République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Saâd DAHLAD-Blida1

Faculté des Sciences
Département de Physique
Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnement-Matière (LPTHIRM)

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en physique

Option : Physique Théorique

Transformations d'opérateurs résolvants de Green : Solutions des états limites aux potentiels de Natanzon dégénérés

---

présenté par :

Oussama ADDA & Zineb BEN SELLA

soutenu le lundi 27 septembre 2021 devant le jury composé de :

Mr. A. Mouzali	M.C.B	U. S. D.-Blida 1	Président
Mr. A. K. Yanallah	M.C.B	U. S. D.-Blida 1	Examinateur
Mr. S.-A. Yahiaoui	M.C.B	U. S. D.-Blida 1	Rapporteur/Superviseur

Blida, 2020-2021.

Résumé. – Dans ce mémoire, nous allons construire la classe des potentiels de Natanzon dégénérés pour des systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position (PDM). Pour ce faire, nous allons étendre l'algèbre dynamique de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ afin de construire cette classe de potentiel. Cela est possible a travers une redéfinition de l'opérateur, dit résolvante de Green, associé à l'opérateur différentiel de Schrödinger. Nous verrons que la résolvante de Green est liée à l'équation de Schrödinger via un jeu de transformations ponctuelles caractérisant le système quantique à PDM. De par ce procédé, nous déduisons l'expression formelle des potentiels de Natanzon dégénérés, leur spectre d'énergie ainsi que leur fonctions d'onde correspondantes (associées à une fonction poids et un produit scalaire spécifiques). Une application aux potentiels de l'oscillateur harmonique, Coulomb-Kepler-Bohr et Morse confirme nos résultats en les comparant à la littérature.

Mots clés. – Masse dépendante de la position, Algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$, Opérateur résolvant de Green, Potentiels dégénérés de Natanzon.

Abstract. – In this work, we will construct the so-called degenerate Natanzon potentials for systems endowed with position dependent mass (PDM). We will enlarge as wide as possible the dynamical structure of Lie algebra of $\mathfrak{so}(2,1)$ in order to generate a such class of potentials. This is done through a redefinition of the Green resolvent operator, associated to the Schrďinger differential operator. We will see that the Green operator is connected to the Schrödinger operator through some ponctual transformations characterizing the PDM system. A such connexion allows us to deduce the expression of degenerate Natanzon potentials, their energy spectra and their associated wave-functions (with a specific weight-function and scalar product). As an application, we will obtain the expressions characterizing the harmonic oscillator, Coulomb-Kepler-Bohr and Morse potentials.

Key words. – Position-dependent Mass, Lie algebra $\mathfrak{so}(2,1)$, Green resolvant operator, Degenerate Natanzon potentials.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **Allah** pour m'avoir donné le courage, la force et la volonté pour faire ce travail.

J'aimerais exprimer ma plus grande gratitude et respect à mon encadreur M. Sid-Ahmed Yahiaoui pour ces excellentes orientations. Sans ses encouragements et son aide, ce mémoire de master ne pourrait se concrétiser. Je suis reconnaissante pour sa gentillesse et sa patience en m'apprenant à manipuler les calculs des opérateurs en utilisant le langage formel Mathematica et j'espère l'honorer dans le futur.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les membres de jury, qui ont accepté de juger ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à ma famille ; mes parents pour leurs encouragements, support et attention, leur amour et leur soutien moral m'a toujours motivé pour réussir et vivre heureuse, à mes sœurs Ahlem et Assila, à mes frères Aboubaker et Yahia pour leur assistance continue ; mes tantes et grand père pour leur amour éternel et leur soutien aux cours des années.

Finalement, je suis reconnaissante à tous mes collègues et ami(e)s pour être toujours présents avec moi. Je tiens à remercier tout particulièrement mon ami Billel Djellouli pour son aide et ses encouragements.

Zineb Ben Sella

Table des matières

Introduction générale

Durant les dernières années, beaucoup de chercheurs ont étudié les systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position (PDM), puisque ces systèmes ont de larges applications dans la physique [1, 2], et aussi ils permettent de généraliser le cas d'une masse constante.

En physique théorique, de nombreuses méthodes ont été développées pour l'étude des systèmes à masse constante et généralisées pour les systèmes PDM. La principale préoccupation de ces recherches se trouve dans la détermination de la solution exacte de l'équation de Schrödinger et des équations relativistes qui la généralisent ; à savoir les équations de Klein-Gordon et de Dirac. On trouve parmi ces méthodes et techniques : la méthode de factorisation (Schrödinger [3], Infeld et Hull [4]), la supersymétrie de la mécanique quantique (Witten, Sukumar) [4], et l'approche par l'algèbre de Lie (Arima et Iachello, Perelomov) [5], et des autres approches (e.g., les intégrales de chemin de Feynman). En mécanique quantique, ces approches ont été utilisées pour générer les classes de potentiels dites de Natanzon [6], et est subdivisée en deux catégories : classe de Natanzon non-dégénérée qui contient neuf potentiels et la classe dégénérée de Natanzon avec trois potentiels différents.

Dans le présent mémoire, nous nous intéressons à l'approche de la théorie des groupes et algèbres de Lie afin de générer la classe dégénérée de Natanzon, (avec ses trois potentiels, à savoir oscillateur harmonique, Coulomb-Kepler-Bohr et Morse), en utilisant l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ [$\sim \mathfrak{su}(1,1) \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$]. Ces algèbres jouent le rôle d'une *algèbre dynamique* [7], puisqu'elle possède son propre opérateur invariant de Casimir et qui se trouve être proportionnel à l'hamiltonien dynamique (d'où d'ailleurs l'appellation *dynamique*). Elle est donc considérée comme étant une *algèbre génératrice des spectres* [8] mais aussi une *algèbre des potentiels* [9] (une version différente de la théorie des potentiels, mais équivalente).

Notre objectif principal dans ce mémoire est de générer analytiquement (moyennant l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$) les potentiels hypergéométriques dégénérés de Natanzon dotés d'une masse dépendante de la position, ainsi que les spectres d'énergies et leurs fonctions d'ondes associées. Ce mémoire est structuré autour de trois (3) chapitres essentiels : **le premier chapitre** s'articule autour du concept des systèmes physiques quantiques munis de masse dépendante de la position, i.e. $m \equiv m(x)$. Nous commencerons par étudier ces systèmes dans le cadre de la mécanique classique lagrangienne et hamiltonienne, puis nous verrons par la suite comment la quantification permet le passage à la mécanique quantique et ses conséquences sur la commutativité entre le terme de masse et l'opérateur d'impulsion.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons quelques rappels essentiels et des notions générales sur la théorie des groupes et algèbres de LIE. Nous discuterons en particulier la réalisation algébrique et potentiel de l'algèbre $\mathfrak{so}(2,1)$. **Le dernier chapitre** est entièrement consacré à notre travail de master. Nous utiliserons les techniques mathématiques exposées dans les deux premiers chapitres afin que nous puissions construire et générer analytiquement les potentiels dégénérés de NATANZON. Il est question de générer ces potentiels en utilisant le concept de *l'opérateur résolvant de* GREEN. Ce dernier est lié b à l'opérateur de SCHRÖDINGER à travers des transformations ponctuelles caractérisant le système quantique à PDM. Cette identification est essentielle puisqu'elle nous permette de construire (générer) les potentiels dégénérés recherchés, ainsi que leur spectre en énergie et leurs fonctions d'onde correspondantes. Nous verrons que ces dernières sont définies uniquement s'il existe une *fonction poids* qui redéfinie le produit scalaire afin que les fonctions d'onde déduites soient normalisées.

Enfin, une conclusion générale clôt ce manuscrit suivie des références.

Chapitre 1

Hamiltoniens à masse effective : Cas classique et quantique

La masse effective est l'un des systèmes physiques importants qui a suscité ces quarante dernières années l'intérêt de très nombreuses recherches scientifiques (à la fois théoriques et expérimentales), et sur lesquelles se sont basées de très nombreuses théories et modèles, on cite à titre d'exemple les systèmes dynamiques dans les espaces courbes à courbure constante [16] ou non constante [17], l'optique géométrique [18], la théorie des semi-conducteurs [19], le mouvement des fusées [20], oscillateurs à masse variable [21].

Nous allons aborder succinctement dans ce chapitre l'étude des systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position. Nous discuterons, au début, leur importance dans la description des systèmes classiques (conservateurs et dissipatifs), puis nous aborderons leur généralisation dans la cadre de la mécanique quantique. Nous verrons que cette dernière question est intimement liée au problème bien connu en physique quantique qu'est le *problème d'ordonnancement*, puisque en effet dans ce cas la masse (dépendante de la position) et l'impulsion ne commutent pas. Par conséquent, il est important de proposer l'expression d'un hamiltonien quantique qui, à la fois, est hermitien et prend en compte le problème d'ordonnancement.

1.1 Étude classique

Dans le cas unidimensionnel, la deuxième loi de Newton s'écrit $F = m_0 a \equiv dP/dt$; elle énonce qu'une force F est le produit de la masse inertielle (et/ou gravitationnelle) $m_0 = m_i = m_g$ par l'accélération a, où P est la quantité de mouvement. Cependant, pour des systèmes munis d'une masse dépendante de la position, le terme de masse constant m_0

est substitué par une fonction masse $m(x)$. Cela nous conduit à généraliser l'expression ci-dessus, soit [10, 11] :

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(x)\dot{x}\right] = \frac{dm(x)}{dx}\dot{x}^2 + m(x)\ddot{x}, \tag{1.1}$$

où par définition v et a sont respectivement données par $\dot{x}$ et $\ddot{x}$. De cette expression, on déduit alors la forme propre :

$$F_p = m(x)\ddot{x} = F - m'(x)\dot{x}^2. \tag{1.2}$$

On voit tout de suite que le terme carré en vitesse correspond à la poussée du système, de sorte que (1.2) indique comment ce terme change avec le vélocité. En effet, puisque $\dot{x}^2 \geqslant 0$ le système alors accélère (resp. décélère) si le taux $m(x)$ est négatif (resp. positif). Ainsi, une particule ayant une variance spatiale de sa masse est induite par la force propre F_p produite par la combinaison de la force externe F et du terme $-m'(x)\dot{x}^2$.

Il est bien connu que l'hamiltonien et le lagrangien s'expriment par :

$$L = \frac{1}{2}m(x)\dot{x}^2 - V(x), \quad H = \frac{P^2}{2m(x)} + V(x), \tag{1.3}$$

où la différentiation de (1.3) par rapport au temps t donne :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2}m'(x)\dot{x}^3. \tag{1.4}$$

Puisque H n'est pas indépendant du temps, nous construisons explicitement une énergie (considérée comme une constante de mouvement) et H conduit à des équations dynamiques sous forme d'équations hamiltoniennes. Nous cherchons d'abord un invariant dans la représentation $(x, \dot{x})$. Pour notre système à masse variable, la fonction $I(x, \dot{x})$ est une constante de mouvement chaque fois que l'équation suivante est satisfaite :

$$\frac{d}{dt}I = \dot{x}\frac{\partial I}{\partial x} + \dot{v}\frac{\partial I}{\partial v} = v\frac{\partial I}{\partial x} + \left[\frac{F}{m} - \frac{m'}{m}v^2\right]\frac{\partial I}{\partial v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I(x, \dot{x}) = \text{const.},$$

avec

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} - \frac{m'}{m}\dot{x}^2. \tag{1.5}$$

La multiplication par la fonction $\phi(x, \dot{x})$ (une fonction à déterminer) conduit à :

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \phi(x, \dot{x})\frac{m'}{m}\,v^2 - \frac{F}{m}\phi(x, \dot{x}), \tag{1.6}$$

et

$$\frac{\partial I}{\partial v} = v\phi(x, \dot{x}), \tag{1.7}$$

où on fixe le choix suivant sur $\phi(x,\dot{x}) = \alpha m^{\beta}$, tels que α et β sont des constantes, et du coup permet d'écrire $\phi(x,\dot{x})\dfrac{m'}{m} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\phi(x,\dot{x})}{\partial x}$. Par conséquent, (1.6) peut être exprimé comme :

$$\frac{\partial I(x,\dot{x})}{\partial x} = \frac{v^2}{\beta}\frac{\partial\phi(x,\dot{x})}{\partial x} - \frac{F}{m}\phi(x,\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v^2}{\beta}\phi(x,\dot{x}) - \int^x \frac{F}{m}\phi(r,\dot{r})dr\right], \tag{1.8}$$

de sorte que la substitution de (1.8) dans (1.7) donne $\dfrac{\partial I}{\partial v} = \dfrac{2v}{\beta}\,\phi(x,\dot{x})$. Si nous posons $\beta = 2$, on obtient :

$$I(x,\dot{x}) = \alpha\left[\frac{m^2v^2}{2} + \int^x m\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)dr\right]. \tag{1.9}$$

En prenant $\alpha = m_0^{-1}$, où le terme m_0 est exprimé en unités de masse, (1.9) est une constante de mouvement exprimée en unités d'énergie, soit :

$$I(x,\dot{x}) = \frac{P^2}{2m_0} + \int^x \frac{m(r)}{m_0}\left(\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right)dr, \tag{1.10}$$

et l'usage d'une intégration par parties conduit directement à :

$$\begin{aligned} I(x,\dot{x}) &= \frac{P^2}{2m_0} + \frac{m(x)}{m_0}V(x) - \int^x \frac{m'(r)}{m_0}V(r)dr \\ &= \frac{m(x)}{m_0}\left[\frac{P^2}{2m(x)} + V(x) - \frac{m_0}{m(x)}\int^x \frac{m'(r)}{m_0}V(r)dr\right], \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec

$$V_{\text{eff}}(x) = V(x) - \frac{m_0}{m(x)}\int^x \frac{m'(r)}{m_0}V(r)dr, \tag{1.12}$$

et de là on tire l'équivalence entre l'invariant $I(x,\dot{x})$ et l'hamiltonien effectif H_{eff}, i.e.

$$I(x,\dot{x}) = H_{\text{eff}}. \tag{1.13}$$

Ainsi, une description simple de ce type de systèmes commence par remplacer la (constante) masse m_0 par la fonction appropriée de la position $m(x)$ dans les expressions conventionnelles de H. De plus, bien que H n'est pas indépendant du temps, il est possible de construire une constante de mouvement (attribuée à l'énergie E), de sorte que $I(x,\dot{x}) \equiv H_{\text{eff}} = E$, conduisant à des équations dynamiques qui ont la forme de celles d'un hamiltonien.

1.1.1 Exemple concret sur des systèmes de type PDM

Nous soulignons que, bien que les fonctions lagrangienne et hamiltonienne ne soient pas uniques, nos expressions (1.3) sont assurées par les conditions d'existence du lagrangien conventionnel pour les équations à coefficients dépendant de l'espace discutées dans [15].

Multiplions (1.1) par $1/m(x)$, après l'identification, on trouve :

$$b(x) = \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{m(x)}\frac{dm(x)}{dx} = \frac{d\ln m(x)}{dx}, \qquad c(x) = \frac{1}{m(x)}, \qquad g(x) = \frac{dV(x)}{dx},$$

et ce qui nous permet d'écrire

$$\ddot{x} + b(x)\dot{x}^2 + c(x)g(x) = 0,$$

de sorte que cette dernière équation correspond à un système dissipatif à masse variable et admet une description lagrangienne [15] (voir la proposition 3). Le lagrangien conventionnel associé est :

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 e^{I_b(x)} - \int^x c(r)g(r)dr, \tag{1.14}$$

où la quantité

$$I_b(x) = \int^x b(r)dr = \ln m(x),$$

réduit (1.14) à notre lagrangien (1.3). Cette forme conventionnelle d'écriture attribuée L et H est bien appropriée pour récupérer (comme cas particuliers) certains des lagrangiens et hamiltoniens déjà rapportés dans la littérature. Par exemple, considérons une fonction de masse $m_e(x)$ et une fonction de potentiel $V(x)$, telles que

$$m_e(x) = m_0 e^{kx/2}, \qquad \frac{dV(x)}{dx} = e^{kx/2}\frac{d\mathcal{V}(x)}{dx}, \tag{1.15}$$

avec m_0 et k sont constantes exprimées, respectivement, en unités de masse et de la position. En utilisant (1.2), le lagrangien et l'hamiltonien (1.3) deviennent :

$$m_0\ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} - \frac{1}{2}m_0 k\dot{x}^2,$$

telle que,

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 e^{I_b(x)} - \int_0^x e^{kr/2}\frac{d\mathcal{V}(r)}{dr}dr, \qquad H = \frac{p^2}{2m_0}e^{-kx/2} + \int^x e^{kr/2}\frac{d\mathcal{V}(r)}{dr}dr.$$

D'un autre côté, si nous prenons maintenant

$$m_e(x) = m_0 e^{-kx/4}, \qquad \frac{dV(x)}{dx} = e^{3kx/4}\frac{d\mathcal{V}(x)}{dx},$$

alors l'hamiltonien effectif (1.13) s'exprime :

$$H = \frac{p^2}{2m_0} e^{kx/2} + \int^x e^{kr/2} \frac{d\mathcal{V}(r)}{dr} dr.$$

Ces dernières expressions sont en accord avec celles rapportées dans [14] pour un système de masse constante m_0 soumis à une *force quadratique en vitesse*, telle que $-\frac{1}{2} m_0 k \dot{x}^2$. Une généralisation immédiate est possible en considérant une fonction de masse $m(x) = m_0 e^{k(x)/2}$, et peut être mise en relation avec le système de masse constante discuté dans [13]. Il est remarquable à noter que les résultats obtenus pour les masses constantes rapportés dans [13, 14] soient également dérivables pour une masse qui varie de façon exponentielle avec la position.

1.2 Étude quantique

En élaborant son équation, SCHRÖDINGER cherchait une équation dont le terme de masse est une constante et n'a pas pris en considération le fait qu'elle peut être dépendante de la position (les recherches de l'époque ne prêtait pas attention à ce genre de considérations).

Mais avec le développement des technologies, la communauté physicienne (en particulier les physiciens expérimentateurs) a remarqué qu'à l'échelle de l'infiniment petit, il existe des systèmes dont le comportement dynamique est intimement lié à la propagation d'une particule et dont sa variation dépendait de la position spatiale. Des études théoriques et mathématiques ont conduit les physiciens à élaborer des modèles mathématico-physiques dans lesquels ils expliquaient que la dépendance de la position spatiale *ne signifiée en rien le fait que la particule changeait de masse en passant d'un point à un autre, mais plutôt que la particule se trouve être dans un champ effectif donnant l'impression que la particule changeait de masse en se déplaçant.*

Cependant, l'élaboration d'une équation de SCHRÖDINGER dotée d'une masse dépendante de la position et *hermitienne* s'est rapidement trouvé face à un problème majeur. En effet, puisque la masse est à présent dépendante de la position, il faut déduire une équation d'onde dans laquelle on tient compte de la *commutativité* entre le terme de masse et l'impulsion. Ce problème est certainement le plus ancien en mécanique quantique et est connu sous le nom du *problème d'ordonnancement*. Il est donc question de savoir quelle est l'expression du hamiltonien effectif qui tient compte de cet ordonnancement. Des tentatives ont été proposées dans les années 1960 et 1970, par exemple, les hamiltoniens de BENDANIEL-DUKE, GORA-WILLIAMS, etc. Mais certainement, la meilleure proposition fut introduite par VON ROOS en 1983 dans laquelle il propose une expression d'hamiltonien englobant l'ensemble des hamiltoniens connus à l'époque. La prochaine section est entièrement consacrée à cet hamiltonien ainsi qu'à ces différentes variantes.

1.2.1 Hamiltonien de VON ROOS

Dans une tentative de faire face à la non-unicité de la représentation du hamiltonien, VON ROOS a proposé une famille d'hamiltoniens composée de trois paramètres, dits , et dans laquelle le concept de l'herméticité est bien maintenue et intégrée. Il contient les formes alternatives à un et/ou deux termes (même plus) et s'exprime comme suit :

$$H_{\mathrm{vR}} = \frac{1}{4}[M(x)^{\eta}PM(x)^{\varepsilon}PM(x)^{\rho} + M(x)^{\rho}PM(x)^{\varepsilon}PM(x)^{\eta}] + V(x), \tag{1.16}$$

où la contrainte sur les paramètres d'ambiguité est donnée par $\eta + \varepsilon + \rho = -1$, avec η, ε et ρ sont réels. Ici, $\hbar = 1$ et $M(x)$ est la fonction masse dépendante de la position $M(x) = m_0 m(x)$, où m_0 est constant et $m(x)$ une fonction continue sans dimension. L'équation (1.16) peut aussi s'exprimer en forme d'opérateur différentiel, tel que :

$$H_{\mathrm{vR}} = -\frac{\hbar^2}{2M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 M'(x)}{2M(x)^2}\frac{d}{dx} + V_{\mathrm{eff}}(x), \tag{1.17}$$

avec

$$V_{\mathrm{eff}}(x) = V(x) + \frac{(1+\beta)M''(x)}{4M(x)^2} - (\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta + 1)\frac{M'(x)^2}{2M(x)^3}, \tag{1.18}$$

où le potentiel effectif contient, à la fois, les termes de masse (et leur dérivées) ainsi que les paramètres d'ambiguité.

1.2.2 Relation entre l'hamiltonien de VON ROOS et les autres

Le succès de l'hamiltonien de VON ROOS réside dans le fait qu'il puisse générer l'ensemble des hamiltoniens connus dans la littérature, et cela en proposant un choix convenable aux paramètres d'ambiguité. Le tableau ci-dessous illustre bien cette correspondance entre l'hamiltonien de VON ROOS et ceux élaborés par d'autres méthodes, on en trouve par exemple :

— **Hamiltonien de BenDaniel-Duke** est certainement le premier à être proposé et examiné dans la cadre de PDM dans l'approximation de la masse effective. Les auteurs ont conclu que pour assurer la conservation du courant, il est nécessaire de remplacer l'hamiltonien ordinaire. C'est le plus utilisé pour les calculs analytiques et pour lequel certains des preuves ont été fournies, bien que des travaux récents aient suggérés que d'autres opérateurs sont plus appropriés.

- **Hamiltonien de Gora-Williams** fut proposé afin de modéliser les alliages binaires à composition dépendante de la position. Il a été déduit en utilisant la méthode de SLATER et possède deux termes.
- **Hamiltonien de Zhu-Kroemer** est un autre hamiltonien qui maintient l'herméticité de l'hamiltonien et fut suggéré dans le but de reformuler le problème aux limites (de connexion) des deux côtés d'une structure hétérogène, en particulier l'étude des semi-conducteurs.
- **Hamiltonien de Morrow-Brownstein** est aussi un hamiltonien proposé afin d'expliquer les strutures hétérojonctions abruptes entre deux cristaux, avec une distribution discontinue en escalier de la masse effective. Sa particularité est d'être un hamiltonien à trois paramètres d'ambiguité $\eta = \rho$ et ϵ, avec un choix convenable les concernant.
- **Hamiltonien de Li-Kuhn-Souza Dutra-Almeida** est un hamiltonien proposé appartenant à une sous-classe à deux paramètres, $\rho = 0$. Il a été déduit que ce genre d'hamiltonien est équivalent à celui de WEYL à trois termes.

$(\eta, \varepsilon, \rho)$	**Hamiltonien (Année)**	**Expression de l'hamiltonien**
$(0, -1, 0)$	BenDaniel-Duke (1966)	$H_{\mathrm{BDD}} = \frac{1}{2} p \frac{1}{m} p + V(x)$
$(-1, 0, 0)$	Gora-Williams (1969)	$H_{\mathrm{GW}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m} p^2 + p^2 \frac{1}{m}\right] + V(x)$
$\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$	Zhu-Kroemer (1983)	$H_{\mathrm{ZK}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{m}} p^2 \frac{1}{\sqrt{m}} + V(x)$
$(\eta, \varepsilon, \eta)$	Morrow-Brownstien (1984)	$H_{\mathrm{MB}} = \frac{1}{2} m^{\alpha} p m^{\beta} p m^{\alpha} + V(x)$
$(\eta, \varepsilon, 0)$	Li-Kuhn-Dutra-Almeida (2000)	$H_{\mathrm{LKDA}} = \frac{1}{4}\left[m^{\alpha} p m^{\beta} p + p m^{\beta} p m^{\alpha}\right] + V(x)$
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$	Weyl, Li-Kuhn (1993)	$H_{\mathrm{W}} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{m} p^2 + 2p \frac{1}{m} p + p^2 \frac{1}{m}\right] + V(x)$

1.2.3 Exemple de système physique PDM

Comme exemple explicite, considérons maintenant l'hamiltonien [12] :

$$H = -\frac{1}{2}M(x)^a \frac{d}{dx}M(x)^{2b}\frac{d}{dx}M(x)^a + V(x), \tag{1.19}$$

où on pose $\hbar = 1$ et $\eta = \rho = a$ et $\varepsilon = 2b$, pour la contrainte $2a + 2b = -1$. Il peut être réduit à une forme plus simple en considérant la transformation ponctuelle

$$\psi(x) = e^{g(x)}\phi(x), \qquad x \longrightarrow y := s(x), \tag{1.20}$$

telle que le Jacobien de la transformation J est donné par $J := s'(x)$ et la normalisation de la fonction d'onde $\psi(x) = e^{g(x)}\phi(x)$ est donnée par

$$\int_{dom\,H} |\psi(x)|^2 dx := \int_{dom\,H} |e^{g(x)}\phi(x)|^2 dx < +\infty. \tag{1.21}$$

A partir de H_{eff} et de la transformation ci-dessus, on obtient :

$$H_{\text{eff}}^{(a)}\phi(y) := \left[-\frac{1}{2m_0}\frac{d^2}{dy^2} + V_{\text{eff}}^{(a)}(y)\right]\phi(y) = E\phi(y), \tag{1.22}$$

où

$$V_{\text{eff}}^{(a)}(y) := V(y) - \left(\frac{1}{2M^3(y)}\right)\left[\left(\frac{1}{4}+a\right)M(y)M''(y) - \left\{\frac{7}{16} + a(2+a)\right\}M'^2(y)\right], \tag{1.23}$$

et cela dépend des expressions explicites de la masse $M(y)$ et du potentiel initial $V(y)$, tous deux exprimés dans la représentation-y. En outre, nous avons de la transformation :

$$y := s(x) = \int e^{2g(x)}dx + y_0, \qquad g(x) = \ln[J^{1/2}(x)] = \ln\left[\frac{M(x)}{m_0}\right]^{1/4}. \tag{1.24}$$

Ce dernier cas est à rejeter, puisqu'il ne représente aucun physique.

A ce stade d'investigation, le principal objectif est d'éviter qu'un terme contenant les paramètres d'ambiguïté apparaisse dans l'opérateur du terme cinétique de l'hamiltonien effectif. Les techniques utilisées pour résoudre l'équation aux valeurs propres des systèmes à masse constante peuvent être alors appliquées pour étudier le problème spectral défini par l'équation (1.22). Une simplification est obtenue si l'on pose $a = -1/4$, ou encore si la fonction de masse est nulle, $M(x) = 0$. Dans les deux cas, on déduit que $V_{\text{eff}}^{(a)} = V$, on dit que l'hamiltonien $H_{\text{eff}}^{(-1/4)}$ est défini par termes nuls dépendant de la masse. En particulier, une masse constante $M(x) = m_0$ réduit le potentiel effectif à celui de V dans la représentation-y.

1.2.4 Analyse algébrique

L'analyse algébrique tient compte de l'étude des systèmes de type PDM en factorisant l'hamiltonien effectif H_{eff} en produit de deux opérateurs, A et B. Soit donc :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} M^a(x) \frac{d}{dx} M^b(x) + \beta(x), \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{2}} M^b(x) \frac{d}{dx} M^a(x) + \beta(x), \tag{1.25}$$

tel que $2a + 2b = -1$ et $A^\dagger = B$, et $\beta(x)$ est une fonction à déterminer et satisfaisant l'hamiltonien :

$$H_{a,b} = AB + E, \tag{1.26}$$

avec E une constante. Le potentiel $V(x)$ est donné en termes de la fonction $\beta(x)$ par :

$$V(x) - E = \frac{1}{\sqrt{2M(x)}} \left[2 \left(a + \frac{1}{4} \right) \frac{M'(x)}{M(x)} \beta(x) - \beta'(x) \right] + \beta^2(x), \tag{1.27}$$

tel que nous pouvons voir que $\beta(x)$ est la solution l'équation différentielle de Riccati en connaissant les expressions du potentiel $V(x)$ et du terme de masse $M(x)$. Pour $M(x)$ et $\beta(x)$ arbitraires, le produit entre les opérateurs de factorisation obéit à la règle de commutation :

$$[A, B] = -\left[\frac{1}{M(x)^{3/2}} \left(a + \frac{1}{4} \right) M'(x) \right]^2 - \sqrt{\frac{2}{M(x)}} \beta'(x), \tag{1.28}$$

et vérifiant l'algèbre dite *déformée*. En demandant au commutateur (1.28) de *fermer* l'algèbre donnée, nous sommes en mesure d'obtenir des réalisations concrètes des opérateurs A et B. Dans le cas simple d'une algèbre non-déformée, on a $[A, B] = -\omega_0 = \text{const.}$, de sorte que la fonction $\beta(x)$ est définie en fonction du paramètre d'ambiguité a et de la fonction de masse par l'identité :

$$\beta(x) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \int^x M(x)^{1/2} dr - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a + \frac{1}{4} \right) \frac{M'(x)}{M(x)^{3/2}} + \beta_0, \tag{1.29}$$

où β_0 est une constante d'intégration et donc l'expression du potentiel :

$$V(x) = \frac{\omega_0^2}{2} \left[\int^x M^{1/2}(r) dr \right]^2 = \frac{m_0 \omega_0^2}{2} \left[\int^x J(r) dr \right]^2. \tag{1.30}$$

Notez que le cas constant $M(x) = m_0$ produit le potentiel d'oscillateur harmonique, i.e. $V(x) = m_0 \omega_0^2 x^2 / 2$, avec $\beta(x) = x \sqrt{m_0 \omega_0^2 / 2} + \beta_0$. A une constante additive près, les opérateurs A et B sont réduits aux opérateurs d'échelle classiques de l'oscillateur harmonique, comme prévu. Pour les autres formes de la fonction de masse $M(x)$ et le paramètre d'ambigüité a, le potentiel (1.30) représente une large famille de potentiels PDM, avec le spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique. D'autre part, la substitution de (1.29) dans (1.25) génère les opérateurs d'échelle pour de tels oscillateurs de genre PDM. Par exemple, la construction des *états cohérents généralisés* correspondants est également réalisable grâce à cette réalisation algébrique. D'autres systèmes quantiques (de type PDM) peuvent être étudiés à travers le commutateur (1.28) en identifiant l'algèbre appropriée, dite déformée (ou encore modifiée). Par exemple, on peut chercher les opérateurs A et B tels que le commutateur (1.28) soit associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$. Le potentiel (1.30) est alors associé à une famille d'oscillateurs singuliers.

Chapitre 2

Groupes et algèbres de Lie : Cas particulier de l'algèbre $\mathfrak{so}(2,1)$

Les groupes de Lie représente la théorie la mieux développée (et certainement la mieux adaptée) pour déduire des symétries continues à des structures mathématiques, ce qui l'amène à jouer un rôle majeur dans la *géométrisation de la physique*. De même, elle joue un rôle en physique théorique et mathématique et elle constitue une base fondamentale dans la compréhension de la théorie des groupes au sens algébrique.

A chaque groupe de Lie est associé une algèbre de Lie spécifique. Cet entrelacement entre groupes et algèbres de Lie permet d'étudier les groupes de Lie en termes de leur algèbres respectives, ce qui nous amène donc à établir une relation entre des objets géométriques (les groupes) et des structure linéaires (algèbres).

2.1 Groupes en général.

2.1.1 Définition

Un groupe est la donnée d'un ensemble non vide, noté G, et d'une loi de composition interne [?], tels que pour tout élément a et b de G, on a

$$G \times G \to G, \quad (a,b) \longmapsto a * b,$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

• Associativité :

$$(a * b) * c = a * (b * c)(\equiv abc), \quad \forall a, b, c \in G.$$

• Élément neutre $e \in G$:

$$e * a = a * e = a, \quad \forall a \in G,$$

ce qui implique :

$$e * e = e \in G.$$

• Tout élément de G possède un élément symétrique :

$$\forall a \in G, \quad \exists! a^{-1} \in G, \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Si $a * b = b * a$, on dit que a and b commute. Si tous les éléments de G commutent, alors G est *commutatif* ou *groupe abélien.*

Exemples.

1. L'ensemble des nombres entiers relatifs muni de l'addition est un groupe, noté $(\mathbb{Z},+)$.
2. $(M_n(\mathbb{C}),+)$, où M_n désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$; $(GL_n(\mathbb{C}),\times)$, où $GL_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{C}$. Ce dernier groupe est appelé *groupe général linéaire.*

2.2 Groupes de Lie

2.2.1 Définition

Un groupe de Lie est un groupe G muni d'une structure de variété différentiable, telle que les opérations de groupe (produit et inversion) soient différentiables. Les groupes de Lie sur $\mathbb{C}$ sont appelés *groupes de* Lie *complexes*, et groupes de Lie sur $\mathbb{R}$ sont appelés *groupes de* Lie *réels.*

Exemples.

1. $\mathbb{R}^n$, avec l'opération de groupe donnée par l'addition.
2. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec l'opération de groupe donnée par la multiplication.

2.2.2 Définition des sous-groupes de LIE

Les groupes de LIE admettent des sous-groupes. Ils sont d'une importance capital en physique, car ils permettent de discuter des cas limites (comme les bandes d'énergie) et les cas de diffusion, etc. Ils sont caractérisés par les propriétés suivantes :

• Un sous-groupe de LIE fermé h d'un groupe de LIE (réel ou complexe) est un sous-groupe qui est aussi une sous-variété (pour les groupes de LIE complexes, il doit être une sous-variété complexe).

• Un sous-groupe de LIE dans un groupe de LIE (réel ou complexe) $H \subset G$ est un *immergé* sous-variété qui est aussi un sous-groupe.

Généralement parlant, tout sous-groupe de LIE fermé est un sous-groupe de LIE, mais l'inverse n'est pas vrai.

Théorème. (i) Tout sous-groupe de LIE fermé est fermé dans G.
(ii) Tout sous-groupe fermé d'un groupe de LIE est un sous-groupe de LIE réel fermé.

2.2.3 Homomorphismes des groupes de LIE

Définition. Soient G et H deux groupes de LIE. Alors :

• Un homomorphisme de G vers H est une fonction $f : G \to H$, telle que $f(x, y) = f(x)f(y)$, pour tous $x, y \in G$. Il est clair que la composée de deux homomorphismes est encore un homomorphisme.

• Un homomorphisme $f : G \to H$ est appelée une *isomorphisme* s'il existe un inverse $f^{-1} : H \to G$.

2.2.4 Représentations des groupes

Définition (Actions de groupe). L'action de G sur un ensemble M est l'application :

$$(g, x) \in G \times M \to g.x \in M,$$

notée généralement $(g, x) \to gx$, $(g \in G$ et $x \in M)$, telle que :

$$g_1(g_2.x) = (g_1g_2).x,$$

et aussi

$$e.x = x \quad (e \text{ est l'élément neutre de } G)$$

Définition (La représentation). La représentation (π,V) d'un groupe G est un homomorphisme donné par

$$\pi : g \in G \to \pi(g) \in GL(V),$$

où $GL(V)$ est appelé la *représentation linéaire* du groupe $V \to V$, et V un espace vectoriel. L'application π est un morphisme, c'est à dire

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1 g_2)$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$.

2.2.5 Représentation Adjointe

Par définition, la représentation adjointe, notée (Ad, g), est donné par l'homomorphisme suivant :

$$Ad : g \in G \to Ad(g) \in GL(g), \tag{2.1}$$

où $Ad(g)$ représente l'action sur $X \in g$ et est donnée par

$$(Ad(g))(X) = gXg^{-1}. \tag{2.2}$$

Pour montrer que c'est bien défini, il faut vérifier que $gXg^{-1} \in g$ lorsque $X \in g$, mais cela peut être montré en utilisant l'identité

$$\exp[t(gXg^{-1})] = ge^{tX}g^{-1}, \tag{2.3}$$

ce qui implique que $e^{tgXg^{-1}} \in G$, pour tout $e^{tX} \in G$. Pour vérifier cette identité, on développe la fonction exponentielle en utilisant l'identité :

$$(gXg^{-1})^k = (gXg^{-1})(gXg^{-1})\dots(gXg^{-1}) = gX^k g^{-1}, \tag{2.4}$$

où il est facile de constater qu'il s'agit bel et bien d'un morphisme, avec l'identité apparente

$$Ad(g_1)Ad(g_2) = Ad(g_1 g_2). \tag{2.5}$$

2.2.6 Groupes orthogonaux

Le groupe orthogonal $O(n)$ de dimension n est un groupe de transformations inversibles qui préserve le produit scalaire dans un espace vectoriel V réel de dimension n. Ce type de groupe est isomorphe aux groupes des matrices réelles inversibles $L(n \times n)$ qui satisfait la condition suivante [24] :

$$L^{-1} = L^T. \tag{2.6}$$

Les sous-groupe de $O(n)$ des matrices à déterminant égal à 1 (de manière équivalente, le sous-groupe qui préserve l'orientation d'une base orthonormal) sont appelés *groupes spéciaux orthogonaux* et sont notés $SO(n)$. Rappelons que pour une représentation π du groupe G dans V, il y a une représentation duale sur V^* donnée en prenant la transposée inverse de π. Si G est un groupe orthogonal, alors π et son dual sont représentées par les mêmes matrices, avec V identifié par V^* par le produit scalaire.

Puisque le déterminant de la matrice transposée L^T est le même que déterminant de la matrice L, nous avons donc

$$L^{-1}L = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det(L^{-1})\det(L) = \det(L^T)\det(L) = (\det(L))^2 = 1, \tag{2.7}$$

soit enfin,

$$\det(L) = \pm 1. \tag{2.8}$$

Le groupe orthogonal de dimension n, $O(n)$, est un groupe de LIE continu, avec deux composantes distinguées par le signe du déterminant. $SO(n)$, son sous-groupe, est un sous-groupe de la transformation qui préserve l'orientation et qui inclut d'identité, et une composante de la transformation qui change l'orientation.

L'exemple le plus simple (et non trivial) concerne le cas $n = 2$. En effet, tous les éléments de $SO(2)$ sont donnés par des matrices de la forme

$$T_2^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

associée à une rotation d'angle θ dans le sens positif (i.e. contre les aiguilles d'une montre) dans $\mathbb{R}^2$. L'autre composante $O(2)$ est donnée par les matrices de la forme

$$T_2^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

qui décrit une composition faite d'une réflexion suivie par une rotation. Notons que le groupe $SO(2)$ est isomorphe au groupe $U(1)$ par l'opération associée à l'identité connue d'EULER, i.e.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad e^{i\theta}. \tag{2.11}$$

2.2.7 Groupes de LIE compacts et non compacts

Un groupe de LIE est habituellement appelé *compact* si et seulement si ses paramètres prennent des valeurs continues dans des domaines compacts (fermés et bornés). Sinon, on parlera de groupe *non-compact*. L'algèbre de LIE correspondante est appelée compacte et noncompacte, respectivement [25].

2.2.8 Construction des opérateurs de CASIMIR

Par définition, un opérateur de CASIMIR est un opérateur qui commute avec tous les générateurs du groupe. Le rang d'un groupe de LIE quelconque, noté r, est intimement lié à l'opérateur de CASIMIR ; il permet de déterminer le nombre total des opérateurs de CASIMIR qu'un groupe de LIE peut contenir. À titre d'exemple, les groupes $SU(2)$, $SU(1,1)$ et $SO(2,1)$ sont de rang 1, tandis que $SO(2,2)$ est de rang 2.

En règle générale, il n'existe aucune méthode viable qui nous permet de construire les opérateurs de CASIMIR pour des groupes semi-simples quelconques. C'est uniquement dans le cas des groupes compacts $SU(n)$ et non compacts $SU(p,q)$ que les opérateurs de CASIMIR ont été construits sous formes polynômiales des générateurs, tels que :

$$C_l = \sum_i \sum_j a^l_{ij} \ldots J_i J_j \ldots, \tag{2.12}$$

J_i et J_j sont appelés des générateurs du groupe et a^l_{ij} sont des coefficients liés aux constantes de structure. Pour le groupe compact $SU(2)$, l'opérateur de CASIMIR est donné par :

$$C_2 = J_0^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+), \tag{2.13}$$

tandis que pour $SU(1,1)$, il est donné par l'opérateur :

$$C_{1,1} = J_0^2 - \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+). \tag{2.14}$$

Puisque $SU(1,1)$ est isomorphe à $SO(2,1)$, alors ils partagent le même opérateur de CASIMIR, soit

$$C_{2,1} = C_{1,1} = J_0^2 - \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+), \tag{2.15}$$

où $C_{2,1}$ c'est l'opérateur de CASIMIR de groupe $SO(2,1)$.

2.3 Algèbres de LIE

L'algèbre de LIE d'un groupe de LIE c'est la première approximation linéaire du groupe. L'étude des algèbres de LIE est plus élémentaire que celle des groupes.

2.3.1 Définition

Une algèbre de LIE (réelle ou complexe) est un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, muni d'une opération, dite *crochet de* LIE et notée $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ qui jouit des propriétés suivantes :

• pour tous x, $y \in V$, on a :

$$[x, y] = -[y, x],$$

• pour tous x, y, $z \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z],$$

• L'identité de JACOBI est définie pour

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Les algèbres de LIE considérées ici sont des algèbres à matrices pour lesquelles le crochet de LIE est le commutateur ordinaire connu de la mécanique quantique, i.e.

$$[x, y] = xy - yx,$$

et satisfaisant quelques propriétés. Parmi elles, on trouve par exemple :

1. Un *α-morphisme* d'une algèbre de LIE $\mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui respecte le crochet de LIE, telle que $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, on a :

$$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)].$$

2. Une algèbre de LIE $\mathfrak{g}$ est dite *abélienne* ou *commutative*, si $[x, y] = 0$, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$.
3. Une algèbre de LIE $\mathfrak{g}$ est dite *simple*, si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux propres (c'est-à-dire autre que 0 et $\mathfrak{g}$) et si $\mathfrak{g}$ est non abélienne. Sinon, on parlera de algèbre de LIE *semi-simple*.

2.3.2 Constantes de structure

On s'intéresse à présent au cas particulier d'une algèbre de LIE de dimension finie. On suppose que la base de $\mathfrak{g}$ est d'ordre n et est donnée par $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. On écrit alors :

$$[e_i, e_j] = \sum_{l=1}^{n} a_{ij}^l e_l, \quad a_{ij}^l \in V. \tag{2.16}$$

Les coeffiecients a_{ij}^l, (avec $1 \leq i, j, l \leq n$), sont les *constantes de structure* de l'algèbre de LIE $\mathfrak{g}$. Ces constantes de structure doivent satisfaire la condition d'antisymétrie ($a_{ii}^l = 0$), i.e.

$$a_{ij}^l = -a_{ji}^l.$$

2.3.3 Sous-algèbre de LIE

Définition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de LIE. Alors, nous aurons :
• Un sous-ensemble $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une *sous-algèbre* de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ et si pour tous x, $y \in \mathfrak{h}$, on a $[x, y] \in \mathfrak{h}$.
• Un sous-espace $\mathfrak{h}$ est un *idéal* de $\mathfrak{g}$ si pour tous $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$, on a $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

2.3.4 Représentation Adjointe d'une algèbre de LIE

Definition. (ad,$\mathfrak{g}$) est la représentation de l'algèbre de LIE donnée par [24]

$$X \in \mathfrak{g} \to ad(X),$$

où $ad(X)$ est définie comme l'application linéaire de $\mathfrak{g}$ sur elle-même et est donnée par

$$Y \to [X, Y].$$

L'action $ad(X) = [X, .]$ est une application linéaire qui peut être vue comme la version infinitésimale de l'action de conjugaison

$$(.) \quad \to \quad e^{tX}\ (.)\ e^{-tX}.$$

La propriété d'homomorphisme de l'algèbre de LIE de l'application ad énonce que

$$ad([X, Y]) = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X),$$

où il s'agit des applications linéaires sur $\mathfrak{g}$ et de l'opération $\circ$, c'est la composition de l'application linéaire. En opérant sur $Z \in \mathfrak{g}$, nous aurons :

$$ad([X,Y])(Z) = (ad(X) \circ ad(Y))(Z) - (ad(Y) \circ ad(X))(Z),$$

et en utilisant l'expression pour ad comme commutateur, on trouve

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]],$$

qui n'est autre que la fameuse identité de JACOBI.

2.4 Réalisation de l'algèbre de LIE $\mathfrak{so}(2,1)$

L'algèbre de LIE $\mathfrak{so}$(2,1) joue un rôle fondamental dans la reformulation algébrique et l'étude de l'équation de SCHRÖDINGER radiale pour un grand nombre des problèmes en mécanique quantique.

L'algèbre $\mathfrak{so}$(2,1) est composée de trois (3) générateurs, notés habituellement $J_\pm$ et J_0 et vérifiant les relations de commutation [26] :

$$[J_+, J_-] = -2J_0, \qquad [J_0, J_\pm] = \pm J_\pm. \tag{2.17}$$

Une telle algèbre admet une *réalisation différentielle* de la forme :

$$\begin{aligned} J_\pm &= e^{\pm i\phi}\left[\pm\frac{\partial}{\partial x} + k_1(x)\left(i\frac{\partial}{\partial \phi} \mp \frac{1}{2}\right) + k_0(x)\right], \\ J_0 &= -i\frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où $k_0(x)$ et $k_1(x)$ sont des fonctions réelles à déterminer et $J_- = (J_+)^\dagger$. Pour que $J_\pm$ et J_0 forment une algèbre $\mathfrak{so}$(2,1), les relations de commutation (2.17) doivent être satisfaites. Cette exigence fournit les conditions qui déterminent les fonctions $k_0(x)$ et $k_1(x)$. Ces conditions s'expriment sous forme d'équations différentielles ordinaires, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{dk_1(x)}{dx} + k_1^2(x) &= 1, \\ \frac{dk_0(x)}{dx} + k_0(x)k_1(x) &= 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

telle que la première peut être facilement résolue en termes de $k_1(x)$ et dont les solutions sont

$$k_1(x) = \begin{cases} \tanh(x-c), & \text{pour } k_1^2(x) < 1\,; \\ \pm 1, & \text{pour } k_1^2(x) = 0\,; \\ \coth(x-c), & \text{pour } k_1^2(x) > 1, \end{cases} \tag{2.20}$$

où c est une constante. Par conséquent, pour tout choix de $k_1(x)$, la fonction $k_0(x)$ peut être obtenue en résolvant la seconde l'équation différentielle du premier ordre (2.19).

La base de la représentation irréductible de $\mathfrak{so}(2{,}1)$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} C_{2,1}\,\big|\,j,m\big\rangle &= j(j+1)\,\big|\,j,m\big\rangle, \\ J_0\,\big|\,j,m\big\rangle &= mj\,\big|\,j,m\big\rangle, \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $C_{2,1}$ c'est l'opérateur de CASIMIR de l'algèbre $\mathfrak{so}(2{,}1)$

$$C_{2,1} = J_0^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+). \tag{2.22}$$

Or, selon (2.18), on peut écrire l'opérateur $C_{2,1}$ comme suit

$$C_{2,1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(k_1^2(x) - 1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{4}\right) + 2i\,k_0'(x)\frac{\partial}{\partial \phi} - k_0^2(x) - \frac{1}{4}, \tag{2.23}$$

et la base (2.21) comme

$$\langle x, \phi | j, m\rangle \;\equiv \Psi_{j,m}(x,\phi) = \psi_{j,m}(x)e^{im\phi}. \tag{2.24}$$

Les fonctions $\psi_{j,m}(x)$ sont les solutions de l'équation de SCHRÖDINGER associée au m-potentiel :

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_m(x)\right]\psi_{j,m}(x) = E_j \psi_{j,m}(x), \tag{2.25}$$

où

$$V_m(x) = \left(k_1^2(x) - 1\right)\left(m^2 - \frac{1}{4}\right) + 2m\frac{dk_0(x)}{dx} + k_0^2(x), \tag{2.26}$$

et l'énergie s'exprime sous la forme :

$$E_j = -\left(j + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{2.27}$$

On voit bien de (2.27) que l'hamiltonien est apparenté de l'opérateur de CASIMIR proportionnellement comme

$$H = -\left(C_{2,1} + \frac{1}{4}\right). \tag{2.28}$$

Chapitre 3

Génération des Potentiels Dégénérés de Natanzon

Nous arrivons maintenant au résultat principal de ce mémoire. L'objectif ici est de générer les potentiels hypergéométriques dégénérés de Natanzon dotés d'une masse dépendante de la position (PDM), et de déduire le spectre d'énergie associé et leurs fonctions d'onde correspondantes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous exprimerons l'expression différentielle de l'hamiltonien de von Roos et dans la deuxième nous allons étendre l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$. Le résultat que nous allons obtenir pourra générer les potentiels recherchés et cela est possible à travers une redéfinition de l'opérateur résolvant de Green. Dans la dernière partie nous combinerons les résultats déduits dans les deux premières parties pour déduire l'expression du potentiel, le spectre d'énergie associé et les fonctions d'onde à cette classe de potentiels. Nous montrerons que ces fonctions d'onde sont normalisées sous l'effet d'une nouvelle définition (plus large) d'un produit scalaire muni d'une fonction poids $W(x)$, à déterminer. Cette déduction est principalement due (à notre avis) au caractère particulier de la dépendance spatiale de la masse.

3.1 Hamiltonien de von Roos et sa réalisation différentielle

L'hamiltonien de von Roos a été introduit pour décrire le comportement d'une particule dotée d'une masse dépendante de la position. Ce modèle mathématique complète et généralise les différents modèles introduits séparément. L'hamiltonien de von Roos s'exprime par (voir le chapitre 1) :

$$H_{\mathrm{vR}} = \frac{1}{4}\left(m^{\eta}(x)pm^{\epsilon}(x)pm^{\rho}(x) + m^{\rho}(x)pm^{\epsilon}(x)pm^{\eta}(x)\right) + V(x), \tag{3.1}$$

où η, ϵ et ρ sont des paramètres réels vérifiant la contraint $\eta+\epsilon+\rho=-1$, $p(=-id/dx)$ est l'opérateur d'impulsion, et $V(x)$ le potentiel. La fonction $m(x)$ est sans unité et $\hbar = m_0 = 1$.

En insérant l'opérateur d'impulsion p dans (3.1), on trouve :

$$H_{\mathrm{vR}} = -\frac{1}{4}\left[m^{\eta}(x)\frac{d}{dx}m^{\epsilon}(x)\frac{d}{dx}m^{\rho}(x) + m^{\rho}(x)\frac{d}{dx}m^{\epsilon}(x)\frac{d}{dx}m^{\eta}(x)\right] + V(x). \tag{3.2}$$

Le premier terme de (3.2) donne l'expression :

$$\begin{aligned} -m^{\eta}(x)\frac{d}{dx}m^{\epsilon}(x)\frac{d}{dx}m^{\rho}(x) &= -m^{\eta}(x)\frac{d}{dx}\left[\rho m^{\epsilon+\rho-1}(x)m'(x) + m^{\epsilon+\rho}(x)\frac{d}{dx}\right] \\ &= -\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} - (2\rho+\epsilon)\frac{m'(x)}{m^2(x)}\frac{d}{dx} - \rho\frac{m''(x)}{m^2(x)} \\ &\quad -\rho(\rho+\epsilon-1)\frac{m'^2(x)}{m^3(x)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

et il en est de même pour le second terme, i.e.

$$\begin{aligned} -m^{\rho}(x)\frac{d}{dx}m^{\epsilon}(x)\frac{d}{dx}m^{\eta}(x) &= -\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} - (2\eta+\epsilon)\frac{m'(x)}{m^2(x)}\frac{d}{dx} - \eta\frac{m''(x)}{m^2(x)} \\ &\quad -\eta(\eta+\epsilon-1)\frac{m'^2(x)}{m^3(x)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En insérant (3.3) et (3.4) dans (3.2), et en utilisant la contrainte, on trouve :

$$H_{\mathrm{vR}} = -\frac{1}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'(x)}{2m^2(x)}\frac{d}{dx} + \frac{1+\epsilon}{4}\frac{m''(x)}{m^2(x)} - \frac{1+\epsilon+\eta(1+\epsilon+\eta)}{2}\frac{m'^2(x)}{m^3(x)} + V(x). \tag{3.5}$$

Introduisons à présent la fonction d'onde suivante :

$$\Psi(x) = m(x)\psi(x) \equiv 2m(x)\left(\frac{\xi(x)}{\xi'(x)}\right)^2\phi(x), \tag{3.6}$$

telle que l'action de l'hamiltonien (3.5) sur la fonction d'onde $\phi(x)$ donne l'expression différentielle suivante :

$$\begin{aligned} H_{vR} &= -\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\xi}{\xi'}\left[4 + \frac{m'\xi}{m\xi'} - \frac{4\xi\xi''}{\xi'^2}\right]\frac{d}{dx} + 2\frac{\xi}{\xi'^2}\left[3\xi'' + \frac{\xi\xi'''}{\xi'} - \frac{3\xi\xi''^2}{\xi'^2}\right] \\ &\quad + \frac{m'}{m}\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2\left[2\frac{\xi\xi''-\xi'^2}{\xi\xi'} + \frac{\epsilon-1}{2}\frac{m''}{m'} - (1+\eta)(1+\epsilon)\frac{m'}{m}\right] \\ &\quad -2 + 2m\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2 V(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2 L'opérateur résolvant de GREEN et son extension par l'algèbre $\mathfrak{so}(2,1)$

L'algèbre de LIE non-compacte $\mathfrak{so}(2,1)$ se compose de trois (3) générateurs $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$. Pour deux opérateurs A et B satisfaisant la loi de commutation $[A,B]=1$, on définit les générateurs comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0 &= \frac{1}{4}\left[-A^2+\left(4C+\frac{3}{4}\right)B^{-2}+B^2\right],\\
\mathcal{J}_1 &= \frac{1}{4}\left[-A^2+\left(4C+\frac{3}{4}\right)B^{-2}-B^2\right],\\
\mathcal{J}_2 &= -\frac{i}{4}(2BA+1),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

où, par définition, C est l'opérateur de CASIMIR (voir le chapitre 2) commutant avec tous les générateurs $\mathcal{J}_k$, $(k=0,1,2)$, et vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[\mathcal{J}_0,\mathcal{J}_1]=i\mathcal{J}_2, \qquad [\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_0]=i\mathcal{J}_1, \qquad [\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2]=-i\mathcal{J}_0, \tag{3.9}$$

Considérons à présent que A et B peuvent s'exprimer en fonction de x comme suit :

$$A=\frac{d}{dx}+K(x), \qquad B=x, \tag{3.10}$$

et imposons la transformation ponctuelle canonique suivante $x\equiv\sqrt{\xi(u)}$, les opérateurs A et B peuvent se mettre sous la forme :

$$\hat{A}=\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)', \quad \hat{B}=\sqrt{\xi(u)}, \tag{3.11}$$

où $[\hat{A},\hat{B}]=1$, la transformation ponctuelle introduite permet alors de ré-écrire les générateurs (3.8) en fonction de $\xi(u)$. Ce faisant, commençons d'abord par calculer les opérateurs

$\hat{A}^2$ et $\hat{B}^2$. Un calcul direct nous conduit à :

$$\begin{aligned}
\hat{A}^2 &= \left[\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\right]\left[\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\right]\\
&= \left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}\right)\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}\right)-\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}\right)+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\right]^2\\
&= \frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\frac{d}{du}+\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)^2\left(\frac{d}{du}\right)^2-\frac{\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)''\\
&\quad -\frac{\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\frac{d}{du}-\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\frac{\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\frac{d}{du}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{2\sqrt{\xi(u)}}{\xi'(u)}\right)'\right]^2\\
&= 4\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}+2\frac{\xi(u)\xi'''(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{1}{\xi(u)}-3\frac{\xi(u)\xi''^2(u)}{\xi'^4(u)}.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

et

$$\hat{B}^2=\xi(u), \qquad \hat{B}^{-2}=\frac{1}{\xi(u)}, \tag{3.13}$$

et en insérant (3.12) et (3.13) dans les générateurs (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0 &= -\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}-\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}+\frac{C}{\xi(u)}+\frac{\xi(u)}{4},\\
\mathcal{J}_1 &= -\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}-\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}+\frac{C}{\xi(u)}-\frac{\xi(u)}{4},\\
\mathcal{J}_2 &= -i\frac{\xi(u)}{\xi'(u)}\frac{d}{du}-\frac{i}{2}\frac{\xi''(u)\xi(u)}{\xi'^2(u)}.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Introduisons la fonction de GREEN à une dimension. Elle décrit la dynamique du système donné par l'hamiltonien dans l'espace dual et satisfait l'équation non homogène suivante $(\mathcal{H}-E)G(u,\bar{u})=\delta(u-\bar{u})$. Conformément à (3.14), la résolvante de GREEN, notée ici $\Omega(E)$, à l'opérateur $\mathcal{H}-E$ s'exprime par :

$$\Omega(E)=\frac{\xi(u)}{\xi'(u)^2}(\mathcal{H}-E)\equiv\left(q_0+\sum_{k=0}^{2}p_k\mathcal{J}_k\right)P(u,\bar{u}), \tag{3.15}$$

où $P(u,\bar{u})=P_1(u)P_2(\bar{u})$ est appelée la *fonction d'échelle à deux points* et q_0 et p_k sont des paramètres à déterminer. Pour un problème assujetti à une masse dépendante de la position, la résolvante $\Omega(E)$ devient :

$$\Omega(E) \quad\rightarrow\quad \bar{\Omega}(E)=P(u,\bar{u})\left(q_0+\sum_{k=0}^{2}p_k\mathcal{T}_k\right)\equiv P(u,\bar{u})\frac{\xi(u)}{\xi'(u)^2}(\tilde{\mathcal{H}}-E), \tag{3.16}$$

où les $\mathcal{T}_k,\ (k=0,1,2)$, sont des nouveaux générateurs qu'on peut les déduire de (3.15). En effet, on trouve que

$$\begin{aligned}
\Omega(E)\psi(u) &= \left(q_0+\sum_{k=0}^{2}p_k\mathcal{J}_k\right)P(u,\bar{u})\psi(u),\\
&= q_0P(u,\bar{u})\psi(u)+p_0\Bigg[-\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)\\
&\quad +\frac{C}{\xi(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)+\frac{\xi(u)}{4}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)\Bigg]\\
&\quad +p_1\Bigg[-\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)-\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)\\
&\quad +\frac{C}{\xi(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)-\frac{\xi(u)}{4}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)\Bigg]\\
&\quad +p_2\Bigg[-i\frac{\xi(u)}{\xi'(u)}\frac{d}{du}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)-\frac{i}{2}\frac{\xi''(u)\xi(u)}{\xi'^2(u)}\Big(P(u,\bar{u})\psi(u)\Big)\Bigg],\\
&= P(u,\bar{u})\Bigg[q_0+p_0\bigg(-\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}-2\frac{\xi(u)P'(u)}{\xi'^2(u)P(u)}\frac{d}{du}-\frac{\xi(u)P''(u)}{\xi'^2(u)P(u)}\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}+\frac{C}{\xi(u)}+\frac{\xi(u)}{4}\bigg)+p_1\bigg(-\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}\\
&\quad -2\frac{\xi(u)P'(u)}{\xi'^2(u)P(u)}\frac{d}{du}-\frac{\xi(u)P''(u)}{\xi'^2(u)P(u)}-\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}+\frac{C}{\xi(u)}+\frac{\xi(u)}{4}\bigg)\\
&\quad +p_2\bigg(-i\frac{\xi(u)P'(u)}{\xi'(u)P(u)}-i\frac{\xi(u)}{\xi'(u)}\frac{d}{du}-\frac{i}{2}\frac{\xi''(u)\xi(u)}{\xi'^2(u)}\bigg)\Bigg],
\end{aligned}\tag{3.17}$$

et en identifiant (3.17) à (3.16), on obtient les nouveaux générateurs $\mathcal{T}_k,\ (k=0,1,2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= -\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}-2\frac{\xi(u)P'(u)}{\xi'^2(u)P(u)}\frac{d}{du}-\frac{\xi(u)P''(u)}{\xi'^2(u)P(u)}-\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}\\
&\quad +\frac{C}{\xi(u)}+\frac{\xi(u)}{4},\\
\mathcal{T}_1 &= -\frac{\xi(u)}{\xi'^2(u)}\frac{d^2}{du^2}-2\frac{\xi(u)P'(u)}{\xi'^2(u)P(u)}\frac{d}{du}-\frac{\xi(u)P''(u)}{\xi'^2(u)P(u)}-\frac{1}{2}\frac{\xi'''(u)\xi(u)}{\xi'^3(u)}+\frac{3}{4}\frac{\xi''^2(u)\xi(u)}{\xi'^4(u)}\\
&\quad +\frac{C}{\xi(u)}-\frac{\xi(u)}{4},\\
\mathcal{T}_2 &= -i\frac{\xi(u)}{\xi'(u)}\frac{d}{du}-i\frac{\xi(u)P'(u)}{\xi'(u)P(u)}-\frac{i}{2}\frac{\xi''(u)\xi(u)}{\xi'^2(u)}.
\end{aligned}\tag{3.18}$$

L'introduction de la fonction d'onde *test* exprimée comme suit :

$$\psi(u)=2\left(\frac{\xi(u)}{\xi'(u)}\right)^2\phi(u),\tag{3.19}$$

conduit (après un long calcul) la résolvante de GREEN (3.16) à se transformer en :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(E) &= P(u,\bar{u})\frac{\xi}{\xi'^2}\Bigg[-2(p_0+p_1)\frac{\xi^2}{\xi'^2}\frac{d^2}{du^2}-\frac{\xi}{\xi'}\Bigg\{4(p_0+p_1)\left(2+\frac{\xi P'}{\xi' P}-2\frac{\xi''\xi}{\xi'^2}\right)+2ip_2\xi\Bigg\}\frac{d}{du}\\ &\quad -(p_0+p_1)\Bigg(8\frac{\xi P'}{\xi' P}+4-2c+2\frac{\xi^2 P''}{\xi'^2 P}-8\frac{\xi^2\xi'' P'}{\xi'^3 P}-12\frac{\xi\xi''}{\xi'^2}+\frac{21}{2}\frac{\xi^2\xi''^2}{\xi'^4}-3\frac{\xi^2\xi'''}{\xi'^3}\Bigg)\\ &\quad +2q_0\xi+\frac{(p_0-p_1)}{2}\xi^2-2ip_2\left(\frac{\xi^2 P'}{\xi' P}+2\xi-\frac{3}{2}\frac{\xi^2\xi''}{\xi'^2}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.20}$$

En imposant les contraintes suivantes sur les paramètres p_i : $p_0+p_1=p_+=\alpha/2, p_0-p_1=p_-=\beta/2$ et $p_2=0$, la résolvante donnée dans (3.20) s'exprime par :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(E) &= P(u,\bar{u})\frac{\xi}{\xi'^2}(\tilde{\mathcal{H}}-E)\\ &= P(u,\bar{u})\frac{\xi}{\xi'^2}\Bigg[-\alpha\frac{\xi^2}{\xi'^2}\frac{d^2}{du^2}-\alpha\frac{\xi}{\xi'}\left(4+2\frac{\xi P'}{\xi' P}-4\frac{\xi''\xi}{\xi'^2}\right)\frac{d}{du}+2q_0\xi+\frac{\beta}{4}\xi^2-4\alpha\frac{\xi P'}{\xi' P}\\ &\quad -2\alpha+\alpha c-\alpha\frac{\xi^2 P''}{\xi'^2 P}+4\alpha\frac{\xi^2\xi'' P'}{\xi'^3 P}+6\alpha\frac{\xi\xi''}{\xi'^2}-\frac{21\alpha}{4}\frac{\xi^2\xi''^2}{\xi'^4}+\frac{3\alpha}{2}\frac{\xi^2\xi'''}{\xi'^3}\Bigg],\end{aligned} \tag{3.21}$$

et représentant un opérateur différentiel du second ordre en u.

3.3 Génération des potentiels dégénérés de NATANZON

Nous avons déduit l'expression différentielle de l'hamiltonien de VON ROOS et on a redéfini l'opérateur résolvant de GREEN. Il reste juste à combiner ces deux résultats pour générer la classe de potentiels recherchée.

Pour ce faire, nous allons comparer l'hamiltonien H_{vR} et la résolvante $\bar{\Omega}(E)$. Ce faisant, on pose (par commodité) le choix suivant : $P(u,\bar{u})=\sqrt{m(u)m(\bar{u})}$ et $\alpha=1$. La substitution dans (3.21) conduit à exprimer l'hamiltonien :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= -\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2\frac{d^2}{du^2}-\frac{\xi}{\xi'}\left(4+\frac{\xi m'}{\xi' m}-4\frac{\xi''\xi}{\xi'^2}\right)\frac{d}{du}+2q_0\xi+\frac{\beta}{4}\xi^2-2\frac{\xi m'}{\xi' m}-2+c-\frac{1}{2}\frac{\xi^2 m''}{\xi'^2 m}\\ &\quad +\frac{1}{4}\frac{\xi^2 m'^2}{\xi'^2 m^2}+2\frac{\xi^2\xi'' m'}{\xi'^3 m}+6\frac{\xi\xi''}{\xi'^2}-\frac{21}{4}\frac{\xi^2\xi''^2}{\xi'^4}+\frac{3}{2}\frac{\xi^2\xi'''}{\xi'^3}+E\\ &= -\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2\frac{d^2}{du^2}-\frac{\xi}{\xi'}\left(4+2\frac{\xi m'}{\xi' m}-4\frac{\xi''\xi}{\xi'^2}\right)\frac{d}{du}+2q_0\xi+\frac{\beta}{4}\xi^2-2\frac{\xi m'}{\xi' m}-2+c-\frac{1}{2}\frac{\xi^2 m''}{\xi'^2 m}\\ &\quad +\frac{1}{4}\frac{\xi^2 m'^2}{\xi'^2 m^2}+2\frac{\xi^2\xi'' m'}{\xi'^3 m}+\frac{3}{4}\frac{\xi^2\xi''^2}{\xi'^4}+\frac{1}{2}\frac{\xi^2\xi'''}{\xi'^3}+2\frac{\xi}{\xi'^2}\left[3\xi''-3\frac{\xi\xi''^2}{\xi'^2}+\frac{\xi\xi'''}{\xi'}\right]+E.\end{aligned} \tag{3.22}$$

En outre, et selon (3.7) et (3.22), les termes différentielles sont égaux, on conclut donc que $\tilde{\mathcal{H}}$ et H_{vR} sont équivalents et identiques, i.e.

$$\tilde{\mathcal{H}} \equiv H_{\mathrm{vR}}, \tag{3.23}$$

ce qui nous conduit, par identification, à déduire l'expression de $V(x) - E$, soit

$$V[\xi(u)] - E = \frac{1}{2m(u)} \left(\frac{\xi'(u)}{\xi(u)} \right)^2 \left[2q_0\xi(u) + \frac{\beta}{4}\xi^2(u) + c \right] - \frac{1}{4m(u)}\{\xi(u), u\}_S, \quad (3.24)$$

où $\{\xi(u), u\}_S$ désigne la dérivée schwartzienne par rapport à la variable u et elle est donnée par :

$$\{\xi(u), u\}_S = \frac{3}{2}\frac{\xi''^2(u)}{\xi'^2(u)} + \frac{\xi'''(u)}{\xi'(u)}, \quad (3.25)$$

et le potentiel effectif $V[\xi(u)]$ s'exprime en terme de $V(u)$ comme suit :

$$V[\xi(u)] = V(u) + \nu_m^{\eta,\epsilon}(u), \quad (3.26)$$

tel que le potentiel massique $\nu_m^{\eta,\epsilon}(u)$ dépend uniquement de la masse et des paramètres d'ambiguité. Il s'exprime par :

$$\nu_m^{\eta,\epsilon}(u) = \left[(1 + 2\eta)^2 + 4\epsilon(1 + \eta) \right] \frac{m'^2(u)}{8m^3(u)} - \frac{\epsilon}{4}\frac{m''(u)}{m^2(u)}. \quad (3.27)$$

On constate que les deux membres de (3.24) contiennent des termes constants représentant l'énergie E. Ainsi, il devient évident que le terme qui correspond à l'énergie doit dépendre explicitement des paramètres β, q_0 et c. Pour ce faire, nous introduisons la fonction auxiliaire, noté $\mathcal{G}[\xi(u)]$, et est définie pour l'équation différentielle

$$\mathcal{G}[\xi(u)] \equiv \frac{\xi'^2(u)}{2m(u)} = \frac{4\xi^2(u)}{\lambda_2\xi^2(u) + \lambda_1\xi(u) + \lambda_0}, \quad (3.28)$$

où λ_i, avec $(i = 0, 1, 2)$, sont des paramètres arbitraires. L'introduction de la fonction auxiliaire permet de réécrire (3.24) sous la forme :

$$V[\xi(u)] - E \;=\; \frac{8q_0\xi(u) + \beta\xi^2(u) + 4c}{\lambda_2\xi^2(u) + \lambda_1\xi(u) + \lambda_0} - \frac{1}{4m(u)}\{\xi(u), u\}_S. \quad (3.29)$$

On suppose que les paramètres β, q_0 et c s'expriment par :

$$\beta = a^2, \quad q_0 = -\frac{a}{2}\left(\frac{b}{2} + n \right), \quad c = \frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} - 1 \right). \quad (3.30)$$

et en insérant (3.30) dans (3.29), cette dernière devient :

$$V[\xi(u)] - E \;=\; \frac{a^2\xi^2 - 2a\,(b + 2n)\,\xi + b\,(b - 2)}{\lambda_2\xi^2(u) + \lambda_1\xi(u) + \lambda_0} - \frac{1}{4m(u)}\{\xi(u), u\}_S. \quad (3.31)$$

Afin d'éliminer E de cette dernière expression, nous supposons que les coefficients dans le numérateur sont linéairement dépendants de ceux du dénominateur par rapport à E. Ce raisonnement est principalement dû au fait que les fonctions $\xi(u)$ et $\mathcal{G}[\xi(u)]$ sont indépendantes de E. De (3.31), un calcul simple nous conduit à l'expression suivante :

$$V[\xi(u)] = \frac{\sigma_\beta \xi^2(u) + \sigma_{q_0}\xi(u) + \sigma_c}{R[\xi(u)]} - \frac{1}{4m(u)}\{\xi(u), u\}_S, \tag{3.32}$$

où les différents paramètres dans (3.32) sont définis par

$$\sigma_\beta = a^2 + \lambda_2 E, \tag{3.33}$$

$$\sigma_{q_0} = \lambda_1 E - 2a\,(b + 2n)\,, \tag{3.34}$$

$$\sigma_c = \lambda_0 E + b\,(b-2)\,, \tag{3.35}$$

$$R[\xi(u)] = \lambda_2\xi^2(u) + \lambda_1\xi(u) + \lambda_0. \tag{3.36}$$

En insérant (3.36) dans (3.28), on obtient une équation différentielle à variable séparée,

$$\frac{\xi'^2(u)}{2m(u)} = \frac{4\xi^2(u)}{R[\xi(u)]}, \tag{3.37}$$

et en différentiant cette dernière par rapport à u, on trouve :

$$\frac{\xi''^2(u)}{\xi^2(u)} = -\frac{64m^2(u)\xi^3(u)\dot{R}[\xi(u)]}{R^3[\xi(u)]\xi'^2(u)} + \frac{16m^2(u)\xi^4(u)\dot{R}^2[\xi(u)]}{R^4[\xi(u)]\xi'^2(u)} + \frac{64m^2(u)\xi^2(u)}{R^2[\xi(u)]\xi'^2(u)} - \frac{m'^2(u)}{4m^2(u)} + \frac{m'(u)\xi''(u)}{m(u)\xi'(u)}. \tag{3.38}$$

où le point " $\cdot$ " désigne la différentielle par rapport à la fonction-variable ξ. D'un autre côté, l'évaluation de la seconde dérivée de (3.37) mène à l'expression :

$$\frac{\xi'''(u)}{\xi(u)} = -\frac{4m^2(u)\xi^2(u)\ddot{R}[\xi(u)]}{R^2[\xi(u)]} + \frac{8m(u)\xi(u)\xi''(u)}{R[\xi(u)]\xi'^2(u)} + \frac{4m(u)\xi^2(u)\xi''(u)\dot{R}[\xi(u)]}{R^2[\xi(u)]\xi'^2(u)} + \frac{8m(u)}{R[\xi(u)]} - \frac{16m(u)\xi(u)\dot{R}[\xi(u)]}{R^2[\xi(u)]} + \frac{8m(u)\xi^2(u)\dot{R}^2[\xi(u)]}{R^3[\xi(u)]} - \frac{m'^2(u)}{m^2(u)} + \frac{m''(u)}{2m(u)} + \frac{2m'(u)\xi''(u)}{m(u)\xi'(u)} - \frac{\xi''^2(u)}{\xi^2(u)}. \tag{3.39}$$

On voit bien que les expressions déduites dans (3.38) et (3.39) constituent l'expression de la dérivée schwarzienne établie dans (3.25), soit après simplification

$$\frac{1}{4m(u)}\{\xi(u), u\}_S = -\frac{1}{R(\xi)} - \frac{\xi^2\ddot{R}(\xi) + \xi\dot{R}(\xi)}{R^2(\xi)} + \frac{5\xi^2}{4}\frac{\dot{R}^2(\xi)}{R^3(\xi)} - U_m(u), \tag{3.40}$$

où $U_m(u)$ s'exprime sous la forme :

$$U_m(u) = \frac{5}{32}\frac{m'^2(u)}{m^3(u)} - \frac{1}{8}\frac{m''(u)}{m^2(u)}. \tag{3.41}$$

En insérant (3.40) dans (3.32), on trouve l'expression analytique du potentiel effectif assujetti à notre problème, soit

$$V[\xi(u)] = \frac{\sigma_\beta \xi^2(u) + \sigma_{q_0}\xi(u) + \sigma_c + 1}{R[\xi(u)]} + \frac{\xi^2 \ddot{R} + \xi \dot{R}}{R^2} - \frac{5\xi^2}{4}\frac{\dot{R}^2(\xi)}{R^3(\xi)}, \tag{3.42}$$

où le potentiel effectif total est représenté par la somme des deux potentiels effectifs, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m^{(\eta,\epsilon)}(u) &= \nu_m^{\eta,\epsilon}(u) + U_m(u), \\ &= \frac{4(1+2\eta)^2 + 16\epsilon(1+\eta) + 5}{32}\frac{m'^2(u)}{m^3(u)} - \frac{2\epsilon+1}{8}\frac{m''(u)}{m^2(u)}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

et en tenant compte de l'expression de $R[\xi(u)]$ dans (3.36), le potentiel prend la forme suivante :

$$V[\xi(u)] = \frac{\sigma_\beta \xi^2(u) + \sigma_{q_0}\xi(u) + \sigma_c + 1}{R[\xi(u)]} + \frac{4\lambda_2\xi^2(u) + \lambda_1\xi(u)}{R^2} - \frac{5\xi^2}{4}\frac{(2\lambda_2\xi(u) + \lambda_1)^2}{R^3(\xi)}. \tag{3.44}$$

Finalement, pour obtenir la forme générale connue des potentiels dégénérés de NATANZON, on pose la symbolique suivante $\Delta = \lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2$, du coup (3.44) devient :

$$V[\xi(u)] = \frac{\sigma_\beta \xi^2(u) + \sigma_{q_0}\xi(u) + \sigma_c + 1}{R[\xi(u)]} + \frac{\lambda_1\xi(u) - \lambda_2\xi^2(u)}{R^2} - \frac{5\xi^2}{4}\frac{\Delta}{R^3(\xi)}. \tag{3.45}$$

La détermination de ce potentiel dépend explicitement de six (6) paramètres sans dimension, à savoir $\sigma_\beta, \sigma_{q_0}, \sigma_c, \lambda_2, \lambda_1$, et λ_0. Le choix approprié de ces différents paramètres contribue à déduire la forme du potentiel de l'oscillateur harmonique radial, de celui de COULOMB-KEPLER-BOHR, et enfin de MORSE, puisque ces derniers constituent les seuls potentiels composant la famille des potentiels dégénérés de NATANZON.

3.4 Le spectre d'énergie des potentiels de NATANZON

Intéressons-nous à présent à la déduction de l'expression du spectre d'énergie associé à cette classe de potentiel. Ce faisant, il suffit de combiner les coefficients déduits dans les équations (3.33)-(3.35).

En effet, de (3.34), on tire :

$$\sigma_{q_0} = \lambda_1 E - 2a(b+2n) \qquad \Rightarrow \qquad 2n+1 = \frac{\lambda_1 E - \sigma_{q_0}}{2a} - b + 1, \tag{3.46}$$

et de (3.33) et (3.35), on déduit les expressions des paramètres a et b, soit

$$a = \sqrt{\sigma_\beta - \lambda_2 E}, \qquad b = 1 + \sqrt{1 + (\sigma_c - \lambda_0 E)}. \tag{3.47}$$

Enfin, en insérant les expressions de a et b dans (3.46), nous obtenons l'expression du spectre d'énergie sous sa forme compacte, i.e.

$$2n+1 = \frac{\lambda_1 E_n - \sigma_{q_0}}{2\sqrt{\sigma_\beta - \lambda_2 E_n}} - \sqrt{1 + \sigma_c - \lambda_0 E_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.48}$$

3.5 Fonctions d'onde-Produit scalaire

Dans cette section, nous nous intéressons à la détermination de l'expression des fonctions d'onde d'un système quantique doté d'une masse dépendante de la position.

Nous verrons par la suite des développements que les fonctions d'onde appartenant à l'espace de HILBERT ne préservent pas le produit scalaire ordinaire bien connu des problèmes associés à la mécanique quantique. Due au problème effectif, nous démontrons que les fonctions d'onde sont susceptibles à un autre type de produit scalaire (plus général) muni d'une fonction poids, $W(x)$ à déterminer, pour qu'elles soient normalisables.

A cette fin, considérons l'équation de SCHRÖDINGER dépendante du temps pour les fonctions $\psi(u,t)$ et $\psi^*(u,t)$, et associée au l'hamiltonien de VON ROOS, données respectivement, par :

$$i\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi(u,t) + V_{\text{eff}}(u)\psi(u,t), \tag{3.49}$$

$$-i\frac{\partial\psi^*(u,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi^*(u,t) + V_{\text{eff}}(u)\psi^*(u,t), \tag{3.50}$$

où $V_{\text{eff}}(u) \in \mathbb{R}$ et $\hbar = 1$. On considère que $\psi_1(u,t)$ et $\psi_2^*(u,t)$ sont des solutions de (3.49) et (3.50), respectivement. En multipliant (3.49) à gauche par $W(u)\psi_2^*(u,t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} iW(u)\psi_2^*(u,t)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial t} &= -W(u)\psi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi_1(u,t)\right] \\ &\quad +V_{\text{eff}}(u)W(u)\psi_2^*(u,t)\psi_1(u,t), \end{aligned} \tag{3.51}$$

et il en est de même en multipliant (3.50) par $W(u)\psi_1(u,t)$, soit

$$\begin{aligned} -iW(u)\psi_1(u,t)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial t} &= -W(u)\psi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi_2^*(u,t)\right] \\ &\quad +V_{\text{eff}}(u)W(u)\psi_1(u,t)\psi_2^*(u,t), \end{aligned} \tag{3.52}$$

où $W(u)$ représente la fonction poids que nous déterminerons par la suite des calculs. En soustrayant (3.51) de (3.52), on obtient :

$$\begin{aligned} iW(u)\left[\psi_2^*(u,t)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial t} + \psi_1(u,t)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial t}\right] &= -W(u)\psi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi_1(u,t) \\ +W(u)\psi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi_2^*(u,t), \end{aligned} \tag{3.53}$$

tel que le membre de gauche de (3.53) s'écrit comme la différentielle temporelle d'un produit de fonctions, i.e. :

$$iW(u)\psi_2^*(u,t)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial t} + iW(u)\psi_1(u,t)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial t} = i\frac{\partial}{\partial t}\Big[\psi_1(u,t)W(u)\psi_2^*(u,t)\Big], \tag{3.54}$$

et donc (3.53) devient :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Big[\psi_1(u,t)W(u)\psi_2^*(u,t)\Big] &= -W(u)\Big[\psi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi_1(u,t) \\ &\quad -\psi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2m(u)}\frac{\partial}{\partial u}\psi_2^*(u,t)\Big]. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Nous fixons à présent le choix sur la fonction poids introduite ci-dessus, telle que

$$W(u) \equiv \frac{1}{N}\frac{1}{P(u)} = \frac{1}{N}\frac{1}{m(u)}, \tag{3.56}$$

avec $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. En insérant (3.56) dans (3.55), on trouve :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Big[\psi_1(u,t)W(u)\psi_2^*(u,t)\Big] &= -\frac{N}{2}W(u)\Big[\psi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}W(u)\frac{\partial}{\partial u}\psi_1(u,t) \\ &\quad -\psi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}W(u)\frac{\partial}{\partial u}\psi_2^*(u,t)\Big]. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Le premier terme du membre de droite de (3.57) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}W(u)\frac{\partial}{\partial u}\psi_1(u,t) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\psi_2^*(u,t)W(u)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u}\right) - \frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u}W(u)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left\{W(u)\left[\psi_2^*(u,t)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u}\right]\right\} \\ &\quad -W(u)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

et le deuxième terme est alors donné par :

$$\begin{aligned} \psi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}W(u)\frac{\partial}{\partial u}\psi_2^*(u,t) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\psi_1(u,t)W(u)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u}\right) - \frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u}W(u)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left\{W(u)\left[\psi_1(u,t)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u}\right]\right\} \\ &\quad -W(u)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u}\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

En insérant (3.58) et (3.59) dans (3.57), on déduit l'équation :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Big[\psi_1(u,t)W(u)\psi_2^*(u,t)\Big] &= -\frac{N}{2}W(u)\frac{\partial}{\partial u}\Big\{W(u)\Big[\psi_2^*(u,t)\frac{\partial\psi_1(u,t)}{\partial u} \\ &\quad -\psi_1(u,t)\frac{\partial\psi_2^*(u,t)}{\partial u}\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

et qui commence à prendre la forme d'une *équation de continuité* associée aux systèmes du genre PDM. Afin de justifier notre observation, introduisons maintenant la fonction d'onde $\chi_i(u,t),\ (i = 1, 2, \ldots)$:

$$\chi_i(u,t) = \sqrt{W(u)}\psi_i(u,t), \tag{3.61}$$

et susbtituons $\psi_1(u,t)$ et $\psi_2^*(u,t)$ par $\chi_1(u,t)$ et $\chi_2^*(u,t)$, respectivement, dans (3.60), cette dernière prend alors la forme :

$$\begin{aligned} iW(u)\frac{\partial}{\partial t}\left[\chi_1(u,t)\frac{1}{W(u)}\chi_2^*(u,t)\right] &= -\frac{N}{2}W(u)\frac{\partial}{\partial u}\left\{W(u)\left[\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_1(u,t)\right)\right.\right. \\ &\left.\left. -\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_2^*(u,t)\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

où les termes dans le membre de droite s'ajustent pour donner, respectivement, les expressions :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_2^*(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_1(u,t)\right) &= \chi_2^*(u,t)\chi_1(u,t)\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{W(u)}} \\ &+\frac{1}{W(u)}\chi_2^*(u,t)\frac{\partial\chi_1(u,t)}{\partial u}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_1(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_2^*(u,t)\right) &= \chi_1(u,t)\chi_2^*(u,t)\frac{1}{\sqrt{W(u)}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{W(u)}} \\ &+\frac{1}{W(u)}\chi_1(u,t)\frac{\partial\chi_2^*(u,t)}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Finalement, en insérant (3.63) et (3.64) dans (3.62), on déduit :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[\chi_1(u,t)\frac{1}{W(u)}\chi_2^*(u,t)\right] = -\frac{N}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\chi_2^*(u,t)\frac{\partial\chi_1(u,t)}{\partial u} - \chi_1(u,t)\frac{\partial\chi_2^*(u,t)}{\partial u}\right), \tag{3.65}$$

et qui n'est autre que l'équation de continuité des systèmes PDM.

L'intégration de (3.65) par rapport à u nous conduit à déduire une expression conservée par rapport au temps t, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_1(u,t)\frac{1}{W(u)}\chi_2^*(u,t)du = 0, \tag{3.66}$$

puisque (par définition) les fonctions d'onde associées *aux états liés* satisfont les conditions $\chi_1(u,t) \to 0$ et $\chi_2^*(u,t) \to 0$, quand $u \to \pm\infty$. Il devient clair que cette fonction d'onde n'est pas orthonormalisée au sens commun connu de la mécanique quantique, elle est plutôt orthonormalisée moyennant l'inverse d'un *facteur de poids* $1/W(u)$ jouant le rôle d'une *mesure au sens de* LEBESGUE *dans l'espace des fonctions* $\mathcal{F}(\chi_i) \in \mathfrak{H}$.

Par conséquent, (3.66) est concernée par une *nouveau produit scalaire* afin qu'on puisse normaliser les fonctions d'onde, avec une fonction poids $W^{-1}(x)$, à savoir

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle_W \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\chi_1(u,t)\frac{1}{W(u)}\chi_2^*(u,t)du, \tag{3.67}$$

et la mécanique quantique conventionnelle est retrouvée si l'on pose $W(u) = 1$.

Finalement, pour obtenir une forme générale plus étendue que celle connue ordinairement en mécanique quantique, nous posons (pour $N = 1$) les fonctions propres $\psi_i(u)$ sous la forme

$$\psi_i(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{W(u)}}\chi_i(u) = \sqrt{m(u)}\chi_i(u), \tag{3.68}$$

alors, les fonctions d'onde normalisables $\psi_n[\xi(u)]$ sont donc [6, 7, 27] :

$$\begin{aligned} \psi_n[\xi(u)] &\sim \sqrt{\frac{m(u)}{\xi'(u)}}\,\xi^{\frac{b_n}{2}}(u)\,e^{-\xi(u)/2}\ {}_1F_1(-n; b_n; a_n\xi(u)), \\ &= m^{\frac{1}{4}}(u)R^{\frac{1}{4}}(u)\xi^{\frac{b_n-1}{2}}(u)e^{-\xi(u)/2}\ {}_1F_1(-n; b_n; a_n\xi(u)). \end{aligned} \tag{3.69}$$

où ${}_1F_1(.)$ est la fonction hypergéométrique de Gauss et par définition, nous avons obtenu

$$R(u) = \lambda_2\xi^2(u) + \lambda_1\xi(u) + \lambda_0, \qquad b_n = \frac{\lambda_1 E - \sigma_{q_0}}{2\sqrt{\sigma_\beta - \lambda_2 E} - 2n}.$$

3.6 Applications

Il est bien connu que la classe des potentiels dégénérés de Natanzon contient trois (3) potentiels qui sont : (i) potentiel de l'oscillateur harmonique radial, (ii) le potentiel de Coulomb-Kepler-Bohr et (iii) le potentiel de Morse. Nous allons à présent déduire leurs caractéristiques, (i.e. les expressions analytiques des potentiels, leur spectre d'énergie et fonction d'onde) moyennenant un choix convenable des paramètres : σ_β, σ_{q_0}, σ_c et λ_i $(i = 0, 1, 2)$.

1. Potentiel de l'oscillateur harmonique radial. – Pour ce potentiel, on choisit les paramètres comme suit :

$$\begin{aligned} &\sigma_\beta = \frac{1}{4}\omega^2, \quad \sigma_{q_0} = \omega\left(l - \frac{3}{2}\right), \quad \sigma_c = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - 1, \\ &\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.70}$$

La fonction auxiliaire (3.37) donne l'équation différentielle ordinaire du premier ordre :

$$\frac{\xi'^2(u)}{2m(u)} = 4\xi(u) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\xi'(u)}{2\sqrt{\xi(u)}} = \pm\sqrt{2m(u)}, \tag{3.71}$$

et dont la solution est donnée par :

$$\xi(u) = \left[\pm\int^u \sqrt{2m(u')}du'\right]^2, \tag{3.72}$$

telle que l'on pose $r(u) = \pm \int^u \sqrt{2m(u')}du'$. Ainsi, (3.72) devient :

$$\xi(u) = r^2(u). \tag{3.73}$$

En substituant les paramètres (3.70) dans l'expression générale du potentiel de NATANZON déduit dans (3.45), on obtient le potentiel de l'oscillateur harmonique radial :

$$V\left[r(u)\right] = \frac{1}{4}\omega^2 r^2(u) + \frac{l(l+1)}{r^2(u)} + \omega\left(l - \frac{3}{2}\right), \tag{3.74}$$

et concernant son spectre d'énergie, on insère les paramètres (3.70) dans (3.48). Après simplification, on trouve :

$$E_n = 2\omega(n+l). \tag{3.75}$$

Enfin, pour obtenir la fonction d'onde associée à ce potentiel, on tire les expressions de $R(u)$ et b_n à partir de (3.34) et (3.36),

$$\begin{aligned} R(u) &= \xi(u), \\ b_n &= l + \frac{3}{2}, \end{aligned} \tag{3.76}$$

et en insérant (3.76) dans (3.69), on déduit la fonction d'onde correspondante :

$$\psi_n[\xi(u)] = m^{\frac{1}{4}}(u)\xi^{\frac{l+1}{2}}(u)e^{-\xi(u)/2}\ {}_1F_1(-n; b_n; a_n\xi(u)). \tag{3.77}$$

2. Potentiel de Coulomb-Kepler-Bohr. – Ce potentiel est obtenu par le choix convenable des paramètres suivants :

$$\begin{aligned} &\sigma_\beta = 0, && \sigma_{q_0} = -2e^2, && \sigma_c = (2l+1)^2 - 1, \\ &\lambda_2 = 1, && \lambda_1 = 0, && \lambda_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.78}$$

De (3.37), l'équation différentielle qui satisfait la fonction auxiliaire est :

$$\frac{\xi'^2(u)}{2m(u)} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\xi'(u)}{2} = \pm\sqrt{2m(u)}, \tag{3.79}$$

dont la solution est :

$$\xi(u) = \pm 2\int^u \sqrt{2m(u')}du' = 2r(u). \tag{3.80}$$

En insérant (3.78) et (3.80) dans (3.45), on obtient :

$$V\left[r(u)\right] = \frac{-e^2}{r(u)} + \frac{l(l+1)}{2r^2(u)}, \tag{3.81}$$

et pour le spectre d'énergie associé, en substituant (3.78) dans (3.48), on trouve :

$$E_n = -\frac{e^4}{4(n+l+1)^2}. \tag{3.82}$$

La fonction d'onde associée au potentiel obtenu s'exprime par :

$$\psi_n[\xi(u)] = m^{\frac{1}{4}}(u)\xi^{l+1}(u)e^{-\xi(u)/2}\ {}_1F_1(-n; b_n; a_n\xi(u)). \tag{3.83}$$

3. Potentiel de Morse. – Ce potentiel est généré par le choix des paramètres suivants :

$$\begin{aligned} &\sigma_\beta = \frac{4B^2}{\alpha^2}, \qquad \sigma_{q_0} = \frac{4\alpha B(K+1)}{\alpha}, \qquad \sigma_c = -1, \\ &\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_0 = \frac{4}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

De (3.37), on tire l'équation différentielle associée à la fonction auxiliaire, soit

$$\frac{\xi'^2(u)}{2m(u)} = \alpha^2\xi^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\xi'(u)}{\xi(u)} = \pm\alpha\sqrt{2m(u)}, \tag{3.85}$$

et dont la solution de (3.85) est donnée par :

$$\xi(u) = \exp\left[\pm\alpha\int^u \sqrt{2m(u')}du'\right] = e^{-\alpha r(u)}. \tag{3.86}$$

En insérant (3.84) et (3.86) dans (3.45), nous obtenons le potentiel de Morse :

$$V[r(u)] = B^2 e^{-2\alpha r} + \alpha^2 B(K+1)e^{-\alpha r}. \tag{3.87}$$

et dont le spectre d'énergie associé est donné par :

$$E_n = -\frac{1}{4}\alpha^2(\alpha K + 2n + \alpha + 1)^2. \tag{3.88}$$

Enfin, la fonction d'onde associée a ce potentiel s'écrit sous la forme suivante :

$$\psi_n[\xi(u)] = m^{\frac{1}{4}}(u)\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\xi^{[-\alpha(k+1)-2n-1]/2}e^{-\xi(u)/2}\ {}_1F_1(-n; b_n; a_n\xi(u)). \tag{3.89}$$

Conclusion Générale

Dans ce mémoire de master, nous avons proposé d'étendre aussi large que possible l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$, dont l'unique but est de générer les potentiels hypergéométriques dégénérés de Natanzon, leur spectre en énergie, ainsi que leurs fonctions d'onde correspondantes dans le contexte d'un système physique quantique doté d'une masse dépendante de la position. Nous avons vu, au fur et à mesure des développement des idées, que cette procédure est réalisable en reparamétrisant (scaling) l'opérateur résolvant de la fonction de Green, où ce dernier est lié à l'équation de Schrödinger pour un systéme quantique du genre PDM. Cette construction s'est faite essentiellement autour de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$, où avec l'aide de la résolvante de Green, nous avons réussi à comparer les deux opérateurs (i.e., de Schrödinger et de Green) dans le cadre d'un hamiltonien de von Roos afin de déduire l'expression de $V(x)-E$.

L'introduction d'une fonction auxiliaire $\xi(u)$ nous a permis de simplifier davantage l'expression obtenue et de mettre $\xi(u)$ sous la forme d'une équation différentielle à variable séparable difficilement soluble. Les expressions analytiques des potentiels dégénérés de Natanzon dépendant de six paramètres ajustables, leur spectre d'énergie (sous sa forme compacte), ainsi que leurs fonctions d'onde correspondantes ont été déduites. Nous avons montré que ces fonctions d'onde ne sont pas normalisables au sens conventionnel et connu de la mécanique quantique. En effet, à cause de la dépendance spatiale de la masse, nous avons établi que ces fonctions d'onde obéissent à un nouveau produit scalaire, et que les fonctions d'onde sont normalisables moyennant une fonction poids $W(x)$ qui permet de converger les intégrales. Afin de justifier nos résultas, nous avons appliqué notre méthode aux trois potentiels composant la classe dégénéré de Natanzon.

De part ce travail, nous voulions répondre à une question : **l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ est-elle une excellente algèbre génératrice de la classe des potentiels dégénérés de Natanzon ?** Nous pensons que nous pouvons répondre à cette question par l'affirmative. Probablement la seule difficulté que nous avons eu dans ce modèle (et qui fait quelque part son défaut) concerne le choix des différents paramètres $\sigma_\beta, \sigma_{q_0}, \sigma_c$ et λ_i $(i=0,1,2)$, car il y a pas de contraintes préétablies dans notre modèle qui permettent de fixer définitivement une valeur à ces paramètres.

Références

[1] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructure*. Editions de Physique, Les Ulis (1988).

[2] C. Weisbach, B. Vinter, *Quantum Semiconductor Heterostructures.* Academic Press, New York (1993).

[3] E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad. A **46** (1940) 9,
E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad. A **47** (1941) 53.

[4] L. Infeld, T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 21.

[5] A. O. Barut, R. Raczka, *Group Representation and Applications*. PWN, (1970),
A. O. Barut, *Dynamical groups and generalized symmetries in quantum theory.* Christchurch, New Zealand (1972).

[6] G. A. Natanzon, Teor. Mat. Fiz. **38** (1979) 146.

[7] G. Lévai, J. Phys. A : Math. Gen.**27** (1994) 3809.

[8] J. N. Ginocchio, Ann. Phys. **152** (1983) 203; **159** (1985) 467,
P. Cordero, S. Salamo, Found. Phys. **23** (1993) 675.

[9] Y. Alhassid, F. Gürsey, F. Iachello, Ann. Phys. **148** (1983) 346.

[10] S. Cruz y Cruz, O. Rosas-Ortiz, SIGMA, **9** (2013) 004.

[11] O. Rosas-Ortiz, In Geometric Methods in Physics XXXVIII, (2020) 351.

[12] S. Cruz y Cruz, O. Rosas-Ortiz, J. Phys. A : Math. Theor. **42** (2009) 185205.

[13] J. S. Borges, L. N. Epele, H. Fanchiotti et al., Phys. Rev. A **38** (1988) 3101.

[14] C. Stuckens, D. H. Kobe, Phys. Rev. A **34** (1986) 3565.

[15] Z. E. Musielak, J. Phys. A : Math. Theor. **41** (2008) 055205.

[16] J. F. Carinena, M. F. Ranada, M. Santander, J. Phys. A : Math. Theor. **45** (2012) 265303.

[17] O. Ragnisco, D. Riglioni, SIGMA **6** (2010) 097.

[18] K. B. Wolf, *Geometric optics on phase space*, Springer-Verlag, Berlin, (2004).

[19] G. Bastard, Phys. Rev. B **24** (1981) 5693.

[20] A. Sommerfeld, *Lectures on theoretical physics, Vol. I.* Academic Press, New York, (1994).

[21] J. Flores, G. Solovey, S. Gil, Amer. J. Phys. **71** (2003) 721.

[22] A. Trabelsi, F. Madouri, A. Merdaci, A. Almatar, arXiv preprint arXiv :1302.3963.

[23] J. S. Milne, *Lie Algebras, Algebraic Groups, and Lie Groups*. (2013).

[24] P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations : An Introduction.* (2021).

[25] S.-A. Yahiaoui. Thèse de doctorat-physique théorique, Université Saâd Dahlab-Blida 1, (2009).

[26] J. Wu, Y. Alhassid, J. Math. Phys. **3** (1990) 557.

[27] S.-A. Yahiaoui, M. Bentaiba,J.Theor. Phys. **48** (2009) 315.