

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté De Technologie**

Département de mécanique

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité: Construction Mécanique

FISSURE DE DUGDALE DANS UN REVETEMENT SOUS CHARGEMENT

ANTIPLAN

Par

**Chafik HASSANI**

Devant le jury composé de :

M. OUALI	Professeur	U. de Blida	Président
M. GACEB	Maître de Conférences (A)	U. de Boumerdes	Examineur
M. TEMMAR	Maître de Conférences (A)	U. de Blida	Examineur
H. FERDJANI	Maître de Conférences (A)	U. de Blida	Rapporteur

Blida, October 2013

## **ABSTRACT**

The aim of this work is the study of the propagation of a Dugdale crack in a coating under antiplan under load. The studied structure consists of a coating in the form of infinite strip bonded to a substrate in the form of a half-plane.

The coating and substrate are constituted of homogeneous and isotropic materials with different mechanical properties. Using the Fourier transform. The equations of the elastic problem are transformed into a singular integral equation.

The solution of the integral equation is done using Chebychev polynomials.

A parametric study is performed by changing a number of parameters of the problem, a comparison with the Griffith model is performed.

## RESUME

Le but de ce travail est l'étude de la propagation d'une fissure de Dugdale dans un revêtement sous chargement antiplan. La structure étudiée est constituée d'un revêtement sous forme de bande infinie collé à un substrat sous forme d'un demi-plan.

Le revêtement et le substrat sont constitués de matériaux homogènes et isotropes de propriétés mécaniques différentes,

En utilisant les transformées de Fourier. Les équations du problème élastique sont transformées en une équation intégrale singulière. La résolution de l'équation intégrale est effectuée en utilisant les polynômes de Chebychev.

Une étude paramétrique est effectuée en modifiant un certain nombre de paramètres du problème, ainsi que une comparaison avec le modèle de Griffith.

Une étude paramétrique est effectuée en modifiant un certain nombre de paramètres du problème, Une comparaison est effectuée avec le modèle de Griffith.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة انتشار شق (Dugdale) في تلبيس تحت التحميل (Antiplan). البنية المدروسة متكونة من تلبيس على شكل شريط لامتناهية ملتصق مع ركيزة على شكل نصف مستوي. التلبيس والركيزة متكونان من مواد متجانسة وموحدة بخواص ميكانيكية مختلفة. باستخدام تحويلات (Les Transformée de Fourier), يتم تحويل معادلات مشكلة المرونة بمعادلة تكاملية شاذة. حل المعادلة التكاملية يتم باستعمال متعدد الحدود (Chebychev). يتم إجراء دراسة تحليلية عن طريق تغيير عدد من معلمات المشكلة, فضلا عن المقارنة مع نموذج

.GRIFFITH

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur Hicham FRDJANI de m'avoir proposé ce thème, pour ces encouragements pendant toute la période de préparation de ce mémoire et pour sa disponibilité et toute la documentation qu'il nous a mis sous disposition.

Je remercie vivement le professeur Mr. M. OUALI d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Mr. M. GACEB Maître de conférences à l'Université de BOUMERDES d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire, et pour leur déplacement et le temps qu'ils ont consacré à l'étude de ce document.

Je remercie notre cher enseignant Mr. M. TEMMAR, Maître de conférences à l'Université de Blida pour sa participation au jury et pour ses critiques pertinentes.

Je remercie Mr. Abd el Aziz HANI CHABRA et Mr. Amin BRIKC CHAOICH pour toute la documentation qu'il m'a fournie et pour ses conseils et orientations.

J'adresse un grand merci à mes collègues en post-graduation : Karim OMRI, Mostapha, Ibrahim, Abd el Rezak.

Je remercie très vivement les membres de ma famille pour leur compréhension, encouragement et aide pendant toute la période de préparation de ce mémoire, et surtout mes chers parents.

Je remercie messieurs Toufik DJIDID (INGM Boumerdes), Mohamed HAREK et Kamel DJADI (Blida) pour l'intérêt qu'ils ont fait à ce sujet, les encouragements et les remarques qu'ils m'ont faites.

## TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	5
TABLE DES MATIERES	6
LISTE DES ILLUSTRATIONS	9
LISTE DES TABLEAUX	10
INTRODUCTION	11
1. PRINCIPAUX CONCEPTS DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE	14
1.1. Modes de rupture	14
1.2. Analyse asymptotique	15
1.2.1. Élasticité plane	16
1.2.2. Elasticité Antiplan	17
1.3. Facteur d'intensité de contrainte	18
1.4. Théorie Energétique De Griffith (Approche Globale)	19
1.5. Relation Entre G Et K	21
1.6. Calculs Facteurs d'Intensité de Contraintes	21
1.6.1. La méthode d'extrapolation des déplacements au voisinage du fond de la fissure	22
1.6.2 Intégrale de Rice intégrale $J$	22
2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	25
2.1. Lois d'interface des modèles de force cohésive	25
2.1.1. Modèle de Dugdale (1960)	26
2.1.2. Modèle de DUGDALE régularisé	27
2.1.3. Modèle de NEEDLEMAN (1987)	29
2.1.4. Modèle de TVERGAARD (1990)	30
2.1.5. Modèle de Camacho, Ortiz et Pandolfi (1996-1999)	31
2.2. Modélisation des fissures avec Le modèle de Dugdale	32

2.2.1. Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement la rupture avec le modèle de Dugdale	32
2.2.2. Etude des effets de taille dans le modèle Dugdale à travers des cas de fissure dans un plan semi infini sous charge de cisaillement anti-plan	33
2.2.3. Étude d'une bande infinie contenant une fissure parallèle Dugdale à ses frontières sous un chargement de cisaillement antiplan	34
2.2.4. Etude de l'influence des effets d'échelle dans le modèle de Dugdale à travers le cas d'une bande infinité soumise à un chargement antiplan	34
2.2.5. Etude d'une fissure cohésive à l'interface entre deux matériaux différents	35
2.2.6. Etude d'une fissure de Dugdale dans une bande infinie chargée en mode I	36
3. THEORIE DE GRIFFITH REVISITEE ET FORMULATION VARIATIONNELLE	37
3.1. Théorie de Griffith revisitée	37
3.2. Formulation variationnelle	40
3.3. Cas d'une énergie de surface de type Dugdale	47
4. MODALISATION DU PROBLEME	49
4.1. La structure étudiée	49
4.2. Principe De Superposition	50
4.3. Evolution de la fissure initiale avec le chargement	52
4.3.1. La phase cohésive	52
4.3.2. La phase de propagation	56
5. ETABLISSEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE	61
5.1. Introduction	61
5.2. Transformée de Fourier	61
5.3. Dérivation de l'équation intégrale	62
5.3.1. Les donnes de la transformation	62

5.4. Résolution de l'équation intégrale	71
5.5. Valeur principale de Cauchy	71
5.5.1. Définition	71
5.6. Résolution de l'équation intégrale	72
5.7. Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte	78
5.8. Formule donnant l'ouverture de la fissure	79
6. PRESENTATION DES RESULTATS ET COMPARAISON	80
6.1. La phase cohésive	81
6.2. Phase de propagation	82
6.3. Etude de la convergence	83
6.3.1. Evaluation numérique de $A$	83
6.3.2. Evaluation de $N$	84
6.3.3. Evaluation de $n$	85
6.4. Etude paramétrique	87
6.4.1. Etude de l'influence du paramètre $\mu_1/\mu_2$	87
6.4.2. Etude de l'influence du paramètre $h/l_0$	88
6.4.3. Etude de l'influence du paramètre $\delta_c/l_0$	90
6.4.4. Etude de l'influence du paramètre $h_1/h$	91
6.5. Discussion des résultats	92
6.6. Comparaison entre les modèles de GRIFFITH Et de DUGDALE	94
6.6.1. Equation intégrale et résolution	96
6.6.2. Mise en œuvre numérique	98
6.6.3. Application numérique	99
6.6.3.1. Détermination de $N$ dans le cas de Griffith	100
6.6.3.2. Résultats	101
CONCLUSION	103
ANNEXE A. Liste des symboles	105
ANNEXE B. Intégration Par Partie	107
ANNEXE C. Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte	109
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	111

## LISTE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1.01	Les trois modes de rupture	15
Figure 1.02	Définition du repère locale au voisinage du front d'une fissure	15
Figure 1.03	Discontinuité du déplacement pour une fissure en bidimensionnel	19
Figure 1.04	Conditions aux limites	20
Figure 1.05	d'un contour $\Gamma$ de l'intégrale $J$ autour du front de fissure.	23
Figure 2.01	Schéma de la fissure et de la zone cohésive.	25
Figure 2.02	Schématisation du Modèle de DUGDALE-BARENBLATT	26
Figure 2.03	Loi d'interface de DUGDALE	27
Figure 2.04	Schématisation du Modèle de DUGDALE-BARENBLATT (Régularisé)	28
Figure 2.05	Loi de Comportement dans le Modèle de DUGDALE Régularisé	28
Figure 2.06	Loi d'interface de Needleman dans la Direction Normale	29
Figure 2.07	Evolution de la Force Tangentielle en Fonction du Saut Tangent	30
Figure 2.08	Lois d'interface de Camacho et Ortiz dans la Direction Normale	31
Figure 2.09	Géométrie de la plaque trouée et de la plaque fissurée	32
Figure 2.10	La Charge et la Géométrie du Problème Original [00]	33
Figure 2.11	La Charge et la Géométrie du Problème Original [00]	34
Figure 2.12	géométrie du problème initial	35
Figure 2.13	Géométrie de la bande avec les chargements	36

Figure 3.01	Energie de Surface en Fonction du Saut de Déplacement	40
Figure 3.02	Schéma du Domaine Et Chargement	41
Figure 3.03	la normale $\hat{n}$ à la fissure	42
Figure 3.04	Energie de surface de type Dugdale	47
Figure 3.05	Loi Cohésive de Type Dugdale en Elasticité Antiplane	48
Figure 4.01	Géométrie Du Problème Initial	50
Figure 4.02	Décomposition du Problème (superposition)	51
Figure 4.03	Géométrie du problème avec les chargements dans la phase cohésive	53
Figure 4.04	Géométrie du problème avec les chargements dans la phase propagation	57
Figure 6.01	valeur de $k_3(l_a)$ en fonction de nombre $N$	85
Figure 6.02	valeur de $k_3(l_a)$ en fonction de nombre $n$	86
Figure 6.03	Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de $\mu_1/\mu_2$	88
Figure 6.04	Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de $h/l_0$	89
Figure 6.05	Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de $\delta_c/l_0$	90
Figure 6.06	Relation entre la charge critique et l'épaisseur de revêtement	92
Figure 6.07	Energie de surface en fonction du saut de déplacement	94
Figure 6.08	Structure et chargement dans le cas de Griffith	95
Figure 6.09	Valeur de $K_3$ en fonction $N$ dans le cas de Griffith	101
Figure 6.10	Résultats obtenus dans les cas de Griffith et de Dugdale	102

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 6.01	calcul de $k_3$ en fonction de $N$	84
Tableau 6.02	calcul de $k_3$ en fonction de $n$	86
Tableau 6.03	contrainte de rupture en fonction de $\mu_1/\mu_2$	87
Tableau 6.04	contrainte de rupture en fonction de $h/l_0$	89
Tableau 6.05	contrainte de rupture en fonction de $\delta_c/l_0$	90
Tableau 6.06	contrainte de rupture en fonction de $h_1/h$	91
Tableau 6.07	calcul de $k_3$ en fonction de $N$ cas de Griffith	100

## INTRODUCTION

Les revêtements occupent une place importante dans le domaine technologique et industriel. En effet, un nombre important de pièces sont soumises à des agressions du milieu extérieur. Ces agressions peuvent être de nature mécanique, chimique, thermique ou autre. Par conséquent dans un grand nombre de cas, un revêtement est nécessaire afin d'augmenter la durée de vie des pièces en question, et (ou) d'améliorer le fonctionnement des mécanismes concernés. D'une manière générale, le revêtement et la pièce sont constitués de matériaux différents ayant des propriétés mécanique et physique différentes.

De par sa fonction, le revêtement subit des sollicitations importantes, et est donc sujet à la dégradation et à la rupture. D'où l'importance de l'étude du phénomène de rupture dans les revêtements.

L'objet de ce travail est l'étude de la propagation d'une fissure dans un revêtement sollicité par un cisaillement anti-plan. La géométrie de la structure étudiée est constituée d'une bande infinie, représentant le revêtement, collée à un demi-plan représentant la pièce ou le substrat.

La fissure est parallèle à la direction de la bande. Evidemment, les dimensions des structures réelles sont toujours finies mais lorsque la taille de la fissure est petite par rapport aux dimensions de la structure, l'hypothèse des dimensions infinies devient valable. L'intérêt des structures infinies réside dans le fait qu'elles se prêtent bien à la résolution analytique ou semi analytique. Contrairement aux structures finies qui nécessitent l'utilisation des méthodes de discrétisation numérique.

Le cadre théorique de ce travail est la mécanique de la rupture fragile qui s'applique aux matériaux fragiles, tels que la céramique et les métaux à basse température.

Les principaux résultats de la mécanique de la rupture fragile ont été obtenus par la théorie énergétique de Griffith [19]. Malgré son efficacité cette théorie contient des insuffisances notoires.

Une nouvelle théorie proposée par FRONCFORT et J-J MARIGO [20] appelée « théorie de Griffith revisitée », est venue corriger ces insuffisances. Notre travail se situe dans le cadre de cette nouvelle théorie.

Il existe deux types de modèles pour une fissure, le modèle de Griffith qui suppose l'absence d'interaction entre les lèvres de la fissure, et le modèle des forces cohésives, ou modèle de BARENBLATT [9], qui suppose l'existence d'interaction ou « forces cohésives » entre les lèvres de la fissure. Selon la loi cohésive, qui relie les forces d'interaction à l'ouverture de la fissure, il existe plusieurs modèles de « forces cohésives ». Nous utilisons dans notre travail le modèle de Dugdale [8].

Pour la résolution du problème, nous suivons la procédure développée par F.ERDOGAN dans ces travaux. Cette procédure consiste en la réduction des équations du problème en une équation intégrale singulière, résolue numériquement.

Nous proposons d'exposer les travaux effectués en subdivisant le mémoire en plusieurs chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principaux concepts de la mécanique de la rupture fragile.

Le second chapitre est consacré à un exposé bibliographique des différents travaux effectués par notre équipe dans le domaine de l'étude des structures fissurées. Nous présentons également les différents modèles de force cohésive trouvés dans la littérature.

Dans Le troisième chapitre, nous présentons la théorie de Griffith revisitée et la formulation variationnelle du problème de l'équilibre des structures fissurées en élasticité antiplan, dans le cadre de la théorie de Griffith revisitée.

Le chapitre IV, est consacré à la présentation de notre problème :

Équations d'équilibre, loi de comportement et conditions aux limites. Nous présentons également les critères de propagation de la fissure.

Dans le chapitre V, nous établissons l'équation intégrale singulière, à partir des équations du problème en utilisant les transformées de Fourier. On présentera, la résolution numérique de l'équation intégrale singulière.

Nous également au chapitre VI la procédure numérique utilisée, nous présentons également une étude paramétrique sur l'évolution de la fissure en variant un certain nombre de paramètres définissant le problème. Nous terminons le chapitre par une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de Dugdale et de Griffith.

Nous clôturons le mémoire par une conclusion générale.

## CHAPITRE I : PRINCIPAUX CONCEPTS DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE

La rédaction de ce chapitre a été largement inspirée des références suivantes : Bui H. D. Mécanique de la rupture fragile », Masson (1978) [43] et P. CHAUCHOT, J. LABEYRIE, Rupture fragile des pièces minces et méthodes des équations intégrales, pages (9-11), N°49-1980 [44].

La mécanique de la rupture a pour origine une approche macroscopique des problèmes d'ingénierie liés à la propagation instable de fissures préexistantes. Elle considère que la rupture est due à l'existence d'une discontinuité du matériau, à l'échelle macroscopique. Elle étudie les conditions pour qu'une fissure préexistante dans le matériau se propage. La mécanique de la rupture dérive largement de la théorie de la rupture fragile de Griffith (1920). La mécanique de la rupture fut largement développée par les travaux, entre autres, de Griffith (1924), Irwin (1948, 1958), Nemat-Nasser et Horii (1982, Horii et Nemat-Nasser, 1985), Ashby et Hallam (1986), Scavia (1995). Elle fut employée par les mécaniciens des roches, dès le début des années soixante (Cook, 1965 ; Hoek, 1967).

### 1.1. Modes de rupture

IRWIN considère les fissures comme des surfaces de discontinuité des déplacements. Puisque chacune des trois composantes du vecteur déplacement peut être affecté, il a observé et défini trois modes indépendants possibles pour les mouvements respectifs des deux surfaces d'une fissure (Figure 1.1) :

- **mode I** : les surfaces de la fissure tendent à s'écarter symétriquement par rapport au plan initial de la fissure, (Traction).
- **mode II** : les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans deux sens opposés perpendiculaires au front de fissure en restant dans le même plan (cisaillement).

- **mode III** : les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans deux sens opposés perpendiculaires à ceux du mode II, (cisaillement).

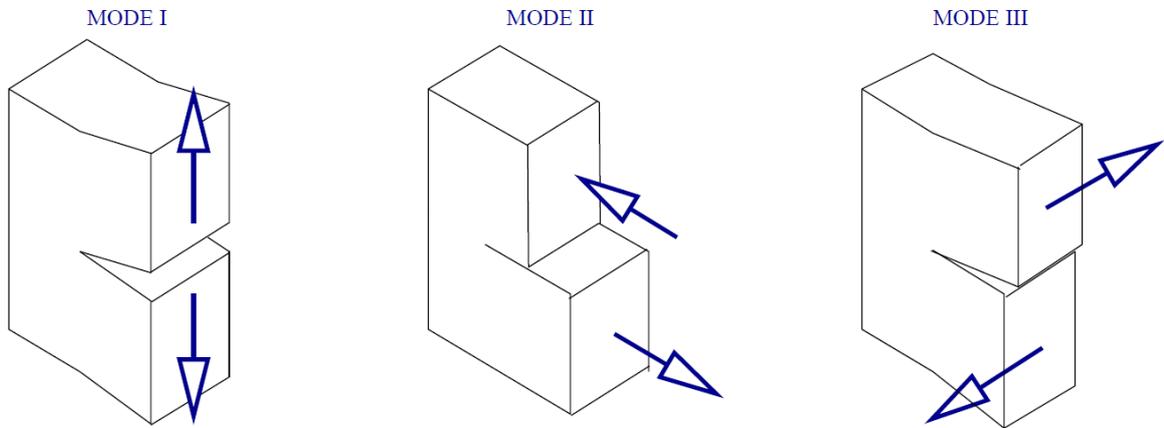


Figure 1.1: Les trois modes de rupture.

## 1.2. Analyse asymptotique

On considère un matériau homogène et isotrope dont le comportement est élastique linéaire.

Nous présentons ci-dessous la forme asymptotique (figure 1.2) des contraintes en front de fissure, en distinguant les cas d'élasticité plane et d'élasticité antiplane.

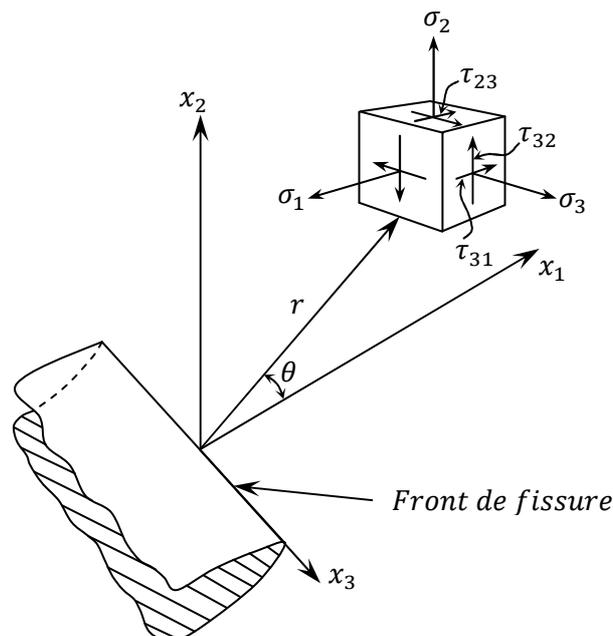


Figure 1.2: Définition du repère local au voisinage du front d'une fissure.

### 1.2.1. Élasticité plane

En élasticité plane, on distingue deux cas :

#### - Déformation plane

On dit qu'on est en situation de « déformation plane » dans le plan  $(X_1, X_2)$  si le déplacement  $U$  est indépendant de  $X_3$ , et si sa composante  $U_3$  est nulle.

#### - Contraintes planes

On dit qu'on est en situation de « contraintes planes » dans le plan  $(X_1, X_2)$  si le tenseur contrainte  $\sigma$  est indépendant de  $X_3$ , et si les composantes  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{33}$  sont nulles.

En élasticité plane, les modes d'ouverture possibles sont les modes I et II. Nous donnons pour chacun de ces modes la forme asymptotique des champs de contraintes et de déplacement au voisinage du front de fissure :

MODE 1 :

Contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (1.1)$$

Déplacement

$$\begin{cases} U_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ U_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (1.2)$$

MODE II :

Contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{cases} \quad (1.3)$$

Déplacement

$$\begin{cases} U_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ U_2 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left[ k - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{cases} \quad (1.4)$$

Les coefficients  $K_I$  et  $K_{II}$ , sont exprimés en  $\text{MPa}\sqrt{m}$ . Ils sont appelés facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II respectivement.

$k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  en contraintes planes et  $k = 3 - 4\nu$  en déformations planes,  $\nu$  étant le coefficient de poisson et  $\mu$  le module de cisaillement.

### 1.2.2. Elasticité Antiplane

On dit que l'on est en situation « antiplane » si  $U_1$  et  $U_2$  sont nuls et si  $U_3$  ne dépend que de  $X_1$  et  $X_2$ . La seule mode d'ouverture possible dans ce cas est le mode III. Nous donnons ci-dessous les formes asymptotiques en pointe de fissure.

MODE III :

Contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\sin\frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{21} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.5)$$

Déplacement

$$U_3 = 2 \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.6)$$

### 1.3. Facteur d'intensité de contrainte

Le paramètre clé permettant de prédire le comportement d'une fissure sous l'effet d'un chargement est le facteur d'intensité de contrainte, désigné par la variable  $K$ . Il représente une mesure de l'intensité du champ de contrainte en bout de fissure.

Pour chaque mode, le facteur d'intensité de contrainte est défini quand  $r$  tend vers zéro le long de l'axe  $x_1$  ( $\theta = 0$ ) en fonction des composantes du tenseur des contraintes par :

MODE I

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, \theta = 0) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_2] \right) \quad (1.7)$$

MODE II

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi r} \sigma_{21}(r, \theta = 0) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_1] \right) \quad (1.8)$$

MODE III

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, \theta = 0) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_3] \right) \quad (1.9)$$

Où  $[U_i] = U_i^+ - U_i^-$  est la discontinuité du champ de déplacement sur les lèvres de la fissure, représentée sur la Figure 1.3.

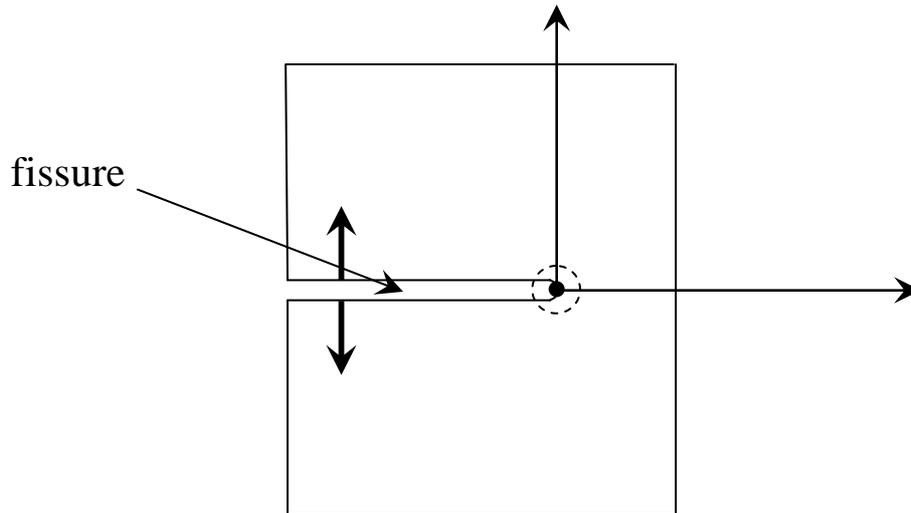


Figure 1.3 : Discontinuité du déplacement pour une fissure en bidimensionnel.

#### 1.4. Théorie Energétique De Griffith (Approche Globale) [43]

Pour un solide élastique possédant une fissure  $S$ , la propagation de celle-ci entraîne une modification de son aire. GRIFFITH exprime la conservation de l'énergie totale du système en écrivant :

$$dW_{ext} = dW_{elast} + dW_s + dW_{cin} = 0 \quad (1.10)$$

Avec :

$dW_{elast}$  : Variation de l'énergie élastique.

$dW_{ext}$  : Variation de du travail des forces extérieures.

$dW_s$  : Énergie dissipée dans la séparation  $dW_s = 2\gamma ds$ ,  $\gamma$  étant l'énergie superficielle caractéristique du matériau,  $ds$  l'accroissement d'aire de la fissure, 2 étant dû aux deux faces de la fissure.

$dW_{cin}$  : Variation d'énergie cinétique.

La fissure se propagera de façon instable si  $dW_{cin} > 0$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial S}(W_{elast} - W_{ext}) + 2\gamma < 0. \quad (1.11)$$

Par définition, le taux de restitution d'énergie  $G$  est :

$$G = -\frac{\partial}{\partial S}(W_{elast} - W_{ext}) \quad (1.12)$$

Le critère de propagation de GRIFFITH se traduit par :

$$G > 2\gamma. \quad (1.13)$$

L'initiation de la propagation A partir de la configuration S est possible lorsque :

$$G = 2\gamma. \quad (1.14)$$

Dès que  $G$  est supérieur à  $2\gamma$ , une partie de l'énergie disponible sert précisément à rompre les liaisons : c'est l'énergie de séparation. L'excès d'énergie  $(G - 2\gamma)dS$  est transformé en énergie cinétique, qui pourrait à son tour, s'il n'y avait pas d'autre apport d'énergie extérieure, se dissiper dans la séparation de surface nouvelle. Ce processus peut mener à la propagation instable.

Si les sollicitations extérieures sont telles que l'égalité  $G = 2\gamma$ , soit vérifiée à tout moment, alors il n'y a pas d'accroissement d'énergie cinétique, La rupture est contrôlée et la croissance de la fissure est stable.

Diverses expressions de  $G$  sont présentées par [43]. Considérons un problème plan en élasticité linéaire : un solide est soumis sur la partie  $S_t$  de sa frontière à une traction surfacique  $\bar{t}_i$  dont on connaît certaines composantes et sur la partie  $S_u$  le déplacement  $\bar{u}_i$  est imposé (par ses composantes complémentaires à  $\bar{t}_i$ ), (Figure 1.4).

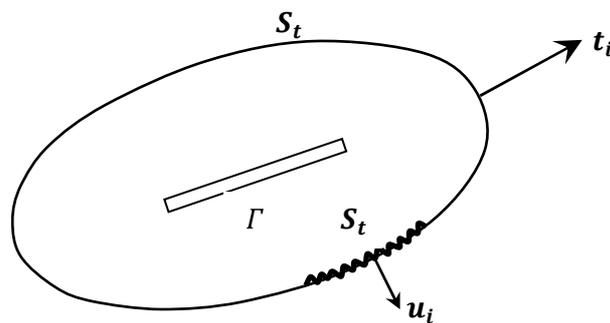


Figure 1.4 : Conditions aux limites.

En négligeant l'énergie cinétique, le taux de restitution d'énergie s'exprime alors par :

$$G = \frac{1}{2} \int_S \left( t_i \frac{du_i}{dl} - u_i \frac{dt_i}{dl} \right) dS.$$

C'est-à-dire :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_t} \bar{t}_i \frac{du_i}{dl} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \bar{u}_i \frac{dt_i}{dl} dS. \quad (1.15)$$

Si la fissure de surface  $S$  s'accroît de  $dS$ , le produit  $GdS$  s'interprète comme le travail nécessaire pour fermer la fissure de surface  $dS$ .

$G$  Est aussi considéré comme le taux d'énergie de fermeture.

### 1.5. Relation Entre G Et K [44]

Il est intuitif de penser que le taux de restitution d'énergie potentielle élastique  $G$ , sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes. On peut montrer qu'en fait les deux quantités  $K$  et  $G$  sont liées.

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie et les Facteurs d'Intensité de Contraintes sont reliés par la formule d'IRWIN:

En déformation plane :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2). \quad (1.16)$$

En contrainte plane :

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.17)$$

En élasticité anti plane :

$$G = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (1.18)$$

### 1.6. Calcul du Facteur d'Intensité de Contraintes

Il existe plusieurs techniques pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes, parmi les plus utilisées, on peut citer :

- la méthode d'extrapolation des déplacements au voisinage du fond de la fissure.
- la méthode de l'intégrale de Rice (Intégrale  $J$ ).
- la méthode de collocation de frontières.

Dans ce qui suit on présente les principes de ces trois techniques.

### 1.6.1. La méthode d'extrapolation des déplacements au voisinage du fond de la fissure

La méthode de calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du déplacement est basée sur le développement asymptotique du champ de déplacement en fond de fissure.

De façon similaire à l'extrapolation des déplacements, il est possible d'extrapoler les contraintes en utilisant les équations (1.1) pour déterminer les FIC. Pour appliquer la méthode, il faut alors isoler les FIC en utilisant les équations du champ de contraintes pour  $\theta = 0$ , puis ensuite extrapoler la solution en fonction des limites de l'équation (1.7), (1.6) et (1.8).

En 2D, dans un milieu élastique, linéaire, isotrope et homogène, les champs de contraintes et de déplacement sont connus analytiquement pour les modes d'ouverture de la fissure (caractérisé par  $K_I$ ), de glissement plan ( $K_{II}$ ) et de glissement antiplan ( $K_{III}$ ).

Le saut des déplacements des lèvres de la fissure pour les points  $U^+(r, \theta = +\pi)$  et  $U^-(r, \theta = -\pi)$  se calcule à partir des équations suivantes :

$$\begin{cases} u_2(\theta = +\pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{k+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\ u_1(\theta = +\pi) - u_1(\theta = -\pi) = \frac{k+1}{\mu} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \end{cases} \quad (1.19)$$

### 1.6.2. Intégrale de Rice intégrale $J$

Pour un corps homogène élastique qui est soumis, en l'absence de forces de volume, à un champ de déformation bidimensionnel, RICE [12] définit l'intégrale  $J$  par l'équation suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (1.20)$$

Où  $\Gamma$  est une courbe entourant le fond de fissure, l'intégrale étant évaluée dans le sens trigonométrique positif du bord inférieur vers le bord supérieur (Fig 1.5).

$W$  Est la densité d'énergie de déformation élastique par unité de volume.

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.21)$$

$t$  Est le vecteur contraintes défini suivant la normale extérieure au contour,  $t_i = \sigma_{ij} n_{ij}$ ,  $u$  est le vecteur déplacement et  $dS$  est un élément d'arc de  $\Gamma$ .

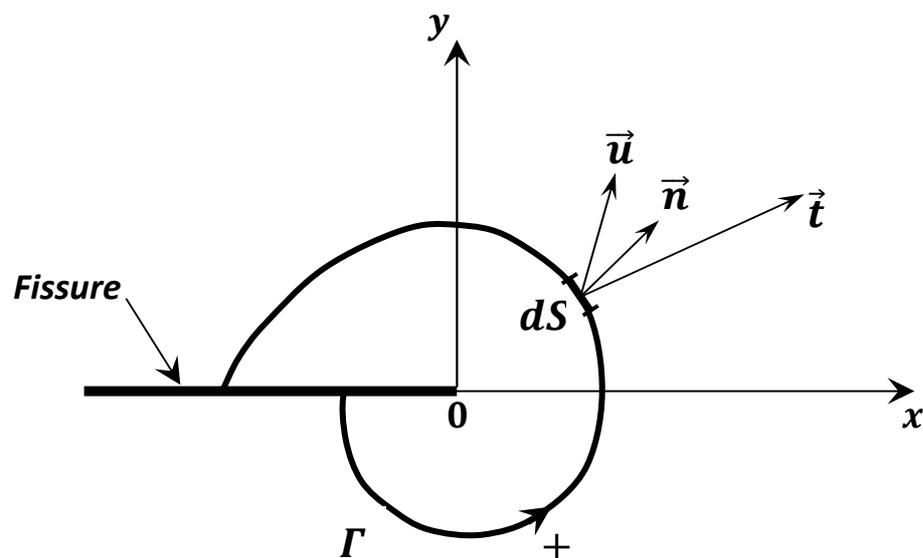


Figure 1.5 : Définition d'un contour  $\Gamma$  de l'intégrale  $J$  autour du front de fissure.

$\Gamma$  Est un contour fermé arbitraire entourant le fond de la fissure.

Dans le cas d'un matériau élastique, l'intégrale  $J$  s'identifie au taux de restitution d'énergie. Nous obtenons cette relation entre l'intégrale  $J$  et les facteurs d'intensité de contrainte.

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (1.22)$$

$E'$  Est le module d'élasticité de Young :  $E' = E$  en contraintes planes et  $E' = E/(1 - \nu^2)$  en déformations planes.

On constate que l'intégrale  $J$  est une combinaison des facteurs d'intensité de contraintes. Les FIC sont obtenues par décomposition de l'intégrale  $J$  en deux sous intégrales où chacun est associé à un mode et en associant à cette décomposition une décomposition du champ élastique.

$$J_I = J_I^I + J_I^{II} \quad (1.23)$$

Où les exposants sont associés aux modes de rupture.

## CHAPITRE II : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Nous présentons ci-dessous les modèles des forces cohésives ainsi que leurs lois d'interface. Nous tenons à préciser qu'une partie importante du 1<sup>er</sup> paragraphe a été reproduite à partir de la thèse de J. LAVERNE [7].

### 2.1. Lois d'interface des modèles de force cohésive

Nous appelons loi d'interface une relation entre le déplacement relatif et la force d'interaction entre les lèvres d'une fissure. Dans cette section, nous présenterons quelques unes d'entre elles, basées sur la notion de force cohésive. Cette dernière s'appuie sur des observations expérimentales en pointe de fissure, telles que l'apparition de micro fissures, la croissance de cavité ou le développement de zones de plastification. Cela correspond à une zone de transition entre le milieu sain et une vraie fissure (voir Figure.2.1).

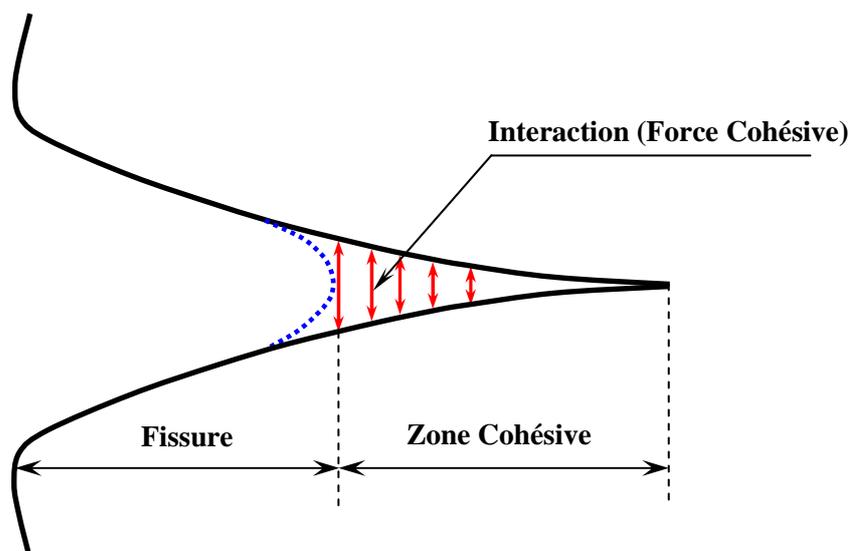


Figure 2.1 : Schéma de la fissure et de la zone cohésive.

Tant que la taille de cette zone est petite devant l'échelle de la structure, les principes de la mécanique de la rupture linéaire peuvent être appliqués. Dans le cas contraire, cette zone doit être prise en compte. Les premiers modèles furent introduits par Dugdale [8] et Barenblatt [9] au début des années soixante. Prenant acte du fait que les contraintes infinies en pointe de fissure, prédites par le modèle élastique, n'ont pas de signification physique, ces derniers ont émis l'hypothèse de l'existence d'une "zone cohésive" (Fracture Process Zone dans la littérature), dans laquelle des forces s'exercent entre les futures lèvres de la fissure. Dans les années soixante-dix, Hillerborg et al. [10] ont introduit le concept d'énergie de rupture dans les modèles de force cohésive, et proposé quelques relations de comportement entre la traction et le saut de déplacement pour le béton. De nombreux modèles ont été développés depuis. Dans la suite nous allons citer quelques uns :

### 2.1.1. Modèle de Dugdale (1960) [8]

Ce modèle décrit l'évolution des forces de traction  $\sigma_n$  en fonction du saut de déplacement normal  $\delta_n$ .

Le saut reste nul, tant que la force n'atteint pas une valeur critique  $\sigma_c$ . Puis le comportement utilisé est celui d'un solide rigide parfait jusqu'à un seuil d'ouverture  $\delta_c$  au-delà duquel l'interaction des lèvres devient nulle (voir Figure : 2.2 et 2.3).

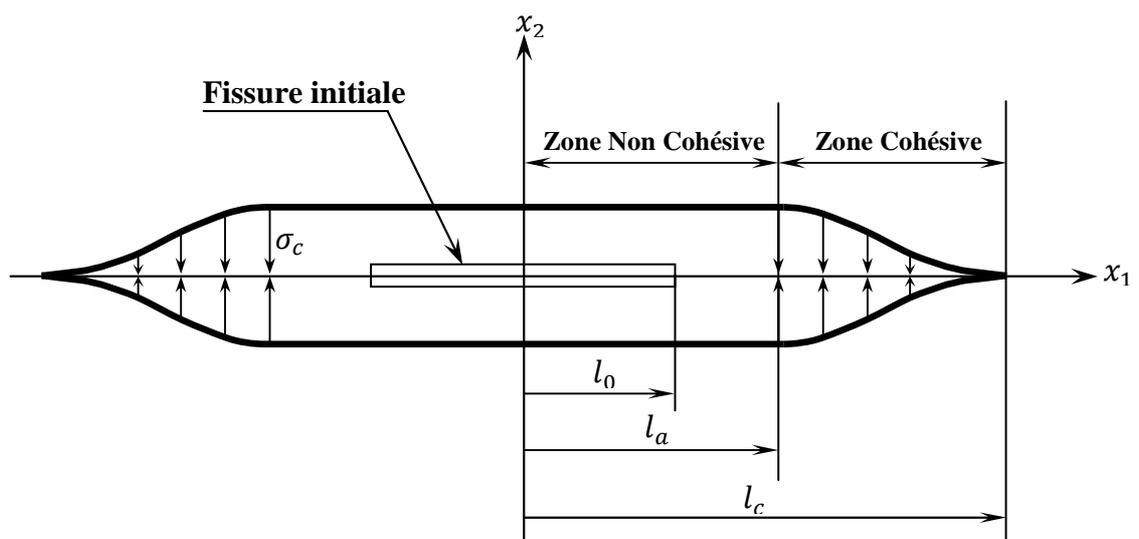


Figure 2.2 : Schématisation du modèle de DUGDALE.

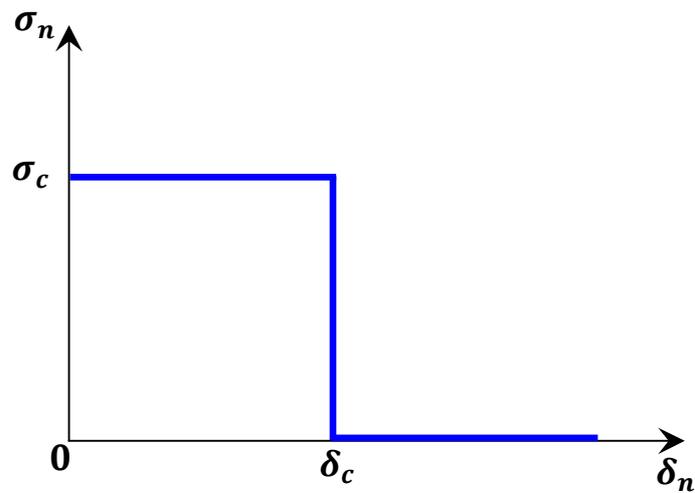


Figure 2.3 : Loi d'interface de DUGDALE.

### 2.1.2. Modèle de DUGDALE Régularisé [37]

C'est une combinaison entre le modèle des zones cohésives continuelles (ZCC) (Xie [4]) et le modèle de DUGDALE (figure 2.4 et 2.5).

Nous distinguons dans ce modèle trois zones : la zone cohésive continue, où l'ouverture de la fissure est inférieure à une certaine valeur  $\delta_0$ , et où les forces cohésives sont proportionnelles à l'ouverture. Une zone cohésive, où l'ouverture de la fissure est inférieure à l'ouverture critique  $\delta_c$ , et où les forces cohésives sont constantes et égales à la contrainte critique  $\sigma_c$ . Une zone non cohésive, où l'ouverture est supérieure à  $\delta_c$ , et où les forces cohésives sont nulles.

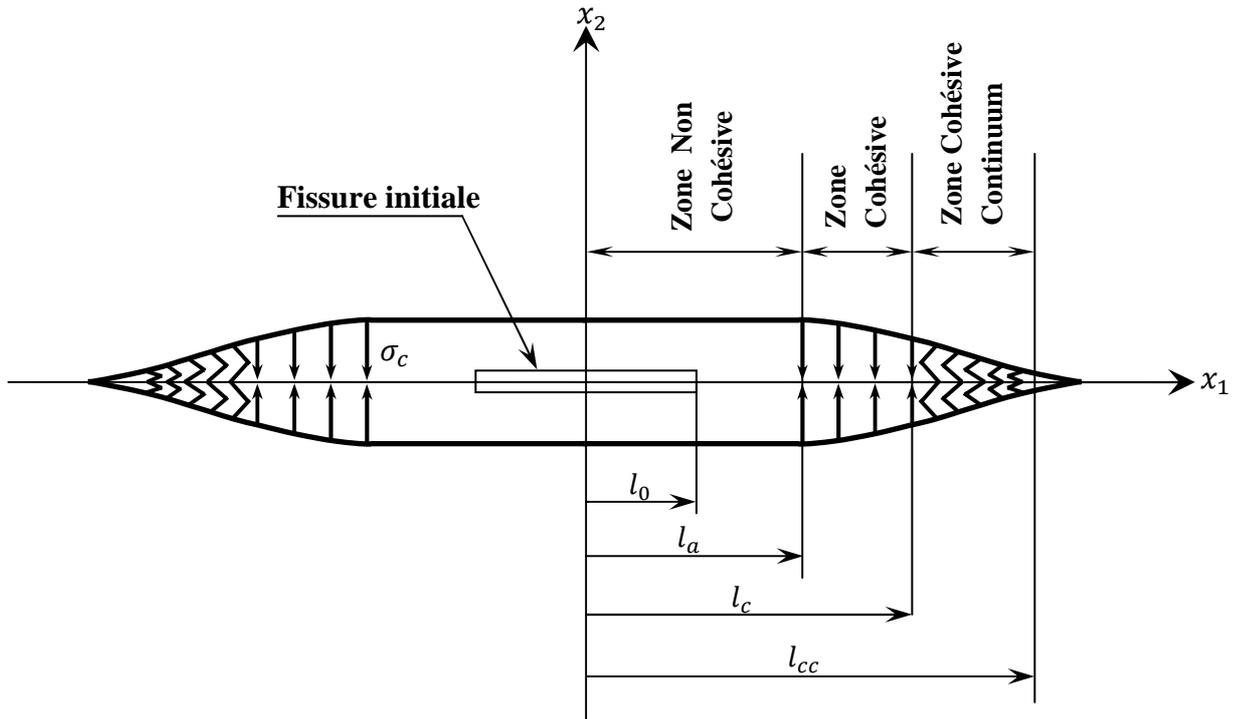


Figure 2.4 : Schématisation du modèle de DUGDALE-BARENBLATT (Régularisé).

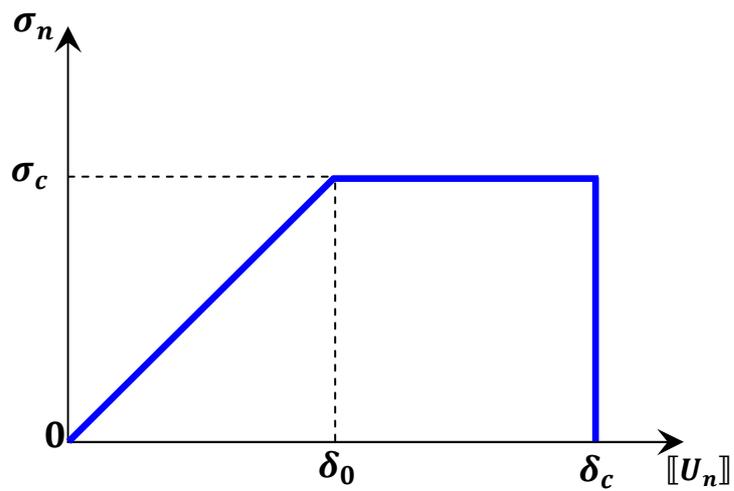


Figure 2.5 : Loi de comportement dans le modèle de DUGDALE régularisé.

### 2.1.3. Modèle de Needleman (1987) [11]

Ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\sigma_t$  en fonction des composantes normale et tangentielle du saut de déplacement  $\delta_n$  et  $\delta_t$ . On représente sur la (Figure 2.6) l'évolution de la force normale en fonction du saut normal lorsque le saut tangent est nul.

La force normale et tangentielle dérivent, respectivement, d'un potentiel  $\psi$  :

$$\sigma_n = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_n}, \quad \sigma_t = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_t}$$

Ce potentiel est choisi comme une fonction polynomiale, faisant intervenir les paramètres:

$\sigma_c$  Contrainte critique du matériau en ouverture,  $\delta_c$  saut critique au-delà duquel l'interaction entre les lèvres de fissure devient nulle, ainsi que la part de résistance au glissement par rapport à la résistance normale. On note que lorsque  $\delta_n < 0$ , la valeur de la contrainte normale dérivant du potentiel, joue le rôle d'une pénalisation, afin de tenir compte de la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure.

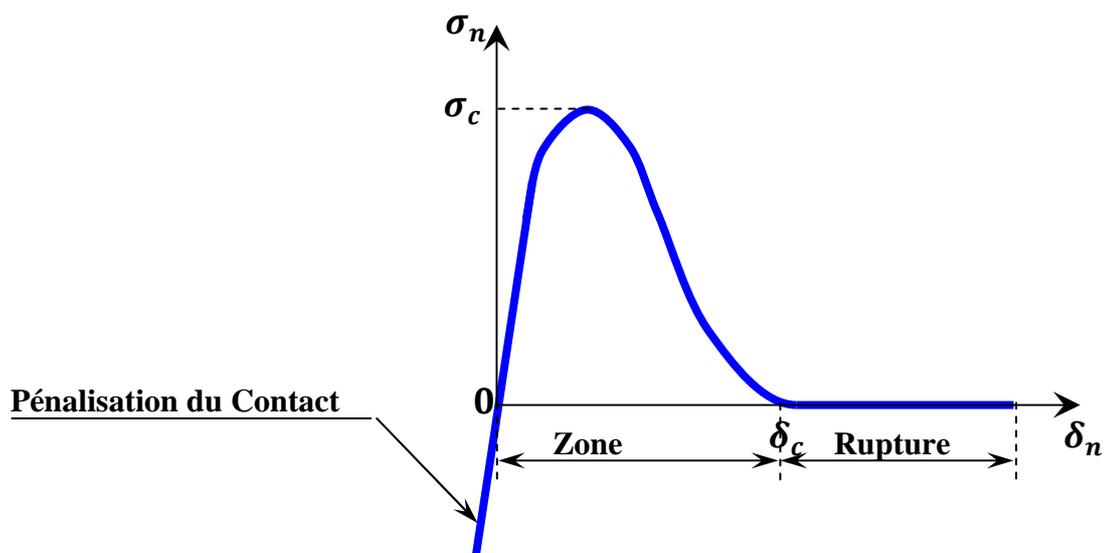


Figure 2.6: Loi d'interface de Needleman dans la direction normale.

Aucune autre hypothèse n'intervient pour prendre en compte cette condition. Notons que ce modèle fut repris et modifié par de nombreux auteurs. Citons par exemple Rice et Wang [12] qui ont proposé une expression exponentielle du potentiel. La différence avec le modèle précédent tient au fait que la force tend, asymptotiquement, vers zéro quand le saut de déplacement augmente. Ce modèle ne fait donc pas intervenir le paramètre  $\delta_c$ .

#### 2.1.4. Modèle de TVERGAARD (1990) [13]

Ce modèle reprend le modèle de Needleman datant de 1987 [11]. Il introduit une notion d'irréversibilité du comportement : la décharge s'effectue linéairement, ainsi qu'un frottement de Coulomb post décohésion.

On représente sur la (Figure 2.7) l'allure de la force tangentielle, en fonction du saut tangentiel, lorsque le saut normal est nul.

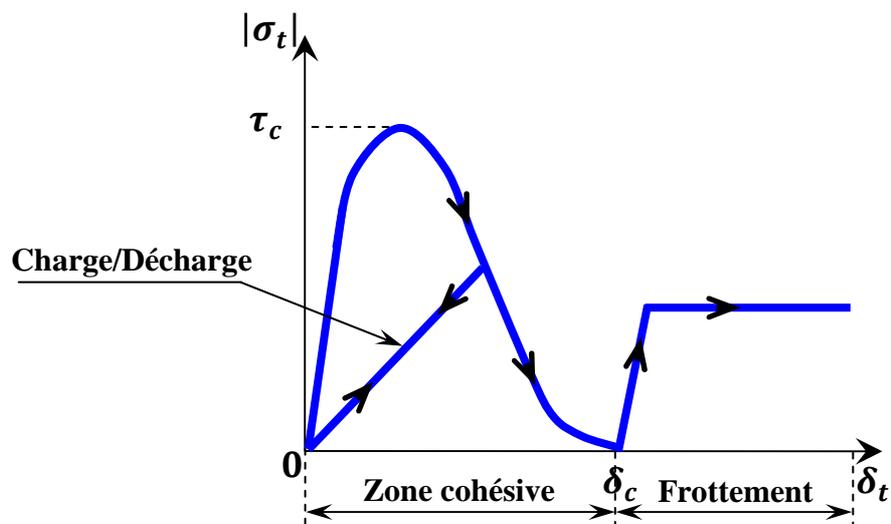


Figure 2.7: Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangentiel.

On note que le modèle formulé initialement, par l'auteur, s'appuie sur un indicateur de décohésion, variant de zéro à un. Ainsi, il fait intervenir le saut normé par le saut critique, qui fait office de variable d'endommagement, dont dépendent les forces d'interaction. A partir de ce modèle, d'autres modèles ont été développés. Par exemple, Chaboche et al (1997) [14], pour modéliser la

décohésion interfaciale dans les composites à matrice métallique, proposent d'activer le frottement de Coulomb, dès le début de la décohésion. Aussi, une loi trapézoïdale a été utilisée par Tvergaard et Hutchinson (1993) [01] dans divers calculs numériques.

#### 2.1.5. Modèle de Camacho, Ortiz et Pandolfi (1996-1999) [2], [3]

Une autre modèle a été proposée par Camacho, Ortiz et Pandolfi [2], en utilisant une relation linéaire avec une pente négative, entre la traction d'interface et la séparation, dans leurs simulations d'endommagement d'impacts sur solides fragiles (voir Figure 2.8).

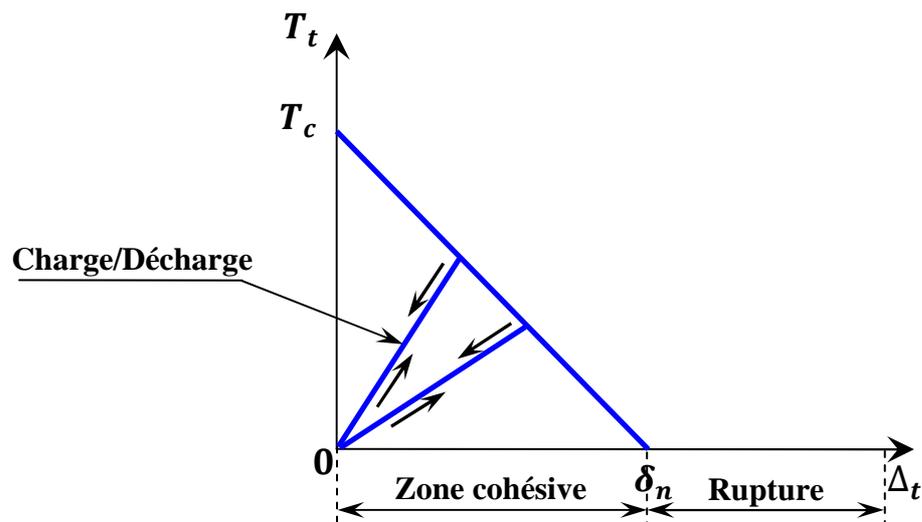


Figure 2.8 : Lois d'interface de Camacho et Ortiz dans la direction normale.

## 2.2. Modélisation des fissures avec Le modèle de Dugdale

Notre travail se situe dans la continuité des travaux effectués dans notre équipe. Ces travaux consistent en la modalisation de structures fissurées à l'aide du modèle de Dugdale. Nous présentons ci-dessous les résumés des divers travaux effectués.

### 2.2.1. Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à la rupture avec le modèle de Dugdale (H. Ferdjani, R. Abdelmoula, J.J. Marigo, 2006) [36]

Le but de ce travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile avec le modèle des forces cohésives, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du modèle de Dugdale ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure.

On traite pour cela deux exemples : le cas d'une plaque pré fissurée, puis le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire (Voir Figure.2.9). Les calculs sont effectués avec la méthode des éléments finis.

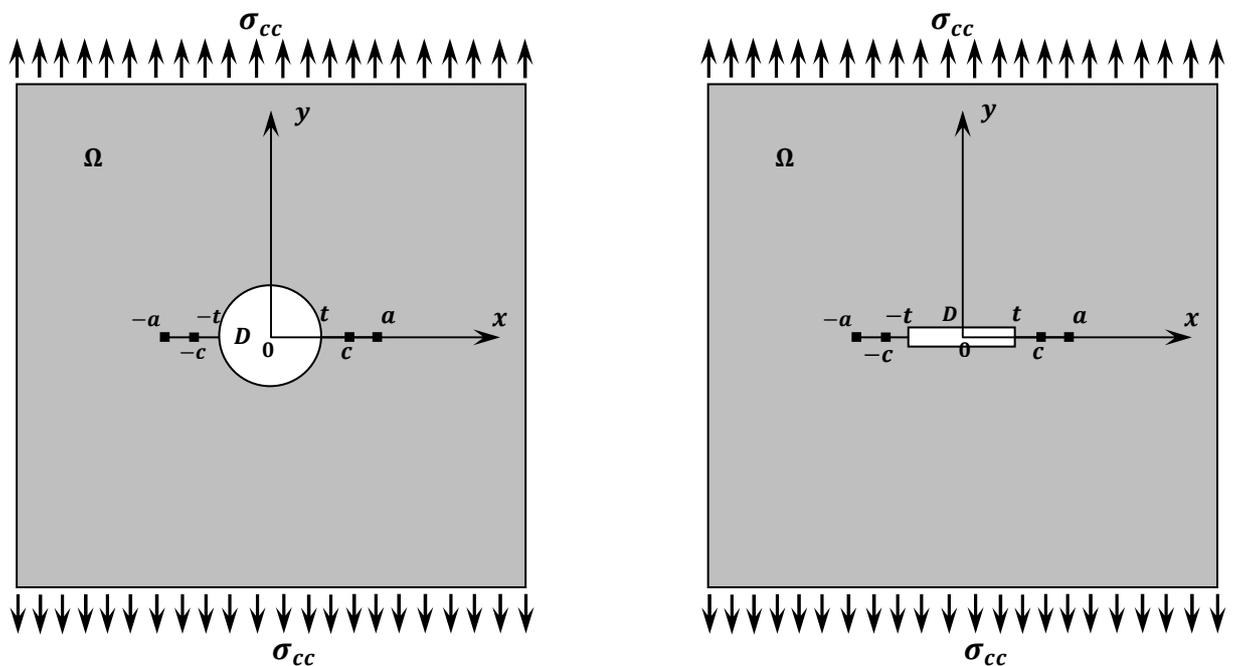


Figure 2.9 : Géométrie de la plaque trouée et de la plaque fissurée.

2.2.2. Etude des effets d'échelle dans le modèle Dugdale à travers le cas d'une fissure dans un plan semi infini sollicité en cisaillement antiplan (H. Ferdjani, JJ Marigo, S. El Borgi, 2008) [38]

L'objectif principal de ce travail est de prouver que, avec le modèle Dugdale, les défauts de petite taille, relativement à la longueur caractéristique du matériau, sont pratiquement sans influence sur la charge limite des structures. Pour cela, nous traitons le cas d'une fissure dans un plan semi-infini sous cisaillement antiplan.

En Utilisant les transformations intégrales, les équations de l'élasticité sont converties analytiquement en une équation intégrale singulière. L'équation intégrale singulière est résolue numériquement en utilisant des polynômes de Chebychev.

Une attention particulière est nécessaire pour tenir compte de la présence de discontinuités de saut dans la distribution du chargement le long des lèvres de fissure (Figure.2.10).

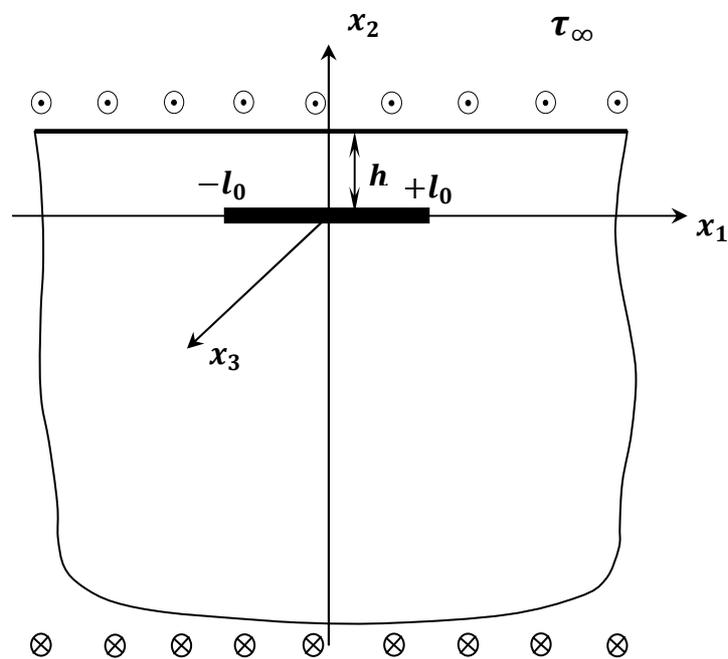


Figure 2.10 : La charge et la géométrie du Problème original.

2.2.3. Étude d'une bande infinie contenant une fissure de Dugdale parallèle à ses frontières sous un chargement de cisaillement anti-plan (H. Ferdjani, 2009) [39]

Le problème antiplan élastostatique d'une bande infinie contenant une fissure de Dugdale parallèle à ses frontières est formulée en termes d'une équation intégrale singulière.

La résolution se fait en utilisant des polynômes de Chebyshev.

Une attention particulière est nécessaire pour tenir compte de la présence de discontinuités dans la distribution du chargement le long des lèvres de fissure. Le résultat obtenu est l'évolution de la pointe de la fissure avec la charge appliquée (Figure.2.11).

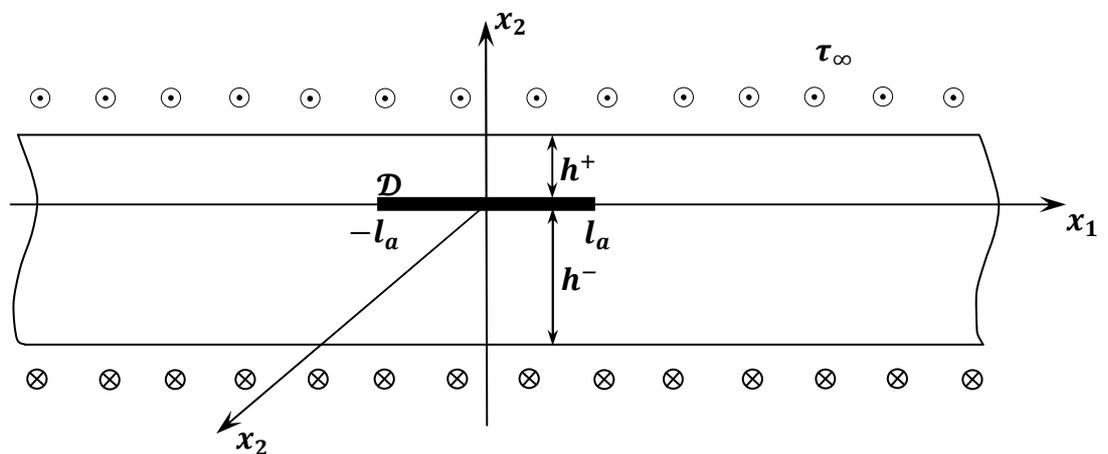


Figure 2.11 : La charge et la géométrie du Problème original.

2.2.4. Etude de l'influence des effets d'échelle dans le modèle de Dugdale à travers le cas d'une bande infinie soumise à un chargement antiplan (A.BRICK CHAOUICHE, 2008) [40]

Le but de ce travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile avec le modèle des forces cohésives, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du modèle des forces cohésive ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure.

On traite pour cela l'exemple d'une bande contenant une fissure parallèle à ses frontières. Le problème est formulé en termes d'une équation intégrale singulière avec la dérivée de l'ouverture de la fissure comme fonction densité. L'équation intégrale est résolue numériquement en utilisant les polynômes de Chebychev.

2.2.5. Etude d'une fissure cohésive à l'interface entre deux matériaux différents (A. MAHAMMEDI, 2012) [41]

Les travaux effectués s'appuient sur l'hypothèse d'une énergie de surface de type Dugdale. Le problème d'une fissure à l'interface entre deux matériaux différents a été étudié (Figure 2.12). En utilisant les transformées de Fourier, les équations du problème élastique sont transformées en une équation intégrale singulière, la résolution de l'équation intégrale se fait en utilisant les polynômes de Chebyshev. Des applications numériques sont présentées en étudiant l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué. En fin une comparaison avec le modèle de Griffith a été effectuée.

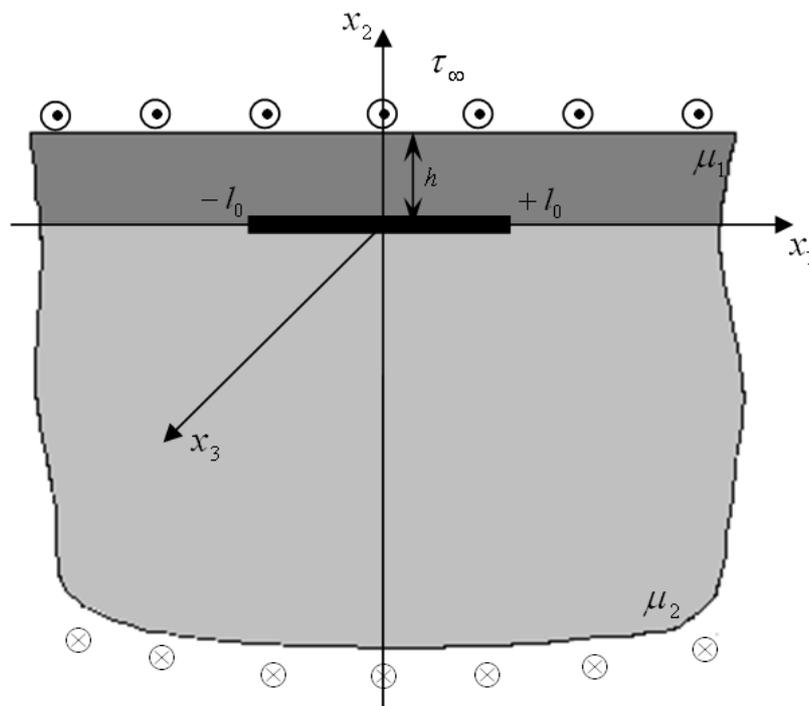


Figure 2.12 : géométrie du problème initial.

### 2.2.6. Etude d'une fissure de Dugdale dans une bande infinie chargée en mode I.

Abd el Aziz HANI CHEBRA (2012) [42]

Le but de ce travail est l'étude d'une bande infinie contenant une fissure de Dugdale parallèle à ces frontières chargée en mode I. En utilisant les transformés de Fourier, les équations du problème élastique sont transformés analytiquement en une équation intégrale singulière de Cauchy du premier type. La résolution de cette équation intégrale se fait numériquement à l'aide des polynômes de Chebychev. A cause de la présence de discontinuités dans la distribution du chargement le long de lèvres de la fissure, les techniques de résolutions classiques ne sont pas applicables et doivent être modifiées. Nous calculons la variation de la contrainte appliquée avec la longueur de la fissure en faisant varier un certain nombre de paramètres du problème. Nous terminons par une comparaison entre les modèles de Dugdale et de Griffith Figure (2.13).

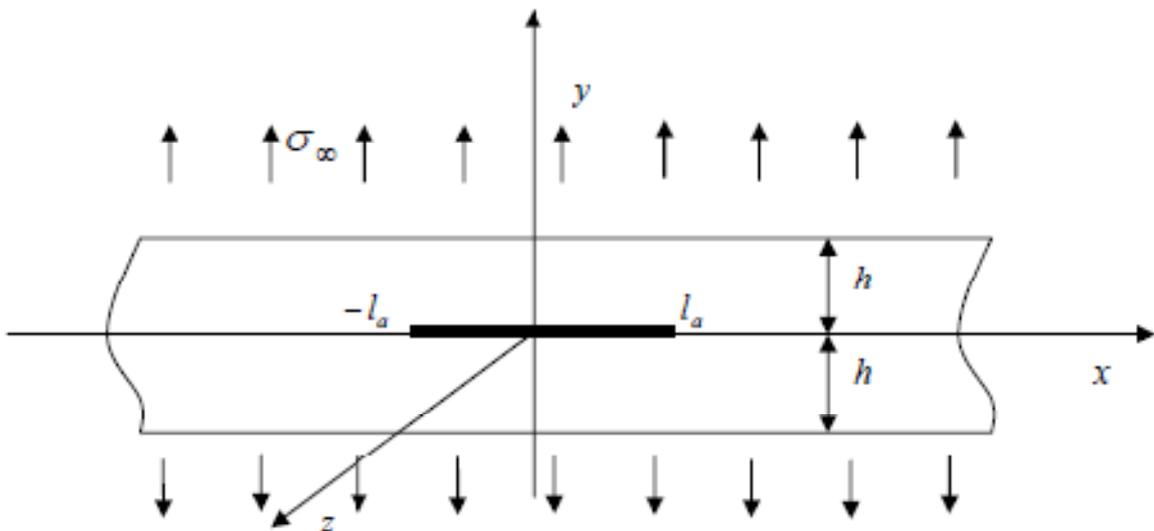


Figure 2.13 : Géométrie de la bande avec les chargements.

## CHAPITRE III : THEORIE DE GRIFFITH REVISITEE ET FORMULATION VARIATIONNELLE

La théorie de Griffith revisitée a été bien exposée dans la thèse de J. LAVERNE [7]. Nous reproduisons, dans le premier paragraphe ci-dessous, cet exposé.

### 3.1. Théorie de Griffith revisitée

Dans la formulation énergétique de la mécanique de la rupture fragile, les principaux résultats ont été obtenus à partir de la théorie de GRIFFITH [19]. Ce dernier associe à toute fissure une énergie de surface proportionnelle à sa longueur. Il postule qu'il y aura propagation et donc augmentation de l'énergie de surface si cette dernière est parfaitement compensée par la restitution de l'énergie élastique causée par l'avancée de la fissure. Dans le cas de problèmes quasi-statiques ce critère peut se formuler en terme de taux de restitution d'énergie élastique usuellement noté  $G$ . Ce dernier correspond à la variation d'énergie potentielle lors d'un accroissement infinitésimal de fissure. Le critère de GRIFFITH stipule alors qu'il n'y aura pas propagation tant que :

$$G < G_c \tag{3.1}$$

Où  $G_c$  désigne le taux de restitution d'énergie critique et correspond à la ténacité du matériau.

Bien qu'elle connaisse encore un vrai succès, cette théorie renferme des insuffisances notoires.

- La première concerne l'initiation de la fissuration, la théorie de GRIFFITH est incapable de rendre compte de l'amorçage de fissures, sauf dans des cas très

particuliers où la structure possède des singularités fortes. En effet, prenons l'exemple d'un milieu bidimensionnel contenant une fissure rectiligne  $l$ , sollicitée en mode  $I$ , et supposons l'absence de singularités dans le problème d'élasticité initiale. Le critère de GRIFFITH prévoit que la fissure se propage pour un chargement en  $1/\sqrt{l}$ . Si  $l$  tend vers zéro, on en déduit que pour un milieu sain la fissure ne pourra pas s'amorcer sous un chargement fini.

- La seconde lacune porte sur son incapacité à prédire seule le trajet spatial des fissures. Pour un milieu bidimensionnel, le critère ne prend en compte que la longueur de fissure or l'évolution spatiale nécessite une seconde information qui correspond à un critère de branchement.
- Enfin, une troisième lacune concerne le trajet temporel de la fissure, seules les propagations progressives sont traitées de façon satisfaisante. En effet des situations où l'inégalité du critère est violée peuvent survenir. Celles-ci correspondent au cas de figure où l'excès de restitution d'énergie élastique conduit à l'apparition d'énergie cinétique. La propagation est alors considérée comme brutale.

On peut résumer ces trois points en disant que le problème majeur de la théorie de Griffith est de ne pas laisser assez de souplesse à l'évolution spatio-temporelle des fissures.

De nombreux aménagements tentent d'y remédier proposant des ingrédients spécifiques à chacun des problèmes.

Une première tentative, destinée à proposer une théorie unifiée permettant de remédier aux principales lacunes citées précédemment, fut proposée par G.A. Francfort et J.-J. Marigo [20] en 1998, cette théorie est connue sous le nom de « Théorie de Griffith revisitée ». Celle ci consiste à garder l'hypothèse d'une énergie de surface proportionnelle à la longueur de la fissure, mais abandonner le critère de Griffith au profit d'un principe de minimisation d'énergie. Le problème revient à chercher, à chaque instant, le champ de déplacement admissible qui conduit à un minimum global de la somme de l'énergie élastique et de l'énergie de surface. Les

travaux de thèse de B. Bourdin [21], sur un plan numérique (régularisation des discontinuités), et de F. Bilteyst [22], sur un plan théorique appliqués à la fissuration des matériaux composites, ont permis d'illustrer les capacités de cette nouvelle approche à pallier pour une part importante aux lacunes de la théorie de GRIFFITH initiale.

Toutefois l'utilisation du principe de moindre énergie, en adoptant l'hypothèse de GRIFFITH relative à l'énergie de surface, reste déficiente concernant deux points importants.

Premièrement parce qu'elle conduit à des effets d'échelle non satisfaisant. Ainsi, dans le cas d'une barre unidimensionnelle de longueur  $l$  chargée en déplacement dans la direction longitudinale, la contrainte à la rupture est proportionnelle à  $1/\sqrt{l}$  ce qui n'est pas conforme à l'observation. Deuxièmement parce qu'elle ne fonctionne pas à forces imposées. En effet, lorsque des forces sont imposées, la prise en compte du travail des efforts extérieurs dans la minimisation conduit à une énergie totale qui n'est (en général) plus bornée inférieurement.

Afin de remédier à ce second point, on pourrait être tenté d'effectuer une recherche de minimum local. Cependant le problème de l'amorçage de la théorie de GRIFFITH ressurgirait.

En effet, la réponse élastique d'une structure saine est toujours un minimum local en l'absence de singularités fortes.

Au vu de ces difficultés une nouvelle idée a vu le jour. Celle-ci consiste d'une part à adopter une énergie de surface qui dépend du saut de déplacement  $\delta$  entre les lèvres de la fissure et d'autre part à chercher des minima locaux de l'énergie totale. Les formes de la fonction énergie à adopter sont suggérées par les potentiels d'interaction à l'échelle atomique (voir Figure 3.1). L'idée d'une telle approche remonte à Barenblatt [9]. Cependant, son utilisation concernant le cadre de la minimisation d'énergie est assez récente (voir Del Piero [23] et Truskinovsky [24]). On peut aussi citer les travaux de thèse de M. Charlotte [25] sur des modèles discrets de rupture ou encore Charlotte Et Al [26].

D'autres travaux ont montré que le modèle de Barenblatt ou de façon plus générale les modèles de forces cohésives permet de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes, cf. par exemple (Del Piero, 1999) [23]; (Del Piero et al, 2001) [27]; (Charlotte et al, 2000) [26] ou (Laverne et al, 2004) [28]. De plus, dans le modèle des forces cohésives la singularité des contraintes en pointe de fissure, prédite par la mécanique linéaire de la rupture (MLR) dans le modèle de Griffith (Williams 1957) [29], est supprimée.

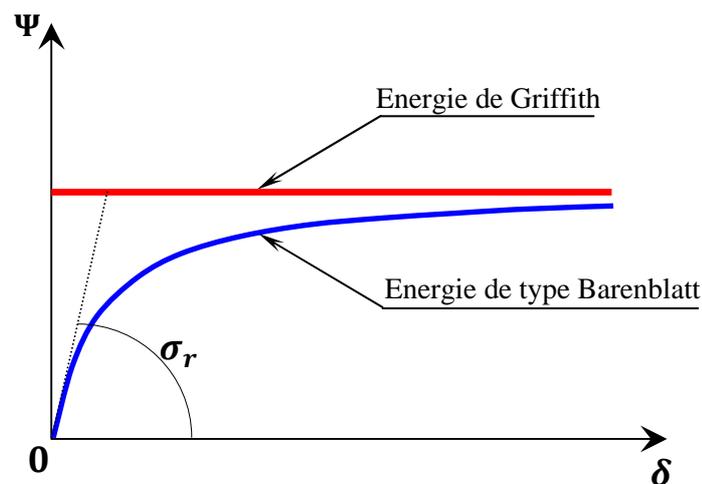


Figure 3. 1: Energie de surface en fonction du saut de déplacement.

### 3.2. Formulation variationnelle

Toute l'analyse s'effectuera dans le cadre de l'élasticité antiplane. on considère un solide élastique dont la configuration est un ouvert  $\Omega$  dans le plan  $(x_1, x_2)$ , soumise à un chargement consistant en un déplacement imposé  $U^d$ , parallèle à  $x_3$ , sur la partie  $\partial\Omega_D$  de la frontière et en forces surfacique  $F^d$ , parallèles à  $x_3$ , sur la partie complémentaire  $\partial\Omega_F$  de la frontière et sans forces volumique. Le chargement provoque la propagation d'une fissure le long d'un trajet prédéfini (figure 3.2). Le matériau à un comportement élastique linéaire caractérisé par le coefficient élastique  $\mu$ .

Nous supposons que le solide, le chargement et le trajet prédéfini de la fissure sont tels que le fissure est toujours en mode III, c à d seulement le déplacement tangentiel parallèle à  $x_3$  peut être discontinu sur  $\Gamma$ .

On note  $[[W]]$  le saut du déplacement en un point de  $\Gamma$  et nous l'appelons « ouverture ».

Nous supposons, que les composantes du vecteur contrainte parallèles à  $x_1$  et  $x_2$  s'annulent. La relation entre la force cohésive et l'ouverture est obtenue par une approche variationnelle, à partir d'hypothèses sur la densité d'énergie de surface.

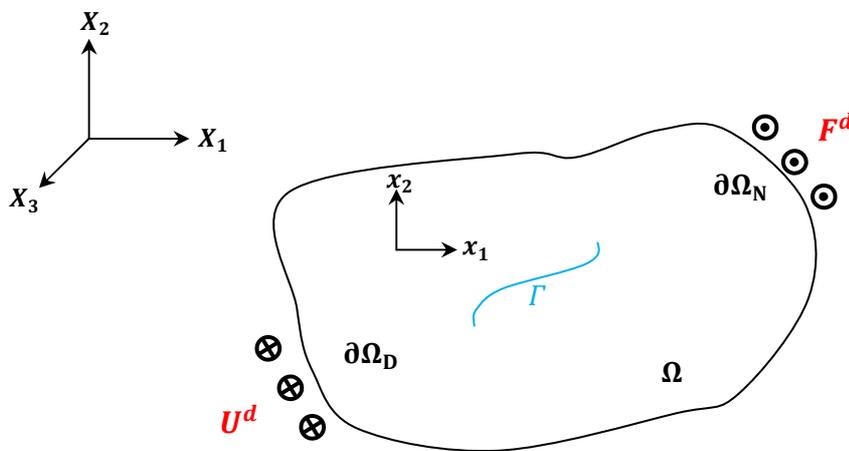


Figure 3. 2: Schéma du Domaine Et Chargement.

On se met dans l'hypothèse de l'élasticité antiplane. C'est à dire :

$$U_1 = U_2 = 0, \quad U_3 = W(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

Où :

$U_1, U_2$  et  $U_3$  sont les composantes du vecteur déplacement dans la base  $(x_1, x_2, x_3)$ . Dans la suite, on appellera champ de déplacement le champ scalaire  $W(x_1, x_2)$  représentant la composante  $U_3$  du déplacement.

A partir de la loi de comportement de l'élasticité linéaire, on peut montrer que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont:

$$\tau_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}, \tau_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2}. \quad (3.3)$$

Un champ de déplacement  $v(x, y)$  est un champ cinématiquement admissible, s'il respecte les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_D$ , et s'il ne peut avoir de discontinuité que sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire :

$$v \in C = \{v \text{ tel que: } v = U^d \text{ sur } \partial\Omega_D, \quad |[v]| \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (3.4)$$

Où  $[v] = v^- - v^+$ , représente la discontinuité du déplacement, les indices + et – correspondent aux lèvres supérieure et inférieure de la fissure respectivement.

Remarque : les définitions de « supérieure » et « inférieure » sont effectuées en fonction du sens de la normale  $\vec{n}$  à la fissure (Figure 3.3).

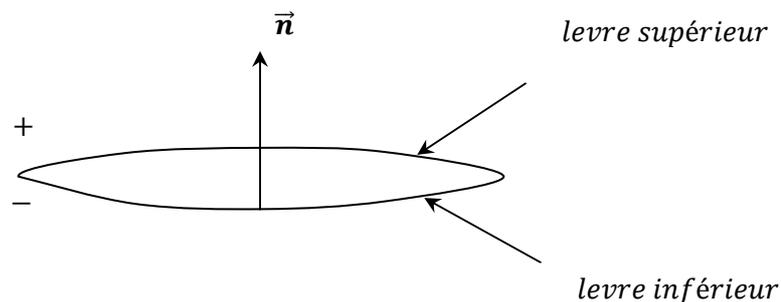


Figure 3.3 : la normale  $\vec{n}$  à la fissure.

On se met dans l'hypothèse de l'énergie de surface de type Barenblatt (Figure 3.1). Nous considérons le cas où l'ouverture est croissante avec le temps. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire des conditions d'irréversibilité, et la densité d'énergie de surface  $\phi$  est fonction d'une seule variable  $[W]$ . Nous supposons

également qu'en mode III,  $\phi$  est indépendant du signe de  $[[W]]$ . Par conséquent  $\phi$  est fonction de la seule variable  $|[[W]]|$ .

L'énergie totale du solide est la somme de son énergie potentielle élastique et de l'énergie de surface. Elle est donnée par :

$$E(v) = \int_{\Omega/\Gamma} \frac{1}{2} \mu \nabla v \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \phi(|[[v]]|) ds - \int_{\partial\Omega_F} F^d v ds \quad (3.5)$$

Où l'opérateur  $\nabla$  représente le gradient, le point dans la première intégrale représente le produit scalaire.

Dans la « théorie de Griffith revisitée » avec une énergie de surface de type Barenblatt, le champ solution  $w(x, y)$  correspond à un minimum local de l'énergie totale :

$$\forall v \in C, \exists \bar{h} > 0, \text{ tel que: } \forall h \in [0, \bar{h}] E(w) \leq E(w + h(v - w)) \quad (3.6)$$

En divisant l'inégalité ci-dessus par  $h$  et en passant à la limite lorsque  $h$  tend vers 0, on obtient:

$$\left. \frac{d}{dh} (E(w + h(v - w))) \right|_{h=0} \geq 0 \quad (3.7)$$

En remplaçant (3.5) dans (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega/\Gamma} \mu \nabla w \cdot \nabla (v - w) dx \\ & + \int_{\Gamma^+} \phi'(|[[w]]|) [[v - w]] ds \\ & - \int_{\Gamma^-} \phi'(|[[w]]|) [[v - w]] ds + \int_{\Gamma^0} \phi'(0) |[[v]]| ds \\ & - \int_{\partial\Omega_f} F^d (v - w) ds \\ & \geq 0 \quad \forall v \in C \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dans (3.8) le trajet de fissure  $\Gamma$  a été divisé en trois parties.

$\Gamma^+$ : la partie de  $\Gamma$  où  $[[w]] > 0$ .

$\Gamma^-$ : la partie de  $\Gamma$  où  $[[w]] < 0$ .

$\Gamma^0$ : la partie de  $\Gamma$  où  $[[w]] = 0$ .

En intégrant par parties la première intégrale de (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega/\Gamma} \mu \Delta w (v - w) dx \\
& \quad - \int_{\Gamma} \tau_{i3} n_i [[v - w]] ds \\
& \quad + \int_{\partial\Omega_F} \tau_{i3} n_i (v - w) ds + \int_{\Gamma^+} \phi'(|[[w]]|) [[v - w]] ds \\
& \quad - \int_{\Gamma^-} \phi'(|[[w]]|) [[v - w]] ds + \int_{\Gamma^0} \phi'(0) |[v]| ds \\
& \quad - \int_{\partial\Omega_F} F^d (v - w) ds \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{C} \quad (3.8a)
\end{aligned}$$

Où  $\Delta$  représente l'opérateur Laplacien bidimensionnel,  $n_i$  sont ( $i=1,2$ ) les composant de la normale extérieure à la fissure.

L'inéquation variationnelle (3.8) est équivalente à un système d'inégalités locales obtenues en considérant différents champs test  $v$ .

(i) On choisit  $v$ , tel que  $[[v]] = [[w]]$  sur  $\Gamma$ . Les intégrales surfaciques sur  $\Gamma$  dans (3.8) s'annulent et il reste :

$$- \int_{\Omega/\Gamma} \mu \Delta w (v - w) dx + \int_{\partial\Omega_F} (\tau_{i3} n_i - F^d) (v - w) ds \geq 0 \quad (3.9)$$

(i1) On choisit  $v$ , tel que  $v = w$  sur  $\partial\Omega_F$ . On injecte dans (3.9), on obtient:

$$-\int_{\Omega/\Gamma} \mu \Delta w (v - w) dx \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega/\Gamma \quad (3.10)$$

On reporte (3.10) dans (3.9), on obtient :

$$\int_{\partial\Omega_F} (\tau_{i3} ni - F^d)(v - w) ds \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow \tau_{i3} ni = F^d \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (3.11)$$

On reporte (3.10) et (3.11) dans (3.8a) qui devient:

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma} \tau_{i3} ni \llbracket (v - w) \rrbracket ds + \int_{\Gamma^+} \phi'(|\llbracket w \rrbracket|) \llbracket (v - w) \rrbracket ds - \int_{\Gamma^-} \phi'(|\llbracket w \rrbracket|) \llbracket (v - w) \rrbracket ds \\ + \int_{\Gamma^0} \phi'(0) |\llbracket v \rrbracket| ds \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'inégalité précédente peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} (\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) - \tau_{i3} ni) \llbracket (v - w) \rrbracket ds - \int_{\Gamma^-} (\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) + \tau_{i3} ni) \llbracket (v - w) \rrbracket ds \\ + \int_{\Gamma^0} (\phi'(0) |\llbracket v \rrbracket| - \tau_{i3} ni |\llbracket w \rrbracket|) ds \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

(ii) On choisit  $v$  tel que  $\llbracket v \rrbracket = 0$  sur  $\Gamma^0$  dans (3.13), il vient :

$$\int_{\Gamma^+} (\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) - \tau_{i3} ni) \llbracket (v - w) \rrbracket ds - \int_{\Gamma^-} (\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) + \tau_{i3} ni) \llbracket (v - w) \rrbracket ds \geq 0 \quad (3.14)$$

(ii.1) On choisit  $v$  tel que  $\llbracket (v - w) \rrbracket = 0$  sur  $\Gamma^+$  dans (3.14), il vient :

$$-\int_{\Gamma^-} (\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) + \tau_{i3} ni) \llbracket (v - w) \rrbracket ds \geq 0, \forall v \Rightarrow \tau_{i3} ni = -\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) \text{ sur } \Gamma^- \quad (3.15)$$

On reporte (3.15) dans (3.14), il vient:

$$\int_{\Gamma^-} (\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) - \tau_{i3}ni) \llbracket (v - w) \rrbracket ds \geq 0, \quad \forall v \Rightarrow \tau_{i3}ni = \phi'(|\llbracket w \rrbracket|) \text{ sur } \Gamma^+ \quad (3.16)$$

On reporte (3.15) et (3.16) dans (3.13), il vient:

$$\int_{\Gamma^0} (\phi'(0)|\llbracket v \rrbracket| - \tau_{i3}ni \llbracket v \rrbracket) ds \geq 0 \quad (3.17)$$

(iii) On choisit  $v$  tel que  $\llbracket v \rrbracket > 0$  sur  $\Gamma^0$  dans (3.17) il vient :

$$\int_{\Gamma^0} (\phi'(0) - \tau_{i3}ni) \llbracket v \rrbracket ds \geq 0 \Rightarrow \tau_{i3}ni \leq \phi'(0) \text{ sur } \Gamma^0 \quad (3.18)$$

(iv) On choisit  $v$  tel que  $\llbracket v \rrbracket < 0$  sur  $\Gamma^0$  dans (3.17), il vient :

$$-\int_{\Gamma^0} (\phi'(0) + \tau_{i3}ni) \llbracket v \rrbracket ds \geq 0 \Rightarrow \tau_{i3}ni \geq -\phi'(0) \text{ sur } \Gamma^0 \quad (3.19)$$

(3.18) et (3.19) peuvent être regroupées en :

$$|\tau_{i3}ni| \leq \phi'(0) \text{ sur } \Gamma^0$$

En récapitulant, la condition de minimum local pour le champ solution  $w(x, y)$  est équivalente aux équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega/\Gamma & \\ \tau_{i3}ni = F^d \text{ sur } \partial\Omega_F & \\ \tau_{i3}ni = -\phi'(|\llbracket w \rrbracket|) & \text{sur } \Gamma^- \\ \tau_{i3}ni = \phi'(|\llbracket w \rrbracket|) & \text{sur } \Gamma^+ \\ |\tau_{i3}ni| \leq \phi'(0) & \text{sur } \Gamma^0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Remarque :

- 1-La première équation de (3.20) représente l'équation de Navier en élasticité antiplane sans forces de volume
- 2- La deuxième équation de (3.20) représente la condition aux limites en forces du problème élastique
- 3- Les troisième et quatrième équations représentent la loi reliant les forces cohésives à la discontinuité du déplacement sur les lèvres de la fissure créée.
- 4-La dernière équation de (3.20) représente la condition d'amorçage d'une nouvelle fissure. Pour qu'une fissure puisse apparaître sur le trajet prédéfini, il faut que la contrainte de cisaillement atteigne la valeur critique,  $\tau_c$  en valeur absolue.

3.3. Cas d'une énergie de surface de type Dugdale

La densité d'énergie de surface s'écrit comme suit :

$$\phi(|\llbracket v \rrbracket|) = \begin{cases} G_c \frac{|\llbracket v \rrbracket|}{\delta_c} & \text{si } |\llbracket v \rrbracket| \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } |\llbracket v \rrbracket| \geq \delta_c \end{cases} \quad (3.21)$$

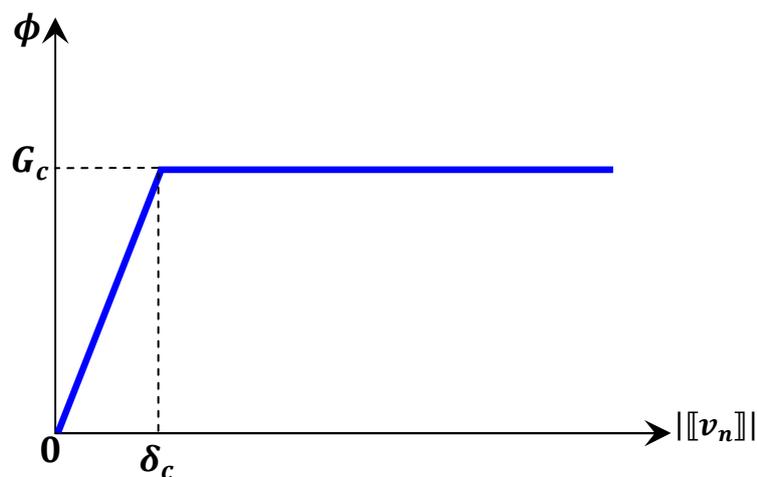


Figure 3.4 : Energie de surface de type Dugdale.

Dans le cas d'une densité d'énergie de surface de type Dugdale, la loi cohésive s'écrit de la manière suivante:

$$\tau_{i3}n_i = \begin{cases} \tau_c & \text{si } 0 < \llbracket w \rrbracket < \delta_c \\ 0 & \text{si } \llbracket w \rrbracket > \delta_c \\ -\tau_c & \text{si } -\delta_c < \llbracket w \rrbracket < 0 \\ 0 & \text{si } \llbracket w \rrbracket < -\delta_c \end{cases} \quad (3.22)$$

Cette loi est représentée sur la figure suivante (Figure 3.4):

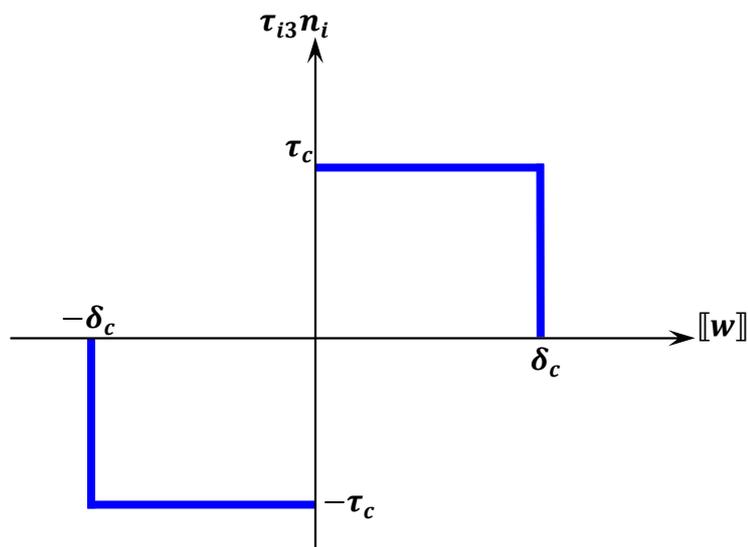


Figure 3.5 : Loi cohésive de type Dugdale en élasticité Antiplane.

Ce la vent dire que les lèvres la fissure créée sont divisées en deux parties.

- Une partie cohésive où l'ouverture est inférieure en valeur absolue à l'ouverture critique  $\delta_c$ , dans cette partie, les lèvres sont soumises à des forces d'interaction d'intensité constante égale à  $\tau_c$ , en valeur absolue.
- Une partie non cohésive où l'ouverture est supérieure en valeur absolue à l'ouverture critique  $\delta_c$ . Dans cette partie, les lèvres sont libres.

## CHAPITRE IV: MODELISATION DU PROBLEME

### 4.1. La structure étudiée

On considère un milieu bidimensionnel semi infini  $\Omega = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, h_2)$  constitué de deux milieux :  $\Omega_1 = (-\infty, +\infty) \times (-h_1, h_2)$  (matériau 1) et  $\Omega_2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, -h_1)$  (matériau 2), le matériau 1 contient un défaut initial de type fissure  $D = [-l_0, +l_0] \times \{0\}$  de longueur  $2l_0$  située sur l'axe  $x_2 = 0$ . On note par  $(e_1, e_2)$ , le base canonique de  $R^2$ , et par  $(x_1, x_2)$  les coordonnées cartésiennes associées à cette base.

Les faces supérieures  $x_2 = h_2$  et inférieure  $x_2 \rightarrow -\infty$  sont soumises à une contrainte de Cisaillement anti-plan uniforme et positive d'intensité  $\tau_\infty$  croissante depuis zéro, tandis que les lèvres de la fissure sont libres (Figure 4.1). Les deux matériaux sont linéairement élastiques homogènes, et isotropes, de modules de cisaillement  $\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement et de masse volumique négligeables. A cause de la nature du chargement, nous sommes dans la situation de l'élasticité antiplane. Par conséquent, la seule composante du vecteur de déplacement est dans la direction  $x_3$ , et indépendante de  $x_3$ .

$$U_1 = U_2 = 0, \quad U_3 = W(x_1, x_2) \quad (4.1)$$

Ou  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont respectivement les composants du vecteur déplacement.

Le champ des contraintes correspondant est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = 0 \\ \tau_{13} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\partial W}{\partial x_1}, & -h_1 < x_2 < h_2 \\ \mu_2 \frac{\partial W}{\partial x_1}, & x_2 < -h_1 \end{cases} \quad \tau_{23} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\partial W}{\partial x_2}, & -h_1 < x_2 < h_2 \\ \mu_2 \frac{\partial W}{\partial x_2}, & x_2 < -h_1 \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

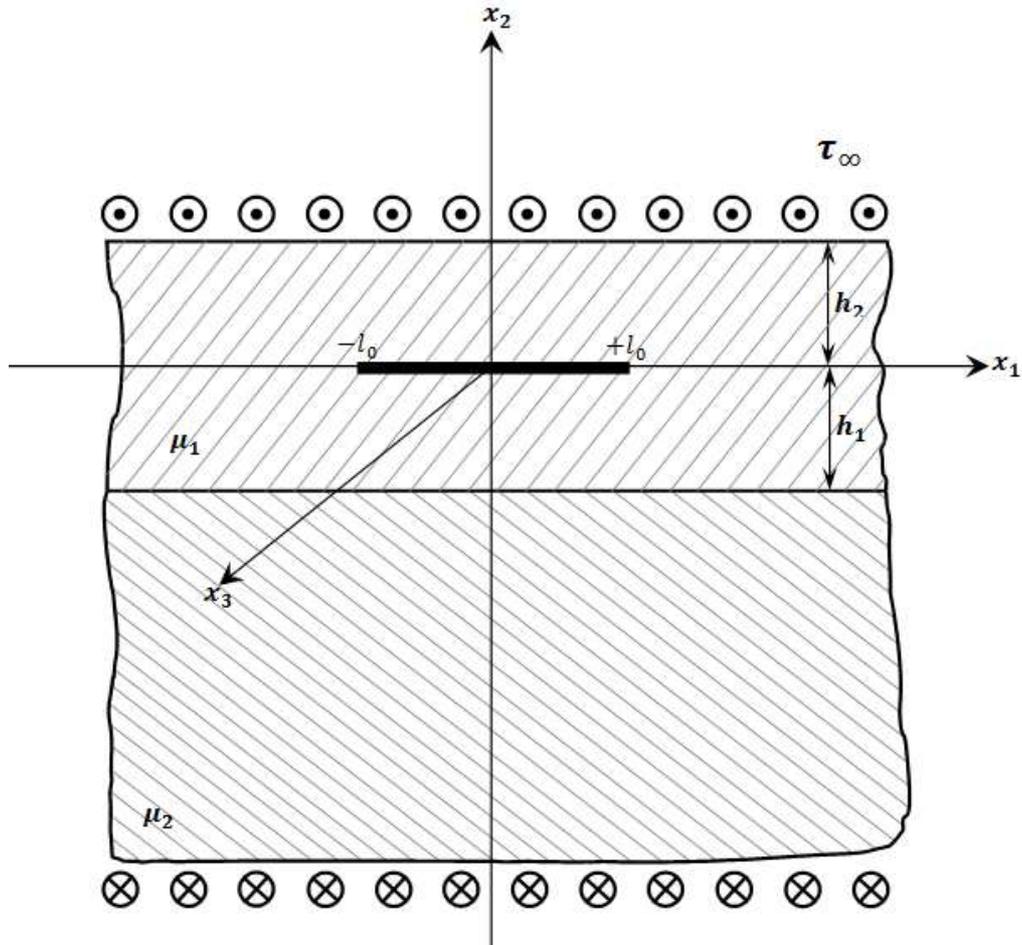


Figure 4.1: Géométrie Du Problème Initial.

#### 4.2. Principe De Superposition

En utilisant le principe de superposition, le problème est décomposé en la somme d'un problème homogène sans fissure et d'un problème non homogène due à la fissure (Figure 4.2). Puisque on s'intéresse à la propagation de la fissure, nous considérons par la suite le problème non homogène.

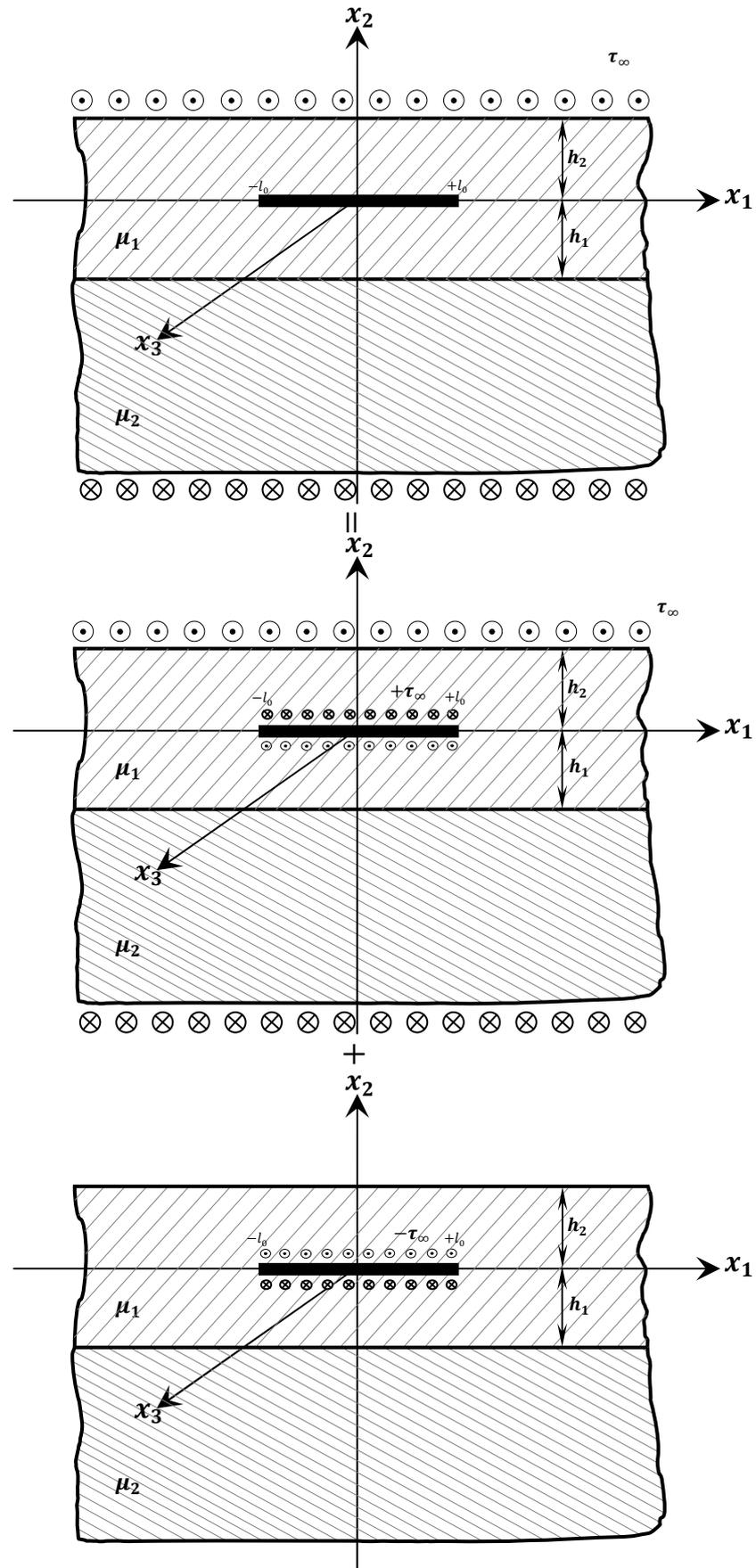


Figure 4.2 : Décomposition du problème (superposition).

### 4.3. Evolution de la fissure initiale avec le chargement

Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe  $x_2 = 0$ , et de façon symétrique depuis les points  $(\pm l_0, 0)$  du défaut initial. On appelle  $\Gamma$  la fissure créée, ses pointes sont situées en  $x_1 = \pm l_a$  :

$$\Gamma = ]-l_a, +l_0] \cup [l_0, +l_a[ \times \{0\}$$

Pour chaque valeur du chargement  $\tau_\infty$  le champ de déplacement solution  $W(x, y)$  correspond au minimum local de l'énergie totale.

On a vu au Chapitre III (paragraphe 2), qu'avec une énergie de surface de type Dugdale, la fissure créée comporte deux zones :

- une zone, proche de la pointe, et dite zone cohésive, où les lèvres sont soumises à des force cohésive de cisaillement d'intensité constante  $\tau_c$ .
- une autre zone proche du défaut initial, et dite zone non cohésive, où les lèvres n'interagissent plus.

Les limites entre ces deux zones sont les pointes  $x_1 = \pm l_c$ . Les valeurs de  $l_a$  et  $l_0$  dépendent évidemment de la valeur de la charge  $\tau_\infty$ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode III pur.

Notons que pour certaines valeurs de  $\tau_\infty$  certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général  $l_a \geq l_c \geq l_0$ , les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ( $\tau_\infty = 0$ ), les conditions initiales sont :  $l_a = l_c = l_0$ .

Dans notre cas, la propagation de la fissure s'effectue selon deux phases : la phase cohésive et la phase de propagation. Les critères d'initiation et de propagation de la fissure sont présentés dans les sections suivantes.

#### 4.3.1. La Phase Cohésive $0 < \tau_\infty < \tau_r$

Durant cette phase, lorsque  $\tau_\infty \neq 0$  une fissure se crée de façon à ce que la contrainte de cisaillement maximale dans le corps soit inférieure à la valeur critique  $\tau_c$ . Lorsque la charge est suffisamment proche de zéro, la longueur de la

fissure est suffisamment petite, donc l'ouverture  $w$  est inférieure à la valeur critique  $\delta_c$ . Par conséquent, toutes les lèvres de la fissure créée sont soumises à une force cohésive d'intensité  $\tau_c$ . Et le champ des déplacements ainsi que le champ des contraintes à l'équilibre sous le chargement  $\tau_\infty$  sont donc solution du problème suivant (figure 4.3) :

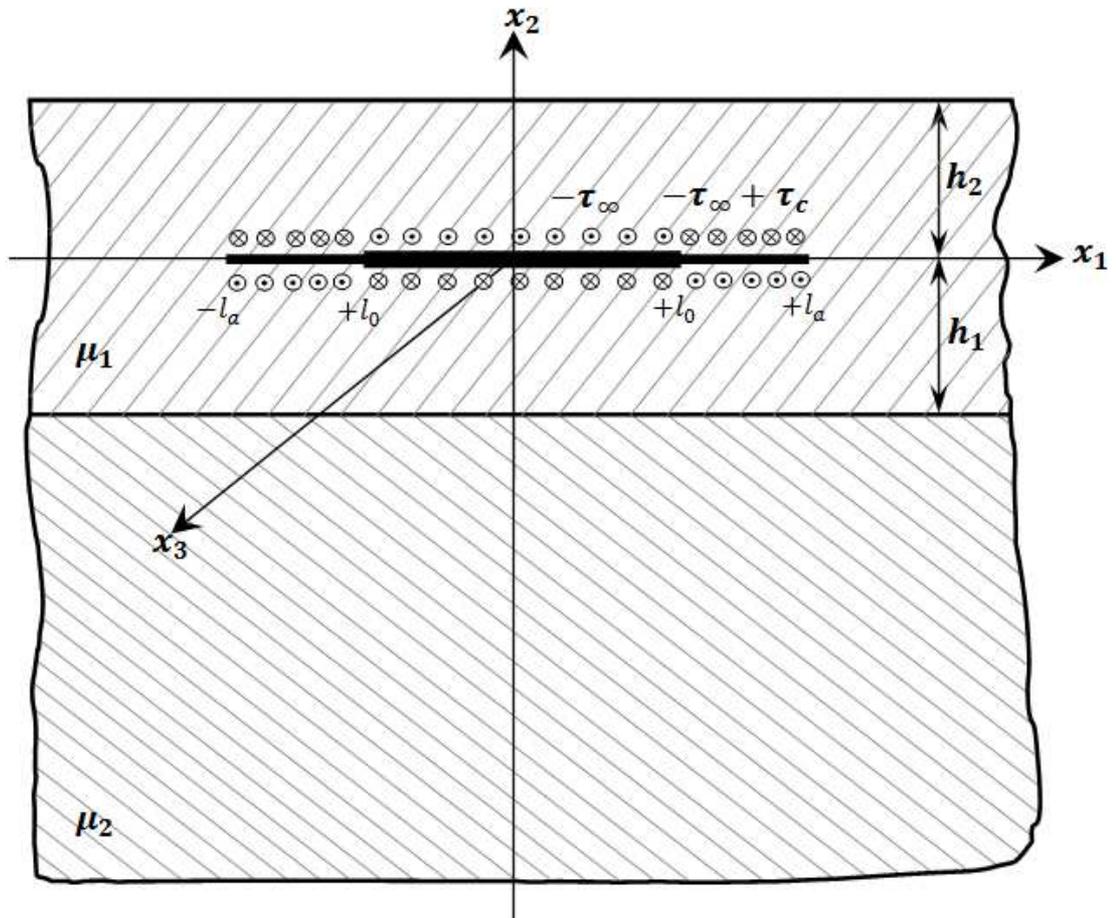


Figure 4.3: Géométrie du problème avec les chargements dans la phase cohésive.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma) \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty & \text{sur } D \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty + \tau_c & \text{sur } \Gamma \\ \tau_{23} = 0 & \text{sur } x_2 = h_2 \\ \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{23} = 0 & \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Afin de compléter la formulation du problème, il reste à définir la loi gouvernant l'évolution de la pointe  $l_a$  de la fissure avec le chargement. Nous exprimons d'abord ce critère en fonction du taux de restitution d'énergie, ensuite nous l'interprétons en termes de facteur d'intensité de contrainte.

L'énergie totale de la structure fissurée à l'équilibre est fonction du chargement  $\tau_\infty$  et de la position  $l_a$  de la pointe de la fissure. En incluant l'énergie de surface due aux forces cohésives, l'énergie totale s'écrit :

$$E(\tau_\infty, l_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus (D \cup \Gamma)} \mu \nabla w \cdot \nabla w d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_c [w] dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty [w] dx_1 \quad (4.4)$$

Où  $\nabla$  Représente l'opérateur gradient bidimensionnel et  $[w]$  Représente le saut du déplacement sur la fissure.

Remarque :

Nous avons vu au Chapitre III (paragraphe 2) que le signe des forces cohésives dépend du signe de  $[w]$ . Dans notre cas, et à cause du chargement, l'ouverture  $[w]$  est toujours positive. Par conséquent, les forces cohésives sont toujours positives.

Dans (4.4),  $w$  est le champ de déplacement solution de (4.3) ( $w$  dépend évidemment de  $\tau_\infty$  et de  $l_a$ ). La longueur de la fissure cohésive doit être telle que l'énergie totale de la structure soit un minimum local pour un chargement donné. La condition de minimum local s'écrit :

$$\exists h > 0, \quad \forall l_a^*: l_a^* \in [l_0, \infty[, |l_a^* - l_a| \leq h, E(\tau_\infty, l_a) \leq E(\tau_\infty, l_a^*) \quad (4.5)$$

Par conséquent, puisque nous cherchons un minimum local  $l_a$  dans l'intervalle  $[l_0, \infty[$ ,  $l_a$  doit être un point stationnaire de  $E(\tau_\infty, \cdot)$  et satisfait la condition suivante:

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\tau_\infty, l_a) = 0 \quad (4.6)$$

Ou en d'autres termes, le taux de restitution de l'énergie totale due à la croissance de la fissure cohésive doit être nul.

Ce critère énergétique est en fait une condition de disparition de la singularité à la pointe de la fissure. En effet, puisque les forces cohésives sont constantes (il suffit qu'elles soient des fonctions régulières de  $x_1$  pour que la singularité soit de la forme qui va suivre), ils ne changent pas la forme de la singularité à la pointe de la fissure qui est la même que pour une fissure non cohésive. Autrement dit, le champ de déplacement s'écrit, [30] (Cours Mécanique de la rupture J-J Marigo) :

$$w(x) = \frac{k_3}{\mu} \sqrt{2r} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \bar{w}(x) \quad (4.7)$$

Où  $(r, \theta)$  représentent les coordonnées polaires avec le pôle  $(l_a, 0)$ ,  $\bar{w}$  est la partie régulière du champ de déplacement et  $K_3$  est le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) en mode III. Bien sûr, la valeur de  $K_3$  n'est pas la même selon la présence ou pas des forces cohésives.

Dans tous les cas, la formule d'Irwin est valable, le taux de restitution d'énergie et le Facteur d'Intensité de Contrainte sont reliés par :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\tau_\infty, l_a) = \frac{k_3^2 \pi}{2\mu} \quad (4.8)$$

Le critère (4.6) est donc équivalent à  $K_3 = 0$ , ce qui veut dire que la longueur de la fissure cohésive doit être telle qu'il n'y ait plus de singularité à la pointe de la fissure. Ceci est conforme à l'idée de Barenblatt que les forces cohésives existent pour corriger la propriété non physique des contraintes infinies induite par la théorie de Griffith.

Cette phase se termine quand l'ouverture de la fissure en  $x_1 = \pm l_0$  atteint la valeur critique  $\delta_c$  du modèle de Dugdale, et par conséquent, une fissure non cohésive doit apparaître.

La valeur correspondante du chargement sera appelée la contrainte de rupture, et est définie par :

$$\tau_r = \sup \{ \tau_\infty > 0 : [w](l_0) < \delta_c \} \quad (4.9)$$

#### 4.3.2. Phase de propagation

Une fois la charge de la rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non cohésive.

En tenant compte de la présence de cette zone, la fissure  $\Gamma$  doit se diviser en deux parties, une partie cohésive  $\Gamma_c$  et une non cohésive  $\Gamma_0$ . On note par  $l_c$  et  $l_a$  leur pointes respectivement (Figure 4.4).

$$\begin{cases} \Omega_c^0 = \frac{\Omega}{(D \cup \Gamma)}, \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_c \\ \Gamma_c = (-l_a, -l_c] \times \{0\} \cup [l_c, l_a) \times \{0\} \\ \Gamma_0 = (-l_c, -l_0] \times \{0\} \cup [l_0, l_c) \times \{0\} \end{cases} \quad (4.10)$$

Le champ des déplacements  $w$  et le champ des contraintes  $\tau$  devront donc être solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega_c^0 \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty & \text{sur } D \cup \Gamma \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty + \tau_c & \text{sur } \Gamma_c \\ \tau_{23} = 0 & \text{sur } x_2 = h_2 \\ \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{13} = 0, \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{23} = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

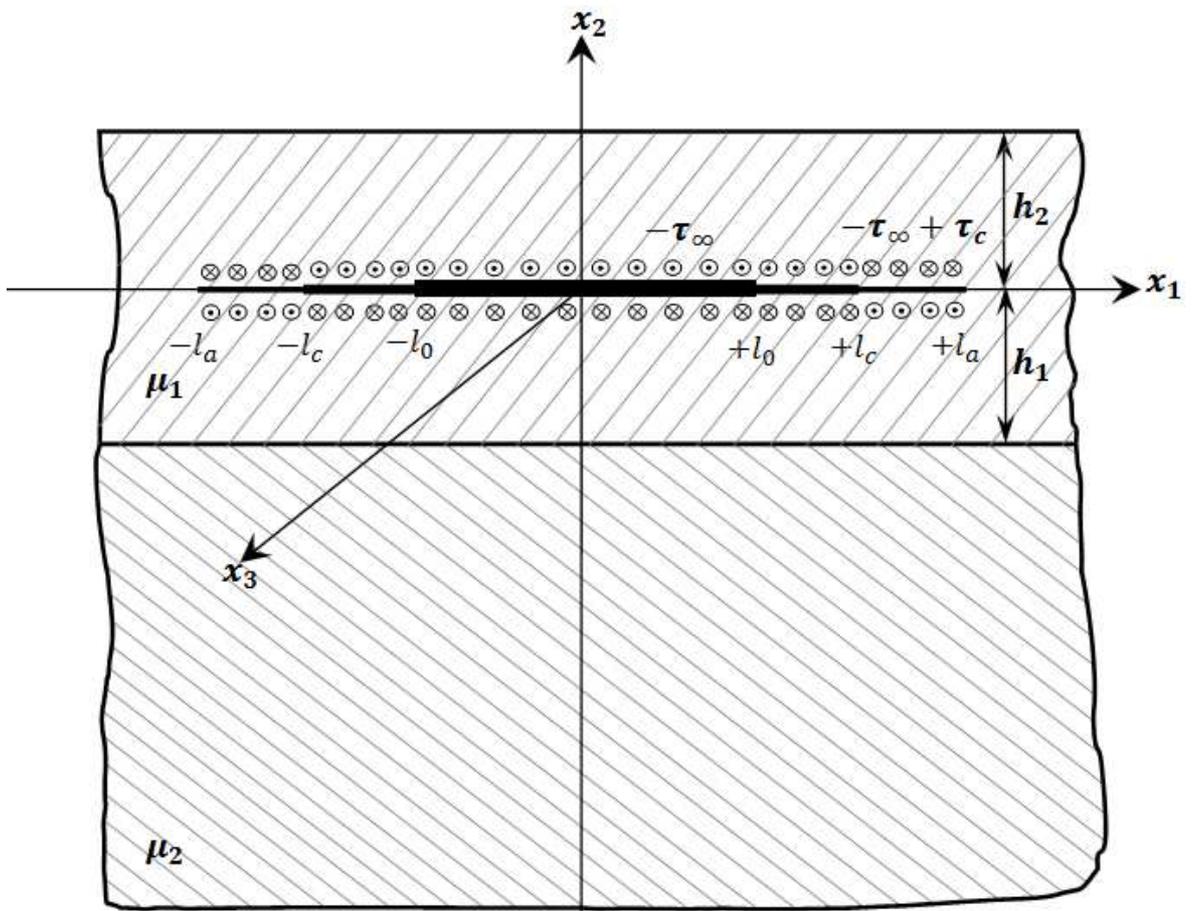


Figure 4.4: Géométrie du problème avec les chargements dans la phase propagation.

Le champ de contrainte  $\tau$  satisfait l'équation variationnelle suivante [31] (Théorème de Travaux Virtuels, Gurtin 1981), pour tout champ scalaire «régulier» sur  $\Omega_c^0$ .

$$\int_{\Omega_c^0} \tau \cdot \nabla v dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty \cdot [v] dx_1 + \int_{\Gamma_c} \tau_c \cdot [v] dx_1 = 0 \quad (4.12)$$

Il reste à définir les lois gouvernant les évolutions des pointes  $l_c$  et  $l_a$ . Comme dans le cas de la phase cohésive, nous exprimons d'abord ces lois en utilisant des arguments énergétiques.

L'énergie de surface de la structure à l'équilibre s'écrit maintenant :

$$E_s(\tau_\infty, l_c, l_a) = \int_{\Gamma} \phi \cdot [w] dx_1 = \int_{\Gamma_c} \tau_c \cdot [v] dx_1 + 2G_c(l_c - l_0) \quad (4.13)$$

Et l'énergie totale de la structure à l'équilibre est donnée par :

$$E(\tau_\infty, l_c, l_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^0} \mu \cdot \nabla w \nabla w dx_1 + \int_{\Gamma_c} \tau_c \cdot [w] dx_1 + \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty \cdot [w] dx_1 + 2G_c(l_c - l_0) \quad (4.14)$$

Les évolutions des pointes  $l_c$  et  $l_a$  avec le chargement  $\tau_\infty$  doit être tel que  $(l_c - l_a)$  est un minimum local de  $E(\tau_\infty, l_c, l_a)$  pour  $\tau_\infty$  fixé. Plus particulièrement, le critère s'écrit :

$$\exists h > 0, \forall (l_c^*: l_a^*): l_0 \leq l_c^* \leq l_a^* < \infty, |l_c^* - l_c| + |l_a^* - l_a| \leq h,$$

$$E(\tau_\infty, l_c, l_a) \leq E(\tau_\infty, l_c^*, l_a^*) \quad (4.15)$$

Si on cherche un minimum local tel que  $l_0 \leq l_c^* \leq l_a^* < \infty$ , on obtient le système de conditions nécessaires reliant  $l_c$  et  $l_a$  à  $\tau_\infty$ :

$$\begin{cases} a) & -\frac{\partial E}{\partial l_a}(\tau_\infty, l_c, l_a) = 0 \\ b) & -\frac{\partial E}{\partial l_c}(\tau_\infty, l_c, l_a) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

En d'autres termes, les pointes des parties cohésive et non cohésive doivent être telles que le taux de restitution de l'énergie totale du à la propagation de l'une des pointes est nul. Nous allons donner une interprétation locale de ces critères. La condition (4.16a) est la même que pour la phase cohésive. Le champ de déplacement est a priori singulier aux pointes  $x_1 = \pm l_a$  et la forme de la singularité est toujours donnée par (4.6). La formule d'Irwin est toujours valable, par conséquent, (4.16a) est toujours équivalent à l'annulation du FIC  $k_3$ . D'autre part, le champ de déplacement n'est pas singulier aux points  $x_1 = \pm l_c$ , car le chargement est simplement discontinu en ces points, la contrainte sautant de  $\tau_c - \tau_\infty$  à  $-\tau_\infty$ . Puisque le champ  $w$  n'est pas singulier aux pointes  $\pm l_c$  on peut dériver formellement sous le signe de l'intégrale  $E(\tau_\infty, l_c, l_a)$  par rapport à  $l_c$ , ce qui donne :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_c}(\tau_\infty, l_c, l_a) = - \int_{\Omega_c^0} \mu \cdot \nabla w \nabla \left( \frac{\partial w}{\partial l_c} \right) dx_1 - \int_{\Gamma_c} \tau_c \cdot \left[ \frac{\partial w}{\partial l_c} \right] dx_1 + \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty \cdot \left[ \frac{\partial w}{\partial l_c} \right] dx_1 - 2G_c \quad (4.17)$$

Où nous avons tenu compte de la symétrie de la structure. Dans (4.17),  $\partial w / \partial l_c$  représente le taux de variation du champ de déplacement à l'équilibre sous le chargement  $\tau_\infty$  du à un accroissement (virtuel) de la zone non cohésive, la pointe de la zone cohésive restant fixe.

En vertu de l'équation variationnelle (4.12), les termes contenant  $\partial w / \partial l_c$  disparaissent, et finalement on obtient :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_c}(\tau_\infty, l_c, l_a) = 2\tau_c \cdot [w](l_c) - 2G_c \quad (4.18)$$

Le facteur 2 est dû à la présence de deux lèvres. Par conséquent, le critère de propagation (4.16b) est équivalent au critère de l'ouverture critique  $[w](l_c) = \delta_c$ . Finalement (4.16) est équivalent à :

$$k_3(\pm l_a) = 0, [w](l_c) = \delta_c \quad (4.19)$$

Nous avons établi dans ce chapitre, les équations du problème dans les phases cohésives et de propagation, ainsi que les critères d'évolutions des pointes  $l_a$  et  $l_c$ .

Nous allons établir l'équation intégrale dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE V : ETABLISSEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE

### 5.1. Introduction

Dans le but, d'étudier la propagation de la fissure dans les phases cohésive et de propagation, nous devons résoudre les problèmes élastiques correspondants ((4.3) et (4.11)). Pour ce faire, nous allons réduire les équations du problème à une équation intégrale singulière en utilisant la transformée de Fourier. Nous suivons en cela les travaux d'Erdogan (voir par exemple [32]). Nous commençons tout d'abord par un bref rappel sur la transformée de Fourier.

### 5.2. Transformée de Fourier

Soit  $f(x)$  une fonction continue avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (5.1)$$

La transformée de Fourier de  $f(x)$  est définie par :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (5.2)$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (5.3)$$

### 5.3. Dérivation de l'équation intégrale

Dans cette partie nous allons utiliser les équations d'équilibre (4.11) établies dans le chapitre précédent dans le cas de la phase de propagation et les conditions aux limites correspondantes pour établir l'équation intégrale. Les équations d'équilibre sont transformées à l'aide de la transformation de Fourier standard en une équation intégrale suivant les travaux de Erdogan [34].

#### 5.3.1. Les données de la transformation

Pour obtenir l'équation intégrale pour le système (4.11) on réécrit les conditions aux limites sur les lèvres de fissure, sur l'axe  $x_2 = 0$  et les bords  $x_2 = h_2$  et  $x_2 = -\infty$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w = 0 & (5.4) \\ \tau_{23} = \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} & -h_1 < x_2 < h_2 \quad (5.5) \\ \tau_{23} = \mu_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} & -\infty < x_2 < -h_1 \quad (5.6) \\ \tau_{23}(x_1, h_2) = 0 & |x_1| < \infty \quad (5.7) \\ \tau_{23}(x_1, -\infty) = 0 & |x_1| < +\infty \quad (5.8) \\ \tau_{23}(x_1, 0^+) = \tau_{23}(x_1, 0^-) & |x_1| < \infty \quad (5.9) \\ \tau_{23}(x_1, -h_1^+) = \tau_{23}(x_1, -h_1^-) & |x_1| < \infty \quad (5.10) \\ \tau_{23}(x_1, 0^+) = \tau_{23}(x_1, 0^-) = \tau(x_1) & |x_1| \leq l_a \quad (5.11) \\ W(x_1, 0^+) = W(x_1, 0^-) & |x_1| > l_a \quad (5.12) \\ W(x_1, -h_1^+) = W(x_1, -h_1^-) & |x_1| < \infty \quad (5.13) \end{array} \right.$$

Avec :

$$\tau(x_1) = \begin{cases} -\tau_\infty, & \text{Si } |x_1| < \alpha \\ -\tau_\infty + \tau_c & \text{Si } \alpha < |x_1| < l_a \end{cases} \quad (5.14)$$

Où  $\alpha = l_0$  dans la phase cohésive, et  $\alpha = l_c$  dans la phase de propagation.

Les équations (5.7) et (5.8) sont les conditions aux limites en contraintes sur la face supérieure et la face inférieure  $x_2 \rightarrow -\infty$  de la structure. L'équation (5.12) représente la condition de la continuité du déplacement sur l'axe horizontal en dehors de la fissure. L'équation (5.11) représente le chargement sur les lèvres de la fissure. L'équation (5.9) est la condition de la continuité du vecteur contrainte sur l'axe  $x_2 = 0$ .

Nous introduisons la transformée de Fourier du champ de déplacement  $W(x, y)$  :

$$\widehat{W}(\lambda, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, x_2) \cdot e^{i\lambda x_1} dx_1 \quad (5.15)$$

Et la transformée de Fourier inverse :

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{W}(\lambda, x_2) \cdot e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad (5.16)$$

En injectant cette expression de  $W(x_1, x_2)$ , dans l'équation (5.4) et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$-\lambda^2 \widehat{W}(\lambda, x_2) + \frac{\partial^2 \widehat{W}(\lambda, x_2)}{\partial x_2^2} = 0 \quad (5.17)$$

En cherchant la solution pour l'équation (5.17), sous la forme  $\widehat{W}(\lambda, x_2) = C(\lambda)e^{nx_2}$ , nous obtenons l'équation caractéristique suivante:

$$n^2 - \lambda^2 = 0 \quad (5.18)$$

Qui admet les racines suivantes :

$$n_{1,2} = \pm|\lambda| \quad (5.19)$$

A cause de la présence de la fissure en  $x_2 = 0$  et de l'interface en  $x_2 = -h_1$ , nous introduisons la définition suivante de la fonction  $\widehat{W}(\lambda, x_2)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{W}(\lambda, x_2) = C_1(\lambda)e^{n_1 x_2} + C_2(\lambda)e^{n_2 x_2} \quad 0 < x_2 < h_2 \end{array} \right. \quad (5.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{W}(\lambda, x_2) = C_3(\lambda)e^{n_1 x_2} + C_4(\lambda)e^{n_2 x_2} \quad -h_1 < x_2 < 0 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{W}(\lambda, x_2) = C_5(\lambda)e^{n_1 x_2} + C_6(\lambda)e^{n_2 x_2} \quad -\infty < x_2 < -h_1 \end{array} \right. \quad (5.22)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de (5.20), (5.21) et (5.22), nous en déduisons les expressions suivantes de  $W$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_1(\lambda)e^{|\lambda|x_2} + C_2(\lambda)e^{-|\lambda|x_2})e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad 0 < x_2 < h_2 \end{array} \right. \quad (5.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_3(\lambda)e^{|\lambda|x_2} + C_4(\lambda)e^{-|\lambda|x_2})e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad -h_1 < x_2 < 0 \end{array} \right. \quad (5.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_5(\lambda)e^{|\lambda|x_2} + C_6(\lambda)e^{-|\lambda|x_2})e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad -\infty < x_2 < -h_1 \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Il nous reste à déterminer les coefficients  $C_k(\lambda)$ , pour  $K = 1, \dots, 6$ . Nous définissons d'abord la fonction densité suivante :

$$\psi(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} [W(x_1, 0^+) - W(x_1, 0^-)] \quad (5.26)$$

De plus, nous avons grâce à l'équation (5.12) :

$$\int_{l_a}^{l_a} \psi(t) dt = 0 \quad (5.27.a)$$

$$\psi(t) = 0 \quad \text{pour } |x_1| \geq l_a \quad (5.27.b)$$

En effet, (5.27a) est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{l_a}^{l_a} \psi(t) dt &= \int_{-l_a}^{l_a} \frac{\partial}{\partial t} [W(t, 0^+) - W(t, 0^-)] \cdot dt \\ &= (W(l_a, 0^+) - W(l_a, 0^-)) - (W(l_a, 0^+) - W(l_a, 0^-)) = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

La dernière égalité est due à la continuité du déplacement aux pointes  $\pm l_a$ .  
(5.27b) est due à la continuité du déplacement en dehors de la fissure.

Nous utilisons maintenant les conditions aux limites. Nous donnons tout d'abord les expressions de la contrainte  $\tau_{23}$  à partir de (5.23), (5.24), (5.25) et (4.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{23} = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (C_1(\lambda) e^{|\lambda|x_2} - C_2(\lambda) e^{-|\lambda|x_2}) e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad 0 < x_2 < h_2 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{23} = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (C_3(\lambda) e^{|\lambda|x_2} - C_4(\lambda) e^{-|\lambda|x_2}) e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad -h_1 < x_2 < 0 \end{array} \right. \quad (5.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{23} = \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (C_5(\lambda) e^{|\lambda|x_2} - C_6(\lambda) e^{-|\lambda|x_2}) e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad -\infty < x_2 < -h_1 \end{array} \right. \quad (5.31)$$

En injectant (5.29) dans (5.7), et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$C_1(\lambda) e^{|\lambda|h_2} - C_2(\lambda) e^{-|\lambda|h_2} = 0 \quad (5.32)$$

En remplaçant (5.31) dans l'équation (5.8), nous déduisons que :

$$C_6 = 0 \quad (5.33)$$

L'équation (5.9) implique:

$$C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = 0 \quad (5.34)$$

En injectant (5.30) et (5.31) dans l'équation (5.10), et en prenant la transformée de Fourier inverse on obtient :

$$\mu_1 C_3(\lambda) e^{-|\lambda|h_1} - \mu_1 C_4(\lambda) e^{|\lambda|h_1} - \mu_2 C_5(\lambda) e^{-|\lambda|h_1} = 0 \quad (5.35)$$

En injectant (5.24) et (5.25) dans (5.13), on obtient :

$$C_3(\lambda) e^{-|\lambda|h_1} + C_4(\lambda) e^{|\lambda|h_1} - C_5(\lambda) e^{-|\lambda|h_1} = 0 \quad (5.36)$$

Nous utilisons maintenant la définition (5.26) de la fonction densité. En y injectant (5.23), (5.24) en prenant la transformée de Fourier inverse et en tenant compte de (5.27b), on obtient :

$$C_1(\lambda) + C_2(\lambda) - C_3(\lambda) - C_4(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \cdot \int_{t_a}^{+t_a} \psi(t) \cdot e^{i\lambda t} dt = F \quad (5.37)$$

Les équations (5.32), (5.34), (5.35), (5.36) et (5.37), constituent le système d'équations:

$$\begin{pmatrix} e^{|\lambda|h_2} & -e^{-|\lambda|h_2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 e^{-|\lambda|h_1} & -\mu_1 e^{-|\lambda|h_1} & -\mu_2 e^{-|\lambda|h_1} \\ 0 & 0 & e^{-|\lambda|h_1} & e^{|\lambda|h_1} & -e^{-|\lambda|h_1} \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

La résolution de ce système donne :

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot (-\mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \cdot e^{2|\lambda|h_1} + \mu_2 \cdot e^{2|\lambda|h_1})}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}} \quad (5.39)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot ((-\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|h_2} + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)})}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}} \quad (5.40)$$

$$C_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot (\mu_1 + \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|(h_1+h_2)} - e^{2|\lambda|h_1})}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}} \quad (5.41)$$

$$C_4 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot (\mu_1 - \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|h_2} - 1)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}} \quad (5.42)$$

$$C_5 = -\frac{F \cdot \mu_1 \cdot (e^{2|\lambda|(h_1+h_2)} - e^{2|\lambda|h_1})}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}} \quad (5.43)$$

Nous remarquons que tous les coefficients ne dépendent que de la seule inconnue  $F$ , et par conséquent de la seule fonction densité  $\psi(x_1)$ . Donc pour résoudre notre problème, il suffit de déterminer  $\psi(x_1)$ .

La fonction  $\psi(x_1)$  sera déterminée par la résolution d'une équation intégrale singulière. Cette équation intégrale sera déduite à partir de la condition de chargement (5.11). En y injectant l'expression (5.30), on trouve :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (C_3(\lambda) e^{|\lambda|x_2} - C_4(\lambda) e^{-|\lambda|x_2}) e^{-i\lambda x_1} d\lambda = \tau(x_1) \quad (5.44)$$

Dans (5.44), le passage à la limite est nécessaire car l'intégrale ne peut pas être évaluée en  $x_2 = 0$ .

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\mu_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i|\lambda|}{\lambda\beta} \cdot \left( \int_{l_a}^{l_a} \psi(t) e^{i\lambda t} dt \right) \cdot [(\mu_1 + \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|(h_1+h_2)} - e^{2|\lambda|h_1}) e^{|\lambda|x_2} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|h_2} - 1) e^{-|\lambda|x_2}] \cdot e^{-i\lambda x_1} d\lambda = \tau(x_1) \quad (5.45)$$

Avec :

$$\beta = -\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}$$

En changeant l'ordre de l'intégration et en introduisant la limite dans l'intégrale, on obtient :

$$\int_{-l_a}^{l_a} K(x_1, t) \cdot \psi(t) dt = \frac{4\pi}{\mu_1} \tau(x_1) |x_1| < l_a \quad (5.46)$$

Avec :

$$K(x_1, t) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i|\lambda|}{\lambda\beta} \cdot [(\mu_1 + \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|(h_1+h_2)} - e^{2|\lambda|h_1}) e^{|\lambda|x_2} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|h_2} - 1) e^{-|\lambda|x_2}] \cdot e^{i\lambda(t-x_1)} d\lambda \quad (5.47)$$

$$K(x_1, t) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2, \lambda) \cdot e^{i\lambda(t-x_1)} d\lambda \quad (5.48)$$

Et :

$$H(x_2, \lambda) =$$

$$\frac{i|\lambda|}{\lambda} \cdot \frac{[(\mu_1 + \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|(h_1+h_2)} - e^{2|\lambda|h_1}) e^{|\lambda|x_2} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot (e^{2|\lambda|h_2} - 1) e^{-|\lambda|x_2}]}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2|\lambda|(h_1+h_2)}} \quad (5.49)$$

On observe que  $H(x_2, -\lambda) = -H(x_2, \lambda)$ ,  $H$  est donc impair en  $\lambda$ . On a donc :

$$\begin{aligned} K(x_1, t) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \left( i \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2, \lambda) \sin(\lambda(t - x_1)) d\lambda \right) \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} -2 \int_0^{+\infty} N(x_2, \lambda) \sin \lambda(t - x_1) d\lambda \end{aligned} \quad (5.50)$$

Avec:

$$N(x_2, \lambda) = \frac{[(\mu_1 + \mu_2) \cdot (e^{2\lambda(h_1+h_2)} - e^{2\lambda h_1})e^{\lambda x_2} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot (e^{2\lambda h_2} - 1)e^{-\lambda x_2}]}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \quad (5.51)$$

Afin d'étudier le comportement singulier possible de l'équation intégrale (5.46) le comportement du noyau  $K(x_1, t)$  doit être examiné. Nous observons que l'intégrale  $N(x_2, \lambda)$  s'annule en  $\lambda = 0$ . Nous observons également que  $N(x_2, \lambda)$  est une fonction continue de la variable  $\lambda$ . Il est clair que toute singularité du noyau  $K(x_1, t)$  ne peut venir que du comportement de  $N(x_2, \lambda)$  au voisinage de l'infini.

Nous étudions donc le comportement de  $N(x_2, \lambda)$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ ,

On a (au voisinage de  $x_2 = 0$ ) :

$$N^\infty(\lambda, x_2) \simeq \frac{(\mu_1 + \mu_2)e^{2\lambda(h_1+h_2)}e^{\lambda x_2}}{(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} = e^{\lambda x_2} \quad (5.52)$$

Afin d'extraire la singularité du noyau de  $K(x_1, t)$ , on ajoute et on retranche  $N^\infty$ :

$$K(x_1, t) = -2 \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \left[ \int_0^{+\infty} (N(\lambda, x_2) - e^{\lambda x_2}) \sin(\lambda(t - x_1)) d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{\lambda x_2} \sin(\lambda(t - x_1)) d\lambda \right] \quad (5.53)$$

La deuxième intégrale de (5.53) peut être évaluée d'une manière explicite, on a :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} e^{\lambda x_2} \cdot \sin(\lambda(t - x_1)) d\lambda = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{t - x_1}{x_2^2 + (t - x_1)^2} = \frac{1}{(t - x_1)} \quad (5.54)$$

Le calcul détaillé de l'intégral (5.54) est donné en ANNEXE C

Et:

$$[N(\lambda, x_2) - e^{\lambda x_2}] = \frac{[(\mu_1 - \mu_2) - (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1}] e^{\lambda x_2} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot (e^{2\lambda h_2} - 1) e^{-\lambda x_2}}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1 + h_2)}} \quad (5.55)$$

Donc :

$$K(x_1, t) = -2 \left[ \frac{1}{(t - x_1)} + \int_0^{+\infty} (N(\lambda, 0) - 1) \sin \lambda(t - x_1) d\lambda \right] \quad (5.56)$$

Dans (5.60), la limite a été introduite sous le signe intégral pour cause de convergence uniforme de l'intégrale impropre.

Nous obtenons on finalement, l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \left[ \frac{1}{(t - x_1)} + k(x_1, t) \right] \cdot \psi(t) dt = \frac{-2\pi}{\mu_1} \tau(x_1) |x_1| < l_a \quad (5.57)$$

Avec la condition :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \psi(t) dt = 0$$

Le noyau  $k(x_1, t)$  est donné par :

$$k(x_1, t) = \int_0^{+\infty} B(\lambda) \cdot \sin \lambda(t - x_1) d\lambda \quad (5.58)$$

Où :

$$B(\lambda) = \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2(\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \quad (5.59)$$

L'équation (5.57) est appelée « équation intégrale singulière de Cauchy du premier type ». La singularité provient du noyau de Cauchy  $1/(t - x_1)$ . Nous présentons la résolution par la suite.

#### 5.4. Résolution de l'équation intégrale

Cette partie est consacré à la résolution de l'équation intégrale singulière (5.57). Le noyau de cette équation contient la singularité de Cauchy. C'est donc une intégrale impropre. Pour l'évaluer, nous utilisons le concept de l'intégration au sens de la valeur principale de Cauchy. Nous commençons par en donner un bref rappel.

#### 5.5. Valeur principale de Cauchy

##### 5.5.1. Définition [33]

Si  $f(x)$  est continue sur  $[a, b]$  sauf au point  $x_0 \in [a, b]$ , donc la valeur principale de Cauchy de l'intégrale est définie par :

$$VP \left( \int_a^b f(x) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right) \quad (5.60)$$

La valeur principale est obtenue en approchant la singularité symétriquement. La valeur principale de l'intégrale peut exister quand l'intégrale diverge. Si l'intégrale existe, elle est égale à sa valeur principale.

Exemple :

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  est non définie. Sa valeur principale est égale à :

$$\begin{aligned}
VP \left( \int_a^b \frac{1}{x} dx \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^a \frac{1}{x} dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ([\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\log|x|]_{\varepsilon}^a) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log|\varepsilon| - \log|\varepsilon|) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans la suite du travail toutes les intégrales singulières (contenant le noyau  $1/(t - x_1)$ ) seront évaluées au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour simplifier l'écriture on omettra d'écrire VP (), et on écrira simplement le signe intégrale.

### 5.6. Résolution de l'équation intégrale

De même que pour l'établissement de l'équation intégrale, nous suivons pour sa résolution les travaux d'Erdogan [34].

Le problème (4.3) de la phase cohésive est un cas particulier du problème (4.11) de la phase de propagation quand  $l_c = l_0$ . La résolution de l'équation intégrale (5.57) sera présentée pour ce dernier cas. La résolution s'effectuera numériquement en utilisant les polynômes de Chebychev qui seront définis plus tard. Ces polynômes sont définis dans l'intervalle  $[-1,1]$ .

Nous devons donc changer l'intervalle de l'équation intégrale (5.57) de  $[-l_a, l_a]$  à  $[-1,1]$ . Nous définissons d'abord les quantités normalisées suivantes :

$$r = \frac{x_1}{l_a}, \quad s = \frac{t}{l_a}, \quad \eta = \frac{l_c}{l_a}, \quad \psi(t) = f(s), \quad k(x_1, t) = L(r, s), \quad \tau(x_1) = \tau(r) \quad (5.61)$$

Par conséquent, l'équation intégrale (5.57) devient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{s-r} + l_a L(r,s) \right] \cdot f(s) ds = \frac{-2}{\mu_1} \cdot \tau(r) |r| \leq 1 \quad (5.62)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0 \quad (5.63)$$

Dans (5.63), le chargement  $\tau(r)$  est donné par :

$$\tau(r) = \begin{cases} -\tau_\infty & \text{si } |r| \leq \eta \\ -\tau_\infty + \tau_c & \text{si } \eta < |r| < 1 \end{cases} \quad (5.64)$$

Où  $\eta = l_c/l_a$

On observe dans (5.64), que le chargement est discontinu. Par conséquent, les méthodes standard de résolution de ce type d'équation intégrale ne sont pas applicables et doivent être modifiées. L'idée est de décomposer  $f(s)$  de la manière suivante [32] :

$$f(s) = h(s) + \phi(s) \quad (5.65)$$

Où  $h(s)$ , est la solution de l'équation intégrale suivante:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{s-r} \cdot h(s) ds = \frac{-2}{\mu_1} \cdot \tau(r) |r| \leq 1 \quad (5.66)$$

Avec la condition supplémentaire suivant :

$$\int_{-1}^{+1} h(s) ds = 0 \quad (5.67)$$

En remplaçant (5.65) dans (5.62) en tenant compte de (5.65) et (5.66), on obtient l'équation intégrale dont  $\phi(s)$  est l'inconnu :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{s-r} + l_a L(r,s) \right] \cdot \phi(s) ds = g(r) |r| \leq 1 \quad (5.68)$$

Où:

$$g(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} l_a L(r,s) \cdot h(s) ds \quad (5.69)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} \phi(t) dt = 0 \quad (5.70)$$

Il est clair à partir de (5.69) que puisque  $L(r,s)$  a un comportement régulier,  $g(r)$  a aussi un comportement régulier. Par conséquent, les techniques numériques de résolution de ce type d'équation intégrale [34] peuvent être directement appliquées sans aucune modification.

La solution analytique de l'équation intégrale (5.66) avec la condition (5.67), est donnée par [6]:

$$h(s) = \frac{2}{\mu_1 \pi} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\tau(r)}{r-s} dr |s| \leq 1 \quad (5.71)$$

En effectuant l'intégration dans (5.71), on obtient:

$$h(s) = h_1(s) + h_2(s) \quad (5.72)$$

Avec :

$$h_1(s) = \frac{2s}{\mu_1 \pi} \cdot (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\tau_\infty \cdot \pi - 2\tau_c \cdot \arccos \eta) \quad (5.73)$$

$$h_2(s) = \frac{2\tau_c}{\mu_1\pi} \cdot \ln \left| \frac{\eta \cdot \sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-\eta^2}}{\eta \cdot \sqrt{1-s^2} + s\sqrt{1-\eta^2}} \right| \quad (5.74)$$

On voit que  $h_2(s)$  présente des singularités logarithmiques aux points  $s = \pm\eta$ .

Il a été montré dans (Erdogan et al. 1973 [34]) que l'équation intégrale singulière (5.68) a l'indice 1 car la fonction inconnue  $\phi(t)$  possède des singularités intégrables aux points  $\pm 1$ .

La solution peut être exprimée comme :  $\phi(t) = w(t) \cdot \varphi(t)$  où  $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$  est la fonction poids associé au polynôme de CHEBYSHEV de premier ordre,  $T_n(t) = \cos(n \cdot \arccos(t))$  et  $\varphi(t)$  est une fonction continue et bornée sur l'intervalle  $[-1, 1]$  laquelle peut être exprimé comme une série tronquée des polynômes de CHEBYSHEV du premier ordre. A cause de la symétrie du problème par rapport à  $x_1$  on a  $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ . Donc, la solution de l'équation (5.68) s'exprime comme suit :

$$\phi(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=1}^N A_n \cdot T_{2n-1}(t) \quad (5.75)$$

Dans (5.75) nous avons pris que les polynômes de Chebyshev à indice impair, car  $T_{2n-1}(-t) = -T_{2n-1}(t)$ , et  $\phi(t)$  est une fonction impaire à cause de la symétrie du problème.

On observe qu'avec l'expression (5.75), la condition (5.70) est automatiquement vérifiée. En effet :

$$\int_{-1}^{+1} \phi(t) dt = \sum_{n=1}^N A_n \cdot \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{2n-1}(t) dt = 0$$

La deuxième intégrale est nulle car l'intégrand est impaire.

Substituons l'équation (5.75) dans l'équation (5.68) en utilisant les relations suivantes :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(s) \cdot (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}}{s-r} ds = \begin{cases} U_{n-1}(r), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (5.76)$$

Où :

$$U_n(r) = \frac{\sin((n+1) \cdot \arccos(r))}{\sqrt{1-r^2}} \quad (5.77)$$

Désigne les polynômes de Chebyshev de second ordre. On obtient:

$$\sum_{n=1}^N A_n \cdot [U_{2n-2}(r) + H_n(r)] = g(r) \quad |r| < 1 \quad (5.78)$$

Où :

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot l_a \cdot L(r,s) \cdot T_{2n-1}(s) ds \quad (5.79)$$

Afin de déterminer les coefficients  $A_n$ , des points de collocation

$r = r_j, j = 0, 1, \dots, N$  Sont choisis afin de réduire l'équation (5.78) à un système d'équations algébriques linéaires. Le choix de ces points n'est pas très critique, nous choisissons les racines des polynômes de Chebychev  $T_{2N-1}$ :

$$T_{2N-1}(r_j) = 0, \quad r_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)}\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.80)$$

Utilisant les points de collocation donnés par l'équation (5.80) dans l'équation (5.78), on arrive à un système de  $N$  équations à  $N$  inconnus ( $A_1, \dots, A_N$ ) qui s'écrit :

$$\sum_{n=1}^N A_n \cdot [U_{2n-2}(r_j) + H_n(r_j)] = g(r_j) \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.81)$$

La valeur de  $N$  du système d'équations (5.81) sera déterminée à l'aide d'une étude de convergence. Cette convergence dépendra des paramètres du problème  $h_1, h_2, \mu_1, \mu_2$  et sera étudiée dans le prochain Chapitre.

Les valeurs de  $H_n(r_j)$ , du membre gauche de l'équation (5.81), sont calculées à l'aide de l'équation (5.79). Les intégrales sont évaluées numériquement, en utilisant les formules d'intégration de Gauss Chebyshev [5], qui s'écrit:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \sum_1^n \frac{f(t_k)}{n}, \quad t_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad (5.82)$$

La valeur de  $g(r_j)$  du coté droit de l'équation (5.82) est déterminée à partir de l'équation (5.69) qui avec l'équation (5.72) peut se mettre sous la forme suivante :

$$g(r) = -\left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} l_a \cdot L(r, s) \cdot h_1(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} l_a \cdot L(r, s) \cdot h_2(s) ds\right) \quad (5.83)$$

La première intégrale de l'équation (5.83), est évaluée numériquement, en utilisant la formule précédente de GAUSS-CHEBYSHEV. Puisque  $h_2(s)$  présente des singularités logarithmique en  $\pm\eta$ , la seconde intégrale est divisée en trois intégrales, comme suit:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} l_a L(r, s) \cdot h_2(s) ds \\ &= \int_{-1}^{-\eta} l_a L(r, s) \cdot h_2(s) ds + \int_{-\eta}^{+\eta} l_a L(r, s) \cdot h_2(s) ds \\ &+ \int_{+\eta}^{+1} l_a L(r, s) \cdot h_2(s) ds \end{aligned} \quad (5.84)$$

Chacune des intégrales du membre droit de l'équation précédente est évaluée à l'aide de GAUSS-CHEBYSHEV.

Considérons maintenant le terme  $L(r, s)$  de l'équation (5.84), après introduction des entités normalisées :

$$L(r, s) = \int_0^{+\infty} \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2(\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \cdot \sin(\lambda l_a(s-r)) d\lambda \quad (5.85)$$

On observe que  $L(r, s)$  est une intégrale impropre. L'intégrand est équivalent au voisinage de  $+\infty$  à  $e^{-2\lambda h_1}$  (ou  $e^{-2\lambda h_2}$ ) qui tend très rapidement vers 0 lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,  $L(r, s)$  sera décomposé de la manière suivante :

$$L(r, s) = \int_0^A \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2(\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \cdot \sin(\lambda l_a(s-r)) d\lambda \\ + \int_A^{+\infty} \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2(\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \cdot \sin(\lambda l_a(s-r)) d\lambda \quad (5.86)$$

Pour une valeur de  $A$  suffisamment grande, la deuxième intégrale devient négligeable, et  $L(r, s)$  sera évaluée à l'aide de la première intégrale.

Cette évaluation s'effectuera numériquement à l'aide de la méthode de Gauss Chebychev. La valeur numérique de  $A$  dépendra des paramètres :  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et sera déterminée dans le prochain Chapitre.

### 5.7. Formule donnant le facteur d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte en pointe de fissure est donné par (Démonstration en Annexe C) :

$$k_3(\pm l_a) = \frac{-\mu_1}{2\sqrt{l_a}} \lim_{x_1 \rightarrow \pm l_a} \sqrt{(l_a^2 - x_1^2)} \cdot \psi(x_1) = -\frac{\mu_1}{2} \sqrt{l_a} \cdot \lim_{s \rightarrow \pm 1} \sqrt{(1 - s^2)} \cdot f(s) \quad (5.87)$$

En introduisant (5.65), (5.72) et (5.75), dans (5.87) on obtient :

$$k_3(\pm l_a) = \sqrt{l_a} \cdot \left( \tau_\infty - \frac{2}{\pi} \tau_c \arccos(\eta) - \frac{\mu_1}{2} \sum_{n=1}^N A_n \right) \quad (5.88)$$

### 5.8. Formule donnant l'ouverture de la fissure

L'ouverture de la fissure en  $x_1 \in [-1, +1]$  est définie par :

$$\delta(x_1) = w(x_1, 0^+) - w(x_1, 0^-) = \int_{-l_a}^{x_1} \psi(t) dt = l_a \int_{-1}^r f(s) ds \quad (5.89)$$

De (5.72) et (5.75) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta(r) = \frac{2l_a}{\pi\mu_1} & \left( \pi\tau_\infty \sqrt{1-r^2} \right. \\ & + \tau_c \left( r \ln \frac{r\sqrt{1-\eta^2} - \eta\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-\eta^2} + \eta\sqrt{1-r^2}} + \eta \ln \frac{(\sqrt{1-r^2} + \sqrt{1-\eta^2})^2}{r^2 - \eta^2} \right. \\ & \left. \left. - 2 \arccos(\eta) \sqrt{1-r^2} \right) \right) - l_a \sqrt{1-r^2} \sum_{n=1}^N \frac{A_n U_{n-1}(r)}{n} \quad (5.90) \end{aligned}$$

Pour obtenir (5.90), on a utilisé la relation suivante :

$$\int_{-1}^s \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n} U_{n-1}(s) \sqrt{1-s^2} \quad (5.91)$$

On observe à partir de l'équation (5.90), que  $\delta(r)$  n'est pas définie en  $\pm\eta$ , à cause des singularités logarithmiques. L'ouverture de la fissure en cas points et obtenue en passant à la limite de  $\delta(r)$  lorsque  $\rightarrow \pm\eta$ .

$$\begin{aligned} \delta\left(\pm \frac{l_c}{l_a}\right) = \frac{2l_a}{\pi\mu_1} & \left( \pi \sqrt{1 - \left(\frac{l_c}{l_a}\right)^2} \left( \tau_\infty - \frac{2\tau_c}{\pi} \arccos\left(\frac{l_c}{l_a}\right) - 2\tau_c \left(\frac{l_c}{l_a}\right) \ln\left(\frac{l_c}{l_a}\right) \right) \right) \\ & - l_a \sqrt{1 - \left(\frac{l_c}{l_a}\right)^2} \sum_{n=1}^N \frac{A_n U_{2n-2}\left(\frac{l_c}{l_a}\right)}{2n-1} \quad (5.92) \end{aligned}$$

## CHAPITRE VI : ETUDE PARAMETRIQUE ET COMPARAISON AVEC LE MODELE DE GRIFFITH

Dans ce chapitre on étudiera l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué en faisant varier un certain nombre de paramètres du problème. Plus particulièrement on fera varier les paramètres suivants :

- $\mu_1/\mu_2$  afin d'étudier l'influence de la différence de rigidité entre le revêtement et le substrat.
- $h/l_0$  afin d'étudier l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à l'épaisseur du revêtement.
- $\delta_c/l_0$  afin d'étudier l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à la longueur caractéristique du modèle de Dugdale.
- $h_1/h$  afin d'étudier l'influence du positionnement de la fissure dans le revêtement.

Pour chaque étude, on doit d'abord déterminer les paramètres  $N$ ,  $n$  et  $A$  (Chapitre V) nécessaires à la résolution numérique de l'équation intégrale. Cette détermination s'effectuera sur la base d'une étude de convergence.

Pour  $N$  on se basera la convergence du FIC  $k_3(l_a)$ . Pour  $n$  on étudiera la convergence d'une intégrale particulière à l'aide de la méthode de Gauss-Chebyshev, par rapport au résultat trouvé par le logiciel Maple. Pour  $A$ , on se basera sur la convergence de l'intégrale impropre de l'équation (6.1).

On a vu au Chapitre V que l'évolution de la fissure suit deux phases :

- Une phase cohésive.
- Une phase de propagation.

Nous présentons tout d'abord la procédure numérique utilisée dans chaque phase.

### 6.1. La phase cohésive

On a établi au chapitre V le critère de propagation des pointes  $\pm la$ . On a montré que la longueur de la fissure cohésive est telle que la singularité des contraintes aux pointes  $\pm la$  soit nulle et donc que le facteur d'intensité des contraintes  $k_3(\pm la) = 0$ .

D'un point de vue pratique, il est facile de calculer  $\tau_\infty$ , supposant  $l_a$  connue.

En utilisant la linéarité de problème élastique, le Facteur d'intensité des contraintes  $k_3(l_a)$  est donné par la formule suivante :

$$k_3(l_a) = \tau_\infty k_3^\infty(l_a) + \tau_c k_3^c(l_a) \quad (6.1)$$

Où  $\tau_\infty k_3^\infty(l_a)$  et  $\tau_c k_3^c(l_a)$  sont les FIC du problème sans forces cohésives, avec  $\tau_\infty = 1$ , et du problème avec des forces cohésives unitaires  $\tau_c = 1$  et  $\tau_\infty = 0$ , respectivement.

$k_3(l_a) = 0$  Donne :

$$\tau_\infty = -\frac{\tau_c k_3^c(l_a)}{k_3^\infty(l_a)} \quad (6.2)$$

De même l'ouverture de la fissure en un point  $x_1$  est donnée par :

$$\delta(x_1) = \tau_\infty \delta^\infty(x_1) + \tau_c \delta^c(x_1) \quad (6.3)$$

Où  $\delta^\infty(x_1)$  et  $\delta^c(x_1)$  sont respectivement, l'ouverture sans forces cohésives et  $\tau_\infty = 0$ , et avec des forces cohésives unitaires  $\tau_c = 1$  et  $\tau_\infty = 0$ .

Par conséquent, la procédure numérique choisie pour la phase cohésive est la suivante :

- 1- On se donne une valeur initiale de  $l_a > l_0$ .
- 2- On pose  $\tau_\infty = 1$  et  $\tau_c = 0$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_3^\infty(l_a)$  et  $\delta^\infty(l_0)$  (équations (5.88) et (5.92)).
- 3- On pose  $\tau_\infty = 0$  et  $\tau_c = 1$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_3^c(l_a)$  et  $\delta^c(l_0)$ .
- 4- On calcule  $\tau_\infty$  tel que  $k_3(l_a) = 0$  (équation (6.2))
- 5- On calcule  $\delta(l_0)$  (équation (6.3)), et on compare à  $\delta_c$ .
- 6- Si  $\delta(l_0) < \delta_c$ , on incrémente  $l_a$  et on revient en 2.

- 7- Si  $\delta(l_0) > \delta_c$ , on recherche la valeur de  $l_a$  et  $\tau_\infty$  tel que  $k_3(l_a) = 0$  qui nous donne  $\delta(l_0) = \delta_c$  par dichotomie.
- 8- la valeur finale de  $\tau_\infty$  est la charge de rupteur  $\tau_r$ .
- 9- Fin.

## 6.2. Phase de propagation

Dans cette phase, il y a deux pointes : une pointe non cohésive  $l_c$  et une pointe cohésive  $l_a$ . Les critères d'évolution de ces pointes ont été établis au Chapitre III. Nous choisissons de piloter le calcul en prescrivant la valeur de la pointe non cohésive  $l_c$ .

Les valeurs de la charge  $\tau_\infty$  et celle de la pointe cohésive  $l_a$  sont déterminés en résolvant le système d'équations non linéaire suivant :

$$k_3(\pm l_a) = 0, \quad \delta(\pm l_c) = \delta_c \quad (6.4)$$

La procédure numérique utilisée est la suivante :

- 1- On se donne une valeur initiale de  $l_c > l_0$ .
- 2- On choisit une valeur arbitraire de  $l_a > l_c$ .
- 3- On pose  $\tau_\infty = 1$  et  $\tau_c = 0$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_3^\infty(l_a)$  et  $\delta^\infty(l_c)$ .
- 4- On pose  $\tau_\infty = 0$  et  $\tau_c = 1$ , on résout le problème élastique et on calcule  $k_3^c(l_a)$  et  $\delta^c(l_c)$ .
- 5- On calcule  $\tau_\infty$  de telle sorte que  $\delta(\pm l_c) = \delta_c$ . La formule est obtenue en utilisant le principe de superposition (linéarité du problème élastique), elle est donnée par :

$$\tau_\infty = \frac{\delta_c - \tau_c \delta^c(l_c)}{\delta^\infty(l_c)} \quad (6.5)$$

- 6- On calcule  $k_3(l_a)$  si  $|k_3(l_a)| \leq$  à la tolérance choisie, on incrémente  $l_c$  et on revient en 2.
- 7- Si  $|k_3(l_a)| > 1$ . à la tolérance choisie, on recherche la bonne valeur de  $l_a$  (et de  $\tau_\infty$ ) par dichotomie. On incrémente  $l_c$  et on revient en 2.
- 8- Fin.

### 6.3. Etude de la convergence

#### 6.3.1. Evaluation numérique de A

Pour évaluer  $A$  (équation(5.95)), on doit faire un test et on doit donc donner des valeurs à  $s, r$  et  $l_a$ . Les valeurs de  $s$  et de  $r$  sont choisies aléatoirement dans l'intervalle  $[-1,1]$ , on prend  $r = -1$  et  $s = 1$ ,  $l_a$  représente la longueur de la fissure, plus cette valeur est élevée plus l'intégrale est difficile à évaluer numériquement, on choisit la valeur maximale dans nos calculs  $l_a = 10$ .

L'évaluation numérique de l'intégrale à l'aide du logiciel MAPLE avec la fonction (**Evalf**) a donné :

$$\int_0^{+\infty} \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2(\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \cdot \sin 20\lambda \, d\lambda = -0.5665450176 \quad (6.6)$$

Si on limite l'intégration sur l'intervalle  $[0.16]$  on obtient une bonne convergence :

$$\int_0^{16} \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2(\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda(h_1+h_2)}} \cdot \sin(20\lambda) \, d\lambda = -0.5665450176 \quad (6.7)$$

En conclusion on peut limiter l'intégration sur l'intervalle  $[0.16]$  et l'intégrale  $L(r, s)$  prend la forme suivante :

$$L(r, s) = \int_0^{16} \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda \cdot (h_1+h_2)}} \cdot \sin(\lambda l_a(s - r)) \cdot d\lambda \quad (6.8)$$

L'intégrale ainsi définie est évaluée à l'aide de la formule de GAUSS-CHEBYSHEV avec un changement de variable pour passer de l'intervalle  $[0.16]$  à l'intervalle  $[-1.1]$ .

$$L(r, s) = \frac{A}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{-(\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_1} - (\mu_1 - \mu_2) \cdot e^{2\lambda h_2} + 2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)}{-\mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot e^{2\lambda \cdot (h_1+h_2)}} \cdot \sin(\lambda l_a(s - r)) \cdot d\gamma \quad (6.9)$$

Où :

$$\lambda = \frac{A}{2}(\gamma + 1) \quad \text{et} \quad A = 16$$

### 6.3.2. Evaluation de $N$

Pour déterminer  $N$ , on fixe tout d'abord  $n$  à 100, et on calcule la valeur du facteur d'intensité de contraintes  $K_3$  pour différentes valeurs de  $N$  à partir de la formule suivante :

$$k_3(\pm l_a) = \sqrt{l_a} \cdot \left( \tau_\infty - \frac{2}{\pi} \tau_c \arccos(\eta) - \frac{\mu_1}{2} \sum_{n=1}^N A_n \right)$$

Pour les différents paramètres du problème, on prend les valeurs suivantes :

$$\tau_\infty = 40 \text{ MPa}, \quad l_a = 10 \text{ mm}, \quad l_c = 1 \text{ mm}, \quad \mu_1 = 1100 \text{ MPa}, \quad \mu_2 = 1000 \text{ MPa}, \\ n = 100$$

Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 6.1 et la figure (6.1), ci-dessous.

Les résultats obtenus de  $k_3(N)$  sont représentés sur ce tableau

Tableau 6.1 : calcul de  $k_3$  en fonction de  $N$ .

$N$	$k_3$
1	-126.297825172769900
2	-125.191505154091200
5	-164.949840827850900
10	-166.328559766565000
15	-166.322096029993800
20	-166.322010362236500
30	-166.322012315417600
40	-166.322011437271600
50	-166.322012696881600
60	-166.322008827373100
70	-166.322020983088200
80	-166.322096164140600
90	-166.322007115721900
100	-166.322012969588100

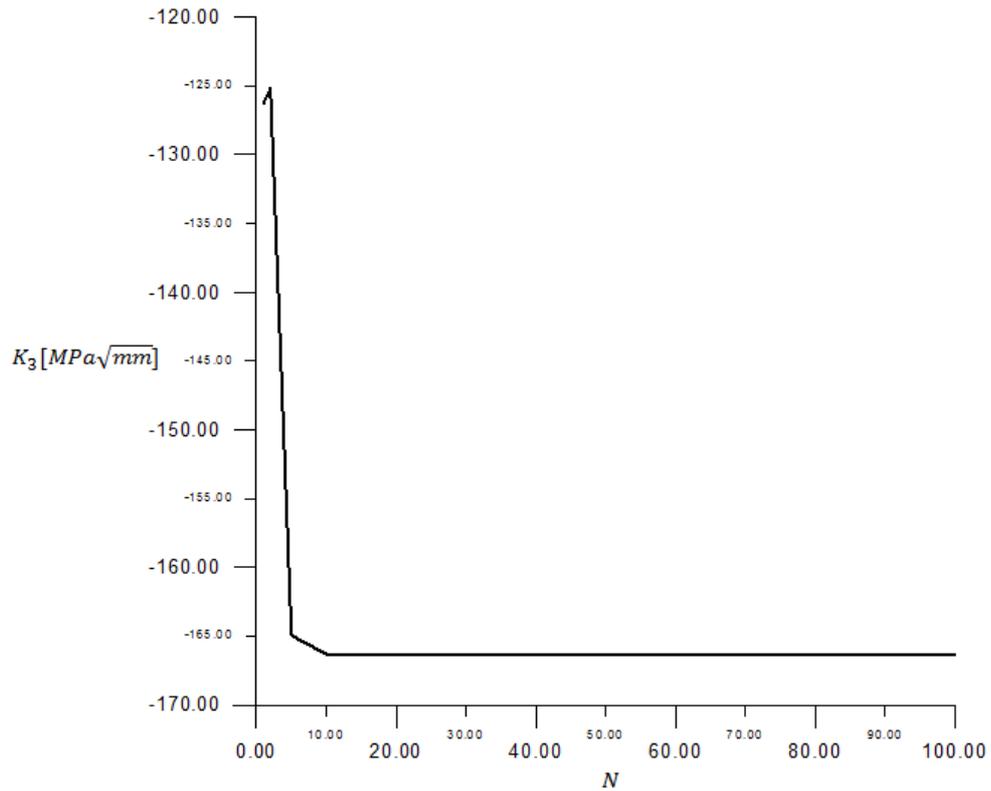


Figure 6.1 : valeur de  $k_3(l_a)$  en fonction de nombre  $N$ .

La figure 6.1 montre qu'à partir de  $N = 20$ , il y'a convergence de la valeur de  $K_3$ .

### 6.3.3. Evaluation de $n$

On fixe la valeur de  $N$  à 20. Et on calcule la valeur de  $K_3$  pour différentes valeurs de  $n$ ,

On fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

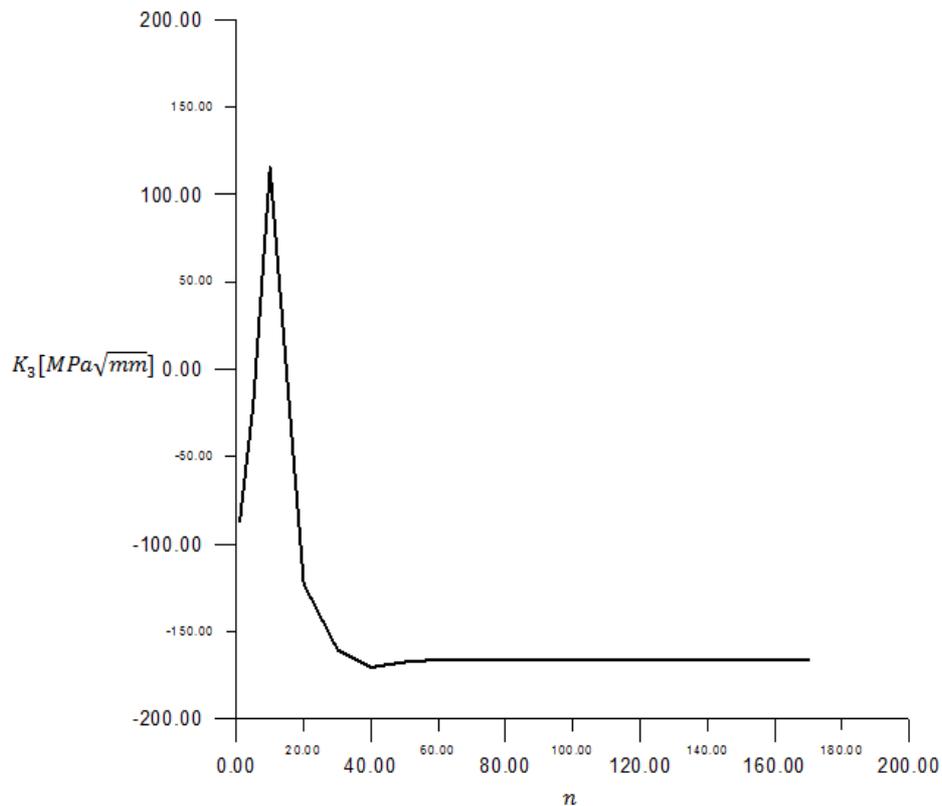
$$\tau_{\infty} = 40 \text{ MPa}, l_a = 10 \text{ mm}, l_c = 1 \text{ mm}, h_1 = 1 \text{ mm}, h_2 = 1 \text{ mm}, \mu_1 = 1100 \text{ MPa},$$

$$\mu_2 = 1000 \text{ MPa},$$

Les résultats obtenus de  $k_3(n)$  sont représentés sur ce tableau

Tableau 6.2 : calcul de  $k_3$  en fonction de  $n$ .

$n$	$k_3$
1	-86.673808251921730
5	-20.333592235840490
10	-115.249968612742200
20	-122.872130839303100
30	-160.381908339068300
40	-170.496936719648600
50	-167.475399426728800
60	-166.186090175915000
70	-166.301516248597900
80	-166.313903498138800
90	-166.318989925844900
100	-166.322010362236500
110	-166.323885320197700
120	-166.325107527425400
130	-166.325937446955900
140	-166.326520847535500
150	-166.326943326979000
160	-166.327257258475400
170	-166.327495846372400

Figure 6.2 : valeur de  $k_3(l_a)$  en fonction de nombre  $n$ .

La figure 6.2 montre qu'à partir de  $n = 100$ ,  $k_3$  converge.

En conclusion, dans tout ce qui suit les calculs seront effectuées avec  $N = 20$ ,  $n = 100$ , et  $A = 16$ .

#### 6.4. Etude paramétrique

##### 6.4.1. Etude de l'influence du paramètre $\mu_1/\mu_2$

Dans cette partie on fixe  $\mu_2$  et on fait varier  $\mu_1$ , et on fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72 \text{ MPa}, l_0 = 1 \text{ mm}, h_1 = 1 \text{ mm}, h_2 = 1 \text{ mm}, \delta_c = 0.001 \text{ mm}, \mu_2 = 1000 \text{ MPa}$$

On choisit trois valeurs pour le paramètre  $\mu_1/\mu_2$ : 0.1, 1 et 10.

Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 3 et la figure (6.3), ci-dessous.

Tableau 6.3 : contrainte de rupture en fonction de  $\mu_1/\mu_2$ .

$\tau_r/\tau_c$	$\mu_1/\mu_2$
2.820316056825659E-002	0.1
8.596288476697583E-002	1
2.550315397218685E-001	10

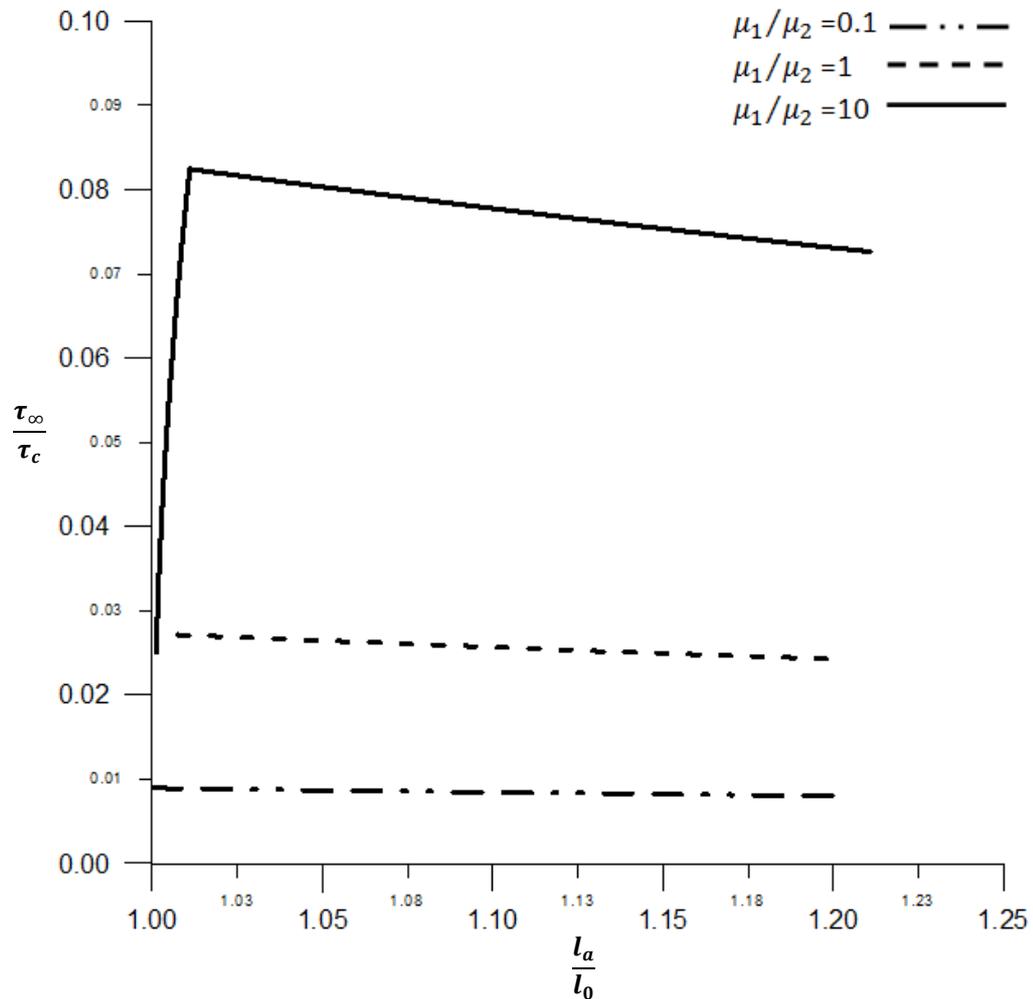


Figure 6.3: Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de  $\mu_1/\mu_2$ .

#### 6.4.2. Etude de l'influence du paramètre $h/l_0$

Dans cette partie on fixe  $l_0 = 1 \text{ mm}$  et on fait varier  $h = h_1 + h_2$  (figure 4.3). On suppose que la fissure est située au milieu du revêtement ( $h_1 = h_2$ ). On fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72 \text{ MPa}, \quad \delta_c = 0.0001 \text{ mm}, \quad \mu_1 = 1100 \text{ MPa}, \quad \mu_2 = 1000 \text{ MPa}$$

$$l_0 = 1 \text{ mm}$$

Pour le paramètre  $h/l_0$ , on choisit les valeurs suivantes : 0.1, 1 et 10.

Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 4 et la figure (6.4), ci-dessous.

Tableau 6.4 : contrainte de rupture en fonction de  $h/l_0$ .

$\tau_r/\tau_c$	$h/l_0$
4.756635190994211E-002	0.1
8.993885615194310E-002	1
9.829748905271712E-002	10

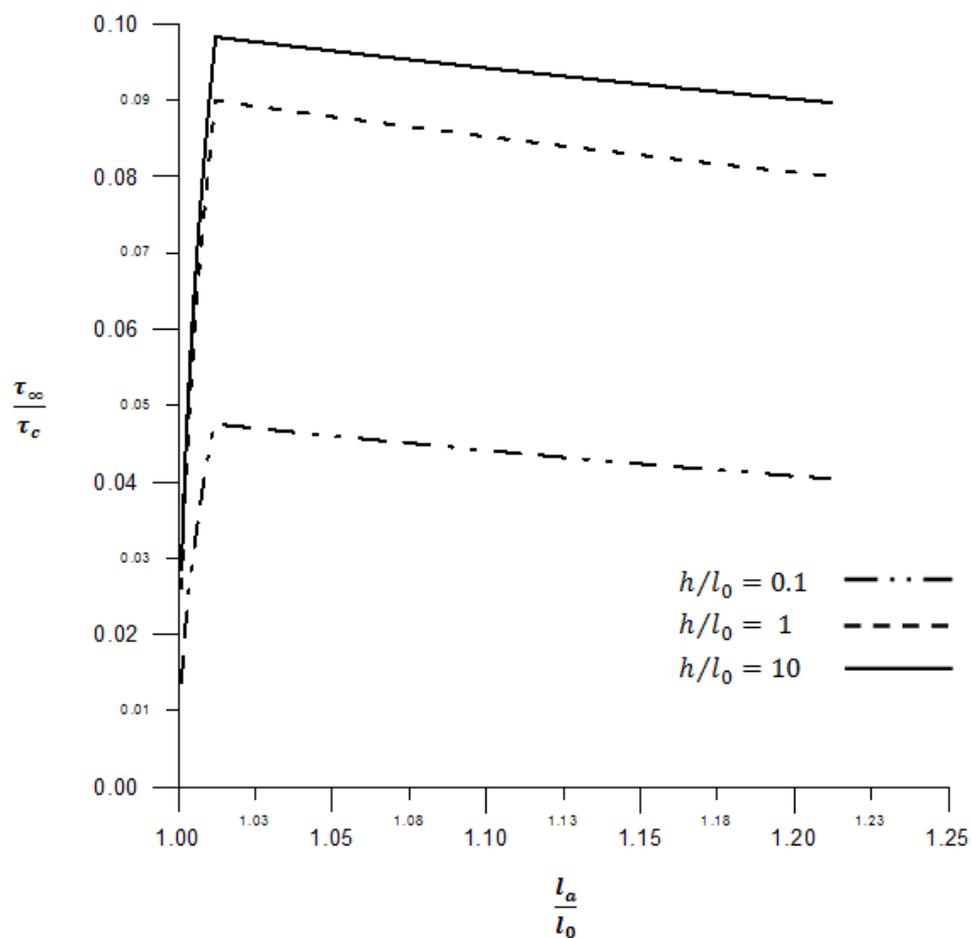


Figure 6.4: Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de  $h/l_0$ .

### 6.4.3. Etude de l'influence du paramètre $\delta_c/l_0$

Dans cette partie on fixe  $l_0$  à la valeur de  $1\text{mm}$ , et on fait varier l'ouverture critique  $\delta_c$ . On fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72 \text{ MPa}, \quad \mu_1 = 1100 \text{ MPa}, \quad \mu_2 = 1000 \text{ MPa}, \quad h_1 = h_2 = 1\text{mm}, \quad l_0 = 1\text{mm}$$

Les résultats obtenus sont représentés sur le tableau 5 et la figure (6.5), ci-dessous.

Tableau 6.5 : contrainte de rupture en fonction de  $\delta_c/l_0$ .

$\tau_r/\tau_c$	$\delta_c/l_0$
2.850249920605627E-002	0.1
8.993885615194312E-002	1
2.480917480417014E-001	10
6.512421877166822E-001	100
9.500560671673792E-001	1000
9.797223907935861E-001	2000
9.861701562021195E-001	3000

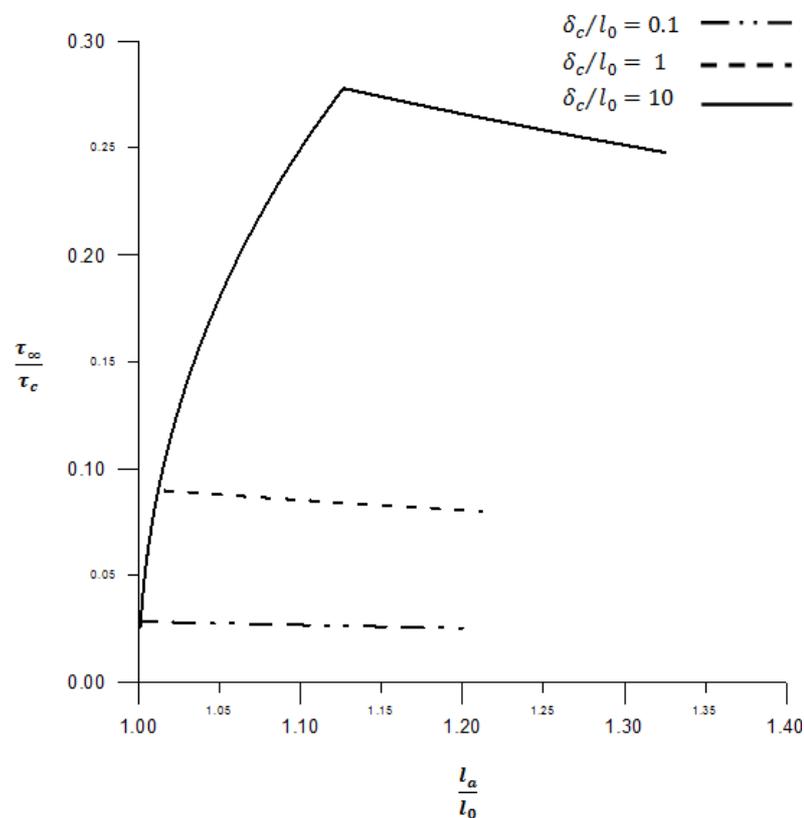


Figure 6.5: Relation entre la charge et la longueur de la fissure pour différentes valeurs de  $\delta_c/l_0$ .

#### 6.4.4. Etude de l'influence du paramètre $h_1/h$

Dans cette partie on fixe  $h = 10$  (figure 4.3). On fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72 \text{ MPa}, \delta_c = 0.001 \text{ mm}, \mu_1 = 1100 \text{ MPa}, \mu_2 = 1000 \text{ MPa}, l_0 = 1 \text{ mm}, h_1 + h_2 = h.$$

Tableau 6.6 : contrainte de rupture en fonction de  $h_1/h$ .

$h_1/h$	$\tau_r/\tau_c$
0	9.5893684127469736E-002
0.001	9.6062271082318323E-002
0.01	9.6492254014802464E-002
0.1	9.7891404206847096E-002
0.2	9.8111311080645247E-002
0.3	9.8120898797416589E-002
0.4	9.8057739153953272E-002
0.5	9.7923914165374770E-002
0.6	9.7666615258467829E-002
0.7	9.7121368398468244E-002
0.8	9.5690499031390652E-002
0.9	9.0137048318838675E-002
0.91	8.8855284071249374E-002
0.92	8.7282553733623189E-002
0.93	8.5330866203915515E-002
0.94	8.2872537801276014E-002
0.95	7.9716307651079121E-002
0.96	7.5557134336709311E-002
0.97	6.9865381743251825E-002
0.98	6.1549444562012216E-002
0.99	4.7772291900584407E-002
0.995	3.5815421808401013E-002
0.999	1.6982261325067395E-002

Remarque : pour  $h_1/h = 0$ , la fissure se trouve à l'interface. L'équation intégrale (5.57) n'est plus valable, on utilise l'équation intégrale de MAHAMMEDI [41], car il a traité le problème de la fissure interfaciale.

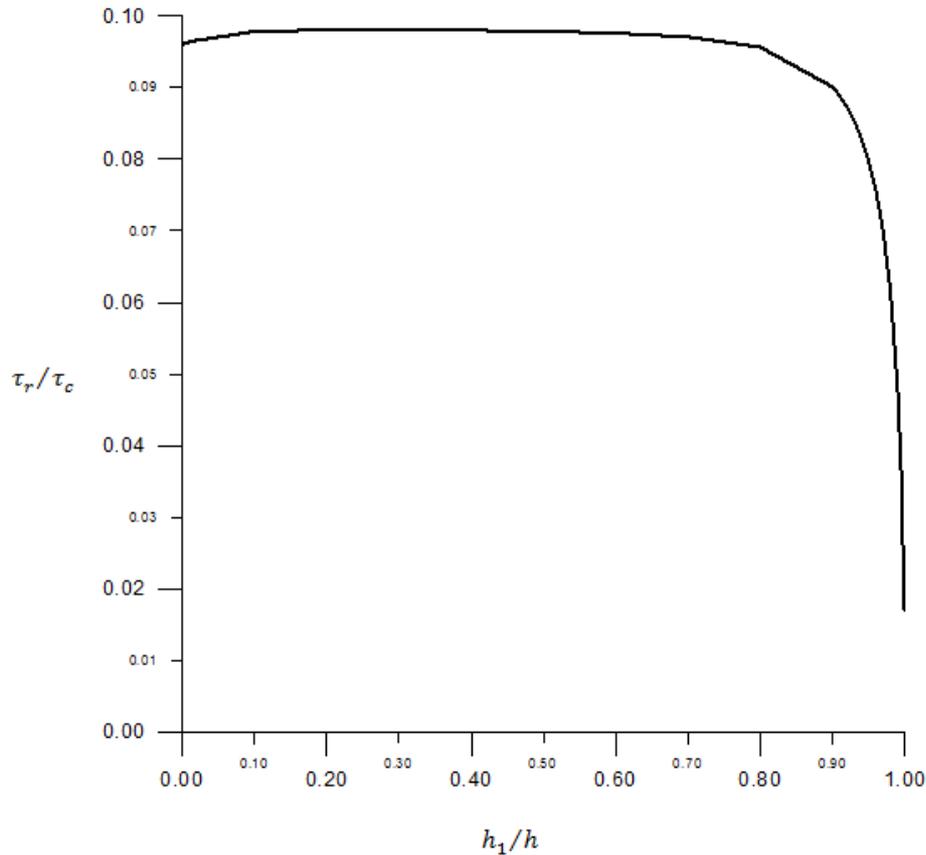


Figure 6.6: Relation entre la charge critique et l'épaisseur de revêtement.

### 6.5. Discussion des résultats

Dans les figures 6.3, 6.4 et 6.5, on présente l'évolution de la charge appliquée  $\tau_\infty$ , en fonction de la position de la pointe cohésive  $l_a$ , pour chaque valeur des  $\mu_1/\mu_2$ , de  $h/l_0$  et de  $\delta_c/l_0$ . Dans les tableaux 6.1, 6.2 et 6.3 nous présentons les contraintes de rupture pour chacune de ces valeurs.

Pour toutes les courbes, la partie croissante correspondant à la phase cohésive, est due au fait que la charge appliquée doit croître pour équilibrer les forces cohésives qui augmentent avec la propagation de la fissure cohésive. La partie décroissante correspond à la phase de propagation, est due à la relaxation

de la structure provoquée par l'accroissement de la fissure non-cohésive. Pour les trois courbes le chargement maximum est la charge de la rupture correspondant au début de la propagation de la fissure initiale.

Dans la figure 6.3, on voit que la charge de rupture croît avec le rapport  $\mu_1/\mu_2$ . Puisque  $\mu_1$  et  $\mu_2$  représentent les rigidités du revêtement et du substrat, on en conclut que plus le revêtement est rigide plus l'interface est résistante à la propagation des fissures.

Dans la figure 6.4, on observe que la charge de rupture augmente avec le rapport  $h/l_0$ ,  $h$  et  $l_0$  sont l'épaisseur du revêtement et la longueur de la fissure initiale. Ce résultat veut dire que plus l'épaisseur du revêtement est importante plus l'interface est résistante.

Sur la figure 6.5, et pour des raisons d'échelle, nous ci avons représenté les courbes que pour trois valeurs de  $\delta_c/l_0$  : 0.1, 1 et 10. Toutes les autres courbes ont la même allure. Nous observons sur le tableau 6.5 que la contrainte de rupture est une fonction croissante de  $\delta_c/l_0$  et tend vers  $\tau_c$  lorsque la taille de la fissure initiale  $l_0$  est petite devant  $\delta_c$ . Nous remarquons qu'à partir de  $\delta_c/l_0 = 1000$ , la contrainte de rupture dépasse 90% de  $\tau_c$ . Ce résultat confirme les résultats obtenus par (Ferdjani et al, MAHAMMEDI Ahmed, HANI CHEBRA Abd el Aziz) [36] [37] [38] [41] et [42], pour le cas d'une plaque fissurée ou une plaque trouée, sous une traction uniforme, et pour une fissure dans un demi-plan sous chargement antiplan. La conclusion que l'on peut tirer est qu'avec la loi de fissuration de Dugdale la charge de rupture des structures contenant des défauts de petite taille (par rapport à la longueur caractéristique  $\delta_c$ ) tend vers la charge critique du matériau. En d'autres termes, avec le modèle de Dugdale en particulier et le modèle des forces cohésives en général, les structures sont insensibles aux défauts de petite taille, et se comportent comme des structures saines.

Sur la figure 6.6, nous constatons que lorsque la fissure s'éloigne de l'interface, la contrainte de rupture reste d'abord sensiblement constante pour des valeurs de  $h_1/h$  entre 0 et 0.5. Ensuite pour des valeurs de  $h_1/h$  entre 0.5 et 1, la contrainte de rupture chute rapidement. La chute s'accélère lorsque  $h_1/h$  s'approche de 1 ce résultat est conforme à l'idée intuitive, que plus la fissure s'approche du bord, plus la propagation devient facile.

### 6.6. Comparaison entre les modèles de DUGDALE et de GRIFFITH

On effectue une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de Dugdale et de Griffith. Le problème traité est le même que celui traité dans les chapitres précédents. A savoir, étudier la propagation d'une fissure dans un revêtement sous chargement antiplan. Nous étudions plus particulièrement la convergence du modèle de Dugdale vers le modèle de Griffith lorsque la longueur caractéristique  $\delta_c$  tend vers 0. En effet, nous observons sur la Figure 6.6, que la densité d'énergie de surface du modèle de Dugdale tend vers celle du modèle de Griffith lorsque  $\delta_c$  tend vers 0. Nous allons donc faire un calcul avec le modèle de Griffith, et plusieurs calculs avec le modèle de Dugdale en maintenant  $G_c$  fixe et en faisant tendre  $\delta_c$  vers 0, afin de vérifier la convergence des résultats du modèle de Dugdale vers les résultats du modèle de Griffith.

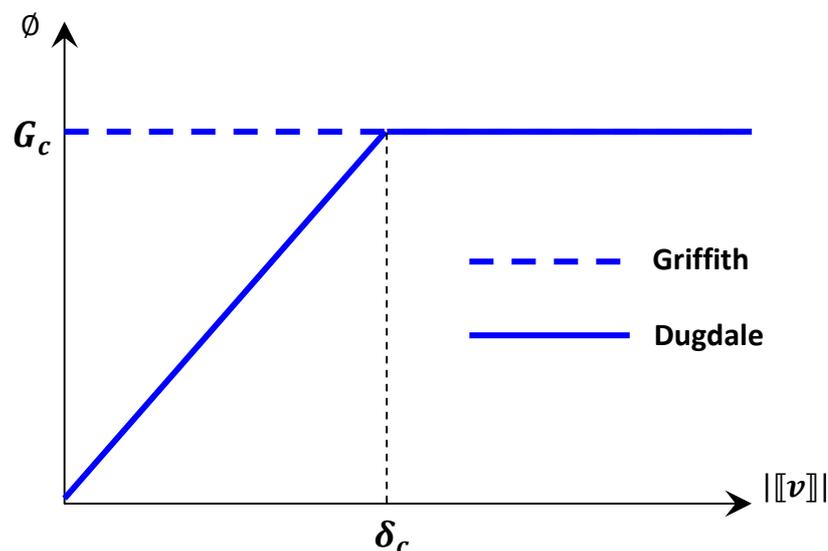


Figure 6.7: Energie de surface en fonction du saut de déplacement.

Nous présentons tout d'abord dans le cas de Griffith les équations du problème, l'équation intégrale, et la résolution numérique.

Dans le cas de Dugdale, les équations ont déjà été présentées dans les Chapitres 4 et 5.

La structure et le chargement initial sont expliqués au Chapitre IV. Nous supposons que la fissure initiale  $\mathcal{D} = [-l_0, l_0] \times \{0\}$  se propage horizontalement. On note pour un chargement donné les nouvelles pointes de la fissure  $\pm l$  la nouvelle fissure sera notée  $\Gamma = [-l, l] \times \{0\}$ .

Dans le cas de Griffith, il n'existe pas de forces cohésives, par conséquent, toute la fissure est non cohésive. Comme précédemment (Chapitre IV), on utilise le principe de superposition, pour décomposer le problème en un problème homogène et un problème non homogène. Nous étudions dans la suite le problème non homogène représenté sur la figure 6.7.

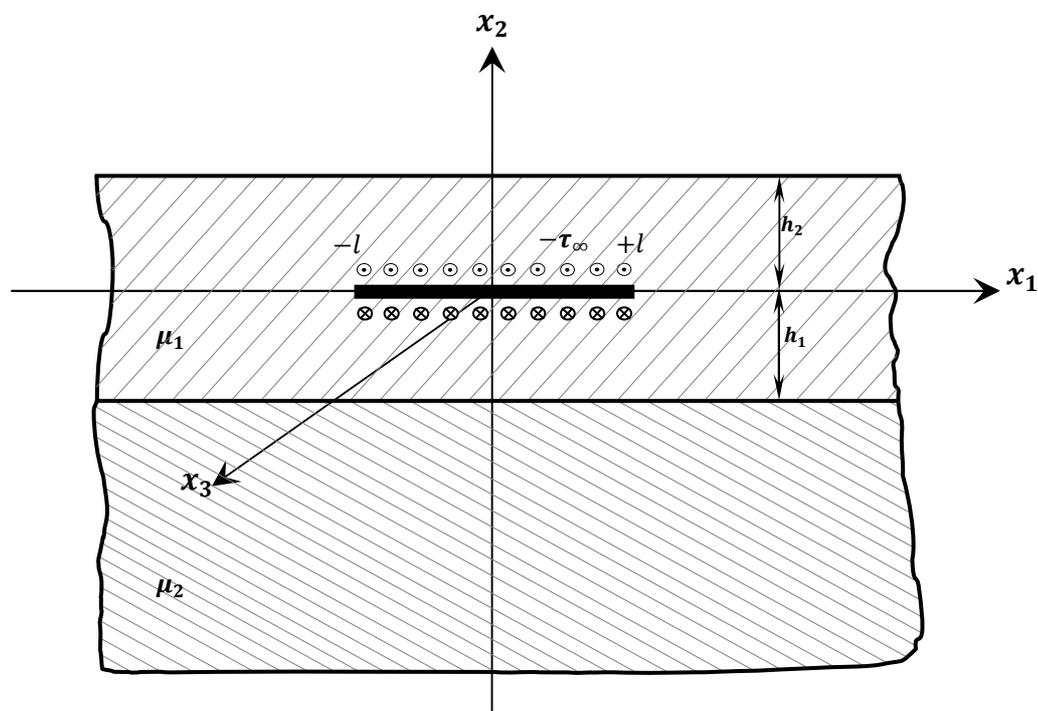


Figure 6.8: Structure et chargement dans le cas de Griffith.

Le champ des déplacements ainsi que le champ des contraintes à l'équilibre sous le chargement  $\tau_\infty$  sont donc solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \tau_{23} = -\tau_{\infty} & x_2 = 0 \quad |x_1| < l \\ \tau_{23} = 0 & x_2 = h_2 \\ \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \tau_{23} = 0 & \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Le critère de propagation de la fissure est le critère classique de Griffith:

$$G = G_C.$$

### 6.6.1. Equation intégrale et résolution

En procédant de la même manière qu'au (Chapitre V), nous établissons l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-l}^l \left[ \frac{1}{(t-x_1)} + k(x_1, t) \right] \cdot \psi(t) dt = \frac{-2\pi}{\mu_1} \tau_{\infty} |x_1| < l \quad (6.11)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} \psi(t) dt = 0 \quad (6.12)$$

L'équation intégrale (6.11) est la même que (5.57) (Chapitre V), la seule différence réside dans le second membre qui est constant dans ce cas, au lieu d'être discontinu dans le cas de Dugdale.  $\psi(t)$  et  $k(x_1, t)$  ont les mêmes définitions qu'au Chapitre V (équations (5.26) et (5.58)).

Pour résoudre cette équation intégrale, nous devons changer le domaine d'intégration de  $[-l, l]$  à  $[-1, 1]$ . Nous définissons d'abord les quantités normalisées suivantes :

$$r = \frac{x_1}{l}, \quad s = \frac{t}{l}, \quad \psi(t) = f(s), \quad k(x_1, t) = L(r, s) \quad (6.13)$$

En injectant (6.13) dans (6.11), l'équation intégrale devient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{s-r} + l_a L(r, s) \right] \cdot f(s) ds = \frac{-2}{\mu_1} \cdot \tau_\infty |r| \leq 1 \quad (6.14)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0 \quad (6.15)$$

La fonction inconnue  $f(t)$  a des singularités intégrables en points  $\pm 1$ . La solution de l'équation intégrale singulière (6.14) peut être exprimé comme:  $f(t) = w(s) \cdot \varphi(s)$  où  $w(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$  est la fonction poids associé au polynôme de Chebychev de premier ordre  $T(s) + \cos(n \cdot a \cos(s))$  et  $\varphi(s)$  est une fonction continue et bornée sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , laquelle peut être exprimé comme une série des polynômes de Chebychev du premier ordre. Donc, la solution de l'équation (6.14) peut s'exprimer comme suit:

$$f(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot T_{2n-1}(s) \approx (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=1}^N A_n \cdot T_{2n-1}(s) \quad (6.16)$$

Dans (6.16) nous n'avons pris que les polynômes de Chebychev à indice impair, car  $T_{2n-1}(-s) = -T_{2n-1}(s)$ , et  $f(t)$  est une fonction impaire à cause de la symétrie du problème.

En remplaçant l'équation (6.16) dans l'équation (6.14), on obtient :

$$\sum_{n=1}^N A_n \cdot [U_{2n-2}(r) + H_n(r)] = g(r) \quad r < 1 \quad (6.17)$$

Où:

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot l_\alpha \cdot L(r,s) \cdot T_{2n-1}(s) ds \quad (6.18)$$

On observe qu'avec l'expression (6.16), la condition (6.15) est automatiquement vérifiée.

On peut résoudre l'équation (6.17), en sélectionnant  $N$  points de collection (les racines de  $T_{2N-1}$ ), donnés par :

$$r_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)}\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.19)$$

En écrivant (6.17), pour les points de collection donnés par l'équation, on obtient le système de  $N$  équation avec  $N$  inconnues,  $(A_1 \dots \dots A_N)$ , suivant :

$$\sum_{n=1}^N A_n \cdot [U_{2n-2}(r_j) + H_n(r_j)] = g(r_j) \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.20)$$

La valeur de  $N$  du système d'équations (6.20) sera déterminée à l'aide d'une étude de convergence.

De la même manière qu'au Chapitre V, on peut montrer que le Facteur d'Intensité de Contrainte  $k_3$  est donné par :

$$k_3(\pm l) = -\sqrt{l} \frac{\mu_1}{2} \cdot \sum_{n=1}^N A_n \quad (6.21)$$

### 6.6.2. Mise en œuvre numérique

Le critère de propagation dans ce cas est le critère classique de Griffith :  $G = G_C$ .

Nous devons calculer le taux de restitution d'énergie potentielle élastique  $G$  à partir du  $k_3$  en utilisant la formule d'IRWIN en mode III:

$$G = \frac{k_3^2}{2} \left( \frac{1}{\mu_1} \right) \pi \quad (6.22)$$

A partir de l'équation précédente et du critère de Griffith, on déduit le F.I.C critique, correspondant à la propagation de la fissure :

$$k_3^c = \sqrt{\frac{2G_c \mu_1}{\pi}} \quad (6.23)$$

La charge de rupture  $\tau_r$  est définie comme étant la charge correspondant à la propagation de la fissure.

Nous allons calculer la charge de rupture de la structure pour différentes longueurs de fissure. La procédure numérique utilisée est la suivante:

- 1) On se donne une valeur initiale de  $l$ .
- 2) On pose  $\tau_\infty = 1$ , on résout le système d'équations (6.20) et on calcule  $k_3$  à l'aide de l'équation (6.21).
- 3) En utilisant la linéarité du problème élastique, on calcule  $\tau_r$  correspondant à  $k_3 = k_3^c$  avec la formule suivante :

$$\tau_r = \frac{k_3^c}{k_3} \quad (6.24)$$

Où  $k_3$  et  $k_3^c$  sont donnés par (6.21) et (6.23) respectivement.

- 4) On incrémente  $l$  et on revient en 2.

### 6.6.3. Application numérique

Pour les deux cas : Griffith et Dugdale, nous fixons certains paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\mu_1 = 1100 \text{ MPa}, \mu_2 = 1000 \text{ MPa}, h_1 = 1 \text{ mm}, h_2 = 1 \text{ mm}, G_c = 72 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}, \\ l_0 = 1 \text{ mm}$$

Dans le cas de Dugdale, nous effectuons plusieurs calculs en faisant tendre  $\delta_c$  vers 0. Nous considérons les valeurs suivantes de  $\delta_c$ :

0.0001 , 0.001 et 0.01 mm.

Pour chaque valeur de  $\delta_c$ , nous calculons la contrainte critique  $\tau_c$  en utilisant la relation suivante :

$$\tau_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$

### 6.6.3.1. Détermination de N dans le cas de Griffith

On fixe la valeur de  $n$  à 100, et on considère la valeur du facteur d'intensité de contraintes pour différentes valeurs de  $N$ . Nous présentons sur le Tableau 6 et sur le graphe de la figure 6.8.

$$l = 1\text{mm (Griffith)}, l_c = 1\text{mm (Dugdale)}, \quad \mu_1 = 1100\text{ MPa}, \quad \mu_2 = 1000\text{ MPa},$$

Tableau 6.6 : calcul de  $k_3$  en fonction de  $N$  cas de Griffith.

$N$	$K_3$
1	-41.114315739821860
5	-40.867204138417240
8	-40.867204138415130
9	-40.867204138415110
10	-40.867204138415110
15	40.867204138415120
20	-40.867204138415130
25	-40.867204138415130
30	-40.867204138415110
35	-40.867204138415120
40	-40.867204138415120
100	-40.867204138569420
150	-40.867204138419170

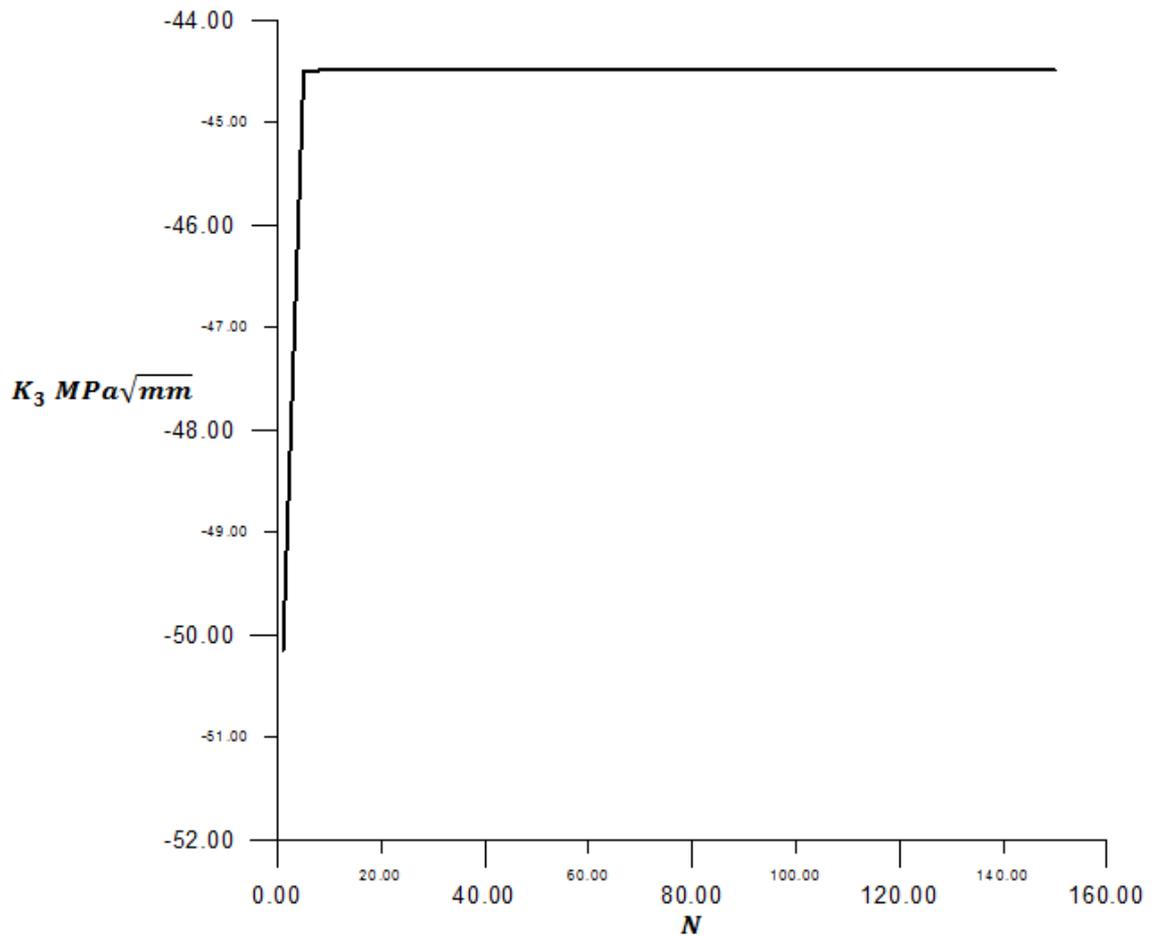


Figure 6.9 : Valeur de  $K_3$  en fonction de N dans le cas de Griffith.

La figure 6.8, montre qu'à partir de  $N = 5$ ,  $k_3$  se converge.

### 6.6.3.2. Résultats

On présente sur la même courbe les résultats pour les modèles de Dugdale et de Griffith (figure 6.9).

Dans le cas de Dugdale, nous effectuons plusieurs calculs en faisant tendre  $\delta_c$  vers 0. Nous considérons les valeurs suivantes de  $\delta_c$  : 0.02, 0.007 et 0.005 mm, pour chaque valeur nous calculons la contrainte critique en utilisant la relation suivante

$$\tau_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$

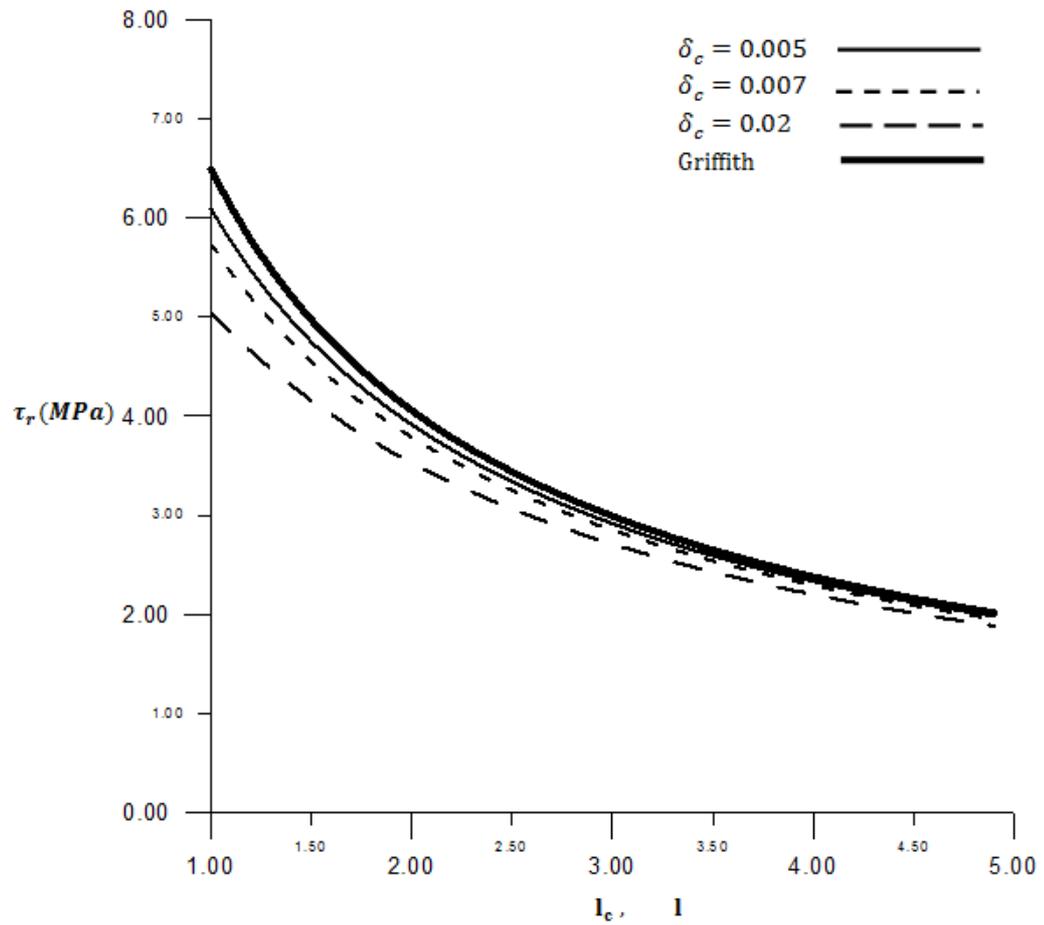


Figure 6.10: Résultats obtenus dans les cas de Griffith et de Dugdale.

Nous observons que les courbes du modèle de Dugdale convergent vers la courbe du modèle de Griffith lorsque la longueur caractéristique  $\delta_c$  tend vers 0. Ce résultat est en conformité avec la convergence de la densité d'énergie de surface de type Dugdale vers celle du modèle de Griffith lorsque  $\delta_c$  tend vers 0.

## CONCLUSION

Le travail présenté dans cette thèse s'est articulé autour de six grandes parties, revenons rapidement sur les principaux résultats.

Tout d'abord l'établissement de l'équation d'équilibre et les conditions aux limites du problème d'une fissure dans un revêtement sous chargement antiplan. On a adopté l'hypothèse d'une énergie de surface de type Dugdale, avec une ouverture de la fissure en mode III. Nous avons montré, en utilisant la formulation variationnelle que la fissure créée comporte deux zones, une zone cohésive et une zone non-cohésive.

Nous avons ensuite réduit les équations du problème à une équation intégrale singulière de Cauchy du premier ordre, par l'utilisation de la transformée de Fourier selon les travaux d'Erdogan.

Nous avons ensuite présenté la méthode de résolution de l'équation intégrale singulière en suivant encore les travaux d'Erdogan, et en utilisant les polynômes de Chebychev, et nous avons présenté quelques applications numériques.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué en faisant varier un certain nombre de paramètres : l'influence de la différence de rigidité entre le revêtement et le substrat  $\mu_1/\mu_2$ , l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à l'épaisseur du revêtement  $h/l_0$ , et l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à la longueur caractéristique du modèle de Dugdale  $\delta_c/l_0$ , et l'influence de la position de la fissure dans le revêtement  $h_1/h$ .

Nous avons présenté les résultats sous forme de courbes. Nous avons remarqué sur toutes les courbes présentant l'évolution du chargement appliqué en fonction de la longueur de la fissure que la partie croissante correspondant à la phase cohésive, est due au fait que la charge appliquée doit croître pour équilibrer les forces cohésives qui augmentent avec la propagation de la fissure cohésive.

La partie décroissante correspondant à la phase de propagation, est due à la relaxation de la structure provoquée par l'accroissement de la fissure non-cohésive. Nous avons vu que la charge de rupture croît avec le rapport  $\mu_1/\mu_2$  donc nous avons conclu que plus le revêtement est rigide plus il est résistant à la propagation des fissures.

Nous avons observé ensuite que la charge de rupture augmente avec le rapport  $h/l_0$  qui nous a permis de dire que plus l'épaisseur du revêtement est importante plus revêtement est résistant.

Par la suite nous avons observé que la contrainte de rupture est une fonction croissante de  $\delta_c/l_0$  et tend vers  $\tau_c$  lorsque la taille de la fissure initiale  $l_0$  est petite devant la longueur caractéristique du modèle de Dugdale  $\delta_c$ , ce qui a confirmé les résultats obtenus par Ferdjani et al 2006a, 2006b, 2007 et 2009). A savoir, qu'avec la loi de fissuration de Dugdale et plus généralement avec le modèle des forces cohésives, la charge de la rupture des structures contenant des défauts de petite taille (par rapport la longueur caractéristique  $\delta_c$ ) tend vers la charge critique du matériau, et donc les structure sont insensibles aux défauts de petite taille, et se comportent comme ses structures saines.

Dans un deuxième temps, nous avons effectué une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de Dugdale et de Griffith. Nous avons étudié l'évolution de la charge de rupture avec la longueur de la fissure pour différentes longueurs de fissure tout d'abord avec le modèle de Dugdale, et pour différentes valeurs de la longueur caractéristique  $\delta_c$ , ensuite nous avons fait un seul calcul avec le modèle de Griffith. Nous avons observé sur les courbes, que plus  $\delta_c$  tend vers 0, plus les résultats de Dugdale se rapprochent des résultats de Griffith. Cela confirme la convergence observée entre les courbes des densités d'énergie de surface pour les modèles de Dugdale et de Griffith lorsque  $\delta_c$  tend vers 0.

**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES**

- $\sigma_c$  : Contrainte critique (caractéristique du matériau) [MPa]
- $\sigma_n$  : Contrainte normale d'interaction entre les lèvres de la fissure [MPa]
- $\sigma_t$  : Contrainte tangentielle d'interaction entre les lèvres de la fissure [MPa]
- $\tau_{13}$  : Contrainte de cisaillement appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction  $x_1$  [MPa]
- $\tau_{23}$  : Contrainte de cisaillement appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction  $x_2$  [MPa]
- $\tau_r$  : Contrainte de rupture [MPa]
- $\tau(x_1)$  : Chargement en fonction de  $x_1$  [MPa]
- $\mu_1$  : Module de cisaillement du matériau (1) [MPa]
- $\mu_2$  : Module de cisaillement du matériau (2) [MPa]
- $K_3$  : Facteur d'intensité de contrainte en mode III [ $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ ]
- $\phi$  : Densité d'énergie de surface
- $G$  : Taux de restitution d'énergie [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ]
- $G_c$  : Taux de restitution d'énergie critique [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ]
- $\psi(x_1)$  : La fonction densité
- $D$  : La fissure initiale (défaut)
- $\Omega$  : Domaine du milieu bidimensionnel semi infini
- $\partial\Omega_D$  : La partie de la frontière où les déplacements sont imposés
- $\partial\Omega_F$  : La partie de la frontière où les forces sont imposées

$\Gamma$  : La fissure

$\Gamma_c$  : Partie cohésive de la fissure

$\Gamma_0$  : Partie non cohésive de la fissure

$w(x, y)$  : Champ de déplacement

$x_1$  : Direction parallèle a la fissure

$x_2$  : Direction normale a la fissure

$h$  : Profondeur de la fissure [mm]

$l_0$  : Position de la pointe de fissure initiale [mm]

$l_a$  : Position de la zone non cohésive [mm]

$l_c$  : Position de la zone cohésive [mm]

$\delta_n$  : Discontinuité du déplacement normale [mm]

$\delta_t$  : Discontinuité du déplacement tangentielle [mm]

$\delta_c$  : Ouverture critique de rupture (caractéristique des modèles cohésive) [mm]

$\hat{f}(\omega)$  : Transformée de Fourier de  $f(x)$

$K(x_1, t)$  : Noyau de l'équation intégrale

$T_n$  : Polynôme de Chebychev de premier ordre

$w$  : La fonction poids associée au Polynôme de Chebychev de premier ordre

$U_n$  : Polynômes de Chebychev de second ordre

$N$  : Nombre d'équation du système d'équations algébrique obtenu par application de la méthode de collocation sur l'équation intégrale

$r_j$  : Points de collocation

$t_k$  : Nœuds

$n$  : Nombre de nœuds

**APPENDICE B**  
**INTEGRATION PAR PARTIE**

1)

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

$$\int \underbrace{-e^{-\lambda x_2}}_U \cdot \underbrace{\sin \lambda(t - x_1)}_{dV} d\lambda$$

$$\begin{cases} U = -e^{-\lambda x_2} \\ dU = x_2 e^{-\lambda x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dV = \sin \lambda(t - x_1) d\lambda \\ V = \frac{-1}{(t - x_1)} \cdot \cos \lambda(t - x_1) d\lambda \end{cases}$$

$$J = \frac{e^{-\lambda x_2}}{(t - x_1)} \cdot \cos \lambda(t - x_1) d\lambda + \int \frac{x_2 e^{-\lambda x_2}}{(t - x_1)} \cdot \cos \lambda(t - x_1) d\lambda$$

$$J = \frac{1}{(t - x_1)} \left[ e^{-\lambda x_2} \cdot \cos \lambda(t - x_1) d\lambda + x_2 \cdot \int e^{-\lambda x_2} \cdot \cos \lambda(t - x_1) d\lambda \right]$$

2)

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

$$\int \underbrace{e^{-\lambda x_2}}_U \cdot \underbrace{\cos \lambda(t - x_1)}_{dV} d\lambda$$

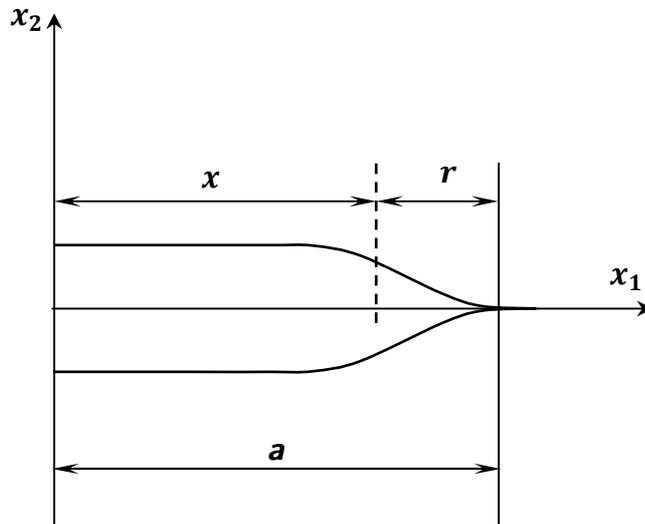
$$\begin{cases} U = e^{-\lambda x_2} \\ dU = -x_2 e^{-\lambda x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dV = \cos \lambda(t - x_1) d\lambda \\ V = \frac{1}{(t - x_1)} \cdot \sin \lambda(t - x_1) d\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
J' &= \frac{e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda + \int \frac{x_2 \cdot e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
J &= \frac{1}{(t-x_1)} \left[ e^{-\lambda x_2} \cdot \cos \lambda(t-x_1) d\lambda + \frac{x_2 \cdot e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_2^2}{(t-x_1)} \cdot \int e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \right] \\
J &= \int -e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
\int -e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
&= \frac{e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)} \cdot \cos \lambda(t-x_1) d\lambda + \frac{x_2 \cdot e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)^2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
&\quad + \frac{x_2^2}{(t-x_1)^2} \cdot \int e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
\Rightarrow \int -e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda - \frac{x_2^2}{(t-x_1)^2} \cdot \int e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
&= \frac{e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)} \cdot \cos \lambda(t-x_1) d\lambda + \frac{x_2 \cdot e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)^2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
\Rightarrow - \left( 1 + \frac{x_2^2}{(t-x_1)^2} \right) \int e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
&= \frac{e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)} \cdot \cos \lambda(t-x_1) d\lambda + \frac{x_2 \cdot e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)^2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \\
\Rightarrow \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda = \left( \frac{(t-x_1)^2}{(t-x_1)^2 + x_2^2} \right) \cdot \left( \frac{e^{-\lambda x_2}}{(t-x_1)^2} \right) \cdot \\
&\quad [(t-x_1) \cdot \cos \lambda(t-x_1) d\lambda + x_2 \sin \lambda(t-x_1) d\lambda] \\
\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int e^{-\lambda x_2} \cdot \sin \lambda(t-x_1) d\lambda &= \left( \frac{1}{(t-x_1)} \right)
\end{aligned}$$

## APPENDICE C

### FORMULE DONNANT LE FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE

D'après la mécanique de la rupture fragile, la relation entre le Facteur d'Intensité de Contrainte et l'ouverture en pointe de fissure en mode III (en déformations antiplane) est donnée par :



$$[[U_3]] = 2 \frac{\sqrt{2} k_3}{\mu_1} \sqrt{r}$$

$$[[U_3]] = 2 \frac{\sqrt{2} k_3}{\mu_1} \sqrt{a-x}$$

$$\psi(x_1) = \frac{d}{dx} [[U_3]] = -\frac{\sqrt{2} k_3}{\mu_1 \sqrt{a-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \psi(x_1) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2} k_3}{\mu_1 \sqrt{a-x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \psi(x_1) = \lim_{x \rightarrow a} -\frac{\sqrt{2} k_3}{\mu_1} \sqrt{a+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \psi(x_1) = -\frac{2 k_3 \sqrt{a}}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow k_3 = -\frac{\mu_1}{2\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \psi(x_1)$$

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Tvergaard, V, Hutchinson, J.W., 1993. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *J. Mech. Phys. Solids* 41, pp. 1119 – 1135.
2. Camacho, G. T., Ortiz, M., 1996. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *Int. J. Solids Struct.* 33, pp. 2899 - 2938.
3. ORTIZ, M, PANDOLFI, A., 1999. Finite-deformation irreversible cohesive elements for threedimensional crack-propagation analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* vol. 44, pp. 1267-1282.
4. Xie D., Waas A., « Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis », *Engineering Fracture Mechanics*, 2006.
5. M. Abramowitz, e. I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, *Appl. Math. Séries* 55, 1964.
6. F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Pergamon Press and Addison-Wesley, Oxford, 1966.
7. J. Laverne, *Formulation énergétique de la rupture par les modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques* thèse de Doctorat, Université Paris XIII, France 2004.
8. D. S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids* 8: 100-108 (1960).
9. G.I. Barenblatt, the mathematical theory if equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, pp. 55-129 (1962).
10. A. Hillerborg, M. Modeer and P. E. Petersson., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrète Research* 6(6):163-8 (1976.).
11. A. Needleman, A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J of Appl. Mechanics*, 54, pp. 525-531 (1987).
12. J. R. Rice and J.S Wang, Embrittlement of interfaces by solute segregation. *Materials Science and Engineering A*, 107, pp. 23-40 (1989).

13. V. Tvergaard, Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mater. Sci. Engng.* 125, pp. 203-213 (1990).
14. J.L. Chaboche, R. Girard and A.Schaff, Numerical analysis of composite système by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, 20, pp. 3-11 (1997).
15. J. L. Chaboche, F. Feyel and Y.Monerie, Interface debonding models: a viscous regularization with a limited rate dependency. *Int. J. Solids Struct*, 38 pp. 3127- 3160 (2001).
16. P. Suquet, Discontinuities and plasticity. In: Moreau J.J, Panagiotopoulos P.D. (Eds.), *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Springer, Berlin, pp. 280-340 (1987).
17. Michel, P. Suquet et F.Thebaud, Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3 (4) pp. 573-595 (1994).
18. J-B. Leblond, *Mécanique de la rupture fragile* Ecole Polytechnique, Edition 1994.
19. A. Griffith, The phenomena of ruptures and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A*, 163-198 (1920).
20. G. A .Francfort and J. J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (8), pp. 1319-1342 (1998).
21. B. Bourdin, Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture. *Théorie et applications numériques*. Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord (1998).
22. F. Bilteryst, Une approche énergétique de la décohésion et de la multi-fissuration dans les composites. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris (2000).
23. G. Del piero one dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations. In *Proceedings of the IUTAM Symposium "Variations de domaines et frontières libres en mécanique"*, eds. P. ARGOUL and M. FRÉMOND, Paris, 1997, Kluwer, pp. 197-202 (1999).
24. L.Truskinovsky, Fracture as a phase transition. *Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials*, ed. R. C. BATRA and M. F. BEATTY, CIMNE, Barcelona pp. 322- 332 (1996).

25. M. Charlotte, Modèles discrets de rupture. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris (2001).
26. M. Charlotte, G. A. Francfort, J. J. Marigo and L. Truskinovsky, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem: comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models. Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture" The data science library, Elsevier, edited by A. BENALLAL, Paris, pp. 718, (2000).
27. G. Del Piero, L. Truskinovsky, Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity, International Journal of Solids and Structures 38 (6) (2001) 1135-1138.
28. J. Laverne, J.J. Marigo, Approche globale, minima relatifs et critère d'amorçage en mécanique de la rupture, Comptes Rendus Mécanique 332 (2004) 313-318.
29. M.L. Williams, 1957. On the stress distribution at the base of a stationary crack. ASME J. Appl. Mech. 24, 109–114.
30. J.J. Marigo, Cours « Mécanique de la rupture ».
31. Gurtin, Théorème de Travaux Virtuels, 1981.
32. Y. F. Chen, F. Erdogan, The interface crack problem for a non homogeneous coating bonded to a homogeneous substrate, J. Mech. Phys. Solids 44 (5) (1996) 771|787.
33. S. Mauch Introduction to Methods of Applied Mathematics 2004.
34. F. Erdogan, G. D. Gupta, T. Cook, Numerical solution of singular integral equation, in: G. C. Sih (Ed.), Methods of analysis and solutions of crack problems, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973, pp. 368-425.
35. N. I. Ioakimidis, The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities, Engineering Fracture Mechanics 13 (1980) 709-716.
36. H. Ferdjani, R. Abdelmoula, J.J. Marigo, Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement la rupture avec le modèle de Dugdale, Revue Européenne de Mécanique Numérique volume 15 – n<sup>o</sup>4 (2006) 409 – 425.
37. H. Ferdjani, H. Khalifi, Med Z, J.J. Marigo Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement la rupture avec le modèle de Dugdale

- Régularisé, Revue Européenne de Mécanique Numérique volume 17 – n<sup>o</sup>4 (2008)481 – 493.
38. H. Ferdjani, R. Abdelmoula, J.J. Marigo · S. El Borgi, Study of size effects in the Dugdale model through its case of crack in a semi infinite plane under antiplane shear loading, Continuum mechanics and thermodynamic, Continuum Mech. Thermodyn. (2008) 21: 41–55.
  39. H. Ferdjani, Study of an infinite strip containing a Dugdale crack parallel to its boundaries Under antiplane shear loading, European Journal of Mechanics A/Solids 28 (2009) 347-353.
  40. BRICK CHAOUCHE amine Etude de l'influence des effets d'échelle dans le Modèle de Dugdale à travers le cas d'une bande infinie soumise à chargement antiplan thèse Magister Université de Blida (2008).
  41. MAHAMMEDI Ahmed Etude d'une Fissure Cohésive à L'interface Entre Deux Matériaux Différents Thèse Magister Université de Blida (2012).
  42. Abd el Aziz HANI CHABRA, étude d'une fissure de Dugdale dans une bande infinie chargée en mode I, Thèse Magister Université de Blida (2012).
  43. Bui H. D. Mécanique de la rupture fragile », Masson (1978).
  44. P .CHAUCHOT, J.LABEYRIE, Rupture fragile des pièces minces et méthodes des équations intégrales, page (9-11), N° 49-1980.