UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

SOUS-QUORUM-COLORATION DE QUELQUES CLASSES D'ARBRES

Par

Youcef BELKINA et **Amar BENNADJI**

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI	Professeur, U. de Blida	Président
S. KERDJOUDJ	Maître de Conférences, U. de Blida	Examinatrice
R. SAHBI	Maître de Conférences, ESSA. Alger	Encadrant

Soutenu à Blida , le 29 Septembre 2021

RESUME

Une partition $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de l'ensemble des sommets V d'un graphe G en k classes V_i, avec $i \in \{1, ..., k\}$, est une *quorum-coloration* de G si pour tout sommet $v \in V$, au moins la moitié des sommets du voisinage fermé $N_G[v]$ de v a la même couleur que v. La cardinalité maximum d'une quorum-coloration de G est le *nombre de quorum-coloration* de G noté $\psi_q(G)$. Une *sous-quorum-coloration* de G est une quorum-coloration d'un sous-graphe de G induit par une partie S de V. Le *nombre de sous-quorum-coloration* de G est égal au cardinal maximum d'une sous-quorum-coloration de G et est noté par $\psi_{sq}(G)$. Dans ce mémoire, nous déterminons la valeur exacte du nombre de sous-quorum-coloration pour quelques familles infinies d'arbres.

ABSTRACT

A partition $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ of the vertex set V of a graph G into k color classes V_i, with $i \in \{1, ..., k\}$ is called a *quorum coloring* if for every vertex $v \in V$, at least half of the vertices in the closed neighborhood $N[v]$ of v have the same color as v. The maximum cardinality of a quorum coloring of G is called the *quorum coloring number* of G and is denoted $\psi_q(G)$. A *sub-quorum coloring* of G is a quorum coloring of an induced subgraph of G by a vertex subset S of V. The *sub-quorum coloring number* of G is equal to the maximum cardinality of a sub-quorum coloring of G and is denoted by $\psi_{sq}(G)$. In this thesis, we determine the exact value of the sub-quorum coloring number for some infinite families of trees.

REMERCIEMENTS

Toute notre reconnaissance et toute notre gratitude vont vers Allah ensuite vers notre encadrant qui nous a aidé et accompagné tout au long de cette expérience.

Nos profonds remerciements s'adressent à nos enseignants du département de Mathématiques de l'Université Blida 1 pour nous avoir guidés et orientés tout au long de notre cursus.

Nous remercions également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner et de juger notre travail.

Que tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué, par leurs conseils, leurs encouragements ou leur amitié à l'aboutissement de ce travail, trouvent ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

Pour leur soutien moral et la patience qu'ils nous ont manifestée durant toute l'année, nous remercions fortement tous les membres de nos familles.

Enfin, remercier nos parents serait se répéter. Parfois, pour exprimer plus que ce qu'on a envie de dire on a recours au silence.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES ILLUSTRATIONS

INTRODUCTION

La théorie des graphes est un domaine très important de la recherche opérationnelle et des mathématiques appliquées. Son étude a commencé en 1736 quand Euler s'intéressa au tracé d'un chemin sur la carte de la ville de Königsberg [1] parcourant une seule fois chacun des sept ponts. Ce problème admet comme modèle un ensemble de points représentant les berges du fleuve de Pregolia [2] dont des paires sont reliées si et seulement s'il existe un pont reliant les deux rives correspondantes. La théorie des graphes regroupe généralement des problèmes assez variés issus des sciences sociales, de l'économie, de l'informatique, de l'industrie, etc...

Les problèmes de partitions sont largement étudiés en théorie des graphes. Nous les rencontrons dans de nombreux énoncés de questions pratiques ou théoriques. Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de sous-quorum-coloration des graphes, variante du problème de partition des sommets d'un graphe en alliances défensives [3] appelé problème de *quorum-coloration*, tous deux introduits en 2013 par Hedetniemi, Hedetniemi, Laskar et Mulder [13] comme suit.

Une partition $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de l'ensemble des sommets V d'un graphe G en k classes V_i, avec $i \in \{1, ..., k\}$, est une *quorum-coloration* de G si pour tout sommet $v \in V$, au moins la moitié des sommets du voisinage fermé $N_G[v]$ de v a la même couleur que v. La cardinalité maximum d'une quorum-coloration de G est le *nombre de quorum-coloration* de G noté $\psi_q(G)$. Une *sous-quorum-coloration* de G est une quorum-coloration d'un sous-graphe de G induit par une partie S de V. Le *nombre de sous-quorum-coloration* de G est égal au cardinal maximum d'une sous-quorum-coloration de G et est noté par $\psi_{sq}(G)$.

La quorum-coloration possède plusieurs applications réelles parmi lesquelles celle de la

1. Ancien nom de l'actuelle ville russe de Kaliningrad.
2. Fleuve de Russie qui coule dans la région de Kaliningrad.
3. Voir page 16.

classification de données dont l'objectif est de partitionner un ensemble de données en paquets homogènes dans le sens où les données d'un paquet partagent plus de caractéristiques en commun entre elles qu'avec les données à l'extérieur de ce paquet. Ce problème peut être modélisé par un graphe G dans lequel chaque donnée est représentée par un sommet et tel que deux sommets soient adjacents si et seulement si les données qu'ils représentent partagent un nombre minimal de caractéristiques communes, et une façon de clusteriser ces données consiste à colorer l'ensemble des sommets du graphe G de sorte qu'au moins la moitié des voisins de chaque sommet v ait la même couleur que v, où v est considéré comme étant voisin de lui-même, c'est-à-dire, on procède à une quorum-coloration des sommets du graphe G. Ainsi, la maximisation du nombre de classes de couleurs a pour but d'affiner autant que faire se peut la classification de nos données (cf. [15, 17, 19] et [23]). Par ailleurs, la recherche d'une ψ_{sq}-coloration des sommets du graphe G peut être vue comme une classification des données associées au graphe G correspondant à une ψ_q-coloration d'un sous-graphe induit de G par une partie S de V réalisant une cardinalité maximum parmi toutes les ψ_q-colorations des sous-graphes induits de G par un sous-ensemble de V. Cette approche peut être suggérée dans le cas où la ψ_q-coloration de G est considérée comme étant non satisfaisante, en particulier lorsque $\psi_q(G) = 1$, quitte à ce qu'au final des données n'appartenant à aucune classe d'une ψ_{sq}-coloration obtenue π soient casées dans des classes de π en appliquant un nouveau critère [4].

L'étude des sous-quorum-colorations des graphes a été posée comme problème ouvert en 2013 par les auteurs [13]. Dans ce mémoire, nous initions cette étude dans des classes particulières d'arbres. Pour ce faire, nous avons organisé les chapitres comme suit. Le Chapitre 1 regroupe les définitions et les notations de la théorie des graphes utilisées tout au long de notre étude ; la dernière section du Chapitre 1 est consacrée à la notion de quorum-coloration autour de laquelle tourne toute la thèse. Dans le Chapitre 2, nous présentons les

4. On peut par exemple placer un sommet non coloré dans une classe dans laquelle il possède un maximum de voisins.

principaux résultats qui existent dans la littérature concernant les quorum-colorations des graphes. Le Chapitre 3 est dédié a notre contribution qui consiste à déterminer la valeur exacte du nombre de sous-quorum-coloration de certaines familles particulières d'arbres. Enfin, nous clôturerons notre travail par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et notions de base de la théorie des graphes que l'on peut retrouver dans [2, 3, 4]. Nous y définissons également quelques paramètres structurels et quelques types de graphes. Ensuite, nous présentons en fin de chapitre le concept de quorum-coloration en mettant en évidence sa relation avec d'autres concepts.

1.1 Définitions et terminologie de graphes

1.1.1 Graphe non orienté

Un *graphe non orienté* est un ensemble fini de points appelés *sommets* dont certains sont reliés par une ou plusieurs lignes appelées *arêtes*. Formellement, un graphe non orienté est un couple $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets du graphe G, noté également $V(G)$, et où E est son ensemble d'arêtes également noté $E(G)$ (FIGURE 1.1). Le cardinal de V est appelé *ordre* de G et est noté $|G|$, tandis que le cardinal de E est appelé *taille* de G et est noté $\|G\|$. Si e est une arête du graphe G reliant deux sommets u et v alors, on écrit simplement $e = uv$ et on dit que les sommets u et v sont *adjacents*, *voisins*, qu'ils sont les *extrémités* de e et que e est *incidente* à u et v. En particulier, si u et v sont confondus, l'arête e est appelée *boucle*.

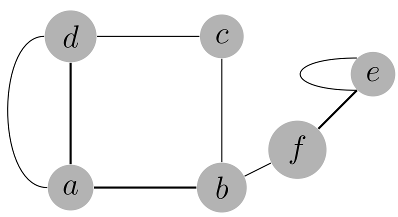


FIGURE 1.1 – Exemple de graphe non orienté quelconque

1.1.2 Graphe simple

Soit G un graphe non orienté. On dit que G est un graphe *simple* s'il est sans boucle et s'il y a au plus une arête entre chaque paire de sommets de G (FIGURE 1.2).

Remarque. Tout au long de ce mémoire, il sera uniquement question de graphe simple qu'on désignera simplement par le terme graphe.

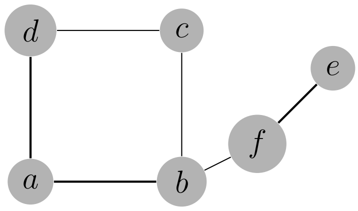


FIGURE 1.2 – Exemple de graphe simple

1.1.3 Sous-graphes, sous-graphes induits

Un *sous-graphe* d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un graphe $H = (V(H), E(H))$ tel que $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$; dans ce cas, on écrit $H \subseteq G$. Le sous-graphe de G induit par un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ est le sous-graphe $G[S] = (S, [S]^2 \cap E(G))$, où l'ensemble $[S]^2$ désigne l'ensemble des doubletons de S (FIGURE 1.3).

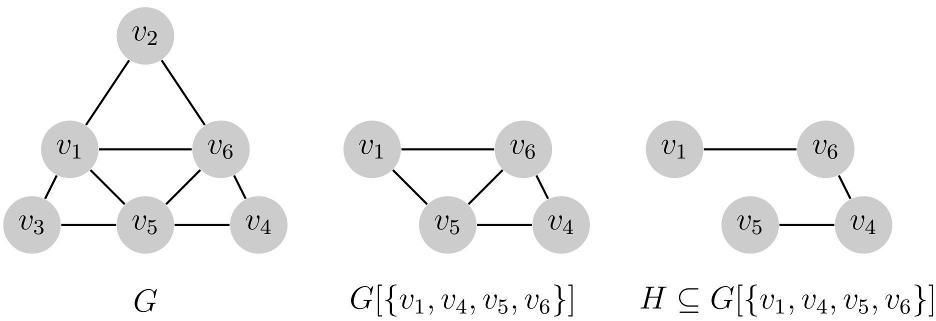


FIGURE 1.3 – Exemples de sous-graphe induit et de sous-graphe

1.1.4 Voisinage, degré d'un sommet

Pour un graphe $G = (V, E)$, le *voisinage ouvert* d'un sommet $v \in V$ dans G est l'ensemble $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ et son *voisinage fermé* est l'ensemble $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Plus généralement, le voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$ est l'ensemble $N(S) = \cup_{v\in S} N(v)$ et son voisinage fermé est l'ensemble $N[S] = N(S) \cup S$. Le *degré* d'un sommet v dans G, noté $d_G(v)$, est égal à le nombre de sommets adjacent avec lui . en particulier , si $d_G(v) = 0$, on dira que v est un sommet *isolé* et si $d_G(v) = 1$ on dira que v est un sommet *pendant* ou une *feuille*. Aussi, un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet *support*. Le *degré* d'un sommet v dans S, noté $d_S(v)$, est égal à $|N(v) \cap S|$; en particulier, si $S = V$ alors $d_S(v)$ est le degré de v dans G qu'on note $d_G(v)$ au lieu de $d_V(v)$ On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ les degrés maximum et minimum dans G, respectivement. Par exemple, dans la FIGURE 1.2 on a $\Delta(G) = 3$ et $\delta(G) = 1$.

1.2 Opérations sur les graphes

1.2.1 Graphes complémentaires

Le graphe *complémentaire* d'un graphe G, noté $\overline{G}$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G)$ et pour ensemble d'arêtes l'ensemble $\{uv \mid u, v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$ (FIGURE 1.4).

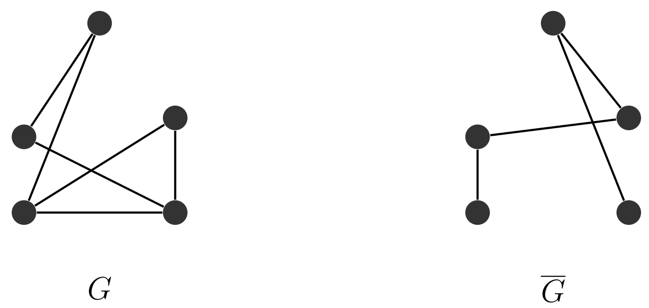


FIGURE 1.4 – Exemple de graphes complémentaires

1.2.2 Produit cartésien, réunion disjointe

Le *produit cartésien* de deux graphes simples G et H, noté $G\Box H$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$ et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble des paires $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ telles que, ou bien $u_1u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $v_1v_2 \in E(H)$ et $u_1 = u_2$ (FIGURE 1.5).

La *réunion disjointe* de deux graphes G_1 et G_2, noté $G_1 \cup G_2$, est le graphe ayant comme ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et comme ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2$.

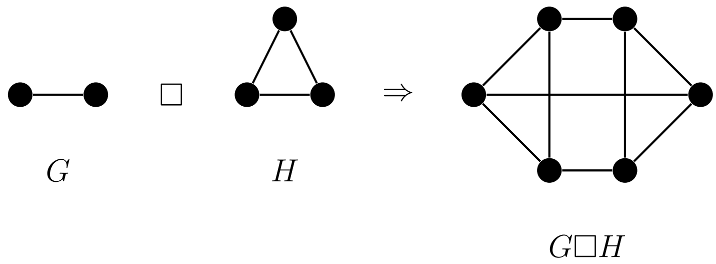


FIGURE 1.5 – Exemple de produit cartésien de deux graphes

1.2.3 Graphes joints, couronnes

Le graphe *joint* de deux graphes G et H, noté $G + H$ ou $H + G$, est le graphe obtenu à partir de la réunion disjointe de G et H en joignant tous les sommets de G à tous les sommets de H (c'est une opération commutative). En particulier, si G consiste en un unique sommet v, le graphe $G + H$ est noté $v + H$.

La *couronne* $G \circ H$ est le graphe obtenu à partir de G en remplaçant tout sommets v par $v + H$ (FIGURE 1.6).

1.3 Quelques type de graphes

1.3.1 Chaines, cycles , diamètre

Une *chaîne* est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes $v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$, telle que l'arête e_i est incidente avec les sommets e_{i-1} et e_i, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

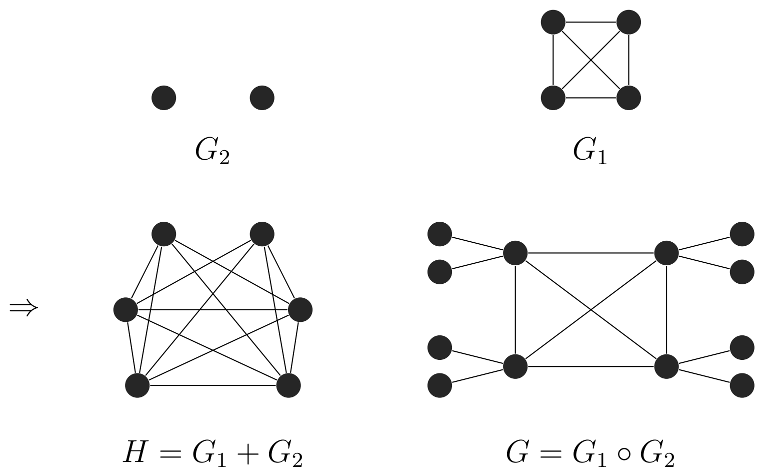


FIGURE 1.6 – Exemples d'un graphe joint et d'une couronne

Les sommets v_0 et v_n sont respectivement appelés extrémités *initiale* et *finale* de la chaîne. Puisque les graphes considérés dans ce mémoire sont simples, on peut définir une chaîne par la liste de ses sommets ou de ses arêtes.

— La *longueur* d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.

— Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une chaîne *simple*.

— Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une chaîne *élémentaire* .

— Une chaîne est *fermée* si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.

— Une chaîne fermée est un *cycle* si elle est composées d'arêtes toutes distinctes.

La *chaîne simple élémentaire* de longueur $n-1$, où $n \geq 2$, est le graphe à n sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dont les arêtes sont $v_i v_{i+1}$, pour $1 \leqslant i < n$; elle est notée P_n et est désignée par la suite $v_1 v_2 \ldots v_n$ de ses sommets, où les sommets v_1 et v_n sont les *extrémités* de la chaîne P_n. Le *cycle simple élémentaire* de longueur $n \geq 3$, noté C_n, est le graphe à n sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dont les arêtes sont $v_n v_1$ et $v_i v_{i+1}$ pour tout $i \in \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Dans ce cas, on peut désigner le cycle C_n par la suite $\{v_1 v_2 \ldots v_n v_1\}$ de ses sommets (FIGURE 1.7).

P_4 C_6

FIGURE 1.7 – Exemples d'une chaine et d'un cycle

1.3.2 Graphes grilles

Un graphe *grille* est le produit cartésien de deux chaines P_r et P_c et est noté dans ce cas par $G_{r,c} = P_r \square P_c$ (FIGURE 1.9). Si $r = 2$ et $c \geqslant r$, le graphe grille $G_{r,c}$ est appelé *échelle* (FIGURE 1.8).

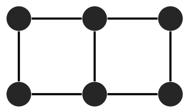


FIGURE 1.8 – L'échelle $G_{2,3}$

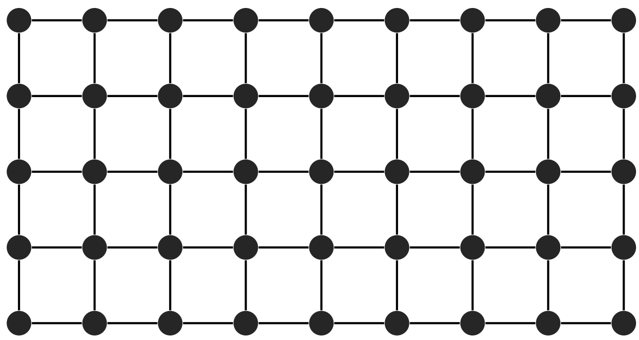


FIGURE 1.9 – Graphe grille $G_{5,9}$

1.3.3 Graphes complets, graphes nuls

Le graphe *complet* d'ordre n, noté K_n, est celui dont tous les sommets sont deux à deux adjacents (FIGURE 1.10). Le graphe complémentaire $\overline{K_n}$ d'un graphe complet K_n est un graphe sans arêtes appelé graphe *nul*.

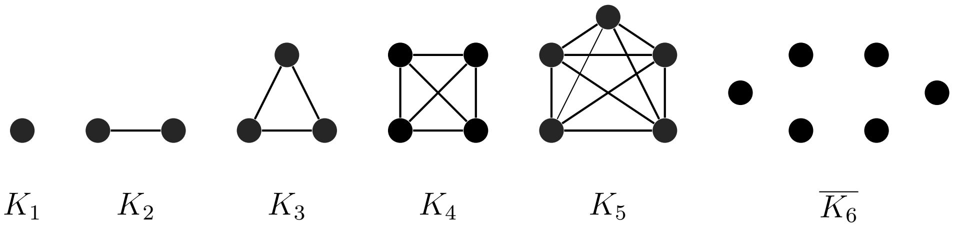
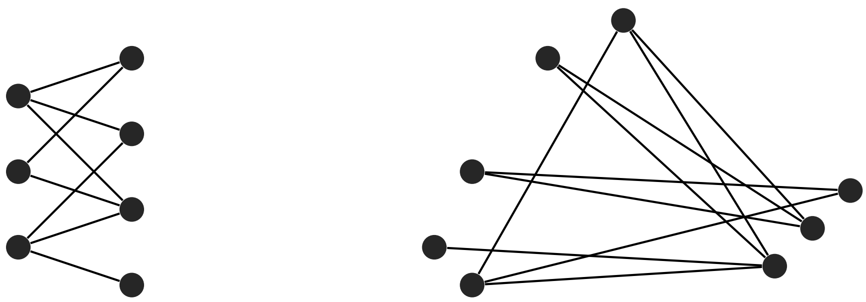


FIGURE 1.10 – Exemples de graphes complets et de graphe nul

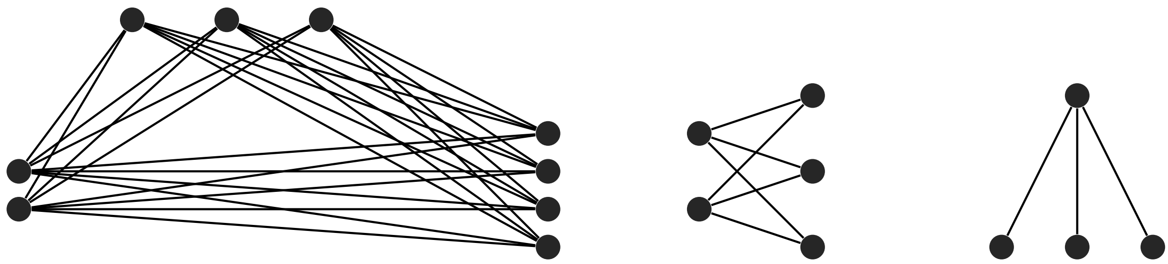
1.3.4 Graphes multipartis, graphes multipartis complets

Un graphe *multiparti* G est un graphe dont l'ensemble des sommets $V(G)$ admet une partition $\{V_1, V_2, \ldots, V_t\}$, ou $t \geq 2$, telle que l'ensemble $G[V_i]$ est le graphe nul $\overline{K_{|V_i|}}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$; en particulier, si $t = 2$ alors G est dit *biparti*, si $t = 3$ alors G est dit *triparti*,... De plus, si $|V_i| = n_i$ pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ et si $G = \overline{K}_{n_1} + \overline{K}_{n_2} + \cdots \overline{K}_{n_t}$ alors, le graphe G est noté $K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ et est dit graphe *multiparti complet* (FIGURES 1.11 et 1.12). Une *étoile* à n feuilles, notée S_n avec $n \geq 2$, est un graphe biparti complet $K_{1,n}$ ou l'unique sommet de degré n est appelé *centre* de l'étoile.



• Un graphe bipartis. • Un graphe tripartis.

FIGURE 1.11 – Exemples de graphe biparti et de graphe triparti



$K_{2,3,4}$. $K_{2,3}$. $K_{1,3}$.

FIGURE 1.12 – Exemples de graphe multiparti complet, de graphe biparti complet et d'une étoile

1.3.5 Arbres

Un arbre est un graphe acyclique dans lequel toute paire de sommets est reliée par une chaîne [1](FIGURES 1.13).

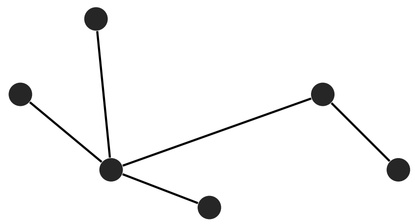


FIGURE 1.13 – Exemple d'arbre

1.3.6 Chenilles

Un *graphe chenille* ou simplement une *chenille* est un arbre dont la suppression des feuilles induit une chaîne $v_1 v_2 \ldots v_k$ appelée *épine* de la chenille (FIGURE 1.14).

1.3.7 Arbres binaires

Un arbre *binaire* est un arbre dont chaque sommet est de degré au plus 3 (FIGURE 1.15).

1. Dans ce cas, on dit que le graphe est *connexe* (voir Sous-sous-section 1.4.1).

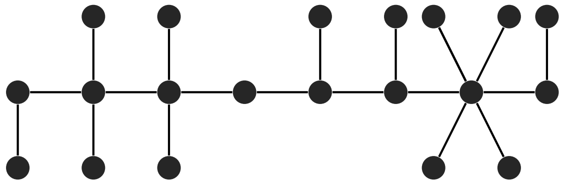


FIGURE 1.14 – Exemple de chenille

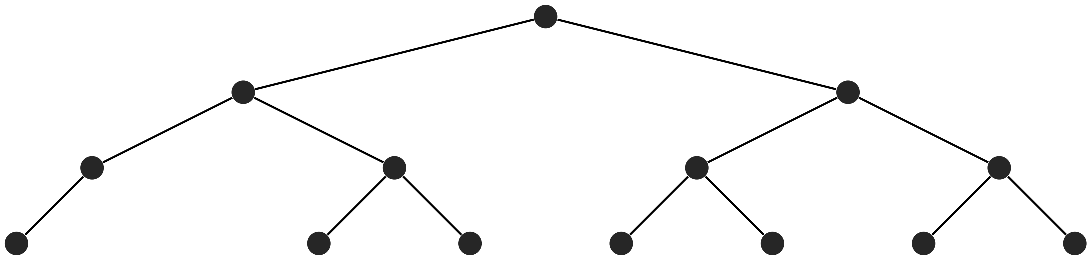


FIGURE 1.15 – Exemple d'arbre binaire

1.4 Connexité, métrique

Pour définir la connexité ainsi qu'une métrique sur les graphes, nous avons besoin de rappeler les définitions suivantes.

Soit $\wp$ une propriété définie sur un ensemble de parties finies. On dit qu'un sous-ensemble S est *minimal* pour la propriété $\wp$ si S vérifie $\wp$ et si aucun sous-ensemble propre de S ne vérifie $\wp$. S est dit *minimum* pour la propriété $\wp$ si S vérifie $\wp$ et si $|S|$ est minimum parmi tous les ensembles vérifiant $\wp$. Ainsi, un ensemble minimum est nécessairement minimal, mais l'inverse n'est pas vrai en général. De même, on dit que S est *maximal* pour la propriété $\wp$ si aucun ensemble contenant strictement S ne vérifie la propriété $\wp$. S est *maximum* pour la propriété $\wp$ si S vérifie π et si $|S|$ est maximum parmi tous les ensembles vérifiant $\wp$. En particulier, tout ensemble maximum est maximal, mais la réciproque est fausse.

1.4.1 Connexité

Un graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets de G constitue les extrémités d'une chaîne induite de G (FIGURE 1.16). Si G est non connexe donc il existe plus que une composante connexe telle que une *composante connexe* est un sous-graphe induit maximal connexe (FIGURE 1.17).

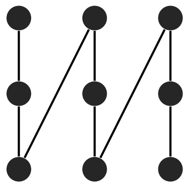


FIGURE 1.16 – Exemple de graphe connexe

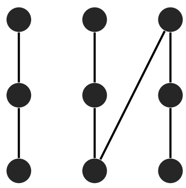


FIGURE 1.17 – Exemple de graphe non connexe

1.4.2 Distance, diamètre d'un graphe

Étant donnés un graphe G et deux sommets $u, v \in V(G)$, la *distance* entre u et v dans G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne induite de G d'extrémités u et v. Le *diamètre* de G, noté $diam(G)$, est la plus grande distance possible qui puisse exister entre deux sommets de G. Par exemple, dans la FIGURE 1.18, on a $d_G(v_1, v_6) = diam(G) = 5$.

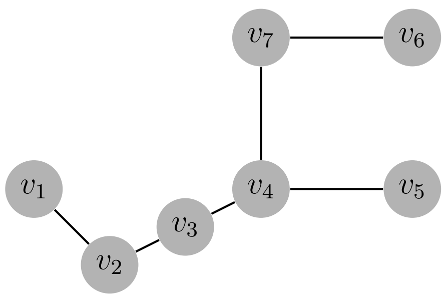


FIGURE 1.18 – Un graphe G avec $d_G(v_1, v_6) = diam(G) = 5$

1.5 Quelques invariants de graphes

1.5.1 Paramètres d'indépendance

Un sous-ensemble de sommets S d'un graphe G est dit *indépendant* ou *stable* ou 1-*indépendant*, si aucun sommet de S n'admet de voisin dans S. Le *nombre d'indépendance* de G est le cardinal maximum d'un ensemble indépendant de G, noté $\beta_1(G)$. Un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit 2-*indépendant* si tout sommet de S admet au plus un voisin dans S. Le cardinal maximum d'un 2-indépendant de G, noté $\beta_2(G)$, est appelé *nombre de* 2-*indépendance* de G. Dans la FIGURE 1.19, l'ensemble $S_1 = \{b, e\}$ est un stable maximal, tandis que les ensemblse $S_2 = \{b, c, d\}$ et $S_3 = \{a, c, d\}$ sont respectivement un stable [2] et un 2-indépendant maximums ; en particulier, $\beta_1(G) = \beta_2(G) = 3$.

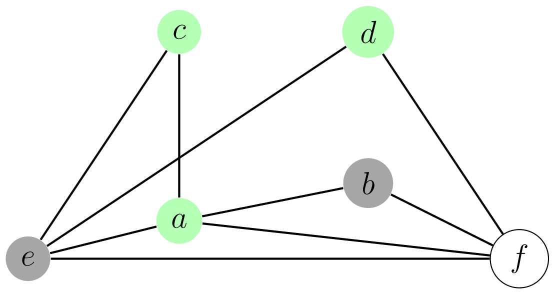


FIGURE 1.19 – Exemples d'ensemble k-indépendant, pour $k \in \{1, 2\}$, et de couplage maximum

1.5.2 Couplage

Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes indépendantes, c'est-à-dire, des arêtes n'ayant pas d'extrémité commune. Le *nombre de couplage* de G, noté $\alpha(G)$, est égal au cardinal maximum d'un couplage de G. Par exemple, dans la FIGURE 1.19, l'ensemble $M_1 = \{ab, ef\}$ est un couplage maximal et l'ensemble $M_2 = \{ab, ce, df\}$ est un couplage maximum, d'où $\alpha(G) = 3$.

2. S_2 est également un 2-indépendant maximum.

1.5.3 Le nombre chromatique

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\wp$ une propriété sur l'ensemble des parties de V. On appelle *$\wp$-coloration* de G toute partition $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ de V en k classes de couleurs telle que chaque classe V_i possède la propriété $\wp$. Si $\wp$ est la propriété d'indépendance alors, la coloration π est dite *coloration propre* de G. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ est le cardinal minimum d'une coloration propre de G (FIGURE 1.20).

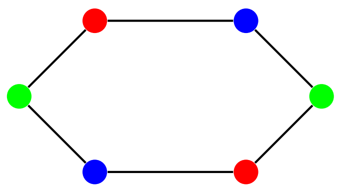


FIGURE 1.20 – Exemple de coloration propre de C_6

1.6 Quorum-colorations

1.6.1 Définition

Une partition $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de l'ensemble des sommets V d'un graphe G en k classes de couleurs V_i, avec $i \in \{1, \ldots, k\}$, est une *quorum-coloration* de G si pour tout sommet $v \in V$, au moins la moitié des sommets du voisinage fermé $N_G[v]$ de v a la même couleur que v. Dans ce cas, on dit que tout sommet $v \in V_i$ est un *sommet quorum*, qu'il est coloré avec la couleur i et on note par $c[v]$ le nombre de sommets de $N_G[v]$ ayant la même couleur que v, incluant v lui-même. Ainsi, pour tout sommet $v \in V$. on a $c[v] \geq \dfrac{|N_G[v]|}{2}$. Chaque classe V_i est alors appelée *quorum* de G. Le cardinal maximum d'une quorum-coloration de G est appelé *nombre de quorum-coloration* de G et est noté $\psi_q(G)$. Une quorum-coloration d'ordre $\psi_q(G)$ est dite ψ_q-coloration de G. Pour une quorum-coloration π de G et un sommet $v \in V(G)$, on note par $\mathcal{C}_\pi(v)$ l'unique quorum de π renfermant v.
Par exemple, dans la FIGURE 1.21, le nombre de quorum-coloration du graphe G est égal à 3. En effet, on peut vérifier d'une part sans peine que la partition exhibée de $V(G)$ for-

mée des classes de sommets respectivement colorés en vert, bleu et rouge est une quorum-coloration de G d'ordre 3, ce qui implique que $\psi_q(G) \geq 3$. D'autre part, le graphe G étant de degré minimum $\delta(G) = 2$, on en déduit que chaque classe contient au moins deux sommets ; par suite, $\psi_q(G) \leq \frac{|V(G)|}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Par conséquent, on a bien $\psi_q(G) = 3$.

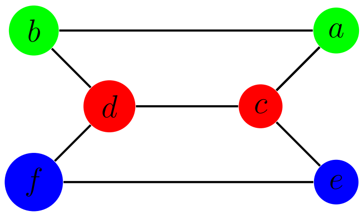


FIGURE 1.21 – Exemple de ψ_q-coloration.

1.6.2 Lien de la quorum-coloration avec d'autres concepts

Alliances défensives

Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphes $G = (V, E)$ est dit *alliance défensive*, si pour tout sommet $v \in S$, on a $|N[v] \cap S| \geqslant |N(v) \cap (S - V)|$. Le cardinal minimum d'une alliance défensive est appelé *nombre d'alliance défensive* et est noté $a(G)$. Une *alliance-partition* $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ est une partition de V en alliances défensives, c'est-à-dire, π est telle que chaque V_i est un alliance-défensive. Le cardinal maximum d'une alliance-partition est le *nombre d'alliance-partition*, noté $\psi_a(G)$.

Par définition, on voit clairement que les notions de partition en alliance-défensive et de quorum-coloration se confondent, ce qui a pour conséquence l'égalité $\psi_a(G) = \psi_q(G)$. Ces considérations permettent d'appréhender la quorum-coloration des graphes du point de vue des alliances défensives (le lecteur pourra consulter les références [24, 7, 26]).

Partitions satisfaisantes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une partie $S \subseteq V$ est une *alliance défensive forte* ou *ensemble cohésif*) de G, si pour tout sommet $v \in S$, on a $|N(v) \cap S| \geq |N(v) \cap (V \setminus S)|$. Le *nombre d'alliance forte* de G, noté $\hat{a}(G)$), est le cardinal minimum d'un ensemble cohésif de G. Une partition de V en ensembles cohésifs est dite *partition satisfaisante* de G. Le *nombre d'alliance-partition forte* de G, noté $\psi_{\hat{a}}(G)$, est égal à la cardinalité maximum d'une partition satisfaisante de G.

A partir des définitions énoncées dans les deux précédents paragraphes, on peut observer que les notions de quorum-coloration et de partition satisfaisante se ressemblent dans le fait que les deux concepts exigent que la moitié du voisinage d'un sommet v ait la couleur de v. Néanmoins, la différence entre les deux concepts réside dans le type de voisinage utilisé dans la définition de chacune, où l'on utilise la notion de voisinage fermé pour les quorum-colorations, tandis que la notion de voisinage ouvert est utilisée pour définir les partitions satisfaisantes. Par ailleurs, le problème de complexité algorithmique auquel on s'intéresse dans l'étude des partitions satisfaisantes est de savoir si un graphe donné G admet une partition satisfaisante. Un autre problème d'intérêt et de trouver des classes de graphes admettant une partition satisfaisante ; par exemple, les graphes complets n'admettent pas de partition satisfaisante. Cependant, l'étude de la quorum-coloration est centrée sur la recherche d'une partition maximum des sommets d'un graphe G, soit sur la détermination de $\psi_q(G)$.

Colorations propres

Comme observé par Hedetnieimi *et al.* [13], la quorum-coloration offre une vision duale du nombre chromatique pour lequel il n'y a pas de limite pour le nombre de couleurs distinctes utilisées pour colorer les sommets du voisinage fermé d'un sommet v, tandis que le but est de minimiser le nombre total de couleurs utilisées. A contrario, il y a une limite au nombre de couleurs utilisées pour colorer les sommets du voisinage fermé de v, en dépit du fait que l'objectif soit de maximiser le nombre totale de couleurs utilisées.

Chapitre 2

RESULTATS FONDAMENTAUX

Dans ce chapitre, nous énonçons les propriétés fondamentales des quorum-colorations et du nombre de quorum-coloration. Nous rappelons de façon sommaire quelques valeurs exactes du nombre de quorum-coloration de certains graphes usuels dont la plupart ont été établies par Hedetniemi *et al.* [13].

2.1 Propriétés fondamentales des quorum-colorations

En considérant ψ_q comme une application sur l'ensemble des graphes simples finis muni de la réunion disjointe et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on peut déduire une sorte de propriété de linéarité de ψ_q qui s'énonce comme suit.

Proposition 2.1 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Si $G \cup H$ est l'union disjoint des deux graphes G et H, alors on a

$$\psi_q(G \cup H) = \psi_q(G) + \psi_q(H).$$

En lui appliquant le principe de récurrence, la Proposition 2.1 s'étend à une réunion quelconque de graphes finis.

Proposition 2.2 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit G un graphe non connexe dont les composantes sont $G_1, G_2, \ldots, G_r$, $r \geq 1$. Alors

$$\psi_q(G) = \sum_{1 \leq i \leq r} \psi_q(G_i).$$

Les Propositions 2.1 et 2.2 suggèrent qu'un quorum induit un sous-graphe connexe. Cette propriété a été effectivement établie par Hedetniemi *et al.* via la proposition suivante.

Proposition 2.3 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Soit G un graphe et soit $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ une ψ_q-coloration de G. Alors pour tout $i, 1 \leq i \leq k$, le sous-graphe induit $G[V_i]$ est connexe.

Pour un graphe sans sommets isolés, on peut facilement voir qu'un quorum contient un seul sommet si et seulement si le sommet en question est pendant. Ceci se traduit par l'énoncé de la proposition suivante.

Proposition 2.4 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Soient G un graphe sans sommets isolés et $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ une quorum-coloration de G. Pour toute classe V_i, si $|V_i| = 1$ alors, l'unique sommet de V_i est un sommet pendant, sinon $|V_i| \geq 2$.

2.2 Bornes du nombre de quorum-coloration

Les premirères bornes énoncées dans cette section sont toutes des conséquences de la Proposition 2.4, et effectuent ainsi la transition avec la précédente section.

2.2.1 Graphes généraux et graphes réguliers

Proposition 2.5 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ de degré minimum $\delta(G) \leq 1$ alors, $\psi_q(G) \geq 2$.

Proposition 2.6 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Soit G un graphe d'ordre n. Alors, $\psi_q(G) \leq n$. De plus, $\psi_q(G) = n$ si et seulement si $\Delta(G) \leq 1$, i.e. G est constitué de sommets isolés et d'union disjointe de K_2.

La Proposition 2.6 montre que l'ajout d'un sommet isolé à n'importe quel graphe augmente son nombre de quorum-coloration d'une unité.

Un isthme étant une arête dont la suppression déconnecte le graphe, la Proposition 2.4 admet également comme conséquences l'extension [1] et la borne suivantes.

1. En effet, la suppression d'une arête pendante d'un graphe déconnecte ce dernier.

Proposition 2.7 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Si G est un graphe connexe qui contient un isthme alors, $\psi_q(G) \geq 2$.

Proposition 2.8 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Soit G un graphe d'ordre n et $\delta(G) \geq 2$. On a $\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

La borne de la Proposition 2.8 est atteinte par les cycles C_n d'ordre paire, dans lesquel les sommets sont colorés consécutivement avec des paires de couleurs adjacentes $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots ; \frac{n}{2}, \frac{n}{2}$ (FIGURE 2.1).

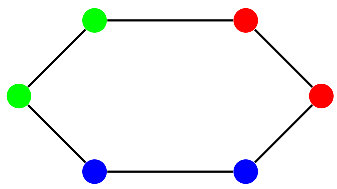


FIGURE 2.1 – ψ_q-coloration du cycle C_6

Le théorème suivant dû à Fricke et Lawson [8] permet de déduire une borne autre que celle de la Proposition 2.8 s'exprimant en fonction du nombre d'alliance défensive $a(G)$ du graphe G.

Théorème 2.1 (Fricke et Lawson 2003 [8])

Soit G un graphe d'ordre n. Alors, $a(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. où $a(G)$ représente le nombre d'alliance-défensive de G .

Proposition 2.9 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Soit G un graphe d'ordre n, de nombre d'alliance défensive $a(G)$ et tel que $\delta(G) \geq 2$. Alors,

$$\psi_q(G) \leq \frac{n}{a(G)} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Le Théorème 2.1 admet également pour conséquence la proposition suivante.

Proposition 2.10 (Hedetniemi *et al.* **2013 [13])**
Soit G un graphe d'ordre impair tel que $a(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Alors, $\psi_q(G) = 1$.

Lorsque $\delta(G) \geq 2$, les auteurs [13] ont établi une borne différente de celles de la Proposition 2.9 qui n'est autre que le nombre de couplage $\alpha(G)$.

Proposition 2.11 (Hedetniemi *et al.* **2013 [13])**
Soit G un graphe d'ordre n avec un degré minimum $\delta(G) \geq 2$. Alors,

$$\psi_q(G) \leq \alpha(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

où $\alpha(G)$ représente le nombre de couplage de G.

Dans [13] et [6], les auteurs ont démontré indépendamment que la borne de la Proposition 2.11 est atteinte pour tous les graphes 3-réguliers.

Théorème 2.2 (Eroh et Gera - Hedetniemi *et al.* **[6, 13])**
Soit G un graphe 3-régulier. Alors, $\psi_q(G) = \alpha(G)$, où $\alpha(G)$ représente le nombre de couplage de G.

Pour le cas des graphes 4-réguliers n'ayant pas de triangles, Hedetniemi *et al.* annoncent le théorème suivant.

Théorème 2.3 (Hedetniemi *et al.* **2013 [13])**
Soit G est un graphe 4-régulier sans triangle. Alors $\psi_q(G) \leq \frac{\alpha(G)}{2}$. où $\alpha(G)$ représente le nombre de couplage de G.

Dans [14], Hedetniemi *et al.* ont montré que pour tout graphe 4 ou 5-régulier G, $a(G) = g$, où g est la maille [2] de G. Ce résultat a permis d'établir la borne supérieure suivante.

2. La maille d'un graphe est la longueur de son plus petit cycle induit.

Proposition 2.12 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Soit G un graphe 4 ou 5-régulier d'ordre n et de maille g. Alors,

$$\psi_q(G) \leq \frac{n}{g}.$$

Sahbi et Chellali [22] ont établi une borne supérieure du nombre de quorum-coloration en fonction de l'ordre du graphe ainsi que ses degrés minimum et maximum.

Proposition 2.13 (Sahbi et Chellali 2018 [22])

Pour tout graphe G d'ordre maximum et minimum, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement,

$$\psi_q(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{n - \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil}{\left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil} \right\rfloor.$$

En considérant un quorum contenant un sommet de degré maximum, les auteurs [22] déduisirent le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 (Sahbi et Chellali 2018 [22])

Pour tout graphe G,

$$\psi_q(G) \leq 1 + n - \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil.$$

Dans l'article d'Eroh et Gera [6], les auteurs ont démontré les deux bornes supérieures suivantes.

Théorème 2.4 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors,

$$1 \leq \psi_q(G) \leq \left\lfloor n + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1+4n}}{2} \right\rfloor.$$

Théorème 2.5 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit G un graphe de degré minimum δ. Alors,

$$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\left\lceil \frac{\delta+1}{2} \right\rceil} \right\rfloor.$$

Comme conséquence du Théorème 2.5, les auteurs [6] obtinrent la borne supérieure suivante pour les graphes r-réguliers.

Corollaire 2.2 (Eroh et Gera 2012 [6])

Si G est un graphe r-régulier alors,

$$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil} \right\rfloor.$$

Nous concluons cette section par une borne supérieure généralisant celle de la Proposition 2.12.

Proposition 2.14 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit G un graphe de maille $g \geq 3$ et de degré minimum $\delta \geq 4$. Alors,

$$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{g} \right\rfloor.$$

2.2.2 Arbres

Trois bornes sur le nombre de quorum-coloration dans les arbres sont dues à Eroh et Gera et s'expriment par les trois résultats qui suivants.

Théorème 2.6 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ et de diamètre $d \geq 2$. Alors

$$\psi_q(T) \geq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1.$$

La borne du Théorème 2.6 est atteinte pour les chaînes d'ordre pair.

Théorème 2.7 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Alors

$$\psi_q(T) \leq \left\lfloor \frac{3n}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

La borne du Théorème 2.7 est atteinte pour $P_{2k} \circ K_1$ ($k \geq 1$).

Proposition 2.15 (Eroh et Gera 2012 [6])

Soit T un arbre binaire d'ordre n avec un couplage maximum M. Alors $\psi_q(T) \geqslant n - |M|$.

La borne de la Proposition 2.15 est atteinte par les chaînes d'ordre impair.

D'autre part, Sahbi [21] a établi une borne améliorant celle du Théorème 2.6 dont l'expression est la suivante.

Théorème 2.8 (Sahbi 2021 [21])

Soit $T = (V, E)$ un arbre non trivial et L l'ensemble de ses feuilles. Alors,

$$\psi_q(T) \geq \alpha\left(T[V \setminus L]\right) + |L| - \sum_{v \in (V \setminus L)} \left(\left\lfloor \frac{d_T(v)}{2} \right\rfloor - 1 \right).$$

Cette borne peut être calculée en temps linéaire.

De plus, l'auteur [21] a montré, comme corollaire, que la borne du Théorème 2.8 est atteinte pour n'importe quel arbre binaire (FIGURE 2.2), améliorant ainsi la Proposition 2.15.

Corollaire 2.3 (Sahbi 2021 [21])

Soit $T = (V, E)$ un arbre binaire non trivial et L l'ensemble de ses feuilles. Alors,

$$\psi_q(T) = \alpha(T[V \setminus L]) + |L|.$$

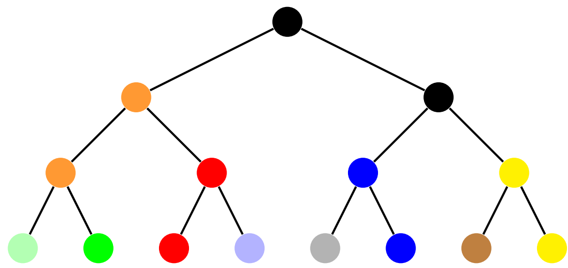


FIGURE 2.2 – ψ_q-coloration d'un arbre binaire

2.3 Valeurs exactes du nombre de quorum-coloration

Dans cette section, nous citons des résultats fournissant la valeur exacte du nombre de quorum-coloration pour certaines classes de graphes.

2.3.1 Chaînes

Une ψ_q-coloration d'une chaîne s'obtient en regroupant ses sommets non pendants par paires de sommets adjacents [3] puis en ajoutant les deux classes correspondants à ses feuilles (FIGURE 2.3).

Proposition 2.16 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\psi_q(P_n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

P_6 P_5

FIGURE 2.3 – ψ_q-coloration des chaînes P_5 et P_6

3. Si l'ordre est impair, une seule de ces classes contiendra trois sommets.

2.3.2 Cycles

Comme tout cycle est 2-régulier, on en déduit une quorum-coloration en regroupant ses sommets par paires de sommets adjacents (FIGURE 2.4).

Proposition 2.17 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$\psi_q(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

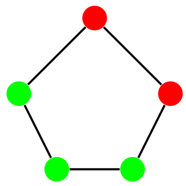


FIGURE 2.4 – Quorum-coloration du cycle C_5

2.3.3 Graphes complets

Comme les sommets d'un graphe complet sont deux à deux adjacents, un graphe complet peut être partitionné en au plus deux quorums (FIGURE 2.5).

Proposition 2.18 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\psi_q(K_n) = \begin{cases} 1, & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 2, & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$

2.3.4 Etoiles

La quorum-coloration d'une étoile s'obtient en attribuant la couleur du centre à la moitié des feuilles puis en formant autant de nouvelles classes que de feuilles restantes (FIGURE 2.6). Aussi, en terme d'ordre du graphe, une étoile a le même nombre de quorum-coloration qu'une chaîne.

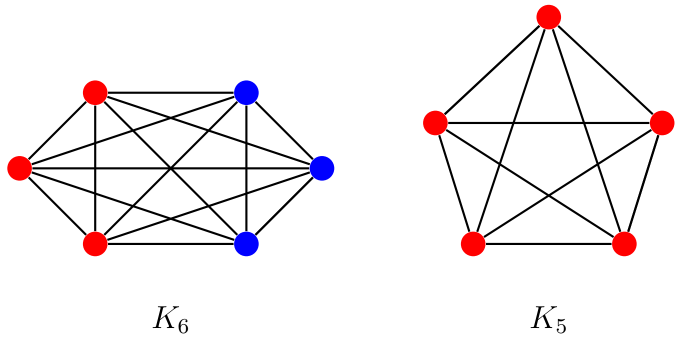


FIGURE 2.5 – ψ_q-coloration des graphes complets K_5 et K_6

Proposition 2.19 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Pour tout entier $n \geq 1$*, on a*

$$\psi_q(S_n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

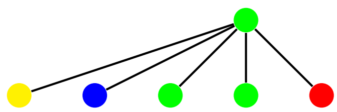


FIGURE 2.6 – ψ_q-coloration de l'étoile S_5

2.3.5 Graphes bipartis complets

Comme $K_{3,3}$ est un graphe 3-régulier, on obtient en vertu du Théorème 2.2 que $\psi_q(K_{3,3}) = \alpha(K_{3,3})$. Pour tous les autres graphes bipartis complets, le paramètre est égal à 2 (FIGURE 2.7).

Proposition 2.20 (Hedetniemi *et al.* 2013 [13])

Pour tous entiers $2 \leq m \leq n$*, on a*

$$\psi_q(K_{m,n}) = \begin{cases} 3, & \textit{si } m = n = 3, \\ 2, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

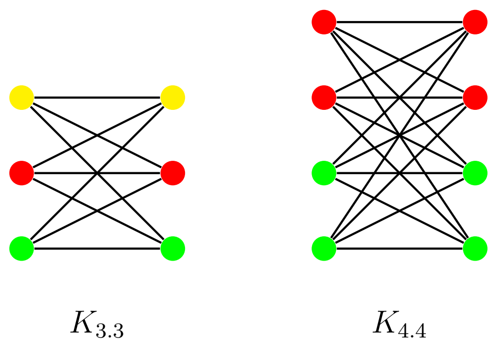


FIGURE 2.7 – ψ_q-coloration des graphes bipartis complets

2.3.6 Graphes couronnes $K_n \circ \overline{K_n}$ ($n \geq 1$)

Pour tout entier $n \geq 1$, tout quorum de $K_n \circ \overline{K_n}$ contenant un sommet support est de cardinal au moins n[4], et on en déduit une ψ_q-coloration en formant un quorum formé par tous les sommets supports et n^2 autres quorums avec les feuilles (FIGURE 2.8).

Proposition 2.21 (Hedetniemi et al. 2013 [13])

Soit $n \geq 1$, et soit le graphe couronne $G = K_n \circ \overline{K_n}$ d'ordre $n^2 + n$. Alors,

$$\psi_q(G) = n^2 + 1.$$

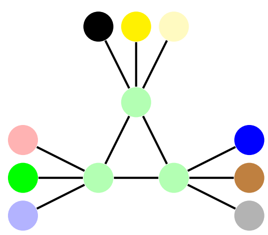


FIGURE 2.8 – ψ_q-coloration de d'une couronne $K_3 \circ \overline{K_3}$

2.3.7 Graphes joints $K_r + \overline{K_s}$ avec $r + s \geq 3$ impair

En appliquant la Proposition 2.10, les auteurs [13] ont démontré que les graphes joints $K_r + \overline{K_s}$ avec $r + s \geq 3$ impair, sont non partitionnables en quorums (FIGURE 2.9).

4. Chaque sommet support de $K_n \circ \overline{K_n}$ est de degré $2n - 1$.

Proposition 2.22 (Hedetniemi et al. 2013 [13])

Pour tout graphe $G = K_r + \overline{K_s}$, *où* $r + s \geq 3$ *est impair,* $\psi_q(G) = 1$.

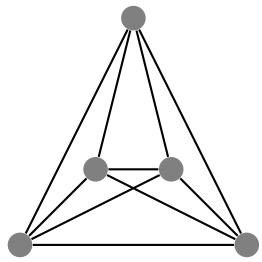


FIGURE 2.9 – $\psi_q(K_4 + K_1)$

2.3.8 Graphes grilles

Haynes et Lachniet ont déterminé dans [12] le nombre de quorum-coloration des graphes grilles $G_{m,n}$ suivant la valeur de m, où $n \geq 1$ et $2 \leq m \leq n$ (FIGURES 2.10, 2.11 et 2.12).

Théorème 2.9 (Haynes et Lachniet 2007 [12])

Pour tous entiers non nuls $n \geq m$, *on a :*

(i) *Pour* $n \geq 1$, *on a*

$$\psi_q(G_{1,n}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

(ii) *Pour* $n \geq 2$, *on a*

$$\psi_q(G_{2,n}) = n.$$

(iii) *Pour* $n \geq 3$, *on a*

$$\psi_q(G_{3,n}) = \begin{cases} n & \textit{si n est impair,} \\ n+1 & \textit{si n est pair.} \end{cases}$$

(iv) *Pour* $m \geq 4$, *on a*

$$\psi_q(G_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + m + n - 2.$$

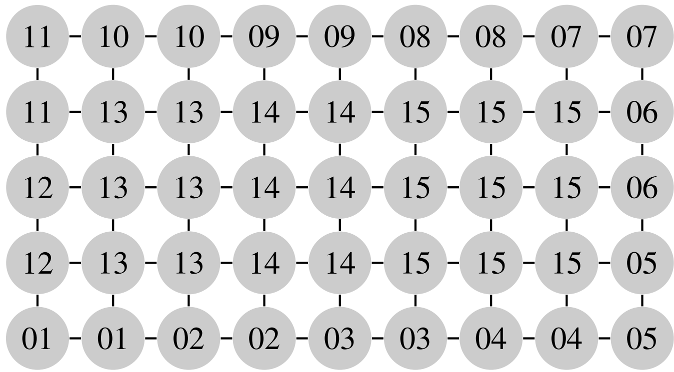


FIGURE 2.10 – ψ_q-coloration de $G_{5,9}$

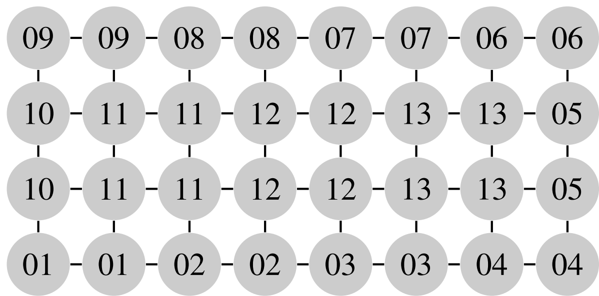


FIGURE 2.11 – ψ_q-coloration de $G_{4,8}$

2.3.9 Hypercubes

En 2012, les auteurs [6] ont posé la conjecture suivante pour les hypercubes Q_n.

> **Conjecture 2.1 (Eroh et Gera 2012 [6])**
>
> *Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\psi_q(Q_n) = 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.*
>
> *(FIGURE 2.13)*

Un an plus tard, les auteurs [13] ont confirmé la Conjecture 2.1 en utilisant un raisonnement combinatoire s'appuyant sur le codage binaire des sommets de Q_n.

2.4 Réponses à quelques problèmes ouverts

Dans cette section, nous listons dans un premier temps dix problèmes ouverts posés en 2013 par Hedetniemi *et al.* [13]. Ensuite, nous parlerons brièvement des réponses données

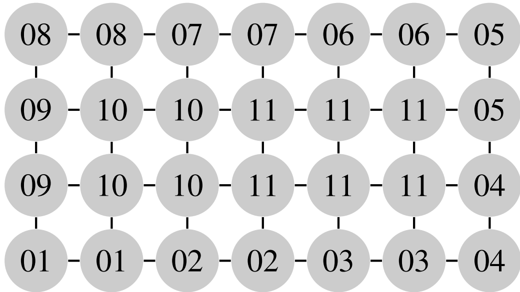


FIGURE 2.12 – ψ_q-coloration de $G_{4,7}$

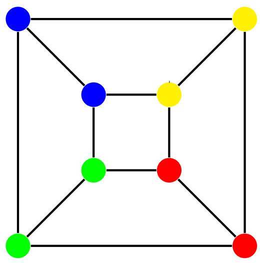


FIGURE 2.13 – ψ_q-coloration de Q_3

à ces dix questions sous forme d'énoncés de théorèmes. Pour les notions de complexité, le lecteur peut se référer aux livres [9] et [16]. Pour le reste, tous les détails de cette section se trouvent dans les références [22, 21, 19, 18].

2.4.1 Liste de dix problèmes ouverts

A l'issue de leur étude préliminaire sur les quorum-colorations, les auteurs [13] ont suggéré l'étude des problèmes ouverts suivant.

Question 1 : Peut-on caractériser la classe de graphes pour lesquels $\psi_q(G) = 1$ ou la classe de graphes pour lesquels $\psi_q(G) > 1$? En fait, peut-on trouver une famille infinie de graphes autres que ceux de la forme K_{2n+1} ou $K_r + K_s$ pour $r + s$ impair et $r \geq 2$, pour lesquels $\psi_q(G) = 1$?

Question 2 : A-t-on $\psi_q(G) = 1$ si et seulement si $a(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ et n est impair ?

Question 3 : Si $\psi_q(G) = 1$, a-t-on $diam(G) \leq 2$?

Question 4 : A-t-on $\left\lfloor \frac{diam(G)}{2} \right\rfloor \leq \psi_q(G)$? Il est facile de prouver ce qui suit.

Proposition 2.23
Pour tout arbre T, $\left\lfloor \dfrac{diam(T)}{2} \right\rfloor \leq \psi_q(T)$.

Question 5 : Il est facile de voir que pour tout graphe G, $\psi_q(G) \leq \psi_q(G \circ K_1)$. Cependant, est-il possible d'obtenir un résultat plus affiné ? Par exemple, quand est-ce-que cette inégalité est stricte ?

Question 6 : Quelle est la complexité du problème de décision suivant :

QUORUM-ONE
Instance : Un graphe $G = (V, E)$.
Question : A-t-on $\psi_q(G) > 1$?

Question 7 : Quelle est la complexité du problème de décision suivant :

QUORUM-K
Instance : Un graphe $G = (V, E)$, un entier positif $K \leq |V|$.
Question : G admet-il une quorum-coloration d'ordre au moins K ?

Question 8 : Il est facile de voir que pour tout graphe 1-régulier G d'ordre n, $\psi_q(G) = n$. Il est également aisé de déterminer la valeur de $\psi_q(G)$ pour tout graphe 2-régulier G. De plus, comme $\psi_q(G) = \alpha(G)$ pour tout graphe 3-régulier G, on peut déterminer en temps polynomial la valeur de $\psi_q(G)$ pour les graphes 3-réguliers. Ceci nous mène au problème de décision suivant :

4-REGULAR QUORUM
INSTANCE : Un graphe 4-régulier $G = (V, E)$, un entier positif $K \leq |V|$.
Question : G admet-il une quorum-coloration d'ordre au moins K ?

Question 9 : Peut-on concevoir un algorithme linéaire calculant la valeur de $\psi_q(T)$ d'un arbre quelconque T ?

Question 10 : Quelles sont les bonnes bornes Gaddum-Nordhaus pour $\psi_q(G) + \psi_q(\overline{G})$ et $\psi_q(G) \times \psi_q(\overline{G})$?

Hedetniemi *et al.* ont posé la conjecture suivante :

Conjecture 2.2

Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$, $4 \leq \psi_q(G) + \psi_q(\overline{G}) \leq n + 2$.

2.4.2 Réponses aux dix questions ouvertes

Réponses aux Questions 6, 7 et 8

En 2020, Sahbi [18] a démontré la *NP*-complétude du problème de décision QUORUM-ONE en s'appuyant sur une réduction polynomial utilisée par Bazgan *et al.* dans [1]. Il y a également démontré dans le même papier la *NP*-complétude de 4-REGULAR QUORUM en prouvant simplement qu'il n'est qu'une réduction polynomiale du problème *NP*-dur [5] de partition des sommets d'un graphe 4-régulier en triangles [6] [7]. D'autre part, les auteurs [22] ont développé une belle mais néanmoins laborieuse preuve établissant la *NP*-complétude de QUORUM-K. Cependant, cette *NP*-complétude peut être déduite sans difficulté de celle de QUORUM-ONE.

Théorème 2.10 (Sahbi 2020 [18])

Le problème QUORUM-ONE est NP-complet.

Théorème 2.11 (Sahbi 2020 [18])

Le problème 4*-REGULAR QUORUM est NP-complet.*

Théorème 2.12 (Sahbi et Chellali 2018 [22])

Le problème QUORUM-K est NP-complet.

5. Un problème *NP*-dur est comme un problème *NP*-complet dont on ne sait pas s'il est dans $\mathcal{NP}$.
6. Un triangle est un sous-graphe induit isomorphe à K_3.
7. Le problème de partition des sommets d'un graphe 4-régulier en triangles a été prouvé *NP*-complet par les auteurs [25].

Enfin, Sahbi [21] a déduit la *NP*-complétude du problème de décision associé à ψ_q dans les graphes 5-réguliers, noté 5-REGULAR QUORUM, directement à partir de celle de 4-REGULAR QUORUM en construisant de façon polynomial un graphe 5-régulier à partir du produit cartésien d'un 4-régulier et d'un K_2.

Théorème 2.13 (Sahbi 2021 [21])

Le problème 5-REGULAR QUORUM est NP-complet.

Autre réponses aux Questions 1, 2, 3 et 4

Le papier [19] est dédié aux réponses aux **Questions 1**, **2**, **3** et **4**. L'auteur y a apporté les réponses suivantes que nous déclinons sous forme de paragraphes.

Première réponse à la Question 1

En guise de première réponse à la **Question 1**, l'auteur [19] a déduit à partir de la *NP*-complétude de QUORUM-ONE, qu'il n'existe vraissemblablement pas de caractérisation des graphes partitionnables ou non partitionnables en quorums vérifiable en temps polynomial [8], à moins que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$ [9] [10]. Sahbi [19] a toutefois prouvé trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe soit partitionnable ou non en quorums, dont une et sa négation s'énoncent comme suit.

Théorème 2.14 (Sahbi 2021 [19])

Soit G un graphe connexe possédant n_ϵ sommets de degré pair auxquels on a joint à chacun d'entre eux une feuille pour obtenir un graphe G'. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) G admet deux quorums disjoints.

(ii) $\psi_q(G) \geq 2$.

(iii) $\psi_q(G') \geq n_\epsilon + 2$.

8. On parle dans ce cas de *bonne caractérisation.*
9. Une conjecture connue et communément admise, due à Edmonds [5], avance que l'égalité à lieu.
10. Un problème de décision est dans *co-*$\mathcal{NP}$ si la réponse « non » est vérifiable en temps polynomial pour toute instance de ce problème admettant cette réponse.

Corollaire 2.4 (Sahbi 2021 [19])

Soit $G = (V, E)$ *un graphe connexe et soit* $G' = (V', E')$ *le graphe obtenu à partir de* G *en joignant une feuille à chacun des* n_ϵ *sommets de* G *de degré pair. Alors,* $\psi_q(G) = 1$ *si et seulement si* $\psi_q(G') = n_\epsilon + 1$.

Deuxième réponse à la Question 1

Comme deuxième réponse à la **Question 1**, Sahbi [19] a démontré un résultat permettant la construction d'une infinité de classes de graphes non partitionnables en quorums, généralisant les graphes joints de la Proposition 2.22. Ces classes sont construites de sorte qu'elles vérifient les deux conditions de la Proposition 2.10.

Théorème 2.15 (Sahbi 2021 [19])

Soient $r \geq 2$ *un entier et* G *un graphe tels que* $r + |V(G)|$ *est impair et* G *satisfait à une des deux conditions suivantes :*

1. $\delta(G) \leq r - 2$;

2. G *est connexe,* $\delta(G) \leq r - 2$ *et* $\Delta(G) \leq r - 1$.

Alors, on a que $\psi_q(K_r + G) = 1$.

Réponse aux Questions 1 et 2

Sahbi a apporté dans [19] une troisième réponse qui résout à la fois la **Question 1** mais aussi la **Question 2**. Elle consiste à prouver que les graphes $(2k + 1)$-partis complets $K_{3,3,\dots,3}$ sont non partitionnables en quorums. Cette réponse est différente de la précédente en ce sens qu'elle ne vérifie pas la deuxième condition sur $a(G)$ de la Proposition 2.10, ce qui montre que la réponse à la **Question 2** est négative.

Proposition 2.24 (Sahbi. 2021 [19])

Pour tout entier $k \geq 1$, *si* G *est le graphe* $(2k+1)$*-parti complet* $K_{3,3,\dots,3}$ *alors,* $\psi_q(G) = 1$.

Réponse aux Questions 1, 2 ,3 et 4

La dernière réponse à la **Question 1** apportéé par l'auteur [19] s'obtient en construisant une famille infinie de graphes G_ℓ d'ordre pair non partitionnables en quorums. Cette réponse est différente des précédentes du fait que la famille $\{G_\ell\}_{\ell\geq 1}$ ne vérifie aucune condition de la Proposition 2.10. De plus, et son diamètre, et l'écart entre son diamètre et son nombre d'alliance peuvent être aussi grands que l'on veut lorsque ℓ est assez grand. Ces faits permettent d'apporter une quatrième réponse à la **Question 1** et de répondre négativement aux **Questions 2, 3** et **4**.

Proposition 2.25 (Sahbi. 2021[19])

Soient $\ell \geq 1$ un entier, G_ℓ un graphe et $\{B_1, B_2, \ldots, B_{4\ell}\}$ une partition de $V(G_\ell)$ telle que :

(i) $G_\ell [B_1] = K_{4\ell}$.

(ii) Pour tout entier $i \in \{2, \ldots, 4\ell\}$, $G_\ell [B_i] = \overline{K_{4\ell} - i + 1}$.

(iii) Pour tout sommet $v \in B_1$, $N_{G_\ell} [v] = B_1 \bigcup B_2$.

(iv) Pour tout sommet $v \in B_{4\ell}$, $N_{G_\ell}(v) = B_{4\ell-1}$.

(v) Pour tout entier $i \in \{2, \ldots, 4\ell - 1\}$ et tout sommet $v \in B_i$, $N_{G_\ell}(v) = B_{i-1} \bigcup B_{i+1}$.

Alors, $\psi_q(G_\ell) = 1$.

Réponses à la Question 5

Première réponse

La première réponse à la **Question 5** a été apportée par Sahbi et Chellali [22].

Corollaire 2.5 (Sahbi et Chellali 2018 [22])

Pour tout graphe G, $\psi_q(G \circ K_1) \geq \psi_q(G) + 1$, avec égalité si et seulement si $G \in K_1, K_2$.

Deuxième réponse

Cette réponse, donnée par Sahbi [21], affine la précédente.

Théorème 2.16 (Sahbi 2021 [21])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\psi_q(G \circ K_1) = \psi_q(G) + 2$ si et seulement si $G \in \left\{\overline{K_2}, P_3, K_{1,3}, 2K_2, K_1 \cup K_2\right\}$.

Réponse partielle à la Question 9

Cette réponse fournie par Sahbi [21], n'est autre qu'une conséquence du Théorème 2.8 et du Corollaire 2.3 qui démontrent que ψ_q est calculable en temps linéaire pour n'importe qu'elle arbre binaire.

Réponse partielle à la question 10

En utilisant la Proposition 2.13 et la Corollaire 2.1, Sahbi et Chellali [22] ont démontré la validité de la borne supérieure Gaddum-Nordhaus de la Conjecture 2.2.

Théorème 2.17 (Sahbi et Chellali 2018 [22])

Si G est un graphe d'ordre $n \geq 4$ alors,

$$\psi_q(G) + \psi_q(\overline{G}) \leq n + 2.$$

La borne inférieure de la conjecture reste ouverte.

Chapitre 3

CONTRIBUTION : SOUS-QUORUM-COLORATIONS DE QUELQUES CLASSES D'ARBRES

Le présent chapitre décompose en deux sections : la première est consacrée à une variante de la quorum-coloration qui constitue le thème de ce mémoire, à savoir la sous-quorum-coloration, dont nous posons une première définition due aux auteurs [13], ainsi que la terminologie et les notations utiles dans notre investigation et à l'aide desquelles nous en déduisons des définitions équivalentes qui offrent différentes perspectives pour l'étude des sous-quorum-colorations ; la deuxième section consiste en une contribution regroupant des résultats qui fournissent la valeur du paramètre principal de l'étude dans certaines classes d'arbres.

3.1 Sous-quorum-colorations

Une *sous-quorum-coloration* est une coloration d'une partie des sommets d'un graphe telle que tout sommet coloré soit un sommet quorum relativement aux sommets colorés, c'est-à-dire, tout sommet coloré admet plus de voisins de même couleur que de voisins de couleur différente, où les sommets non colorés ne sont pas pris en compte.

3.1.1 Définition formelle

Une sous-quorum coloration f d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction surjective partielle de V dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ (i.e. non forcément définie sur tout V) satisfaisant le fait que pour tout sommet $v \in V$, si $f(v)$ est définie alors, au moins la moitié des sommets du voisinage fermé de v, ayant été colorés, ont la même couleur que v. *Le nombre de sous-quorum-coloration* de G est égal à la valeur maximum de k et est noté par $\psi_{sq}(G)$.

On peut déduire de ce qui précède qu'une sous-quorum-coloration d'un graphe G n'est autre qu'une quorum-coloration d'un sous-graphe induit de G par un sous-ensemble de sommets de $V(G)$. Il s'en suit que le nombre de sous-quorum-coloration est égal au nombre de quorum-coloration maximum d'un sous-graphe induit de G induit par une partie $S \subseteq V(G)$, i.e.

$$\psi_{sq}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \psi_q(G[S]).$$

En fait, un sommet de G non coloré relativement à une sous-quorum-coloration de G est un sommet qu'on a supprimé de G.

Pour une sous-quorum-coloration $f : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ d'un graphe G, l'ensemble $\{f^{-1}(i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ est noté $sq(f)$ et est également appelé sous-quorum-coloration de G. Une sous-quorum-coloration de G de cardinal $\psi_{sq}(G)$ est une ψ_{sq}-coloration de G. On note par G_f le sous-graphe induit par les sommets colorés de $sq(f)$, c'est-à-dire, $G_f = G\left[f^{-1}\left(\{1, 2, \ldots, k\}\right)\right]$.

Il est utile de rappeler, pour ce chapitre, que pour une quorum-coloration π de G et un sommet $v \in V(G)$, on note par $\mathcal{C}_\pi(v)$ l'unique quorum de π contenant v.

Notons d'autre part qu'un sommet d'un stable ou d'un 2-indépendant S d'un graphe G étant adjacent à au plus un sommet de S, on peut déduire que l'ensemble des singletons d'un stable ou d'un 2-indépendant est une sous-quorum-coloration. Comme on a toujours $\beta_2(G) \geq \beta_1(G)$, il découle alors de ce qui précède la borne inférieure suivante :

$$\psi_{sq}(G) \geq \max\left\{\psi_q(G), \beta_1(G), \beta_2(G)\right\} = \max\left\{\psi_q(G), \beta_2(G)\right\}. \tag{3.1}$$

Par exemple, on peut vérifier sans difficulté sur la FIGURE 3.1 que l'on a $\psi_q(G) = 3$ et que $\beta_2(G) = \psi_{sq}(G) = 4$.

Exemple :

Considérons le graphe P_4 et une quorum-coloration π de P_4. On a alors d'après la Proposition 2.16 que $\psi_q(P_4) = 3$. Par ailleurs, en posant $V = V(P_4)$, pour toute partie non vide $S \subseteq V$ on a $\psi_q(P_4[V \setminus S]) \leq |V \setminus S| \leq 3$. Par conséquent, $\psi_{sq}(P_4) = \psi_q(P_4) = 3$.

Notons qu'une ψ_{sq}-coloration différente de la ψ_q-coloration de P_4 peut être obtenue en

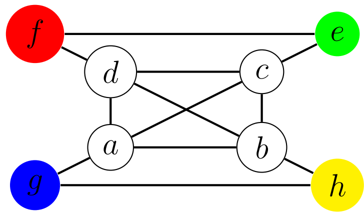


FIGURE 3.1 – Illustration de la Définition formelle

supprimant un seul sommet de P_4 (FIGURE 3.2).

FIGURE 3.2 – Une ψ_{sq}-coloration de P_4

3.1.2 Quelques propriétés fondamentales des ψ_{sq}-colorations

Les propriétés suivantes découlent directement de celles des quorum-colorations mais aussi des définitions et des propriétés vues dans la précédente section.

Proposition 3.1 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Soit G un graphe. Alors,

$$\psi_{sq}(G) \geqslant \max\left\{\psi_q(G), \beta_2(G)\right\}.$$

Proposition 3.2 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Soient G un graphe. Alors,

$$\psi_{sq}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \psi_q(G[S]).$$

Proposition 3.3 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Soit G un graphe et soit $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ une ψ_{sq}-coloration de G. Alors, pour tout $i,\ 1 \leq i \leq k$, le sous-graphe induit $G[V_i]$ est connexe.

Proposition 3.4 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Soit G un graphe non connexe dont les composantes sont $G_1, G_2, \ldots, G_r$, $r \geq 1$. Alors

$$\psi_{sq}(G) = \sum_{1 \leq i \leq r} \psi_{sq}(G_i).$$

3.2 Nombre de sous-quorum-coloration de quelques classes d'arbres

3.2.1 Chaînes

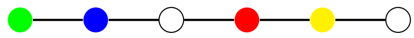
Comme le titre l'indique, nous prouvons dans cette section des résultats fournissant la valeur exacte du nombre de sous-quorum-coloration de quelques classes d'arbres. La première classe est la classe élémentaire des chaînes dont une ψ_{sq}-coloration est illustré dans la FIGURE 3.3. Formellement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.1 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Pour tout $n \geq 1$. Alors

$$\psi_{sq}(P_n) = \beta_2(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

Preuve. Pour $n \in \{1, 2\}$, il est évident que $\psi_{sq}(P_n) = n$, et que donc le résultat tient puisqu'on vérifie facilement dans ce cas que $n = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ pour tous $n \in \{1, 2\}$. Supposons maintenant que $n \geq 3$ et soit π une sous-quorum-coloration de $P_n = v_1 v_2 \ldots v_n$. Observons d'une part que pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, le nombre maximum de couleurs qui peuvent être utilisées pour colorer trois sommets consécutifs v_i, v_{i+1} et v_{i+2} n'excède pas 2 sinon, v_{i+1} ne serait pas un sommet quorum. Par suite, $\psi_{sq}(P_n) \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$. D'autre part, il est connu que $\beta_1(T) \geq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ pour tout arbre T . D'où puisque P_n est un arbre , alors $\psi_{sq}(P_n) \geq \beta_1(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$. $\square$



P_6

FIGURE 3.3 – ψ_{sq}-coloration d'une chaîne P_6

3.2.2 Etoiles

Les feuilles d'une étoile à au moins trois sommets pendants sont les seules classes de ses ψ_{sq}-colorations, comme le montrent la FIGURE 3.4 et le résultat suivant.

Proposition 3.5 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Pour tous entier $n \geq 2$, on a

$$\psi_{sq}(S_n) = \beta_1(S_n) = n.$$

Preuve. Soit S_n une étoile de centre v et soit L l'ensemble de ses n feuilles, avec $n \geq 2$. Comme $d_{S_n}(v) \geq 2$, on a nécessairement $\psi_{sq}(S_n) \leq n$ sinon, v ne serait pas un sommet quorum. D'autre part, L étant clairement un ensemble indépendant maximum de S_n de cardinal n, on obtient en vertu de la Proposition 3.1 que $\psi_{sq}(S_n) \geq \beta_0(S_n) = n$. D'où le résultat . □

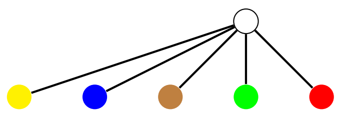


FIGURE 3.4 – $\psi_{sq}-$coloration d'une étoile S_5

3.2.3 Double étoiles

Une *double étoile* est une chenille à deux supports distincts. La double étoile dont un support est adjacent à m feuilles et dont le deuxième support est adjacent à n feuilles est notée $S_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

Le nombre de sous-quorum-coloration des double étoiles est fourni par le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Pour tous entiers $m, n \geq 1$, *on a*

$$\psi_{sq}(S_{m,n}) = \begin{cases} \psi_q(S_{m,n}) = m+n+1, & \textit{si } \min\{m,n\} = 1 \textit{ ou } \max\{m,n\} \leq 2, \\ \beta_1(S_{m,n}) = m+n & \textit{si } \min\{m,n\} \geq 2 \textit{ et } \max\{m,n\} \geq 3. \end{cases}$$

Preuve. Posons $G = S_{m,n}$, $V(G) = V$, $L(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m+n}\}$ et $C = V \setminus L = \{u_0, v_0\}$ avec $d_G(u_0) \leq d_G(v_0) = \Delta(G)$. Considérons les deux cas suivants.

Cas 1. $\min\{m,n\} = 1$ ou $\max\{m,n\} \leq 2$. Soit π une quorum-coloration de G. Comme dans ce cas $d_G(u_0) \geq 2$ alors, on a $|\mathcal{C}_\pi(u_0)| \geq \left\lceil \frac{2+1}{2} \right\rceil = 2$. Il s'en suit que $\psi_q(G) \leq 1 + |V \setminus \mathcal{C}_\pi(u_0)| \leq 1 + m + n + 2 - 2 = m + n + 1$. Par ailleurs, pour toute partie non vide $S \subseteq V$, on a par la Proposition 2.6 que $\psi_q(G[V \setminus S]) \leq |V \setminus S| \leq m + n + 1$. On déduit des deux inégalités précédentes que $\psi_{sq}(G) \leq m + n + 1$. Nous allons montrer que $\psi_{sq}(G) \geq m + n + 1$ en distinguant les deux sous-cas suivants.

Sous-cas 1.1. $m = n = 2$. Soit f la fonction définie sur V par

$$f(v) = \begin{cases} i, & \text{si } v = v_i \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m+n\}, \\ m+n+1 & \text{si } v \notin L(G). \end{cases}$$

Il est facile de voir que f est une sous-quorum-coloration de G, ce qui implique que $\psi_{sq}(G) \geq |sq(f)| = m + n + 1$.

Sous-cas 1.2. $m = 1$ ou $n = 1$. Dans ce cas, on a $d_G(u_0) = 2$. Soit alors g la fonction définie sur $V \setminus \{v_0\}$ par

$$f(v) = \begin{cases} i, & \text{si } v = v_i \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m+n\}; \\ m+n+1 & \text{si } v = u_0. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que g est une sous-quorum-coloration de G, induisant que $\psi_{sq}(G) \geq$

$|sq(g)| = m + n + 1$.

Cas 2. $\min\{m, n\} \geq 2$ et $\max\{m, n\} \geq 3$. Dans ce cas, on a $d_G(v_0) \geq 3$. Soit h la fonction définie sur $L(G)$ par $h(v) = i$, avec $v = v_i$ pour un certain $i \in \{1, 2, \ldots, m+n\}$. Il est alors aisé de voir que h est une sous-quorum-coloration de G, ce qui entraîne que $\psi_{sq}(G) \geq |sq(h)| = m + n$. Par ailleurs, soit π_1 une quorum-coloration de G. On a alors $|\mathcal{C}_{\pi_1}(v_0)| \geq \left\lceil \frac{4+1}{2} \right\rceil = 3$, ce qui implique que $\psi_q(G) \leq 1 + |V \setminus \mathcal{C}_{\pi_1}(v_0)| \leq 1 + m + n + 2 - 3 = m + n$. Soit S une partie non vide de V. Montrons que $\psi_q(G[V \setminus S]) \leq m + n$ conformément aux deux sous-cas suivants.

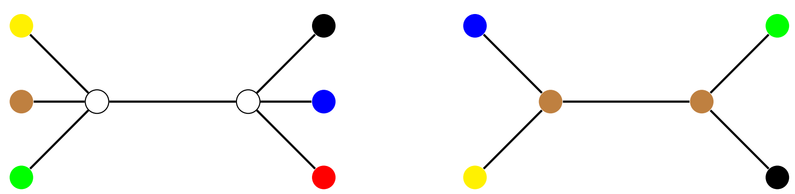
Sous-cas 2.1. $|S| = 1$. Dans ce cas, on peut voir sans difficulté que $\Delta(G[V \setminus S]) \geq 2$. Soit w_0 un sommet de $V \setminus S$ tel que $d_{G[V \setminus S]}(w_0) = \Delta(G[V \setminus S])$. Alors, en choisissant arbitrairement une quorum-coloration π_2 de $G[V \setminus S]$, on obtient que $|\mathcal{C}_{\pi_2}(w_0)| \geq \left\lceil \frac{2+1}{2} \right\rceil = 2$ puis que $\psi_q(G[V \setminus S]) \leq 1 + |V \setminus \mathcal{C}_{\pi_2}(w_0)| \leq 1 + m + n + 1 - 2 = m + n$.

Sous-cas 2.2. $|S| \geq 2$. Dans ce cas, on a $\psi_q(G[V \setminus S]) \leq |V \setminus S| \leq m + n$.

Ainsi, pour toute partie non vide $S \subseteq V$, on a $\psi_{sq}(G[V \setminus S]) \leq m + n$.

Ce qui complète la preuve. $\square$

Les ψ_{sq}-colorations des doubles étoiles sont illustrées dans la FIGURE 3.5.



$S_{3,3}$ $S_{2,2}$

FIGURE 3.5 – ψ_{sq}-colorations de $S_{2,2}$ et de $S_{3,3}$

3.2.4 Chenilles complètes, chenilles ℓ-uples

Dans cette sous-section, nous déterminons le nombre de sous-quorum-coloration de certaines chenilles dont la particularité est que tous leurs supports sont adjacents au même nombre de feuilles. Ces sous-classes particulières de chenilles sont définies comme suit.

Soit T une chenille d'épine $v_1v_2\ldots v_k$ telle que pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, le sommet v_i soit adjacent à n_i feuilles. On dit T est une chenille *complète* si $n_i > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (FIGURE 3.6). Si $n_i = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ alors, la chenille T est dite *simple* et est isomorphe à $P_k \circ K_1$ (FIGURE 3.8). Si $n_i = 2$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ alors, la chenille est dite *double* et est isomorphe à $P_k \circ \overline{K_2}$ (FIGURE 3.7). Plus généralement, si $n_i = \ell$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ alors, la chenille est dite ℓ-uple (FIGURES 3.9, 3.10 et 3.11).

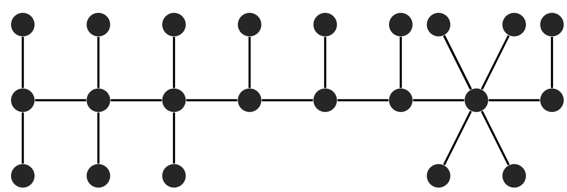


FIGURE 3.6 – Exemple de chenille complète

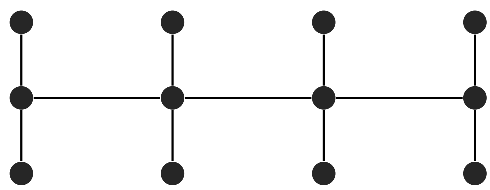


FIGURE 3.7 – Exemple de chenille double

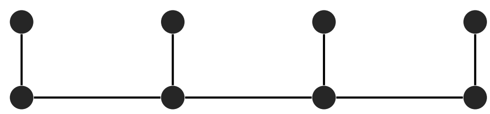


FIGURE 3.8 – Exemple de chenille simple

Le premier résultat concerne les ψ_{sq}-colorations des chenilles simples (FIGURE 3.12).

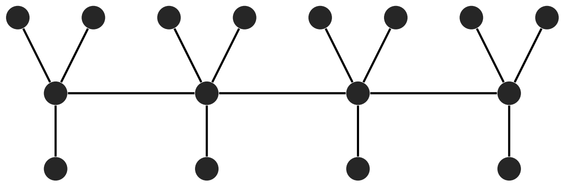


FIGURE 3.9 – Exemple de chenille triple

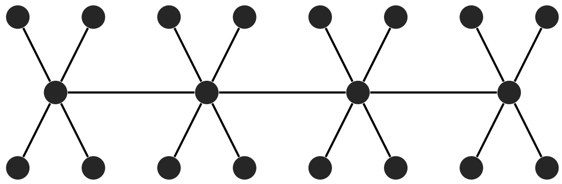


FIGURE 3.10 – Exemple de chenille quadruple

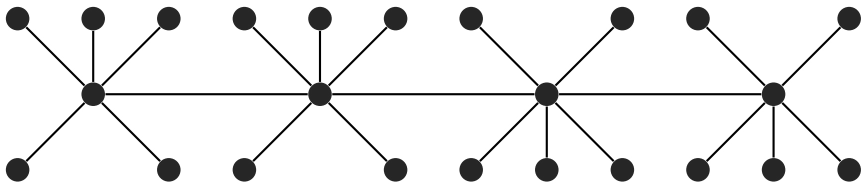


FIGURE 3.11 – Exemple de chenille quintuple

Théorème 3.3 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Soit $P_k \circ K_1$ une chenille simple. Alors,

$$\psi_{sq}(P_k \circ K_1) = \beta_2(P_k \circ K_1) = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

Preuve. Soit $v_1 v_2 \dots v_k$ l'épine de $P_k \circ K_1$. Posons $T_k = P_k \circ K_1$ et $V = V(T_k)$. Pour montrer que $\psi_{sq}(T_k) = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, nous appliquons le principe d'induction sur l'entier k. Pour $k = 0$, on pose $\psi_{sq}(T_0) = 0 = 0 + \left\lceil \frac{0}{2} \right\rceil$. Pour $k \in \{1, 2\}$, on a d'après le Théorème 3.1 que $\psi_{sq}(T_1) = \psi_{sq}(P_2) = 2 = 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil$ et $\psi_{sq}(T_2) = \psi_{sq}(P_4) = 3 = 2 + \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil$. Supposons que la formule soit vraie jusqu'à un certain rang $k - 1 \geq 2$, et soit π une ψ_{sq}-coloration de T_k. Posons $U = \{v_{k-1}, u_{k-1}, v_k, u_k\}$, où u_j est la feuille adjacente au support v_j pour tout $j \in \{k-1, k\}$. Observons d'une part que le nombre de couleurs de π qu'on peut utiliser pour colorer les sommets de U n'excède pas 3 autrement, le sommet v_k ne serait pas un sommet quorum. Ainsi, si le sommet v_{k-1} est coloré s par rapport à π, on peut le décolorer ainsi que tous les sommet de T_k coloré s puis assigner trois nouvelles couleurs distinctes aux sommets v_k, u_{k-1} et u_k sans diminuer $|\pi|$; soit alors π une telle coloration. Par conséquent, comme $T_k[V \setminus \{v_{k-1}\}]$ est réunion disjointe de $T_k[V \setminus U] \simeq T_{k-2}$ et de $T_k[U \setminus \{v_{k-1}\}] \simeq K_1 \cup T_1$, on obtient d'après la Proposition 3.4 et l'hypothèse d'induction que

$$\psi_{sq}(T_k) = \psi_{sq}(T_{k-2}) + \psi_{sq}(K_1 \cup T_1) = k - 2 + \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil + 3$$

$$= k + 1 + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil. \square$$

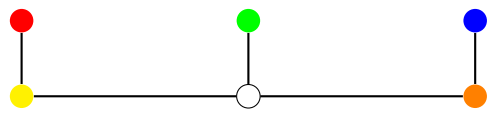


FIGURE 3.12 – $\psi_{sq}-$coloration d'une chenille simple $P_3 \circ K_1$

Le résultat suivant fournit le nombre de sous-quorum-coloration des chenilles doubles (FIGURE 3.13).

Théorème 3.4 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Pour tout entier $k \geq 1$, *on a*

$$\psi_{sq}(P_k \circ \overline{K_2}) = 2k + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2k}{3} \right\rceil \right\rfloor.$$

Preuve. Soit $v_1 v_2 \dots v_k$ l'épine de $P_k \circ \overline{K_2}$. Posons $T_k = P_k \circ \overline{K_2}$, $V = V(T_k)$ et $L = V \setminus \{v_{1s}, v_2, \dots, v_k\}$. Appliquons le principe d'induction sur l'entier k. Pour $k = 0$, on pose $\psi_{sq}(T_0) = 0 = 0 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{0}{3} \right\rceil \right\rfloor$. Pour $k = 1$, on a par la Proposition 3.5 que $\psi_{sq}(T_1) = \psi_{sq}(S_2) = 2 = 2 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil \right\rfloor$. Pour $k = 2$, en appliquant le Théorème 3.2 on obtient $\psi_{sq}(T_2) = \psi_{sq}(S_{2,2}) = 2 + 2 + 1 = 5 = 4 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil \right\rfloor$. Supposons que la formule soit vraie jusqu'à un rang $k-1 \geq 2$ et soit π une ψ_{sq}-coloration de T_k. Posons $U = \{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\} \cup [N_{T_k}(\{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\}) \cap L]$. Nous allons montrer que le nombre maximum de couleurs n_U de π qu'on peut utiliser pour colorer les sommets de U est 7. D'abord, remarquons que $n_U < 9$ sinon, aucun des sommets v_{k-2}, v_{k-1} et v_k ne serait sommet quorum. Supposons que $n_U = 8$ et supposons que tous les sommets de U sont colorés. Dans ce cas, observons que si deux sommets adjacents v_i et v_j de $\{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\}$ sont colorés différemment alors, au moins un des sommets v_i ou v_j ne serait pas sommet quorum. Par conséquent, les sommets v_{k-2}, v_{k-1} et v_k ont tous même couleur relativement à π et on en déduit que $n_U \leq 1 + |U \setminus \{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\}| = 7$, contradiction. Supposons maintenant qu'au moins un sommet v_ℓ ne soit pas coloré pour un certain $\ell \in \{k-2, k-1, k\}$. Par suite, si les sommets de $\{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\} \setminus \{v_\ell\}$ utilisent deux couleurs distinces de π alors, on peut voir sans difficulté que cela implique qu'au moins un sommet de $\{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\} \setminus \{v_\ell\}$ n'est pas un sommet quorum, contradiction. On en conclut avoir nécessairement $n_U \leq 7$. De plus, si v_{k-2} est coloré avec une couleur s par rapport à π alors, on peut le décolorer ainsi que tous les sommets de T_k coloré s, assigner une nouvelle même couleur aux sommets v_{k-1} et v_k et assigner six autres nouvelles couleurs distinctes aux feuilles de U de sorte qu'on obtienne une nouvelle ψ_{sq}-coloration de T_k dans laquelle v_{k-2} n'est pas coloré ; soit alors π une telle ψ_{sq}-coloration de T_k. Comme $T_k[V \setminus \{v_{k-2}\}]$ est réunion disjointe de $T_k[V \setminus U] \simeq T_{k-3}$ et de $T_k[U \setminus \{v_{k-2}\}] \simeq \overline{K_2} \cup T_2$, on obtient par la Proposition 3.4 et l'hypothèse d'induction que

$$\psi_{sq}(T_k) = \psi_{sq}(T_{k-3}) + \psi_{sq}(\overline{K_2} \cup T_2) = 2(k-3) + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2(k-3)}{3} \right\rceil \right\rfloor + 2 + 4 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil \right\rfloor$$

$$= 2k + 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\left\lceil \frac{2k}{3} \right\rceil - 2 \right) \right\rfloor = 2k + 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2k}{3} \right\rceil - 1 \right\rfloor$$

$$= 2k + 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2k}{3} \right\rceil \right\rfloor - 1 = 2k + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2k}{3} \right\rceil \right\rfloor . \square$$

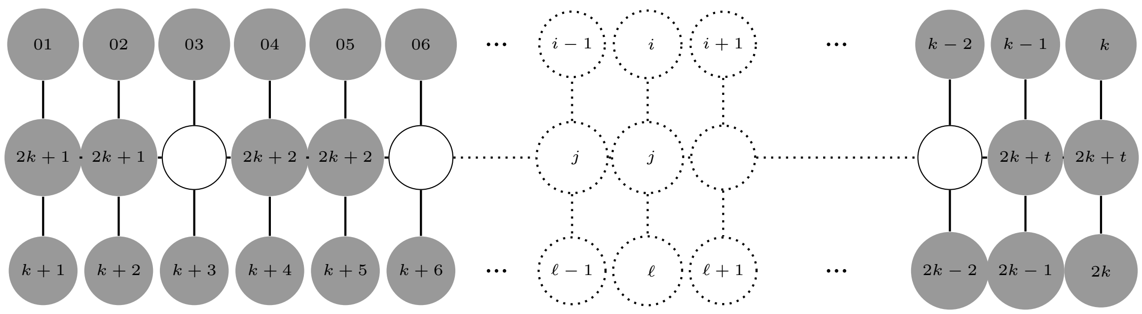


FIGURE 3.13 – ψ_{sq}-coloration d'une chenille double

Le théorème suivant montre que pour les chenilles complètes pour lesquelles chaque support est adjacent à au moins trois feuilles, le nombre de sous-quorum-coloration correspond au nombre de feuilles d'une telle chenille. Dans ce qui suit, l'ensemble des feuilles d'un graphe G sera noté par $L(G)$.

Théorème 3.5 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Soit T_k une chenille complète à k supports dont chacun est adjacent à au moins trois feuilles. Alors,

$$\psi_{sq}(T_k) = \beta_2(T_k) = |L(T_k)|.$$

Preuve. Nous procédons de nouveau par induction. Pour $k \in \{1, 2\}$, on peut facilement vérifier la validité du résultat en appliquant la Proposition 3.5 et le Théorème 3.4. Supposons maintenant que la formule est valide jusqu'à un certain rang $k - 1 \geq 2$. Posons $V = V(T_k)$, $L_k = N_{T_k}(v_k) \cap L(T_k)$ et soit π une ψ_{sq}-coloration de T_k. Alors, comme $n_k \geq 3$, on en déduit que le nombre maximum de couleurs de π utilisés pour colorer les sommets de $\{v_k\} \cup L_k$ ne dépasse pas n_k sinon, v_k ne serait pas un sommet quorum. De plus, si v_k est coloré avec une couleur s par rapport à π alors, en le décolorant ainsi que tous les sommets ayant la couleur s puis en assignant n_k nouvelles couleurs distinctes aux feuilles de L_k, on obtient une sous-quorum-coloration de cardinal π où v_k n'est pas coloré. On peut donc supposer que v_k est décoloré par dans π. Comme $T_k[V \setminus \{v_k\}]$ est réunion disjointe de $T_k[V \setminus (\{v_k\} \cup L_k)] \simeq T_{k-1}$ et $T_k[L_k]$, on obtient que

$$\psi_{sq}(T_k) = \psi_{sq}(T_{k-1}) + |L_k| = |L(G)|. \square$$

Comme conséquence immédiate du Théorème 3.5, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3.1 (Sahbi *et al.* 2021 [20])

Pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$\psi_{sq}(P_k \circ \overline{K_n}) = \beta_2(P_k \circ \overline{K_n}) = nk.$$

3.2.5 Arbres binaires complets

Dans cette sous-section, nous déterminons la valeur du nombre de sous-quorum-coloration des arbres binaires complets dont nous rappelons la définition dans le paragrahe suivant.

Avant de définir ce qu'est un arbre binaire complet, nous rappelons la notion d'arbre enraciné.

- Un arbre *enraciné* $T = (V, E, r)$ est un arbre possédant un sommet distingué r de V appelé *racine*. Pour un sommet $u \in V$, on note la distance $d_T(u, r)$ simplement par $d(u)$ qu'on appelle *profondeur* de u dans T; en particulier, la profondeur de l'arbre enraciné $T = (V, E, r)$ est définie par $d = \max_{u \in V} d(u)$. Si $v, w \in V$, $vw \in E$ et $d_w = d_v + 1$ alors, w est dit ***fils*** de v et v ***père*** de w. Notons que tout sommet non pendant a nécessairement un fils. Si deux sommets sont des fils d'un même père alors, on dit qu'ils sont *frères*. Pour tout entier $i \in \{0, ..., d\}$, on note par D_i l'ensemble des sommets de T de profondeur i, c'est-à-dire, $D_i = \{v \in V \setminus L \mid d(v) = i\}$; en particulier, on a $D_0 = \{r\}$.
- Pour tous entiers $k \geq 0$, on appelle arbre binaire *complet* de *profondeur* k le graphe T_k défini inductivement comme suit :
  - T_0 est l'arbre trivial K_1.
  - T_1 est le graphe biparti complet S_2.
  - Pour $k \geq 2$, T_k est obtenu à partir de deux copies disjointes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de T_{k-1} et d'un nouveau sommet r qu'on joint aux racines de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$; ainsi, r est la racine de T_k (FIGURE 3.14).

Notons que dans un arbre binaire complet, chaque sommet distinct de la racine admet un unique frère et un unique père. Aussi, tout sommet non pendant d'un arbre binaire complet admet exactement deux fils.

Le nombre de sous-quorum-coloration des arbres binaires complets s'obtient par induction sur la profondeur k (FIGURE 3.15), comme le montre le théorème suivant.

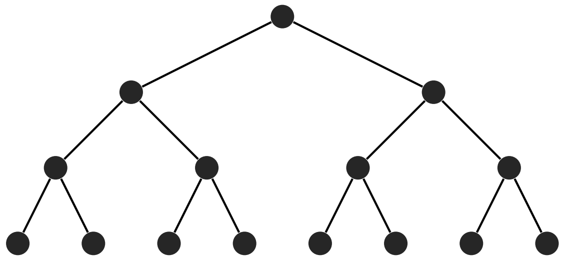


FIGURE 3.14 – Exemple d'arbre binaire complet

Théorème 3.6 (Sahbi *et al.* **2021 [20])**

Soient $k \geq 0$ un entier et T_k un arbre binaire complet de profondeur k et de racine r. Alors,

$$\psi_{sq}(T_k) = \beta_2(T_k) = \frac{2^{k+2}}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}\right].$$

Preuve. Pour $k = 0$, on a $\psi_{sq}(T_0) = \psi_{sq}(K_1) = 1 = \frac{2^{0+2}}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor + 1}\right]$. Pour $k = 1$, on a par la Proposition 3.5 que $\psi_{sq}(T_1) = \psi_{sq}(S_2) = 2 = \frac{2^{1+2}}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1}\right] = 2$. Supposons maintenant que la formule soit vraie jusqu'à un certain ordre $k - 1 \geq 1$. Nous allons montrer qu'il existe au moins une ψ_{sq}-coloration de T_k telle qu'aucun sommet de D_{k-1} ne soit coloré par rapport à π. Pour ce faire, soient π une ψ_{sq}-coloration de T_k et $u, v \in D_k$ deux feuilles de T_k de même père $w \in D_{k-1}$. Supposons que les sommets u, v et w utilisent trois couleurs distinctes de π. Soient w' et x respectivement les frère et père de w et soient u' et v' les fils de w'. D'une part, x a la même couleur que w sinon, les fils de w utilisant deux couleurs distinctes différentes de celle de w, w ne serait pas un sommet quorum. D'autre part, si w' est coloré différemment que x alors, au moins un de u' ou de v' a la couleur de w'. Dans ce cas, en décolorant w' on obtient une ψ_{sq}-coloration de T_k. On peut donc supposer que w' n'est pas coloré par rapport à π. Alors, en décolorant w on obtient de nouveau une ψ_{sq}-coloration de T_k. On peut donc supposer qu'aucun sommet de D_{k-1} n'est coloré relativement à π. Comme $T_k[V \setminus D_{k-1}]$ est réunion disjointe de T_{k-2} et de $\overline{K_{2^k}}$, on obtient par la Proposition 3.4 et l'hypothèse d'induction que

$$\psi_{sq}(T_k) = \psi_{sq}(T_{k-2}) + 2^k = \frac{2^k}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\right] + 2^k$$

$$= \frac{2^{k+2}}{3 \times 4}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\right] + \frac{2^{k+2}}{4} = \frac{2^{k+2}}{3}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + \frac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{2^{k+2}}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}\right]. \square$$

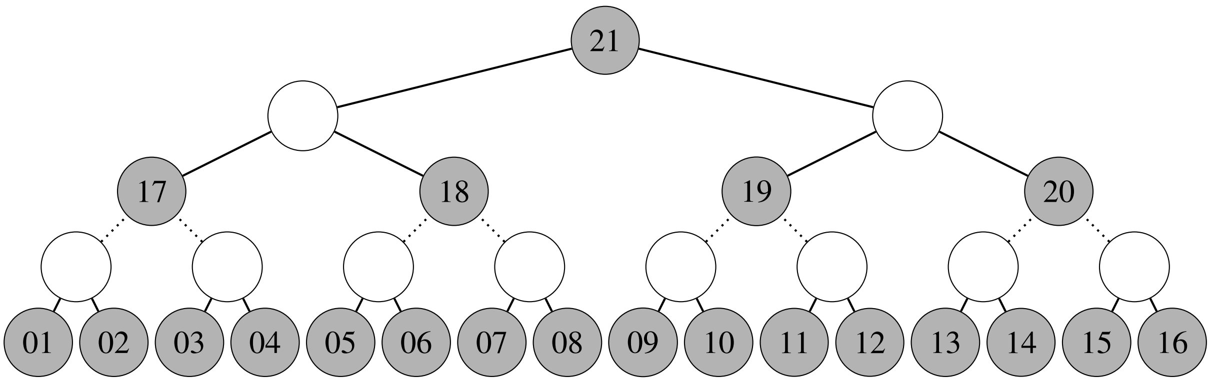


FIGURE 3.15 – ψ_{sq}-coloration d'un arbre binaire complet

CONCLUSION

Nous nous sommes attelés dans ce mémoire à dégager quelques propriétés fondamentales des sous-quorum-colorations des graphes dont la plupart découlent naturellement de celles des quorum-colorations classiques. Nous avons également réussi à déterminer le nombre de sous-quorum-coloration de certaines familles infinies d'arbres notamment les chenilles complètes dont les supports sont adjacents à un même nombre de feuilles, mais aussi les arbres binaires complets. Aussi, nous avons pu déduire à partir des définitions des sous-quorum-colorations les bornes ψ_q et β_2 pour notre paramètre d'investigation ψ_{sq}. Notre modeste travail constitue la toute première contribution concernant l'étude des sous-quorum-colorations des graphes qui a été posée problème ouvert par les auteurs [13]. Néanmoins, tout reste à faire en la matière et pour notre part, nous considérons que les problèmes suivants sont d'intérêt :

1) Déterminer le nombre de sous-quorum-coloration des chenilles complètes quelconques.
2) Déterminer le nombre de sous-quorum-coloration des chenilles quelconques.
3) Déterminer le nombre de sous-quorum-coloration des arbres binaires quelconques.
4) Déterminer le nombre de sous-quorum-coloration des arbres quelconques.
5) Caractériser les chenilles T tels que $\psi_{sq}(T) = \beta_2(T)$.
6) Caractériser les chenilles T tels que $\psi_{sq}(T) = \psi_q(T)$.
7) Caractériser les arbres T tels que $\psi_{sq}(T) = \beta_2(T)$.
8) Caractériser les arbres T tels que $\psi_{sq}(T) = \psi_q(T)$.

REFERENCES

[1] C. Bazgan, Zs. Tuza and D. Vanderpooten, *Complexity and approximation of satisfactory partition problems*, Proceedings of the 11th International Computing and Combinatorics Conference (COCOON), LNCS 3595 (2005), 829–838.

[2] C. Berge, *Graphes*, Gauthier-Villars, 3ème édition, 1983.

[3] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph theory*, Springer, 2008.

[4] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2017.

[5] J. Edmonds, *Minimum partition of a matrloid into independent subsets*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 69 (1965), 67–72.

[6] L. Eroh, R. Gera, *Alliance partition number in graphs*, Ars Combin. 103 (2012), 519–529.

[7] H. Fernaua, J.A. Rodriguez-Velazquez, *A survey on alliances and related parameters in graphs*, Electron. J. Graph Theory Appl., 2 (1) (2014), 70–86.

[8] G.H. Fricke, L.M. Lawson, T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, and S.T. Hedetniemi. *A note on defensive alliances in graphs*. Bulletin ICA, 38 (2003), 37–41.

[9] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, 1979.

[10] M.U. Gerber, D. Kobler, *Classes of graphs that can be partitioned to satisfy all their vertices*, Australas. J. Combin. 29 (2004), 201–214.

[11] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[12] T.W. Haynes and J.A. Lachniet, *The alliance partition number of grid graphs*, AKCE Int. J. Graphs Combin., 4(1) (2007), 51–59.

[13] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, and P. Kristiansen, *Alliances in graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput., 48 (2004), 157–177.

[14] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, and P. Kristiansen, *Alliances in graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput., 48 (2004), 157–177.

[15] M.B. Miller and B.L. Bassler, *Quorum sensing in bacteria*, Annu. Rev. Microbiol., 55 (2001), 165–199.

[16] C. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Springer, 1993.

[17] K. Romer and F. Mattern, The design space of wireless sensor networks, IEEE Wireless Communications, 11(6) (2004), 54–61.

[18] R. Sahbi, *On the complexity of some quorum colorings problems of graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb. 17 (3) (2020), 784-787.

[19] R. Sahbi, *Solutions to four open problems on quorum colorings of graphs*, RAIRO Oper. Res. 55 (4) (2021), 2385-2394.

[20] R. Sahbi, Y. Belkina, A. Bennadji, *Sub-quorum colorings of some families of trees*, Preprint (2021).

[21] R. Sahbi, *Sur la quorum-coloration des graphes*, Thèse de doctorat d'état en Recherche Opérationnelle, Université Saâd Dahlab, Blida 1 (2021).

[22] R. Sahbi, M. Chellali, *On some open problems concerning quorum colorings of graphs*, Discrete Appl. Math., 247 (2018), 294–299.

[23] K.H. Shafique, Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering, Ph. D. Thesis in Computer Science, University of Central Florida (2004).

[24] K. Ouazine, H. Slimani, A. Tari, *Alliances in graphs : Parameters, poperties and applications-A survey*, AKCE Int. J. Graphs Comb., 15 (2018), 115–154.

[25] M.M. van Rooij, M.E. van Kooten Niekerk, H.L. Bodlaender, *Partition into triangles on bounded degree graphs*, in : Proceedings of the 37th Conference on Current Trends in

Theory and Practice of Computer Science, SOFSEM'11, in : Lecture Notes in Computer Science, vol. 6543, Springer (2011), 558–569.

[26] I.G. Yero, J.A. Rodriguez-Velazquez, *Defensive alliances in graphs : a survey*, arXiv :1308.2096v1 [math.CO] 9 Aug 2013.