variations de la température.

Par conséquent la dérive est particulièrement forte pendant les premières minutes après la mise sous tension quand les composants électroniques s'échauffent (Crossbow indique 10 minutes de temps de préchauffage).

Certains auteurs favorisent une marche aléatoire pour modéliser cette dérive de biais :

$$\begin{aligned} \delta a_{biais}(t) &= \delta a_0 + d_a t \\ \delta \omega_{biais}(t) &= \delta \omega_0 + d_\omega t \end{aligned} \quad (I.5)$$

Comme expliqué ci-dessus, la dérive n'est pas constante. Pourtant, ce modèle permet de déterminer facilement l'ordre de sa grandeur pendant une période de temps limitée, notamment après la phase de préchauffage.

Parfois, les erreurs dues à la dérive du biais sont modélisées comme un processus de Markov de premier ordre [MAI 79]. Nous avons préféré adopter pour ce travail ce modèle exprimé dans l'équation suivante (Eq.I-6), où $1/\beta_a$ est le temps de corrélation de la variable aléatoire b_a , et w_a est un bruit blanc gaussien (Annexe B).

$$\delta \dot{a} = -\beta_a \delta a_{biais} + w_a \quad (I-6)$$

1.5.2. Facteur d'échelle :

Le facteur d'échelle est exprimé par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} a_{sortie} &= K_a a_{entree} \\ \omega_{sortie} &= K_\omega \omega_{entree} \end{aligned} \quad (I-7)$$

Il est surtout dû aux erreurs de fabrication et n'évolue pas considérablement. En conséquence, il peut être calibré une fois pour toutes dans la plupart des cas.

I.5.3.Non-linéarités :

Les non-linéarités sont présentes dans presque tout capteur existant. Elles sont souvent modélisées sous forme d'une série de type (avec les deux premiers termes étant le biais et le facteur d'échelle) :

$$\bar{a}_{sortie} = K_0 + K_1 \bar{a}_{entrée} + K_2 \bar{a}_{entrée}^2 + \dots \tag{I-8}$$

$$\bar{\omega}_{sortie} = L_0 + L_1 \bar{\omega}_{entrée} + L_2 \bar{\omega}_{entrée}^2 + \dots$$

I.5.4.Bruit :

Toutes les mesures seront certainement bruitées. Il s'agit du bruit dans les composants électroniques, le bruit de quantification, etc. On le modélise comme bruit additif :

$$\mathbf{a}_{sortie} = \mathbf{a}_{entrée} + \mathbf{v}_a \tag{I.9}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{sortie} = \boldsymbol{\omega}_{entrée} + \mathbf{v}_\omega$$

I.5.5.Non-orthogonalités :

Finalement, il faut mentionner une erreur au niveau de l'ensemble des capteurs dans la CI. Cette erreur, qui est spécifique aux centrales inertielle, est due à une imprécision éventuelle d'emplacement des capteurs individuels. En effet, mis à part des cas spéciaux, le repère nominal dans lequel les vecteurs d'accélération et de rotation sont donnés, est un système orthogonal et direct. Ses axes sont normalement parallèles aux bords du boîtier de la CI.

Quand maintenant les axes sensoriels des capteurs ne sont pas parfaitement alignés avec le repère nominal, ou quand ils ne sont pas exactement orthogonaux l'un par rapport à l'autre, des erreurs vont évidemment apparaître. Cependant, grâce aux méthodes de fabrications modernes, ces effets sont plutôt mineurs .

I.5.6.Les erreurs (Accéléromètres et Gyroscopes)

Avec les capteurs inertiels de précision faible, la source d'erreur prédominante est le biais qui est indépendant de la gravité et le bruit du signal du capteur.

Ainsi, les expressions de l'accélération et de la vitesse angulaire, mesurées par des accéléromètres et des gyroscopes respectivement, peuvent ainsi être simplifiées en considérant seulement les termes les plus dominants [SUK 00] :

$$f_i = f_{iT} + \delta f = f_{iT} + b_a + \eta \tag{I.10}$$

$$\omega_i = \omega_{iT} + \delta \omega = \omega_{iT} + b_\omega + \eta \tag{I.11}$$

ou η , est le bruit aléatoire (blanc) sur le signal capteur

b , est le biais résiduel

f_i , est l'accélération mesurée

f_a , est la vraie accélération qui devrait être mesurée par les accéléromètres.

Les mêmes notations sont utilisées pour les gyroscopes. La vitesse, la position et l'orientation incrémentales sont alors obtenues par l'intégration des équations Eq.I-10 et Eq.I-11

$$V_i = V_{i\tau} + bt + \int \eta dt \quad (I-12)$$

$$P_i = P_{i\tau} + \frac{bt^2}{2} + \iint \eta dt \quad (I-13)$$

$$\theta_i = \theta_{i\tau} + bt + \int \eta dt \quad (I-14)$$

Dans ces équations, le biais dans les capteurs joue un rôle important en causant la dérive dans la vitesse, la position et l'orientation fournies par l'unité inertielle. Le biais cause une erreur dans la vitesse et l'orientation qui augmente linéairement avec le temps, alors que l'erreur de position accroît quadratiquement. L'intégration d'un bruit blanc gaussien (Eq.I-13 –Eq.I-14) mène à un effet appelé marche aléatoire.

Comme nous allons voir, les données gyroscopiques sont utilisées pour mettre à jour la matrice de rotation R_{bn} . En conséquence, n'importe quelle dérive dans les données d'orientation provoquée par l'intégration des sorties gyroscopiques perturbera la matrice de rotation, causant des calculs d'accélération incorrects.

Par exemple, supposons que sur une CI standard à trois axes il n'y a aucun biais ou bruit dans les accéléromètres, aucun bruit dans les gyroscopes et qu'il n'y a aucune rotation angulaire mesurée. Supposons aussi que le gyroscope de l'axe z a un biais constant, alors l'erreur d'accélération sur l'accéléromètre le long de l'axe x due à ce biais s'écrira :

$$f_x = f_{xz} \sin(b_{gz} t) \quad (I-15)$$

et pour de petits incréments d'angle, on pourra simplifier cette expression par :

$$f_x = f_{xz} (b_{gz} t) \quad (I-16)$$

ainsi, l'erreur de vitesse peut s'écrire :

$$V_x = \frac{1}{2} f_{xz} b_{gz} t^2 \quad (I-17)$$

et, l'erreur de position s'écrira :

$$P_x = \frac{1}{6} f_{xz} b_{gz} t^3 \quad (I-18)$$

Par conséquent, un biais dans le gyroscope cause une erreur dans le calcul de position qui croît cubiquement avec le temps. Ainsi, les biais sur les gyroscopes jouent un rôle important en causant la dérive en position et en vitesse. Encore faut-il souligner que la qualité des gyroscopes dans une unité inertielle est un facteur déterminant dans l'estimation de la précision globale de la performance de navigation.

I.6. Equations de Navigation Inertielle et “Mécanisation” :

Cette partie est consacrée au développement des équations de navigation inertielle, Elle présente l’algorithme d’évolution et d’intégration des données inertielles. Pour mieux comprendre cette partie, se référer à l’annexe A qui décrit les systèmes de référencement et de coordonnées.

On notera tout de même que le repère utilisé comme système de référence pour la navigation locale est le système n , choisi notamment dans la dérivation des équations inertielles. Les équations d’erreur dérivées sont basées sur ces équations de navigation. à la fin de cette partie, la mécanisation discrète sera présentée.

I.6.1. Estimation de l’orientation :

Dans le développement des équations inertielles (appelé “mécanisation”), on commence d’abord par la détermination de la matrice d’orientation ou DCM, R_{bn} qui transforme le repère avion b dans le plan local de navigation n (cf. annexe A). Celle-ci est effectivement une fonction des trois angles d’orientation “Les angles d’Euler”, roulis ϕ , tangage θ et lacet ψ qu’on a groupés en un vecteur ρ .

On cherche maintenant la règle de calcul qui permet d’intégrer les mesures fournies par les gyroscopes de façon à obtenir l’orientation à chaque instant t . La première étape est la transformation du vecteur de rotation de l’avion de telle sorte qu’il exprime la rotation par rapport à la route (plus précisément le système n) et non plus par rapport au système inertielle, comme fourni par les gyroscopes.

Les gyroscopes mesurent la vitesse angulaire ω_{ib}^b entre le système b (body-avion) et i (inertiel) exprimés dans le système b , qui comporte ω_{nb}^b plus la rotation du plan local n par rapport à l’espace inertielle ω_{in}^b . Ce dernier est égal à la vitesse de rotation du plan local par rapport à la terre ω_{in}^b , plus la vitesse de rotation de la terre par rapport à l’espace inertielle ω_{ie}^b .

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ie}^b + \omega_{en}^b + \omega_{nb}^b \tag{I-19}$$

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - (\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b) = \omega_{ib}^b - \mathfrak{M}_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \tag{I-20}$$

Dans le cas où la qualité du gyroscope est si brute que nous puissions négliger le taux de rotation de la terre, ω_{in}^n peut être approximé par ω_{en}^n .

Pour trouver les angles d’Euler, il est nécessaire de calculer la relation entre $\omega_{nb}^b = [p \ q \ r]^T$ et $[\phi \ \theta \ \psi]^T$:

$$\omega_{nb}^b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathfrak{R}(\phi, x) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathfrak{R}(\phi, x)\mathfrak{R}(\theta, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = C_{\psi \phi \theta} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

Où p, q, r sont les vitesses angulaires (en radian/sec.) autour des axes x, y, z de la CI et fournies directement par les gyroscopes après l'enlèvement de ω_{en}^b et ω_{ic}^b , donc :

$$\dot{\rho} - \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = C_{\psi \phi \theta} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (1-22)$$

Il est évident dans cette équation que la mise à jour des angles de roulis et de lacet présente des singularités quand l'angle de tangage de l'avion est égale à $\pi/2$, mais cela ne pose pas de problème pour la localisation d'un avion commerciale (civil).

Avec ceci, il est facile d'obtenir l'orientation ρ par simple intégration et en introduisant l'équation Eq.1.22 on écrit,

$$\rho = \int_0^t C_{\psi \phi \theta} (\omega_{nb}^b - \mathfrak{R}_n^b (\omega_{en}^n + \omega_{ic}^n)) dt \quad (1-23)$$

1.6.2. Estimation de la position :

La position peut être exprimée par des coordonnées géographiques (latitude, longitude, hauteur) :

$$r^{LLa} = [\varphi \quad \lambda \quad h]^T$$

Et la vitesse dans le plan local n est définie par :

$$r^{LLa} = [\varphi \quad \lambda \quad h]^T \quad (1-24)$$

$$v^n = \begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & (r_T + h) \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{pmatrix} \quad (1-25)$$

Par conséquent, la dérivée temporelle des coordonnées géodésiques donne :

$$\dot{p}^{iJa} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & (r_T + h)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{pmatrix} = Dv^n \quad (I-26)$$

Où, D est une matrice de transformation du repère local n ou repère géographique LLa .

1.6.3.L'équation dynamique de la vitesse :

Le dérivé de la vitesse relative de la terre dans des coordonnées inertielles est donnée par :

$$\frac{d}{dt} v_e^i = f^i - g^i - \omega_{ie}^i v_e^i \quad (I-27)$$

cette équation représente le vecteur de la force spécifique (l'accélération inertielle) compensé par le vecteur de gravité local et l'accélération de Coriolis.

ω_{ie} , est la vitesse de rotation de la Terre.

Lorsque :

$$v_e = \mathfrak{R} v_e^n$$

Par l'application du théorème de Coriolis :

$$\dot{v}_e^n = \mathfrak{R}^n (\omega_{ie}^i v_e^i + \dot{v}_e^i) \quad (I.29)$$

$$= \mathfrak{R}_i^n (\omega_m^i v_e^i + f^i - g^i - \omega_{ie}^i v_e^i) \quad (I.30)$$

$$= f^n - g^n + (\omega_m^n - \omega_{ie}^n) v_e^n \quad (I.31)$$

$$= f^n - g^n + (\omega_{ne}^n - 2\omega_{ie}^n) v_e^n \quad (I.32)$$

Donc, l'équation dynamique de la vitesse est exprimée par [FAR 98] :

$$\dot{v}_e^n = \alpha_{en}^n = \mathfrak{R}_b^n f_{ib}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v_e^n - g^n \quad (I-33)$$

L'équation Eq.1-33 affirme simplement que l'accélération sur la surface de la terre est égale à l'accélération mesurée par les accéléromètres (la force spécifique f_b^h) après avoir soustrait l'accélération de Coriolis causée par la vitesse de l'aéronef et la rotation de la terre, $(2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^e \times v)$, et aussi la soustraction (la compensation) de l'accélération de gravité locale g^n , qui comporte la gravité de la terre G , et l'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre.

Accélération gravitationnelle = G : elle est dirigée vers le centre de la terre. Donc :
la gravité – gravitation + accélération centrifuge :

$$g^n = [0 \ 0 \ g_D]^T = G - \omega_{ie}^n \times \omega_{ie}^n R \quad (1-34)$$

g , est la composante D (Down) du vecteur gravité dans le repère local n . Elle ne se dirige pas vers le centre de la terre, mais est plutôt déplacée légèrement vers l'équateur. On voit dans la figure 16 que la gravité est fonction de la position sur la terre ($g^n(r^n)$), pour plus de détails sur le modèle de la gravité voir [FAR 98, p.223].

La CI mesurera l'accélération de la gravité et on ne peut pas connaître la différence entre cette accélération et la véritable accélération du véhicule. Pour trouver l'accélération du mobile, nous devons soustraire (compenser) les composantes de la gravité des accélérations mesurées.

Comme l'accélération fournie par la centrale est exprimée dans son repère local b , il faut alors commencer par exprimer l'accélération de la gravité dans ce repère. Ceci nous donne l'équation suivante Eq.1-35. Où $[g_x \ g_y \ g_z]^T$, sont les composantes mesurées de la gravité exprimées dans le repère véhicule b . On remarque que le vecteur de la gravité dans le repère mobile n'est pas dépendant de l'angle de lacet de l'aéronef.

$$\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \mathcal{R}_n^b [0 \ 0 \ g_D]^T = \begin{pmatrix} -g_D \sin \theta \\ g_D \cos \theta \sin \phi \\ g_D \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1-35)$$

1.6.4 La mécanisation :

Les centrales inertielles de type « Strapdown » fonctionnent en mode discret et produisent habituellement en sortie des incréments d'angle et de vitesse dans le repère "body", c'est à dire $\Delta \tilde{g}_{ib}^h$ et Δv_{ib}^h . Par conséquent, les algorithmes discrets d'intégration sont habituellement appliqués pour transformer ces mesures en quantités de navigation.

1.6.4.a. Compensation d'erreur :

Les sorties des gyroscopes seront corrigées en utilisant le modèle de biais, alors que les accéléromètres utilisent pour leur part le modèle de biais et le facteur d'échelle. Le biais et le facteur d'échelle ont été estimés par les essais expérimentaux.

$$\Delta\theta_{ib}^b = \Delta\tilde{\theta}_{ib}^b - b_m\Delta t \quad (I-36)$$

$$\Delta v_{ib}^b = \begin{pmatrix} 1/(1+S_{xx}) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1+S_{yy}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1+S_{zz}) \end{pmatrix} (\Delta\tilde{v}_{ib}^b - b_g\Delta t) \quad (I-37)$$

Là où $\Delta\theta_{ib}^b$ et Δv_{ib}^b sont les sorties corrigées des gyroscopes et des accéléromètres, respectivement. b_m et b_g sont les vecteurs des biais de gyroscope et d'accéléromètre, respectivement. S_{xx} , S_{yy} et S_{zz} sont les facteurs d'échelle des accéléromètres.

$\Delta t = t_k - t_{k-1}$, est l'incrément de temps pour l'intervalle de temps (t_{k-1}, t_k) . La période d'échantillonnage est habituellement dénotée avec l'unité $Hz = 1/\Delta t$.

I.6.4.b. Intégration d'attitude :

L'équation d'intégration pour l'attitude s'effectue dans le repère b parce que c'est dans ce repère qu'on exploite les angles d'attitude. L'intégration de la vitesse angulaire conformément à l'équation Eq.1-23 aboutit à :

$$P_{k+1} = P_k + C_{\text{quaternions}} (\omega_{ib,k}^b - \mathcal{R}_n^b(\omega_{ie,k}^n + \omega_{en,k}^n))\Delta t \quad (I-38)$$

I.6.4.c. Intégration de la vitesse et de la position :

L'incrément de vitesse dans le repère body est dû à la force spécifique et peut être exprimé dans le repère navigation n (le repère dans lequel on exploite les résultats) par :

$$\Delta v_f^n = \mathcal{R}_n^b \Delta v_f^b \quad (I-39)$$

Puis, l'incrément de vitesse est obtenu en appliquant la correction de l'accélération de Coriolis et de la pesanteur :

$$\Delta v^n = \Delta v_f^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \Delta t - g^n \Delta t \quad (I-40)$$

L'intégration de la vitesse peut être effectuée comme :

$$v_{k+1}^n = v_k^n + \Delta v_{k+1}^n \quad (I-41)$$

Or, l'intégrale de l'accélération à la vitesse (Eq.1.33) devient ainsi :

$$v_{an,k+1}^n = v_{an,k}^n + a_{an,k}^n \Delta t \quad (I-42)$$

et les positions sont intégrées en utilisant la méthode classique d'intégration :

$$r_{k+1}^{II,a} = r_k^{II,a} + \begin{pmatrix} 1/(r_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(r_T + h) \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (v_k^n \Delta t) \quad (1-43)$$

L'objectif pour un système de navigation inertielle est donc de résoudre, ou de "mécaniser", les équations ci-dessus afin de déterminer les variables de position représentant le mouvement du véhicule au-dessus de la surface de la terre. Pour ce faire, tous les termes dans les équations doivent d'abord être exprimés dans le système de coordonnées commun (voir annexe A).

Le processus permettant de résoudre les équations informatiquement se compose d'une initialisation des variables de position, de vitesse et d'orientation aux conditions initiales, en lisant les gyroscopes et de calcul de l'orientation actuelle. Ensuite, en lisant les accéléromètres, il s'agit de calculer la gravitation et les accélérations de Coriolis et centrifuge en utilisant la position et la vitesse du dernier cycle, puis de transformer la force spécifique dans le repère n .

Finalement, il faut faire l'intégration pour calculer la position et la vitesse pour le cycle courant en tenant en compte de l'orientation. La solution des équations décrites dans cette section peut être visualisée avec le schéma fonctionnel montré ci-dessous. Le schéma en dessous récapitule la mécanisation globale de l'INS dans un repère local n .

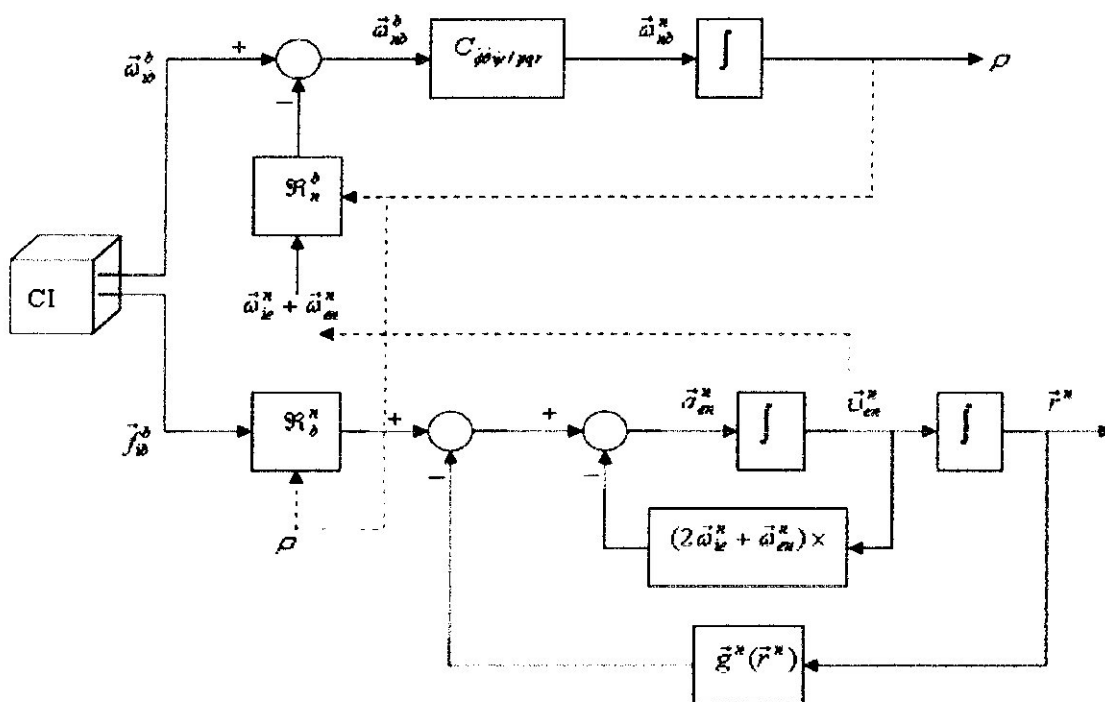


Figure I.9: Evaluation des données inertielles (mécanisation globale de l'INS)

On peut ainsi résumer les équations de mécanisation de navigation inertielle qui constitueront le modèle d'équations principales du système pour la navigation hybride (Eq.I-44) :

$$\begin{aligned} \dot{r}^n &= v^n \quad \text{ou} \quad \dot{r}^{I/a} = Dv^n \\ \dot{v}^n &= a_{nn}^n = \mathcal{R}_b^n f_{ib}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n - g^n \\ \dot{\mathcal{R}}_b^n &= \mathcal{R}_b^n (S(\omega_{nb}^b)) \end{aligned} \quad (I.44)$$

On peut résumer les équations de mécanisation par:

1. Calcul de l'orientation en tenant en compte de la vitesse de rotation de la terre.
2. En tenant compte de l'orientation, transformation de la force spécifique dans le repère n .
3. La soustraction (la compensation) de la gravitation de la force spécifique mesurée.
4. Compensation de la force centrifuge due à la position excentrée du véhicule par rapport au centre de la terre, (les points 3 et 4 sont inclus dans $g_n(r_n)$).
5. Compensation de la force de Coriolis due au mouvement du véhicule sur la surface de la terre (peut être négligé).
6. Réalisation de deux intégrations -incorporant des conditions initiales - pour obtenir la position et la vitesse.

1.7. Les avantages et les inconvénients du système inertielle :

En résumé, on trouve les propriétés suivantes pour les systèmes à navigation inertielle en vue d'une application dans un système hybride:

Les avantages :

Solution complète: en sortie on obtient position, vitesse, orientation, accélération et rotation.

Haute précision à court terme: la précision du système est très bonne sur une courte durée, donc avant que les effets de dérive ne commencent à devenir trop forts. Il est évident qu'on suppose le système bien initialisé.

Haute disponibilité: le système est entièrement autonome, c'est à dire qu'il ne dépend pas de dispositifs extérieurs. En outre, les centrales inertielle sont techniquement très fiables.

Haut débit de données: Des centrales inertielle ont typiquement une fréquence d'échantillonnage de 100-150 Hz.

Pas d'encombrement : les CI ont une taille raisonnablement réduite pour envisager tout type d'application, leur taille est de plus en plus petite et ne nécessite pas de contrainte de placement spéciale

Les inconvénients :

Forte dérive: les effets du biais et de la marche aléatoire, bien que relativement faible dans les accéléromètres et les gyroscopes, mènent à une très forte dérive après la double intégration, comme on va le voir dans les chapitres suivants.

Pas d'information absolue: étant un système de navigation à l'estime, la position et la vitesse sont toujours calculées à partir des conditions initiales, qui doivent être fournies par un dispositif extérieur. Un INS ne peut pas s'initialiser seul. Un INS peut s'initialiser seul en ce qui concerne

l'angle de cap absolu, quand ses gyroscopes sont suffisamment précis pour trouver le nord à partir de la rotation de la terre.

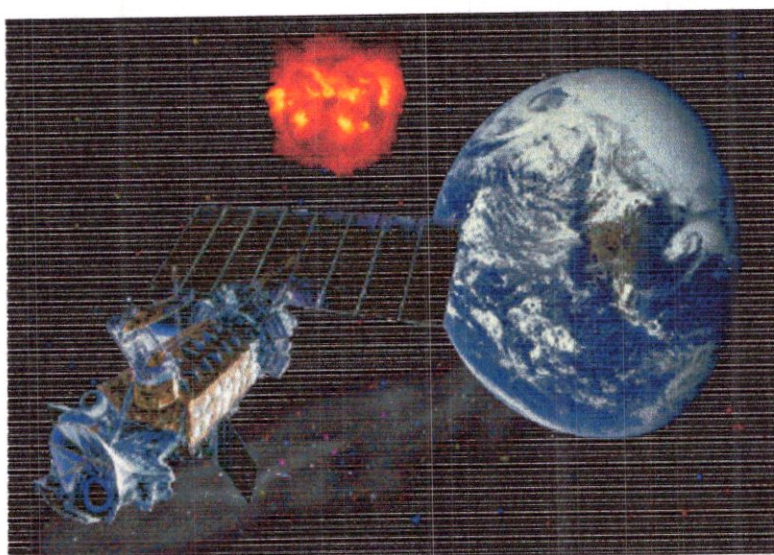
Sensibilité à la gravité: bien qu'on ait pris des mesures pour compenser les effets de la gravité, il en résulte toutefois encore des erreurs, notamment en conséquence des erreurs d'orientation.

Conclusion :

Dans ce chapitre, les principes de la navigation inertielle sont décrits. Nous avons présenté les équations de la navigation inertielle, puis les équations différentielles qui régissent l'évolution des erreurs de navigation inertielle. Ces erreurs ont été modélisées ici à partir de considérations purement mathématiques. Le défaut propre aux capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres) et les erreurs d'alignement (initialisation de la centrale inertielle) produisent des erreurs de navigation qui ne cessent d'augmenter avec le temps. Bien que les erreurs des variables horizontales soient atténuées par le phénomène de Schuler, l'erreur de navigation devient rapidement incompatible des objectifs de la mission d'un aéronef volant quelques dizaines de minutes. D'où la nécessité de faire appel aux moyens de recalage de navigation qui vont permettre de corriger ces mesures inertielles. Les moyens de recalage de la navigation inertielle sont divers. On se contentera dans le chapitre IV de décrire le recalage de navigation par mesures GPS.

Chapitre II

Le GPS (Global Positioning System)



Résumé:

Ce chapitre est destiné à expliciter le système de positionnement par satellites GPS (Global Positioning System), son fonctionnement, ses différents types de positionnement (absolus et relatif), ses avantages et ses inconvénients qui justifieront justement la raison de vouloir fusionner « hybrider » les données satellitaires aux données inertielles décrites déjà dans le chapitre(1). Nous verrons aussi dans ce chapitre les diverses améliorations apportées à ce système en matière d'intégrité et de continuité de fonctionnement. Dans ce qui suivra, j'ai supposé que les données GPS étaient valides et intégrées sans remettre en cause son intégrité.

II.1.GENERALITES :

Les systèmes de navigation par satellites actuels (GPS, Glonass) ou futur (Galileo) fournissent une position et une date à chaque instant, partout dans le monde et quelles que soient les conditions météorologiques. Cette position et ce temps sont déterminés à partir de mesures de distance entre le récepteur et plusieurs satellites dont la position est connue. Ces mesures de distance sont en réalité des mesures de temps de propagation du signal entre chaque satellite et le récepteur. Le signal, émis en continu par le satellite, est modulé par un code pseudo aléatoire qui sert de marque temporelle et permet de dater le moment d'émission du signal.

La précision horizontale obtenue est inférieure à 25 m, 95 % du temps. Dans le cadre de l'aviation civile, le système GPS est déjà largement utilisé dans les phases de non précision (en route, océanique, approche de non précision). La précision fournie serait suffisante pour les phases en vol d'un drone de type avion, sauf application spécifique. Pour le décollage ou l'atterrissage, l'utilisation de corrections différentielles est plus que souhaitable, même dans le cas d'une hybridation avec une centrale inertielle. Ces corrections peuvent être transmises par un système au sol (GBAS : Ground Based Augmentation System) ou en orbite (SBAS : Satellite Based Augmentation System). Le GPS différentiel classique est basé sur une station de référence au niveau du sol, composée d'un récepteur GPS connaissant parfaitement sa position et d'un émetteur. Ayant sa propre position et la position des satellites, les biais affectant le signal peuvent être déterminés. En transmettant ces biais à un autre récepteur se situant dans une zone proche, celui-ci subissant le même type de biais peut corriger ses propres mesures et améliorer sa position. La précision est alors de quelques mètres à quelques centimètres suivant la mesure que l'on utilise.

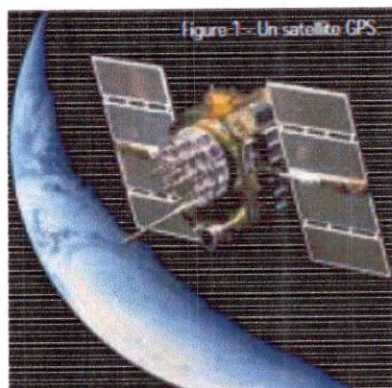


Fig II.1 : GPS Satellite GPS Block

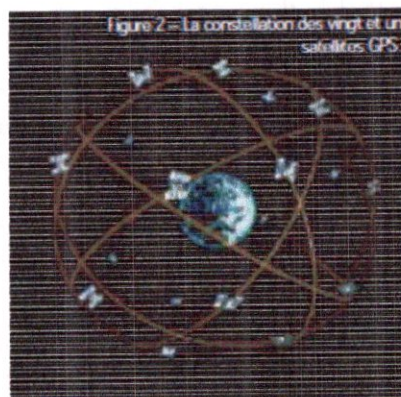


Fig II.2 :Représentation de la constellation

Les corrections différentielles peuvent également être fournies par des satellites. Ces satellites sont en orbite géostationnaire et ne couvrent qu'une zone spécifique (Etats Unis pour WAAS, Japon pour MSAS, Europe pour Egnos à partir de 2004). Les transmissions sont néanmoins dans

le même format que celles des satellites GPS et les récepteurs SBAS peuvent suivre et traiter les informations de chacun de ces systèmes.

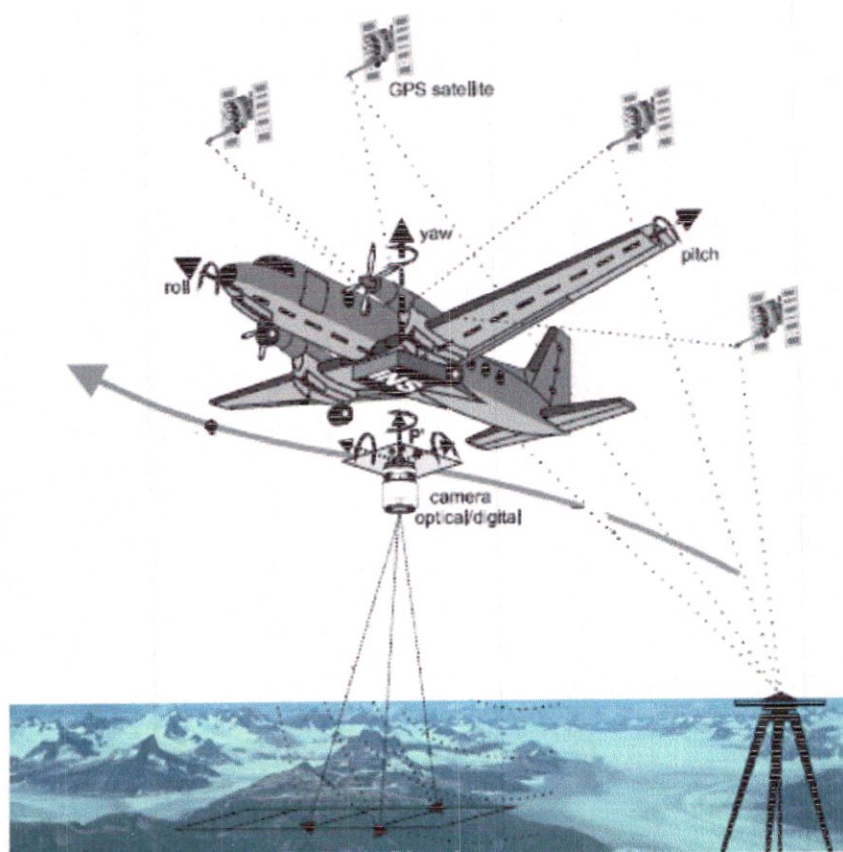


Figure 11.3 : DGPS

Les signaux sont transmis par les satellites sur deux fréquences: $L_1 = 1575.42$ MHz et $L_2 = 1227.6$ MHz. Leur longueur d'onde respective est $\lambda_1 = 19$ cm et $\lambda_2 = 24.4$ cm. Ces signaux sont constitués par modulation de la porteuse. Ils comprennent un message de navigation et deux codes pseudo-aléatoires, le code C/A et le code P. Le code C/A (Coarse/Acquisition) est transmis sur L_1 uniquement. Le code P (Precision) est transmis sur L_1 et L_2 , ce qui permet de déterminer les biais ionosphériques et de les corriger. Habituellement, il est crypté en code Y ce qui le rend inutilisable pour des usagers civils. Malgré tout, certains types de récepteurs appelés codeless, sont capables de traiter les mesures sans avoir la clé de décryptage. Le message de navigation, quant à lui, est modulé sur les deux porteuses. Il contient des informations sur les éphémérides des satellites, le comportement des horloges à bord et sur le statut du système. Le SPS (Standard Positioning Service) est basé sur le code C/A tandis que le service PPS (Precise Positioning

Service) dépend principalement du code P (crypté en code Y pour contrôler l'accès). La précision du positionnement fourni par le SPS fut volontairement dégradée jusqu'en mai 2000. Une fonction d'accès sélectif (Selective Availability- SA) était en effet implémentée de façon à limiter les capacités des récepteurs. Les utilisateurs PPS possédaient, en plus de la clé de décryptage, les informations permettant de corriger ce SA. Cette fonction devrait être supprimée sur les prochaines générations de satellites.

II.2.Principe des mesures GPS

Deux types de mesures sont disponibles pour l'utilisateur, chacune équivalente à la distance entre le récepteur et le satellite aux erreurs près (biais d'horloges, atmosphériques, multitrajets, bruits récepteurs).

II.2.1. Mesure par le code :

Si on peut mesurer la durée de propagation d'un signal émis par un satellite i jusqu'à son arrivée à un récepteur j , on peut alors estimer la distance du satellite au récepteur. Dans ce but, les satellites génèrent des codes pseudo-aléatoires (C/A et (ou) P (ou Y)) qu'ils émettent en continu.

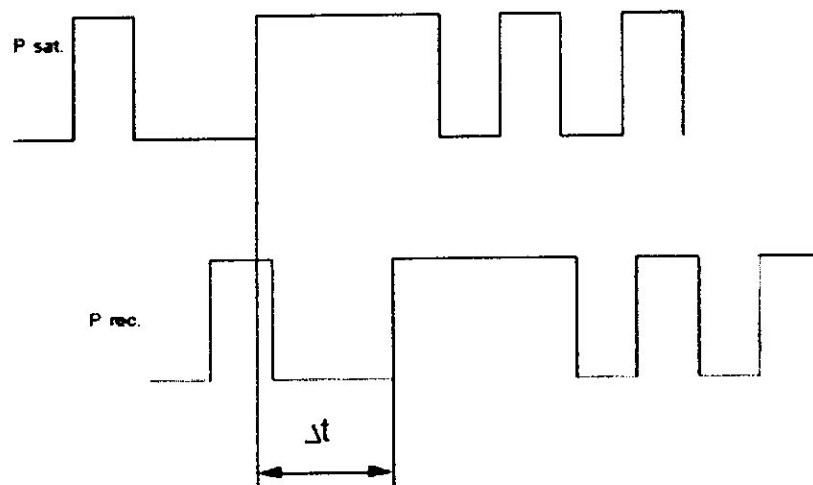


Figure II.4 : mesure par le code

Le récepteur génère une réplique de ce code en synchronisation avec le satellite et la compare au signal reçu. Le décalage en temps Δt correspond alors au temps de parcours satellite-récepteur.

Les horloges satellite et récepteur n'étant pas parfaitement synchronisées, la mesure P_{ij} n'est qu'une mesure de pseudodistance. Elle vaut :

$$P_j^i = \rho_j^i + c\delta t = \sqrt{(x_j - x^i)^2 + (y_j - y^i)^2 + (z_j - z^i)^2} \quad (\text{II.1})$$

Où

- $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ est la position connue du satellite i .
- $X_j = (x_j, y_j, z_j)$ est la position du récepteur j .
- δt est l'erreur d'horloge du récepteur.

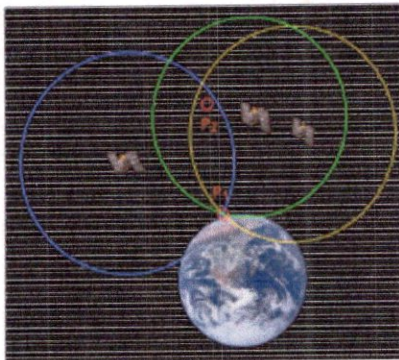


Figure II.5 : principe de positionnement

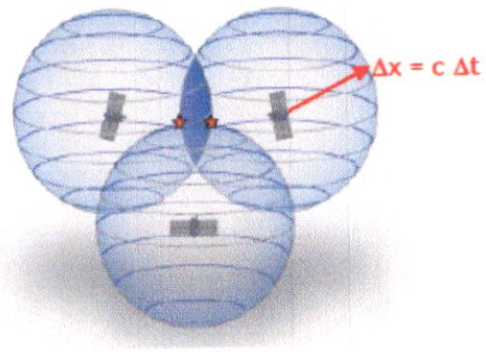


Figure II.6 : deduction du point dans l'espace

Pour se positionner à l'aide de cette mesure, 4 satellites sont donc nécessaires (3 inconnues de position et 1 de temps).

II.2.2. La mesure par la phase :

La seconde mesure provient directement de la porteuse du signal ou plus précisément de la différence entre la phase du signal reçu et la phase de l'oscillateur du récepteur. Le suivi en continu de l'évolution de cette phase permet d'évaluer la variation de distance entre un satellite et le récepteur avec une grande précision. Cette mesure de phase Φ est également équivalente à la distance couverte modulo la longueur d'onde; il existe une ambiguïté N sur le nombre entier de cycles parcourus .

$$\phi_j^i = -\rho_j^i + \lambda N_j^i \quad (\text{II.2})$$

Où λ est la longueur d'onde du signal observé.

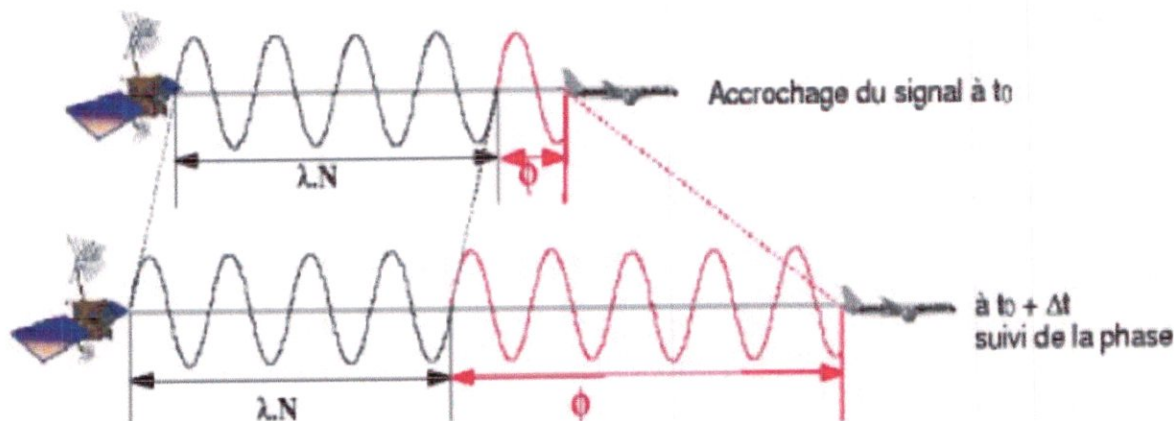


Figure II.7 : mesure par la phase

La longueur d'onde des signaux civils GPS étant de l'ordre de 20 cm, si cette ambiguïté est déterminée, la précision sur la position sera centimétrique. Ce type de positionnement n'est pas instantané, il nécessite de traiter les informations sur plusieurs époques. Un compteur incrémente la phase mesurée de façon à conserver l'ambiguïté entière constante et égale à celle du premier instant de mesure. Ce nombre reste constant à condition que le récepteur capte le signal du satellite en permanence. Si un saut de cycle se produit à cause d'une perte momentanée du signal, la valeur de l'ambiguïté entière change. Dès que le récepteur accroche à nouveau le signal, il peut reprendre son comptage mais un nombre entier de cycles est manquant. Les causes physiques à l'origine des pertes de signal sont nombreuses : obstruction, affaiblissement du signal pour un satellite bas sur l'horizon, activité géomagnétique, scintillation ionosphérique, multitrajets... L'ensemble des biais affectant la mesure étant très supérieur à la longueur d'onde du signal, une station de référence dans une zone proche (moins de 10 km) est nécessaire. Pour réduire au maximum les erreurs sur la mesure, un satellite de référence doit également être considéré, 5 satellites au minimum sont alors nécessaires. Aucune technique actuelle de résolution d'ambiguïtés en vol n'est totalement sûre.

II.2.3. Bruits de mesures, erreurs, biais :

Différentes erreurs perturbent les mesures. Dans le tableau ci-dessous toutes ces erreurs et biais sont regroupés suivant le lieu où ils se manifestent.

Sources d'erreurs sur les mesures GPS :

Satellite :

- erreurs d'orbite.
- biais d'horloges.
- centre de phase de l'antenne.

Trajet :

- réfraction ionosphérique.
- réfraction troposphérique.
- multitrajets

Récepteur :

- erreur d'horloge.
- centre de phase de l'antenne.
- bruit récepteur.
- sauts de cycles.

Les multitrajets sont une source d'erreurs importante pour le positionnement. Modéliser leurs effets en fonction de l'environnement étant très difficile, il convient de prendre certaines précautions afin de les réduire au maximum :

- utiliser des antennes conçues pour recevoir des ondes polarisées à droite (les signaux GPS sont de ce type et une réflexion sur un mur ou le sol change le sens de cette polarisation),
- utiliser des matériaux absorbant les radio-fréquences autour des antennes,
- utiliser des récepteurs pouvant en éliminer une partie (corrélateurs étroits, multicorrélateurs)

II.3. Positionnement :

Les techniques de positionnement et la précision du résultat dépendent des mesures utilisées, du temps d'observation, des combinaisons de mesures disponibles ou encore de la qualité des récepteurs et des antennes.

II.3.1. Le Positionnement absolu de navigation :

C'est le positionnement de base que donne un récepteur de navigation qui ne capte que le C/A code. Il se fait dans le mode SPS (Standard Positioning Service) et est souvent appelé dans le langage courant "mode naturel".

C'est du positionnement absolu.

Les récepteurs utilisent les mesures de C/A code, et obtiennent la première position en quelques dizaines de secondes puis une position par époque d'observation tant que le récepteur ne perd pas le signal.

La précision est de l'ordre de 5 m en planimétrie, 10 m en altimétrie sans la S.A.

II.3.2. Le positionnement différentiel DGPS :

Le GPS différentiel classique correspond à des simples différences des mesures de code par rapport à une station de référence. Pour que ces différences aient un sens, il faut les effectuer au même instant. Or, d'une part les horloges du récepteur de l'utilisateur et de celui de la station de référence ne sont pas synchronisées, d'autre part la station de référence doit réémettre ses propres mesures ou les corrections à apporter. Il est donc nécessaire, avant toute combinaison, d'extrapoler les mesures de référence. Les cartes DGPS actuelles ont toutes une fonction interne permettant cette synchronisation des mesures reçues par rapport aux mesures réalisées par l'utilisateur.

Les erreurs d'horloges satellite se compensent pour des lignes de base (distance usager-station de référence) inférieures à 20 km. Les erreurs de propagation ionosphérique et troposphérique diminuent fortement pour des distances inférieures à 10 km, mais la corrélation troposphérique

décroit rapidement quand la différence d'altitude augmente. En général, on préfère estimer ces erreurs atmosphériques à partir des modèles et les retirer avant la différenciation. La plupart des cartes GPS ont un modèle d'atmosphère intégré mais celui-ci ne peut tout compenser, en particulier les changements climatiques entre la station de référence et le récepteur.

II.3.3. Lissage du code par la phase :

Cette méthode est une méthode hybride qui exploite les deux types d'observations sur le code et sur la phase. L'idée est que les pseudodistances sur le code donnent une position instantanée mais peu précise et que la phase peut permettre de lisser, c'est à dire améliorer les mesures de codes successives sans avoir à résoudre les ambiguïtés. Le résultat d'un tel positionnement est que le positionnement du mobile est métrique ou décimétrique mais la position relative des points de la trajectoire est centimétrique.

Une variante de la méthode est le lissage par des mesures Doppler, celles-ci pouvant être déduites des mesures de phases successives.

II.3.4. RTK – Real Time Kinematic (Cinématique temps réel)

Le mode RTK est basé sur l'utilisation des mesures de phase et la résolution des ambiguïtés en temps réel. Il utilise des méthodes de résolution d'ambiguïtés « en vol » (AROF : Ambiguity Resolution On the Fly) très performantes sur des temps d'observation relativement courts.

Cinq satellites au minimum sont nécessaires pour ce type de positionnement. Le temps de résolution est lié au nombre de satellites visibles, il peut passer de quelques minutes à quelques secondes suivant leur nombre et leur distribution spatiale.

Ce type de positionnement reste malgré tout limité à une dizaine de kilomètres autour de la station de référence, 15 km si les deux fréquences sont disponibles. Si on veut mettre en place des techniques d'intégrité du genre RAIM (Receiver Autonomous Integrity Monitoring), un sixième satellite est nécessaire pour détecter un problème et il en faut encore un septième pour identifier le satellite émettant des mesures défectueuses. Il faut cependant être vigilant sur le résultat obtenu. L'estimateur de position est un estimateur biaisé. Il est calculé à partir de la solution d'ambiguïtés. L'écart-type sur la position déterminée est de quelques centimètres même si la résolution s'avère être erronée. Il existe encore peu de cartes GPS pouvant traiter les ambiguïtés en temps réel. Celles-ci fournissent un résultat avec une probabilité associée (95 %, 99 %, 99.9 %). Plus le besoin de sécurité est important, plus elles nécessiteront de temps pour fournir une position. On est obligé, en général, de faire un compromis entre sécurité et rapidité.

II.3.5. Bi-fréquence :

Si les mesures sont disponibles sur les deux fréquences, on peut former des combinaisons linéaires permettant d'éliminer ou de réduire certaines sources d'erreurs. Les combinaisons suivantes peuvent être intéressantes dans notre cas.

Combinaison indépendante des effets ionosphériques

$$\phi_3 = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 \phi_1 - f_2^2 \phi_2) \quad (II-3)$$

De plus, la différence $\phi_3 - P_3$ peut être utilisée pour la détection des multitrajets.

$$P_3 = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 P_1 - f_2^2 P_2) \quad (II-4)$$

Wide-laning :

Le principe du Wide-laning est de combiner les mesures pour augmenter les longueurs d'onde tout en limitant la propagation des erreurs systématiques et stochastiques. La combinaison optimale est :

$$\phi_3 = \frac{1}{f_1 - f_2} (f_1 \phi_1 - f_2 \phi_2) \quad (II-5)$$

La longueur d'onde de (0.86 m) est environ 4 fois plus grande que les longueurs d'onde initiales, la résolution d'ambiguïtés se fera alors plus rapidement et plus aisément qu'à partir des mesures et λ_2 .

II.4. Evolution vers l'intégrité

II.4.1. Le GPS :

La modernisation des satellites GPS est prévue sur les dix prochaines années et devrait permettre d'estimer plus précisément la position, la vitesse et le temps, en particulier pour les utilisateurs civils.

Les satellites Block IIR vont être mis en place à partir de 2003. Le code C/A, actuellement associé à la fréquence L1, sera ajouté à la porteuse L2. Les utilisateurs civils pourront ainsi déterminer en temps réel le retard ionosphérique et le corriger.

Des fonctions réservées aux militaires seront également ajoutées sur les deux fréquences. Le lancement des satellites Block IIF est prévu pour débuter en 2005. Ils posséderont en supplément une nouvelle fréquence civile, appelée L5. Ce nouveau signal sera transmis sur une fréquence de 1176.45 MHz, dans une bande protégée (contrairement à L2) par l'Union Internationale des Télécommunications pour les besoins de la radionavigation aéronautique.

Le code associé sera transmis avec une fréquence de 10.23 MHz ce qui procurera un niveau de précision comparable à celui du code P actuel. De plus, il pourra être acquis directement, sans passer par un code C/A au préalable.

Ce signal sera plus résistant aux interférences et aura de meilleures performances vis-à-vis des signaux faibles.

Egalement une porteuse non modulée par des signaux binaires est demandée. Elle permettrait de résoudre les ambiguïtés et de suivre la phase pour des signaux ayant un rapport signal à bruit plus bas que ce qui est permis actuellement.

Bien que la fonction première de ce signal soit la sécurité de la navigation aérienne, il sera également un troisième signal pour tous les utilisateurs.

Pour plus de détails sur la structure du signal L5, on peut se référer à [techniques d'ingénieurs2000]

II.4.2 Galileo :

Le système Galileo est un système européen civil dont la mise en place est prévue pour 2008. Il est conçu pour être indépendant des autres systèmes de navigation par satellites, tout en étant interopérable avec ces derniers. Il fournira des niveaux de performances comparables aux autres systèmes, avec un haut niveau de redondance pour les applications de sécurité.

Il fournira :

- Trois signaux de navigation pour les services suivants :
- Service ouvert : deux signaux permettront d'obtenir gratuitement position et temps avec une précision comparable à celle obtenue à partir des GPS block IIF.
- Service de sécurité (Safety of Life) : ce service procurera une intégrité avec un temps d'alarme défini.
- Service commercial : des données cryptées seront disponibles sur les signaux du service ouvert. De plus, ce service procurera une troisième fréquence qui permettra d'utiliser les techniques de résolution d'ambiguïtés sur trois porteuses TCAR, afin d'augmenter la précision.
- Deux signaux à accès contrôlés pour le service régulé : ils contiendront des codes et des informations cryptées, accessibles à des utilisateurs spécifiques nécessitant une continuité de service importante.
- Des composantes locales afin de répondre aux besoins particuliers des usagers (précision, intégrité, ré-acquisition du signal ...).

Le système Galileo sera constitué de différentes composantes globale, régionales et locales :

1-Composante globale :

La composante globale est formée d'une constellation de satellites, jusqu'à trente, placés en orbite moyenne de manière à fournir une couverture mondiale adéquate. Elle comprend également un segment de contrôle au sol, chargé de surveiller cette constellation et de produire les informations d'intégrité.

2-Composante régionale :

Les composantes régionales non-européennes sont composées de segment au sol fournissant des informations d'intégrité dans leur zones respectives. Chaque zone aura la responsabilité du développement et des opérations si elle ne désire pas adopter le service d'intégrité globale. Egnos fournira des informations d'intégrité et des corrections différentielles pour les systèmes GPS et GLONASS, à partir de satellites géostationnaires couvrant la zone Europe.

3- Composante locale:

Certains utilisateurs ont des exigences supérieures à celles disponibles à partir du système global. Les composantes locales seront chargées de remplir ces exigences en fournissant par exemple des corrections, des cartes, des bases de données, des signaux supplémentaires (pseudolites)...

II.4.3.Egnos :

Pour améliorer la précision tout autant que l'intégrité du positionnement fourni par les systèmes GPS et Glonass, des augmentations de ces systèmes sont actuellement mises en place.

Tous les systèmes d'amélioration SBAS (Satellite Based Augmentation System) reposent sur la même architecture qui est composée d'un segment spatial et d'un segment sol. Le segment spatial est constitué de satellites géostationnaires (GEO). Le segment sol est constitué de stations de référence vérifiant les performances du système. Il détermine les messages de navigation, de corrections et d'intégrité et les transmet aux satellites géostationnaires.

Le système européen EGNOS est mis en place afin de fournir un service amélioré de GPS et Glonass et de répondre aux besoins de la communauté aéronautique.

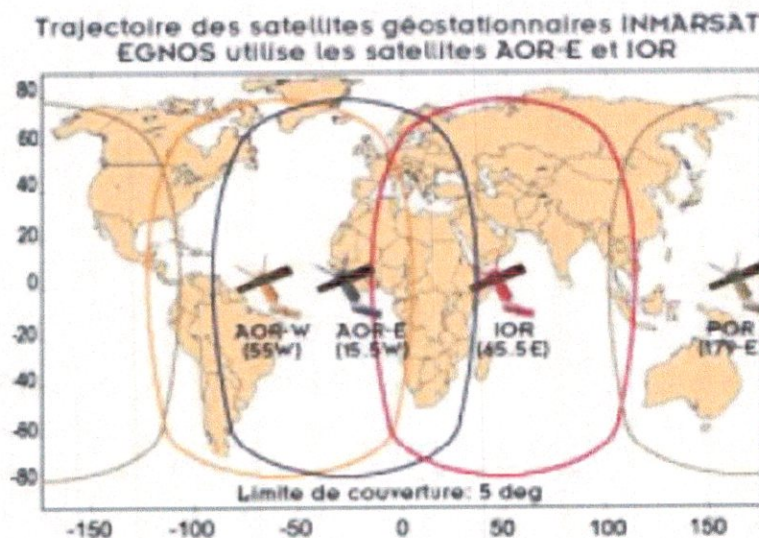


Figure II.8 : trajectoire des satellites INMARSAT

Les services qui seront offerts par EGNOS sont les suivants :

- un signal de type GPS émis par les satellites géostationnaires afin d'améliorer la disponibilité la continuité de service du positionnement
- un canal d'intégrité (GIC) pour améliorer l'intégrité de la navigation basée sur GPS et Glonass.
- des corrections différentielles large zone pour améliorer la précision des utilisateur de GPS-SPS et de Glonass.
- une émission d'un temps précis synchronisé avec l'UTC.

Il répondra ainsi aux besoins de l'aviation civile comme moyen unique de navigation pour toutes les phases de vol jusqu'à l'atterrissage de précision CAT-I, aux besoins de navigation maritime et fluviale et aux besoins du transport routier ou ferroviaire.

Le système EGNOS est aussi conçu pour être compatible et interopérable avec les autres systèmes d'amélioration de GNSS, tels que les systèmes locaux ou régionaux (WAAS et MSAS).

II.5. Niveau de précision :

La précision fournie en mode de localisation "classique", obtenue à partir des mesures de code est d'environ 30 m en horizontale et de 50 m en verticale.

En tenant compte des corrections différentielles fournies par une station de référence, la précision est inférieure à 5 m.

Si des récepteurs bi-fréquence peuvent être utilisés, ces précisions peuvent encore être divisées par 2.

Avec le futur système européen Galileo et les futures générations de satellites GPS, au moins deux fréquences seront disponibles pour le civil. Ce n'est malgré tout pas suffisant pour l'atterrissage.

	Précision horizontale	Précision verticale
GPS SPS	30 m	50 m
GPS PPS	22 m	27.7 m
DGPS	4 m	5 m
Bi-fréquence (code)	4 m	5 m
SBAS (Egnos, WAAS)	2 m	4 m
RTK	2 m	3 m

Figure II.9- Précision (95 %) des systèmes de navigation par satellites

On peut noter que, du fait de la géométrie récepteurs-satellites, la précision est meilleure dans le plan horizontal que dans le plan vertical. Dans le cas où on veut appliquer le GPS pour un atterrissage, la composante verticale est la plus importante, une erreur quelle soit pouvant entraîner le crash de l'aéronef.

Il ne faut pas oublier cependant que le système GPS est un système militaire américain dont la précision peut être dégradée à tout instant.

II.6. Les avantages et les inconvénients du système GPS :

En résumé, notons les caractéristiques générales des systèmes à navigation par satellites en vue d'une application dans un système hybride embarqué pour des applications aériennes.

Les avantages :

Précision à long terme: La précision ne se dégrade pas en fonction du temps, il n'y a pas de dérive.

Position absolue: On obtient toujours une position absolue qui ne dépend pas des conditions initiales.

Conditions opérationnelles: Le système marche jour et nuit et n'a pas besoin de conditions spéciales telles que support, orientation ou température.

Les inconvénients :

Le GPS est un système américain sur lequel les utilisateurs européens n'ont aucun contrôle ni aucune garantie légale de bon fonctionnement.

Les trajets multiples : ceci se produit quand le signal de GPS est reflété par des objets tels que des grands bâtiments ou de grandes surfaces de roche avant qu'il atteigne le récepteur.

Ceci augmente le temps de parcours du signal, causant par conséquent une surévaluation du temps de vol et générant par conséquent des erreurs.

Faible disponibilité :

la précision dépend du nombre de satellites visibles par le récepteur (plus un récepteur GPS peut « voir » de satellites, meilleure est la précision). Dans les applications dans le domaine automobile, les conditions de visibilité sont souvent dégradées (les bâtiments, les tunnels, l'interférence électronique, ou parfois même le feuillage dense) ; ceci peut bloquer la réception du signal, entraînant des erreurs de position voir causant un arrêt temporaire du système. Typiquement, les unités de GPS ne fonctionneront pas dans des environnements d'intérieur, sous l'eau ou sous terre !

Géométrie des satellites/ombre :

ceci se rapporte à la position relative des satellites selon l'instant d'observation. La géométrie satellitaire idéale existe quand les satellites sont situés à des angles relativement larges. On dispose d'une géométrie faible quand les satellites sont alignés ou en groupe serré.

Exactitude variable:

pour les mêmes raisons, l'exactitude des mesures de position peut varier considérablement. Tandis que sur une route en pleine campagne l'accès à disons 8 satellites peut donner une précision sub-métrique, les erreurs dans une ville avec ses « gorges de bâtiments » vont être de l'ordre d'une dizaine de mètres.

Pas d'information d'orientation:

à priori, un GPS ne détermine que la position, mais par le changement de la position on peut en déduire la vitesse et l'angle de lacet. Avec un ensemble d'antennes on pourrait même calculer les angles de roulis et de tangage, mais ces systèmes coûtent assez cher.

Mauvaise précision en z:

la précision sur l'axe vertical est facilement dégradée en cas de visibilité limitée.

Fréquence d'échantillonnage faible:

pourvu que les conditions de réception soient suffisantes, la période d'échantillonnage est d'environ 100 ms, alors ce qu'un INS peut fournir les données toutes les 10ms.

Le retard de l'ionosphère et de la troposphère :

le signal satellite ralentit pendant qu'il traverse l'atmosphère. Le système de GPS emploie un modèle intégré qui tient compte d'un retard moyen pour corriger partiellement ce type d'erreur.

Dégradation intentionnelle du signal satellitaire:

la disponibilité sélective (SA) est une dégradation intentionnelle du signal imposée par le département de défense des États-Unis (USDoD³⁴). Elle a été prévue pour empêcher les adversaires militaires d'employer les signaux fortement précis du GPS. Le gouvernement américain a arrêté la disponibilité sélective en mai 2000, ce qui a amélioré de manière significative l'exactitude des récepteurs civils du GPS. Bien qu'elle a été supprimée en mai 2000, personne ne peut exclure définitivement la réintroduction de cette dégradation à un moment « jugé critique » !

Conclusion :

Après avoir décrit le système GPS, et après avoir cité ses avantages et ses inconvénients; il est clair que ce système satellitaire ainsi que le navigateur inertielle sont deux systèmes aux caractéristiques complémentaires, et se présentent donc a priori comme de bons sujets à l'hybridation qui sera décrite plus en détail dans le chapitre V.

Les avantages et inconvénients des systèmes inertiels et satellitaires conduisent donc à l'idée d'intégration des deux outils d'aide à la navigation. L'intégration des deux systèmes permet de corriger les dérives des capteurs inertiels et d'augmenter le rythme de mesures et la surdétermination.

La méthode retenue dans ce travail tient compte du fait que les paramètres de correction obtenus à un update ne sont pas indépendants de ceux qui sont obtenus à l'update précédent. Cette caractéristique est modélisée à l'aide d'un filtre de Kalman. De manière générale, le filtre de Kalman permet d'étendre l'estimation des paramètres aux applications cinématiques, c'est-à-dire à des paramètres variant au cours du temps, notion cruciale en navigation.

Ce filtre met en commun un modèle classique des observations qui les lie aux inconnues et un modèle de mouvement permettant de prédire le comportement des inconnues. Les paramètres ont, dans la plupart des cas, les caractéristiques de processus aléatoires de types bruit blanc ou processus markoviens (Annexe B).

Chapitre III

Filtrage de kalman



Rudolf Emil kalman

Résumé :

Le chapitre précédent a montré les avantages et les inconvénients de chaque système de navigation.

En pratique l'imperfection des capteurs est une forte contrainte pour leur usage. Ceci est particulièrement vrai pour les applications dans le secteur aéronautique où les coûts du système jouent un rôle important.

Dans ce chapitre, j'ai commencé par des rappels sur le filtrage de Kalman ainsi que l'originalité du filtre en question qui consiste dans le fait que ses entrées représentent des erreurs ; erreurs qui représentent en fait le vecteur d'état du filtre. Le filtre de kalman étant basé sur l'algorithme des moindres carrés va minimiser cette erreur au sens du minimum de variance ; et c'est plus particulièrement le filtre de kalman étendu qui sera utilisé pour hybrider les deux systèmes de navigation par une configuration en couplage faible en boucle ouverte (les raisons seront expliquées plus loin) ,des remarques seront faites en ce qui concerne le problème d'initialisation du filtre et seront confirmées par la suite dans la partie simulation par plusieurs résultats.

III.1 Rappel sur le Filtre de Kalman :

Une idée centrale dans le filtre de Kalman, est de modéliser le système étudié comme un système dynamique linéaire affecté par des bruits, les capteurs du système sont également soumis à des bruits. En disposant d'une information

statistique sur la nature du bruit (ses premiers ordres statistiques), il est possible de construire une estimation optimale de l'état du système bien que les capteurs soient inexacts. C'est l'idée fondamentale de la théorie de l'estimation. Sans connaître les erreurs elles-mêmes, la connaissance de leurs statistiques permet la construction des estimateurs utiles en se basant seulement sur cette information. La méthode de Kalman est une procédure d'estimation dynamique des paramètres qui sont fonctions du temps. Soit t l'instant pour lequel on veut estimer les paramètres et t_m l'instant à laquelle les mesures sont effectuées, la méthode Kalman permet :

La prédiction si $t_m < t_n$

Le filtrage si $t_m = t_n$

Le lissage si $t_m > t_n$

Le système d'équations utilisé dans le filtre de Kalman repose sur la définition de deux modèles que sont le processus et la mesure (les modèles sont la représentations d'états d'un système dynamique). Il est utilisé pour estimer l'état ($x \in \mathbb{R}^n$) d'un système dynamique observé. Le modèle du processus qui décrit l'évolution de ce système dynamique est défini par l'équation d'état linéaire récursive suivante :

$$x = Fx + Gu \tag{III-1}$$

Ou la forme discrète :

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k + w_k \tag{III-2}$$

Où :

x_k, x_{k+1} sont des paramètres du système (le vecteur d'état) à l'instant k et $k+1$.

$\Phi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, est la matrice dynamique du système (la matrice de transition de k à $k+1$), c'est une matrice qui fait le lien entre les paramètres du système à deux étapes successives.
 $u_k \in \mathbb{R}^m$, est le vecteur de commande, (vecteur d'entrée).

$G_k \in M(m \times n)$ (\mathbb{R}), est la matrice de commande (matrice d'entrée) qui représente la distribution de la perturbation (l'entrée) dans le vecteur d'état. Elle fait le lien entre les valeurs optionnelles de contrôles et l'état du système.

$w_k \in \mathbb{R}^n$, est le bruit d'état.

Le modèle de mesure décrit l'information fournie par le ou les capteurs en une équation liant les paramètres de l'état de la mesure et du bruit. L'équation de mesure ou d'observation est

donnée par :

$$z_k = H_k \cdot x_k + w_k \quad (III-3)$$

avec $z_k \in \mathbb{R}$, est la mesure à l'instant k ,

$H_k \in M(p \times n) (\mathbb{R})$, est la matrice d'observation, c'est la matrice qui fait le lien entre les paramètres du système et les mesures,

$w_k \in \mathbb{R}$, est le bruit de mesure.

Lors de l'utilisation de ce filtre, l'hypothèse est faite que les bruits d'état v_k et de mesure w_k sont des variables aléatoires dont les distributions gaussiennes sont connues a priori (doivent être estimées à l'avance), indépendantes, blanches et indépendantes de l'état initial du système. Cette indépendance des bruits permet de simplifier le formalisme des équations d'évolution et d'observation, donc :

$$\begin{aligned} P(w_k) &\sim N(0, R_k) \\ P(v_k) &\sim N(0, Q_k) \\ E[v_i w_j] &= 0, \forall i, j \end{aligned} \quad (III-4)$$

Où, Q_k et R_k sont les matrices de covariances de processus et des mesures respectivement. La détermination de la covariance du bruit du système est généralement plus difficile que celle de la mesure, parce que l'observation directe de l'état du système est impossible, le réglage du filtre est expliqué plus tard dans ce chapitre.

La figure ci-dessous montre les différentes étapes d'estimation des paramètres du système. Il y a deux étapes principales pour l'estimation des ces paramètres : l'estimation a priori (la prédiction) et l'estimation a posteriori (la correction). Les paramètres du système sont estimés premièrement à partir des valeurs de l'étape précédente et ensuite ils sont corrigés par des mesures dans l'étape de correction. Les deux étapes tournent d'une façon récursive après une étape d'initialisation

III.1.1. Filtre de Kalman linéaire :

Dans le schéma qui se trouve en dessous les étapes du filtre de kalman linéaire ont été décrites en détail et plus important en ordre :

-après observations on peut innumerer comme suit :

- 1-une étape de correction :
 - calcul du Gain.
 - calcul du vecteur d'état .
 - calcul de la matrice de covariance P.
- 2-une étape de prédiction :
 - calcul du vecteur d'état.
 - calcul de la matrice de covariance P.

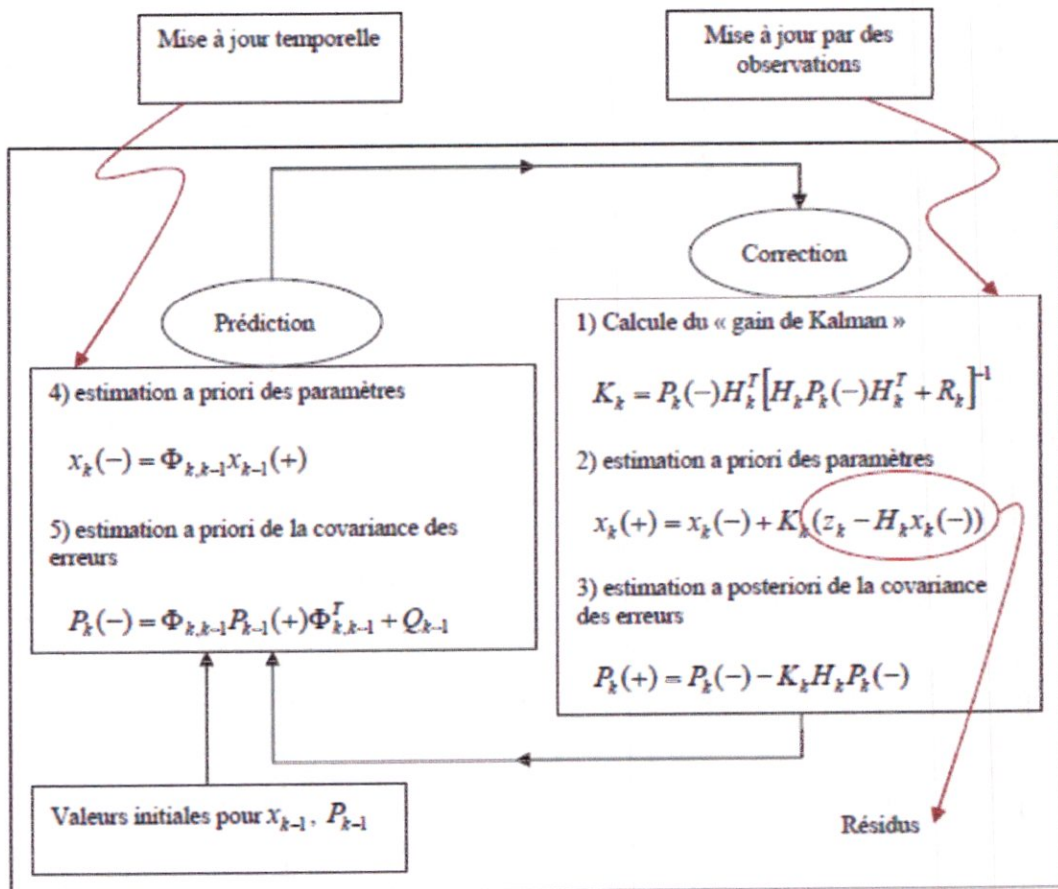


FIG (III.1) : Les étapes constituant le filtrage de Kalman dans un cadre linéaire sont :

III.1.1.a.Initialisation :

L'état initial est une variable gaussienne, indépendante des bruits du système, de moyenne et de matrice de covariances connues.

$$\begin{aligned}
 x_0(-) &= E(x_0) \\
 P_0(-) &= E((x_0 - \hat{x}_{0/0})(x_0 - \hat{x}_{0/0})') = \text{var}[x_0(-)]
 \end{aligned}
 \tag{III-5}$$

III.1.1.b.Prédiction temporelle (Time Update):

Cette étape permet la prédiction de l'état et de sa précision à l'instant k à partir de l'état à l'instant $k-1$ et du modèle d'évolution du système. On obtient donc l'état $x_{k|k-}$ avec sa matrice de covariances associée $P_{k+1/k-}$.

$$\begin{aligned} x_k(-) &= \Phi_{k,k-1} x_{k-1}(+) \\ P_k(-) &= \Phi_{k,k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

III.1.1.c. Correction et mise à jour des mesures (Innovation) :

Une fois la mesure z_{k-1} disponible, l'état prédit peut alors être corrigé par l'innovation $S_{k-1,k}$ pondérée par le gain du filtre K_{k-1} . On en déduit alors l'estimation de l'état $x_{k-1,k-1}$ avec sa matrice de covariances associée $P_{k+1,k-1}$.

$$\begin{aligned} K_k &= P_k H_k^T [H_k P_k(-) H_k^T + R_k]^{-1} \\ x_k(+) &= x_k(-) + K_k (z_k - H_k x_k(-)) \\ P_k(+) &= P_k(-) - K_k H_k P_k(-) \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

Où :

(-) représente la valeur prédite, et (+) la valeur corrigée, où le signe moins dénote l'évaluation (estimation) avant l'incorporation des mesures.

K_{k-1} , le gain de Kalman.

x_{k-1} le vecteur d'état et P_{k-1} la matrice de covariances.

Φ_k , est la matrice de transition entre les instants $k-1$ et k .

Q_k , est la matrice de covariances de processus. (Le bruit du système)

z_{k-1} , est le vecteur de mesures.

H_{k-1} , est la matrice d'observation.

R_k , est la matrice de covariances des mesures.

Du chapitre précédent, on peut résumer les équations de mécanisation par les équations suivantes :

III.2 Linéarisation des problèmes non linéaires :

La formulation du filtre présentée plus tôt est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux sont non-linéaires. Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, et puis d'appliquer le filtre standard de Kalman pour obtenir l'état du système. Un certain nombre de méthodes ont été développées dans cette direction; ici nous discuterons trois de telles approches.

Quand la linéarisation se fait autour d'une certaine trajectoire nominale dans l'espace d'état qui ne dépend pas des données de mesure, le filtre résultant s'appelle le *Filtre Linéarisé de Kalman*. La linéarisation autour une trajectoire (estimée) qui est continuellement mise à jour avec les estimations d'état résultant des mesures s'appelle le *Filtre de Kalman Étendu* [BRO 97 et GRE 01b]. Dans les deux cas, la linéarisation est faite en utilisant la série de Taylor.

Une autre méthode est de linéariser en utilisant un ensemble de points-échantillons choisis, ceci donne le (*Unscented Kalman Filter*) ou (*Sigma-point Kalman Filter*), [JUL 97]. Nous examinerons maintenant ces approches en détail.

III.2.1. Le Filtre de Kalman Linéarisé :

Dans le filtre linéarisé de Kalman, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu (cf. « Annexe C »). Considérez un modèle non-linéaire d'un système défini comme suit :

$$\text{Modèle du processus : } x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_k \quad (\text{III-8})$$

$$\text{Modèle de mesure : } z_k = h(x_k) + v_k \quad (\text{III-9})$$

Là où, f et h sont des fonctions non-linéaires connues, u_k est la fonction (le vecteur) de commande et w_k et v_k sont des processus de type bruit blanc non corrélés. La non-linéarité peut résider soit dans le modèle du processus soit dans le modèle de mesure soit dans les deux fonctions.

Supposez qu'une trajectoire approximative $x_{k(nom)}$ puisse être déterminée par un quelconque moyen; celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle) x_k , peut être écrite en termes de $x_{k(nom)}$ et d'erreur δx_k comme suit :

$$x_k = x_{k(nom)} + \delta x_k \quad (\text{III-10})$$

Les équations (III-7) et (III-8) deviennent alors :

$$x_{k(nom)} + \delta x_k = f(x_{k-1} + \delta x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (\text{III-11})$$

$$z_k = h(x_{k(nom)} + \delta x_k) + v_k \quad (\text{III-12})$$

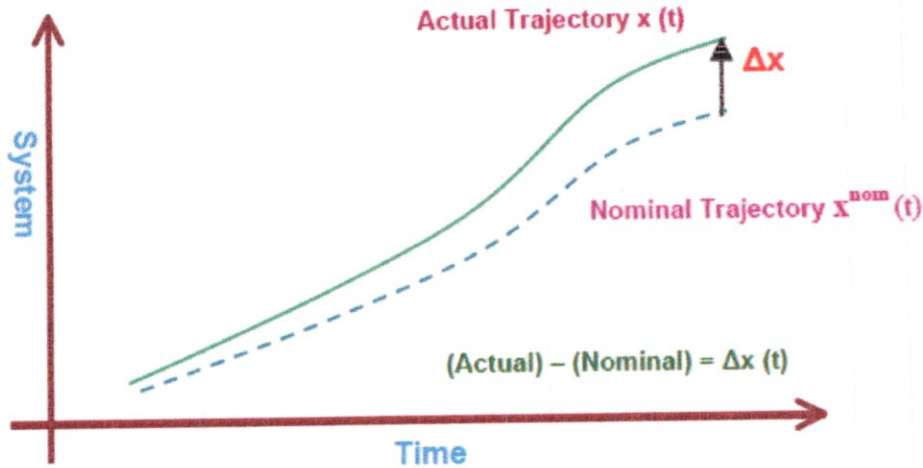


Figure III.2 : filtrage de kalman non linéaire

Par l'application de l'expansion de série de Taylor dans l'équation Eq.III-12 et en supposant que δx_k est petit, nous allons réaliser une expansion de f autour de $x_{k \text{ nom}}$ en ne gardant que le terme de premier ordre :

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k^{nom} = \left(f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \cdot \delta x_{k-1} + \text{termes d'ordre supérieur} \right) + w_{k-1} \quad (\text{III-13})$$

$$f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) = x_k^{nom} \quad (\text{III-14})$$

$$\Rightarrow \delta x_k \approx \phi_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1} \quad (\text{III-15})$$

$$\phi_{k-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_{k-1}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=x_{k-1}^{nom}} \quad (\text{III-16})$$

$$w_k \approx N(0, Q_k) \quad (\text{III-17})$$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

Maintenant, la mesure peut être également linéarisée en utilisant l'expansion de la série de Taylor, en linéarisant h à $x_{k \text{ nom}}$ et négligeant les termes d'ordres supérieurs.

$$z_k = \left(h(x_k^{nom}) + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_k^{nom}} \cdot \delta x_k + \text{termes d'ordre superieur} \right) + v_k \quad (\text{III-18})$$

$$\delta z_k \approx z_k - h(x_k^{nom}) \quad (\text{III-19})$$

$$\Rightarrow \delta x_k \approx H_k \delta x_k + v_k \quad (\text{III-20})$$

$$H_k = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x=x_k^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=x_k^{nom}} \quad (\text{III-21})$$

$$v_k \approx N(0, R_k) \quad (\text{III-22})$$

Les équations (III-14) et (III-17) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. Il est clair que ce modèle de système linéarisé peut être utilisé pour mettre en application un filtre linéarisé de Kalman parce que la relation de la dynamique d'erreur et la relation associée de mesure des erreurs sont devenues linéaires. Ici, nous estimons seulement la valeur d'incrément « l'erreur », ainsi les valeurs réelles de l'état seront l'incrément estimé plus la valeur nominale à l'instant même. Aussi Φ et H sont obtenus en évaluant les matrices de dérivées partielles (les Jacobiennes de f et h) le long de la trajectoire nominale. La position nominale (ou le vecteur d'état) peut changer avec chaque étape du processus récursif, ainsi les termes de H et de Φ peuvent être variables avec le temps et doivent être recalculés avec chaque étape récursive. Le problème dans la linéarisation autour de la trajectoire nominale est que la déviation de la trajectoire réelle de la trajectoire nominale tend à augmenter avec le temps. À mesure que la déviation augmente, les poids des termes d'ordres supérieurs dans l'expansion de la série de Taylor de la trajectoire augmentent.

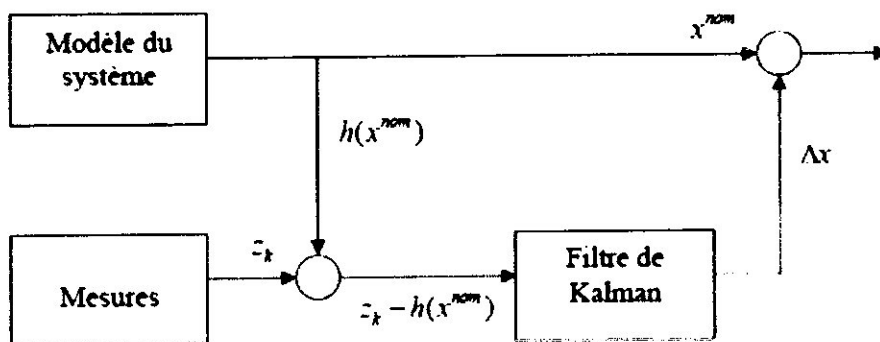
La déviation de la trajectoire de référence est le vecteur d'état et les mesures dans le modèle linéaire sont les vraies mesures moins celles qui ont été prédites par la trajectoire nominale en l'absence du bruit.

Le filtre linéarisé est utilisé dans une configuration de « feedforward » comme montré ci-dessous. Sous cette forme, la trajectoire nominale n'est pas mise à jour pour refléter les estimations d'erreur calculées par le filtre. Le modèle de « feedforward » peut être utilisé pour intégrer un système de navigation inertielle avec un certain nombre d'aides externes de navigation. Nous devons choisir une trajectoire nominale autour de laquelle la linéarisation sera effectuée.

L'INS seul est pris comme le modèle du système et ses sorties sont considérées comme la trajectoire de référence (nominale). Cette trajectoire de référence ne sera pas toute parfaite car c'est une combinaison de la trajectoire vraie avec les erreurs d'INS. Notre but est d'estimer les erreurs du système inertiel en utilisant systèmes de mesures externes ces erreurs sont appliquées à la référence (et à la sortie brute du système inertiel) pour produire une sortie correcte et améliorée du système inertiel.

. Le point à noter ici est que le filtre de Kalman agit seulement sur les erreurs du système. Ainsi, nous avons besoin d'un modèle de l'espace d'état décrivant ces erreurs-là et il doit être linéaire avec le bruit blanc. Par ailleurs, les mesures d'INS ne sont pas utilisées en tant que "mesures" dans le filtre de Kalman mais plutôt pour fournir la trajectoire de référence.

Ce type de filtre est difficile d'utilisation pour des missions prolongées parce qu'après une certaine durée, la trajectoire de référence peut diverger en un point où l'hypothèse linéaire n'est plus valide à travers la variation du vecteur d'état. Enfin, le filtrage linéarisé a l'avantage de permettre généralement une exécution en temps réel, cependant, il est moins robuste vis-à-vis des approximations non-linéaires des erreurs que le filtrage étendu [GRE 01b]. Un remède simple et efficace pour le problème de la déviation réside dans le remplacement de la trajectoire nominale par la trajectoire estimée, ce qui ramène au filtre de Kalman étendu.



FigIII.3 : filtre de kalman linéarisé

Les lecteurs désireux d'approfondir leurs connaissances sur le sujet pourront consulter les références suivantes : [BRO 97 p336] et [GOD 03].

III.2.2. Le Filtre de Kalman Étendu :

Le filtre de Kalman étendu « EKF » a été développé par Stanley F. Schmidt [GRE 01b]. Il représente probablement l'approche la plus commune et la plus populaire pour traiter un système non linéaire. Son fonctionnement consiste simplement à linéariser tous les modèles non-linéaires de sorte que le filtre linéaire traditionnel de Kalman puisse être appliqué. L'EKF est devenu une approche standard pour un certain nombre d'applications d'estimation non linéaire.

EKF est similaire à un filtre linéarisé de Kalman sauf que la linéarisation a lieu autour de la trajectoire estimée du filtre plutôt que de la trajectoire nominale pré-calculée. Ceci, signifie que les dérivés partielles sont évaluées le long de la trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre; ce qui dépend des mesures. Ainsi, le gain du filtre dépendra de la séquence d'échantillons de mesure et ne sera pas prédéterminé par les prévisions du modèle du processus [BRO p344] :

(Extended Kalman Filtering en anglais)

$$\text{Modèle non linéaire du processus : } x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (\text{III-23})$$

$$\text{Modèle de mesure: } z_k = h(x_k) + v_k \quad (\text{III-24})$$

L'approximation de Taylor de f est faite autour de l'estimation de l'instant précédent x_{k-1} :

$$\Phi(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad (\text{III-25})$$

L'approximation de Taylor de h est faite à la position (ou à l'état) prédite correspondante :

$$H(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad (\text{III-26})$$

Comme dans le cas du filtre linéarisé de Kalman, le développement limité donne cette fois-ci :

$$x_k \approx x_k + \Phi_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (\text{III-27})$$

$$z_k \approx \hat{z}_k + H_k(x_k - x_k) + v_k \quad (\text{III-28})$$

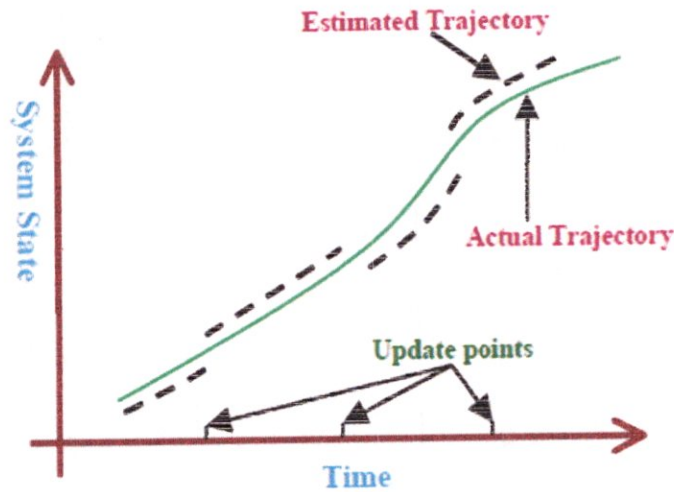


Figure III.4: Trajectoire estimée (nominale) et réelle pour un filtre de Kalman étendu

Les équations Eq.III-23 et Eq.III-24 constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. En général, l'EKF est difficile en raison du bouclage (le feedback) de la mesure au modèle du processus, mais il arrive à mettre à jour la trajectoire utilisée pour la linéarisation pendant qu'il évolue.

L'avantage du EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes.

Néanmoins, le filtre linéarisé et le filtre étendu de Kalman sont utilisés dans des applications différentes, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients. Ceci est expliqué plus en détail dans les parties relatives aux différentes approches d'hybridation.

Le filtre étendu peut être visualisé dans une configuration de « feedback » comme montré ci-dessous. Dans un système de navigation inertielle assisté par le GPS, les erreurs du système inertielle sont retournées et les corrections sont faites intérieurement dans le système inertielle, ainsi nous n'avons pas les données inertielle brutes à la sortie du système inertielle.

La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure $h(x)$, et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de la *trajectoire corrigée* (filtre étendu) ou de la *trajectoire nominale* (filtre linéarisé).

Lorsque $h(x)$ est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielle, le filtre est alors un filtre de Kalman linéarisé ordinaire. Si $h(x)$ est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de Kalman étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables.

La figure (III.6) montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire.

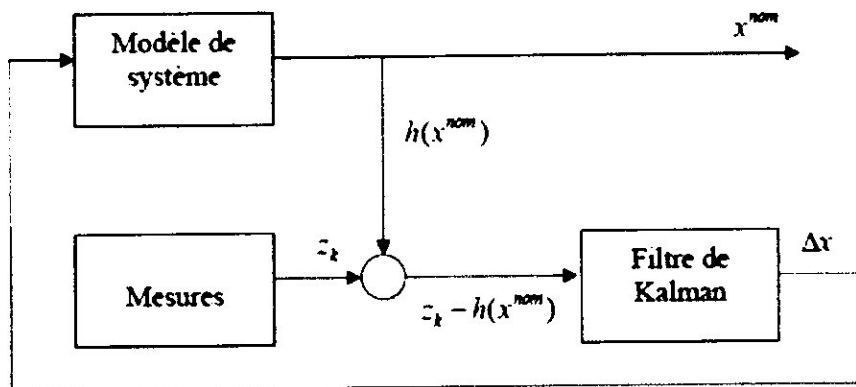


Figure III.5: Filtre de Kalman Etendu

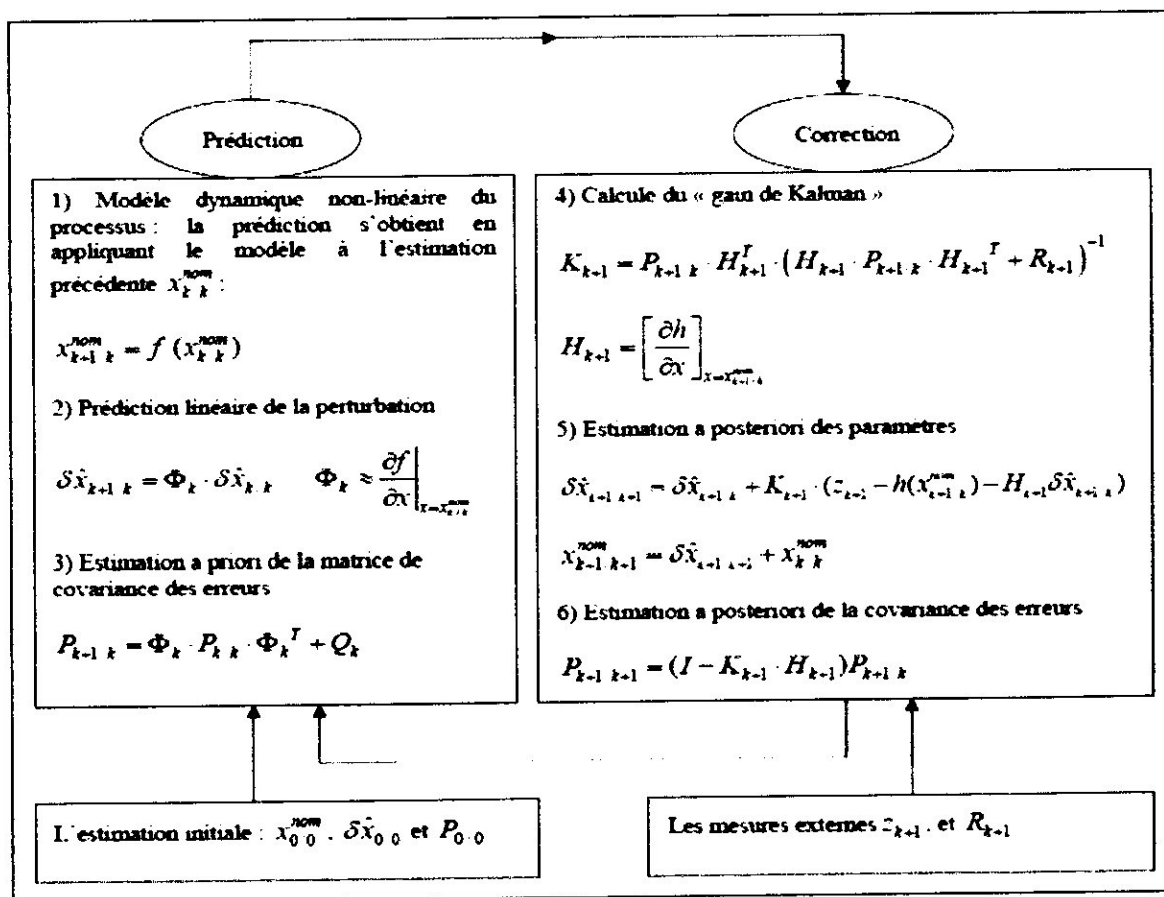
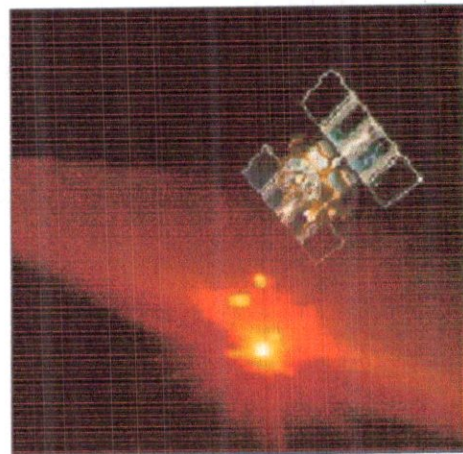


Figure III.6: Extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaire

Chapitre IV

NAVIGATION HYBRIDE



Résumé :

Dans ce chapitre nous allons voir les différentes manières d'hybrider « de coupler » le GPS et l'INS. Le but de cette hybridation comme il a été déjà dit aux chapitres précédents est de créer une solution optimale de positionnement et de navigation nettement supérieure aux solutions individuelles que peuvent offrir les deux systèmes. Dans ma thèse, c'est un couplage faible en boucle ouverte qui a été simulé.

IV.1.Introduction :

La façon dont le filtre est structuré dans le système de navigation dépend des types de capteurs et des modèles utilisés. Pour les systèmes de navigation inertielle aidée par un capteur extérieur, le composant inertiel peut être une unité inertielle (CI) qui fournit seulement les données brutes (l'accélération et la vitesse angulaire), ou un système de navigation inertielle (INS) fournissant la position, la vitesse et les informations d'attitude. La source d'aide (GPS, etc.) peut être considérée comme un capteur fournissant des informations brutes de capteur (par exemple des pseudo distances), ou comme un système de navigation fournissant la position, la vitesse et/ou les informations d'attitude. Les états principaux d'intérêt qui sont estimés par le filtre, et par conséquent qui régissent le type de modèle à mettre en application, sont la position, la vitesse et l'attitude du véhicule, ou encore les erreurs de position, de vitesse et d'attitude.

Deux principes (approches) d'intégration peuvent être mentionnées. La première prend en compte les informations brutes du GPS et de l'INS, puis modélise dans un seul filtre de Kalman les différentes erreurs propres à chacun des systèmes. Cette méthode présente l'inconvénient du phénomène de type « boîte noire ». La deuxième est la configuration dite « faiblement couplée ». Nous avons choisi la configuration faiblement couplée avec asservissement: les mesures de chacun des systèmes sont traitées indépendamment, puis l'intégration s'effectue sur la position, la vitesse et les angles d'attitude obtenus à partir des mesures inertielles et GPS.

IV.2.Les différentes approches d'hybridation :

IV.2.1.Le mode non couplé :

Il existe aussi un mode non couplé, le schéma fig.(IV.1) illustre la configuration dans laquelle le GPS et l'INS produisent indépendamment les solutions de navigation sans l'influence de l'un sur l'autre. Les $(PV)_{GPS}$ sont la position et la vitesse du GPS, tandis que $(PVA)_{INS}$ sont la position, vitesse et l'attitude) de l'INS, $(PVA)_{est}$ sont les paramètres estimés des positions, des vitesses et des attitudes. La solution intégrée de navigation est mécanisée par un processus externe d'intégration. Il peut être simplement un « interrupteur », ou alors il peut être aussi complexe qu'un filtre de Kalman [SPI 96] et [ZHA 03]. Un sélecteur est la manière la plus simple de combiner ces deux systèmes ensemble, et la précision de la solution de navigation ne sera pas plus mauvaise que la précision de l'INS.

La précision peut être très basse dans le cas d'utilisation des unités inertielles de précision moyenne et basse. Un filtre de Kalman est alors une bonne solution dans ce cas-ci. L'avantage de la méthode d'intégration non-couplée est qu'elle est méthode la plus facile, la plus rapide et la moins chère pour intégrer le GPS et l'INS, [ZHA 03].

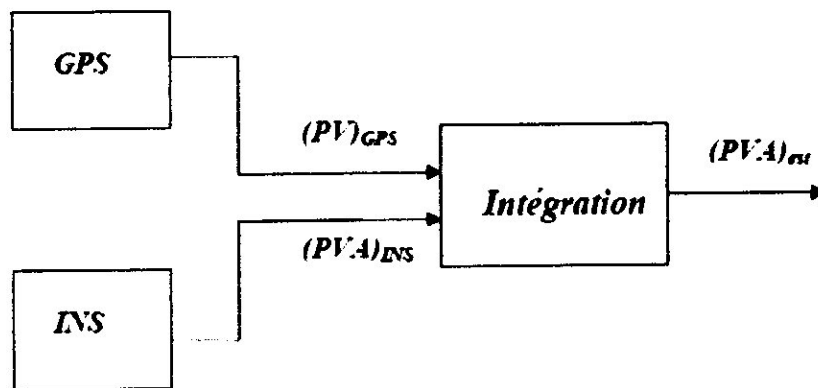


Fig IV.1:Mode non-couplé

IV.2.2. Mode faiblement couplé :

Dans un système faiblement couplé, le récepteur GPS a son propre filtre de Kalman qui traite la pseudo distance (pseudorange) ou les mesures de Doppler qui sont utilisées pour calculer des positions et des vitesses. Les positions et les vitesses du GPS sont ensuite combinées avec les positions et vitesses de l'INS pour former les erreurs résiduelles qui sont envoyées au filtre de Kalman de navigation.

Ce filtre corrige l'INS par asservissement (retour d'état). Ainsi, les effets des biais, des dérives, et des erreurs de non alignement, sont sensiblement diminués.

L'observation qui est fournie au filtre est l'erreur observée de la solution de navigation inertielle, c'est à dire, la différence entre la solution de navigation inertielle et la solution de navigation fournie par la source d'aide (le GPS). Puisque l'observation est l'erreur observée de la solution de navigation inertielle et puisque le filtre estime les erreurs dans la solution de navigation inertielle, alors le modèle de processus doit être sous forme de modèle d'erreur des équations standard de navigation inertielle. Ainsi les équations de navigation inertielle sont linéarisées pour former les équations d'erreur (annexe C).

Puisque les équations sont linéarisées, la mise en application du filtre prend une forme linéaire. Le filtre s'appelle dans ce cas un filtre complémentaire.

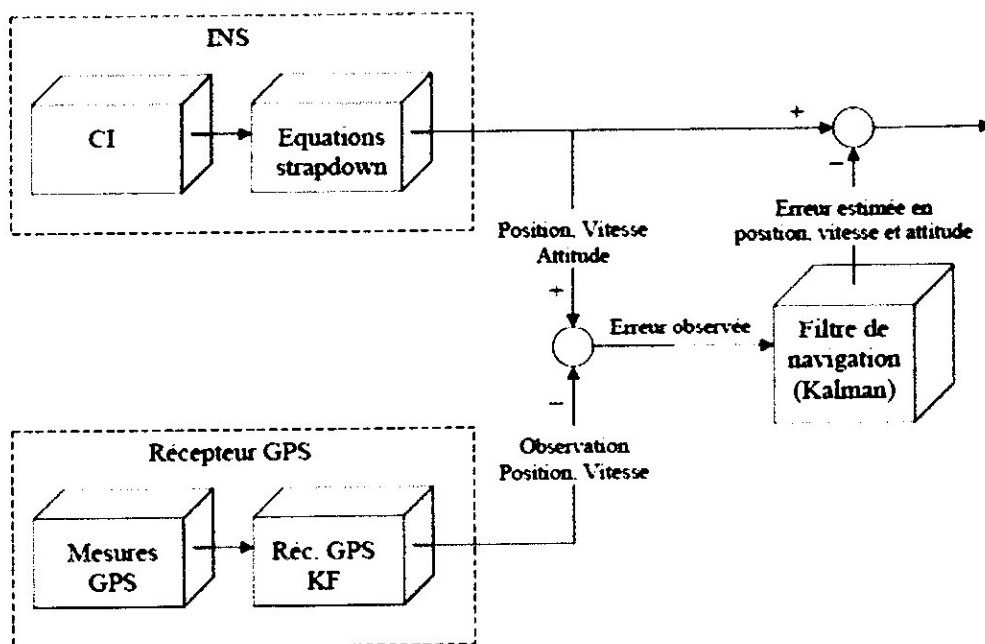


Figure IV.2: Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle ouverte)

Selon l'application, un arrangement faiblement couplé peut être mis en oeuvre dans différentes configurations. On trouve la configuration en boucle ouverte (Feedforward = asservissement indirect) et en boucle fermée (Feedback = asservissement direct). Dans le cas de la boucle ouverte, toutes les mesures GPS (position et vitesse pré-filtrées) et INS (position et vitesse) sont traitées dans le filtre de Kalman de navigation. Car il n'y a pas un vrai asservissement (il n'y a aucun), toutes les mesures sont utilisées sans précorrection. L'erreur est soustraite à la sortie. La mise en application de la boucle ouverte est directe et facile à réaliser.

Le problème néanmoins est que les états de la CI divergent. Cependant, il est seulement approprié à l'intégration avec un capteur inertiel de très bonne précision afin qu'il soit applicable aux vols long courrier.

Les unités inertielles de précisions moyenne et basse propagent des erreurs de navigation relativement grandes dans un intervalle fixe de temps comparé à celui d'un système à bonne précision.

Pour une configuration en boucle fermée, l'asservissement est appliqué à partir du filtre d'intégration aux capteurs inertiels et/ou aux équations de mécanisation. Les résultats de l'étape précédente sont utilisés pour réduire au minimum l'erreur. Une configuration en boucle fermée est particulièrement utile quand les précisions des capteurs sont faibles.

Puisque les capteurs inertiels de précisions moyenne et basse ont habituellement un changement rapide des propriétés d'erreur, l'estimation et la compensation en temps réel ou proches du temps réel de ces erreurs sont très importantes pour améliorer la précision des solutions de navigation de l'INS. Le schéma fig.IV.3 montre une configuration d'intégration faiblement couplée avec asservissement (une boucle fermée).

Les configurations faiblement couplées offrent l'avantage d'être fortement modulaires en précision et en coût. Le concepteur du système peut mettre en application le modèle de son choix avec l'INS désiré dans la structure de navigation préférée (ouverte, fermée). N'importe quel capteur d'aide peut alors être ajouté au système de navigation. Le retour d'état (de l'erreur) vers le système de navigation inertiel réduira les erreurs de l'INS.

C'est particulièrement important pour les unités inertielles de précisions moyenne et basse parce que la boucle d'asservissement corrige efficacement les erreurs des capteurs.

L'approche par intégration faiblement couplée a été largement utilisée dans la dernière décennie en raison de sa flexibilité et ses performances élevées. Par exemple [CAN 99] a utilisé un système d'intégration en boucle ouverte, faiblement couplée, pour un positionnement aéroporté de précision décimétrique. Des solutions d'INS ont été utilisées pour détecter et corriger les sauts des cycles GPS et établir des liens entre les données GPS en cas de perte. Dans [SAL 00], ils ont employé une boucle fermée, faiblement couplée, et ont réalisé une intégration GPS/CI peu coûteuse et de précision moyenne pour la détermination de l'attitude.

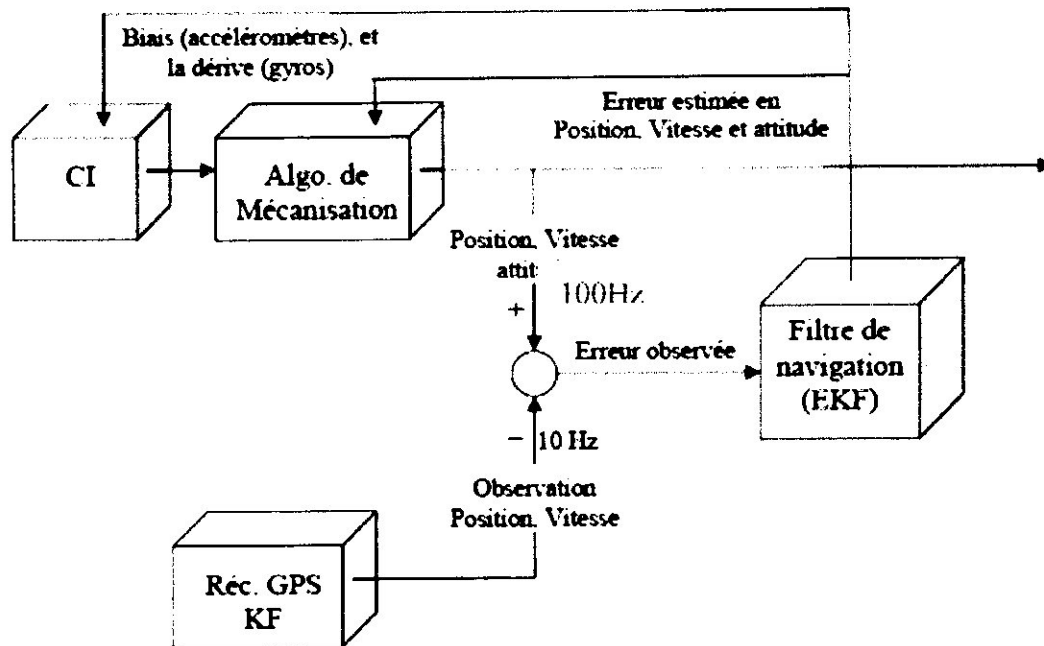


Figure IV.3: Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle fermée)

IV.2.3. Système fortement couplé :

Dans ce système, les données « pseudorange » et « pseudorange » des satellites ont été utilisées pour aider le filtre de navigation, ainsi que l'accélération et la vitesse angulaire de la CI. La fusion se fait directement au niveau des données brutes. Il y a un asservissement fourni par système externe d'aide (le GPS). On obtient une configuration plus serrée qui améliore l'intégrité du système.

Dans une architecture de système étroitement couplée, les filtres de Kalman séparés pour le récepteur GPS et le processus de navigation sont combinés dans un seul filtre d'intégration.

Comme représenté sur le schéma de fig.(IV.4), ce filtre accepte des résiduels de(pseudorange) de GPS et de mesures Doppler directement (Delta-range). L'état d'erreurs du filtre incluse maintenant l'état d'erreurs INS (position, vitesse, attitude, dérive gyroscopique, biais d'accéléromètres) aussi bien que de nouveaux états représentant le biais et la dérive d'horloge du récepteur GPS. Les composants du vecteur d'état du filtre qui représentent les erreurs d'INS sont utilisés pour calibrre l'INS et pour corriger ses estimations de la position, de la vitesse et de l'attitude du véhicule.

Les estimations du biais et de la dérive d'horloge par le filtre sont utilisées pour corriger les mesurcs GPS. De même, ses informations peuvent permettre le tracking (pistage) du groupe des satellites intéressants (ceux dont le DOP est le plus bas).

Le modèle du processus peut être sous une forme telle que le vecteur d'état représente les variables physiques elles-mêmes (position, vitesse, attitude, etc.). Dans ce cas, puisque les équations sont non-linéaires, la mise en application du filtre prend une forme non-linéaire.

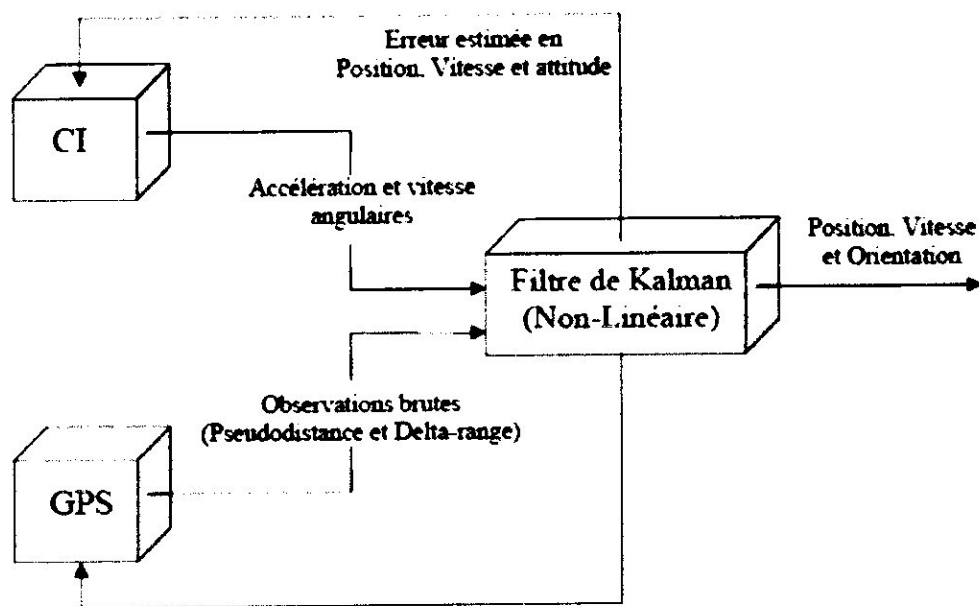


Figure IV.4: Système fortement couplé

L'architecture étroitement couplée utilise plus efficacement les mesures disponibles et l'information a priori pour déterminer et corriger des erreurs de système d'un mode fortement, intégrée. Elle peut apporter ainsi une meilleure performance et une plus grande robustesse que le système lâchement couplé, fournissant des estimations de navigation précises pendant des périodes où la dynamique du véhicule est élevée et pendant les périodes de blocage des signaux (*jamming*), et assure une meilleure élasticité face à une géométrie défavorable des satellites, aux pertes de données, et aux erreurs de la CI. Mais il est plus cher à mettre en application et plus difficile à développer. En outre, si un capteur différent est utilisé, les modèles et les algorithmes doivent changer sensiblement.

L'inconvénient principal de cette approche est qu'elle exige que les concepteurs du système aient accès au matériel et aux variables utilisées dans le récepteur GPS pour la mettre en application. Par conséquent cette approche n'est pas à la disposition du grand public. Dans [OHL 02], Ohlmyer et autres ont appliqué une configuration GPS/INS fortement couplée à un système de guidage de missile.

IV.3. Implémentation de la fusion INS/GPS

IV.3.1 Les équations du modèle d'évolution : INS seul

Nous avons choisi un mode d'intégration lâchement couplé avec une boucle ouverte comme expliqué dans la partie IV.2 (illustré dans la figure IV.2). Dans cette approche, les équations de mécanisation du système inertiel (Eq. 1-44) vont évoluer à l'extérieur du filtre selon la forme discrète suivante (ces équations vont créer la trajectoire nominale ou *trajectoire de référence*) :

$$\begin{aligned}
 r_{k+1}^{LLa} &= r_k^{LLa} + (Dv^n) \Delta t \\
 v_{k+1}^n &= v_k^n + (a_{en}^n)_k \Delta t = v_k^n + \left(\mathcal{R}_b^n f_{ib}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v_{en}^n - g^n \right)_k \Delta t \\
 (\mathcal{R}_n^b)_{k+1} &= (\mathcal{R}_b^n)_k + \left(\mathcal{R}_b^n (S(\omega_{nb}^b)) \right)_k \Delta t
 \end{aligned} \tag{IV-1}$$

Où :

r^{LLa} est la position en termes de (Latitude, Longitude, Altitude)

v_n est la vitesse dans un repère local Nord Est Down.

$S(\omega_{nb}^b)$ est la forme antisymétrique de ω_{nb}^b .

\mathcal{R}_b^n est la matrice de transformation du repère b « body » au repère n « navigation »

Δt est la période d'échantillonnage.

Il est clair que les équations Eq.I-44 sont non-linéaires et pour analyser l'erreur dans ce système il faut les linéariser avant d'appliquer le filtre. [KEL 94b] et [PHI 91]. La linéarisation a été faite autour de la trajectoire estimée donnée par la CI. Dans ce cas là, le modèle du processus va être sous la forme d'un modèle d'erreur issu des équations non linéaires standard de navigation inertielle.

En utilisant les équations C.7, C.21 et C.31 dans l'annexe C, les équations linéaires d'erreur de notre système peuvent être décrite par

$$\delta \dot{x} = F \delta x + Gu \tag{IV.2}$$

L'équation Eq.III-40 est l'équation d'état linéarisée ou le modèle de processus linéarisé que l'on utilisera pour l'étape de prédiction dans notre filtre de Kalman.

Où,

δx est le vecteur d'état de 9 variables qui sont les erreurs respectives sur (la position, la vitesse et l'orientation sur les trois axes). On voit, à partir de la linéarisation par différenciation, que toutes les quantités d'erreurs sont définies comme la valeur réelle moins la quantité calculée (ou mesurée) $\delta x = x - \hat{x}$. On entend par *quantité mesurée* le résultat de l'évolution des données inertielles.

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta r^{LLa} & \delta v^n & \delta p^n \end{bmatrix} \tag{IV.3}$$

Où, l'erreur sur la position est exprimée dans le système de coordonnées LLa, l'erreur sur la vitesse dans un repère local n , et l'erreur sur l'angle d'Euler (roulis, tangage et lacet) dans le repère local n .

$$\delta p^n = \begin{bmatrix} \varepsilon_N & \varepsilon_E & \varepsilon_D \end{bmatrix} \tag{IV.4}$$

F , Eq.IV.5 est la matrice dynamique ou « matrice de transition » du système dont les paramètres ont été exposés dans l'annexe (C)

$$F = \begin{pmatrix} F_{rr} & F_{rv} & 0 \\ F_{vr} & F_{vv} & A_n \\ F_{er} & F_{ev} & S(-\omega_m^n) \end{pmatrix} \tag{IV.5}$$

Où, A_n est l'accélération dans le repère de navigation représentée sous la forme antisymétrique.

G , est la matrice de commande, u est le vecteur de commande (l'accélération et la vitesse angulaire fournies par la centrale sur les trois axes) :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_b^n & 0 \\ 0 & -\mathfrak{R}_b^n \end{pmatrix} \quad (IV.6)$$

$$u = \begin{pmatrix} \delta \mathfrak{f}_{ib}^b \\ \delta \omega_{ib}^b \end{pmatrix} \quad (IV.7)$$

Les éléments de u sont des bruits blancs, et leur matrice de covariances est donnée par :

$$E\{u(t)u(\tau)^T\} = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (IV.8)$$

Où l'opérateur δ dénote la fonction delta de Dirac dont l'unité est 1/temps, et Q s'appelle la matrice de densité spectrale et est de la forme :

$$Q = \text{diag}(\sigma_{ax}^2 \ \sigma_{ay}^2 \ \sigma_{az}^2 \ \sigma_{\omega x}^2 \ \sigma_{\omega y}^2 \ \sigma_{\omega z}^2) \quad (IV.9)$$

σ_x , et σ_ω est l'écart type des accéléromètres et des gyroscopes. Q est déterminé par la qualité des accéléromètres et des gyroscopes. Et $S(-\omega_m)$ est la forme antisymétrique de ω_m :

$$S(-\omega_m^n) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_D & -\omega_E \\ -\omega_D & 0 & \omega_N \\ \omega_E & -\omega_N & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.10)$$

Dans la pratique, la matrice de transition peut être écrite par inspection. Par exemple, la dérivée de l'erreur en position peut être égale à l'erreur de vitesse en tenant compte de la transformation de coordonnées. De même, la variation de l'erreur en vitesse peut être égale à l'erreur dans l'accélération plus l'erreur due au non-alignement. On peut donc simplifier la matrice F dans l'équation Eq.IV.2 pour obtenir l'équation Eq.IV.11 ou Eq.IV.12

$$\delta \dot{r}^{LLa} = D \delta v^n$$

$$\delta \dot{v}^n = \mathfrak{R}_b^n \delta \mathfrak{f}_{ib}^b + A_n \delta \rho^n \quad (IV.11)$$

$$\delta \dot{\rho}^n = -\mathfrak{R}_b^n \delta \omega_{ib}^b$$

$$\phi = \exp(F\Delta t) \approx I + F\Delta t + \frac{1}{2} F^2 \Delta t^2 + \dots \quad (IV.18)$$

Il est suffisant de prendre les deux premiers termes comme approximation (le terme linéaire de la série de Taylor).

$$\phi_k \approx I + F\Delta t \quad (IV.19)$$

Cependant, l'évaluation de la matrice de ${}^k Q$ qui décrit w , n'est pas évidente. Théoriquement, nous pouvons écrire ${}^k Q$ sous sa forme intégrale comme [FAR 98] et [BRO 97, p.200]:

$$\begin{aligned} Q_k &= E[w_k w_k^T] \\ &= E \left\{ \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \zeta) G(\zeta) d\zeta \right] \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \eta) G(\eta) d\eta \right]^T \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \zeta) G(\zeta) E[u(\zeta) u^T(\eta)] G^T(\eta) \phi^T(t_{k+1}, \eta) d\zeta d\eta \right\} \end{aligned} \quad (IV.20)$$

Où, la matrice $E[u(\zeta) u^T(\eta)]$ est une matrice de fonctions de type « Dirac », supposées connues à partir de modèle continue.

Si les différentes entrées de type bruit blanc ne sont pas corrélées, certaines simplifications sont possibles. Pour des petits intervalles Δt on considère que $\Phi \approx I$, ainsi l'équation Eq.IV.20 devient :

$$Q_k = \iint_{\text{petits}} G(\zeta) E[u(\zeta) u^T(\eta)] G^T(\eta) d\zeta d\eta \quad (IV.21)$$

En substituant l'équation Eq.IV.8 dans l'équation Eq.IV.21 et en intégrant sur un petit intervalle Δt , nous obtenons la solution approximative suivante :

$$Q \approx G Q G^T \Delta t \quad (IV.22)$$

où Q est une matrice diagonale de densité spectrale (Eq.IV.9).

Le modèle – après le placement des modèles d'erreurs des accéléromètres et des gyroscopes – devient (équation Eq.IV.23) (on peut l'appeler modèle augmenté) :

$$\begin{pmatrix} \delta v^{LLa} \\ \delta v^n \\ \delta \rho^n \\ \delta \alpha^b \\ \delta \omega_{nb}^b \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} I & D\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & A_n \Delta t & \mathfrak{R}_0^n \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathfrak{R}_b^n \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & I - \beta_a \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I - \beta_\omega \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v^{LLa} \\ \delta v^n \\ \delta \rho^n \\ \delta \alpha^b \\ \delta \omega_{nb}^b \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} w_r \\ w_v \\ w_\rho \\ w_a \\ w_\omega \end{pmatrix}_k \quad (IV.23)$$

Où w_k sont les erreurs aléatoires et I est une matrice d'identité 3×3 .

Le modèle d'erreur est alors incorporé dans un filtre de Kalman standard linéaire en mettant en application les étapes de prédiction (Eq.IV.23 et Eq.IV.24) et de correction (Eq.IV.32 – Eq.IV.34).

$$P_{k+1,k} = \phi_k P_{k,k} \phi_k^T + Q_k \quad (IV.24)$$

L'avantage d'employer ce modèle est que l'exécution est linéaire (les éléments du vecteur d'état δx n'apparaissent pas à l'intérieur de la matrice F) et le modèle est indépendant de la dynamique du véhicule [SUK 00].

Le modèle peut être augmenté pour prendre en compte l'accélération de Coriolis provoquée par la rotation de la terre. Dans ce mémoire, ce terme a été délibérément omis.

IV.3.2.Remarque sur l'alignement :

La centrale inertielle est mal alignée par des petits angles $[d\theta, d\psi, d\phi]$, on cherche à connaître l'accélération résultante sur les axes, provoquée par le mauvais alignement.

à la figure IV.6, on calcule l'accélération résultante f_x et on voit que les angles de « non alignement » $d\theta$ et $d\psi$ projettent l'accélération f_D et f_E sur l'axe x (Nord) : de ceci on obtient l'équation suivante :

$$\dot{v} = -f_D \sin(d\theta) - f_E \sin(d\psi) \quad (IV.25)$$

Si θ, ψ sont petits, nous pouvons approximer l'équation par :

$$\dot{v} = -f_D d\theta - f_E d\psi \quad (IV.26)$$

En appliquant le même raisonnement sur les trois axes on obtient :

$$\delta \dot{v}^n = A_n \delta \rho^n \quad (IV.27)$$

Où :

$$A_n = S(-f^n) = \begin{pmatrix} 0 & f_D & -f_E \\ -f_D & 0 & f_N \\ f_E & -f_N & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.28)$$

le cas où l'observation est disponible.

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (IV.32)$$

$$\hat{\alpha} \tilde{x}_{k+1/k+1} = \hat{\alpha} \tilde{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (z_{k+1} - h(x_{k+1/k}^{nom}) - H_{k+1} \hat{\alpha} \tilde{x}_{k+1/k}) \quad (IV.33)$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k} \quad (IV.34)$$

Le gain de Kalman K_{k+1} est calculé d'abord, puis l'état et la covariance d'erreur sont mis à jour en utilisant l'estimation antérieure, le $\delta x_{k+1/k}$ et sa covariance d'erreur, $P_{k+1/k}$. Dans l'étape de prédiction, l'estimation et sa covariance d'erreur sont projetées en avant.

Dans l'étape de correction (Eq.IV.33), on peut utiliser la position et la vitesse du GPS comme observations pour calculer le vecteur de mesure (6 variables) :

$$\delta z_{k+1} = (z_{k+1})_{GPS} - h(x_{k+1/k}^{nom}) = \begin{pmatrix} r_{INS}^{LLa} & r_{GPS}^{LLa} \\ v_{INS}^n & v_{GPS}^n \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \phi_{INS} - \phi_{GPS} \\ \lambda_{INS} - \lambda_{GPS} \\ h_{INS} - h_{GPS} \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix}_{k+1} \quad (IV.35)$$

La matrice d'observation dans le cas d'un vecteur d'état de 9 variables est :

$$H_{k+1} = H_{GPS}(k+1) = \begin{pmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x3} \end{pmatrix} \quad (IV.36)$$

et dans le cas d'un vecteur d'état de 15 variables :

$$H_{k+1} = H_{GPS}(k+1) = \begin{pmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \end{pmatrix} \quad (IV.37)$$

La matrice de covariances sur les bruits de mesure R sera alors :

$$R_{k+1} = \text{diag}(\sigma_\phi^2 \quad \sigma_\lambda^2 \quad \sigma_{vm}^2 \quad \sigma_{ve}^2 \quad \sigma_{vd}^2) \quad (IV.38)$$

ce qui peut être obtenu à partir du traitement des données GPS.

Comme nous l'avons mentionné, le calcul de l'erreur de positionnement obtenue par différenciation des positions respectives du GPS et de l'INS est utilisé pour alimenter un filtre qui estime et corrige les erreurs d'INS. Cependant, il existe deux difficultés :

1. Les erreurs sur l'estimation de la position GPS seront corrélées les unes avec les autres (c'est-à-dire, entre les composantes du vecteur estimé à un moment donné ; i.e. dans ce cas là R_{k+1} n'est plus diagonale). L'information sur cette covariance n'est pas connue du concepteur du filtre de Kalman complémentaire.
2. L'erreur de position GPS n'est pas blanche, mais corrélée avec le temps. Là encore, la structure de la corrélation (corrélation en fonction du temps) est inconnue au concepteur du filtre de Kalman complémentaire.

IV.4. Illustration pratique d'un système hybride :

Cette centrale inertielle hybride montrée sur la figure (IV.6) est l'œuvre de l'industriel allemand iMAR navigation , spécialiste de la navigation inertielle .

On voit bien sur la figure les deux types de possibilité d'intégration entre le récepteur GPS et l'unité de mesure inertielle (IMU) : la première est en couplage externe (faible) ; (i.e) que le GPS est considéré comme étant un système auxiliaire , extérieur au système principal qu'est l'inertiel.

La seconde configuration définit un couplage interne (serré) va apporter réduction de l'erreur pour la centrale inertielle et continuité de mesure pour le GPS.

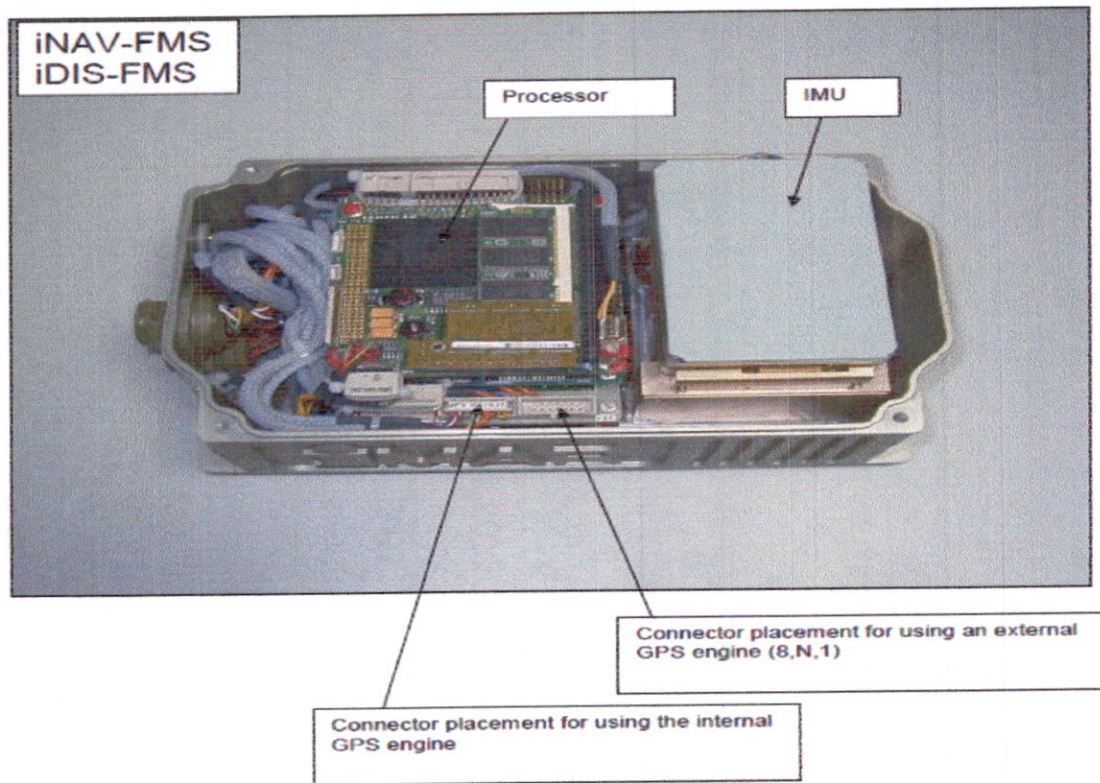


Figure IV.6 : FMS de chez iMAR navigation avec hybridation faible et forte INS/ GPS

Conclusion :

Ce que nous pouvons dire après avoir étudié les différentes configurations , et bien que mon travail ne s'est limité qu'à simuler une hybridation en couplage faible en boucle ouverte, il est certain que le GPS et l'INS sont deux systèmes complémentaires et c'est ce que j'ai tenté de faire en simulation en essayant de trouver la meilleure initialisation possible pour le filtre de Kalman étendu en s'attendant à une amélioration de la précision de navigation .

CHAPITRE V

SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS

V.1-Modèle de simulation :

Le modèle inertiel simulé est le modèle décrit dans le chapitre (I) illustré dans la figure (I.9) représentant la mécanisation globale de l'INS.

Pour ce qui est des simulation de trajectoire c'est le modèle inertiel sans biais « parfait » qui a été utilisé. pour ce qui est du recalage par GPS c'est bien sur le modèle biaisé qui a été utilisé.

-En tout ,quatre programmes ont été implémentés sous MATLAB :

- 1-programme « trajectoire de référence ».
- 2-programme « trajectoire INS ».
- 3-programme « filtre de Kalman étendu ».
- 4-programme « trajectoire INS/GPS ».

Dans mon travail, il ne s'agit pas de naviguer par GPS mais de naviguer par INS recalé par GPS à des instants précis lorsque c'est possible. Par conséquent les pseudo distances n'ont pas été simulées, mais uniquement l'erreur entre INS et GPS qui a été prise en compte puisque c'est celle-ci qui sera utilisée par le filtre de Kalman pour justement constituer le vecteur de mesures grâce à qui la correction sera effectuée.

L'INS à la différence du GPS sera introduite d'erreurs aux niveau de ses données brutes :accéléromètre et gyromètres pour qu'il y ait une dérive des erreurs dans le temps.

Le GPS quand à lui a été simulé en introduisant des erreurs bornées autour de la trajectoire de référence, ce qui constitue la particularité du système satellitaire.

Le modèle inertiel :

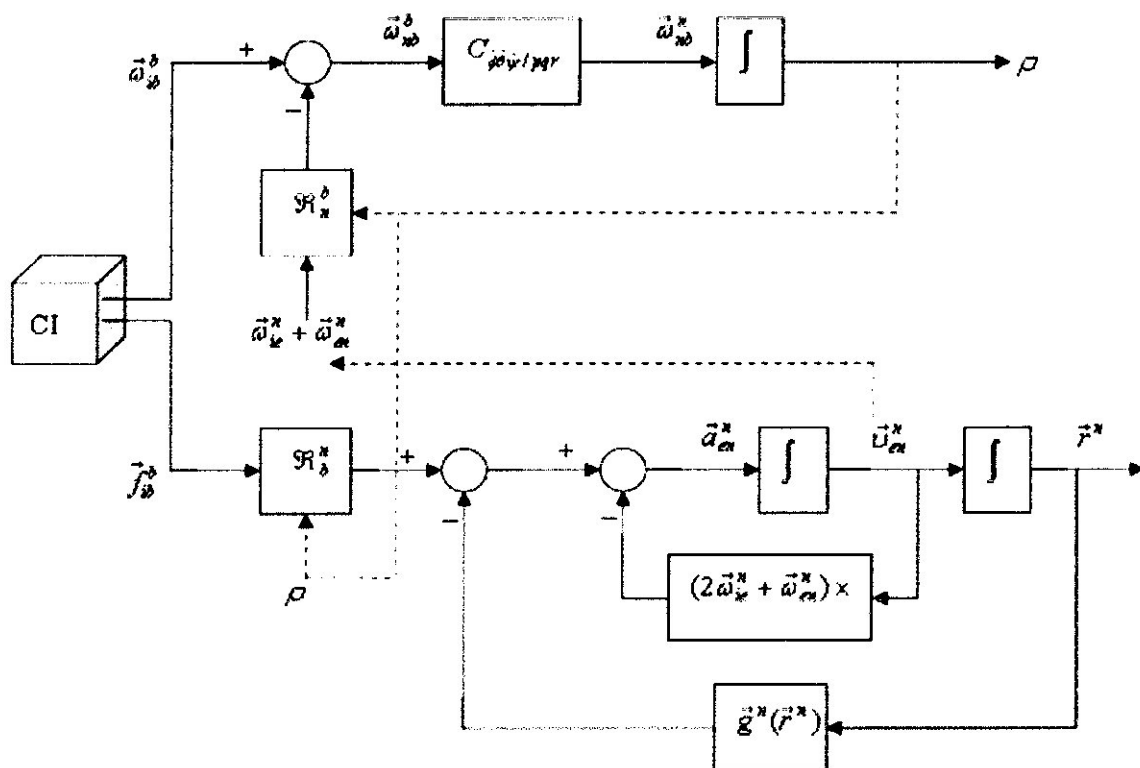


Figure V.1.Modèle de simulation

Les programmes écrits sur MATLAB sont définis par les étapes ci-dessous :

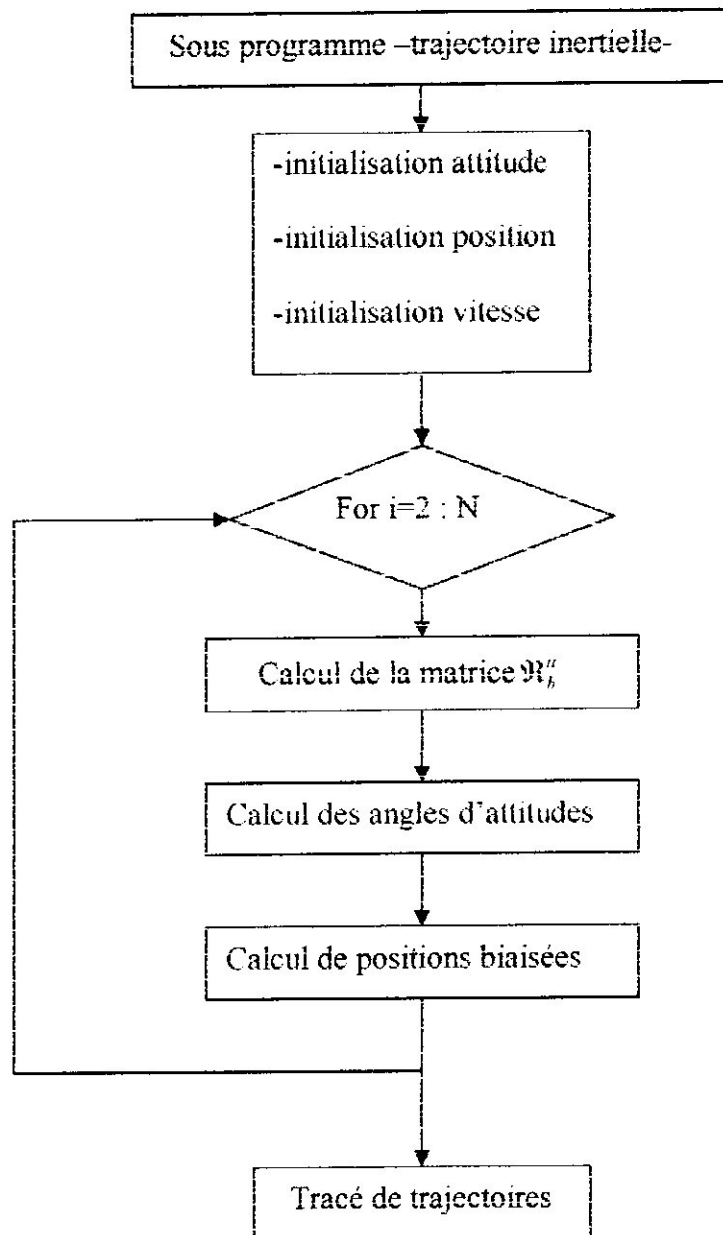


figure V.2. : sous programme inertiel

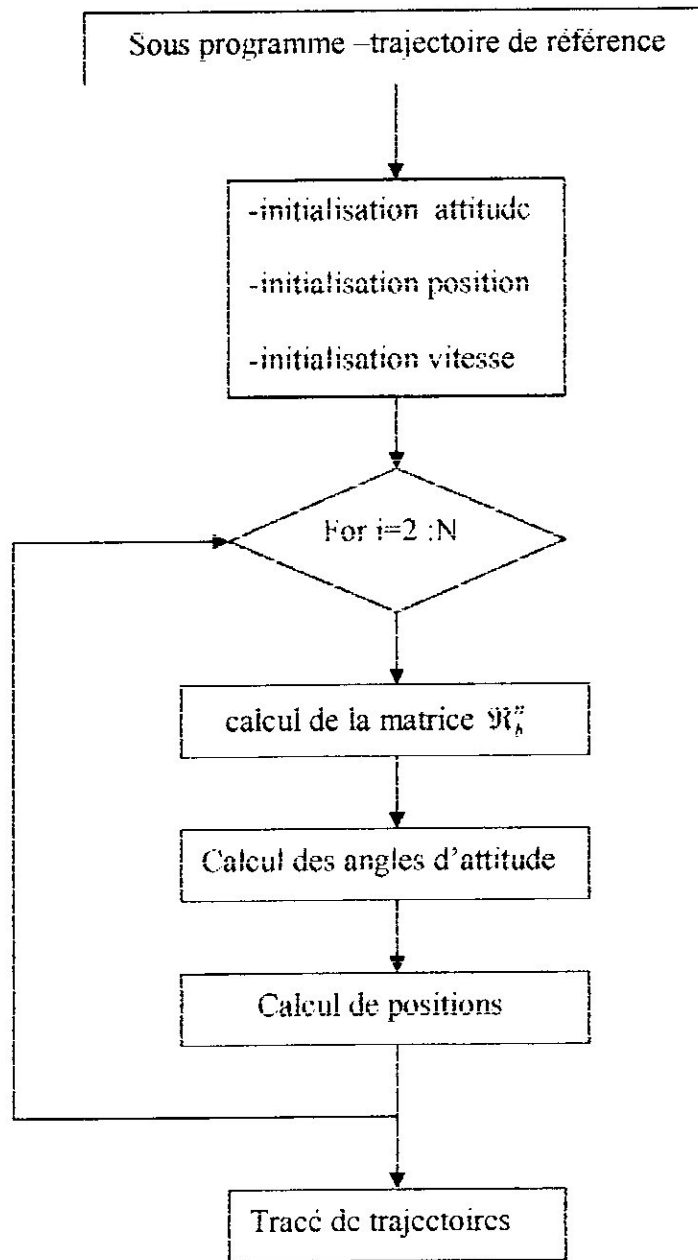
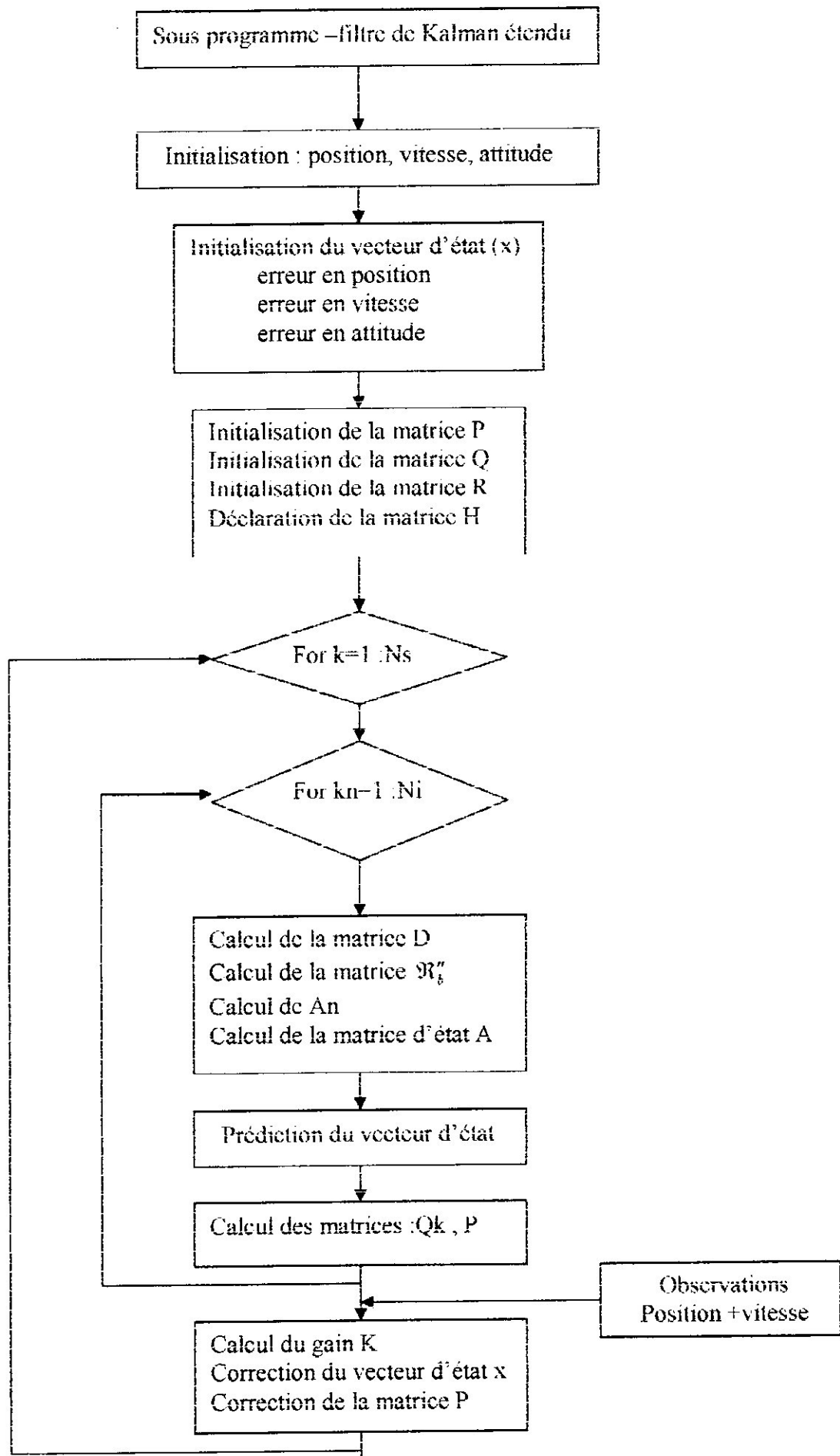


Figure V.3. : sous programme « trajectoire de référence »



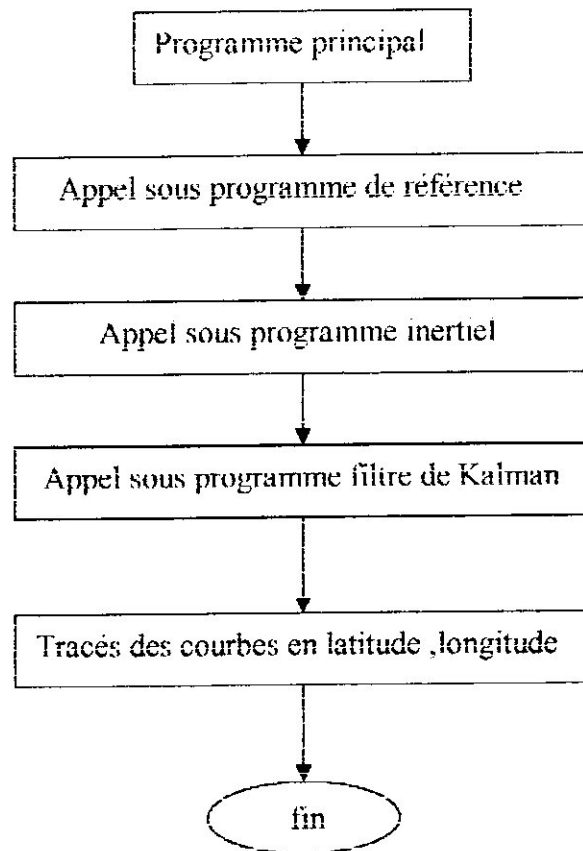


Figure V.5 : programme principal

Après avoir résumé les algorithmes utilisés nous pouvons maintenant entamer nos simulations.

La première partie de simulation consiste à générer des trajectoires autour de la terre afin de vérifier le bon déroulement du calculateur inertiel simulé. Ainsi que l'influence des biais constants sur le suivie de trajectoire.

La deuxième partie consistera à prouver l'apport du recalage en position durant différentes Périodes (30 min,15 min)

La troisième partie consistera quand à elle à prouver l'efficacité du recalage en vitesse au recalage de position.

La quatrième partie consistera à prouver l'efficacité quand la période diminue , c'est-à-dire que quand l'observation ou la mesure existe plus fréquemment ; quand les données GPS sont données chaque 60 minutes, chaque 30 minutes et chaque 15 minutes.

Dans la dernière partie nous verrons le comportement du recalage dans des virages.

simulation et génération de trajectoires

GENERATION DE TRAJECTOIRES :

Dans cette simulation ,ce qu'il fallait avant tout faire, c'était de vérifier que le système inertiel fonctionne correctement et pour ce faire j'ai du lui donner à faire le tour de la terre à vitesse constante pour qu'il revienne par son point de départ et confirmer le bon déroulement du calcul inertiel ainsi que pour voir si il pouvait naviguer sur un long courrier.

Les trajectoires données ci-dessous ont été ordonnées comme suit :

- 1-trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant l'équateur .
 - 2-trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien Greenwich.
 - 3-trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien $G-20^{\circ}E$.
 - 4-trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le parallèle $L-40^{\circ}N$.
 - 5-trajectoire de l'aéronef autour de la terre suivant le parallèle $L=45^{\circ}N$.
- Puis nous allons montrer l'influences des biais sur les trajectoires de l'aéronef.

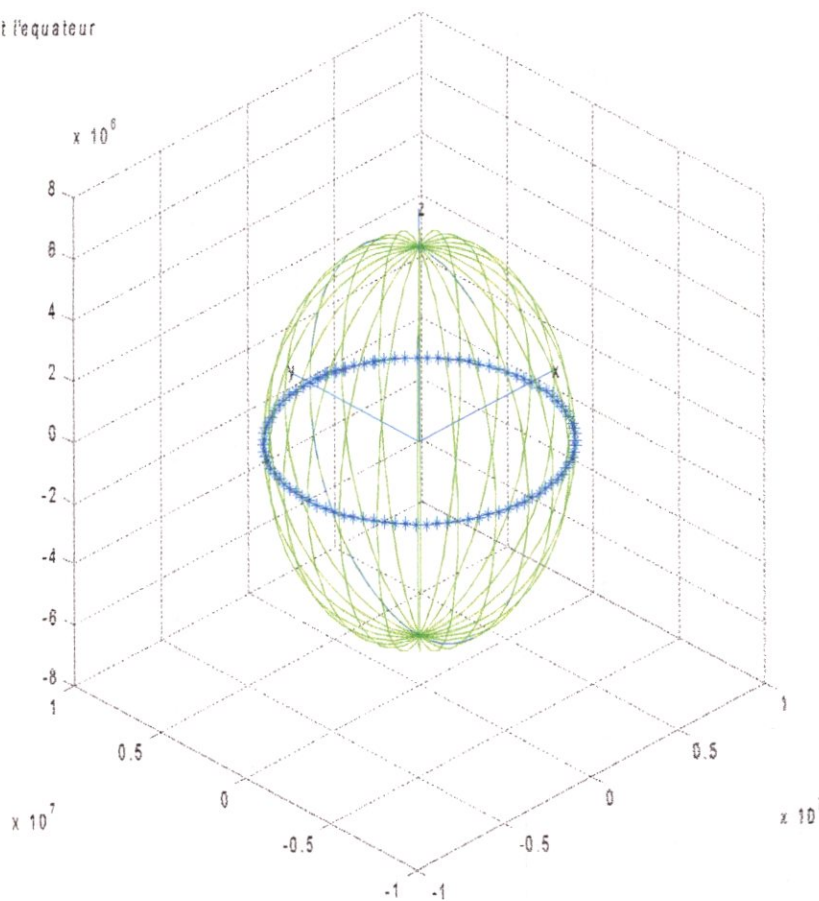
V.1-simulation d'une trajectoire suivant l'équateur :

$VE=440m/s$; (vitesse Est)

$N=100$ points ; $dt=1000s$; $R=6370000m$;

Figure V.6. :trajectoire de l'aéronef suivant l'équateur

trajectoire suivant l'équateur



Cette trajectoire ainsi que celles qui vont suivre ne sont bien évidemment pas biaisées.

V.2-Simulation d'une trajectoire uniforme de l'aéronef autour de la terre suivant le méridien d'origine Greenwich :

Mêmes conditions que pour la première trajectoire :

$V_n=440\text{m/s}$;

$dt=1000\text{s}$;

$N=100$ points ;

trajectoire de l'aéronef
autour de la terre suivant
le méridien d'origine
Greenwich, pas=1000s
 $V_n=440\text{m/s}$

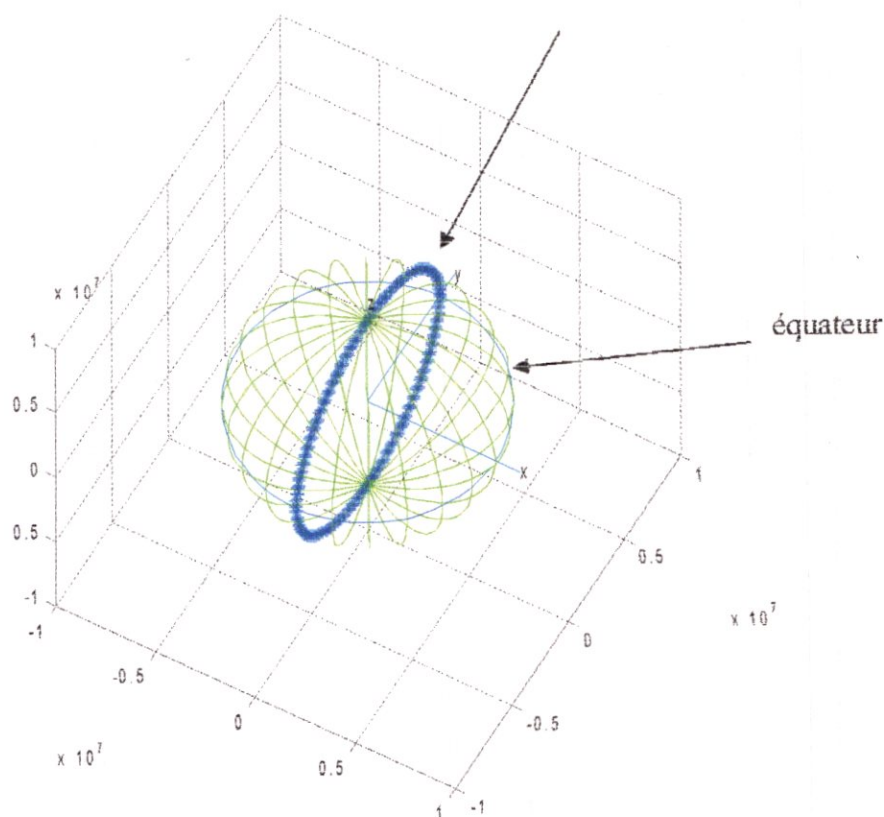
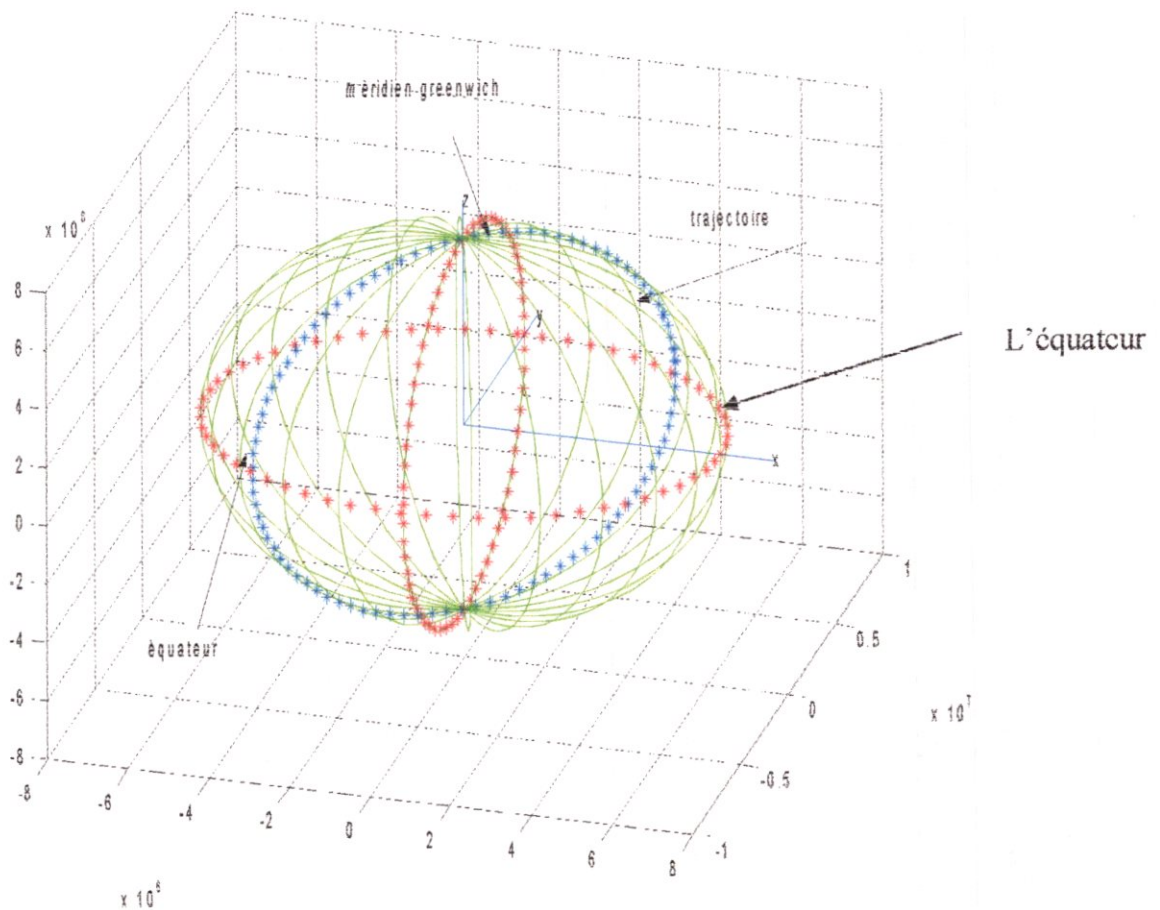


Figure V.7. : Trajectoire de l'aéronef atour de la terre suivant le méridien Greenwich

La trajectoire en bleu signifie la trajectoire de l'aéronef tournant autour de la terre suivant le méridien Greenwich.
L'aéronef est revenu par son point de départ ce qui témoigne du bon déroulement du calcul de la centrale inertielle.

V.3-Simulation d'une trajectoire autour de la terre suivant le méridien G=20°E avec les mêmes conditions :

- Vn=440m/s ;
- N=100 points ;
- dt=1000s ;



FigureV.8. : Trajectoire de l'aeronef autour de la terre suivant le méridien G=20°E

Remarque :

- la trajectoire en rouge à l'horizontale représente l'équateur.
- la trajectoire en rouge à la verticale représente le méridien d'origine Greenwich.

-la trajectoire en bleu représente la trajectoire de l'aéronef V.4-Simulation d'une trajectoire suivant un parallèle de latitude $L=40^{\circ}N$:

Pour des conditions :

- $V_e=240\text{m/s}$;

- $dt=1000\text{s}$;

- $N=100$ points d'échantillons ;

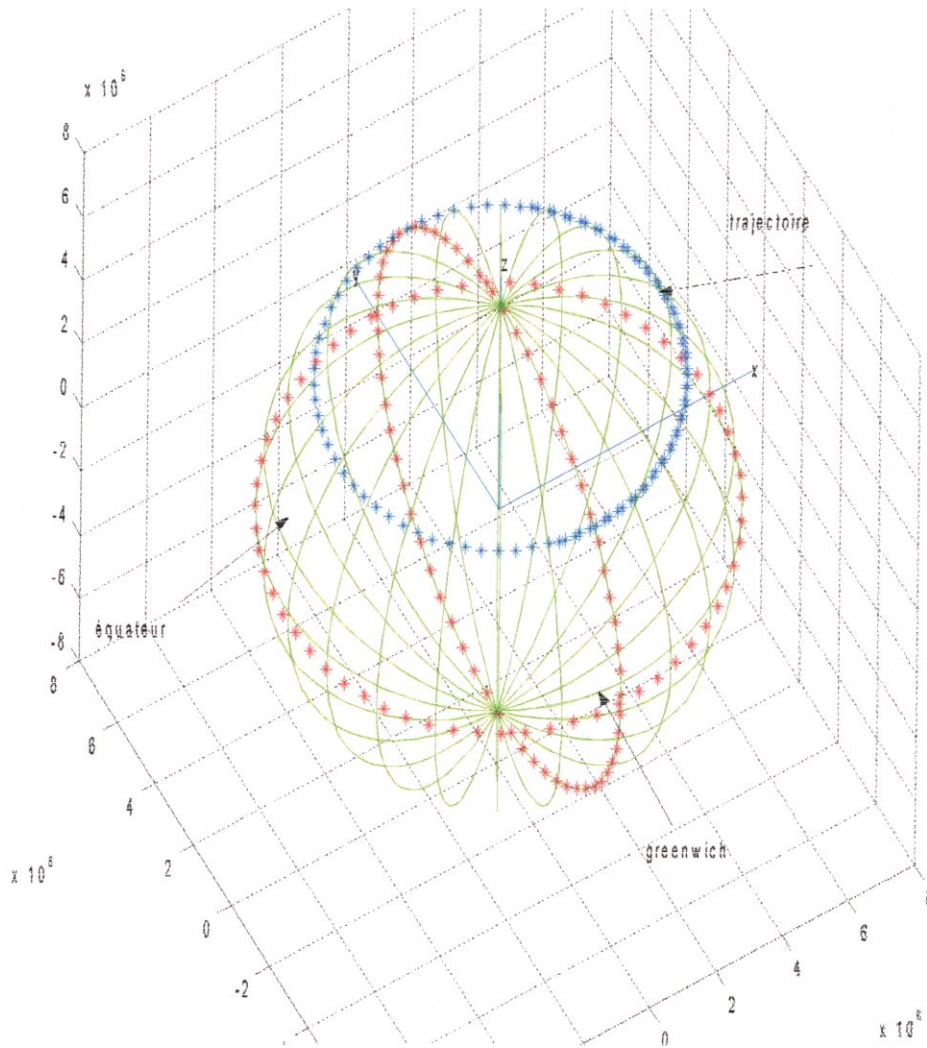


Figure V.9. : trajectoire de l'aéronef suivant le parallèle $40^{\circ}N$

V.5-Simulation d'une trajectoire suivant la parallèle L=45°N :

Les valeurs prises sont :

- Ve=280m/s ;
- N=1000 points ;
- dt=100s ;

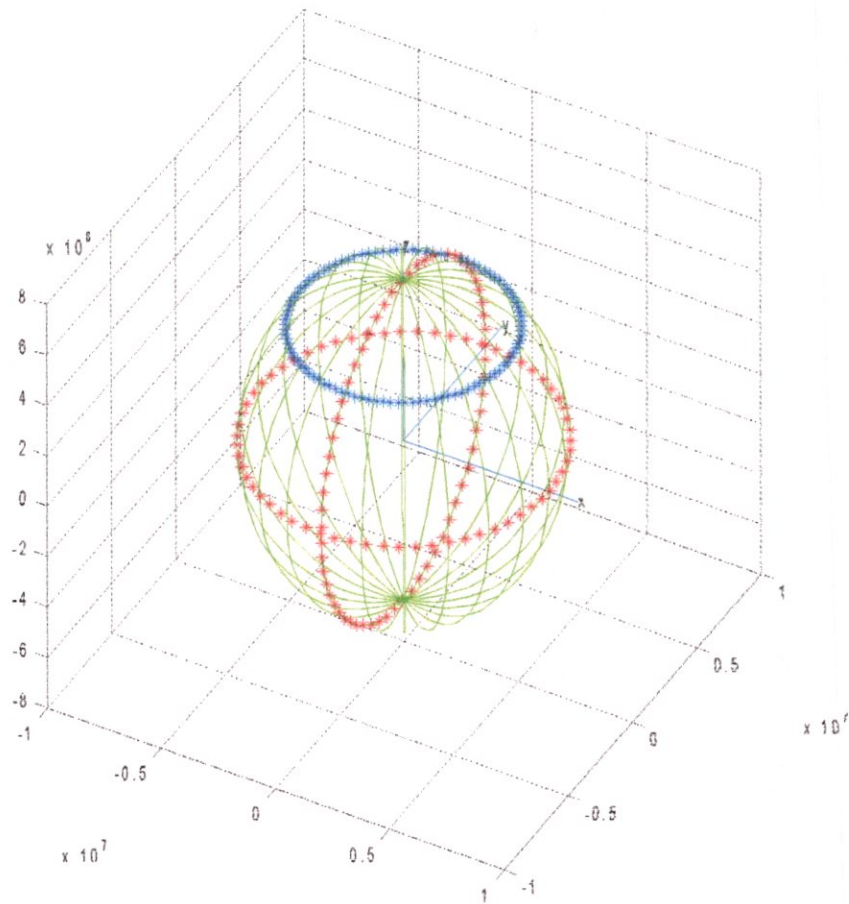


Figure V.10. : trajectoire de l'aéronef suivant le parallèle 45°N

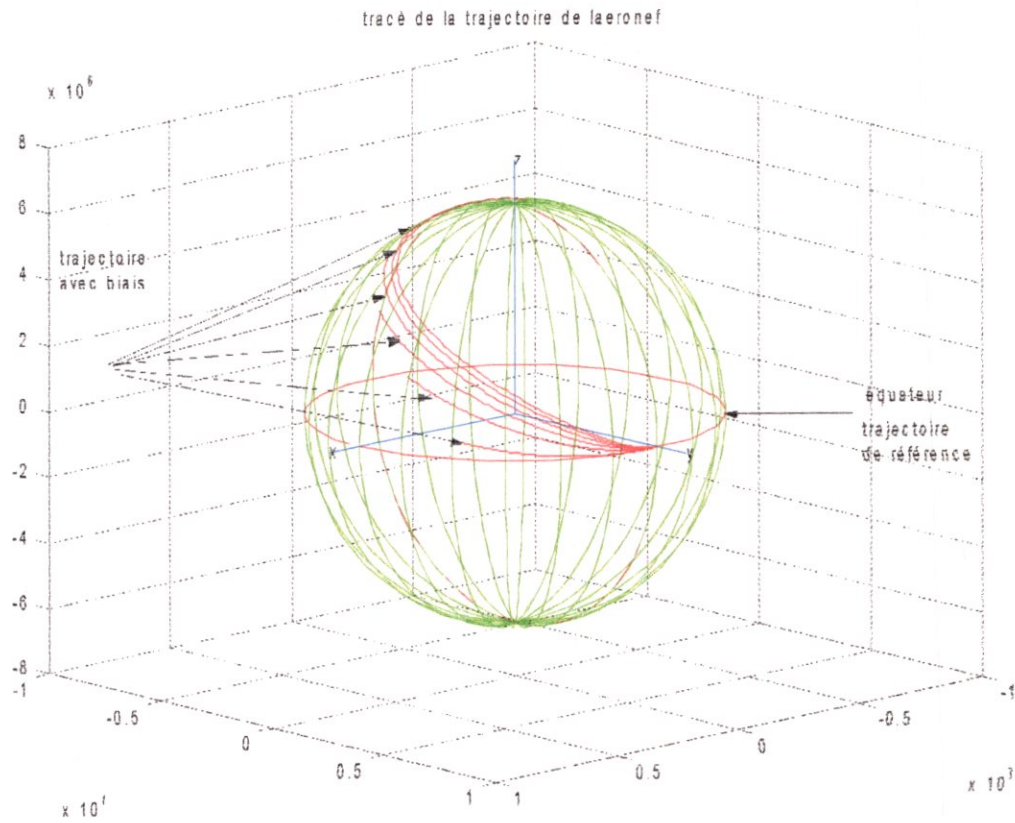
-après avoir tester le modèle de navigation inertielle, nous allons passer maintenant aux tests effectués en ce qui concerne le couplage en boucle ouverte entre le GPS et l'INS.

Influence des biais accélérométriques :

Dans la figure suivante, la trajectoire de référence est celle de l'équateur, et toutes les autres trajectoires représentent les dérives qu'engendrent les biais accélérométriques :

- VF=300m/s ;
- N=150 points ;
- dt=100s ;
- r0=(0,0,0) ;

Figure V.11.a : trajectoires biaisées



Remarque :

On remarque qu'en augmentant le biais accélérométriques de 0.0001m/s^2 pour les six trajectoires conséquentes , les dérives sont considérables.
Ce qui demande donc une correction adéquate de position , ce que nous allons voir dans la deuxième partie de simulation.

Deuxième expérience concernant les dérives inertielles :

-En voici une autre illustration ,cette fois ci avec un biais de 0.000002m/s^2 et avec les conditions suivantes :

- VE-400 m/s ;
- dt=100s ;
- N=500 points ;

On obtient la figure suivante :

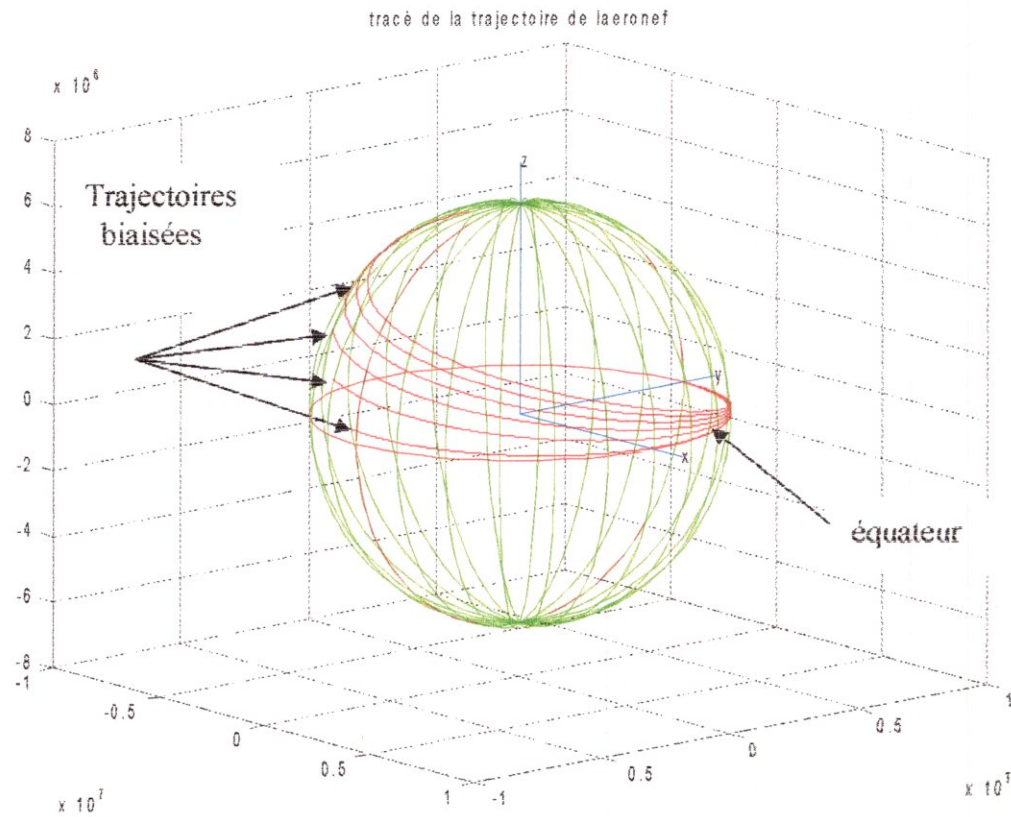


Figure V.11.b : trajectoires biaisées du navigateur inertiel

Mêmes remarques en ce qui concerne les dérives des trajectoires , et ce en augmentant le nombre de points échantillons et en diminuant le biais afin qu'apparaissent nettement les dérives inertielles.

V.1. Simulation du recalage inertiel par positions GPS

Données de simulation :

Dans cette première partie nous allons découvrir l'effet d'un recalage de position supposé être une position GPS sur la dérive inertielle .

Pour cela , j'ai supposé les conditions suivantes :

- $R=6370000\text{m}$; rayon de la terre
 $dt=100\text{ s}$; pas d'intégration
 $N=300$ points ; nombre de points échantillons
 $r_0=(-80,0)$; en degrés latitude, longitude
 $v_0=(370,70)$; en m/s vitesse Nord , vitesse Est

Remarque :

j'ai tout d'abord simulé l'intervention du GPS chaque 30minutes ce qui constitue une vision réaliste du problème puisque dans la réalité le GPS ne peut valider les données en vol qu'après un certain moment (30min,15min) , j'ai également supposé que l'intervention du GPS était périodique ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la réalité à cause des problèmes de pertes de signal ou plus précisément ce que l'on appelle : « saut de cycle » ou encore un satellite défectueux pouvant causer l'acquisition de données erronées , ce qui risquerait en cas d'utilisation de ces dernières de causer une plus grosse dérive de l'aéronef. Par conséquent dans toute mes simulations , les données de recalage sont supposées valides et les algorithmes RAIM (receiver autonomous integrity monitoring) n'ont pas été pris en compte qui représentent les algorithmes de détection et d'exclusion du GPS.

Figure V.12- recalage de position en latitude chaque 30minutes

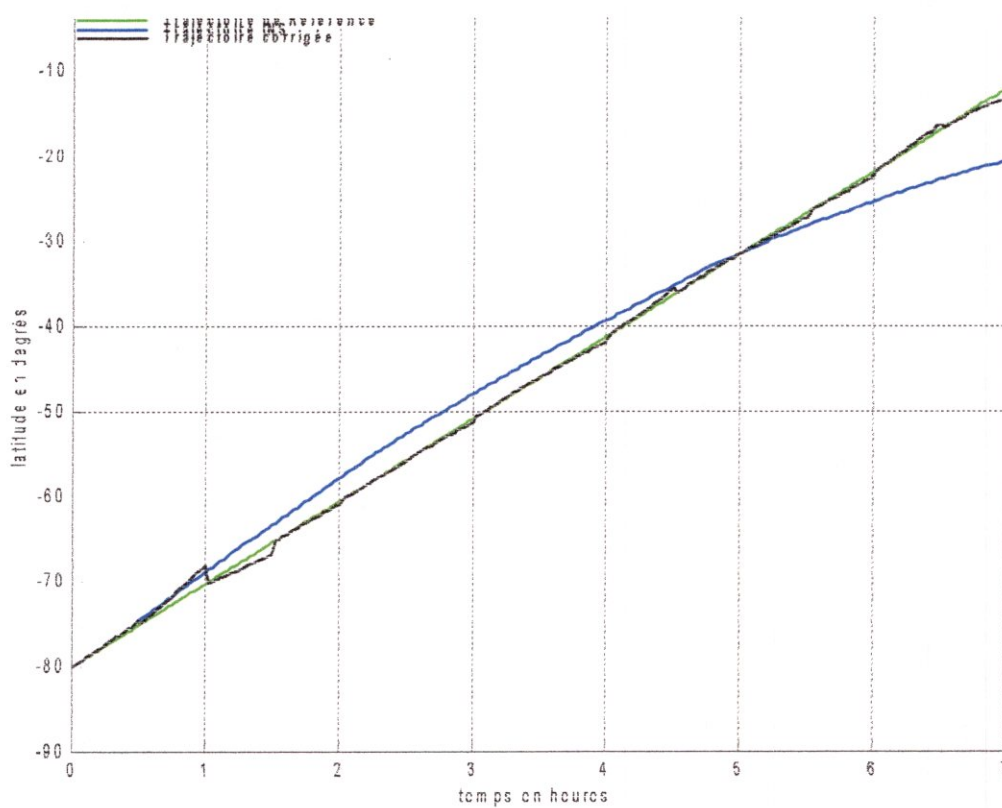


Figure V.13- recalage de position en longitude chaque 30minutes

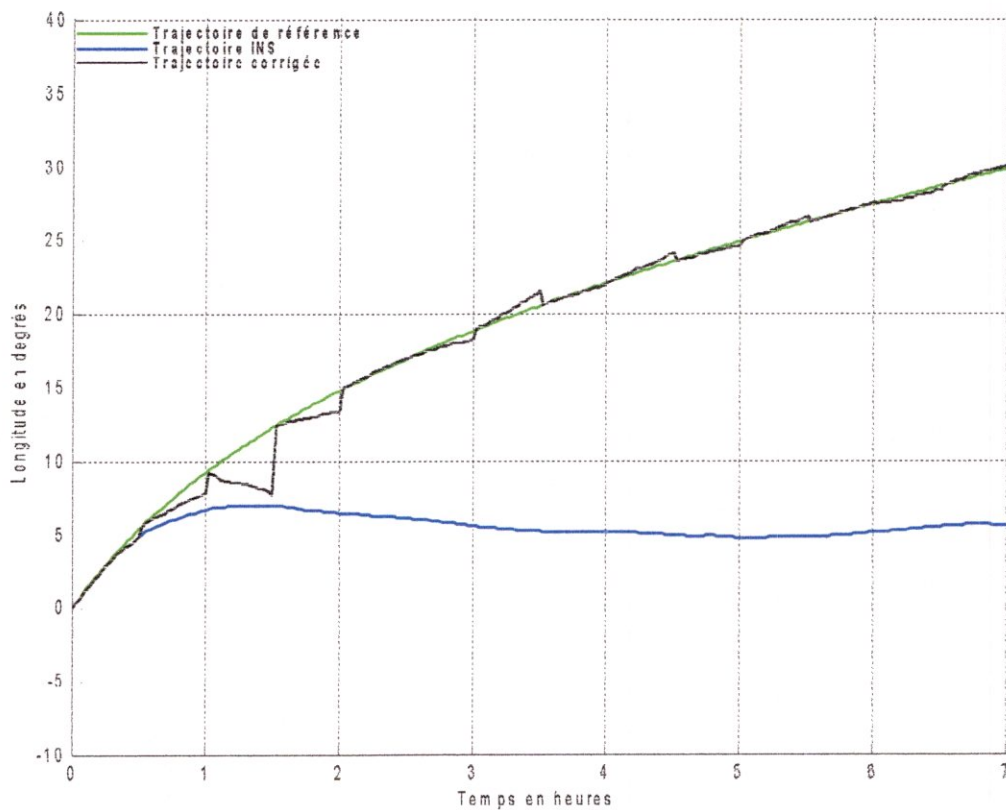


Figure V.14 : la longitude en fonction de la latitude

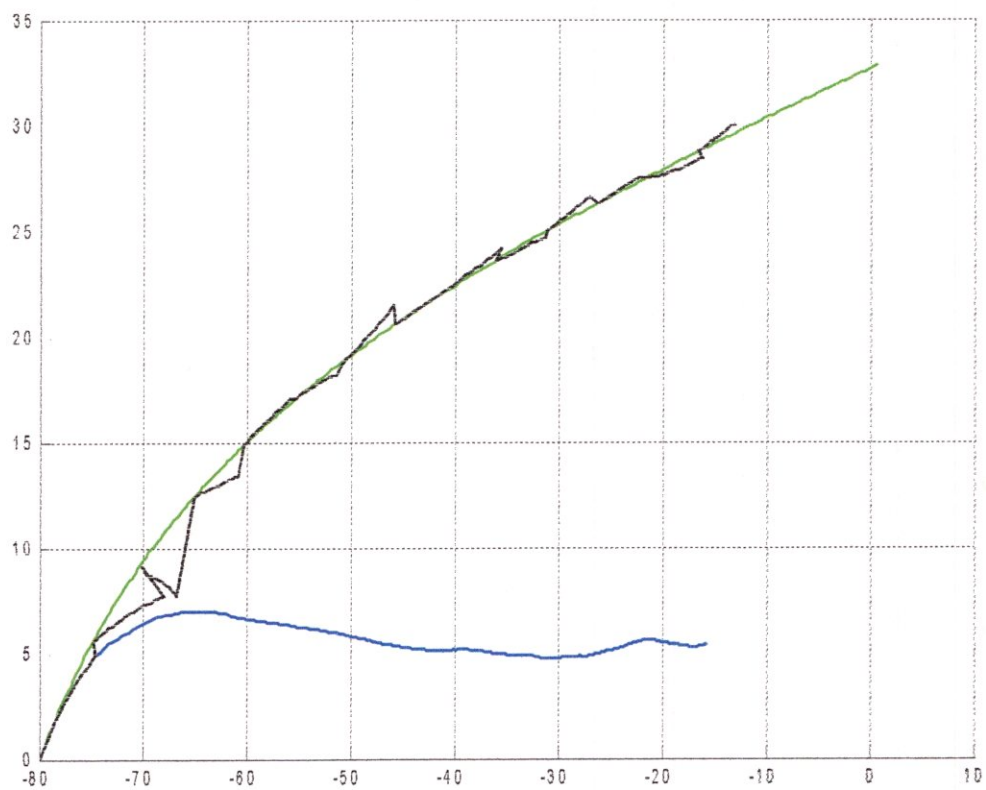


Figure V.15 : la latitude en fonction de la longitude

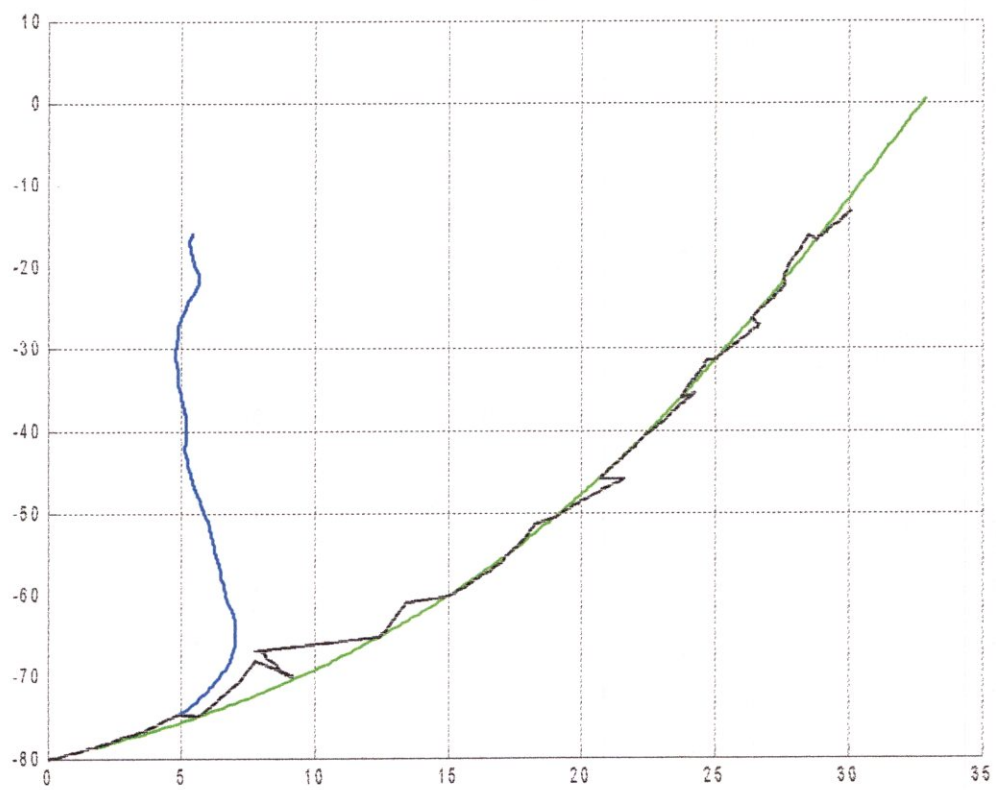


Figure V.16 : recalage de position sur la latitude chaque

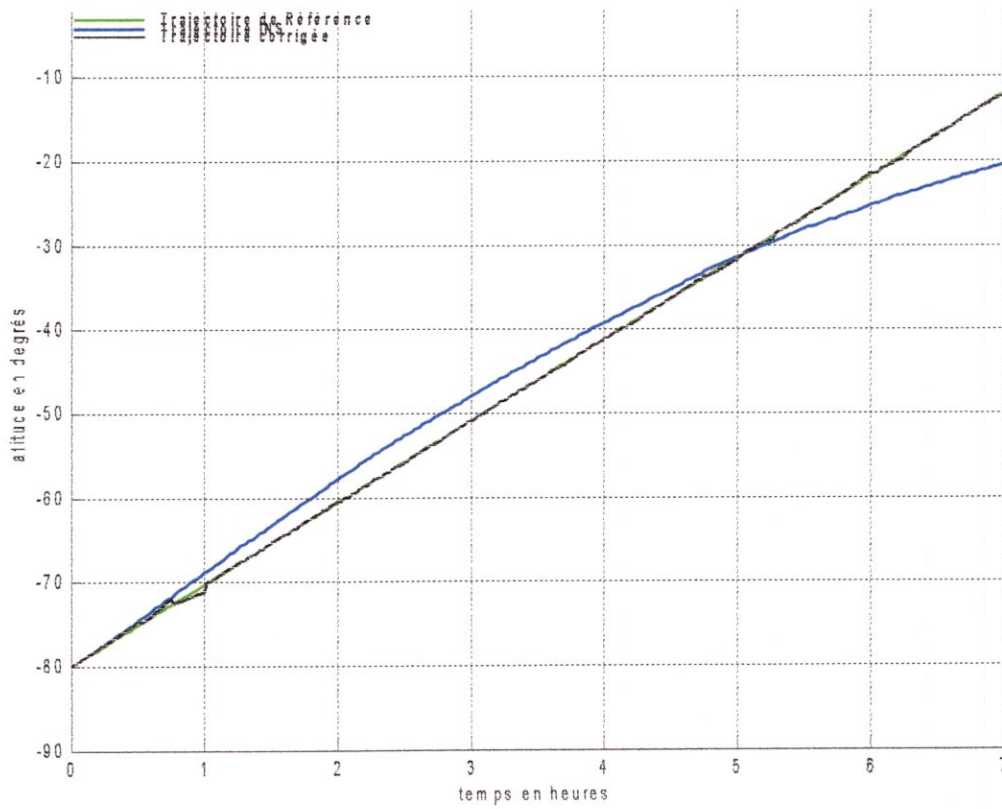


Figure V.17: recalage de position sur la longitude chaque 15 minutes

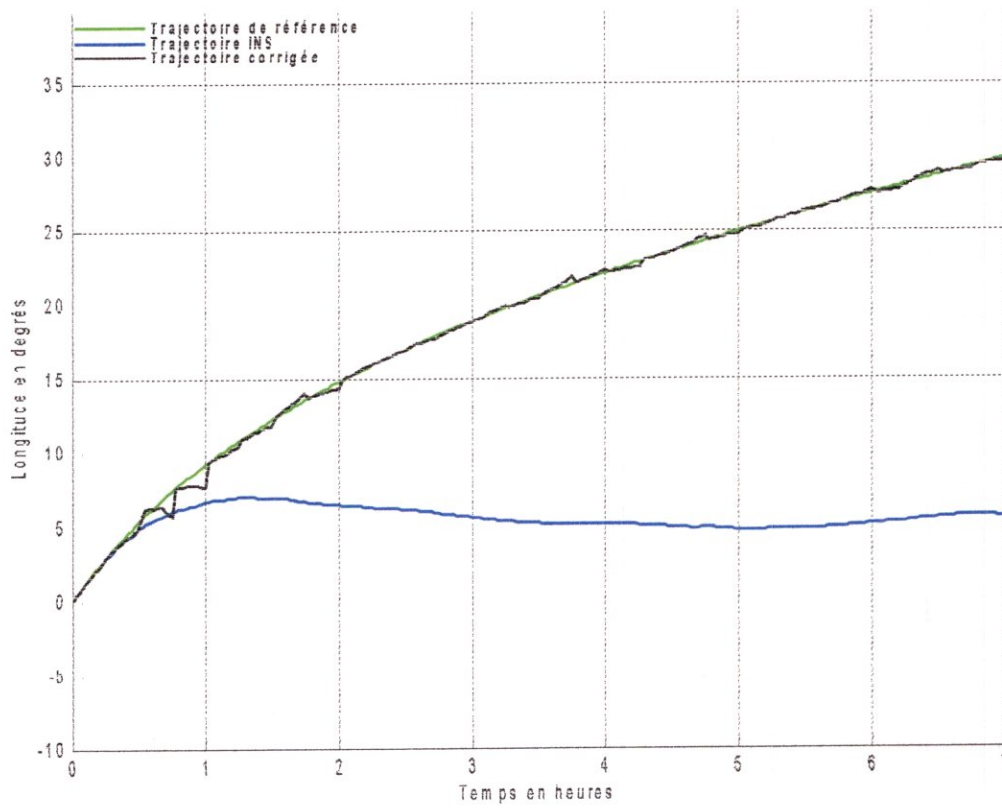


Figure V.18 : la longitude en fonction de la latitude

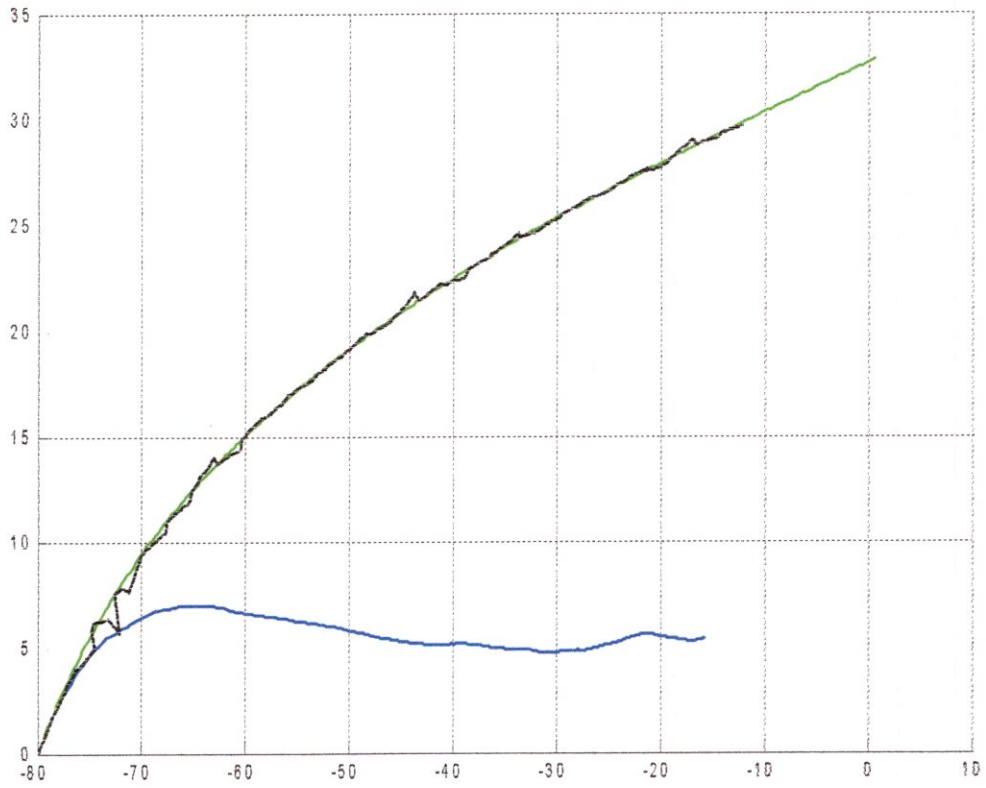
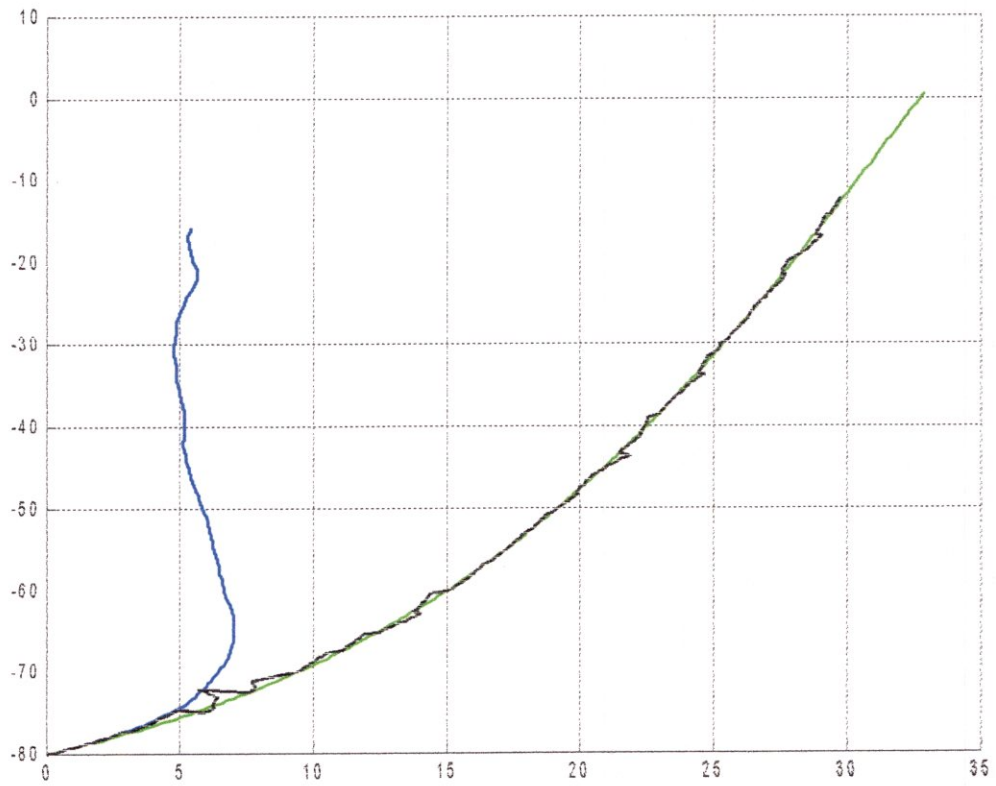


Figure V.19 : la latitude en fonction de la longitude



Remarque :

On constate que déjà avec un recalage de positions et en diminuant la période de recalage on arrive à des résultats satisfaisants que ce soit en latitude ou en longitude , et encore plus visible sur les courbes de trajectoires (latitude,longitude).

Nous allons voir dans ce qui va suivre l'apport d'un recalage de vitesse au recalage de position.

Simulation de l'apport du recalage en vitesse au recalage en position

Simulation du recalage de position suivie du recalage en position et vitesse

Dans cette partie , le but est de montrer l'amélioration que peut apporter le recalage en vitesse au recalage en position :

Les données de simulation ont été les suivantes :

$R = 6370000\text{m}$;

$g = 10 \text{ m/s}^2$

$ba = 0.001 \text{ m/s}^2$;

$bg = 0.002^\circ/\text{h}$;

$r_0 = (-30, -20)$; en degrés

$v_0 = (150, 240)$; en m/s

$P = \text{diag}(100)$;

$Q(1,1) = Q(2,2) = Q(3,3) = (0.1)^2$;

$Q(4,4) = Q(5,5) = Q(6,6) = (0.01)^2$;

$R(1,1) = R(2,2) = R(3,3) = (0.0001)^2$;

$R(4,4) = R(5,5) = R(6,6) = (0.001)^2$;

Et on utilise dans les programmes la matrice d'observation H une fois pour le recalage de position et la matrice augmentée H pour le recalage de position et vitesse comme expliqué dans le chapitre IV.

Figure V.20 : recalage de position chaque 30 min sur la latitude

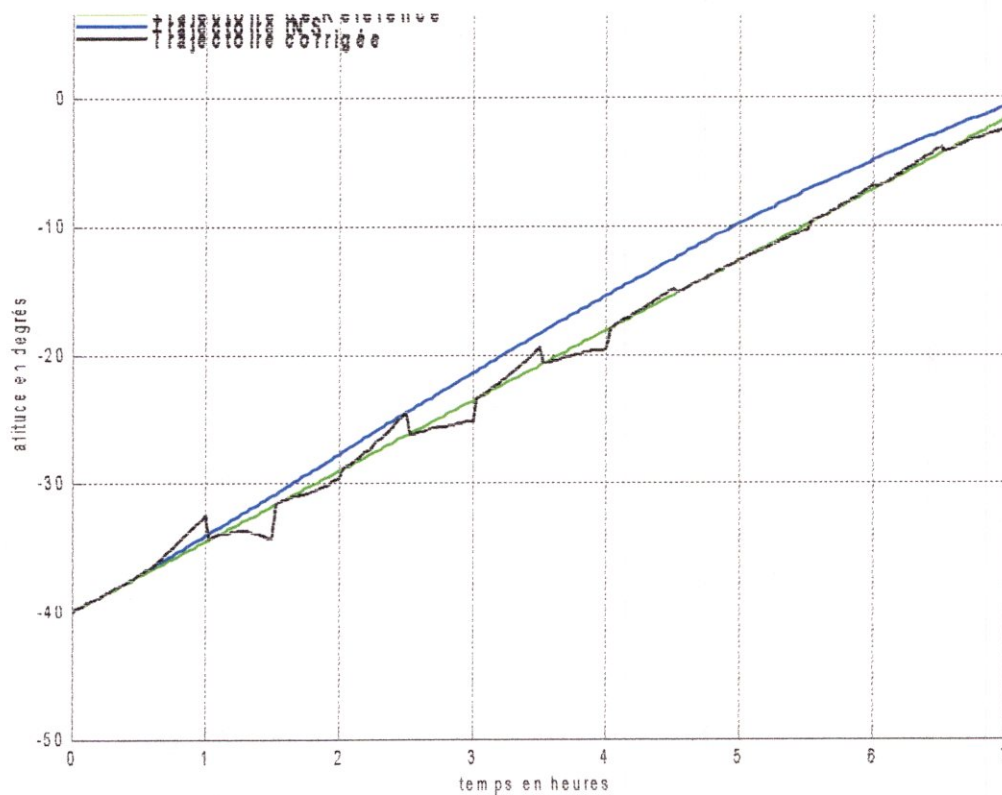


Figure V.21 : recalage de position sur la longitude chaque 30min

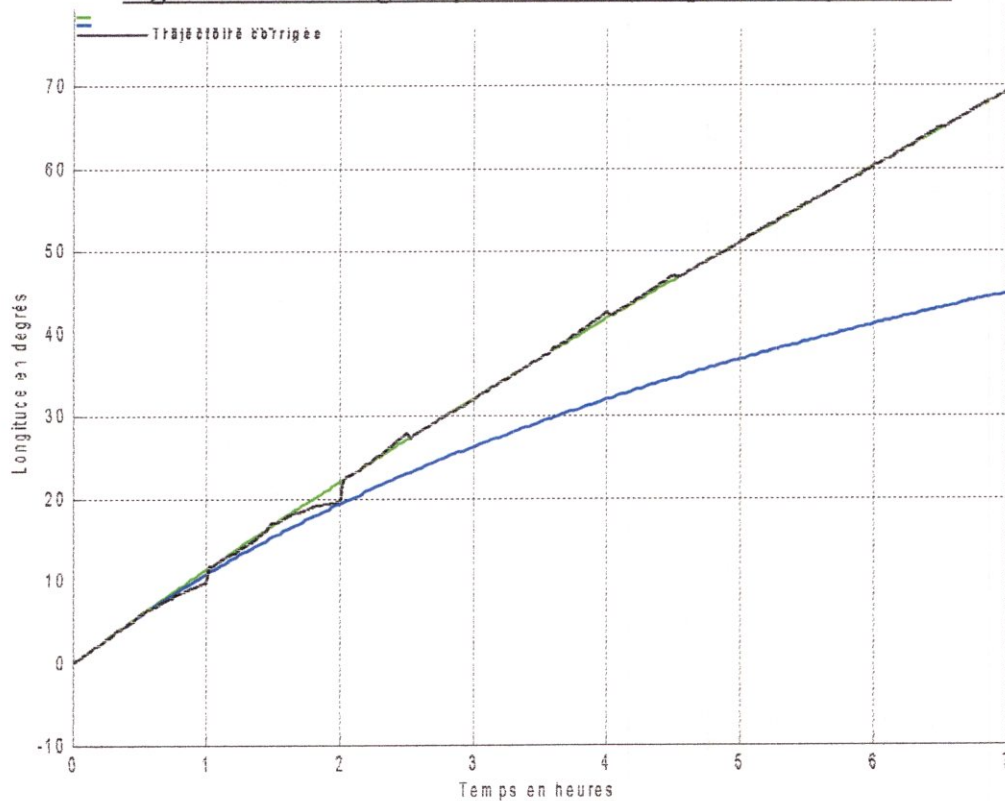


Figure V.22 : la longitude en fonction de la latitude

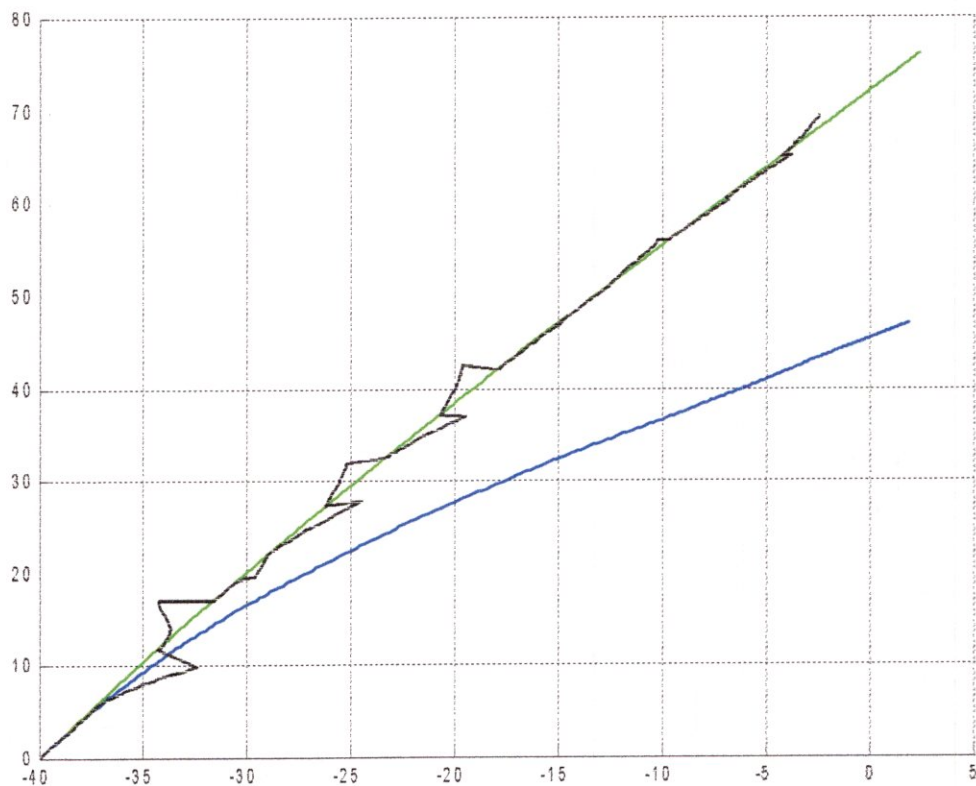


Figure V.23 : la latitude en fonction de la longitude

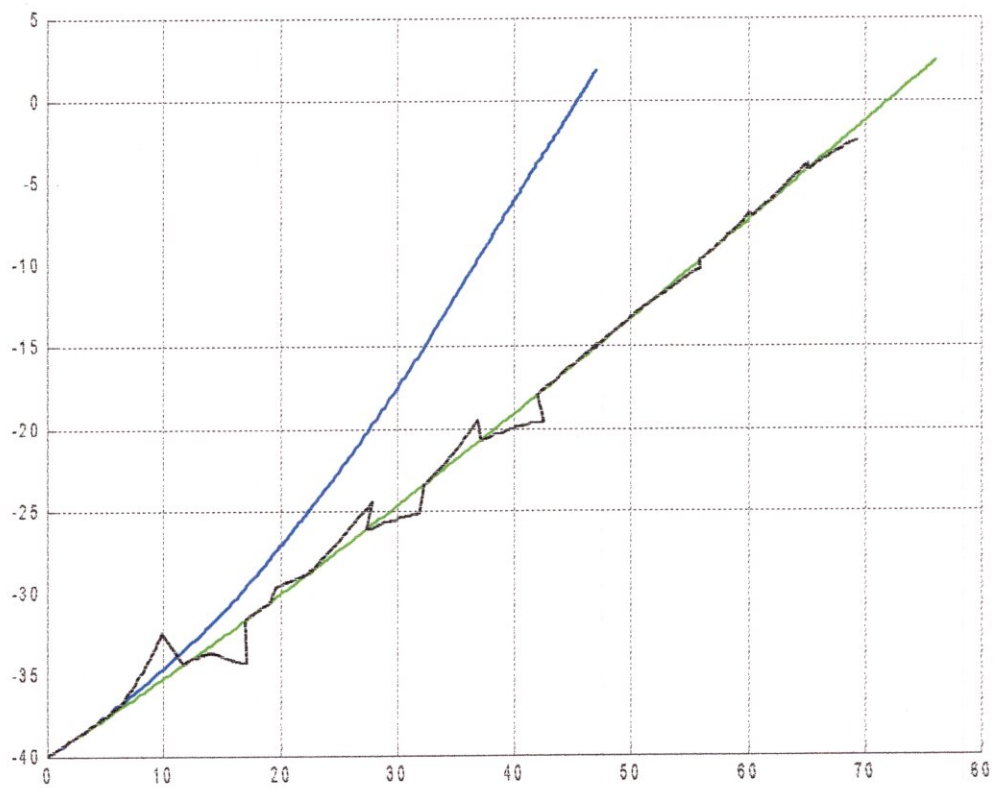


Figure V.24 : recalage de position et vitesse sur la latitude chaque 30 min

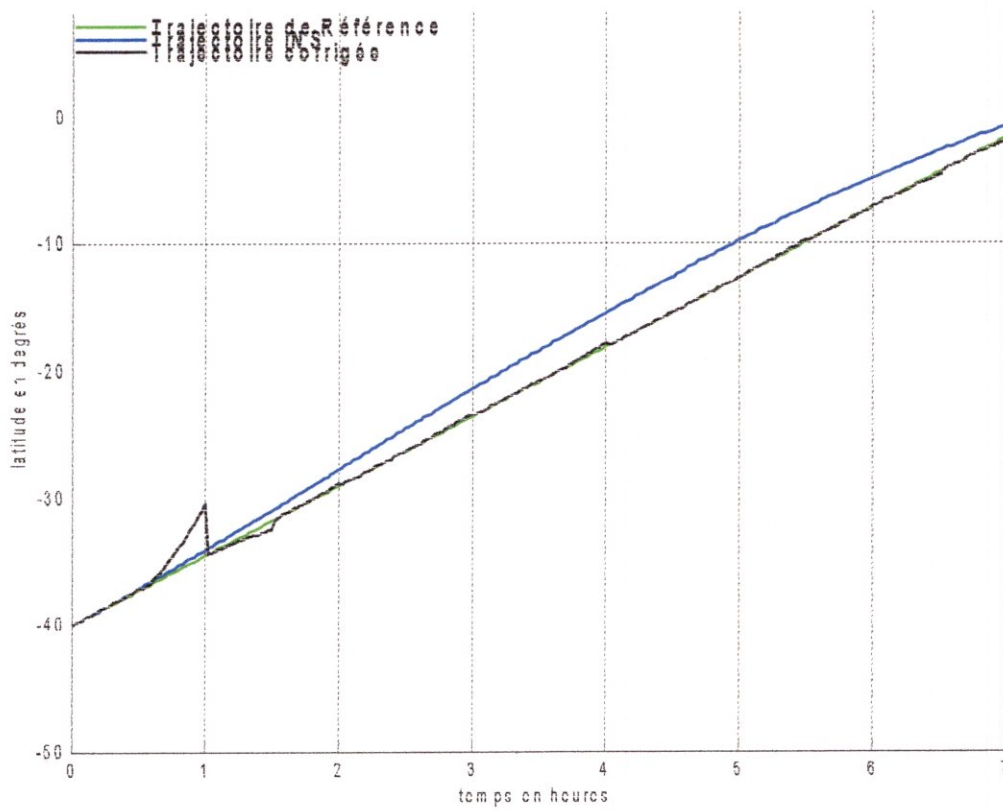


Figure V.25 : recalage de position et vitesse sur la longitude chaque 30min

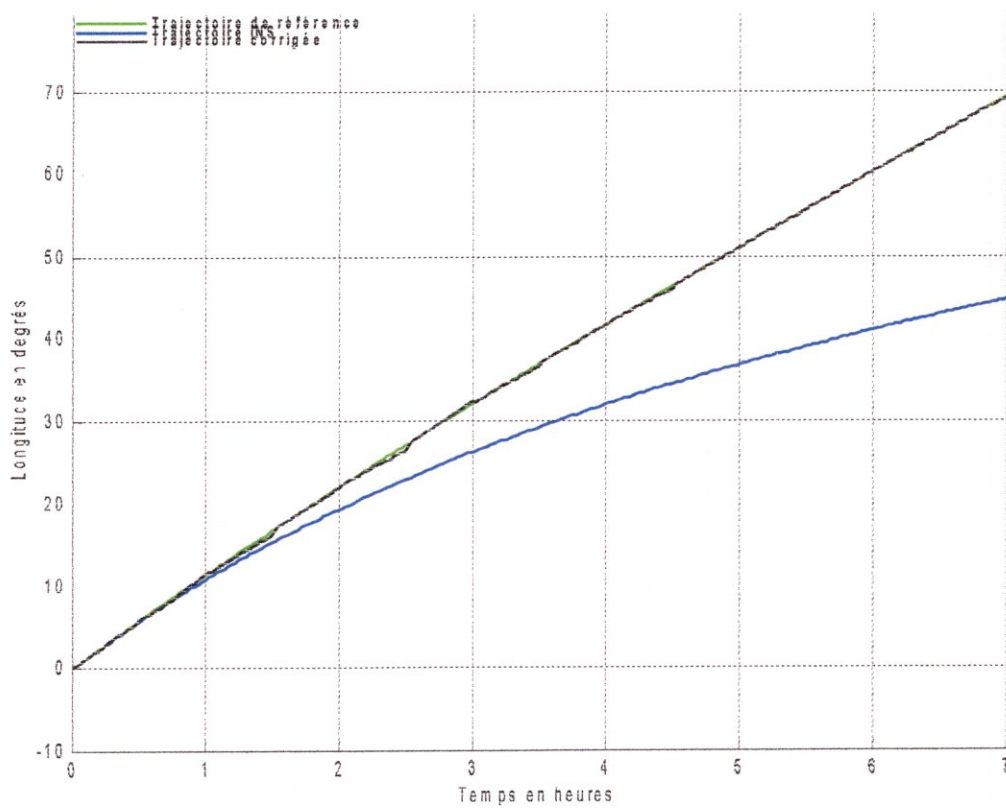


Figure V.26 : la longitude en fonction de la latitude

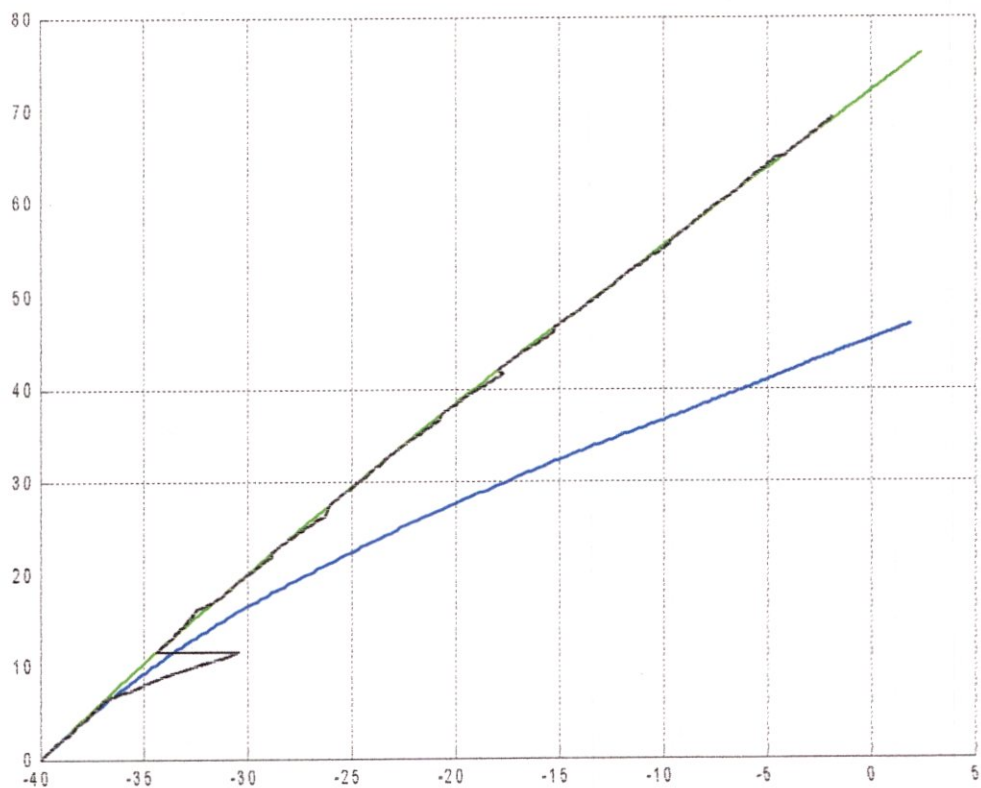
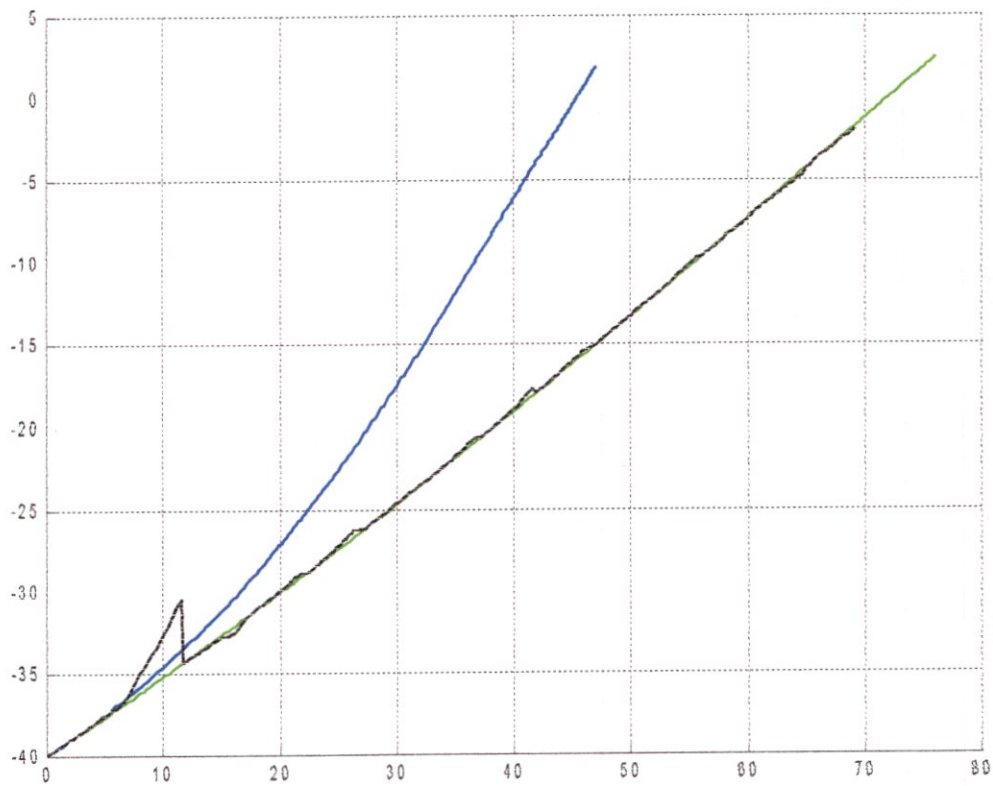


Figure V.27 : la latitude en fonction de la longitude



En analysant les résultats obtenus , nous arrivons à voir l'efficacité qu'engendre un recalage de vitesse en plus d'un recalage de position sur le suivi de trajectoire.

-Dans ce qui va suivre la simulation consiste à prouver que même avec un recalage de vitesse, le fait de minimiser la période de recalage , cela entrainera une amélioration très nette du suivie de trajectoires.

Les conditions de simulations sont les mêmes pour le filtre de Kalman et comme suit pour les valeurs initiales de position :

$r_0=(-40,0,0)$; en degrés

$v_0=(170,280)$; en m/s

$b_a=0.001/s$;

$b_g=0.002\text{ rd/s}$;

les résultats sont les suivants :

- recalage position et vitesse sur la latitude chaque 60min.
- recalage position et vitesse sur la longitude chaque 60min .
- recalage position et vitesse sur la latitude chaque 30 min.
- recalage position et vitesse sur la longitude chaque 30min.
- recalage position et vitesse sur la latitude chaque 15min.
- recalage position et vitesse sur la longitude chaque 15min.

recalage en position et vitesse

SIMULATION DES RECALAGES DE POSITION ET DE VITESSE :

Dans cette partie , le but est de faire valoir l'efficacité du recalage en position et vitesse en diminuant la période d'intervention du GPS pour recalibrer l'INS.

Les résultats obtenus sont divisés en trois parties :

- 1-recalage de position/vitesse chaque 60min.
- 2-recalage de position/vitesse chaque 30min.
- 3-recalage de position/vitesse chaque 15min.

Les conditions de simulation ont été les suivantes :

- $b_a=0.01\text{m/s}^2$; $b_g=0.02\text{rd/s}$; (biais accélérométrique et gyrométrique)

- $r_0=(-30,-20)$; (position initiale) en rd ;

- $v_0=(150,240)$; (vitesse Nord et Est) en m/s

I-recalage en position et vitesse chaque 60min :

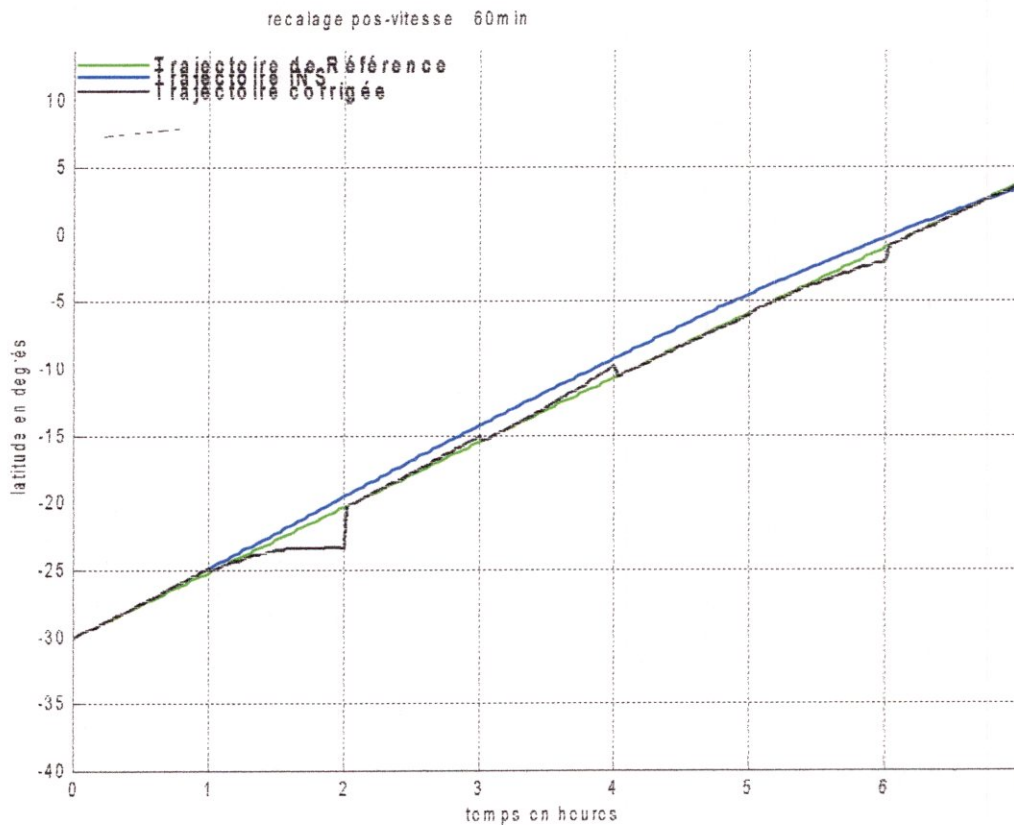


Figure V.28 : recalage de position et vitesse sur la latitude

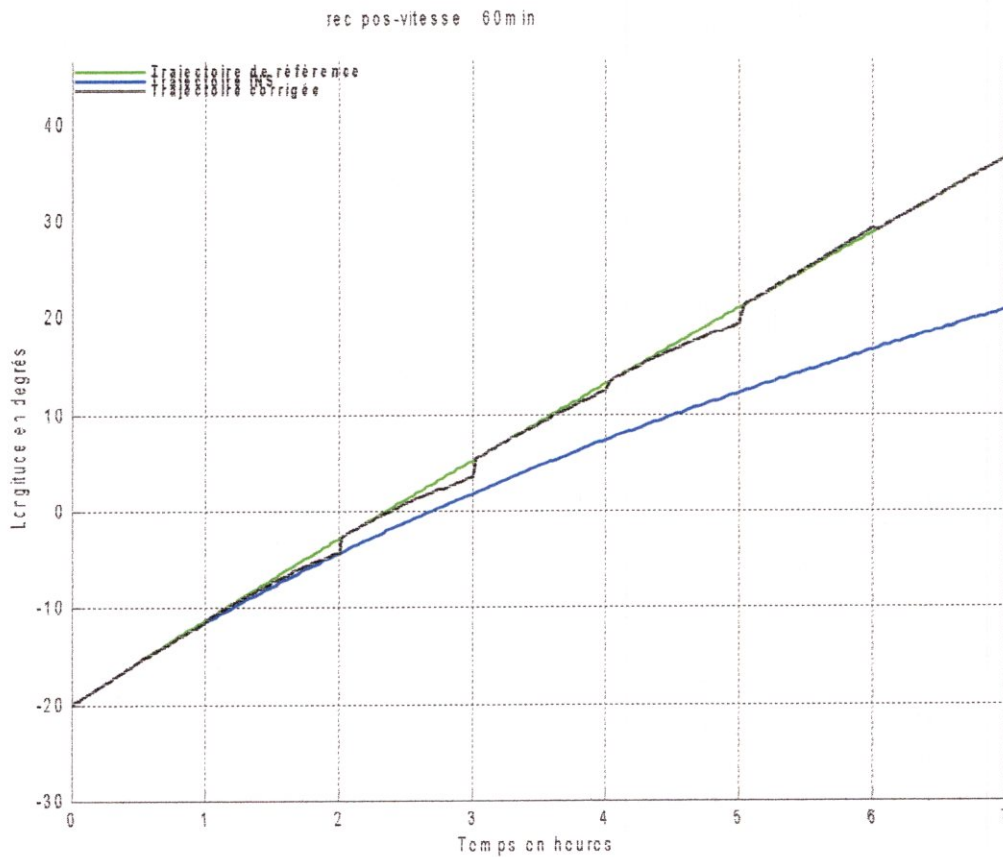


Figure V.29 : recalage de position et vitesse sur la longitude

Remarque :

Les trajectoires en bleu représentent les dérives accélérométriques et gyroscopiques.
 Les trajectoires en vert représentent la trajectoire de référence.
 Les trajectoires en noire représentent les trajectoires recalées par GPS.

-ce que l'on peut dire en regardant le comportement des trajectoires c'est que déjà avec un recalage de 60 min , on a un meilleur suivi de trajectoire de la part de l'aéronef en utilisant le GPS comme moyen de recalage.

-les courbes qui vont suivre représentent les trajectoires (latitude en fonction de la longitude) qui définissent le mouvement de l'aéronef projeté en cartésien On y remarque très bien le comportement « borné de l'aéronef » qui est essentiellement du à la particularité du GPS dont les erreurs sont bornées dans le temps.

Figure V.30 : la longitude en fonction de la latitude

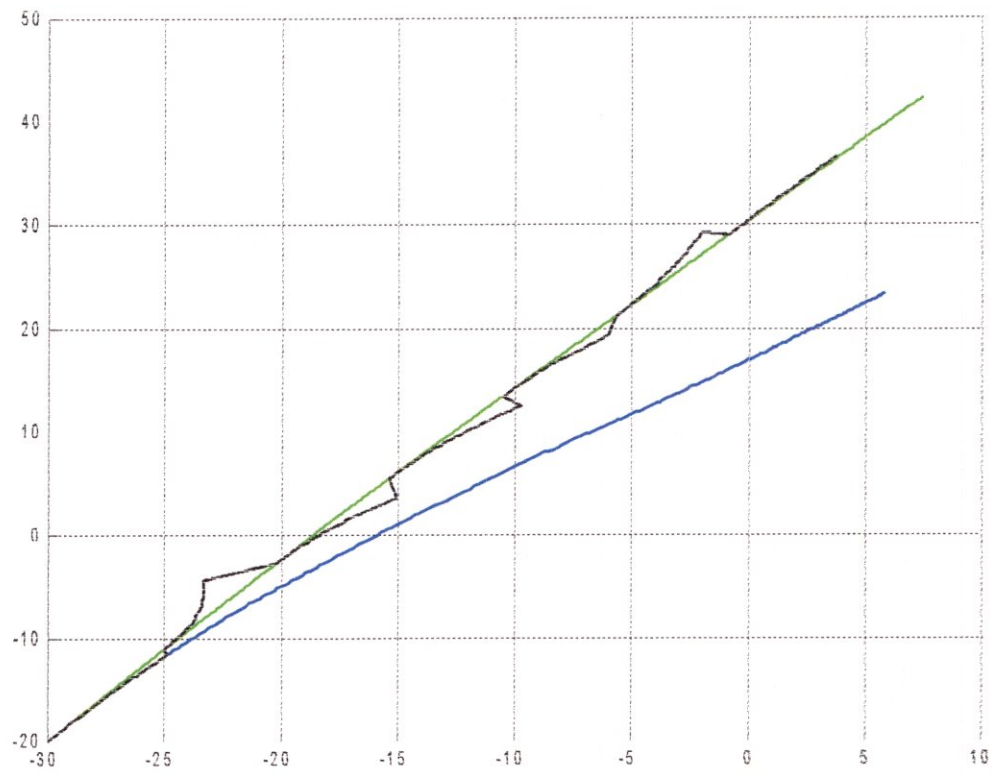


Figure V.31 : la latitude en fonction de la longitude

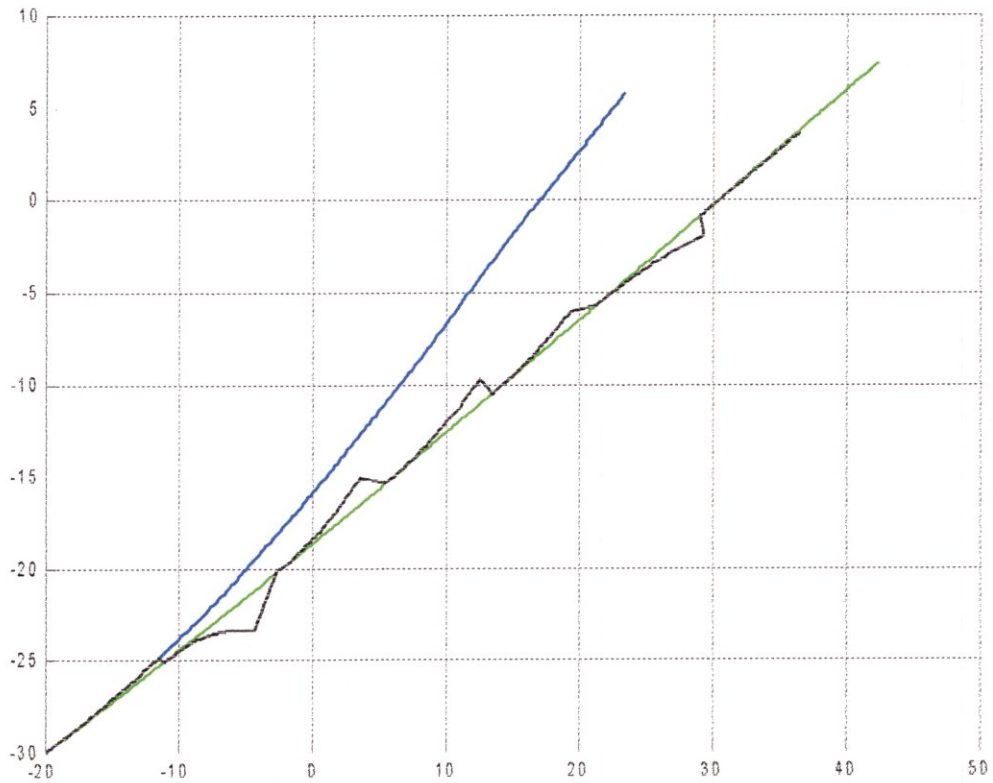


Figure V.32 : recalage de pos/vit sur la latitude chaque 30min

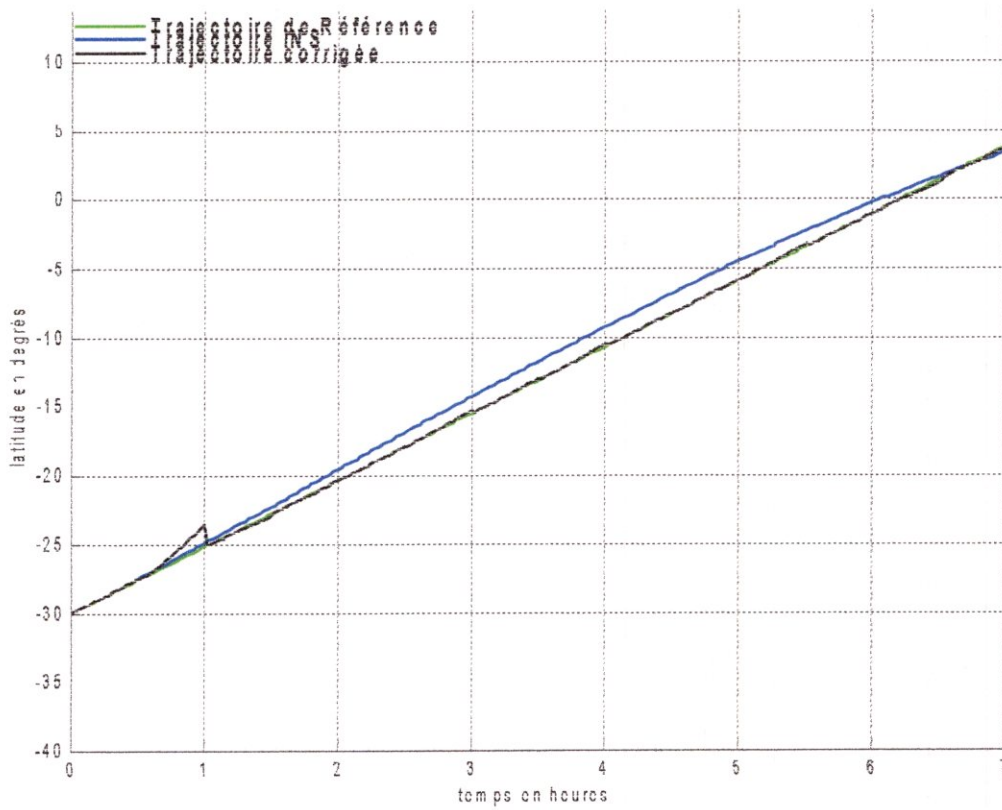


Figure V.33 : recalage pos/vit sur la longitude chaque 30min

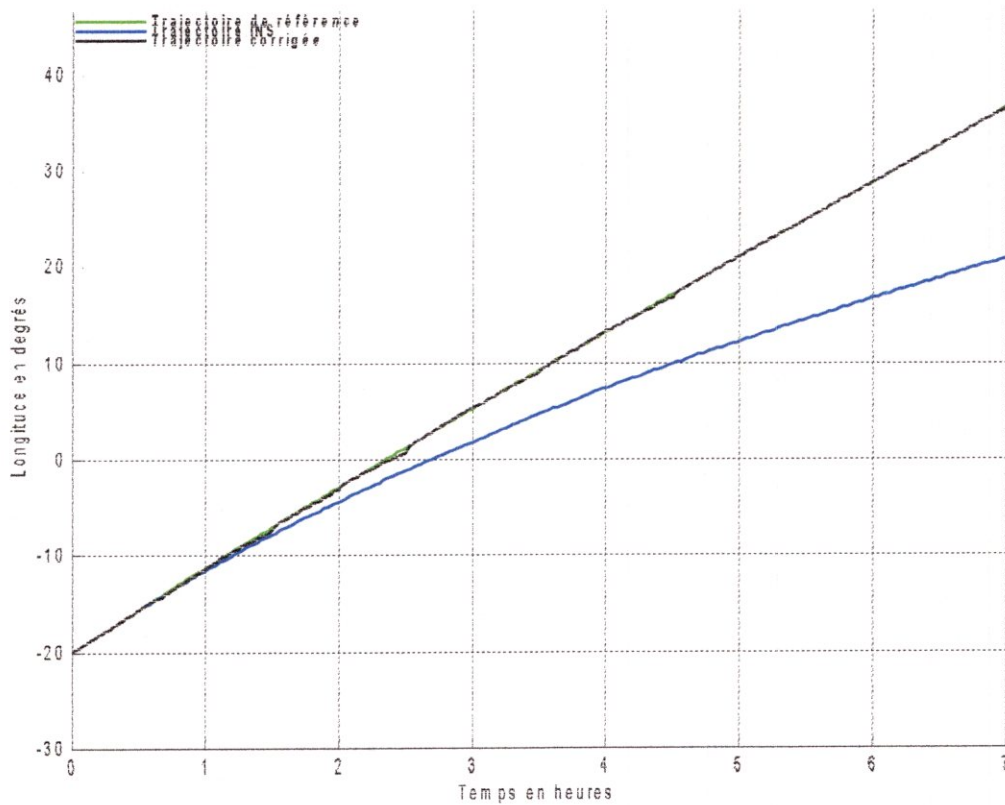


Figure V.34 :Longitude en fonction de la latitude $G-f(L)$

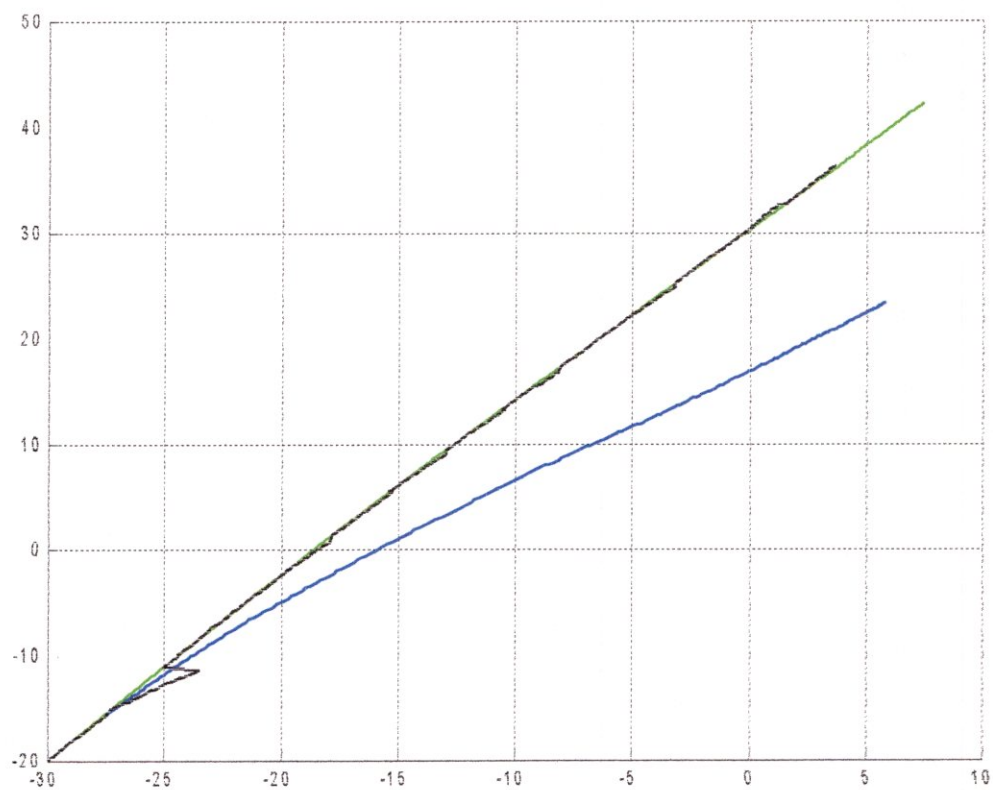


Figure V.35 :latitude en fonction de la longitude

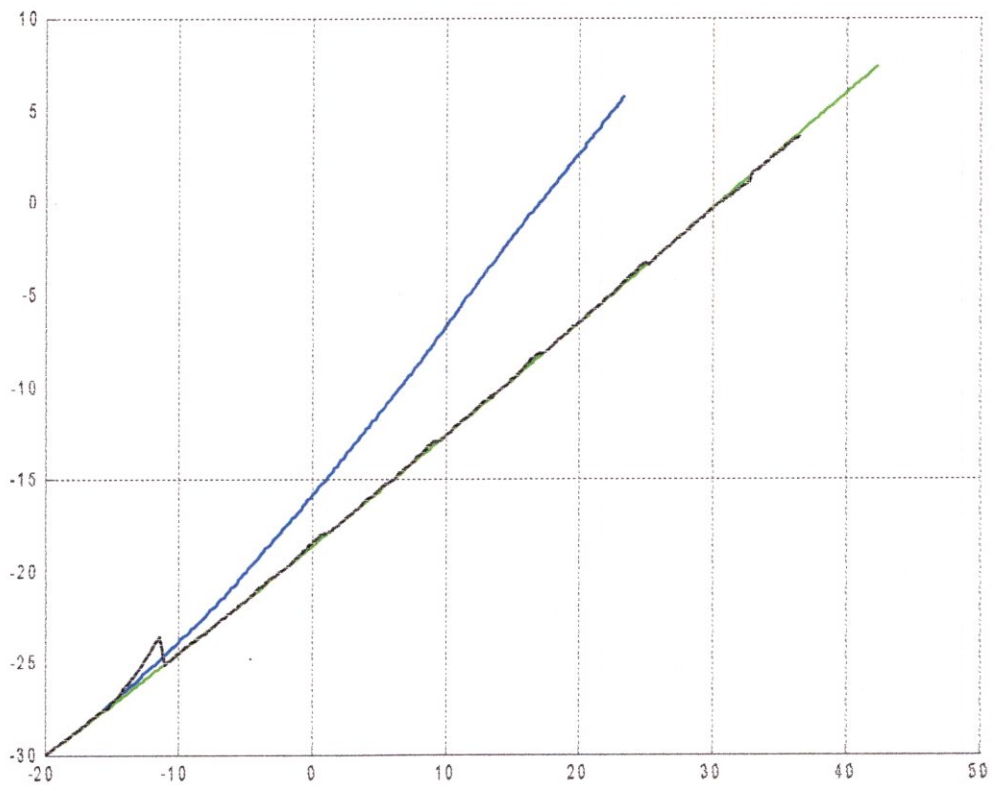


Figure V.36 : recalage de position et vitesse chaque 15 min

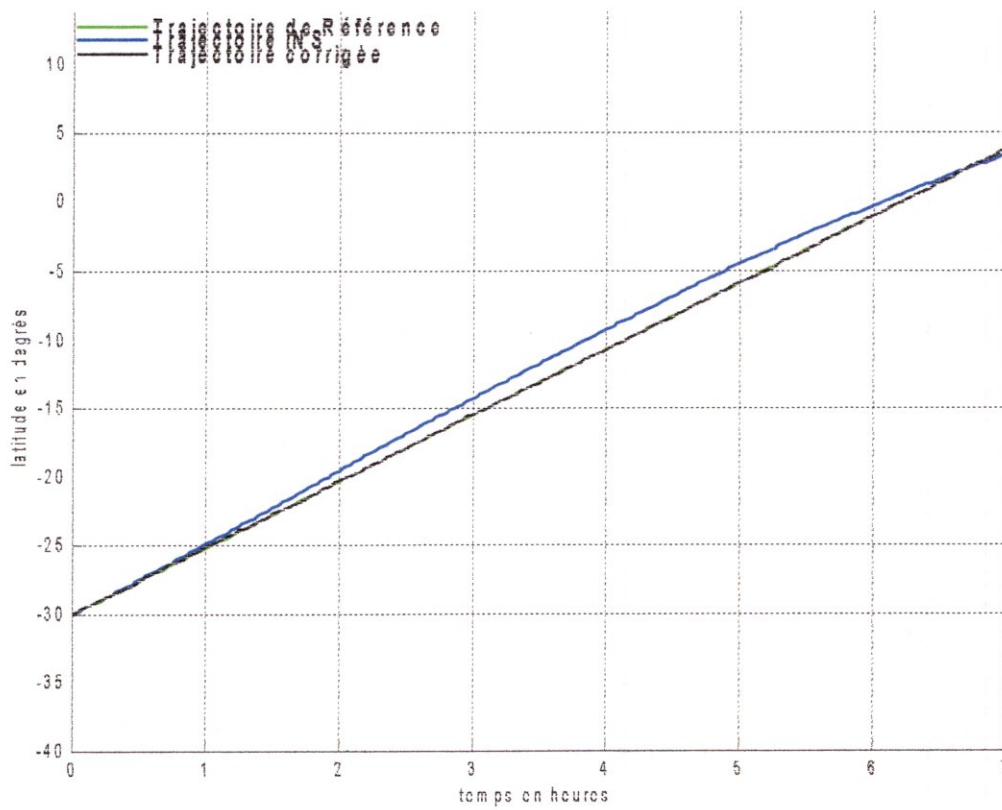


Figure V.37 : recalage de pos/vit sur la longitude chaque 15 min

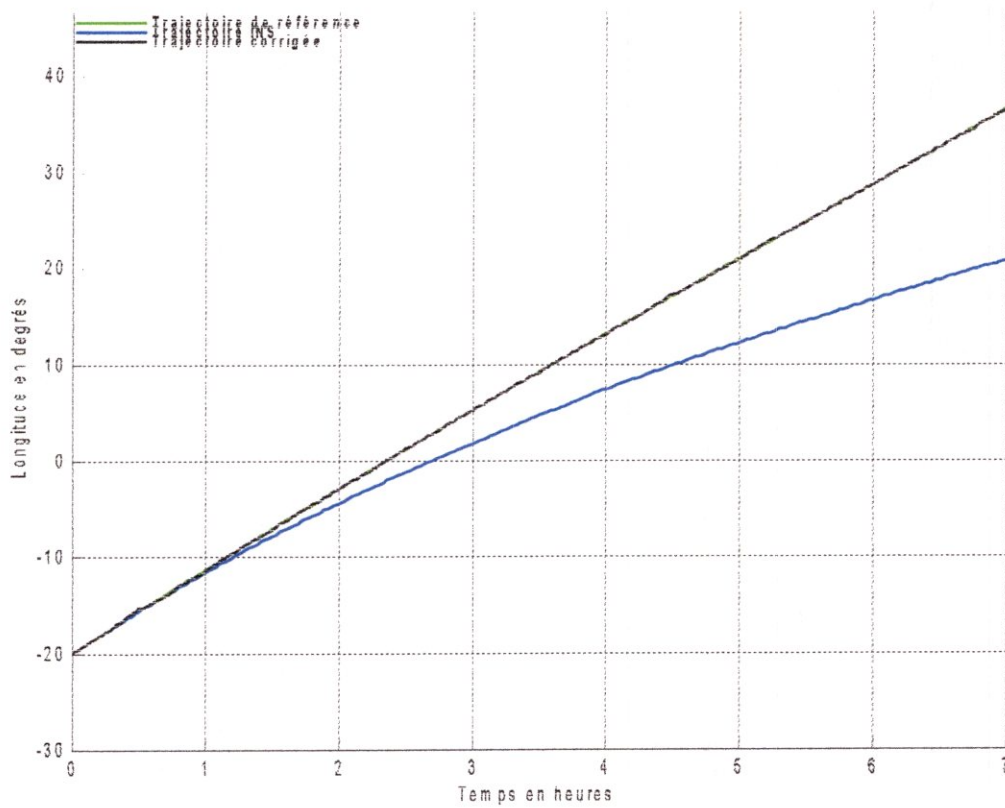
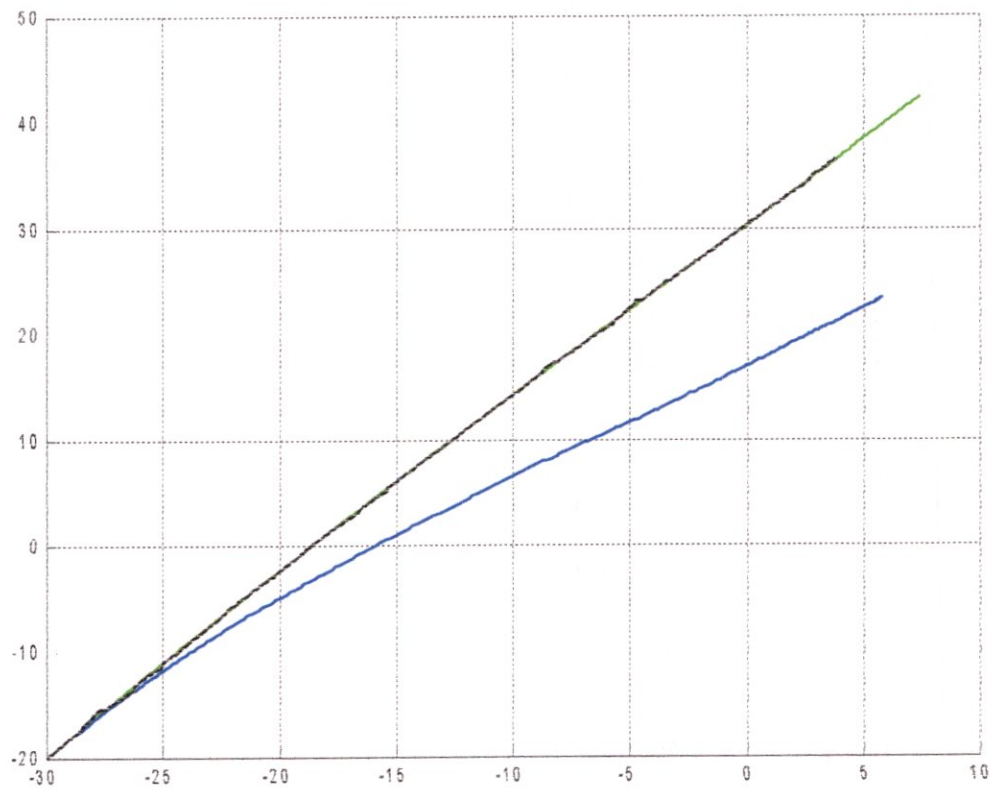


Figure V.38 :longitude en fonction de la latitude



Constatations :

En analysant les résultats , on remarque clairement l'amélioration du suivis de trajectoire par l'aéronef en diminuant la période de recalage de 60 à 30 puis à 15 min . en réalité le GPS de navigation ne peut valider des données qu'après un certain temps qui dans le meilleur des cas est de 15 minutes.

Dans les simulations suivantes c'est le comportement du recalage lorsqu'on fait faire un virage à l'appareil qui va être tester.

Les conditions seront les suivantes :

$\alpha = (10, 0, 30)$ en degrés.

$r_0 = (-40, -20)$;

$V_0 = (270, 0, 0)$;

Les figures qui suivent montrent un recalage progressif de 60 minutes à 30 minutes puis à 15 minutes de période de recalage .

recalage en position et vitesse avec lacet et roulis

figure V.39 : recalage de position chaque 60min sur la latitude avec virage

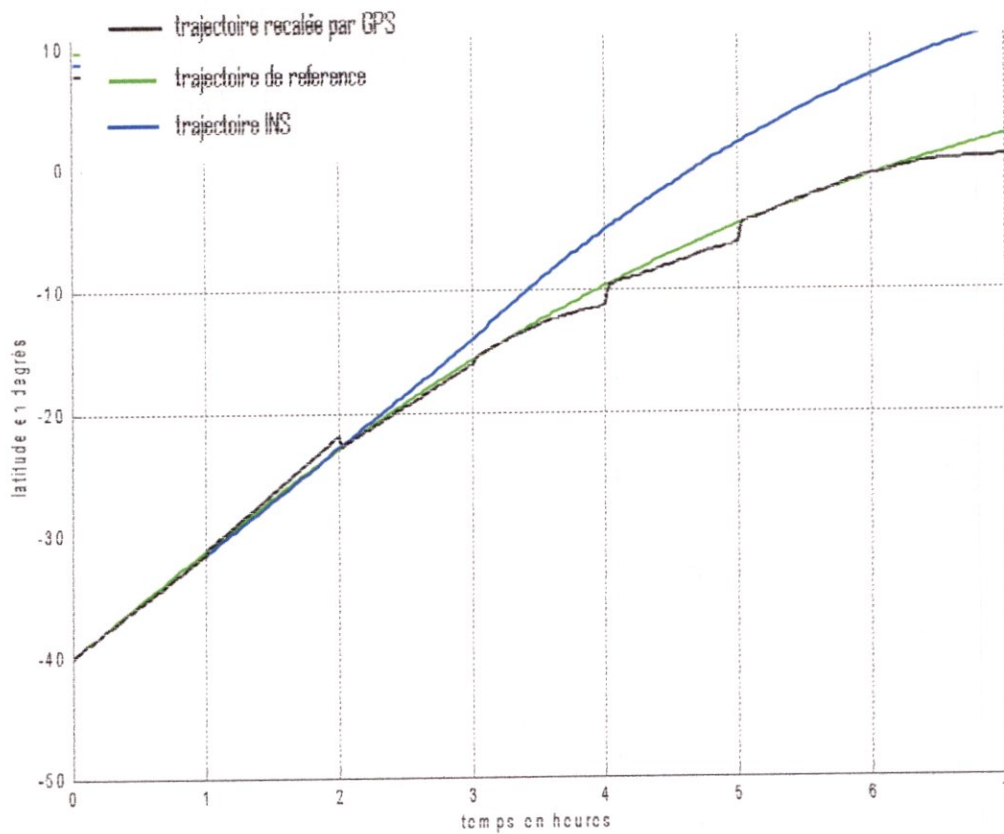


Figure V.40 : recalage de position chaque 60 min sur la longitude avec virage

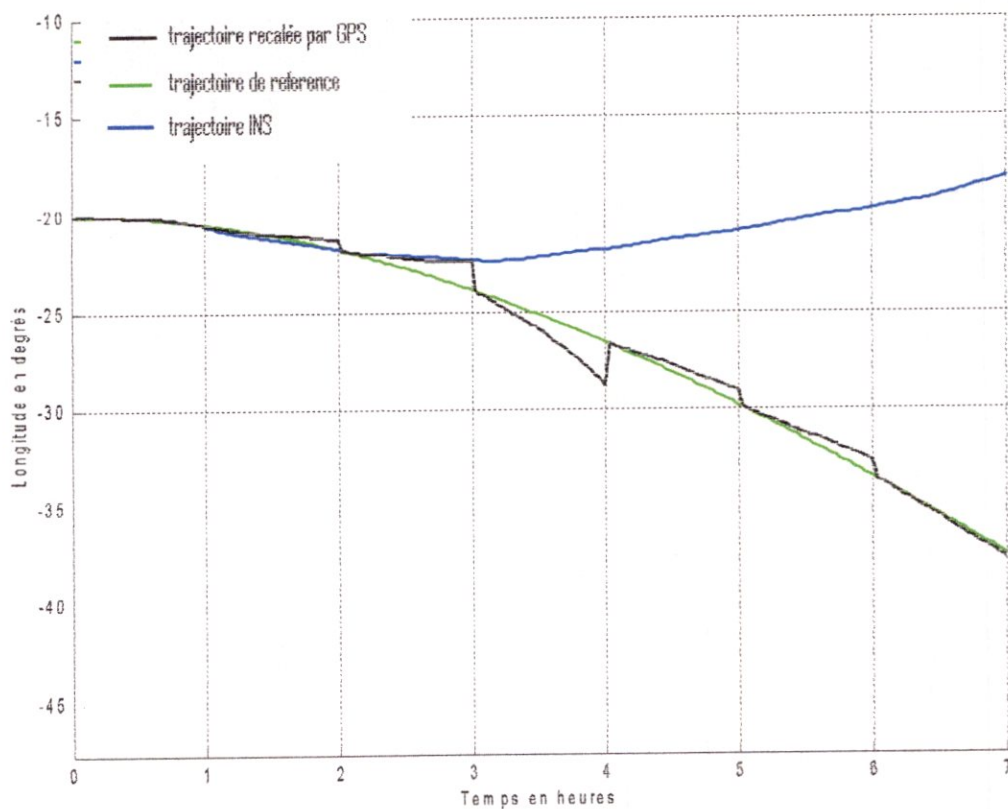


Figure : la longitude en fonction de la latitude

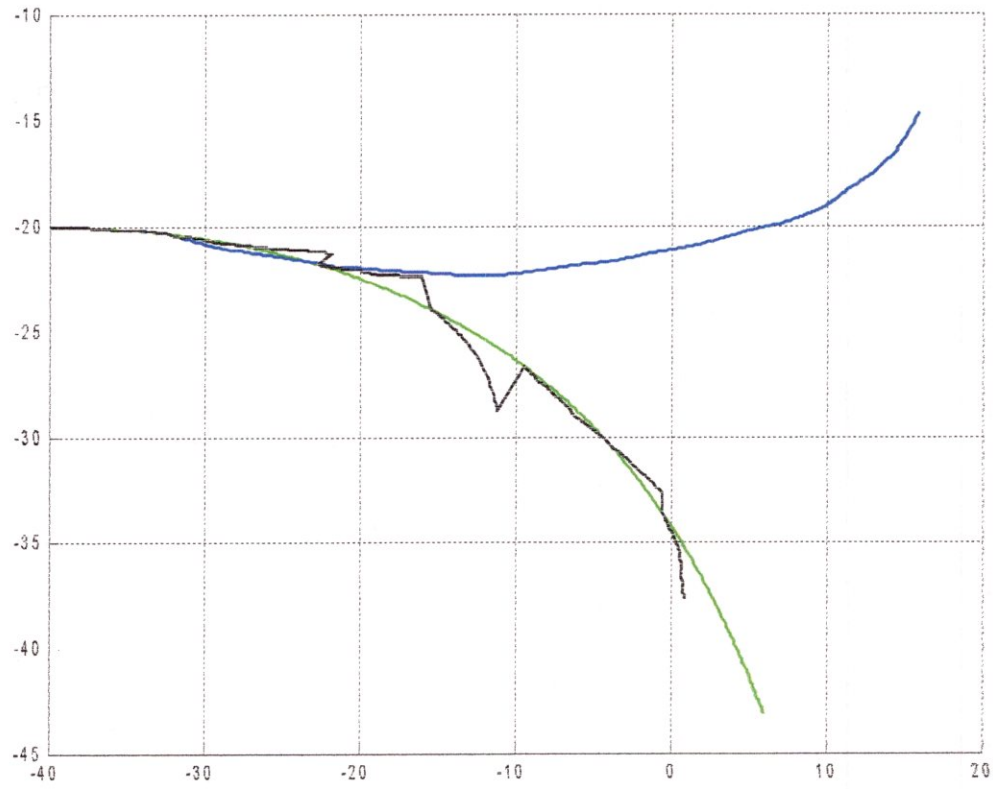


Figure : la latitude en fonction de la longitude

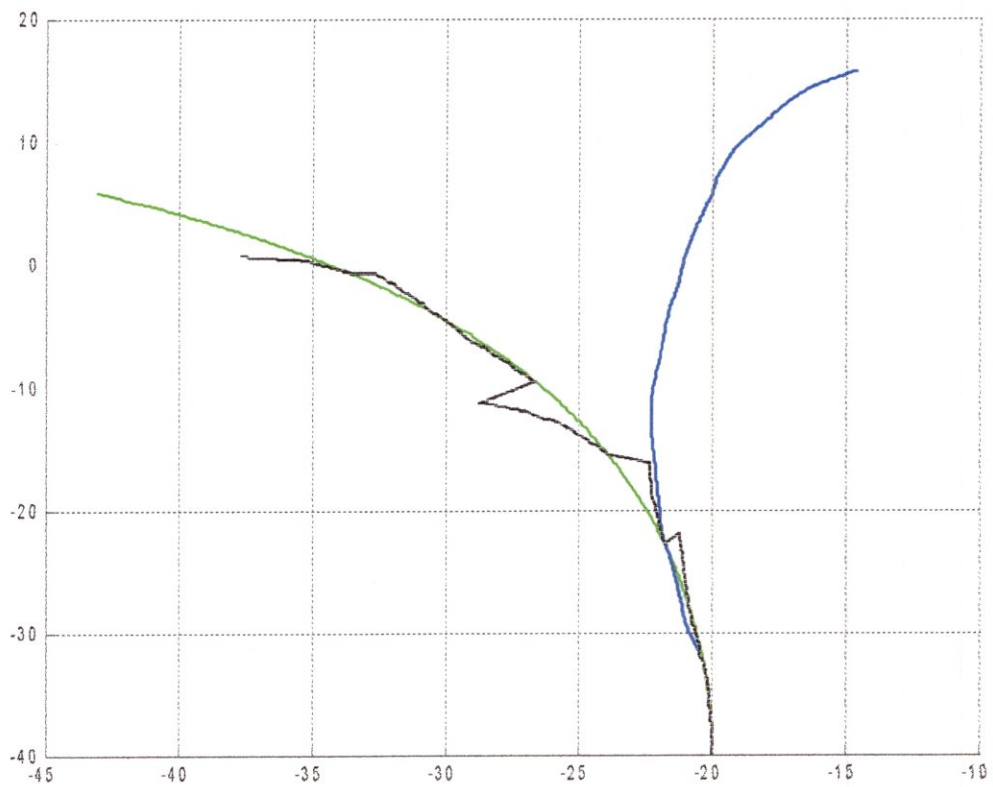


Figure V.41 : recalage de position sur la latitude chaque 30min avec virage

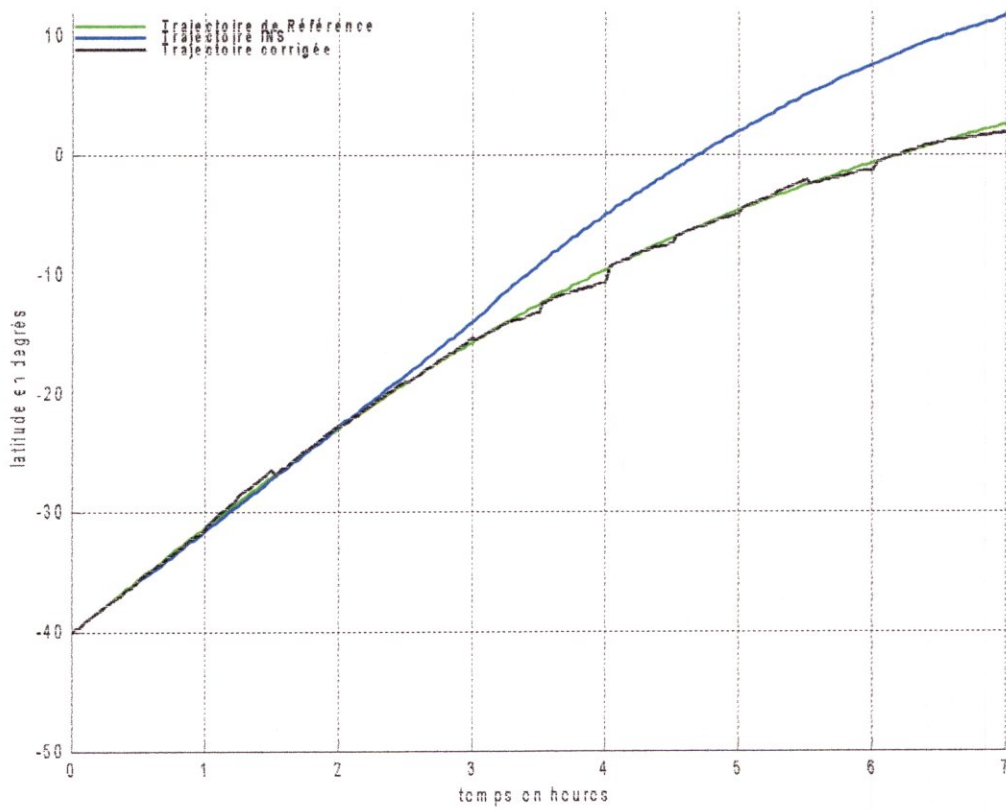


Figure V.42 : recalage de position chaque 30min sur la longitude avec virage

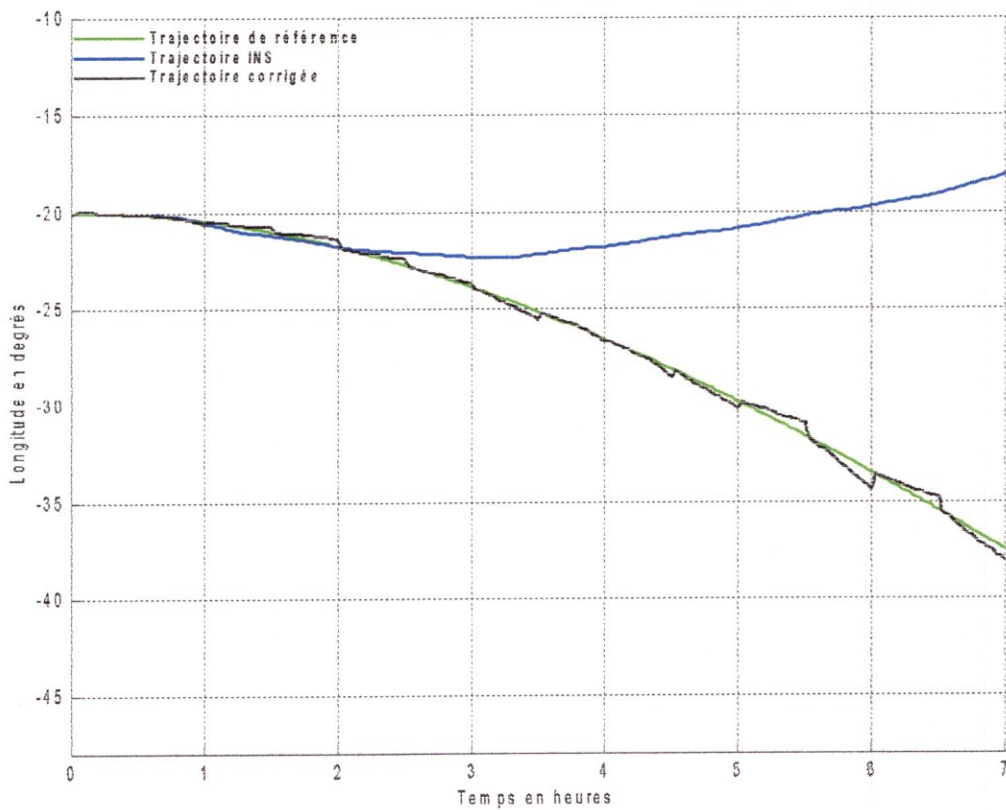


Figure V.43 : recalage de position sur la latitude chaque 15min avec virage

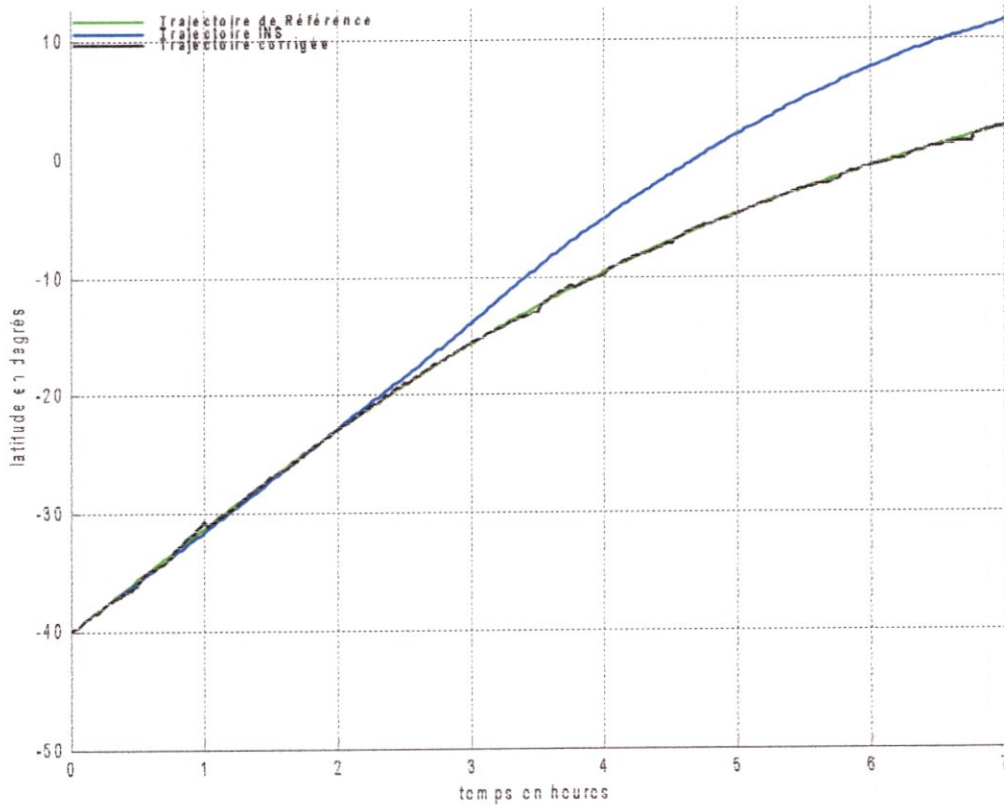
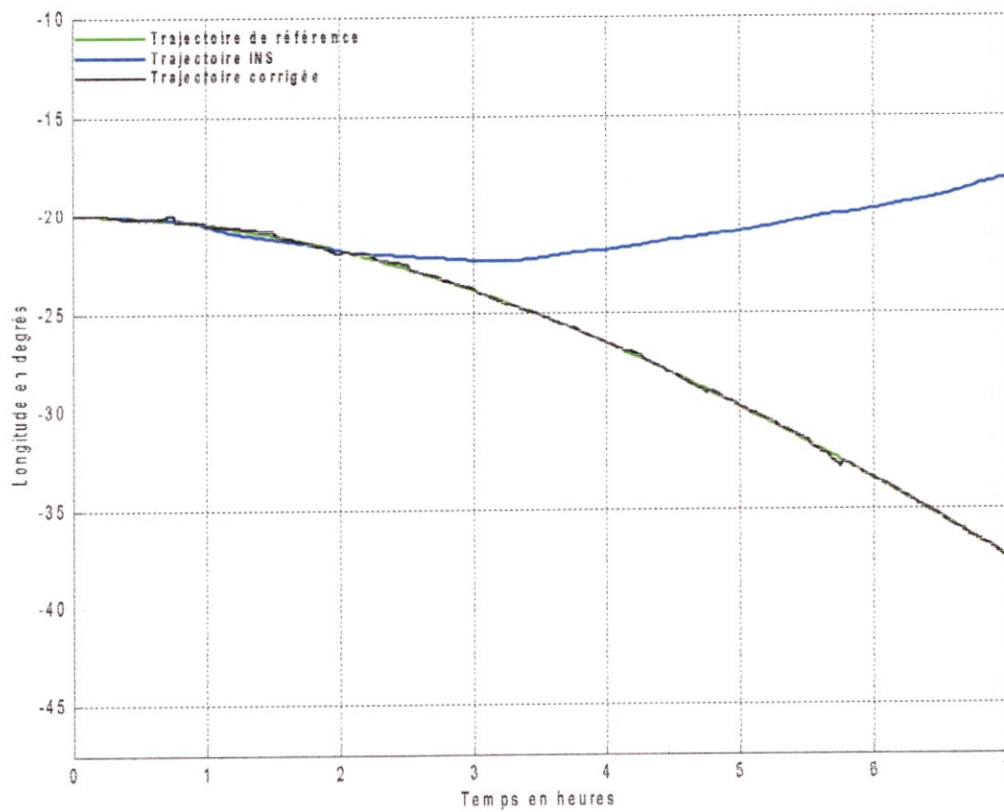


Figure V.44 : recalage de position chaque 15min sur la longitude avec virage



Le filtre a bien répondu et le recalage marche même dans des virages pas très accentués .

ANALYSE :

Les dérives respectives en latitude et en longitude sont de 10° et 20° , ce qui est assez grave pour un avion de ligne qui se trouvera complètement dérouté de sa trajectoire initiale.

On remarque que déjà un recalage après 60 minutes offre une correction assez bonne et arrive à remettre l'aéronef sur son cap.

Après 30 minutes, le recalage offre une meilleure correction encore et ne fait qu'augmenter la précision de la trajectoire prise par l'aéronef.

Un recalage d'une période de 15 minutes offre d'après les résultats obtenus une quasi perfection du suivi de trajectoire et minimise au maximum l'écart entre la trajectoire de référence et la trajectoire réelle.

Le filtre de Kalman s'est bien comporté dans les trajectoires linéaires comme dans le cas non linéaire et par conséquent pourrait marcher pour la quasi-totalité du vol.

Synthèse :

Pour tous les résultats trouvés, que ce soit pour un recalage de position, de position vitesse à différentes périodes, l'hybridation faible INS/GPS utilisant le GPS comme système auxiliaire de recalage en position et en vitesse semble parfaitement répondre et remédier au problème de la dérive inertielle.

L'amélioration augmente en diminuant les périodes de recalage de 60 minutes à 30 minutes, puis de 30 minutes à 15 minutes.

Nous remarquons sur les courbes corrigées le caractère borné du GPS de telle façon que la trajectoire corrigée par GPS oscille en quelque sorte autour de la trajectoire de référence.

En essayant de diversifier les trajectoires ainsi que les vitesses utilisées, nous avons prouvé que l'hybridation INS / GPS est un moyen sûr de navigation et qu'il se présente comme étant indispensable à la navigation long courrier.

Conclusion générale :

Après avoir analysé les résultats obtenus en simulation pour différentes trajectoires et par conséquent pour différentes destinations, l'hybridation INS /GPS en couplage faible semble répondre parfaitement aux besoins de la navigation aérienne qui malgré leurs diversités et leur multiplicité convergent tous vers les mêmes objectifs : sécurité, efficacité et rapidité. Nous retenons que plus la durée de recalage par GPS est petite, plus la navigation est optimisée, mais cela dépend bien sûr de l'intégrité des données GPS et plus précisément de la rapidité des algorithmes de détection et d'exclusion RAIM qui ne peuvent opérer que sous certaines conditions.

Ce qu'il faut aussi retenir dans ce mémoire, c'est la puissance du filtre de Kalman en matière d'estimation des trajectoires et la minimisation de l'erreur de navigation en spécifiant au passage que le filtre de Kalman est le filtre le plus utilisé en Aérospatiale. Ce qui j'espère va encourager les étudiants à venir à compléter ce travail par l'utilisation du filtre en question pour une hybridation serrée ou très serrée, ou encore par l'utilisation d'un autre type de filtrage tel que le filtrage particulaire (BIB) et d'autres encore.

Nous pouvons même songer à appliquer ce système aux approches de précision « à l'atterrissage » en utilisant le système DGPS avec une hybridation serrée. Je suis sûr que les résultats seront à la hauteur des audacieux qui tenteront de prouver l'efficacité d'un tel système et de diversifier ses applications.

Je finirai par dire que l'hybridation INS/GPS est un moyen performant de navigation et que l'investissement et l'attachement que lui porte les géants mondiaux de l'aéronautique et l'aérospatiale et en première position la NASA suivie des plus grands laboratoires de recherche partout dans le monde devrait nous inciter à nous y investir sérieusement pour qui sait, devenir un jour l'un des pionniers qui ont contribué à son développement et à son promouvoir.

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES:

- [BRO 97] Robert G. Brown, Patrick Y.C. Hwang, "Introduction to Random Signals & Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises and Solutions", 3rd edition, John Wiley & Sons, November 1997.
- [FAR 98] J. A. Farrell, and M. Barth, "The Global Positioning System & Inertial Navigation", McGraw-Hill, 1998.
- [GRE 01a] Mohinder S. Grewal, L. Weill, and A. Andrews, "Global Positioning Systems, Inertial Navigation & Integration", Wiley & Sons, 2001.
- [MAY 79] P.S. Maybeck, "Stochastic models, estimation and control", Vol. 1, Ch.1, Academic Press, New York, 1979.
- [PHI 91] Charles L. Phillips, Royce D. Harpor. "Feedback control system", Prentice Hall Inc. 1991.
- [SPI 96] Jr. Spilker, "Global Positioning System: Theory and Applications". Volume I, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington D. C., USA, 1996.
- [KEL 94b] A. Kelly, "A 3D Space Formulation of a Navigation Kalman Filter for Autonomous Vehicles", tech. report CMU-RI-TR-94-19, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, May, 1994.
- [MOU 99] C. Moullet "Détermination d'attitude à l'aide de systèmes et satellitaire", Travail pratique de diplôme EPFL(Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999, EPFL.
- [SAL 98] Salychev, O. S. "Inertial Systems in Navigation and Geophysics". Bauman MSTU Press, Moscow, 1998.
- [STO 97] S.H. Stovall, "Basic Inertial Navigation", Naval Air Warfare Center Weapon Division, California, USA, 1997.
- [SUK 00] S. Sukkarieh, "Low Cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles". Ph.D. Thesis, Australian Centre for Field Robotics, Dept. of Mechanical and Mechatronic Engineering, The University of Sydney, Sydney, Australia, 2000.
- [ZHA 03] X. Zhang, "Integration of GPS with A Medium Accuracy IMU for Metre-Level Positioning", UCGE Reports Number 20178 June 2003.

THESES:

Doctorat de l'institut national polytechnique de Toulouse (INPT), laboratoire traitement du signal et télécommunications (ENAC): "study of the contribution of GNSS/INS hybridization to GNSS integrity monitoring for civil aviation applications" (18-12-2003)

Doctorat PhD: "optimizing georeferencing of airborne survey system by INS/DGPS" by Jan Skaloud, universit  de CALGARY (mars 1999).

Doctorat PhD : « accuracy improvement of low cost INS/GPS for land applications » (Hwan Shin)

Ecole doctorale mathématique, informatique, science et technologie d'information : nouvelles méthodes en filtrage particulaire « application au recalage de navigation inertielle par mesure altim trique » (04-01-2004)

" Test result of a GPS/inertial navigation system using a low cost MEMS IMU" (Alison K. Brown PhD.

ARTICLES:

[CAN 99] M.E. Cannon, G. Lachapelle, and H. Sun "Development and Testing of an Integrated INS/GPS Cross-Linked System for Sub-Meter Positioning of A CF-188 Jet Fighter". Institute of Navigation Annual Meeting/Cambridge/June 28-30, 1999.

[FET 98] G. Fetzer, W. Golderer, and J. Gerstenmeier, "Yaw rate sensor in silicon micromachining technology for automotive applications", in Symp. Gyro Technology, 1998.

[FOX 95] C. H. J. Fox and D. J. W. Hardie, "Vibratory gyroscopic sensors", in Symp. Gyro Technology, 1995.

[HUL 98] R. Hulsing, "MEMS inertial rate and acceleration sensor", in IEEE Position, Location and Navigation Symp., 1998, pp. 17-23.

[JUL 97] Julier, S. J.; Uhlmann, J. K., "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems", The Robotics Research Group, Dept. of Engineering Science, The University of Oxford.

[SAL 00] O. S. Salychev, V. V. Voronov, M. E. Cannon, Nayak, N., and G. Lachapelle, "Low cost INS/GPS integration: Concepts and testing". In Proceedings of the ION National Technical Meeting, pages 98-105, Anaheim, CA, 20

[SAL 98] B. Salaberry, "A low cost vibrating gyro for guidance applications and automotive application", in Symp. Gyro Technology, 1998.

[SUK 99] S. Sukkarieh, M. Eduardo, "A High Integrity IMU/GPS Navigation Loop for Autonomous Land Vehicle Applications", IEEE Transactions on robotics and automation, Vol. 15, No. 3, June 1999.

[WAN 00a] Wan, E. A., and R. van der Merwe. "The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation". In Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control (AS-SPCC), IEEE Press, 2000.

[WAN 00b] E.Wan, R. van derMerwe, and A. T. Nelson, "Dual Estimation and the Unscented Transformation," in *Neural Information Processing Systems 12*. 2000, pp. 666–672, MIT Press.

PUBLICATIONS:

GPS/IMU Navigation and Simulation for Higher-Than-GPS Orbits , Kenn Gold and Alison Brown, NAVSYS Corporation. 2003

Architecture and Performance Testing of a Software GPS Receiver for Space-based applications Kenn Gold and Alison Brown. NAVSYS Corporation. 2001

A GPS-slaved time synchronization system for hybrid navigation ,Binghao Li and Chris Rizos -School of Surveying and Spatial Information Systems, The University of New South Wales, Sydney, NSW, 2052, Australia

Improving the Quality of IMU-Derived Doppler Estimates for Ultra-Tight GPS/INS Integration ,Ravindra Babu, Jinling Wang School of Surveying and Spatial Information Systems University of New South Wales .

AN INTEGRATED APPROACH IN THE DESIGN OF A NAVIGATION SYSTEM FOR AN AUV , D. Loebis, F. R. Dalglish, R. Sutton, S. Tectlow, J. Chudley and R. L. Atwood - Marine and Industrial Dynamic Analysis Research Group ,Department of Mechanical and Marine Engineering The University of Plymouth ,Drake Circus, Plymouth, PL4 8AA, United Kingdom.

Inertial Navigation ,Kevin J Walchko1 ,University of Florida, Gainesville, FL 32611-6200
Dr. Paul A. C. Mason2. **NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD**

Integration of Inertial Navigation System and Global Positioning System Using Kalman Filtering M.Tech. Dissertation Submitted in fulfillment of the requirements for the Dual Degree Program in Aerospace Engineering by Vikas Kumar N.

Sites Internet:

www.navsys.com

www.xbow.com

www.gyro.org

www.supaero.fr

www.afit.edu

www.sop.inria.fr/robotvis/personnel/zhang/Publis/Tutorial-Estim/node16.html

<http://spaceflight.nasa.gov/station/assembly/elements/x38/>

www.analog.com

ANNEXE A : Les systèmes de référence et coordonnées

Pour mieux comprendre les équations de navigation inertielle, nous présentons dans cette annexe les systèmes de référence et de coordonnées utilisés et les transformations entre eux.

C'est le système de navigation local qui est choisi pour l'élaboration et l'expression des équations inertielles. Les équations d'erreur dérivées sont basées sur ces équations de navigation.

En effet, les systèmes de coordonnées sont un moyen mathématique d'exprimer l'orientation, le module et implicitement la position d'un vecteur physique. Le choix d'un système de coordonnées, c'est-à-dire son type (cartésien, sphérique,...), son origine, etc., est a priori arbitraire et ne dépend que des critères d'une notation convenable pour une certaine application. Changer de système de coordonnées ne change pas le vecteur, seulement sa représentation mathématique. D'autre part, les systèmes de référence font partie de la théorie de la mécanique. Ce sont en effet des vrais objets physiques qui sont distingués par leur état de mouvement relatif, ce qui peut être un mouvement de translation ou de rotation. Bien qu'on ne s'en rende pas compte normalement, toute mesure physique est la valeur d'une quantité relative entre deux systèmes de référence.

Les systèmes de référence

Le système véhicule «b» (body) :

Ce système est lié au véhicule (le référentiel propre au mobile) et on considère qu'il est le même que celui du capteur inertielle.

Le système navigation «n»

Défini dans le plan tangent local (LTP: « Local Tangent Plane »), son origine se trouve toujours à la position actuelle du véhicule et son plan x-y (n-e) est tangent à la surface de la terre, ou à vrai dire à l'ellipsoïde. Il existe deux conventions des systèmes LTP sont usuelles en navigation:

NED : North, East, Down (vers le bas ou vers le vecteur de gravité),

ENU : East, North, Up (vers le haut),

Dans ce travail, le repère NED a été choisi.

Le système inertielle «i» ECI (Earth Centred Inertial)

Ceci est un système dans lequel les lois de Newton sont applicables. Il ne suit pas la rotation de la terre et donc ne tourne pas par rapport aux étoiles. L'origine de ce système est le centre de la Terre. Le système de coordonnées correspondant sera un système cartésien avec ses axes notés :

Axe X: vers le «Vernal Équinoxe» (étoile distante),

Axe Z: vers le pôle nord,

Axe Y: pour compléter le repère direct.

Attention: la CI fournit ses mesures (accélération et vitesse angulaire) par rapport à ce référentiel !

Le système terre «e» (ECEF-Earth Centred Earth Fixed)

Il suit la rotation de la terre et l'origine de ce système est le centre de la terre, en conséquence ce système coïncide avec le système inertielle une fois par révolution complète de la terre sur elle-même.

Axe X: vers le méridien de Greenwich (Longitude=0),

Axe Z: vers le pôle nord,

Axe Y: pour compléter le repère direct.

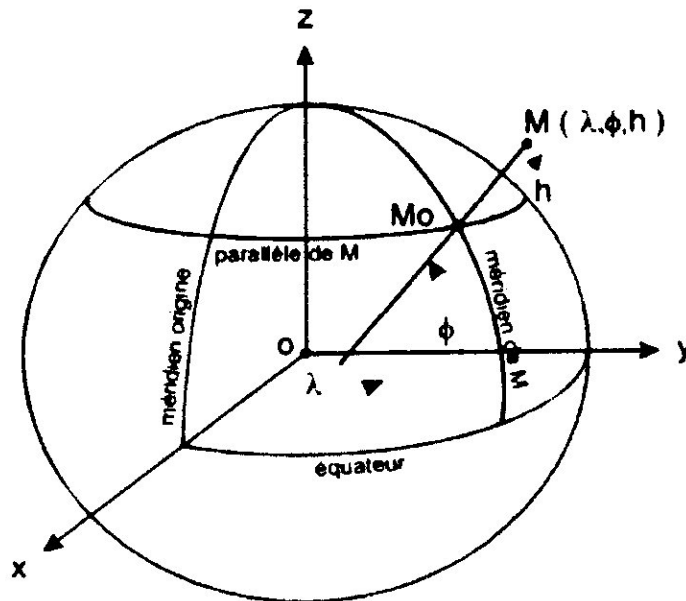


Figure : ECEF, NED et coordonnées Géodésiques

Coordonnées Géodésiques (La norme WGS-84), et projections cartographiques :

Plusieurs problèmes se posent lorsque l'on souhaite positionner un objet de manière absolue sur le globe terrestre :

- La terre n'est pas réellement un volume de forme régulière. Elle est généralement assimilée à un géoïde ou un ellipsoïde. Le géoïde est une surface équipotentielle coïncidant avec le "niveau moyen de la mer" et en chaque point perpendiculaire à la direction de la "verticale locale" (direction de la pesanteur). L'ellipsoïde est une surface mathématique coïncidant aussi bien que possible avec le "géoïde" et caractérisée en général par son "demi-grand axe" et "l'aplatissement". Suivant l'endroit du globe où l'on se trouve, certains modèles d'ellipsoïde sont localement plus justes que d'autres.
- Dans la plupart des applications, le monde est localement représenté sous la forme d'une carte plane. Or la projection d'une surface courbe sur un plan peut se faire de différentes façons, et requiert donc une loi de conversion entre les coordonnées géodésiques absolues et les coordonnées planes dans ce système de représentation.

Le World Geodetic System: (WGS 84)

Comme ses initiales l'indiquent, le « WGS 84 » est un système de référence terrestre. Mis au point par l'armée américaine en 1984, il est lui-même l'évolution du WGS72 utilisé précédemment.

Le WGS est un système tridimensionnel, les coordonnées géographiques, expriment la position en termes de latitude, de longitude et de hauteur h. Celles-ci sont basées sur une référence d'ellipsoïde de révolution, qui est une approximation de la forme de la Terre.

La latitude φ : est l'angle entre le plan équatorial et la normale sur la surface de la Terre (l'ellipsoïde) au point en question, est égal à zéro à l'équateur et est compté positif pour l'hémisphère Nord, négatif pour l'hémisphère Sud.

La longitude λ : c'est l'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien du point en question. Il est compté positive vers l'Est.

La hauteur h « hauteur ellipsoïdale - ne pas confondre avec l'altitude », est la différence en mètre entre le point considéré et l'ellipsoïde de référence mesurée selon la normale à l'ellipsoïde. Cette valeur est définie dans un système géodésique et peut différer de l'altitude de plusieurs dizaines de mètres. Il faut remarquer que tous les systèmes de positionnement par satellites fournissent une hauteur ellipsoïdale et non une altitude.

L'altitude d'un point M d'une surface topographique est de manière très approchée la distance entre le point et la surface de référence appelée géoïde. (Le système des altitudes IGN69).

Attention: le GPS fournit ses mesures par rapport aux référentiels ECEF, et WGS-84.

Le positionnement GPS a pour particularité de fournir un positionnement absolu sur un ellipsoïde de référence représentant le globe terrestre. Or pour nos applications une position en longitude/latitude est peu exploitable, et l'on serait plus intéressé par un positionnement relatif en mètres.

La formule de conversion est la suivante :

Soient λ_0, ϕ_0 les longitudes et latitudes initiales :

$$l = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}$$

$$R - C \exp(-nl)$$

A.1

$$\gamma = n(\lambda - \lambda_0)$$

$$X = X_0 + R \sin \gamma$$

A.2

$$Y = Y_0 - R \sin \gamma$$

Transformations entre les systèmes de coordonnées

Transformation mobile (b)-Plan tangent (n):

Les systèmes à navigation inertielle de type strapdown maintiennent une information d'orientation, c'est-à-dire qu'ils connaissent à chaque instant le rapport entre leurs axes de mesures, donc ceux de la CI (mobile), et les axes du système de navigation.

Mathématiquement ceci revient à une transformation de coordonnées des vecteurs du repère b au repère n et vice versa. Il existe diverses méthodes de représentation d'une telle transformation dont les angles d'Euler, la DCM et les quaternions, [JUN 01] et [GRE 01a]. Pour des raisons de simplicité on a choisi les angles d'Euler pour ce travail.

La définition de la matrice de transformation du repère- n au repère- b est:

$$R_n^b = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

L'ordre des rotations est le suivant: d'abord autour de l'axe z suivi de y puis de x .

$\rho = [\phi, \theta, \psi]^T$, sont les angles d'Euler (roulis(x), tangage(y), et lacet (z)), (en radian), Ils sont calculées à partir des vitesses angulaires fournies par les gyroscopes en utilisant l'équation Eq.I-23.

La « Direction Cosinus Matrice » \mathfrak{R}_n^b est la matrice de passage inverse du repère b vers le repère n ; par conséquent :

$$R_n^b = (R_n^b)^{-1} = R_z(-\psi)R_y(-\theta)R_x(-\phi) = (R_n^b)^T \quad A.4$$

$$R_n^b = \begin{pmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{pmatrix} \quad A.5$$

$$R_n^b = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad A.6$$

Les notations S et C sont utilisées pour sinus et cosinus.

Les angles d'Euler, le cap (lacet), le tangage et le roulis de la matricese calculent à partir des éléments de la matrice DCM \mathfrak{R}_n^b simplement en posant l'équation A.7: [FAR 98],

$$\psi = a \tan 2(c_{21}, c_{11}) \quad A.7$$

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{c_{31}}{\sqrt{1-c_{31}^2}}\right) = -\sin^{-1}(c_{31})$$

$$\phi = a \tan 2(c_{32}, c_{33})$$

Où, les c_{ij} , ($1 \leq i, j \leq 3$) sont les (i, j)^{ème} éléments de \mathfrak{R}_n^b et atan2 est la fonction C qui calcule l'inverse de la tangente en utilisant les quatre quadrants.

La représentation DCM :

On peut calculer la « Direction Cosinus Matrice » directement des vitesses angulaires fournies par les gyroscopes. La dérivée première de la matrice de rotation peut être exprimée par :

$$\dot{R}_b^n = R_b^n (S(\omega_{nb}^b)) = R_b^n (S(\omega_{ib}^b) - S(\omega_m^b)) \quad \text{A.8}$$

Où S , est une matrice antisymétrique (skew symmetric matrix)

$$\dot{R}_b^n = R_b^n \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad \text{A.9}$$

Où p, q, r sont les vitesses angulaires (en radian/sec.) autour des axes $x(phi), y(theta), z(psi)$ de la CI et fournies directement par les gyroscopes.

On peut calculer la matrice R_b^n par l'intégration:

$$R_b^n = \int \dot{R}_b^n dt = \int R_b^n \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} dt \quad \text{A.10}$$

La forme discrète de la dernière équation est :

$$R_b^n(k+1) = R_b^n(k) + \dot{R}_b^n(k) \Delta T = R_b^n(k) \begin{bmatrix} 1 & -r & q \\ r & 1 & -p \\ -q & p & 1 \end{bmatrix} \Delta T \quad \text{A.11}$$

Où $\Delta T = t_{k+1} - t_k$ est le temps d'échantillonnage.

Pour rendre la mise à jour de la matrice R_b^n plus précise, on peut utiliser l'expansion de Taylor.

L'idée est de calculer la matrice du taux de rotation e^A en utilisant $\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ qui mène à l'équation A.9.

$$e^A = I_{3 \times 3} + \frac{\sin \sigma}{\sigma} A + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} A^2 \quad \text{A.12}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \Delta T = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 0 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{A.13}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -(q^2 + r^2) & pq & pr \\ pq & -(p^2 + r^2) & qr \\ pr & qr & -(q^2 + p^2) \end{bmatrix} \Delta T^2 \quad \text{A.14}$$

La mise à jour de matrice \mathfrak{R}_b^n sera :

$$R_b^n(k+1) = R_b^n(k) \left(I_{3 \times 3} + \frac{\sin \sigma}{\sigma} A + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} A^2 \right) \quad \text{A.15}$$

Les angles d'Euler peuvent être déterminés, pour la commande, à partir des équations A.7

Le calcul de \mathfrak{R}_b^n en utilisant les Quaternions :

Dans l'approche de Quaternion, la rotation d'un repère à un autre peut être accomplie par une rotation simple au sujet d'un vecteur q par un l'angle q . Les quaternions se composent de quatre paramètres qui sont une fonction de ce vecteur et cet angle. Le quaternion initial est obtenu à partir du l'angles roulis, tangage et lacet définis dans la représentation d'Euler ou alternativement par les paramètres de la matrice DCM \mathfrak{R}_b^n en utilisant l'équation suivant :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4q_4} (c_{32} - c_{23}) \\ \frac{1}{4q_4} (c_{13} - c_{31}) \\ \frac{1}{4q_4} (c_{21} - c_{12}) \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \end{pmatrix} \quad \text{A.16}$$

La dernière équation est utile pour initialiser les quaternions. Ensuite, la relation entre les quaternions et le taux de rotation « la vitesse angulaire fourni par la centrale » est donnée par les équations différentielles A.17 et A.18.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} q = A(\omega_x, \omega_y, \omega_z) q \quad \text{A.17}$$

$$\underline{q}_{n+1} = (I + A(\omega_z, \omega_y, \omega_x)\Delta t)\underline{q}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \omega_z\Delta t & -\omega_y\Delta t & \omega_x\Delta t \\ -\omega_z\Delta t & I & \omega_x\Delta t & \omega_y\Delta t \\ \omega_y\Delta t & \omega_x\Delta t & I & \omega_z\Delta t \\ -\omega_x\Delta t & -\omega_y\Delta t & -\omega_z\Delta t & I \end{pmatrix} \underline{q}_n \quad \text{A.18}$$

Et ensuite, la matrice DCM exprimée en termes de paramètres des quaternions est :

$$R_n^n = \begin{pmatrix} (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) & 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & (q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 + q_4^2) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_4) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & (q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_4^2) \end{pmatrix} \quad \text{A.19}$$

Qui est utile pour calculer l'accélération dans le repère local n .

La conversion des quaternions aux angles d'Euler « roulis, tangage et lancement » :

$$\theta = \sin^{-1}(2(q_2q_3 + q_1q_4))$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{q_3 + q_2}{q_4 + q_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{q_3 - q_2}{q_4 - q_1}\right) \quad \text{A.20}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{q_3 + q_2}{q_4 + q_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{q_3 - q_2}{q_4 - q_1}\right)$$

Pour plus des détails sur les quaternions voir [JUN 01] et [SCH 96].

Transformation ECEF(e), plan tangent (n) et inertielle (i):

La matrice de transformation (ou le DCM) entre le repère e et le repère n est exprimée par:

$$R_e^n = R_y(-\varphi - \pi/2)R_z(\lambda) = \begin{pmatrix} -s\varphi c\lambda & -s\varphi s\lambda & c\varphi \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ c\varphi c\lambda & c\varphi s\lambda & s\varphi \end{pmatrix} \quad \text{A.21}$$

Et

$$\mathfrak{R}_e^n = (\mathfrak{R}_n^e)^T \quad \text{A.22}$$

φ , est la latitude géodésique du système WGS-84 exprimée en radian.

λ , est la longitude géodésique du système WGS-84 exprimée en radian.

Le vecteur de taux de rotation du système e par rapport au système i exprimé dans le système e , est donné par la *vitesse de rotation de la Terre (Earth rate)*

$$\omega_{ie}^e = [0, 0, \omega_e]^T \quad \text{A.23}$$

Où, ω_e est la valeur WGS-84 de la vitesse de rotation de la terre.

$$\omega_e = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ en radian/s } \approx 15.04109 \text{ degré/h}$$

Et sa projection dans le système n est :

$$\omega_{ie}^n = R_e^n \omega_{ie}^e = [\omega_e \cos \varphi, 0, -\omega_e \sin \varphi]^T \quad \text{A.24}$$

ω_{en}^n : est le *taux de transport (Vehicle rate)* représentant la vitesse de rotation du système n par rapport au système e , on peut l'exprimer en termes de taux de changement de latitude et de longitude comme :

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos \varphi \\ -\dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_E / (r_T + h) \\ -v_N / (r_M + h) \\ -v_E \tan \varphi / (r_T + h) \end{bmatrix} \quad \text{A.25}$$

avec:

$$\text{Vitesse en Longitude:} \quad \dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{v_E}{(r_T + h) \cos \varphi} \quad \text{A.26}$$

$$\text{Vitesse en Latitude:} \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_N}{r_M + h} \quad \text{A.27}$$

$$\text{Vitesse en Altitude:} \quad \frac{dh}{dt} = v_U = -v_D \quad \text{A.28}$$

v_N, v_E, v_U sont les vitesses en Nord, Est et Up.

h , hauteur par rapport à l'ellipsoïde de référence.

r_M, r_T sont les rayons de courbure Méridional (nord - sud) et Transversal (est-ouest), [GRF01a].

$$r_T = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{A.29}$$

$$r_M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad \text{A.30}$$

$$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2 \quad \text{A.31}$$

$$a = 6378137.0 \text{ m}$$

$$b = 6356752.3142 \text{ m}$$

Où, a et e sont respectivement l'axe semi-principal et l'excentricité linéaire de l'ellipsoïde de référence, b est l'axe semi-mineur.

On peut obtenir ω_{in}^n à partir des équations A.19 et A.20 :

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{pmatrix} \omega_N \\ \omega_E \\ \omega_D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi + v_E / (r_T + h) \\ -v_N / (r_M + h) \\ -\omega_e \sin \varphi - v_E \tan \varphi / (r_T + h) \end{bmatrix} \quad \text{A.32}$$

Dans le cas où la qualité du gyroscope est mauvaise (très bruité), la vitesse de rotation de la terre ne peut pas être mesurée, on peut alors approximer ω_{in}^n par ω_{en}^n parce que ω_{ie}^n est négligeable par rapport à ω_{en}^n .

ANNEXE B : Probabilité et variables aléatoires

Cette annexe est une introduction de base à la probabilité et aux variables aléatoires et les modèles de bruit utilisés dans le Filtre de Kalman.

La Probabilité :

On admet qu'à chaque événement A est associé un nombre $p(A)$, compris entre 0 et 1 et qui mesure la probabilité de réalisation de A . Intuitivement, $p(A)$ est la fréquence de réalisation de A au cours d'un très grand nombre de mises en oeuvre de l'expérience aléatoire considérée. Formellement, la probabilité qui est les résultats d'un événement discret (par exemple, une chiquenaude de pièce de monnaie) favoriseront un événement particulier sont définis par :

$$p(A) = \frac{\text{Résultats possibles favorisant l'événement } A}{\text{Nombre total des résultats possibles}} = \frac{n_A}{N} \quad \text{B.1}$$

Si A et B sont deux événements *incompatibles*, la probabilité des résultats favorisant ces deux événements est donnée par : (Autrement dit, La fréquence de réalisation de $A \cup B$ est la somme des fréquences de réalisation de A et de B)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{B.2}$$

Si la probabilité de deux résultats est *indépendante* (l'un n'affecte pas l'autre) puis la probabilité qui se produisent *de tous les deux* est le produit de leurs différentes probabilités:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad \text{B.3}$$

Par exemple, si la probabilité de voir "faces" sur une chiquenaude de pièce de monnaie est 1/2, puis la probabilité de voir "faces" sur toutes les deux pièces de monnaie renversées en même temps est 1/4. (Clairement les résultats d'une chiquenaude de pièce de monnaie n'affectent pas l'autre)

La probabilité conditionnelle : La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier l'idée qu'on se fait de la probabilité d'un événement. La probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est supérieure si le ciel est nuageux

Soient A et B deux événements tels que $P[B] \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est :

$$P(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{B.4}$$

Les variables aléatoires :

Les signaux aléatoires qui ne peuvent pas être décrits avec des fonctions mathématiques explicites telles que des signaux sinusoïdaux, des fonctions d'échelon « step functions », etc. Leur description doit être mise en termes probabilistes. La probabilité joue un rôle principal dans la description du bruit comme ces signaux aléatoires.

Dans le cas des variables aléatoires continues, la probabilité de n'importe quel événement discret unique A est en fait 0. C'est-est-à-dire $p(A)=0$. Au lieu de cela nous pouvons seulement évaluer la probabilité des événements dans un certain intervalle. Une fonction commune représente la probabilité des variables aléatoires est définie comme *fonction de distribution cumulée* :

$$F_x(x) = p(-\infty, x) \quad \text{B.5}$$

Cette fonction représente la probabilité cumulée de la variable aléatoire continue X pour tous les événements jusques et y compris le x . Des propriétés importantes de la fonction de densité cumulative sont :

$$F_x(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow -\infty$$

$$F_x(x) \rightarrow 1 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

$F_x(x)$ est une fonction en x non décroissante.

Généralement, c'est la dérivée de l'équation B.5 est utilisée, c'est elle la *fonction de densité de probabilité* :

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \quad \text{B.6}$$

Suivant aux propriétés données ci-dessus de la fonction de probabilité cumulée, la fonction de densité a également les propriétés suivantes:

1. $F_x(x)$ est une fonction non-négative.

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$$

Enfin, notez que la probabilité pendant n'importe quel intervalle $[a, b]$ est définie comme :

$$p_x[a, b] = \int_a^b f_x(x) dx \quad \text{B.7}$$

Ainsi plutôt que de faire la somme des probabilités des événements discrets comme dans l'équation B.2, on intègre la fonction de densité de probabilité pendant l'intervalle d'intérêt pour des variables aléatoires continues.

Moyenne et Variance :

Soient $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ n observations d'une variable aléatoire X . Nous voulons mesurer la moyenne de $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Une des statistiques les plus couramment utilisées est l'écart moyen « la moyenne mathématique », μ_x défini par la formule :

$$\mu_x = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{B.8}$$

La valeur prévue « Espérance » de la variable aléatoire discrète a pu être approximée en faisant la moyenne des événements à probabilités pondérées:

$$\bar{X} = \frac{(p_1 N)x_1 + (p_2 N)x_2 + \dots + (p_n N)x_n}{N} \quad \text{B.9}$$

Cette notion d'épreuves infinies (échantillons) mène à la définition conventionnelle de l'espérance pour des variables aléatoires discrètes. L'espérance de X est :

$$X = E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \text{B.10}$$

De même pour la variable aléatoire continue l'espérance est définie comme :

$$X = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad \text{B.11}$$

L'espérance d'une variable aléatoire est également connue comme la *moment statistique d'ordre 1*.

Mesurons ensuite la variabilité des données ou « la dispersion des données ». Les statistiques les plus souvent utilisées sont les variances σ_x^2 et les écarts types $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$. Nous avons :

$$\sigma_x = \sqrt{E[(X - E(X))^2]} = \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right\}} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \quad \text{B.12}$$

Les Fonctions d'autocorrélation :

Une caractéristique utile liée à un signal aléatoire est son *autocorrélation*, soit sa corrélation avec lui-même à travers le temps. La corrélation est une manière de penser à la distribution de probabilité d'un processus aléatoire et de son évolution avec le temps. La *fonction d'autocorrélation* $R_{xx}(\Delta t)$ pour une processus ou variable aléatoire $x(t)$ est définie comme :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad \text{B.13}$$

pour les instants t_1 et t_2 . Si le processus est *stationnaire* (la densité est invariable avec le temps) alors l'équation B.13 dépend seulement de la différence $\Delta t = t_2 - t_1$. Dans ce cas l'autocorrélation peut être réécrite comme :

$$R_{xx}(\Delta t) = E[x(t)x(t + \Delta t)] \quad \text{B.14}$$

Ainsi, c'est l'espérance du produit de deux variables aléatoires fonction du temps. Le résultat est une fonction des deux temps.

Soit $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$

alors, la fonction d'autocorrélation est, de par la définition de l'espérance :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Où $f(x_1, x_2)$ est la distribution jointe de probabilité. La fonction d'autocorrélation donne la "tendance" d'une fonction d'avoir le mêmes signe et grandeur (c.-à-d. être corrélé) à deux instants différents.

La densité spectrale de puissance (DSP) :

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, ainsi:

B.15

$$S_{xx}(j\omega) = \mathfrak{F}[R_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

La densité spectrale de puissance est une mesure directe du contenu en fréquence d'un signal, et par conséquent, de son contenu de puissance. Naturellement, la transformée de Fourier inverse retourne l'autocorrélation.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \text{B.16}$$

De même, la fonction spectrale de densités de puissance croisées est :

$$S_{xy}(j\omega) = \mathfrak{F}[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{B.17}$$

Les processus aléatoires [MOU 99] et les modèles de bruit du Filtre de Kalman:

Avant de se pencher sur le filtre de Kalman expliqué dans le chapitre III, il est nécessaire d'étudier les modèles d'erreur sur lesquels il est basé. Cette section présente une discussion

abrégée des aspects de la théorie des signaux aléatoires qui sont exploités dans le rapport. Des sources de bruit dans le filtre de Kalman sont modélisées en tant que processus aléatoires. Le processus aléatoire peut être considéré pour comme une collection de fonctions de temps appelées un ensemble.

Il est possible de définir et de comprendre le modèle de bruit du filtre de Kalman. Les bruits modélisés dans un filtre de Kalman doivent être:

- . Gaussiens (ayant une distribution gaussienne)
- . Centrées (non biaisés) (ayant un moyenne nulle)
- . Blancs (contient toutes les fréquences)

Ce modèle est une idéalisation mathématique puisque le bruit blanc ne peut pas se produire dans la nature parce qu'il exige une énergie infinie. Les formules de la section suivante permettent d'exprimer ces processus de bruit blancs sous forme de variances et de covariances qui sont plus facile d'assimiler.

Les modèles stochastiques normalement utilisés par les concepteurs du filtre de Kalman pour décrire des variables aléatoires sont des modèles linéaires simples tels que : biais (constante) aléatoire, un bruit blanc, une marche aléatoire et un processus de Markov, ou un processus périodique.

Ceux-ci sont suffisamment décrits dans [GEL 74] et [BRO 97] et sont habituellement distingués par leurs fonctions d'autocorrélation autocorrélation distinctes $R(\tau)$.

	Filtre Formeur (Shaping Filter)	Auto-corrélation	DSP
Bruit Blanc $x(t) = w(t)$			
Constante (biais) Aléatoire $\dot{x}(t) = 0$			
Marche Aléatoire $\dot{x}(t) = w(t)$			
Gauss-Markov $\dot{x}(t) = w(t) - \frac{1}{T}x(t)$			

1. Bruit Blanc : (« white noise », noté w)

Le bruit blanc est défini comme un processus aléatoire stationnaire dont la fonction de densité spectrale de puissance (PSD) est constante, cela signifie que le bruit blanc est un processus

aléatoire centré dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences et qu'il contient toutes les fréquences d'amplitudes égales. Si l'amplitude spectrale constante est A , alors la fonction d'autocorrélation correspondante est donnée par la transformée inverse de Fourier d'une constante, qui est le delta de Dirac « La fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est une impulsion de Dirac ». C'est à dire que la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire gaussien blanc zéro centré $x(t)$ est :

$$R(\tau) = A\delta(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) \quad \text{B.18}$$

La variance d'un processus d'un bruit blanc est égale à son amplitude spectrale. La valeur d'un signal de bruit blanc à un certain instant ne dit absolument rien au sujet de sa valeur à n'importe quelle autre instant.

II. Constante aléatoire (random bias (constant))

Une constante aléatoire satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = 0, y(0) = a_0 \quad \text{B.19}$$

L'état initial a_0 est une variable aléatoire dont la distribution est présumée connue. L'équation de différence aura la forme suivant :

$$y(t+1) = y(t) + a_0 \quad \text{B.20}$$

III. Marche Aléatoire ("Winner process" ou "Brownian-motion process" ou "random walk" [BRO 97 p100 p196])

Le processus de Winner est défini comme l'intégrale d'un bruit blanc gaussien avec un état initial égal à zéro (l'intégration d'un bruit blanc gaussien mène à un effet appelé marche aléatoire). Ainsi le modèle approprié d'état est sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = ku(t), y(0) = 0 \quad \text{B.21}$$

là où $u(t)$ est l'unité d'un bruit blanc gaussien et k est un facteur d'échelle. L'équation de différence aura la forme,

$$y(t+1) = (1 + kdt)y(t) \quad \text{B.22}$$

où dt est la fréquence d'échantillonnage.

Ainsi la variance de l'intégrale du bruit blanc croît linéairement avec le temps. En outre, l'écart type croît avec la racine carrée du temps.

IV. Processus Aléatoire Gaussien :

La distribution normale ou gaussienne est très populaire et sert souvent à modéliser les systèmes aléatoires, beaucoup de processus aléatoires se produisant dans la nature semblent réellement être normalement distribués, ou très proche d'être normalement distribués.

Un processus aléatoire est un processus gaussien si pour tout ensemble d'instant $\{t_i\}$

Le vecteur aléatoire correspondant $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_i = x(t_i)$ possède une densité de probabilité conjointe multidimensionnelle gaussienne. Chaque x_i possède une densité de probabilité marginale :

$$p_{x_i}(x) = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right] \quad \text{B.23}$$

Où σ_{x_i} et μ_{x_i} sont des constantes. Le paramètre μ_{x_i} est la moyenne de la population, et l'écart type est égale à σ_{x_i} . La loi normale (ou la loi de Gauss) de moyenne m et d'écart type σ sera représentée simplement par le symbole : $N(m, \sigma)$

V. Processus aléatoire de Gauss-Markov (Markov process)

Un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ s'appelle un processus de Gauss-Markov si sa fonction d'autocorrélation est de la forme (Tableau 13):

$$R_{xx}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \quad \text{B.24}$$

On remarque qu'elle est décrite par deux paramètres: son RMS σ et sa constante temps $T = 1/\beta$. La fonction exponentielle d'autocorrélation indique que les valeurs d'échantillon du processus deviennent graduellement de moins en moins corrélées au fur et à mesure que le temps de séparation $|\tau|$ entre les échantillons augmente.

Ce processus simple de Gauss-Markov dont la fonction d'autocorrélation est exponentielle est parfois mentionné comme processus de Gauss-Markov du premier ordre. C'est parce que la version discrète de temps du processus est décrite par l'équation suivante de premier ordre de la forme :

$$X(t_{k+1}) = e^{-\beta \Delta t} X(t_k) + W(t_k) \quad \text{B.25}$$

Ou par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_1 + w_1 \quad \text{B.26}$$

là où $W(t_k)$, w_1 est une séquence non-corrélée de distribution gaussienne de moyenne nulle (bruit blanc) [BRO 97 p.96].

Le processus de Markov de premier ordre est probablement le modèle stochastique le plus utile, puisque le biais (constant) aléatoire et le bruit blanc sont tous les deux, dans un certain sens, des cas particuliers du processus de Markov. Nous déduisons qu'il y a une représentation générale pour le biais aléatoire et le bruit blanc, dépendant de la valeur de β .

$$\sigma^2 e^{-\beta \tau} \approx \sigma^2 (1 - \beta \tau) \quad \text{B.27}$$

En équation B.24, si $T=1/\beta$ est très grand, ce processus de Markov se comportera essentiellement comme biais aléatoire (corrélé), et si $T=1/\beta$ est très petit, elle se comportera comme un bruit blanc (non corrélé, mais forte corrélation à zéro !). L'équation B.24 fournit donc un "modèle" idéal à utiliser en extrayant les paramètres du modèle d'erreur σ et $T=1/\beta$ à partir d'une fonction d'autocorrélation. Maintenant en utilisant la définition donnée ci-dessus, nous pouvons obtenir "une fonction d'autocorrélation" du $x(t)$ mesuré. (dans ce cas-ci, par exemple les erreurs systématiques (biais) de la CI). Alors, en appariant la tracé de cette fonction d'autocorrélation R_{xx} au modèle de l'équation B.24, les paramètres modèles σ et $T=1/\beta$ peuvent être facilement extraits comme suit. La valeur initiale est σ^2 :

$$\sigma^2 = R_{xx}(0) \quad \text{et le point où } R_{xx} \text{ baisse à } \sigma^2/e \text{ est } T=1/\beta \quad \text{B.28}$$

$$R_{xx}(T) = \sigma^2 e^{-1} \quad \text{B.29}$$

Stationnarité et Ergodicité [BRO 97 p.78] :

Stationnarité :

Un processus aléatoire est dit stationnaire si les paramètres statistiques (moyenne et écart type) du processus ne changent pas avec le temps, (le système est supposé avoir des paramètres fixes) (Challis et Kitney novembre 1991).

Un processus faiblement stationnaire a une moyenne et une fonction d'auto-corrélation (donc une variance) constantes.

Un processus est véritablement stationnaire (ou fortement stationnaire) lorsque tous les moments sont constants (y compris la variance et la moyenne).

Ergodicité :

Un processus aléatoire est *ergodique* si ses moments peuvent être obtenus comme des moyennes à partir d'une seule de ses réalisations (réalisation – ensemble d'échantillons). De même, un signal aléatoire serait ergodique si la moyenne instantanée est équivalente à la moyenne d'ensemble. Dans le sens qualitatif ceci implique qu'un échantillon de signal du processus contient toutes les variations statistiques possibles du processus. Ainsi, aucune information additionnelle ne doit être gagnée en observant un ensemble de signaux témoin en plus de l'information obtenue à partir d'un seul échantillon. On peut donc affirmer que pour qu'un processus soit ergodique, il doit nécessairement être stationnaire. L'inverse n'est pas vrai.

ANNEXE C : Linéarisation par différenciation

L'analyse de l'erreur utilise la différenciation pour linéariser les équations différentielles de notre système Eq.1-44. L'expansion par série de Taylor utilisée pour la linéarisation d'une fonction $f(x)$ est évaluée autour d'un certain point nominal connu $f(x_0)$ [GRE 01b] et [BRI 71].

L'état (ou la trajectoire) réelle \hat{x}^n peut être écrit en termes de x^n et d'erreur δx^n comme suit :

$$\hat{x}^n = x^n + \delta x^n \quad \text{C.1}$$

Par exemple, les perturbations de la position, la vitesse, l'attitude, et de la gravité peuvent être exprimées comme :

$$\hat{r}^n = r^n + \delta r^n \quad \text{C.2}$$

$$\hat{v}^n = v^n + \delta v^n \quad \text{C.3}$$

$$\hat{R}_b^n = (I - E^n) R_b^n \quad \text{C.4}$$

$$\hat{\gamma}^n = g^n + \delta g^n \quad \text{C.5}$$

Où γ^n signifie le vecteur normal de gravité sur l'ellipsoïde. Le $\hat{\cdot}$ et σ indiquent les valeurs d'état calculées et les erreurs, respectivement. E^n est la matrice antisymétrique représentant les erreurs d'orientation.

$$E = S(\delta \rho^n) = (\varepsilon^n \times) \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_D & \varepsilon_E \\ \varepsilon_D & 0 & -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E & \varepsilon_N & 0 \end{pmatrix} \quad \text{C.6}$$

La dérivation de l'équation C.4 est expliquée en [BRI 71]

Modèles dynamiques de l'erreur inertielle (position, vitesse, attitude) :

Le modèle dynamique de l'erreur en position

Puisque les équations dynamiques de la position sont des fonctions de la position et de la vitesse, les équations dynamiques d'erreur en position peuvent être obtenues en utilisant les dérivées partielles :

$$\delta \ddot{r}^n = F_{r^n}^i \delta r^n + F_{v^n}^i \delta v^n \quad \text{C.7}$$

$$F_{rr} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ v_E \sin(\varphi) & 0 & -\frac{v_E}{(r_T + h) \cos(\varphi)} \\ (r_T + h) \cos^2(\varphi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C.8$$

$$F_{rv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(r_T + h)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(r_T + h) \cos(\varphi)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C.9$$

Et r_M et r_T sont les rayons de courbure Méridional (nord - sud) et Transversal (est-ouest).

Le modèle dynamique de l'erreur en vitesse :

En référence à l'équation Eq.I-33, l'équation dynamique de la vitesse peut être exprimée comme :

$$\dot{\hat{v}}^n = \mathfrak{R}_b^n \tilde{f}_{ib}^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \times \hat{v}_{en}^n + \gamma^n \quad C.10$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$\dot{v}^n + \delta \dot{v}^n = (I - E^n) \mathfrak{R}_b^n (f_{ib}^b + \delta f_{ib}^b) - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n + 2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times (v_{en}^n + \delta v_{en}^n) + g^n + \delta g^n \quad C.11$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}^n &= -(2\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times (v_{en}^n) + \delta g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times (\delta v_{en}^n) - \varepsilon^n \times f_{ib}^b + \mathfrak{R}_b^n \delta f_{ib}^b \\ &= v_{en}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) + \delta g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times (\delta v_{en}^n) + f_{ib}^b \times \varepsilon^n + \mathfrak{R}_b^n \delta f_{ib}^b \end{aligned} \quad C.12$$

les premier et deuxième termes peuvent être développées en fonction des erreurs de position et de vitesse. En retournant à l'équation A.27 on trouve :

$$2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{pmatrix} 2\omega_s \cos \varphi + v_E / (r_T + h) \\ -v_N / (r_M + h) \\ -2\omega_s \sin \varphi - v_E \tan \varphi / (r_T + h) \end{pmatrix} \quad C.13$$

$$\text{La perturbation de la dernière équation donne : } 2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n = \delta\Omega_r \delta r^n + \delta\Omega_v \delta v^n \quad \text{C.14}$$

Où,

$$\delta\Omega_r = \begin{pmatrix} 2\omega_e \sin \varphi & 0 & -\frac{v_K}{(r_T + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ -2\omega_e \cos \varphi - \frac{v_E}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \end{pmatrix} \quad \text{C.15}$$

Et

$$\delta\Omega_v = \begin{pmatrix} 0 & 1/(r_T + h) & 0 \\ -1/(r_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\tan \varphi / (r_T + h) & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'éq. C.14, le premier terme du côté droit de l'éq. C.12, peut être développé en fonctions des erreurs de position et de vitesse :

$$v_{en}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) = (v_{en}^n \times) (\delta\Omega_r \delta r^n + \delta\Omega_v \delta v^n) = (v_{en}^n \times) \delta\Omega_r \delta r^n + (v_{en}^n \times) \delta\Omega_v \delta v^n \quad \text{C.16}$$

En poursuivant la dérivation, nous obtenons :

$$(v_{en}^n \times) = \begin{pmatrix} -2v_E \omega_e \cos \varphi - \frac{v_K^2}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & -\frac{v_N v_D}{(r_M + h)^2} + \frac{v_h^2 \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(r_T + h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2v_K \omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(r_T + h)^2} + \frac{v_N^2}{(r_M + h)^2} \end{pmatrix} \quad \text{C.17}$$

Et

$$(\mathbf{v}^n \mathbf{x}) \mathfrak{R} \Omega_v = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{r_M + h} & \frac{-v_E \tan \varphi}{r_T + h} & 0 \\ 0 & \frac{v_D}{r_T + h} + \frac{v_N \tan \varphi}{r_T + h} & 0 \\ -\frac{v_N}{r_M + h} & \frac{v_E}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{C.18}$$

Le vecteur de pesanteur dans le repère de navigation, g^n est approximé par le vecteur normal de pesanteur $(0 \ 0 \ \gamma)^T$ et γ change avec l'altitude. Supposons un modèle sphérique de la terre et le modèle simplifié suivant de la pesanteur [ROG 00] :

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \quad \text{C.19}$$

Là où γ_0 est la pesanteur normale à $h = 0$, et $R = \sqrt{r_M r_T}$. Par la différenciation de la dernière équation on obtient :

$$\delta\gamma = -2 \left(\frac{\gamma}{R+h} \right) \delta h \quad \text{C.20}$$

En utilisant l'équations de C.13 à C.20, l'équation dynamique d'erreur dans la vitesse C.12 peut être réécrite comme suit :

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = F_{vr} \delta r^n + F_{vn} \delta v^n + (f^n \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^n + \mathfrak{R}_v^n \delta \mathbf{f}^n \quad \text{C.21}$$

Où,

$$F_{vr} = \begin{pmatrix} -2v_E \omega_e \cos \varphi & \frac{v_E^2}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(r_M + h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & 0 & \frac{-v_E v_D}{(r_T + h)^2} + \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ -2v_E \omega_e \sin \varphi & 0 & 0 & \frac{v_E^2}{(r_T + h)^2} + \frac{v_N^2}{(r_M + h)^2} - 2\gamma / (R+h)^2 \end{pmatrix} \quad \text{C.22}$$

$$H_w = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{r_M + h} & -2\omega_c \sin \varphi - 2 \frac{v_K \tan \varphi}{r_T + h} & \frac{v_N}{r_M + h} \\ 2\omega_c \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{r_T + h} & \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{r_T + h} & 2\omega_c \cos \varphi + \frac{v_E}{r_T + h} \\ -2 \frac{v_N}{r_M + h} & -2\omega_c \cos \varphi - 2 \frac{v_K}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \quad C.23$$

Le modèle dynamique de l'erreur sur l'orientation :

Le résultat calculé de la mécanisation sur l'orientation peut être exprimé par :

$$\hat{\mathfrak{R}}_b^n = \hat{\mathfrak{R}}_b^n(S(\hat{\omega}_{ib}^b)) = \mathfrak{R}_b^n(S(\hat{\omega}_{ib}^b) - S(\hat{\omega}_{in}^b)) = \hat{\mathfrak{R}}_b^n(\hat{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_{in}^b) \quad C.24$$

En comparant la dérivée de l'équation C.4 à l'équation C.24, ceci donne :

$$\begin{aligned} -\dot{E}^n R_b^n + (I - E^n) \dot{R}_b^n - (I - E^n) R_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b + \delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \\ = (I - E^n) R_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) + (I - E^n) R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \\ - (I - E^n) R_b^n (\Omega_{nb}^b) + (I - E^n) R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \end{aligned}$$

par conséquent, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$-\dot{E}^n R_b^n = (I - E^n) R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \quad C.25$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation C.25 peut être réduite à :

$$\dot{E}^n = -R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) R_n^b \quad C.26$$

$$\text{ou sous la forme vectorielle : } \dot{\varepsilon}^n = -R_b^n (\delta\omega_{ib}^b - \delta\omega_{in}^b) \quad C.27$$

Pour obtenir l'équation d'erreur pour $\delta\omega_{in}^b$ commençons par $\dot{\omega}_{in}^b = \mathfrak{R}_n^b \dot{\omega}_{in}^n$ qui peut être développé à :

$$\omega_{in}^b + \delta\omega_{in}^b = R_b^n (I + E^n) (\omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n) \quad C.28$$

En écrivant les termes de premières d'ordre,

$$\delta\omega_{in}^b = R_b^n (\delta\omega_{in}^b + E^n \omega_{in}^n) = R_b^n [\delta\omega_{in}^n + (\varepsilon^n \times) \omega_{in}^n] \quad C.29$$

En utilisant les équations C.29 et C.27

$$\dot{\varepsilon}^n = \delta\omega_m^n + (\varepsilon^n \mathbf{x})\omega_m^n - R_b^n \delta\omega_{ib}^b = \delta\omega_m^n + (\omega_m^n \mathbf{x})\varepsilon^n - R_b^n \delta\omega_{ib}^b \quad \text{C.30}$$

En remplaçant le premier terme du côté droit par les termes d'erreur de position et de vitesse explicitement, et en retournant aux équations A.27 et C.14, les équations dynamiques d'erreur sur l'orientation peuvent être réécrites comme :

$$\dot{\varepsilon}^n = F_{\varepsilon}^n \delta r + F_{\varepsilon}^v \delta v^n - R_b^n \delta\omega_{ib}^b \quad \text{C.31}$$

Où,

$$F_{\varepsilon}^n = \begin{pmatrix} -\omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{-v_E}{(r_T + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ -\omega_e \cos \varphi - \frac{v_E}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \end{pmatrix} \quad \text{C.32}$$

$$F_{\varepsilon}^v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r_T + h} & 0 \\ \frac{-1}{(r_M + h)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tan \varphi}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{C.33}$$