

**UNIVERSITE DE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté de Technologie**

Département de génie mécanique

# **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : construction mécanique

ETUDE D'UNE FISSURE DE DUGDALE

DANS UNE BANDE INFINIE CHARGEE EN MODE I

Par

**Abdelaziz HENNI CHEBRA**

Devant le jury composé de :

Pr	A.Aiad	Professeur, U.S .D de Blida	Président
Pr	M. Ouali	Professeur, U.S.D de Blida.	Examineur
Dr	H. Ferdjani	Maître de conférences A, U.S.D de Blida	Rapporteur

Blida, 2012

## ABSTRACT

The objective of this work is the study of an infinite strip containing a Dugdale crack parallel to these boundaries loaded mode I. Using Fourier transformation, the equations of elastic problem are analytically transformed into a Cauchy singular integral equation of the first type. Solving this integral equation is numerically using Chebychev polynomials. Because of the presence of discontinuities in the loading distribution along the crack lips, the techniques of classical resolutions are not applicable and must be changed. We calculate the variation of the applied stress with the crack length by varying a number of parameters of the problem. We conclude with a comparison between the models of Dugdale and Griffith.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة صفيحة غير متناهية الأبعاد تحتوي على شق Dugdale موازي لسطحها تحت حمولة من النمط الأول ، تستعمل محولات Fourier لاستبدال معادلات المرونة بمعادلة تكاملية يتم حل هذه المعادلة باستعمال كثيرات الحدود Chebyshev بسبب حالة عدم الاستمرار في توزيع الحمولة على طول حافتي الشق تصبح تقنيات الحل الكلاسيكية غير قابلة للتطبيق حيث يتم استبدالها ، نقوم بحساب تغيرات الاجهادات المطبقة مع طول الشق بالنسبة لعدد من المعطيات الخاصة بهذه الحالة ، نختم هذا العمل بمقارنة بين نموذجي Dugdale و Griffith

## RESUME

Le but de ce travail est l'étude d'une bande infinie contenant une fissure de Dugdale parallèle à ces frontières chargée en mode I. En utilisant les transformés de Fourier, les équations du problème élastique sont transformés analytiquement en une équation intégrale singulière de Cauchy du premier type. La résolution de cette équation intégrale se fait numériquement à l'aide des polynômes de Chebychev. A cause de la présence de discontinuités dans la distribution du chargement le long de lèvres de la fissure, les techniques de résolutions classiques ne sont pas applicables et doivent être modifiées. Nous calculons la variation de la contrainte appliquée avec la longueur de la fissure en faisant varier un certain nombre de paramètres du problème. Nous terminons par une comparaison entre les modèles de Dugdale et de Griffith.

## **REMERCIEMENTS :**

Je tiens à remercier Monsieur A.AIAD d'avoir présidé le jury et Messieurs M. OUALI et R. BADJI pour avoir assumé la charge d'examineur de cette thèse.

Je remercie mon directeur de thèse Monsieur H. FERDJANI pour m'avoir encadré durant ma thèse.

J'exprime ma gratitude aux personnes qui ont contribué au bon déroulement de mon travail et qui m'ont soutenu.

## TABLE DES MATIERES

Résumé.....	01
Remerciements.....	02
Table des matières.....	03
Liste des illustrations, graphiques.....	05
Introduction.....	06

### Chapitre 1 : Etude bibliographique.

1.1. Lois d'interface des modèles de force cohésive.....	08
1.1.1. Modèle de Dugdale.....	09
1.1.2. Modèle de Dugdale régularisé.....	10
1.1.3. Modèle de Needleman(1987).....	11
1.1.4. Modèle de Tvergaard(1990).....	12
1.2. Travaux concernant les bandes fissurées.....	13
1.2.1. Solution élastique plane pour une fissure de Griffith.....	13
1.2.2. Bande infinie, avec une fissure de Griffith.....	13
1.2.3. Le problème des fissures de bord dans une bande infinie.....	14
1.2.4. Le problème du calage de fissures pour une bande orthotrope.....	14
1.2.5. Etude de l'influence des effets d'échelle dans le modèle de Dugdale....	14

### Chapitre 2 : Theorie de griffith revisitée et formulation variationnelle

2.1. Théorie de Griffith revisitée.....	16
2.2. Formulation variationnelle.....	18

### Chapitre 3 : Le problème traité

3.1. La structure étudiée.....	23
3.2. Evolution de la fissure initiale avec le chargement.....	25
3.2.1. La phase cohésive.....	26
3.2.2. La phase de propagation.....	29

### Chapitre 4 : Dérivation de l'équation intégrale

4.1. Introduction.....	32
4.2. Dérivation de l'équation intégrale.....	33
4.3. Résolution de l'équation intégrale.....	41
4.3.1. Valeur principale de Cauchy.....	41
4.3.2. Résolution de l'équation intégrale.....	42

4.3.3. Évaluation numérique des différentes intégrales.....	46
4.3.4. Evaluation numérique de $L(r,s)$ et Evaluation de $A$ .....	46
4.3.5 Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte.....	48
4.3.6 Formule donnant l'ouverture de la fissure.....	48
4.3.7 Etude de la convergence.....	49

## Chapitre 5 : Résultats et étude paramétrique

5.1.1. Introduction.....	51
5.1.2 La phase cohésive.....	51
5.1.3 Phase de propagation.....	52
5.1.4 Etude de l'influence du paramètre $h/l_0$ .....	53
5.1.5 Etude de l'influence du paramètre $\delta_c/l_0$ .....	54
5.1.6 Discussion des résultats.....	54
5.2. Comparaison entre les modèles de griffith et de dugdale.....	55
5.2.1 Equation du problème.....	55
5.2.2 Equation intégrale et résolution.....	56
5.2.3. Mise en œuvre numérique.....	58
5.2.3 Résultat et discussion.....	59

<b>Conclusion</b> .....	61
Liste des symboles .....	63

## Annexes

A Convergence uniforme.....	65
B Démonstration de l'égalité.....	68
C Démonstration des relations des constantes $D$ .....	69
D Démonstration de la Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte .	71

<b>Référence</b> .....	72
------------------------	----

## Liste des illustrations et graphiques

Figure 1.1	Schéma de la fissure et de la zone cohésive.	08
Figure 1.2	Schématization du modèle de Dugdale- Barenblatt	09
Figure 1.3	Loi d'interface de Dugdale.	09
Figure 1.4	Schématization du modèle de Dugdale-Barenblatt	10
Figure 1.5	Loi de comportement dans le modèle de Dugdale régularisé	10
Figure 1.6	Loi d'interface de Needleman dans la direction normale.	11
Figure 1.7	Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent	12
Figure 2.1	Energie de surface en fonction du saut de déplacement.	18
Figure 2.2	Schéma du domaine et chargement	18
Figure 2.3	Energie de surface de type Dugdale	19
Figure 2.4	Loi cohésive de type Dugdale	22
Figure 3.1	Géométrie de la bande avec les chargements.	23
Figure 3.2	Décomposition du problème	24
Figure 3.3	Géométrie de la bande avec les chargements dans la phase cohésive	27
Figure 3.4	Géométrie de la bande avec les chargements dans la phase propagation.	29
Figure 5.1	Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de $h/l_0$ .	54
Figure 5.2	Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de $\delta_c$ .	55
Figure 5.3	Structure et chargement dans le cas de Griffith.	57
Figure 5.4	Résultats obtenus dans les cas de Griffith et de Dugdale	61
Tableau 4.1	Valeurs du facteur d'intensité de contrainte $k_1$ en fonction de $N$	49
Tableau 4.2	Valeur du facteur d'intensité de contrainte $k_1$ en fonction de $n$ .	50
Tableau 5.1	valeur de $K_1$ en fonction de nombre d'itérations $N$ dans le cas de Griffith	60

## INTRODUCTION

L'objet de la mécanique de la rupture est de déterminer l'évolution d'une ou plusieurs fissures dans une structure en fonction du chargement auquel elle est soumise. Le cadre de la mécanique de la rupture *fragile* se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus supposés élastiques. Cette hypothèse, bien qu'idéaliste, reste le cadre d'étude de nombreux chercheurs et ingénieurs préoccupés de sûreté concernant la propagation de défauts dans les structures en service. C'est le cadre que nous avons choisi pour nos travaux. Il existe deux types de modèles de fissure :

- Le modèle de Griffith (**Griffith**, 1920) suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les lèvres de la fissure. Autrement dit, les lèvres de la fissure sont libres de contraintes. Ce modèle présente l'inconvénient majeur d'induire des contraintes infinies en pointe de fissure, d'où la notion bien connue de « Facteur d'Intensité de Contrainte ». Malgré ce défaut, le modèle de **Griffith** reste très largement utilisé dans le calcul des structures fissurées.

- Le modèle de **Barenblatt** (**Barenblatt** 1962), également appelé « modèle des forces cohésives », émet l'hypothèse qu'il existe en amont de la pointe de la fissure une « zone de transition » en cours de rupture ; des forces de cohésion s'exercent entre les futures lèvres de la fissure dans cette zone. Ces forces s'annulent lorsque l'écartement atteint une valeur critique  $\delta_c$ . Le principal avantage de ce modèle est qu'il élimine le problème des contraintes infinies en pointe de fissure du modèle de **Griffith**. De plus, et contrairement au modèle de Griffith, le modèle de **Barenblatt** permet de rendre compte de l'amorçage d'une fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contrainte (cf. par exemple **Del Piero** 1999). Il existe plusieurs modèles de forces cohésives ; chaque modèle se caractérise par la loi reliant les forces d'interaction entre les lèvres de la fissure et l'ouverture de la fissure. Dans nos travaux, nous utilisons le modèle de **Dugdale** (**Dugdale**, 1960).

De façon générale, les modèles de forces cohésives sont de plus en plus utilisés dans la modélisation des structures fissurées. Plusieurs types de structures ont été modélisés. Les bandes fissurées ont fait l'objet de plusieurs travaux dans la littérature. Notre travail se situe dans la continuité de ces travaux. Nous étudions particulièrement une bande infinie, contenant une fissure de Dugdale droite parallèle à la bande et située en son milieu. La bande est soumise sur ses deux côtés, à une traction uniforme. Le problème est résolu semi-analytiquement. Par l'intermédiaire de la transformée de Fourier, les équations du problème élastique et les conditions aux limites sont réduits à une équation intégrale singulière. Cette équation intégrale est résolue numériquement à l'aide des polynômes de **Chebyshev**. Ce travail purement théorique peut servir de base de comparaison à des simulations numériques.

Dans le formalisme de la mécanique de la rupture fragile, les principaux résultats ont été obtenus par (**Griffith**, 1920). Bien que très largement utilisée, cette théorie renferme des insuffisances notoires. Afin de corriger ces insuffisances, une nouvelle théorie appelée « théorie de **Griffith** revisitée » fût proposée par (**Francfort** et **Marigo**, 1998). Notre travail se situe dans le cadre de cette nouvelle théorie.

Nous proposons d'exposer les travaux effectués au cours de ce mémoire en adoptant le plan suivant :

Un premier chapitre permettra de présenter une étude bibliographique sur les problèmes de bandes fissurées traités dans la littérature, ainsi que sur les modèles de forces cohésives.

Le deuxième chapitre sera consacré à une présentation succincte de la « théorie de Griffith revisitée », ainsi qu'une formulation variationnelle du problème de l'équilibre des structures fissurées en élasticité plane.

Le chapitre 3, est consacré à la présentation de notre problème : équations d'équilibre, loi de comportement et conditions aux limites. Nous présentons également les critères de propagation de la fissure.

Dans le chapitre 4, nous établissons l'équation intégrale singulière, à partir des équations du problème en utilisant les transformées de Fourier.

On présentera la méthode de résolution de l'équation intégrale singulière.

On détaillera au chapitre 5 la procédure utilisée pour la résolution numérique du problème, et on présentera les résultats numériques obtenus, pour différentes valeurs des paramètres définissant le problème.

Nous présentons une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de **Dugdale** et de **Griffith**.

On terminera par une conclusion générale.



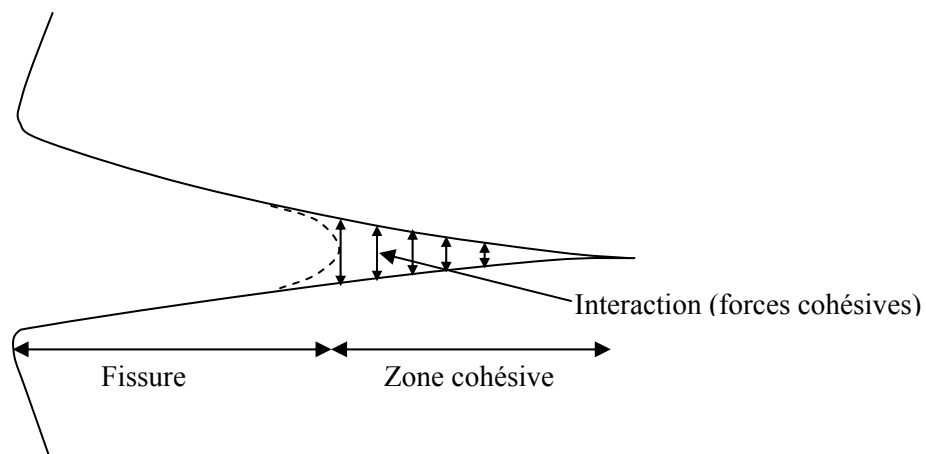
## CHAPITRE 1

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons certains des travaux concernant les bandes fissurées que nous avons rencontrés dans la littérature. Nous présentons également une présentation des différents modèles de forces cohésives.

#### 1.1 Lois d'interface des modèles de force cohésive [1]:

On appelle loi d'interface une relation entre le déplacement relatif et la force d'interface entre les lèvres d'une fissure. Dans cette partie nous présenterons quelques unes d'entre elles basées sur la notion de force cohésive. Cette dernière s'appuie sur des observations expérimentales en pointe de fissure telles que l'apparition de micro fissures, la croissance de cavité ou le développement de zones de plastification. Cela correspond à une zone de transition entre le milieu sain et une vraie fissure (figure 1.1).



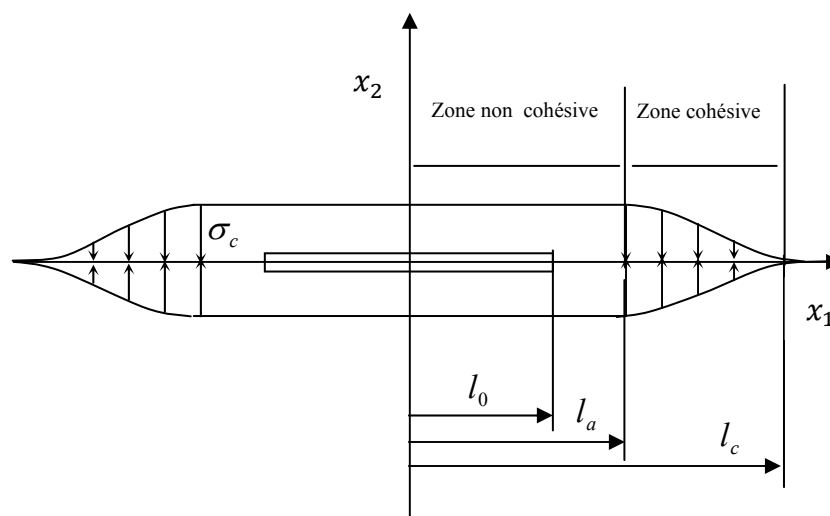
**Figure 1.1 : Schéma de la fissure et de la zone cohésive.**

Les premiers modèles furent introduits par **Dugdale** et **Barenblatt** au début des années soixante. Prenant acte du fait que les contraintes infinies en pointe de fissure, prédites par le modèle élastique (**Irwin [2]**), n'ont pas de signification physique, ces derniers ont émis l'hypothèse de l'existence d'une «zone cohésive» (Fracture Process zone dans la littérature) dans laquelle des forces s'exercent entre les futures lèvres de la fissure. Dans les années soixante-dix **Hillerborg** et al **[3]**, ont introduit le concept d'énergie de rupture dans les modèles de force cohésive et proposé quelques relations de comportement entre la traction et le

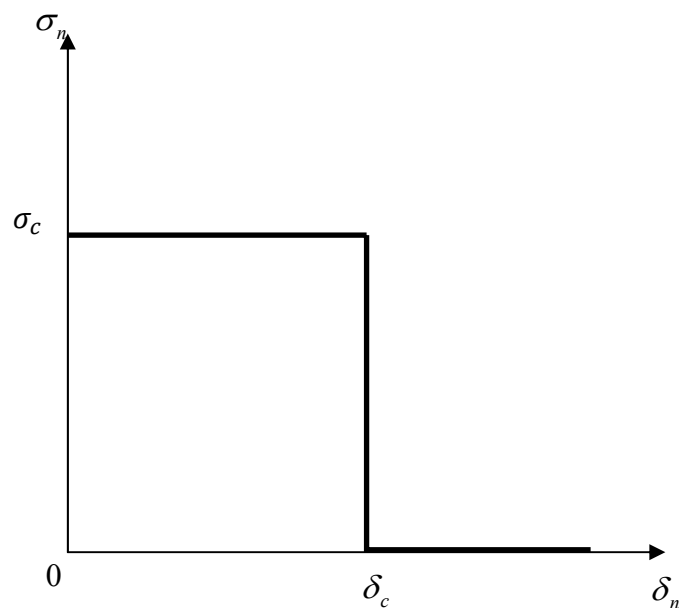
saut de déplacement pour le béton. De nombreux modèles ont été développés depuis, citons en quelques uns :

### 1.1.1 Modèle de Dugdale [1]:

Ce modèle décrit l'évolution des forces de traction  $\sigma_n$  en fonction du saut de déplacement normale  $\delta_n$ . Le saut reste nul tant que la force n'atteint pas une valeur critique  $\sigma_c$  puis le comportement utilisé est celui d'un solide rigide parfait jusqu'à un seuil d'ouverture  $\delta_c$  au-delà duquel l'interaction des lèvres devient nulle (Figure 1.2 et 1.3).



**Figure 1.2. Schématisation du modèle de Dugdale- Barenblatt**



**Figure 1.3 : Loi d'interface de Dugdale.**

### 1.1.2 Modèle de Dugdale régularisé [4] :

C'est une combinaison entre le modèle des zones cohésives continuum (ZCC) (Xie [5]) et le modèle de Dugdale (figure 1.4 et 1.5).

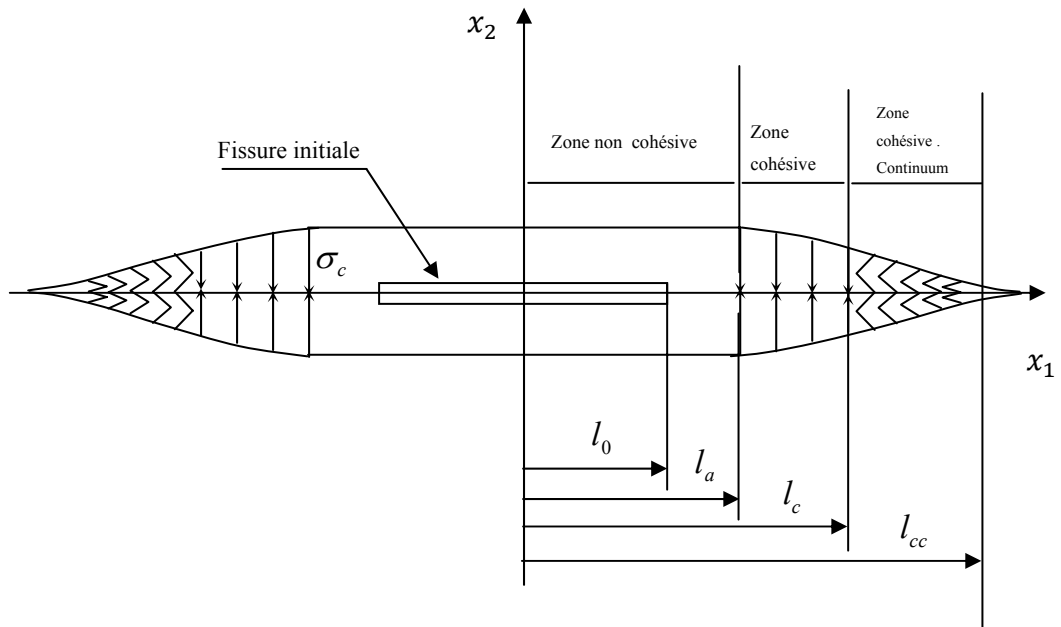


Figure 1.4 : Schématisation du modèle de Dugdale- Barenblatt

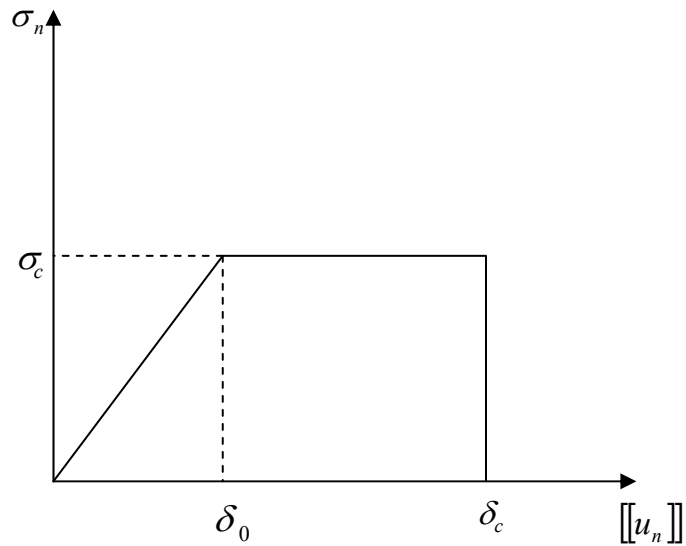


Figure 1.5. Loi de comportement dans le modèle de Dugdale régularisé.

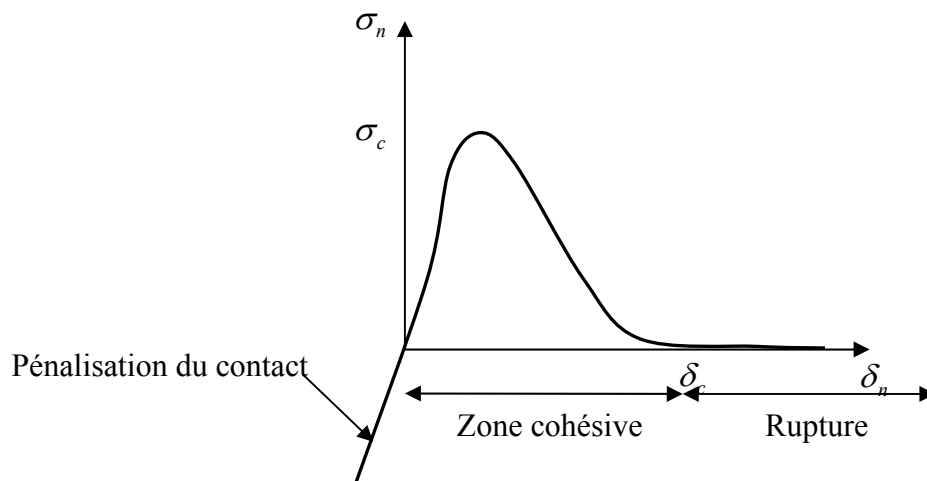
$\sigma_c$  désigne la contrainte critique du matériau,  $\delta_c$  désigne la longueur caractéristique du modèle, et  $\delta_0$  désigne le saut critique de décohésion. La fissure est donc divisée en trois zones représentées sur la figure 1.4.

La loi de comportement, donnant la relation entre les forces cohésives et l'ouverture des lèvres de la fissure, en supposant que l'ouverture se fait en mode I pur, est représentée sur la figure 1.5.

$\delta_n$  Désigne la discontinuité du déplacement normale,  $\sigma_n$  désigne la contrainte normale d'interaction entre les lèvres de la fissure.

### 1.1.3 Modèle de Needleman [6] (1987)

Ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\sigma_t$  en fonction des composantes normale et tangentielle du saut de déplacement  $\delta_n$  et  $\delta_t$ . On représente sur la Figure 1.6. L'évolution de la force normale en fonction du saut normal quand le saut tangent est nul.



**Figure 1.6 : Loi d'interface de Needleman dans la direction normale.**

Les forces dérivent d'un potentiel  $\psi$  :

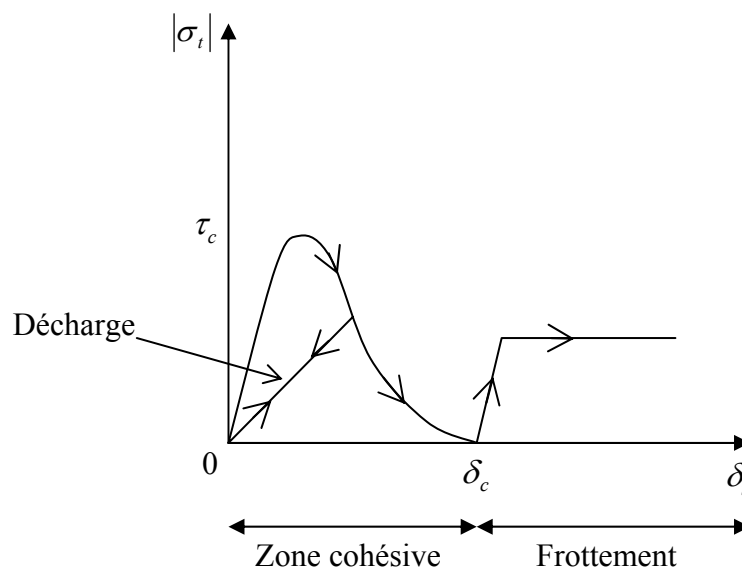
$$\sigma_n = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_n}, \quad \sigma_t = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_t}$$

Ce dernier est choisi comme une fonction polynomiale faisant intervenir les paramètres  $\sigma_c$  contrainte critique du matériau en ouverture,  $\delta_c$  saut critique au-delà duquel l'interaction entre les lèvres de fissure devient nulle ainsi que la part de résistance au glissement par rapport à la résistance normale. On note que lorsque  $\delta_n < 0$  la valeur de la contrainte normale dérivant du potentiel joue le rôle

d'une pénalisation afin de tenir compte de la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure. Aucune autre hypothèse n'intervient pour prendre en compte cette condition. Notons que ce modèle fut repris et modifié par de nombreux auteurs. Citons par exemple **Rice et Wang [7]** qui ont proposé une expression exponentielle du potentiel. La différence avec le modèle précédent tient au fait que la force tend asymptotiquement vers zéro quand le saut de déplacement augmente. Ce modèle ne fait donc pas intervenir le paramètre  $\delta_c$ .

#### 1.1.4 Modèle de Tvergaard [8] (1990)

Ce modèle reprend le modèle de **Needleman** (1987) et introduit une notion d'irréversibilité du comportement : la décharge s'effectue linéairement, ainsi qu'un frottement de **Coulomb** post décohésion. On représente sur la Figure 1.7 l'allure de la force tangentielle en fonction du saut tangentiel lorsque le saut normal est nul.



**Figure 1.7. Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent**

Notons que le modèle formulé initialement par l'auteur s'appuie sur un indicateur de décohésion variant de zéro à un, faisant intervenir le saut normé par le saut critique, et qui fait office de variable d'endommagement dont dépendent les forces d'interaction.

D'autres modèles ont été développés en s'inspirant de celui-ci. Par exemple, **Chaboche et al. [9]** (1997), pour modéliser la décohésion interfaciale dans les composites à matrice métallique, proposent d'activer le frottement de Coulomb dès le début de la décohésion. Citons par ailleurs **Chaboche et al. [10]** qui reprennent ce dernier modèle et introduisent une régularisation visqueuse afin

de lisser les instabilités intervenant dans l'ouverture brutale de fissure. La réponse dépend alors de la vitesse du chargement. Cette technique permet de remédier aux problèmes numériques liés à un saut de solution important difficile à capter avec des méthodes de type Newton. Cela permet d'avoir une réponse globale continue à tous les niveaux de chargement mais cette technique modifie les équations de comportement de l'interface.

Notons par ailleurs que ces lois peuvent être utilisées soit pour décrire le comportement d'une interface : séparation de deux parties d'un solide comme la propagation de fissure (objet d'épaisseur nulle) soit pour représenter le comportement d'une interphase entre deux matériaux (objet volumique de faible épaisseur) pouvant représenter une colle. A ce sujet **Suquet [11]** et **Michel et al. [12]** ont travaillé sur la modélisation d'interphase dans les composites à matrice métallique. Ce type de modèle pose des questions de convergence mathématique du modèle d'interphase vers le modèle d'interface.

## 1.2 Travaux concernant les bandes fissurées :

### 1.2.1 Solution élastique plane pour une fissure de Griffith dans une bande en composite chargée symétriquement (**D.B. Bogy** 1973) [13]

Le problème élastique plan pour une fissure de Griffith dans une bande en composite chargée en traction ou en cisaillement, est réduit à une seule équation intégrale. La dépendance de la solution par rapport aux propriétés matérielles est explicitement mise en évidence dans l'équation intégrale à travers deux paramètres du composite. L'équation intégrale est résolue numériquement et la dépendance des facteurs d'intensité de contraintes par rapport aux propriétés matérielles est représentée graphiquement pour différents types de composites et pour plusieurs valeurs choisies du rapport longueur de la fissure/épaisseur de la bande.

### 1.2.2 Bande infinie, avec une fissure de **Griffith** perpendiculaire à ses bords, chargée en traction (**A.C. Kaya, F. Erdogan**, 1987)[14]

Dans ce papier, quelques formules utiles sont développées afin d'évaluer les intégrales ayant une singularité de la forme  $(t - x)^{-m}$ ,  $m \geq 1$ . En interprétant les intégrales avec des singularités fortes au sens de Hadamard, les résultats sont utilisés pour obtenir des solutions approchées pour des équations intégrales singulières. Le problème de la bande infinie, avec une fissure de **Griffith** perpendiculaire à ses bords, chargée en traction est considéré comme exemple. La technique proposée semble extrêmement efficace pour obtenir rapidement des résultats numériques convergents.

### 1.2.3 Le problème des fissures de bord dans une bande infinie (**G.D. Gupta, F.Erdogan 1974**)[15]

Le problème élastique plan d'une bande infinie contenant deux fissures internes, situées symétriquement, perpendiculaires à ses frontières est formulé en termes d'une équation intégrale singulière avec la dérivée de l'ouverture de la fissure comme fonction densité. La solution du problème est obtenue pour différentes géométries de fissure et pour une traction uniaxiale appliquée à la bande loin de la région fissurée. Le cas limite de fissures de bord est considéré. La fonction fondamentale de l'équation intégrale est obtenue et une technique numérique de résolution des équations intégrales singulières avec ce type particulier de fonction fondamentale caractéristique des fissures de bord est présentée. Le facteur d'intensité de contrainte est calculé. Les résultats contiennent également la solution du problème d'une fissure de bord dans un demi-plan élastique.

### 1.2.4 Le problème du calage de fissures pour une bande orthotrope (**A. Cinar, F.Erdogan, 1982**)[16]

Le problème élastique plan d'une bande orthotrope contenant une fissure parallèle à ses frontières est d'abord considérée. Le problème est formulé sous un chargement en mode mixte. On montre que les facteurs d'intensité de contrainte dépendent seulement de deux paramètres d'orthotropie adimensionnels. Pour le problème de fissure, les résultats sont donnés pour une seule fissure et pour deux fissures colinéaires. Les résultats obtenus montrent que des deux paramètres d'orthotropie, l'influence du rapport de rigidité sur les facteurs d'intensité de contrainte est beaucoup plus importante que celle du paramètre de cisaillement. Le problème du chargement de la bande par une cale rigide rectangulaire est ensuite étudié. On trouve que pour des longueurs de la cale relativement faibles, un contact continu est maintenu le long de l'interface cale-bande. Pour une certaine longueur critique de la cale, la séparation commence au milieu de la cale, et la longueur de la zone de séparation augmente rapidement avec la longueur de la cale.

### 1.2.5 Etude de l'influence des effets d'échelle dans le modèle de Dugdale à travers le cas d'une bande infinie soumise à un chargement antiplan (**A.Brick Chaouche, 2008**)[17]

Le but de ce travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture avec le modèle des forces cohésives, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure. On traite pour cela l'exemple d'une bande contenant une fissure parallèle à ses frontières. Le problème est formulé en termes d'une équation intégrale singulière avec la dérivée de l'ouverture de la

fissure comme fonction densité. L'équation intégrale est résolue numériquement en utilisant les polynômes de Chebychev.



## CHAPITRE 2

### THEORIE DE GRIFFITH REVISITEE ET FORMULATION VARIATIONNELLE

#### 2.1 Théorie de Griffith revisitée (Laverne 2004)

Dans le formalisme de la mécanique de la rupture fragile, les principaux résultats ont été obtenus à partir de la théorie de **Griffith [18]**. Ce dernier associe à toute fissure une énergie de surface proportionnelle à sa longueur. Il postule qu'il y aura propagation et donc augmentation de l'énergie de surface si cette dernière est parfaitement compensée par la restitution de l'énergie élastique causée par l'avancée de la fissure. Dans le cas de problèmes quasi-statiques ce critère peut se formuler en terme de taux de restitution d'énergie élastique usuellement noté  $G$ . Ce dernier correspond à la variation d'énergie potentielle lors d'un accroissement infinitésimal de fissure. Le critère de **Griffith** stipule alors qu'il n'y aura pas propagation tant que :

$$G < G_c$$

où  $G_c$  désigne le taux de restitution d'énergie critique et correspond à la ténacité du matériau. Bien qu'elle connaisse encore un vrai succès, cette théorie renferme des insuffisances notoires.

- La première concerne l'initiation de la fissuration, la théorie de **Griffith** est incapable de rendre compte de l'amorçage de fissures, sauf dans des cas très particuliers où la structure possède des singularités fortes. En effet, prenons l'exemple d'un milieu bidimensionnel contenant une fissure rectiligne  $l$ , sollicitée en mode I, et supposons l'absence de singularités dans le problème d'élasticité initiale. Le critère de GRIFFITH prévoit que la fissure se propage pour un chargement en  $\sqrt{l}$ . Si  $l$  tend vers zéro, on en déduit que pour un milieu sain la fissure ne pourra pas s'amorcer sous un chargement fini.
- La seconde lacune porte sur son incapacité à prédire seul le *trajet spatial* des fissures. Pour un milieu bidimensionnel, le critère ne prend en compte que la longueur de fissure or l'évolution spatiale nécessite une seconde information qui correspond à un critère de branchement.
- Enfin, une troisième lacune concerne le *trajet temporel* de la fissure, seules les propagations progressives sont traitées de façon satisfaisante. En effet des situations où l'inégalité du critère est violée peuvent survenir. Celles-ci correspondent au cas de figure où l'excès de restitution d'énergie élastique conduit à l'apparition d'énergie cinétique. La propagation est alors considérée comme brutale.

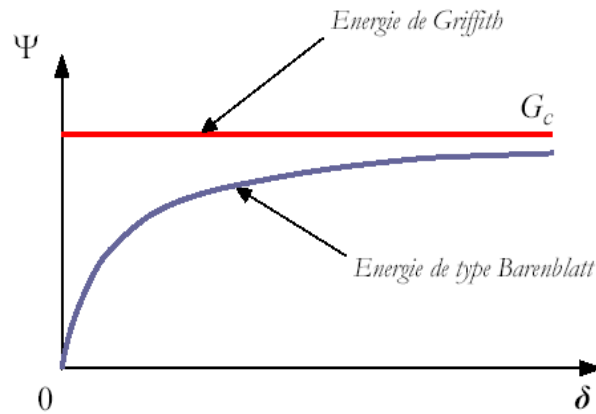
On peut résumer ces trois points en disant que le problème majeur de la théorie de **Griffith** est de ne pas laisser assez de souplesse à l'évolution spatio-temporelle des fissures. De nombreux aménagements tentent d'y remédier proposant des ingrédients spécifiques à chacun des problèmes.

Une première tentative, destinée à proposer une théorie *unifiée* permettant de remédier aux principales lacunes citées précédemment, fut proposée par **G. A. Francfort** et **J.-J. Marigo** [19] en 1998. Celle-ci consiste à garder l'hypothèse d'une énergie de surface proportionnelle à la longueur de la fissure, mais abandonner le critère de **Griffith** au profit d'un principe de minimisation d'énergie. Le problème revient à chercher, à chaque instant, le champ de déplacement admissible qui conduit à un *minimum global* de la somme de l'énergie élastique et de l'énergie de surface. Les travaux de thèse de **B. Bourdin** [20], sur un plan numérique (régularisation des discontinuités), et de **F. Bilteryst** [21], sur un plan théorique appliqués à la fissuration des matériaux composites, ont permis d'illustrer les capacités de cette nouvelle approche à pallier pour une part importante aux lacunes de la théorie de **Griffith** initiale.

Toutefois l'utilisation du principe de moindre énergie, en adoptant l'hypothèse de **Griffith** relative à l'énergie de surface, reste déficiente concernant deux points importants. Premièrement parce qu'elle conduit à des effets d'échelle non satisfaisant. Ainsi, dans le cas d'une barre unidimensionnelle de longueur  $l$  chargée en déplacement dans la direction longitudinale, la contrainte à la rupture est proportionnelle à  $\sqrt{l}$  ce qui n'est pas conforme à l'observation. Deuxièmement parce qu'elle ne fonctionne pas à forces imposées. En effet, lorsque des forces sont imposées, la prise en compte du travail des efforts extérieurs dans la minimisation conduit à une énergie totale qui n'est (en général) plus bornée inférieurement.

Afin de remédier à ce second point, on pourrait être tenté d'effectuer une recherche de minimum local. Cependant le problème de l'amorçage de la théorie de **Griffith** ressurgirait. En effet, la réponse élastique d'une structure saine est toujours un minimum local en l'absence de singularités fortes.

Au vu de ces difficultés une nouvelle idée a vu le jour. Celle-ci consiste d'une part à adopter une énergie de surface qui dépend du saut de déplacement  $\delta$  entre les lèvres de la fissure et d'autre part à chercher des *minima locaux* de l'énergie totale. Les formes de la fonction énergie à adopter sont suggérées par les potentiels d'interaction à l'échelle atomique (voir Figure 1.1). L'idée d'une telle approche remonte à **Barenblatt** [22]. Cependant, son utilisation concernant le cadre de la minimisation d'énergie est assez récente (voir **Del Piero** [23] et **Truskinovsky** [24]). On peut aussi citer les travaux de thèse de **M. Charlotte** [25] sur des modèles discrets de rupture ou encore **Charlotte et al** [26].

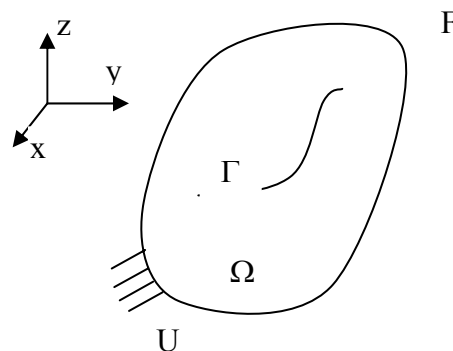


**Figure 2.1 : Energie de surface en fonction du saut de déplacement.**

D'autres travaux ont montré que le modèle de **Barenblatt** ou de façon plus générale les modèles de forces cohésives permet de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes, cf. par exemple (**Del Piero**, 1999) [23]; (**Del Piero et al**, 2001) [27]; (**Charlotte et al**, 2000) [26] ou (**Laverne et al**, 2004) [28]. De plus, dans le modèle des forces cohésives la singularité des contraintes en pointe de fissure, prédite par la mécanique linéaire de la rupture (MLR) dans le modèle de **Griffith** (**Williams** 1957) [29], est supprimée.

## 2.2 Formulation variationnelle :

Considérons un corps  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , la partie de la frontière où les déplacements sont imposés est notée  $\partial\Omega_D$ , la partie où les forces sont imposées est notée  $\partial\Omega_F$ , les forces de volumes sont notées  $\mathbf{f}$ . On suppose que la fissure ne peut se développer que sur un trajet prédéfini  $\Gamma$  (Figure 1.2). On suppose également que l'ouverture de la fissure se fait en mode I, c'est-à-dire que la discontinuité du déplacement tangentiel à travers les lèvres de la fissure est nulle.



**Figure 2.2 : Schéma du domaine et chargement**

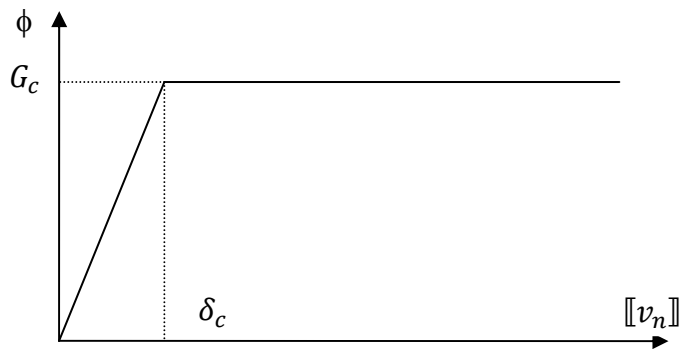
Un champ de déplacement  $\mathbf{v}$  est un champ cinématiquement admissible, s'il respecte les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_D$ , et s'il ne peut avoir de discontinuité que sur  $\Gamma$ , c'est à dire :

$$v \in \mathcal{C} = \{v \text{ tel que : } v = U \text{ sur } \partial\Omega_D, \llbracket v_n \rrbracket \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

où  $\llbracket v_n \rrbracket = v_n^+ - v_n^-$  représente la discontinuité du déplacement normal, les indices + et - correspondent aux lèvres supérieure et inférieure de la fissure.

On se met dans l'hypothèse de l'énergie de surface de type **Barenblatt**. Plus particulièrement, on suppose que l'énergie de surface  $\phi$  est du type **Dugdale**. Dans le cas où l'ouverture de la fissure se fait en mode I, la densité d'énergie de surface s'écrit comme suit (Figure 1.3) :

$$\phi(\llbracket v_n \rrbracket) = \begin{cases} G_c \frac{\llbracket v_n \rrbracket}{\delta_c} & \text{si } \llbracket v_n \rrbracket \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } \llbracket v_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases} \quad (2.1)$$



**Figure 2.3 : Energie de surface de type Dugdale**

Dans (2.1),  $G_c$  est le taux de restitution d'énergie critique de la théorie de **Griffith**.  $\delta_c$  est une longueur caractéristique des modèles de forces cohésives. Le rapport  $G_c/\delta_c$  a la dimension d'une contrainte notée  $\sigma_c$  :

$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$

L'énergie totale du solide est la somme de son énergie potentielle élastique et de l'énergie de surface. Elle est donnée par :

$$E(v) = \int_{\Omega/\Gamma} w(v)dx + \int_{\Gamma} \phi(\llbracket v_n \rrbracket)ds - \int_{\partial\Omega_F} Fvds - \int_{\Omega} fvdv \quad (2.2)$$

où  $w$  représente la densité d'énergie élastique.

D'après la théorie de **Griffith** revisitée dans le cas d'une énergie de surface de type **Barenblatt**, le champ solution  $\mathbf{u}$  correspond à un minimum local de l'énergie totale :

$$\forall u^* \in C, \exists \bar{h} > 0, \text{ tel que : } \forall h \in [0, \bar{h}] \quad E(u) \leq E(u + h(u^* - u))$$

En divisant l'inégalité ci-dessus par  $h$  et en passant à la limite lorsque  $h$  tend vers 0, on obtient :

$$\frac{d}{dh} \left( E(u + h(u^* - u)) \right) (h = 0) \geq 0 \quad (2.3)$$

En remplaçant (2.2) dans (2.3), et en posant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}$ , on obtient :

$$\int_{\Omega/\Gamma} \sigma \varepsilon(v) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} \llbracket v_n \rrbracket ds - \int_{\partial \Omega_F} F v ds - \int_{\Omega} f v dx \geq 0 \quad \forall v \in C_0 \quad (2.4)$$

L'ensemble  $C_0$  est défini par :

$$C_0 = \{v \text{ tel que : } v = 0 \text{ sur } \partial \Omega_D, \llbracket v_n \rrbracket \geq 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

$\llbracket v_n \rrbracket$  représente la discontinuité du déplacement normal à travers les lèvres de la fissure.

En intégrant par parties, la première intégrale de (2.4), on obtient :

$$-\int_{\Omega/\Gamma} (\text{div} \sigma + f) v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} \llbracket v_n \rrbracket ds + \int_{\partial \Omega_F} (\sigma n - F) v ds - \int_{\Gamma} \sigma_n \llbracket v_n \rrbracket ds \geq 0 \quad \forall v \in C_0 \quad (2.5)$$

où  $\sigma_n$  représente la contrainte normale sur les lèvres de la fissure.

(i) On choisit  $v$  tel que  $\llbracket v \rrbracket = 0$  sur  $\Gamma$ . Les intégrales surfaciques sur  $\Gamma$  dans (2.5) s'annulent et il reste :

$$-\int_{\Omega/\Gamma} (\text{div} \sigma + f) v dx + \int_{\partial \Omega_F} (\sigma n - F) v ds \geq 0 \quad (2.6)$$

(i1) On choisit  $v$  tel que  $v=0$  sur  $\partial \Omega_F$ , il vient :

$$-\int_{\Omega/\Gamma} (\text{div} \sigma + f) v dx \geq 0 \quad (2.7)$$

Dans (2.7), le signe de  $v$  est quelconque. Par conséquent, on doit avoir :

$$\text{div} \sigma + f = 0 \text{ dans } \Omega/\Gamma \quad (2.8)$$

On reporte (2.8) dans (2.6) et en raisonnant de la même manière, on obtient :

$$\sigma n = F \text{ sur } \partial \Omega_F \quad (2.9)$$

On reporte (2.8) et (2.9) dans (2.5) qui devient :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} \llbracket v_n \rrbracket ds - \int_{\Gamma} \sigma_n \llbracket v_n \rrbracket ds \geq 0 \quad \forall v \in C_0 \quad (2.10)$$

On décompose maintenant la fissure  $\Gamma$  en deux parties :

$\Gamma_0$  : est la partie de la fissure où  $\llbracket u_n \rrbracket = 0$ ,

$\Gamma_n$  : est la partie de la fissure où  $\llbracket u_n \rrbracket > 0$ .

L'équation (2.10) devient :

$$\int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} - \sigma_n \right) \llbracket u_n^* \rrbracket ds + \int_{\Gamma_n} \left( \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} - \sigma_n \right) \llbracket u_n^* - u_n \rrbracket ds \geq 0 \quad \forall u^* \in C \quad (2.11)$$

(ii) On choisit dans (2.11)  $u_n^*$  tel que  $\llbracket u_n^* \rrbracket = 0$  sur  $\Gamma_0$ , il vient :

$$\int_{\Gamma_n} \left( \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} - \sigma_n \right) \llbracket u_n^* - u_n \rrbracket ds \geq 0 \quad (2.12)$$

Dans (2.12), le signe de  $\llbracket u_n^* - u_n \rrbracket$  est quelconque. Par conséquent, on doit avoir :

$$\frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} = \sigma_n \quad \text{sur } \Gamma_n. \quad (2.13)$$

On reporte (2.12) dans (2.11), on obtient :

$$\int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} - \sigma_n \right) \llbracket u_n^* \rrbracket ds \geq 0 \quad \forall u^* \in C \quad (2.14)$$

Dans (2.14), le signe de  $\llbracket u_n^* \rrbracket$  est toujours positif, on obtient la condition suivante :

$$\sigma_n \leq \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (2.15)$$

En récapitulant, à partir du postulat du minimum local de l'énergie totale pour le champ solution  $\mathbf{u}$ , nous avons déduit les conditions nécessaires suivantes:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f \text{ dans } \frac{\Omega}{\Gamma} \\ \sigma n = F \text{ sur } \partial \Omega_F \\ \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} = \sigma_n \text{ sur } \Gamma_n \\ \sigma_n \leq \frac{\partial \phi(\llbracket v_n \rrbracket)}{\partial \llbracket v_n \rrbracket} \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

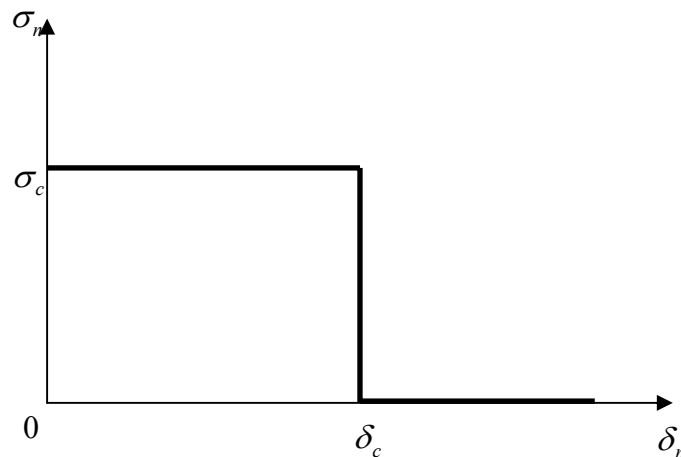
Remarque :

- 1 La première équation de (2.16) représente les équations de l'équilibre local
- 2 La deuxième équation de (2.16) représente la condition aux limites en forces du problème
- 3 La troisième équation représente la loi reliant les forces cohésives à la discontinuité du déplacement sur les lèvres de la fissure créée. Dans le cas

d'une densité d'énergie de surface de type Dugdale (équation (2.1)), la loi s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_n(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} \sigma_c & \text{si } 0 < \llbracket u_n \rrbracket < \delta_c \\ 0 & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket > \delta_c \end{cases}$$

Cette loi est représentée sur la figure suivante :



**Figure 2.4 : Loi cohésive de type Dugdale**

Cela veut que les lèvres de la fissure créée soient divisées en deux parties :

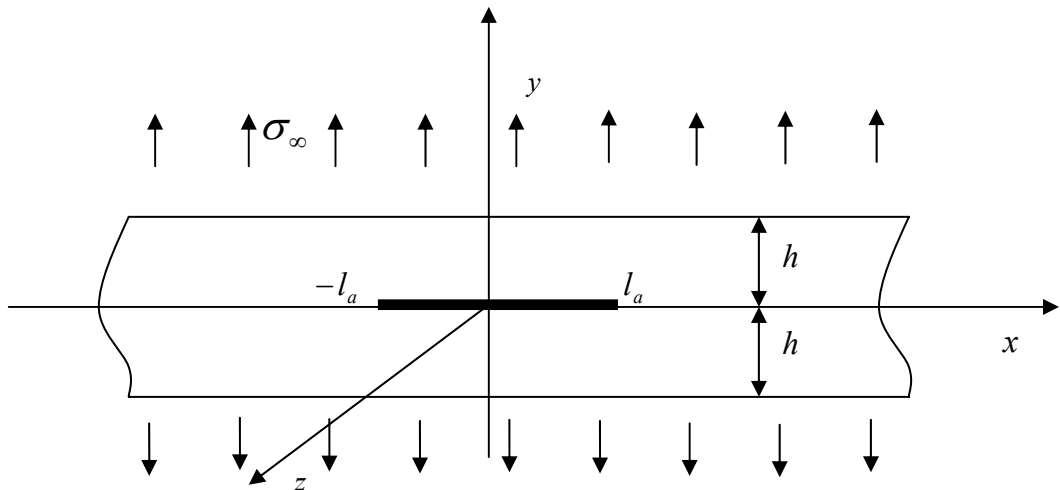
- une partie cohésive où l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique  $\delta_c$ . Dans cette partie, les lèvres sont soumises à des forces d'interaction d'intensité constante égale à  $\sigma_c$ .
  - Une partie non cohésive où l'ouverture est supérieure à l'ouverture critique  $\delta_c$ . Dans cette partie, les lèvres sont libres.
- 4 La dernière équation de (2.16) représente la condition d'amorçage d'une nouvelle fissure. Pour qu'une fissure puisse apparaître sur le trajet prédéfini, il faut que la contrainte normale atteigne la valeur critique  $\sigma_c$ .
  - 5 Les équations (2.16) constituent une condition nécessaire mais non suffisante de minimum local.

## CHAPITRE 3

### LE PROBLEME TRAITÉ

#### 3.1. La structure étudiée :

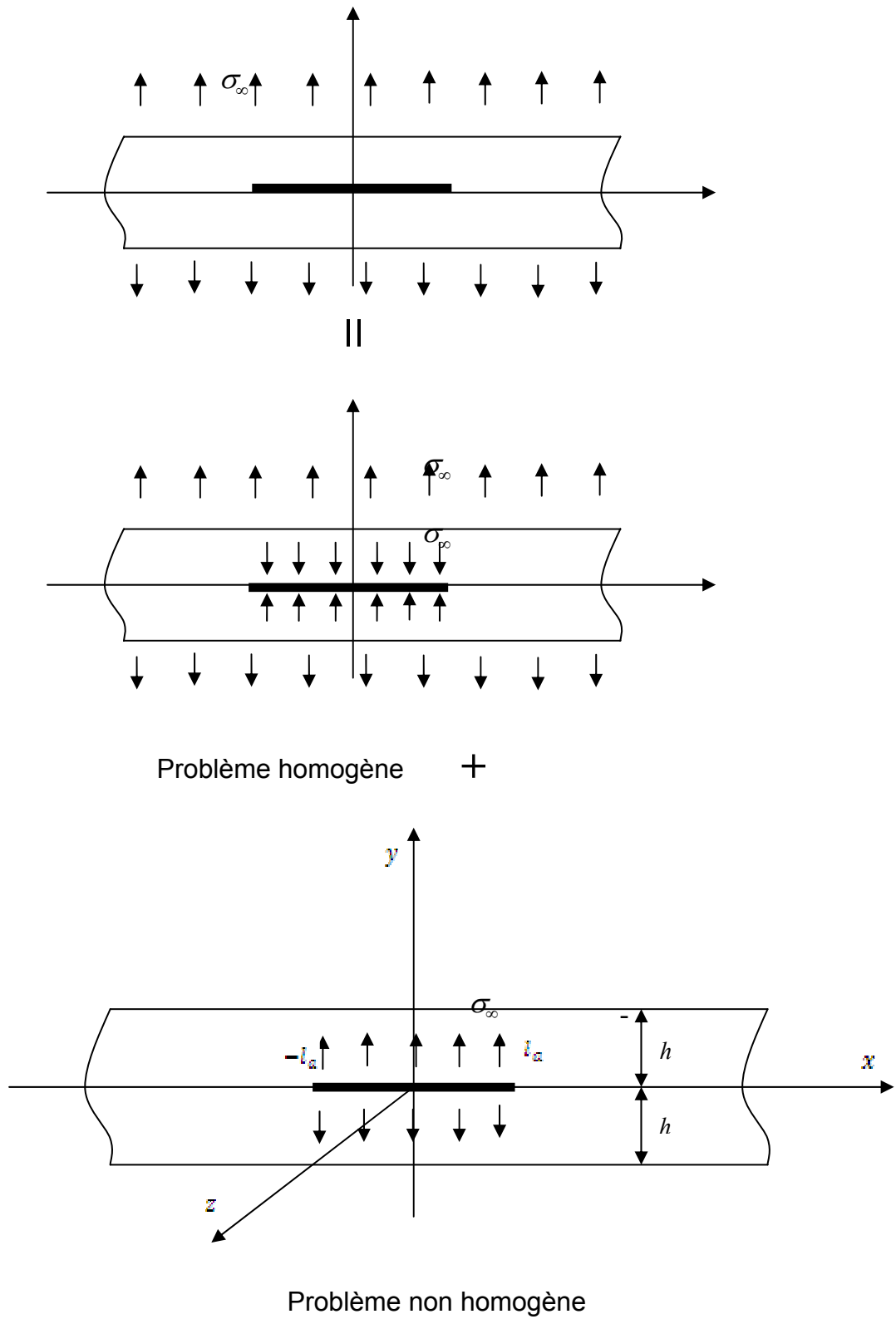
On considère une bande infinie  $\Omega = (-\infty, +\infty) \times (-h, h)$  contenant un défaut de type fissure  $D = [-l_0, l_0] \times \{0\}$  de longueur  $2l_0$  interne et distant de  $h$  de la face supérieure et la face inférieure de la bande. Le matériau constitutif de la bande est élastique isotrope caractérisé par un tenseur de rigidité  $A$ . Les faces supérieures et inférieures sont soumises à une contrainte de traction positive et uniforme  $\sigma_\infty$ , croissante à partir de 0. Les lèvres de la fissure ne sont pas chargées (figure 3.1).



**Figure 3.1 : Géométrie de la bande avec les chargements.**

En utilisant le principe de superposition, le problème est décomposé en la somme d'un problème homogène sans fissure et d'un problème non homogène due à la fissure (Figure 3.2). Puisque on s'intéresse à la propagation de la fissure, nous considérons par la suite le problème non homogène.





**Figure 3.2 : Décomposition du problème**

On se met dans l'hypothèse des déformations planes, c'est-à-dire que le champ de déplacement est de la forme suivante :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont respectivement les composantes du vecteur déplacement sur les axes  $(x, y, z)$ .

En négligeant les forces de volume, les champs de contrainte  $\sigma$  et de déplacement  $u$  solution du problème élastique doivent satisfaire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega / D \\ \sigma = A \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega / D \\ \sigma n = -\sigma_\infty & \text{sur } D \\ \sigma n = 0 & y = \pm h \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\varepsilon$  représente le tenseurs de déformation,  $n$  représente la normale extérieure.

### 3.2. Evolution de la fissure initiale avec le chargement

Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe  $y=0$ , et de façon symétrique depuis les points  $(\pm l_0, 0)$  du défaut initial. On appelle  $\Gamma$  la fissure créée, ses pointes sont situées en  $x = \pm l_a$  :

$$\Gamma = ]-l_a, l_0] \cup [l_0, +l_a[ \times \{0\}$$

D'après la théorie de **Griffith** revisitée avec une énergie de surface de type Barenblatt, pour chaque valeur du chargement  $\sigma_\infty$ , le champ de déplacement solution correspond a un minimum local de l'énergie totale. Par conséquent, les conditions nécessaires (2.16) du Chapitre 2 doivent être vérifiées. La fissure créée doit donc comporter deux zones :

- une zone, proche de la pointe, et dite *zone cohésive*, où les lèvres sont soumises à des forces cohésives normales d'intensité constante  $\sigma_c$ .
- une autre zone proche du défaut initial, et dite *zone non cohésive*, où les lèvres sont libres.

Les limites entre ces deux zones sont les pointes  $x = \pm l_c$ . Les valeurs de  $l_a$  et  $l_c$  dépendent évidemment de la valeur de la charge  $\sigma_\infty$ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode I pur. Notons que pour certaines valeurs de  $\sigma_\infty$  certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général  $l_a \geq l_c \geq l_0$ , les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ( $\sigma_\infty = 0$ ), les conditions initiales sont :  $l_a = l_c = l_0$ .

Dans notre cas, la propagation de la fissure s'effectue selon deux phases : la phase cohésive et la phase de propagation. Les critères d'initiation et de propagation de la fissure sont présentés dans les sections suivantes.

### 3.2.1. La phase cohésive : $0 < \sigma_\infty < \sigma_r$

Durant cette phase, lorsque  $\sigma_\infty \neq 0$ , une fissure se crée de façon à ce que la contrainte normale maximale dans la structure soit inférieure à la valeur critique  $\sigma_c$ . Lorsque la charge est suffisamment proche de zéro, la longueur de la fissure est suffisamment petite, donc l'ouverture  $[[u_n]]$  est partout inférieure à la valeur critique  $\delta_c$ . Par conséquent, toutes les lèvres de la fissure créée sont soumises à une force cohésive normale d'intensité  $\sigma_c$ . Le champ des déplacements ainsi que le champ des contraintes à l'équilibre sous le chargement  $\sigma_\infty$  sont donc solution du problème suivant : (Figure 3.3)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega / (D \cup \Gamma) \\ \sigma = A \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega / (D \cup \Gamma) \\ \sigma n = -\sigma_\infty + \sigma_c & \text{sur } \Gamma \\ \sigma n = -\sigma_\infty & \text{sur } D \\ \sigma n = 0 & y = \pm h \end{cases} \quad (3.2)$$

On doit également vérifier après la résolution du problème, que la contrainte normale ne dépasse pas la contrainte critique  $\sigma_c$  sur le « ligament » de la structure :

$$\sigma_{22} \leq \sigma_c \quad |x| \geq l_a$$

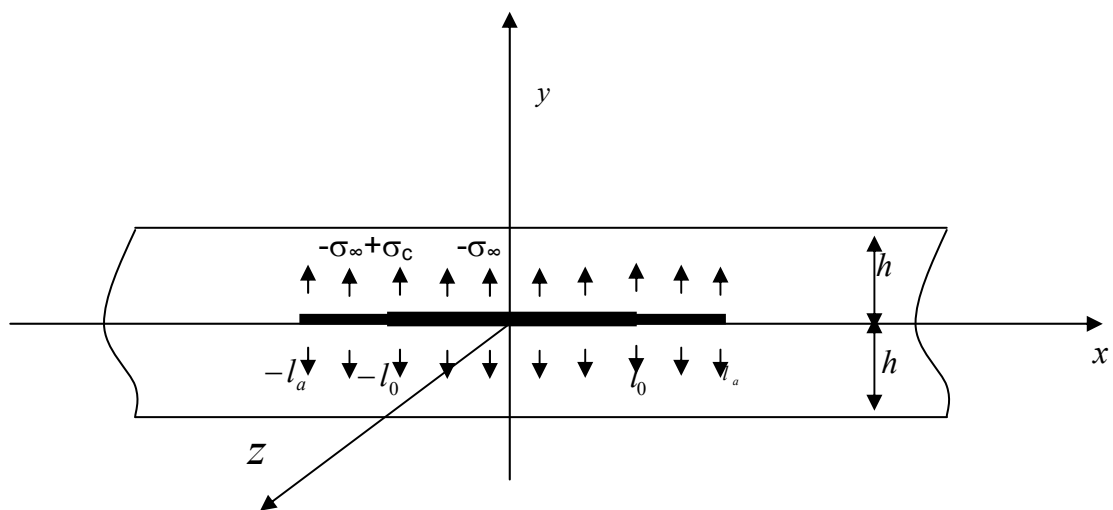


Figure 3.3. Géométrie de la bande avec les chargements dans la phase cohésive.

Afin de compléter la formulation du problème, il reste à définir la loi gouvernant l'évolution de la pointe  $l_a$  de la fissure avec le chargement. Nous exprimons d'abord ce critère en fonction du taux de restitution d'énergie, ensuite nous l'interprétons en termes de facteur d'intensité de contrainte.

L'énergie totale de la structure fissurée à l'équilibre est fonction du chargement  $\sigma_\infty$  et de la position  $l_a$  de la pointe de la fissure. En incluant l'énergie de surface due aux forces cohésives, l'énergie totale s'écrit

$$E(\sigma_\infty, l_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega/(D \cup \Gamma)} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \int_{\Gamma} \sigma_c [[u_2]] dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \sigma_\infty [[u_2]] dx_1 \quad (3.3)$$

Dans (3.3),  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement solution de (3.2) ( $\mathbf{u}$  dépend évidemment de  $\sigma_\infty$  et de  $l_a$ ). D'après la théorie de **Griffith** revisitée dans le cas d'une énergie de surface de type **Barenblatt**, la longueur de la fissure cohésive doit être telle que l'énergie totale de la structure soit un minimum local pour un chargement donné. La condition de minimum local s'écrit :

$$\exists h > 0, \quad \forall l_a^* : l_a^* \in [l_0, \infty[, \quad |l_a^* - l_a| \leq h, \quad E(\sigma_\infty, l_a) \leq E(\sigma_\infty, l_a^*)$$

Par conséquent, puisque nous cherchons un minimum local  $l_a$  dans l'intervalle  $[l_0, \infty[$ ,  $l_a$  doit être un point stationnaire de  $E(\sigma_\infty, \cdot)$  et satisfait la condition suivante :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\sigma_\infty, l_a) = 0 \quad (3.4)$$

ou en d'autres termes, le taux de restitution de l'énergie totale due à la croissance de la fissure cohésive doit être nul.

Ce critère énergétique est en fait une condition de disparition de la singularité à la pointe de la fissure. En effet, puisque les forces cohésives sont constantes (il suffit qu'elles soient des fonctions régulières de  $x$  pour que la singularité soit de la forme qui va suivre), ils ne changent pas la forme de la singularité à la pointe de la fissure qui est la même que pour une fissure non cohésive. Autrement dit, le champ de déplacement s'écrit **[30]**(« Mécanique de la rupture fragile » **J-B Leblond**) :

$$u(x) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} U(\theta) + \bar{u}(x), \quad (3.5)$$

avec :  $U(\theta) = (3 - 4\nu - \cos \theta) \left( \cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2 \right)$

où  $(r, \theta)$  représentent les coordonnées polaires avec le pôle  $(l_a, 0)$ ,  $\bar{u}$  est la partie régulière du champ de déplacement,  $\mu$  est le module de cisaillement,  $\nu$  est le coefficient de Poisson, et  $K_I$  est le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) en mode I. Bien sûr, la valeur de  $K_I$  n'est pas la même selon la présence ou pas des forces cohésives. Dans tous les cas, la formule d'**Irwin** est valable, le taux de restitution d'énergie et le Facteur d'Intensité de Contrainte sont reliés par :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\sigma_\infty, l_a) = 2 \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2,$$

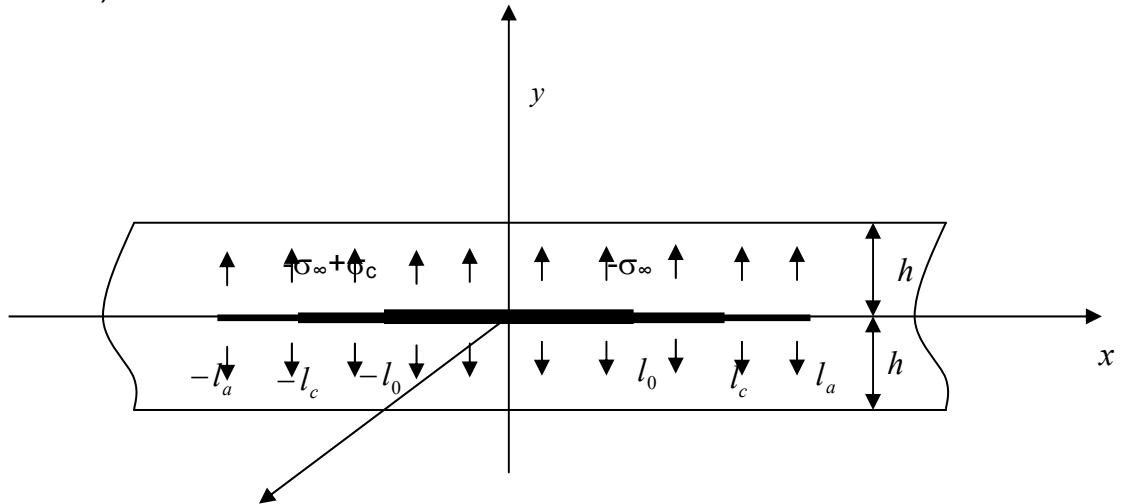
Le critère (3.4) est donc équivalent à  $K_I = 0$  ce qui veut dire que la longueur de la fissure cohésive doit être telle qu'il n'y ait plus de singularité à la pointe de la fissure. Ceci est conforme à l'idée de **Barenblatt** que les forces cohésives existent pour corriger la propriété non physique des contraintes infinies induite par la théorie de **Griffith**.

Cette phase se termine quand l'ouverture de la fissure en  $x = \pm l_0$  atteint la valeur critique  $\delta_c$  du modèle de **Dugdale**, et par conséquent, une fissure non cohésive doit apparaître. La valeur correspondante du chargement sera appelée la contrainte de rupture, et est définie par :

$$\sigma_r = \sup\{\sigma_\infty > 0 : [[u_2]](l_0) < \delta_c\}.$$

### 3.2.2 La phase de propagation :

Si la charge est augmenté au-delà de  $\sigma_r$ , le corps ne peut pas trouver l'équilibre sans qu'il y'a initiation et propagation d'une pointe non cohésive de la fissure créée. Ainsi, la fissure  $\Gamma$  doit se diviser en deux parties : une partie cohésive  $\Gamma_c$  est une non cohésive  $\Gamma_0$ . On note par  $l_c$  et  $l_a$  leur pointes respectives (Figure 3.4).



**Figure 3.4. Géométrie de la bande avec les chargements dans la phase de propagation.**

On a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \cup \Gamma_c. \\ \Gamma_c &= (-l_a, -l_c] \times \{0\} \cup [l_c, l_a) \times \{0\}. \\ \Gamma_0 &= (-l_c, -l_0] \times \{0\} \cup [l_0, l_c) \times \{0\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contrainte  $\sigma$ , doivent satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega / (D \cup \Gamma) \\ \sigma = A \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega / (D \cup \Gamma) \\ \sigma n = -\sigma_\infty + \sigma_c & \text{sur } \Gamma_c \\ \sigma n = -\sigma_\infty & \text{sur } D \cup \Gamma_0 \\ \sigma n = 0 & y = \pm h \end{cases} \quad (3.7)$$

On doit également vérifier après la résolution du problème, que la contrainte normale ne dépasse pas la contrainte critique  $\sigma_c$  sur le « ligament » de la structure :

$$\sigma_{22} \leq \sigma_c \quad |x| \geq l_a$$

Le champ de contrainte  $\sigma$  satisfait l'équation variationnelle suivante [31](Théorème de Travaux Virtuels, **Gurtin** 1981), pour tout champ de déplacement  $v$  « régulier » sur  $\Omega/(D \cup \Gamma)$ ,

$$\int_{\Omega/(D \cup \Gamma)} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \sigma_\infty [[v_2]] dx_1 + \int_{\Gamma_c} \sigma_c [[v_2]] dx_1 = 0. \quad (3.8)$$

Il reste à définir les lois gouvernant les évolutions des pointes  $l_c$  et  $l_a$ . Comme dans le cas de la phase cohésive, nous exprimons d'abord ces lois en utilisant des arguments énergétiques. L'énergie de surface de la structure à l'équilibre s'écrit maintenant :

$$E_s(\sigma_\infty, l_c, l_a) = \int_{\Gamma} \phi([w]) dx_1 = \int_{\Gamma_c} \sigma_c [[v_2]] dx_1 + 2G_c(l_c - l_0)$$

et l'énergie totale de la structure à l'équilibre est donnée par :

$$E(\sigma_\infty, l_c, l_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega/(D \cup \Gamma)} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \int_{\Gamma_c} \sigma_c [[u_2]] dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \sigma_\infty [[u_2]] dx_1 + 2G_c(l_c - l_0).$$

Les évolutions des pointes  $l_c$  et  $l_a$  avec le chargement  $\sigma_\infty$  doit être tel que  $(l_c, l_a)$  est un minimum local de  $E(\sigma_\infty, \cdot, \cdot)$  pour  $\sigma_\infty$  fixé. Plus particulièrement, le critère s'écrit :

$$\exists h > 0, \quad \forall (l_c^*, l_a^*) : l_0 \leq l_c^* \leq l_a^* < \infty, \quad |l_c^* - l_c| + |l_a^* - l_a| \leq h, \quad E(\sigma_\infty, l_c, l_a) \leq E(\sigma_\infty, l_c^*, l_a^*).$$

Si on cherche un minimum local tel que  $l_0 \leq l_c^* \leq l_a^* < \infty$ , on obtient le système de conditions nécessaires reliant  $l_c$  et  $l_a$  à  $\sigma_\infty$  :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\sigma_\infty, l_c, l_a) = 0, \quad -\frac{\partial E}{\partial l_c}(\sigma_\infty, l_c, l_a) = 0. \quad (3.9)$$

En d'autres termes, les pointes des parties cohésive et non cohésive doivent être telles que le taux de restitution de l'énergie totale due à la propagation de l'une des pointes est nul. Nous allons donner une interprétation locale de ces critères. La condition (3.9a) est la même que pour la phase cohésive. Le champ de déplacement est *a priori* singulier aux pointes  $x_1 = \pm l_a$  et la forme de la singularité est toujours donnée par (3.5). La formule d'Irwin est toujours valable, par conséquent, (3.9a) est toujours équivalent à l'annulation du F.I.C  $K_I$ . D'autre part, le champ de déplacement n'est pas singulier aux points  $x_1 = \pm l_c$ , car le chargement est simplement discontinu en ces points, la contrainte sautant de  $\sigma_c$  -

$\sigma_\infty$  à  $-\sigma_\infty$ . Puisque le champ  $u$  n'est pas singulier aux pointes  $\pm l_c$ , on peut dériver formellement sous le signe de l'intégrale  $E(\sigma_\infty, l_c, l_a)$  par rapport à  $l_c$ , ce qui donne :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_c}(\sigma_\infty, l_c, l_a) = - \int_{\Omega/(D \cup \Gamma)} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial l_c} \right) dx - \int_{\Gamma_c} \sigma_c \left[ \left[ \frac{\partial u_2}{\partial l_c} \right] \right] dx_1 + \int_{D \cup \Gamma} \sigma_\infty \left[ \left[ \frac{\partial u_2}{\partial l_c} \right] \right] dx_1 + 2\sigma_c \left[ [u_2] \right](l_c) - 2G_c \quad (3.10)$$

où nous avons tenu compte de la symétrie de la structure. Dans (3.10),  $\frac{\partial u_2}{\partial l_c}$  représente le taux de variation du champ de déplacement à l'équilibre sous le chargement  $\sigma_\infty$  dû à un accroissement (virtuel) de la zone non cohésive, la pointe de la zone cohésive restant fixe. En vertu de l'équation variationnelle (3.8), les termes contenant  $\frac{\partial u_2}{\partial l_c}$  disparaissent, et finalement on obtient :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_c}(\sigma_\infty, l_c, l_a) = 2\sigma_c \left[ [u_2] \right](l_c) - 2G_c$$

le facteur 2 est dû à la présence de deux lèvres. Par conséquent, le critère de propagation (3.9b) est équivalent au critère de l'ouverture critique  $\left[ [u_2] \right](l_c) = \delta_c$ . Finalement (3.9) est équivalent à :

$$K_I(\pm l_a) = 0, \quad \left[ [u_2] \right](l_c) = \delta_c$$

Nous avons établi dans ce chapitre, les équations du problème dans les phases cohésives et de propagation, ainsi que les critères d'évolutions des pointes  $l_a$  et  $l_o$ . Nous allons établir l'équation intégrale dans le prochain chapitre.



## CHAPITRE 4

### DERIVATION DE L'EQUATION INTEGRALE

#### 4.1 Introduction :

Dans le but, d'étudier la propagation de la fissure dans les phases cohésive et de propagation, nous devons résoudre les problèmes élastiques correspondants ((3.2) et (3.7)). Pour ce faire, nous allons réduire les équations du problème à une équation intégrale singulière en utilisant la transformée de **Fourier**. Nous suivons en cela les travaux d'**Erdogan** (voir par exemple [32]). Nous commençons tout d'abord par un bref rappel sur la transformée de **Fourier**.

#### Transformée de Fourier

Soit  $f(x)$  une fonction continue avec.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ , La transformée de **Fourier** de  $f(x)$  est définie par :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$$

La transformée de **Fourier** inverse est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

Dans le cas d'une fonction paire la transformée de **Fourier** devient la transformée de **Fourier** cosinus définie par :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x) dx$$

La transformée inverse est définie par :

$$f(x) = 2 \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\cos(\omega x) d\omega$$

Dans le cas d'une fonction impaire la transformée de **Fourier** devient la transformée de **Fourier** sinus définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x) dx$$

La transformée inverse est définie par :

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

## 4.2 Dérivation de l'équation intégrale

Tout d'abord, nous écrivons les conditions aux limites sur  $y = \pm h$ , sur les lèvres de la fissure, ainsi que les conditions de transmission sur l'axe  $y = 0$  :

$$\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = 0 \quad y = \pm h \quad (4.1)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0^-) = \sigma_{yy}(x, 0^+) \quad |x| \geq l_a \quad (4.2)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0^-) = \sigma_{xy}(x, 0^+) \quad |x| \geq l_a \quad (4.3)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0^-) = \sigma_{yy}(x, 0^+) = \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.4)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0^-) = \sigma_{xy}(x, 0^+) = 0 \quad |x| \leq l_a \quad (4.5)$$

$$u(x, 0^+) = u(x, 0^-) \quad |x| \geq l_a \quad (4.6)$$

$$v(x, 0^+) = v(x, 0^-) \quad |x| \geq l_a \quad (4.7)$$

Avec :

$$\sigma(x) = \begin{cases} -\sigma_{\infty} & \text{si } |x| < \alpha \\ -\sigma_{\infty} + \sigma_c & \text{si } \alpha < |x| < l_a \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\alpha = l_0$  dans la phase cohésive, et  $\alpha = l_c$  dans la phase de propagation,  $u$  et  $v$  sont les composantes du déplacement sur les axes  $x$  et  $y$ .

L'équation (4.1) représente les conditions aux limites en contraintes sur la face supérieure et la face inférieure de la structure. Les équations (4.2) et (4.3) représentent la condition de la continuité du vecteur contrainte sur le « ligament » de la structure. Les équations (4.4) et (4.5) représentent le chargement sur les lèvres de la fissure. Les équations (4.6) et (4.7) représentent la condition de la continuité du déplacement sur le « ligament ».

Nous introduisons maintenant les transformées de **Fourier** du déplacement. A cause de la symétrie du problème,  $v$  est une fonction paire en  $x$  ( $v(x,y)=v(-x,y)$ ) et  $u$  est une fonction impaire en  $x$  ( $u(x,y)=-u(-x,y)$ ). Nous utilisons donc la transformée de **Fourier** cosinus pour  $v$  et sinus pour  $u$  :

$$\tilde{u}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u(x, y) \sin(\lambda x) dx \quad (4.9)$$

$$\tilde{v}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\lambda x) dx \quad (4.10)$$

Et les transformées de **Fourier** inverse :

$$u(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{u}(\lambda, y) \sin(\lambda x) d\lambda \quad (4.11)$$

$$v(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{v}(\lambda, y) \cos(\lambda x) d\lambda \quad (4.12)$$

En déformations planes, les équations de **Navier** s'écrivent :

$$(k+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$(k-1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k+1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.14)$$

Avec  $\kappa = 3 - 4\nu$

En injectant (4.11) et (4.12) dans les équations de **Navier** en déformation plane, et en prenant la transformée de **Fourier** inverse, on obtient les équations différentielles du second ordre couplées suivantes :

$$-\lambda^2 (k+1) \tilde{u}(\lambda, y) + (k-1) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda, y)}{\partial y^2} - 2\lambda \frac{\partial \tilde{v}(\lambda, y)}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

$$\lambda^2 (k-1) \tilde{v}(\lambda, y) - (k+1) \frac{\partial^2 \tilde{v}(\lambda, y)}{\partial y^2} - 2\lambda \frac{\partial \tilde{u}(\lambda, y)}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

En découplant (4.15) et (4.16), on obtient les équations différentielles du quatrième ordre suivantes :

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}(\lambda, y)}{\partial y^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda, y)}{\partial y^2} + \lambda^4 \tilde{u}(\lambda, y) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^4 \tilde{v}(\lambda, y)}{\partial y^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}(\lambda, y)}{\partial y^2} + \lambda^4 \tilde{v}(\lambda, y) = 0 \quad (4.18)$$

En cherchant des solutions sous la forme  $e^{my}$ , on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 m^2 + m^4 = 0 \quad (4.19)$$

(4.19) admet les deux racines doubles suivantes :

$$m_1 = \lambda, \quad \text{et} \quad m_2 = -\lambda \quad (4.20)$$

Les solutions de (4.17) et (4.18) sont de la forme suivante :

$$\tilde{u}(\lambda, y) = (C_1 + C_2 y)e^{-\lambda y} + (C_3 + C_4 y)e^{\lambda y} \quad (4.21)$$

$$\tilde{v}(\lambda, y) = (D_1 + D_2 y)e^{-\lambda y} + (D_3 + D_4 y)e^{\lambda y} \quad (4.22)$$

En injectant (4.21) et (4.22) dans (4.15) et (4.16), on obtient les relations suivantes (Annexe C):

$$D_1 = C_1 + \frac{k}{\lambda} C_2, \quad D_2 = C_2, \quad D_3 = -C_3 + \frac{k}{\lambda} C_4, \quad D_4 = -C_4 \quad (4.23)$$

On obtient finalement, les expressions suivantes pour le champ de déplacement, en dessus et en dessous de la fissure :

$$u(x, y) = 2 \int_0^\infty [(C_1 + C_2 y)e^{-\lambda y} + (C_3 + C_4 y)e^{\lambda y}] \cdot \sin(\lambda x) d\lambda \quad y > 0 \quad (4.24)$$

$$v(x, y) = 2 \int_0^\infty \left[ \left( C_1 + \left( \frac{k}{\lambda} + y \right) C_2 \right) e^{-\lambda y} + \left( -C_3 + \left( \frac{k}{\lambda} - y \right) C_4 \right) e^{\lambda y} \right] \cdot \cos(\lambda x) d\lambda \quad y > 0 \quad (4.25)$$

$$u(x, y) = 2 \int_0^\infty [(C_5 + C_6 y)e^{-\lambda y} + (C_7 + C_8 y)e^{\lambda y}] \cdot \sin(\lambda x) d\lambda \quad y < 0 \quad (4.26)$$

$$v(x, y) = 2 \int_0^\infty \left[ \left( C_5 + \left( \frac{k}{\lambda} + y \right) C_6 \right) e^{-\lambda y} + \left( -C_7 + \left( \frac{k}{\lambda} - y \right) C_8 \right) e^{\lambda y} \right] \cdot \cos(\lambda x) d\lambda \quad y < 0 \quad (4.27)$$

Remarque :

Nous avons considéré des expressions différentes du champ de déplacement en dessus et en dessous de la fissure, afin de tenir compte de la discontinuité induite par la présence de cette fissure.

Il nous reste à déterminer les constantes  $C_k$   $k=1$  à  $8$ . Nous définissons tout d'abord les fonctions densité suivantes :

$$\psi_1(x) = \frac{d}{dx} [u(x, 0^+) - u(x, 0^-)] \quad (4.28)$$

$$\psi_2(x) = \frac{d}{dx} [v(x, 0^+) - v(x, 0^-)] \quad (4.29)$$

A cause de la symétrie du problème, l'ouverture de la fissure se fait en mode I pur. Par conséquent, la discontinuité du déplacement tangentiel à la fissure est nul, et donc :

$$\psi_1(x) = 0 \quad (4.30)$$

De plus, nous avons grâce à la condition (4.7) :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \psi_2(t). dt = 0 , \quad (4.31a)$$

$$\psi_2(x) = 0 , \quad \text{pour } |x| \geq l_a \quad (4.31b)$$

En effet, (4.31a) est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-l_a}^{l_a} \psi_2(t). dt &= \int_{-l_a}^{l_a} \frac{\partial}{\partial t} [v(t, 0^+) - v(t, 0^-)]. dt \\ &= (v(l_a, 0^+) - v(l_a, 0^-)) - (v(-l_a, 0^+) - v(-l_a, 0^-)) = 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité est due à la continuité du déplacement aux pointes  $\pm l_a$ . (4.31b) est due à la continuité du déplacement en dehors de la fissure.

Nous utilisons maintenant les conditions aux limites. Nous devons tout d'abord donner les expressions des contraintes  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$ . En déformation plane, ces contraintes sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{\mu}{\kappa - 1} [(1 + \kappa)\varepsilon_{yy} + (3 - \kappa)\varepsilon_{xx}] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$  sont les composantes du tenseur de déformation linéarisé.

En utilisant (4.24), (4.27) et (4.32), nous obtenons les expressions suivantes :

$$\sigma_{xy} = 2\mu \int_0^\infty [\{-2\lambda(C_1 + C_2y) + (1 - k)C_2\}e^{-\lambda y} + \{2\lambda(C_3 + C_4y) + (1 - k)C_4\}e^{\lambda y}]. \sin(\lambda x) d\lambda \quad y > 0 \quad (4.33)$$

$$\sigma_{yy} = 2 \int_0^\infty \left[ \{-2\mu\lambda(C_1 + C_2y) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(1 - k)C_2\}e^{-\lambda y} + \{-2\mu\lambda(C_3 + C_4y) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(k - 1)C_4\}e^{\lambda y} \right]. \cos(\lambda x) d\lambda \quad y > 0 \quad (4.34)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \int_0^\infty [\{-2\lambda(C_5 + C_6y) + (1 - k)C_6\}e^{-\lambda y} + \{2\lambda(C_7 + C_8y) + (1 - k)C_8\}e^{\lambda y}]. \sin(\lambda x) d\lambda \quad y < 0 \quad (4.35)$$

$$\sigma_{yy} = 2 \int_0^\infty \left[ \{-2\mu\lambda(C_5 + C_6y) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(1 - k)C_6\}e^{-\lambda y} + \{-2\mu\lambda(C_7 + C_8y) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(k - 1)C_8\}e^{\lambda y} \right]. \cos(\lambda x) d\lambda \quad y < 0 \quad (4.36)$$

En remplaçant (4.33) et (4.35) dans (4.1), et en prenant les transformées de **Fourier** inverse, on obtient :

$$\left\{-2\mu\lambda(C_1 + C_2h) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(1-k)C_2\right\}e^{-\lambda h} + \left\{-2\mu\lambda(C_3 + C_4h) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(k-1)C_4\right\}e^{\lambda h} = 0 \quad (4.37)$$

$$\left\{-2\mu\lambda(C_5 - C_6h) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(1-k)C_6\right\}e^{\lambda h} + \left\{-2\mu\lambda(C_7 - C_8h) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(k-1)C_8\right\}e^{-\lambda h} = 0 \quad (4.38)$$

$$\{-2\lambda(C_1 + C_2h) + (1-k)C_2\}e^{-\lambda h} + \{2\lambda(C_3 + C_4h) + (1-k)C_4\}e^{\lambda h} = 0 \quad (4.39)$$

$$\{-2\lambda(C_5 - C_6h) + (1-k)C_6\}e^{\lambda h} + \{2\lambda(C_7 - C_8h) + (1-k)C_8\}e^{-\lambda h} = 0 \quad (4.40)$$

La continuité du vecteur contrainte sur l'axe x, impose les conditions suivantes :

$$\left\{-2\mu\lambda(C_1) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(1-k)C_2\right\} + \left\{-2\mu\lambda(C_3) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(k-1)C_4\right\} = \left\{-2\mu\lambda(C_5) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(1-k)C_6\right\} + \left\{-2\mu\lambda(C_7) + \left(\frac{-\mu(k-3)}{k-1} + 2\mu\right)(k-1)C_8\right\} \quad (4.41)$$

$$\{-2\lambda(C_1) + (1-k)C_2\} + \{2\lambda(C_3) + (1-k)C_4\} = \{-2\lambda(C_5) + (1-k)C_6\} + \{2\lambda(C_7) + (1-k)C_8\} \quad (4.42)$$

En utilisant la définition de la fonction densité  $\psi_1(x)$  (équation (4.28)) et la condition (4.30) on obtient :

$$\lambda(C_1 + C_3 - C_5 - C_7) = 0 \quad (4.43)$$

En utilisant la définition de la fonction densité  $\psi_2(x)$  (équation (4.29)), en prenant la transformée de **Fourier** et en tenant compte de (4.31b), il vient :

$$C_1 - C_3 + \frac{k}{\lambda}(C_2 + C_4) - C_5 + C_7 - \frac{k}{\lambda}(C_6 + C_8) = -\frac{F}{\lambda} \quad (4.44)$$

$$\text{Avec :} \quad F = \frac{1}{\pi} \int_0^{l_a} \psi_2(t) \sin(\lambda t) dt \quad (4.45)$$

La résolution du système linéaire (4.37). (4.44) donne les valeurs suivantes pour les constantes :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2} \frac{F e^{\lambda h} [(4\lambda^2 h^2 + 2\lambda h(k-1) + 1 - k)e^{-\lambda h} + (k-1)e^{\lambda h}]}{(k+1)\lambda(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_2 &= -\frac{F e^{\lambda h} [(2\lambda h - 1)e^{-\lambda h} + e^{\lambda h}]}{(k+1)(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_3 &= \frac{1}{2} \frac{F e^{-\lambda h} [(4\lambda^2 h^2 + 2\lambda h(-k+1) + 1 - k)e^{\lambda h} + (k-1)e^{-\lambda h}]}{(k+1)\lambda(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_4 &= -\frac{F e^{-\lambda h} [(2\lambda h + 1)e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}]}{(k+1)(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_5 &= \frac{1}{2} \frac{F e^{-\lambda h} [(4\lambda^2 h^2 + 2\lambda h(-k+1) + 1 - k)e^{\lambda h} + (k-1)e^{-\lambda h}]}{(k+1)\lambda(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_6 &= \frac{F e^{-\lambda h} [(2\lambda h + 1)e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}]}{(k+1)(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_7 &= \frac{1}{2} \frac{F e^{\lambda h} [(4\lambda^2 h^2 + 2\lambda h(k-1) + 1 - k)e^{-\lambda h} + (k-1)e^{\lambda h}]}{(k+1)\lambda(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})} \\
C_8 &= \frac{F e^{\lambda h} [(2\lambda h - 1)e^{-\lambda h} + e^{\lambda h}]}{(k+1)(-e^{-2\lambda h} + 4\lambda h + e^{2\lambda h})}
\end{aligned}$$

Nous remarquons que tous les coefficients ne dépendent que de la seule inconnue  $F$ , et par conséquent de la seule fonction densité  $\psi_2(x)$ . Donc pour compléter la résolution de notre problème, il suffit de déterminer  $\psi_2(x)$ . Cette fonction sera déterminée par la résolution d'une équation intégrale singulière, qui sera déduite à partir de la condition de chargement sur les lèvres de la fissure (4.4). En y substituant, les valeurs des constantes dans (4.34), cette condition devient :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} 2\mu \left[ \frac{e^{\lambda(-y+2h)} (2\lambda^2 h(h-y) + 1 + \lambda(y-2h)) - e^{\lambda(-y+4h)} (\lambda y + 1) + e^{\lambda(y+2h)} (2\lambda^2 h(h-y) + 1 + \lambda(2h-y)) + e^{\lambda y} (\lambda y - 1)}{(k+1)(4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1)} \right] \cdot F \cos(\lambda x) d\lambda = \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.46)$$

Dans (4.46) le passage à la limite est nécessaire, car l'intégrale ne peut pas être évaluée en  $y=0$ .

En introduisant certaines limites dans l'intégrale, (4.46) devient :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} -2\mu \left[ \frac{e^{\lambda(-y+2h)}(2\lambda^2 h^2 + 1 - \lambda 2h) - e^{\lambda(-y+4h)} + e^{\lambda(y+2h)}(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda y}}{(k+1)(4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1)} \right] \cdot F \cos(\lambda x) d\lambda = \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.47)$$

En introduisant l'expression de  $F$  (4.45) dans (4.47), en changeant l'ordre d'intégration et en introduisant la limite sous le signe intégrale, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$\frac{-2\mu}{\pi(k+1)} \int_0^{l_a} K(x, t) \psi_2(t) dt = \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.48)$$

Le noyau  $K(x, t)$  de (4.47) est donné par :

$$K(x, t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} N(y, \lambda) \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda \quad (4.49)$$

Avec :

$$N(y, \lambda) = \frac{e^{\lambda(-y+2h)}(2\lambda^2 h^2 + 1 - \lambda 2h) - e^{\lambda(-y+4h)} + e^{\lambda(y+2h)}(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda y}}{(4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1)} \quad (4.50)$$

Le noyau  $K(x, t)$  est divergent en  $y = 0$ . Puisque  $N(0, \lambda)$  est une fonction continue, la divergence de l'intégrale impropre ne peut venir que des extrémités de l'intervalle. Sachant que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} N(0, \lambda) = 0$ , la singularité ne peut venir que du voisinage de l'infini. Afin d'isoler cette singularité, on étudie le comportement de  $N$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . On a :

$$N^\infty(y, \lambda) \cong \frac{-e^{\lambda(-y+4h)}}{e^{4\lambda h}} = -e^{-\lambda y}$$

Afin d'extraire la singularité du noyau de  $K(x, t)$ , on ajoute et on retranche  $N^\infty$  :

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda + \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} [N(y, \lambda) + \\ &\quad e^{-\lambda y}] \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda \\ &= - \frac{t}{(t-x)(t+x)} + \int_0^{+\infty} [N(0, \lambda) + 1] \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda \end{aligned} \quad (4.51)$$

Dans (4.51), la limite a été introduite sous le signe intégrale pour cause de convergence uniforme de l'intégrale impropre. La démonstration de la convergence uniforme est présentée en (Annexe A).

En tenant compte de (4.51), l'équation intégrale (4.47) devient :



$$\int_0^{l_a} \frac{t\psi_2(t)}{(t-x)(t+x)} dt + \int_0^{l_a} k(x,t) \psi_2(t) dt = \frac{\pi(k+1)}{4\mu} \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.52)$$

avec le  $k(x,t)$  donné par :

$$\begin{aligned} k(x,t) &= - \int_0^{+\infty} [N(0,\lambda) + 1] \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda \\ &= - \int_0^{+\infty} \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda \end{aligned} \quad (4.53)$$

A cause de la parité en  $t$  de  $\frac{t\psi_2(t)}{(t-x)(t+x)}$  et de  $k(x,t)\psi_2(t)$ , (4.52) peut s'écrire :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \frac{t\psi_2(t)}{(t-x)(t+x)} dt + \int_{-l_a}^{l_a} k(x,t) \psi_2(t) dt = \frac{\pi(k+1)}{2\mu} \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.54)$$

En tenant compte du fait que  $\psi_2(t)$  est impaire on peut montrer que (Annexe B):

$$\int_{-l_a}^{l_a} \frac{t\psi_2(t)}{(t-x)(t+x)} dt = \int_{-l_a}^{l_a} \frac{\psi_2(t)}{(t-x)} dt$$

Finalement l'équation intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int_{-l_a}^{l_a} \left( \frac{1}{(t-x)} + k(x,t) \right) \psi_2(t) dt = \frac{\pi(k+1)}{2\mu} \sigma(x) \quad |x| \leq l_a \quad (4.55)$$

Avec la condition :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \psi_2(t) dt = 0$$

L'équation (4.55) est appelée « équation intégrale singulière de Cauchy du premier type ». La singularité provient du noyau de Cauchy  $1/(t-x)$ . Nous présentons la résolution de (4.55) dans le prochain chapitre.

Pour compléter la résolution du problème, il reste à vérifier la condition (4.5) qui impose un chargement tangentiel nul sur les lèvres de la fissure. En y substituant, les valeurs des constantes dans (4.35), cette condition devient :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} - \frac{2\mu}{1+\kappa} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} \left[ \frac{e^{2\lambda h}(2\lambda h^2 + y - 2\lambda y h) + e^{2\lambda(y+h)}(-2\lambda h^2 + y + 2\lambda y h) - e^{4\lambda h} y - e^{2\lambda y} y}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \right] F \sin(\lambda x) d\lambda = 0 \quad |x| \leq l_a \quad (4.56)$$

L'utilisation de la limite dans (4.56) est nécessaire, car l'intégrale ne peut être évaluée en  $y=0$ .

En introduisant certaines limites dans (4.56), on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{2\mu}{1+\kappa} \int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{\lambda(2h-y)} (1-e^{2\lambda y})}{-1+4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} F \sin(\lambda x) d\lambda = 0 \quad |x| \leq l_a \quad (4.57)$$

En introduisant l'expression de  $F$  (4.45), et en changeant l'ordre d'intégration dans (4.57) on obtient :

$$\int_0^{l_a} M(x,t) \psi_2(t) dt = 0 \quad |x| \leq l_a \quad (4.58)$$

Avec  $M(x,t)$  définie par :

$$\begin{aligned} M(x,t) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{\lambda(2h-y)} (1-e^{2\lambda y})}{-1+4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{\lambda 2h} (1-1)}{-1+4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dans (4.59), la limite a été introduite sous le signe intégrale, car l'intégrale impropre est uniformément convergente. La démonstration de la convergence uniforme est donnée en (Annexe A).

Avec (4.59) la condition (4.5) sur l'absence de chargement tangentiel sur les lèvres de la fissure est identiquement vérifiée.

### 4.3 Résolution de l'équation intégrale

On passe à La résolution de l'équation intégrale singulière (4.55).tel que Le noyau de cette équation contient la singularité de **Cauchy**. C'est donc une intégrale impropre divergente. Pour l'évaluer, nous utilisons le concept de l'intégration au sens de la valeur principale de **Cauchy**. Nous commençons par en donner un bref rappel.

#### 4.3.1 Valeur principale de Cauchy

Définition [33](Mauch 2004)

Si  $f(x)$  est continue sur  $[a,b]$  sauf au point  $x_0 \in [a,b]$ , donc la valeur principale de Cauchy de l'intégrale est définie par :

$$VP\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

La valeur principale est obtenue en approchant la singularité symétriquement. La valeur principale de l'intégrale peut exister quand l'intégrale diverge. Si l'intégrale existe, elle est égale à sa valeur principale.

### Exemple

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  est divergente. Sa valeur principale est égale à :

$$\begin{aligned} VP\left(\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( [\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\log|x|]_{\varepsilon}^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log|\varepsilon| - \log|\varepsilon|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans la suite du travail toutes les intégrales singulières (contenant le noyau  $1/(t-x)$ ) seront évaluées au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour simplifier l'écriture on omettra d'écrire  $VP()$ , et on écrira simplement le signe intégrale.

### 4.3.2 Résolution de l'équation intégrale :

De même que pour l'établissement de l'équation intégrale, nous suivons pour sa résolution les travaux d'**Erdogan [34]**(**Erdogan et al.** 1973).

Le problème (2.8) de la phase cohésive est un cas particulier du problème (2.11) de la phase de propagation quand  $l_c=l_0$ . La résolution de l'équation intégrale (4.55) sera présentée pour ce dernier cas. La résolution s'effectuera numériquement en utilisant les polynômes de **Chebyshev** qui seront définis plus tard. Ces polynômes sont définis dans l'intervalle  $[-1,1]$ . Nous devons donc changer l'intervalle de l'équation intégrale (4.55) de  $[-l_a, l_a]$  à  $[-1,1]$ . Nous définissons d'abord les quantités normalisées suivantes :

$$r = \frac{x}{l_a}, \quad s = \frac{t}{l_a}, \quad \eta = \frac{l_c}{l_a}, \quad \psi(t) = f(s), \quad k(x,t) = L(r,s), \quad \sigma(x) = \sigma(r). \quad (4.60)$$

Ainsi l'équation (4.55) prend la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{1}{(s-r)} + l_a \cdot L(r,s) \right) f(s) ds = \frac{\pi(k+1)}{2\mu} \sigma(r) \quad |r| \leq 1. \quad (4.61)$$

Avec la condition :

$$\int_{-1}^{+1} f(t).dt = 0 \quad (4.62)$$

Dans (4.61), le chargement  $\sigma(r)$  est donné par :

$$\sigma(r) = \begin{cases} -\sigma_{\infty} & \text{si } |r| < \eta \\ -\sigma_{\infty} + \sigma_c & \text{si } \eta < |r| < 1 \end{cases} \quad (4.63)$$

On remarque que le chargement (4.63) présente des discontinuités. Pour ce type de chargement, les méthodes de résolution classiques de ce type d'équation intégrale ne donnent pas de bons résultats. Par conséquent, et suivant une méthode développée par (Ioakimidis, 1980 [35]), on remplace  $f(s)$  par une nouvelle fonction  $\phi(s)$  telle que :

$$f(s) = h(s) + \phi(s), \quad (4.64)$$

Où  $h(s)$  est la solution de l'équation intégrale suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(s-r)} h(s) ds = \frac{(k+1)}{2\mu} \sigma(r) \quad |r| \leq 1 \quad (4.65)$$

Avec la condition supplémentaire suivante :

$$\int_{-1}^{+1} h(s).ds = 0 \quad (4.66)$$

En remplaçant (4.64) dans (4.61) en tenant compte de (4.65) et (4.66), on obtient l'équation intégrale dont  $\phi(s)$  est l'inconnue :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{s-r} + l_a L(r, s) \right] \phi(s).ds = g(r), \quad |r| \leq 1 \quad (4.67)$$

Où :

$$g(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} l_a L(r, s).h(s).ds \quad (4.68)$$

Avec la condition :

$$\int_{-1}^{+1} \phi(t).dt = 0 \quad (4.69)$$

Il est clair à partir de (4.67) que puisque  $L(r,s)$  a un comportement régulier,  $g(r)$  a aussi un comportement régulier. Par conséquent, les techniques numériques de résolution de ce type d'équation intégrale peuvent être directement appliquées sans aucune modification.

La solution analytique de l'équation (4.65) avec la condition (4.66), est donnée par [36] :

$$h(s) = -\frac{(k+1)}{2\pi\mu} \cdot (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sigma(r)}{r-s} dr \quad |s| \leq 1, \quad (4.70)$$

En effectuant l'intégration dans (4.70), on obtient :

$$h(s) = h_1(s) + h_2(s) \quad (4.71)$$

Avec :

$$h_1 = \frac{(k+1)s}{2\pi\mu} \cdot (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sigma_\infty \cdot \pi + 2 \cdot \sigma_c \cdot \arccos \eta), \quad (4.72)$$

$$h_2(s) = \frac{(k+1)\sigma_c}{2\pi\mu} \ln \left| \frac{\eta\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-\eta^2}}{\eta\sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-\eta^2}} \right| \quad (4.73)$$

On voit que  $h_2(s)$  présente des singularités logarithmiques aux points  $s = \pm\eta$ .

Il a été montré dans (Erdogan et al. 1973 [37]) que l'équation intégrale singulière (4.67) a l'indice 1 car la fonction inconnue  $\phi(s)$  a des singularités intégrables aux points  $\pm 1$ . La solution peut être exprimée comme  $\phi(s) = w(s) \cdot \varphi(s)$  où  $w(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$  est la fonction poids associé au polynôme de **Chebyshev** de premier ordre  $T_n(s) = \cos(n \cdot \arccos(s))$  et  $\varphi(s)$  est une fonction continue et bornée sur l'intervalle  $[-1, 1]$  laquelle peut être exprimé comme une série tronquée des polynômes de **Chebyshev** du premier ordre. A cause de la symétrie du problème par rapport à  $y$  on a  $\varphi(-s) = -\varphi(s)$ . Donc, la solution de l'équation (4.67) s'exprime :

$$\phi(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^N A_n \cdot T_{2n-1}(s) \quad (4.74)$$

Dans (4.74) nous avons pris que les polynômes de **Chebyshev** à indice impair, car  $T_{2n-1}(-s) = -T_{2n-1}(s)$ .

On observe qu'avec l'expression (4.74), la condition (4.69) est automatiquement vérifiée. En effet :

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^N A_n \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} T_{2n-1}(t) dt = 0.$$

Substituons l'équation (4.74) dans l'équation (4.67) en utilisant les relations suivantes :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}}{s-r} ds = \begin{cases} U_{n-1}(r), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

Où :

$$U_n(r) = \sin((n+1) \cdot \arccos(r)) / \sqrt{1-r^2} \quad (4.76)$$

Représente les polynômes de **Chebyshev** de second ordre. Il vient :

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r) + H_n(r)] = g(r), \quad r < 1. \quad (4.77)$$

Où :

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_a L(r,s) T_{2n-1}(s) ds \quad (4.78)$$

Afin de déterminer les coefficients  $A_n$ , des points de collocation  $r=r_j$ ,  $j=0,1,\dots,N$  sont choisis afin de réduire l'équation (4.77) à un système d'équations algébriques linéaires. Le choix de ces points n'est pas très critique, nous choisissons les racines des polynômes de **Chebyshev**  $T_{2N-1}$  :

$$T_{2N-1}(r_j) = 0, \quad r_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)}\right), \quad j=1,\dots,N. \quad (4.79)$$

Utilisant les points de collocation donnés par l'équation (4.79) dans l'équation (4.77), on arrive à un système de N équations à N inconnus  $A_1, \dots, A_N$  qui s'écrit :

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r_j) + H_n(r_j)] = g(r_j), \quad j=1,\dots,N \quad (4.80)$$

La valeur de  $H_n(r_j)$  de coté gauche de l'équation (4.80) déterminé à partir de l'équation (4.78).

#### 4.3.3 Évaluation numérique des différentes intégrales :

Les intégrales  $H_n(r_j)$  et  $g(r_j)$  sont évaluées en utilisant la formule d'intégration de **Gauss- Chebyshev** qui s'écrit :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \sum_1^n \frac{f(t_k)}{n}, \quad T_n(t_k) = 0, \quad t_k = \cos \frac{\pi(2k+1)}{2n} \quad (4.81)$$

La valeur de  $g(r_j)$  du coté droit de l'équation (4.81) est déterminée à partir de l'équation (4.68) qui avec l'équation (4.71) peut se mettre sous la forme suivante :

$$g(r) = -\frac{1}{\pi} \left( \int_{-1}^1 l_a L(r,s) h_1(s) ds + \int_{-1}^1 l_a L(r,s) h_2(s) ds \right) \quad (4.82a)$$

La première partie est évaluée par la précédente formule de **Gauss- Chebyshev**. A cause des singularités logarithmiques que présente le terme  $h_2(s)$  aux points  $\pm \eta$ , la seconde partie est devisée sous la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 l_a L(r,s) h_2(s) ds = \int_{-1}^{-\eta} l_a L(r,s) h_2(s) ds + \int_{-\eta}^{\eta} l_a L(r,s) h_2(s) ds + \int_{\eta}^1 l_a L(r,s) h_2(s) ds \quad (4.82b)$$

Chacune des intégrales du membre droit de l'équation précédente est évaluée à l'aide de **Gauss- Chebyshev**.

#### 4.3.4 Evaluation numérique de $L(r,s)$ :

Considérons maintenant le terme  $L(r,s)$  de l'équation (4.69), après introduction des entités normalisées :

$$L(r,s) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{e^{2\lambda h} (4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda l_a (s+r) + \sin \lambda l_a (s-r)) d\lambda \quad (4.83)$$

On observe que  $L(r,s)$  est une intégrale impropre. La fonction  $\frac{e^{2\lambda h} (4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1}$ , est équivalente au voisinage de  $+\infty$  à  $4\lambda^2 h^2 e^{-2\lambda h}$  qui tend très rapidement vers 0 lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,  $L(r,s)$  sera décomposée de la manière suivante :

$$L(r, s) = -\frac{1}{2} \int_0^A \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda l_a(s+r) + \sin \lambda l_a(s-r)) d\lambda \\ - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda l_a(s+r) \\ + \sin \lambda l_a(s-r)) d\lambda$$

Où A est un point de coupure. La deuxième intégrale du membre droit de l'équation précédente devient négligeable pour une valeur de A suffisamment grande.

- Evaluation de A :

Pour évaluer A, on doit faire un test et on doit donc donner des valeurs à s, r et  $l_a$ . Les valeurs de s et de r sont choisies aléatoirement dans l'intervalle [-1,1], on prend r=0 et s=1.  $l_a$ , représente la longueur de la fissure, plus cette valeur est élevée plus l'intégrale est difficile à évaluer numériquement, on choisit la valeur maximale dans nos calculs  $l_a = 10$ .

L'évaluation numérique de l'intégrale à l'aide du logiciel MAPLE a donné :

$$-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda 10(1) + \sin \lambda 10(1)) d\lambda = 0.1999999898 \quad (4.86)$$

Si on limite l'intégration sur l'intervalle [0.14] on obtient une bonne convergence :

$$-\frac{1}{2} \int_0^{14} \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda 10(1) + \sin \lambda 10(1)) d\lambda = 0.199999989 \quad (4.87)$$

En conclusion on peut limiter l'intégration sur l'intervalle [0.14] et l'intégrale  $L(r, s)$  prend la forme suivante :

$$L(r, s) = -\frac{1}{2} \int_0^{14} \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda l_a(s+r) + \sin \lambda l_a(s-r)) d\lambda \quad (4.88)$$

L'intégrale ainsi définie est évaluée à l'aide de la formule de **Gauss- Chebyshev** avec un changement de variable pour passer de l'intervalle [0.14] à l'intervalle [-1,1].

$$L(r, s) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{e^{2\lambda h}(4\lambda^2 h^2 + 4\lambda h + 2) - 2}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \right] (\sin \lambda l_a(s+r) + \sin \lambda l_a(s-r)) d\gamma \quad (4.89)$$

$$\text{Où } \lambda = \frac{A}{2}(\gamma + 1) \quad \text{et } A = 14$$



#### 4.3.5 Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte :

Le facteur d'intensité de contrainte en pointe de fissure est donné par (la démonstration est détaillée en Annexe D):

$$k_1(\pm l_a) = -\frac{\mu}{2(1-\nu)\sqrt{l_a}} \lim_{x_1 \rightarrow \pm l_a} \sqrt{l_a^2 - x_1^2} \psi(x_1) =$$

$$-\frac{\mu}{2(1-\nu)\sqrt{l_a}} \lim_{s \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-s^2} f(s) \quad (4.90)$$

Où  $\psi(x_1)$  est donnée avec (3.24). On obtient :

$$k_1(\pm l_a) = \sqrt{l_a} \left( \sigma_\infty - \frac{2}{\pi} \sigma_c \arccos(\eta) \right) - \sqrt{l_a} \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sum_{i=1}^n A_n \quad (4.91)$$

#### 4.3.6 Formule donnant l'ouverture de la fissure :

L'ouverture de la fissure en  $x \in [-1,1]$  est définie par :

$$\delta(x) = v(x,0^+) - v(x,0^-) = \int_{-l_a}^x \psi(t) dt \quad (4.92)$$

De (4.3), (4.7), (4.14) et (4.17) on obtient :

$$\delta(r) = \frac{2l_a}{\pi\mu} \left( \pi\tau_\infty \sqrt{1-r^2} + \tau_c \left( r \ln \frac{r\sqrt{1-\eta^2} - \eta\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-\eta^2} + \eta\sqrt{1-r^2}} + \eta \ln \frac{(\sqrt{1-r^2} + \sqrt{1-\eta^2})^2}{r^2 - \eta^2} - 2 \arccos(\eta) \sqrt{1-r^2} \right) \right)$$

$$- l_a \sqrt{1-r^2} \sum_{n=1}^N \frac{A_n U_{n-1}(r)}{n} \quad (4.93)$$

Pour obtenir (4.29), on a utilisé les relations suivantes :

$$\int_{-1}^s \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n} U_{n-1}(s) \sqrt{1-s^2} \quad (4.94)$$

On observe à partir de l'équation (4.29), que  $\delta(r)$  n'est pas définie en  $\pm \eta$ , a cause des singularités logarithmiques. L'ouverture de la fissure en ces points est obtenue en passant a la limite de  $\delta(r)$  lorsque  $r \rightarrow \pm \eta$ .

On obtient le résultat suivant

$$: \quad \delta \left( \pm \frac{l_c}{l_a} \right) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \left[ \pi \sqrt{l_a^2 - l_c^2} \left( \sigma_\infty - \frac{2}{\pi} \sigma_c \arccos \left( \frac{l_c}{l_a} \right) \right) + 2\sigma_c l_c \ln \left( \frac{l_c}{l_a} \right) \right] - \frac{\sqrt{l_a^2 - l_c^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_n U_{2n-2} \left( \frac{l_c}{l_a} \right)}{2n-1} \right)}{\quad} \quad (4.95)$$

#### 4.3.7 Etude de la convergence :

Afin de mettre en œuvre les calculs numériques, nous devons choisir les valeurs de  $N$  et  $n$ . Pour rappel,  $N$  représente le nombre de coefficients  $A_1, \dots, A_N$ ,  $n$  représente le nombre de points d'intégration de **Gauss-Chebyshev**. Le critère de convergence choisi est la stabilité de la valeur du facteur d'intensité des contraintes  $k_1$ . La méthode choisie est la suivante : nous fixons une des deux valeurs ( $N$  ou  $n$ ) et nous augmentons l'autre valeur en calculant à chaque fois le  $k_1$  jusqu'à sa stabilisation. Nous fixons les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes  $l_a=10\text{mm}$  et  $h=1\text{mm}$ .

Pour déterminer  $N$ , on fixe la valeur de  $n$  à 70. Nous présentons l'évolution de  $k_1$  avec  $N$  dans le tableau 4.1. Nous observons que la valeur de  $k_1$  se stabilise à partir de  $N=40$ .

N	K1
5	-279.238081335717000
10	-290.506033185782300
15	-290.153182875896000
20	-290.139782142953000
25	-290.140250276444500
30	-290.140248385562900
35	-290.140244180593800
40	-290.140249257528900
50	-290.140249000956400
100	-290.140172291568200
200	-290.140259398507100
400	-290.140248915095000

**Tableau 4.1. Valeurs du facteur d'intensité de contrainte  $k_1$  en fonction de  $N$**

Pour déterminer  $n$ , on fixe la valeur de  $N$  à 40. Nous présentons l'évolution de  $k_1$  avec  $n$  dans le tableau 4.2. Nous observons que la valeur de  $k_1$  se stabilise à partir de  $n=70$ .

n	K1
5	-143.789956972910100
10	76.729452614480410
15	-132.211278010774400
20	23.640135494266810
25	-703.273491080368000
30	-188.895211292320700
35	-185.499952535821200
40	-525.733263306272800
50	-340.890258930608600
60	-291.079058616105300
70	-290.140249257528900
80	-290.236003831500600
90	-290.247660549243100
100	-290.254224658287100
110	-290.258236362329900
150	-290.264185125792400
200	-290.265675849140600

**Tableau 4.2 : Valeur du facteur d'intensité de contrainte  $k_1$  en fonction de  $n$  .**

Par conséquent, dans tout ce qui suit les calculs seront effectués avec  $N=40$  et  $n=70$ .

## CHAPITRE 5

### RESULTATS ET ETUDE PARAMETRIQUE

#### 5.1.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons quelques applications numériques. On étudiera l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué en faisant varier un certain nombre de paramètres du problème. Plus particulièrement on fera varier les paramètres suivants :

- $h/l_0$  afin d'étudier l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à l'épaisseur de la bande.

- $\delta_c/l_0$  afin d'étudier l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à la longueur caractéristique du modèle de **Dugdale**.

On a vu au Chapitre 3 que l'évolution de la fissure suit deux phases : une phase cohésive et une phase de propagation. Nous présentons tout d'abord la procédure numérique utilisée dans chaque phase.

#### 5.1.2 La phase cohésive :

On a établi au Chapitre 3 le critère de propagation des pointes  $\pm l_a$ . On a montré que la longueur de la fissure cohésive est telle que la singularité des contraintes aux pointes  $\pm l_a$  soit nulle et donc que le facteur d'intensité des contraintes  $k_1(\pm l_a) = 0$ .

D'un point de vue pratique, il est facile de calculer  $\sigma_\infty$ , supposant  $l_a$  connue. En utilisant la linéarité de problème élastique, le Facteur d'intensité des contraintes  $k_1(l_a)$  est donné par la formule suivante :

$$k_1(l_a) = \sigma_\infty k_1^\infty(l_a) + \sigma_c k_1^c(l_a) \quad (5.1)$$

Où  $k_1^\infty(l_a)$  et  $k_1^c(l_a)$  sont les FIC du problème sans forces cohésives, avec  $\sigma_\infty = 1$ , et du problème avec des forces cohésives unitaires  $\sigma_c = 1$  et  $\sigma_\infty = 0$ , respectivement.

L'équation  $k_1(l_a) = 0$  donne :

$$\sigma_\infty = -\frac{\sigma_c k_1^c(l_a)}{k_1^\infty(l_a)} \quad (5.2)$$

De même l'ouverture de la fissure en un point  $x$  est donnée par :

$$\delta(x) = \sigma_{\infty} \delta^{\infty}(x) + \sigma_c \delta^c(x) \quad (5.3)$$

Où  $\delta^{\infty}(x)$  et  $\delta^c(x)$  sont respectivement, l'ouverture sans forces cohésives et  $\sigma_{\infty} = 1$ , et avec des forces cohésives unitaires  $\sigma_c = 1$  et  $\sigma_{\infty} = 0$ .

Par conséquent, la procédure numérique choisie pour la phase cohésive est la suivante :

1. On se donne une valeur initiale de  $l_a > l_0$ .
2. On pose  $\sigma_{\infty} = 1$  et  $\sigma_c = 0$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_1^{\infty}(l_a)$  et  $\delta^{\infty}(l_0)$  (équations (4.91) et (4.93)).
3. On pose  $\sigma_{\infty} = 0$  et  $\sigma_c = 1$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_1^c(l_a)$  et  $\delta^c(l_0)$ .
4. On calcule  $\sigma_{\infty}$  tel que  $k_1(l_a) = 0$  (équation (5. 2)).
5. On calcule  $\delta(l_0)$  (équation (5. 3)), et on compare à  $\delta_c$ .
6. Si  $\delta(l_0) < \delta_c$ , on incrémente  $l_a$  et on revient en 2.
7. Si  $\delta(l_0) > \delta_c$ , on recherche les valeurs de  $l_a$  et  $\sigma_{\infty}$ , tel que  $k_1(l_a) = 0$ , qui nous donnent  $\delta(l_0) = \delta_c$  par dichotomie.
8. La valeur finale de  $\sigma_{\infty}$  est la charge de rupture  $\sigma_r$ .
9. Fin.

### 5.1.3 Phase de propagation :

Dans cette phase, il y a deux pointes : une pointe non cohésive  $l_c$  et une pointe cohésive  $l_a$ . Les critères d'évolution de ces pointes ont été établis au Chapitre 3. Nous choisissons de piloter le calcul en prescrivant la valeur de la pointe non-cohésive  $l_c$ . Les valeurs de la charge  $\sigma_{\infty}$ , et celle de la pointe cohésive  $l_a$ , sont déterminés en résolvant le système d'équations non linéaire suivant :

$$k_1(\pm l_a) = 0, \quad \delta(\pm l_c) = \delta_c$$

La procédure numérique utilisée est la suivante :

1. On se donne une valeur initiale de  $l_c > l_0$
2. On choisit une valeur arbitraire de  $l_a > l_c$ .
3. On pose  $\sigma_{\infty} = 1$  et  $\sigma_c = 0$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_1^{\infty}(l_a)$  et  $\delta^{\infty}(l_c)$ .

4. On pose  $\sigma_\infty = 0$  et  $\sigma_c = 1$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_1^c(l_a)$  et  $\delta^c(l_c)$ .

5. On calcule  $\sigma_\infty$  de telle sorte que  $\delta(l_c) = \delta_c$ . La formule est obtenue en utilisant le principe de superposition (linéarité du problème élastique), elle est donnée par :

$$\sigma_\infty = \frac{\delta_c - \sigma_c \delta^c(l_c)}{\delta^\infty(l_c)}$$

6. On calcule  $k_1(l_a)$ , si  $k_1(l_a) = 0$ , on incrémente  $l_c$  et on revient en 2.

7. Si  $k_1(l_a) \neq 0$ , on recherche la bonne valeur de  $l_a$  (et de  $\sigma_\infty$ ) par dichotomie. On incrémente  $l_c$  et on revient en 2.

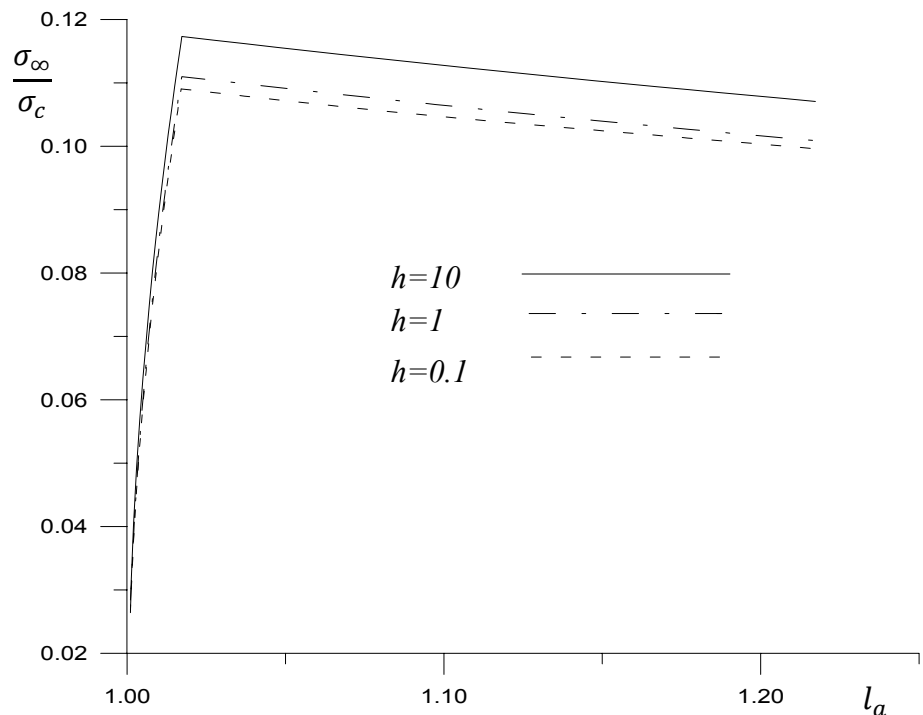
8. Fin

#### 5.1.4. Etude de l'influence du paramètre $h/l_0$

Dans cette partie on fait varier le paramètre  $h/l_0$ , et on fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\sigma_c = 72 \text{MPa}, \delta_c = 0.001 \text{mm}, \mu = 1100 \text{MPa}, \nu = 0.29.$$

Pour le paramètre  $h/l_0$ , on choisit les valeurs suivantes : 0.1, 1 et 10.



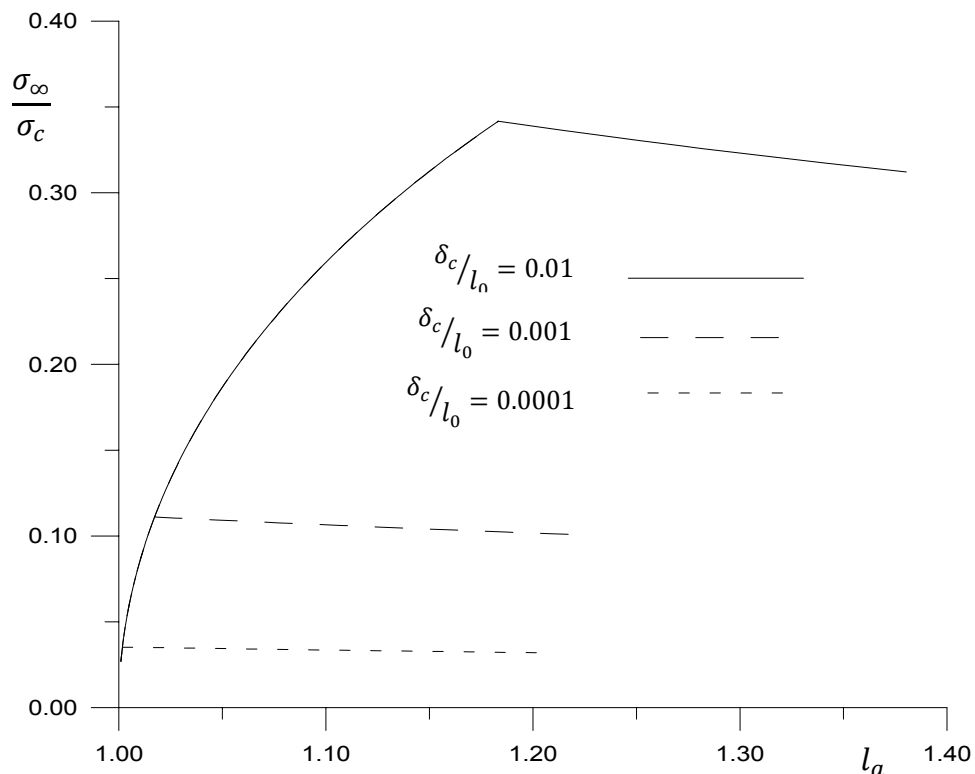
**Figure 5.1. Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de  $h/l_0$ .**

### 5.1.5. Etude de l'influence du paramètre $\delta_c/l_0$

Dans cette partie on fait varier le paramètre  $\delta_c/l_0$ , et on fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\sigma_c = 72MPa , h = 1mm , \mu = 1100MPa , \nu = 0.29 .$$

Pour le paramètre  $\delta_c/l_0$ , on choisit les valeurs suivantes : 0.0001, 0.001, et 0.01.



**Figure 5.2. Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de  $\delta_c$ .**

### 5.1.6. Discussion des résultats

Dans les figures (5.1), et (5.2), on présente l'évolution de la charge appliquée  $\sigma_\infty$ , en fonction de la position de la pointe cohésive  $l_a$ , pour différentes valeurs de  $h/l_0$  et  $\delta_c/l_0$ . Pour toutes les courbes la partie croissante correspond à la phase cohésive, est due au fait que la charge appliquée doit croître pour équilibrer les forces cohésives qui augmentent avec la propagation de la fissure cohésive. La partie décroissante correspond à la phase de propagation, est due à la relaxation de la structure provoquée par l'accroissement de la fissure non-cohésive. Pour les deux courbes le chargement maximum est la charge de la rupture correspondant au début de la propagation de la fissure initiale.

Dans la Figure (5.1), on observe que la charge de rupture augmente avec le rapport  $h/l_0$ . Ce résultat veut dire que plus l'épaisseur de la bande est importante plus la structure est résistante.

Sur la Figure (5.2), nous observons que la contrainte de rupture est une fonction croissante de  $\delta_c/l_0$  et tend vers  $\sigma_c$  lorsque la taille de la fissure initiale  $l_0$  est petite devant la longueur caractéristique du modèle de **Dugdale**  $\delta_c$ . Ce résultat confirme les résultats obtenus par (**Ferdjani** et al 2006a, 2006b, 2007 et 2009) **[38]**, **[39]**, **[40]** et **[41]**, pour le cas d'une plaque fissurée ou une plaque trouée, sous une traction uniforme, et pour une fissure dans un demi-plan sous chargement antiplan.

## 5.2 Comparaison entre les modèles de Griffith et de Dugdale

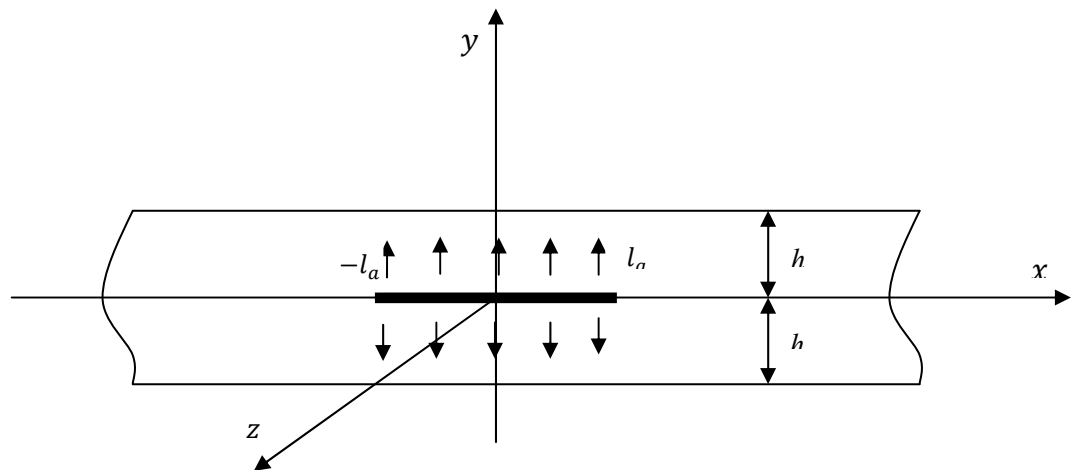
On effectue une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de **Dugdale** et de **Griffith**. Le problème traité est le même que celui traité dans les chapitres précédents, à savoir étudier la propagation d'une fissure dans une bande infinie sous chargement normal. Nous étudions plus particulièrement la convergence du modèle de **Dugdale** vers le modèle de **Griffith** lorsque la longueur caractéristique  $\delta_c$  tend vers 0. En effet, nous observons sur la Figure (2.3) (Chapitre 2), que la densité d'énergie de surface du modèle de **Dugdale** tend vers celle du modèle de **Griffith** lorsque  $\delta_c$  tend vers 0. Nous allons donc faire un calcul avec le modèle de **Griffith**, et plusieurs calculs avec le modèle de **Dugdale** en maintenant  $G_c$  fixe et en faisant tendre  $\delta_c$  tend vers 0, puis comparer les résultats obtenus.

Nous présentons tout d'abord dans le cas de **Griffith** les équations du problème, l'équation intégrale, et la résolution numérique. Dans le cas de **Dugdale**, les équations ont déjà été présentées dans les Chapitres 3 et 4.

### 5.2.1 Equation du problème :

La structure et le chargement initial sont expliqués au Chapitre 3. Nous supposons que la fissure initiale  $D = [-l_0, l_0] \times \{0\}$  se propage horizontalement. On note pour un chargement donné les nouvelles pointes de la fissure  $\pm l$ , la nouvelle fissure sera notée  $\Gamma = [-l, l] \times \{0\}$ . Dans le cas de Griffith, il n'existe pas de forces cohésives, par conséquent, toute la fissure est non cohésive. Comme précédemment (Chapitre 3), on utilise le principe de superposition, pour décomposer le problème en un problème homogène et un problème non homogène. Nous étudions dans la suite le problème non homogène représenté sur la Figure (5.3).





**Figure 5.3 : Structure et chargement dans le cas de Griffith.**

Le champ des déplacements ainsi que le champ des contraintes à l'équilibre sous le chargement  $\sigma_\infty$  sont donc solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega / \Gamma \\ \sigma = A \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega / \Gamma \\ \sigma n = -\sigma_\infty & \text{sur } \Gamma \\ \sigma n = 0 & y = \pm h \end{cases} \quad (5.4)$$

Le critère de propagation de la fissure est le critère classique de **Griffith** :  $G = G_c$ .

### 5.2.2 Equation intégrale et résolution :

En procédant de la même manière qu'au Chapitre 4, nous établissons l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-l}^{+l} \left[ \frac{1}{t - x_1} + k(x_1, t) \right] \psi(t) dt = -\frac{\pi(k+1)}{2\mu} \sigma_\infty \quad |x_1| < l \quad (5.5)$$

Avec la condition :

$$\int_{-l}^l \psi(t) dt = 0$$

L'équation intégrale (5.5) est la même que (4.55) (Chapitre 4), la seule différence réside dans le second membre qui est constant dans ce cas, au lieu d'être discontinu dans le cas de **Dugdale**.  $\psi(t)$  et  $k(x_1, t)$  ont les mêmes définitions qu'au Chapitre 4 (équations 4.29 et 4.53).

Pour résoudre cette équation intégrale, nous devons changer le domaine d'intégration de

$[-l, l]$  à  $[-1, 1]$ . Nous définissons d'abord les quantités normalisées suivantes :

$$r = \frac{x_1}{l}, \quad s = \frac{t}{l}, \quad \psi(t) = f(s), \quad k(x_1, t) = L(r, s) \quad (5.6)$$

En injectant (5.6) dans (5.5), l'équation intégrale devient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{s-r} + l_a L(r, s) \right] f(s) ds = -\frac{2(1-\nu)\sigma_\infty}{\mu}, \quad |r| \leq 1 \quad (5.7)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0 \quad (5.8)$$

La fonction inconnue  $f(s)$  a des singularités intégrables en points  $\pm 1$ . La solution de l'équation intégrale singulière (5.7) peut être exprimé comme:

$f(s) = w(s) \cdot \varphi(s)$  où  $w(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$  est la fonction poids associé au polynôme de **Chebyshev** de premier ordre  $T_n(s) = \cos(n \cdot \arccos(s))$  et  $\varphi(s)$  est une fonction continue et bornée sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , laquelle peut être exprimé comme une série des polynômes de **Chebyshev** du premier ordre. Donc, la solution de l'équation (5.7) peut s'exprimer comme suit:

$$f(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot T_{2n-1}(s) \approx (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^N A_n \cdot T_{2n-1}(s) \quad (5.9)$$

Dans (5.9) nous n'avons pris que les polynômes de **Chebyshev** à indice impair, car  $T_{2n-1}(-s) = -T_{2n-1}(s)$ , et  $f(s)$  est une fonction impaire à cause de la symétrie du problème.

En remplaçant l'équation (5.9) dans l'équation (5.6), on obtient :

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r) + H_n(r)] = -\frac{2(1-\nu)\sigma_\infty}{\mu}, \quad |r| \leq 1 \quad (5.10)$$

où:

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} L(r, s) T_{2n-1}(s) ds \quad (5.11)$$

On observe qu'avec l'expression (5.9), la condition (5.8) est automatiquement vérifiée.

On peut résoudre l'équation (5.10), en sélectionnant N points de collocation (les racines de  $T_{2N-1}$ ), donnés par :

$$r_j = \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)} \right), \quad j = 1, \dots, N \quad (5.12)$$

En écrivant (5.10) pour les points de collocation donnés par l'équation (5.12), on obtient un système de  $N$  équations avec  $N$  inconnues ( $A_1, \dots, A_N$ ), donné par :

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r_j) + H_n(r_j)] = -\frac{2(1-\nu)\sigma_\infty}{\mu}, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.13)$$

De la même manière qu'au Chapitre 4, on peut montrer que le Facteur d'Intensité de Contrainte  $k_1$  est donné par :

$$k_1(\pm l) = -\frac{\mu\sqrt{l}}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^N A_n \quad (5.14)$$

### 5.2.3 Mise en œuvre numérique :

Le critère de propagation dans ce cas est le critère classique de **Griffith** :  $G = G_c$ . Nous devons calculer le taux de restitution d'énergie potentielle élastique  $G$  à partir du  $k_1$  en utilisant la formule d'**Irwin**. Cette formule en mode I est donnée par (« Mécanique de la rupture fragile », **J.B. Leblond**):

$$G = \left( \frac{1-\nu}{2\mu} \right) k_1^2 \quad (5.15)$$

A partir de l'équation précédente et du critère de Griffith, on déduit le F.I.C critique, correspondant à la propagation de la fissure :

$$k_1^c = \sqrt{\frac{2G_c\mu}{(1-\nu)}} \quad (5.16)$$

Nous allons calculer la charge de rupture de la structure correspondant à la propagation de la fissure pour différentes longueurs de fissure. La procédure numérique utilisée est la suivante :

1. On se donne une valeur initiale de  $l$ .
2. On pose  $\sigma_\infty = 1$ , on résout le système d'équations (5.13) et on calcule  $k_1$  à l'aide de l'équation (5.14).
3. En utilisant la linéarité du problème élastique, on calcule  $\sigma_\infty$  correspondant à  $k_1 = k_1^c$  avec la formule suivante :

$$\sigma_\infty = \frac{k_1^c}{k_1} \quad (5.17)$$

où  $k_1$  et  $k_1^c$  sont donnés par (5.14) et (5.16) respectivement.

4. On incrémente  $l$  et on revient en 2.

#### 5.2.4 Résultat et discussion :

Pour les deux cas : **Griffith** et **Dugdale**, nous fixons certains paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\mu = 1100 \text{ MPa}, \nu = 0.3, h = 1 \text{ mm}, G_c = 72.10^{-3} \text{ N/mm}.$$

#### Détermination de $N$ dans le cas de Griffith :

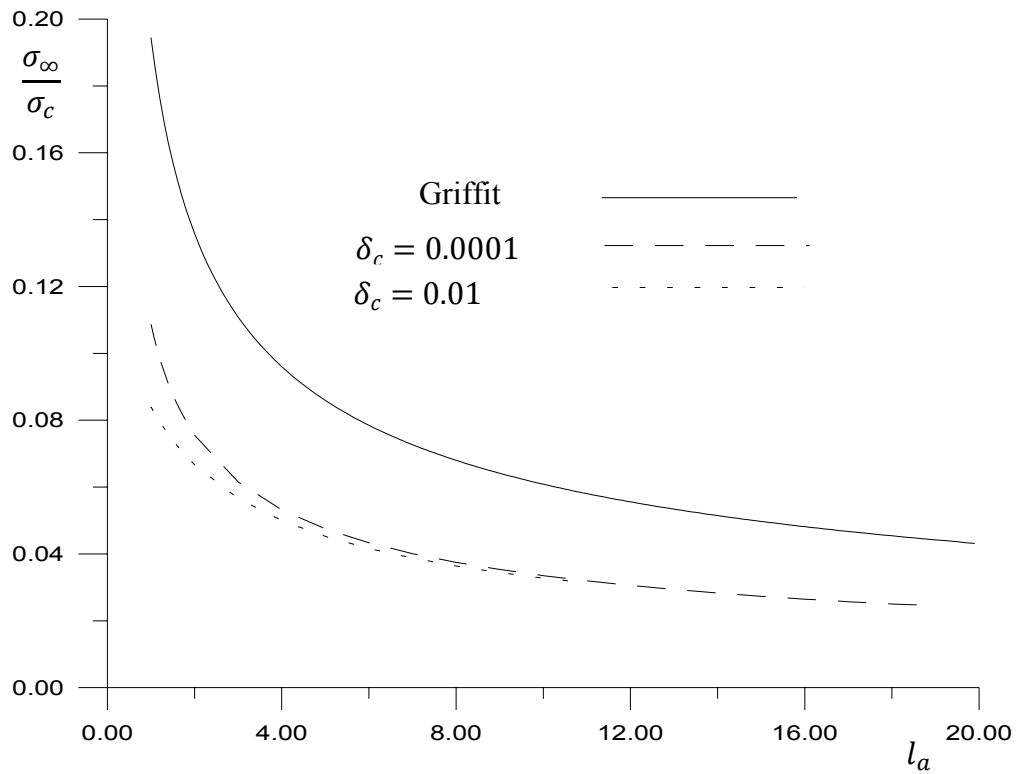
Pour déterminer  $N$ , on fixe la valeur de  $n$  à 100. Nous présentons l'évolution de  $k_1$  avec  $N$  dans le tableau 5.1. Nous observons que la valeur de  $k_1$  se stabilise à partir de  $N=10$ .

N	K1
1	-48.843779394555380
5	-43.369277624158570
10	-43.361460249667550
15	-43.361460248778900
20	-43.361460248778960
25	-43.361460248778820
30	-43.361460248778950
35	-43.361460248778960
40	-43.361460248778550
100	-43.361460248751470
150	-43.361460248795080

**Tableau 5.1 : valeur de  $K_1$  en fonction de nombre d'itérations  $N$  dans le cas de Griffith**

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus (Figure 5.3) dans les deux cas **Griffith** et **Dugdale**. Dans le cas de **Dugdale**, nous effectuons plusieurs calculs en faisant tendre  $\delta_c$  vers 0. Nous considérons les valeurs suivantes de  $\delta_c$  : 0.01 et 0.0001 mm, pour chaque valeur nous calculons la contrainte critique  $\sigma_c$  en utilisant la relation suivante :

$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$



**Figure 5.4 : Résultats obtenus dans les cas de Griffith et de Dugdale**

Nous observons que le modèle de **Dugdale** se rapproche du modèle de **Griffith** lorsque la longueur caractéristique  $\delta_c$  tend vers 0. Ce résultat est en conformité avec le fait que la densité d'énergie de surface de type **Dugdale** tend vers celle du modèle de **Griffith** lorsque  $\delta_c$  tend vers 0.

## CONCLUSION

Les principaux résultats obtenus dans ce travail sont les suivants :

Nous avons tout d'abord établi les équations du problème élastique d'une bande infinie contenant une fissure parallèle à ses frontières sous chargement en mode I. Nous avons adopté pour la fissure l'hypothèse d'une énergie de surface de type **Dugdale**. Nous avons montré, en utilisant la formulation variationnelle, que la fissure créée comporte deux zones, une zone cohésive et une zone non cohésive.

Nous avons ensuite réduit les équations du problème à une équation intégrale singulière de **Cauchy** du premier ordre, par l'utilisation de la transformée de **Fourier** selon les travaux d'**Erdogan**, et nous avons présenté quelques applications numériques.

Nous avons étudié l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué en faisant varier un certain nombre de paramètres. Plus particulièrement, nous avons étudié l'influence de la hauteur de la bande par rapport à la longueur de la fissure, ainsi que l'influence de la longueur de la fissure par rapport à la longueur caractéristique du modèle de **Dugdale**.

Les résultats ont été présentés sous forme de courbe présentant l'évolution du chargement appliqué en fonction de la longueur de la fissure. Sur toutes ces courbes, la partie croissante, correspondant à la phase cohésive, est due au fait que la charge appliquée doit croître pour équilibrer les forces cohésives qui augmentent avec la propagation de la fissure cohésive. La partie décroissante correspond à la phase de propagation est due à la relaxation de la structure provoquée par l'accroissement de la fissure non cohésive.

Nous avons observé également que la charge de rupture augmente avec le rapport  $h/l_0$ . Ce résultat est conforme avec l'idée intuitive que plus la bande est large, plus elle est résistante.

Pour l'influence de la longueur de la fissure  $l_0$ , par rapport à la longueur caractéristique du modèle de **Dugdale**  $\delta_c$ , Nous avons observé que la contrainte de rupture est une fonction croissante de  $\delta_c/l_0$  et tend vers la contrainte critique  $\sigma_c$  lorsque la taille de la fissure initiale  $l_0$  est petite devant la longueur caractéristique du modèle de **Dugdale**  $\delta_c$ , ce qui confirme les résultats obtenues par (**Ferdjani** et al 2006a, 2006b, 2007 et 2009) [38], [39], [40] et [41]. A savoir, qu'avec la loi de fissuration de **Dugdale** et plus généralement avec le modèle des forces cohésives, la charge de rupture des structures contenant des défauts de petite taille (par rapport à la longueur caractéristique  $\delta_c$ ) tend vers la contrainte critique du matériau, et donc, avec le modèle des forces cohésives, les structures

sont insensibles aux défauts de petite taille et se comportent comme des structures saines. Contrairement au modèle de **Griffith**, où la charge de rupture tend vers l'infini, lorsque la taille du défaut tend vers zéro.

Enfin, une étude comparative a été faite entre le modèle de **Dugdale** (en faisant tendre  $\delta_c$  vers 0) et le modèle de **Griffith**. Les résultats obtenus avec le modèle de **Dugdale**, montrent une tendance vers les résultats obtenus avec le modèle de **Griffith** lorsque la longueur caractéristique  $\delta_c$  tend vers 0. Ce résultat est en conformité avec le fait que la densité d'énergie de surface du modèle de **Dugdale** tend vers celle du modèle de **Griffith** lorsque  $\delta_c$  tend vers 0.

## LISTE DES SYMBOLES

- $\sigma_n$  : Contrainte normale d'interaction entre les lèvres de la fissure.
- $\delta_n$  : Discontinuité du déplacement normal.
- $\sigma_c$  : Contrainte critique (caractéristique du matériau).
- $\delta_c$  : Ouverture critique de rupture (caractéristique des modèles cohésive).
- $\delta_0$  : Le saut critique de décohésion
- $\sigma_t$  : Contrainte tangentielle
- $\delta_t$  : Déplacement tangentiel.
- $\psi$  : Potentiel.
- $G$  : Taux de restitution d'énergie.
- $G_c$  : Taux de restitution d'énergie critique.
- $\Omega$  : Domaine de la plaque fissurée.
- $\Gamma$  : La fissure crée.
- $[[v_n]]$  : La discontinuité du déplacement normal
- $\phi$  : Densité d'énergie de surface.
- $\Gamma_0$  : Partie non cohésive de la fissure.
- $D$  : La fissure (défaut).
- $\sigma_\infty$  : Charge appliquée.
- $h$  : Largeur de plaque fissurée
- $l_0$  : Position de la pointe de fissure initial (ou diamètre du défaut initial dans le cas de trou).
- $E$  : Module de Young.
- $v$  : Composante du déplacement dans la direction 2.
- $u$  : Composante du déplacement dans la direction 1.
- $w$  : Composante du déplacement dans la direction 3.
- $l_c$  : Position de la zone cohésive.
- $l_{cc}$  : Position de la zone cohésive continuum.
- $l_a$  : Position de la zone non cohésive.



- $A$  : Tenseur de rigidité
- $\mu$  : Module de cisaillement.
- $\nu$  : Coefficient de Poisson.
- $K_I$  : Facteur d'intensité de contrainte en mode I.
- $\varepsilon$  : Tenseur de déformation
- $n$  : La normale à la plaque.
- $\sigma_r$  : Charge de rupture.

## Annexe A

### Convergence uniforme

Rappel (Mauch 2004)

Considérons l'intégrale impropre suivante :

$$\int_c^{\infty} f(x,t) dt$$

S'il existe une fonction continue  $M(t)$ , tel que  $|f(x,t)| \leq M(t)$  et  $\int_c^{\infty} M(t) dt$  est convergente, donc  $\int_c^{\infty} f(x,t) dt$  est uniformément convergente.

Si  $\int_c^{\infty} f(x,t) dt$  est uniformément convergente, on a la propriété suivante :

- Si  $f(x,t)$  est continue pour  $x \in [a,b]$  et  $t \in [c, \infty[$ , donc pour  $a < x_0 < b$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^{\infty} f(x,t) dt = \int_c^{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,t) \right) dt$$

### 1 Convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} [N(y,\lambda) + e^{-\lambda y}] \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda$

Avec :

$$N(y,\lambda) + e^{-\lambda y} = \frac{(e^{\lambda(-y+2h)} + e^{\lambda(y+2h)})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1}$$

On pose :  $f(y,\lambda) = (e^{\lambda(-y+2h)} + e^{\lambda(y+2h)})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}$

Sachant que  $\lambda \in [0, +\infty[$  et  $y \in [0, h]$ , nous déterminons le sens de variation de  $f(y,\lambda)$  par rapport à  $y$ . Pour cela nous devons calculer la dérivée, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) [e^{2\lambda h} (2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - 1] \geq 0$$

Par conséquent,  $f(y,\lambda)$  est croissante en  $y$ , et donc :  $f(y,\lambda) \leq f(h,\lambda) \quad \forall y \in [0, h]$ .

On a donc :

$$N(y,\lambda) + e^{-\lambda y} \leq N(h,\lambda) + e^{-\lambda h} = \frac{(e^{\lambda h} + e^{3\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1}$$

Et aussi :

$\left| (N(y, \lambda) + e^{-\lambda y}) \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) \right| \leq \frac{(e^{3\lambda h} + e^{\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} \quad \forall y$ , il suffit

donc de montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{3\lambda h} + e^{\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} d\lambda$  soit convergente.

Dans ce but, on utilise le théorème suivant :

Théorème1 :

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur  $[a, +\infty[$ , équivalentes au

voisinage de  $+\infty$ , c'est à dire :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ .

L'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  converge.

Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{(e^{3\lambda h} + e^{\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1}$  est équivalente à

$\frac{2\lambda^2 h^2}{e^{\lambda h}}$ , ou  $\int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2}{e^{\lambda h}} d\lambda = \frac{2}{h^3}$  est convergente, donc, en vertu du théorème1 ci-

dessus  $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{3\lambda h} + e^{\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} d\lambda$  est également convergente. Et

finalement  $\int_0^{+\infty} (N(y, \lambda) + e^{-\lambda y}) \sin(\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda$  est uniformément convergente.

Remarque

La fonction  $\frac{(e^{3\lambda h} + e^{\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1}$  n'est pas définie en 0, mais sa

limite est bornée  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(e^{3\lambda h} + e^{\lambda h})(2\lambda^2 h^2 + 1 + 2\lambda h) - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{4\lambda h e^{2\lambda h} + e^{4\lambda h} - 1} = 1$ . Par conséquent, le théorème1 s'applique.

**2** Convergence uniforme de  $\int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{\lambda(2h-y)} (1 - e^{2\lambda y})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda$

On pose  $g(\lambda, y) = \lambda^2 e^{\lambda(2h-y)} (1 - e^{2\lambda y})$ .

Afin de connaître le sens de variation de  $g(\lambda, y)$  par rapport à y, on calcule  $\frac{\partial g(\lambda, y)}{\partial y}$

:

$$\frac{\partial g(\lambda, y)}{\partial y} = -\lambda^3 e^{\lambda(2h-y)} (1 + e^{2\lambda y}) \leq 0.$$

Par conséquent,  $g(\lambda, y)$  est décroissante en  $y$ , et on a :  $g(\lambda, y) \geq g(\lambda, h) \forall y \in [0, h]$ .  
Puisque  $g(\lambda, 0) = 0$ ,  $g(\lambda, y) \leq 0 \forall y \in [0, h]$ , et donc  $|g(\lambda, y)| \leq |g(\lambda, h)|$ .

Par conséquent :

$$\left| \frac{2\lambda^2 h^2 e^{\lambda(2h-y)} (1 - e^{2\lambda y})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) \right| \leq \frac{2\lambda^2 h^2 e^{h\lambda} (-1 + e^{2\lambda h})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \forall y \in [0, h].$$
 Il suffit donc de  
montrer que  $\int_0^{\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{h\lambda} (-1 + e^{2\lambda h})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} d\lambda$  soit convergente.

Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{2\lambda^2 h^2 e^{h\lambda} (-1 + e^{2\lambda h})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}}$  est équivalente à  $\frac{2\lambda^2 h^2}{e^{\lambda h}}$ , ou

$\int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2}{e^{\lambda h}} d\lambda = \frac{2}{h^3}$  est convergente, donc, en vertu du théorème 1

$\int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{h\lambda} (-1 + e^{2\lambda h})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} d\lambda$  est également convergente. Et finalement

$\int_0^{\infty} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{\lambda(2h-y)} (1 - e^{2\lambda y})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda$  est uniformément convergente.

### Remarque

La fonction  $\frac{2\lambda^2 h^2 e^{h\lambda} (-1 + e^{2\lambda h})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}}$  n'est pas définie en 0, mais sa limite est bornée

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda^2 h^2 e^{h\lambda} (-1 + e^{2\lambda h})}{-1 + 4e^{2\lambda h} \lambda h + e^{4\lambda h}} = 0$ . Par conséquent, le théorème 1 s'applique.

## Annexe B

Démonstration de l'égalité : 
$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(t)t}{(t+x)(t-x)} dt = \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

$\varphi(t)$  Impaire

On a 
$$\frac{t}{(t+x)(t-x)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right]$$

Alors 
$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(t)t}{(t+x)(t-x)} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t+x} dt \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &= \int_{-a}^0 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \\ &= \int_a^0 \frac{\varphi(-T)}{(-T-x)} d(-T) + \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \\ &= - \int_a^0 \frac{\varphi(t)}{t+x} d(t) + \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \\ &= \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t+x} d(t) + \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \end{aligned}$$

De même, on peut montrer que :

$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t+x} dt = \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t+x} d(t) + \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

Donc 
$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t+x} dt = \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

Finalement 
$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(t)t}{(t+x)(t-x)} dt = \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

## Annexe C

### Démonstration des relations des constantes $D$ :

$$\tilde{u}(\lambda, y) = (C_1 + C_2 y)e^{-\lambda y} + (C_3 + C_4 y)e^{\lambda y}$$

$$\tilde{v}(\lambda, y) = (D_1 + D_2 y)e^{-\lambda y} + (D_3 + D_4 y)e^{\lambda y}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\lambda(C_1 + C_2 y)e^{-\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y} + \lambda(C_3 + C_4 y)e^{\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = [-\lambda(C_1 + C_2 y) + C_2]e^{-\lambda y} + [\lambda(C_3 + C_4 y) + C_4]e^{\lambda y}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -\lambda[-\lambda(C_1 + C_2 y) + C_2]e^{-\lambda y} - \lambda C_2 e^{-\lambda y} + \lambda[\lambda(C_3 + C_4 y) + C_4]e^{\lambda y} + \lambda C_4 e^{\lambda y}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = [\lambda^2(C_1 + C_2 y) - 2\lambda C_2]e^{-\lambda y} + [\lambda^2(C_3 + C_4 y) + 2\lambda C_4]e^{\lambda y}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = [-\lambda(D_1 + D_2 y) + D_2]e^{-\lambda y} + [\lambda(D_3 + D_4 y) + D_4]e^{\lambda y}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} = [\lambda^2(D_1 + D_2 y) - 2\lambda D_2]e^{-\lambda y} + [\lambda^2(D_3 + D_4 y) + 2\lambda D_4]e^{\lambda y}$$

En remplaçant ces expressions dans la première équation de Navier (4.15) du Chapitre 4, on obtient :

$$\begin{aligned} & -\lambda^2(k+1)[(C_1 + C_2 y)e^{-\lambda y} + (C_3 + C_4 y)e^{\lambda y}] + (k-1)[\lambda^2(C_1 + C_2 y) - 2\lambda C_2]e^{-\lambda y} \\ & \quad + [\lambda^2(C_3 + C_4 y) + 2\lambda C_4]e^{\lambda y} - \\ & \quad 2\lambda \left[ [-\lambda(D_1 + D_2 y) + D_2]e^{-\lambda y} + [\lambda(D_3 + D_4 y) + D_4]e^{\lambda y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

(A3.1) est vérifiée  $\forall y$ , on a donc nécessairement les termes en  $e^{\lambda y}$  et en  $e^{-\lambda y}$  qui s'annulent :

$$\begin{aligned} & \{-\lambda^2(k+1)(C_1 + C_2 y) + (k-1)[\lambda^2(C_1 + C_2 y) - 2\lambda C_2] - \\ & \quad 2\lambda[-\lambda(D_1 + D_2 y) + D_2]\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

$$\begin{aligned} \text{Et} \quad & \{-\lambda^2(k+1)(C_3 + C_4 y) + (k-1)[\lambda^2(C_3 + C_4 y) + 2\lambda C_4] - \\ & \quad 2\lambda[\lambda(D_3 + D_4 y) + D_4]\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

(A3.2) est vérifiée  $\forall y$ , on a donc nécessairement

$$-C_2 y + D_2 y = 0$$

$$\text{Et} \quad -2\lambda^2 C_1 - 2\lambda(k-1)C_2 + 2\lambda^2 D_1 - 2\lambda D_2 = 0$$

$$\text{Donc} \quad D_2 = C_2 \quad \text{et} \quad D_1 = C_1 + \frac{k}{\lambda} C_2 \quad (\text{A3.4})$$

De même, (A3.3) est vérifiée  $\forall y$ , on a donc nécessairement :

$$-C_4 y - D_4 y = 0$$

$$\text{Et} \quad -2\lambda^2 C_3 + 2\lambda(k-1)C_4 - 2\lambda^2 D_3 - 2\lambda D_4 = 0$$

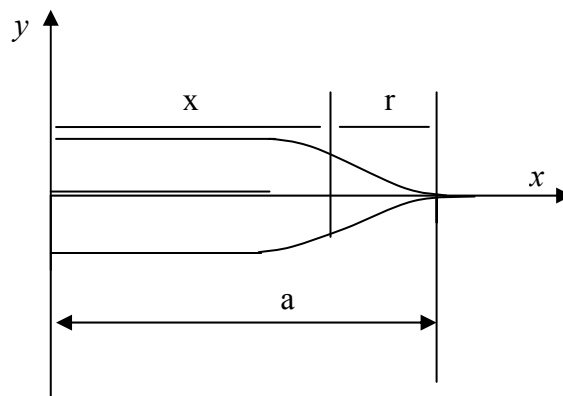
$$\text{Donc} \quad D_4 = -C_4 \quad \text{et} \quad D_3 = -C_3 + \frac{k}{\lambda} C_4 \quad (\text{A3.5})$$

Avec (A3.4) et (A3.5), la deuxième équation de Navier (4.16) du Chapitre 4 est automatiquement vérifiée.

## Annexe D

### Démonstration de la Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte :

D'après la mécanique de la rupture fragile, la relation entre le Facteur d'Intensité de Contrainte et l'ouverture en pointe de fissure en mode I (en déformations planes) est donnée par :



$$\begin{aligned} \llbracket U_2 \rrbracket &= \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_1 \sqrt{\frac{r}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu} K_1 \sqrt{r} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu} K_1 \sqrt{a-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{d}{dx} \llbracket U_2 \rrbracket = \frac{2\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu} K_1 \left( \frac{-1}{2\sqrt{a-x}} \right) \\ &= \frac{-\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu} K_1 \left( \frac{1}{\sqrt{a-x}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \left[ \frac{-\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu \sqrt{a-x}} K_1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a-x} \sqrt{a+x} \left[ \frac{-\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu \sqrt{a-x}} K_1 \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \psi(x) = \frac{-\sqrt{2a}\sqrt{2}(1-\nu)}{\mu} K_1 = \frac{-2\sqrt{a}(1-\nu)}{\mu} K_1$$

$$K_1 = \frac{-\mu}{2\sqrt{a}(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \psi(x)$$



## REFERENCES

- 1 Laverne. J. « Formulation Energétique de la Rupture par des Modèles de Forces Cohésives : Considérations Théoriques et Implantations Numériques », Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, France, 2004
- 2 Irwin G.R., « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate », *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, vol. 24, 1957, p. 361-364
- 3 Hillerborg A., Modeer M. and PETERSSON P. E., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* 6(6): 163-8 (1976).
- 4 Ferdjani. H, Khelifi. Med Z, Marigo. J-J « Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec le modèle de DUGDALE REGULARISE ». *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, volume 17- n°4/2008 pages 481 à 493.
- 5 Xie D., Waas A., « Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis », *Engineering Fracture Mechanics*, 2006
- 6 Needleman A., A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. of Appl. Mechanics*, 54, pp. 525-531 (1987).
- 7 Rice J.R. and wang J.- S., Embrittlement of interfaces by solute segregation. *Materials Science and Engineering A.*, 107, pp. 23-40 (1989).
- 8 Tvergaard V., Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mater. Sci. engng.* 125, pp. 203- 213 (1990).
- 9 Chaboche J. L., Girard R., Levasseur P., « On the interface debonding models. », *Int. J. Damage mech.*, vol. 6, 1997, p. 220-257.
- 10 J. L. chaboche , F. Feyel and Y. Monerie, Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *Int. J. Solids struct.*, 38 pp. 3127-3160 (2001).
- 11 Suquet P., Discontinuities and plasticity. In: Moreau J.J., Panagiotopoulos P.D. (Eds.), *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Springer, Berlin, pp. 280-340 (1987).
- 12 Michel J. C., Suquet P et Thebaud F., Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3(4) pp. 573-595 (1994).

- 13 D.B. BOGY « The plane elastostatic solution for a symmetrical loaded crack in a strip composite » *Int. J. Engng Sci.*, 1973, Vol. 11, pp. 985-996.
- 14 A.C. KAYA, F. ERDOGAN « On the solution of integral equations with strong singular kernels" *Quarterly of Applied Mathematics*, Volume XLV, Number 1, April, 1987, Pages 105-122
- 15 G.D. Gupta, F.Erdogan "The Problem of Edge Cracks in an infinite Strip" *Journal of Applied Mechanics*, December 1974
- 16 A.CINAR and F.ERDOGAN « The crack wedging problem for an orthotropic strip » *International Journal of Fracture* 83-102, 1982.
- 17 BRICK CHAOUCHE A. « Etude de l'influence des effets d'échelle dans le modèle de Dugdale à travers le cas d'une bande infinie soumise à un chargement antiplan », mémoire de magister, Université de BLIDA, 2008
- 18 A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A*, 163-198 (1920).
- 19 G. A. Francfort and J. J.Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (8), pp. 1319-1342 (1998).
- 20 B. Bourdin, une method variationnelle en mécanique de la rupture. Théorie et applications numériques. Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord (1998).
- 21 F. Bilteryst, Une approche énergétique de la décohésion et de la multifissuration dans les composites. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris (2000).
- 22 G. I. Barenblatt, The mathematical theory if equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, pp. 55-129 (1962).
- 23 G. Del piero One dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations. In *Proceedings of the IUTAM Symposium « Variation de domaines et frontières libres en mécanique »*, eds. P. ARGOUL and M. FREMOND, Paris, 1997, Kluwer, pp. 197-202 (1999).
- 24 L. Truskinovsky, Fracture as a phase transition. *Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials*, ed. R. C. BATRA and M. F. BEATTY, CIMNE, Barcelona pp. 322-332 (1996).

- 25 M. Charlotte, Modeles discrets de rupture. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris (2001).
- 26 M. Charlotte , G. A. Francfort, J. J. Marigo and L. Truskinovsky, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models. Proceedings of the Symposium on « Continuous Damage and Fracture » The data science library, Elsevier, edited by A. BENALLAL, Paris, pp. 7 18, (2000)
- 27 G. Del Piero, L. Truskinovsky, Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity, International Journal of Solids and Structures 38 (6) (2001) 1135-1138
- 28 J. Laverne, J.J. Marigo, Approche globale, minima relatives et critère d'amorçage en mécanique de la rupture, Comptes Rendus Mécanique 332 (2004) 313-318.
- 29 M.L. Williams, 1957. On the stress distribution at the base of a stationary crack. ASME J. Appl. Mech. 24, 109-114.
- 30 J-B. Leblond, Mécanique de la rupture fragile Ecole Polytechnique, Edition 1994
- 31 Gurtin, Théoreme de Travaux Virtuels, 1981
- 32 Y. F. Chen, F. Erdogan, The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate, J. Mech. Phys. Solids 44 (5) (1996 771|787.
- 33 Mauch 2004. Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.
- 34 F. Erdogan, G. D. Gupta, T. Cook, Numerical solution of singular integral equation., in: G. C. Sih (Ed.), Methods of analysis and solutions of crack problems, Noordho\_International Publishing, Leyden, 1973, pp. 368-425.
- 35 N. I. Ioakimidis, The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities, Engineering Fracture Mechanics 13 (1980) 709-716.
- 36 F. D. Gakhov, Boundary Value Problems, Pergamon Press and Addison-Wesley, Oxford, 1966

- 37 J.J. Marigo ,Cours « Mécanique de la rupture » Département de Mécanique, Université Saad Dahlab, BP 270 Route de Soumaa,Blida, Algérie (2007)
- 38 H. Ferdjani, R. Abdelmoula, J.J. Marigo, Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement la rupture avec le modèle de dugdale, Revue Européenne de Mécanique Numérique 15 (2006) 409-425.
- 39 H. Ferdjani, R. Abdelmoula, J.J. Marigo, Study of the influence of small size defects on the rupture behavior with the dugdale model, in: Third International Conference in Mechanical Engineering and Mechanics, 2006.
- 40 H. Ferdjani, R. Abdelmoula, J.J. Marigo, Insensitivity to small defects of the rupture of mataterials governed by the dugdale model, Continuum Mechanics and Thermodynamics 19 (2007) 191-210.
- 41 H. Ferdjani , J.J. Marigo , S. El Borgi , Study of size effects in the Dugdale model through ite case of crack in a semi-infinite plane under antiplane shear loading Countinuim mechanic and thermodynamic