

UNIVERSITE DE BLIDA 1
Institut d'Aéronautique et des études aérospatial



MEMOIRE DE MAGISTER
Spécialité : Aéronautique

**DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE DE
CONCEPTION DES PROFILS DES TUYERES
SUPERSONIQUES FONCTIONNANT A TRES
HAUTE ALTITUDE**

Par
BAKOUCHE Khedaoudj

Devant le jury composé de :

| | | |
|-------------|----------------------------------------|--------------|
| A. BENKHEDA | Maître de conférences A, U. de Blida | Présidente |
| T. REZZOUG | Professeur, U. de Blida | Examineur |
| A. MATAOUI | Professeur, U.S.T.H.B., Alger | Examinatrice |
| S.BERGHEUL | Professeur, U. de Blida | Encadreur |
| H.KBAB | Maître assistant classe A, U. de Blida | Invité |

Blida, juin 2014

Dédicaces

Je dédie ce travail,

*À mes très chères au monde mes parents qui m'avaient donné tous ce que
j'ai besoin.*

*À mon mari Mohamed qui m'avait donné le bonheur et mon très cher fils
Haithem qui a changé toute ma vie.*

À mes sœurs Anissa, Houria, Souad.

À mes deux frères Mohamed lamine et Chouaib.

*À ma belle mère Aicha pour sa compréhension
et mon père Fateh*

*À tout mes deux familles surtout Nour el houda, youssra, abd el hakim
et abd el malek*

À mes chères sœurs Chafika et Nesrine et ses familles.

À tous mes amis

Khedaoudj

REMERCIEMENTS

Je tien tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui m'a donné la volonté et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

A mon professeur, modèle et promoteur de thèse, Monsieur Bergheul Said, Vous me faite un grand honneur d'avoir accepté de diriger ce travail. Je vous remercie de m'avoir guidé dans ce travail avec rigueur et bienveillance.

Je remercie infiniment Monsieur Kbab Hakim pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être menée au bon port.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Sellam Mohamed, qui s'est dévoué pour dispenser de tous conseils et directives utiles pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Bekka Nadir, qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration et l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie mes parents, qui son la graine de mon existence, pour leur encouragement et leurs sacrifices, à mes frères et mes sœurs. Je vous remercie pour votre confiance, votre soutien. Je ne sais comment vous remercier pour tout ce que je vous dois.

Je remercie mon mari pour son réconfort, sa compréhension, son soutien moral surtout dans les moments difficiles durant ce mémoire ;

Je remercie tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce travail surtout Mme Saadi.

RESUME

Notre travail consiste à développer un code de calcul en utilisant la méthode des caractéristiques pour la conception d'une tuyère supersonique innovante en l'occurrence tuyère double galbe.

Le profil conçu est alors tronqué à une longueur spécifique tenant compte l'encombrement et la masse de la tuyère, pour la conception du deuxième galbe, en appliquant l'onde de Prandtl-Meyer on trouve l'angle d'inflexion entre les deux galbes (le point de jonction), après, l'expansion du deuxième profil s'est faite avec l'hypothèse de l'écoulement du jet libre.

L'approche est appliquée sur trois types de tuyères double galbe appartenant à Centre National des Recherches Spacials (CNRS) de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA –France).

ABSTRACT

Our job is to develop a calculation code using the characteristics method for design a supersonic nozzle (Dual bell nozzle) .

The profile designed is truncated to a specific length, for design the second curve we use the Prandtl-Meyer wave,we find the inflexion angle between the two curves, after,the expansion of the second profile is made with the assumption of the frre jet flow.

The approach is applied to three types of dual bell nozzles belonging to CNRS of ONERA.

ملخص

نهدف في هذا العمل الى تطوير برنامج رقمي باستعمال أسلوب تعريفي من أجل تصميم فتحات أسرع من الصوت و بالخصوص الفوهة المزدوجة المنحني.

تم تصميم ثم اقتطاع المنحني الأول في مسافة محددة مع الأخذ بعين الاعتبار وزن و حجم الفوهة. من أجل هذا التصميم استعملنا موجة برانتل ماير لإيجاد زاوية الانعطاف بين المنحنيين.

تم تطبيق النهج على ثلاثة أنواع من الفوهات المزدوجة المنتمية الى المركز الوطني للبحوث الفضائية من المكتب الوطني للدراسات و أبحاث الفضاء الجوي

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

DEDICACES

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION

| | |
|-----------------------------------------------------|----|
| 1. GENERALITES | 12 |
| 1.1. Définition d'une tuyère | 12 |
| 1.2. Les différents rôles d'une tuyère | 13 |
| 1.3. Paramètres principaux de performances | 14 |
| 1.4. Fonctionnement des tuyères supersoniques | 18 |
| 1.5. Différents types de tuyères | 22 |
| 1.6. Méthodes de conception des profils | 31 |
| 2. REGIME D'ÉCOULEMENT ET MODÈLE MATHÉMATIQUE | 39 |
| 2.1. Introduction | 39 |
| 2.2. Écoulement transonique | 39 |
| 2.3. Écoulement supersonique | 52 |
| 3. DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES | 61 |
| 3.1. Introduction | 61 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2. L'équation différentielle simple | 61 |
| 3.3. Système de deux équations différentielle partielles | 64 |
| 3.4. Domaine de dependance et champ d'influence | 69 |
| 3.5. Application pur étude d'écoulement irrotationnel supersonique plan axisymetrique | 70 |
| 3.6. Mise en œuvre numérique de la méthode des caractéristique | 75 |
| 3.7. Application pour études de tuyères à géométrie connues | 88 |
| 3.8. Application pour la conception des tuyères supersoniques | 95 |
| 3.9. Conclusion | 100 |
| 4 . Résultats et discusion | 101 |
| 4.1. Introduction | 101 |
| 4.2. La première partie :Conception de la tuyère classique | 101 |
| 4.3. La deuxième partie :Conception de la tuyère double galbe | 121 |
| CONCLUSION | 139 |
| LISTE DES SYMBOLES | |
| BIBLIOGRAPHIE | |

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 1.1 : Évolution du coefficient C_d en fonction de la géométrie du col et de nombre de Reynolds | 16 |
| Figure 1.2 : Principes de fonctionnement d'une tuyère | 18 |
| Figure 1.3 : Lignes de courant dans une tuyère à l'adaptation | 19 |
| Figure 1.4 : Régime de tuyère en sous – détente | 20 |
| Figure 1.5 : Lignes de courant et profil de pression du décollement naissant | 21 |
| Figure 1.6 : Lignes de courant et profil de pression du décollement étendu | 22 |
| Figure 1.7 : Tuyère conique | 23 |
| Figure 1.8 : Tuyère a contour profilé | 24 |
| Figure 1.9 : Tuyère annulaire | 25 |
| Figure 1.10 : Tuyère type détente déviation | 26 |
| Figure 1.11 : Tuyère double col | 27 |
| Figure 1.12 : Tuyère double détente | 27 |
| Figure 1.13 : Tuyère type bouchon | 28 |
| Figure 1.14 : Tuyère double galbe | 29 |
| Figure 1.15 : Nomenclature de la tuyère double galbe | 29 |
| Figure 1.16 : Le fonctionnement de la tuyère double galbe au niveau de la mer | 30 |
| Figure 1.17 : Le fonctionnement de la tuyère double galbe à haute altitude | 30 |
| Figure 1.18 : Structure de l'écoulement dans une tuyère idéale | 32 |
| Figure 1.19 : Champ iso-nombre de mach dans une tuyère idéale | 34 |
| Figure 1.20 : La méthode directe pour la conception des tuyères | 35 |
| Figure 1.21 : Distribution du nombre de mach | 36 |
| Figure 1.22 : Performance et conception d' une tuyère parabolique | 38 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 2.1 : Géométrie du col et système de coordonnées pour l'étude transsonique | 40 |
| Figure 2.2 : La ligne initiale pour la méthode des caractéristiques | 49 |
| Figure 2.3 : Model de calcul du débit massique le long de la ligne $\tilde{v} = 0$ | 51 |
| Figure 3.1 : Caractéristique d'une équation différentielle de premier ordre | 63 |
| Figure 3.2 : Résultat de caractéristiques pour un système de deux EDP de premier ordre | 68 |
| Figure 3.3 : Domaine de dépendance | 69 |
| Figure 3.4 : Champ d'influence | 69 |
| Figure 3.5 : Relation entre u , v et V, θ . | 73 |
| Figure 3.6 : Relation entre α et M | 73 |
| Figure 3.7 : Les caractéristiques d'un écoulement bidimensionnel irrotationnel et supersonique | 74 |
| Figure 3.8 : Schéma de calcul par différences finis pour méthode des caractéristique | 76 |
| Figure 3.9 : La méthode directe | 79 |
| Figure 3.10 : La méthode inverse | 79 |
| Figure 3.11 : Point intérieur sur l'axe de symétrie | 83 |
| Figure 3.12 : Point paroi direct | 84 |
| Figure 3.13 : Point paroi inverse | 86 |
| Figure 3.14 : Point axiale | 87 |
| Figure 3.15 : Tuyère supersonique a divergent conique | 88 |
| Figure 3.16 : Schéma de la ligne initiale et des points préspiciés | 89 |
| Figure 3.17 : Procédure de calcul d'un point interne à partir de la ligne initiale | 90 |
| Figure 3.18 : procédure de calcul d'un point axiale | 90 |
| Figure 3.19 : Procédure de calcul d'un point inverse | 91 |
| Figure 3.20 : Procédure de calcul de la zone d'expansion initiale | 91 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 3.21 : procédure de calcul d'un point direct | 92 |
| Figure 3.22 : Procédure de calcul de la partie divergente | 93 |
| Figure 3.23 : Croisement de deux caractéristiques pour former une onde de choc oblique | 93 |
| Figure 3.24 : Méthode de correction de calcul dans le cas de croisement de deux caractéristiques de même famille | 94 |
| Figure 3.25 : Données initiales du problème | 96 |
| Figure 3.26 : Localisation du mach de désigne sur l'axe X | 96 |
| Figure 3.27 : Les conditions imposées à la sortie de la tuyère | 97 |
| Figure 3.28 : Détermination du contour d'une tuyère supersonique | 99 |
| Figure 3.29 : Détermination du contour d'une tuyère supersonique plane | 99 |
| Figure 4.1: Profil de la tuyère Antares | 104 |
| Figure 4.2 : Evolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi | 106 |
| Figure 4.3 : Evolution de la pression sur l'axe et la paroi | 107 |
| Figure 4.4 : Profil de la tuyère Bérénice | 108 |
| Figure 4.5 : Evolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi | 111 |
| Figure 4.6 : Evolution de la pression sur l'axe et la paroi | 111 |
| Figure 4.7 : Schéma de calcul et maillage des tuyères Antares et Berenice | 112 |
| Figure 4.8 : Schéma de calcul et maillage de la tuyère conique | 113 |
| Figure 4.9 : Evolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi. | 114 |
| Figure 4.10 : Evolution de la pression sur l'axe et la paroi | 114 |
| Figure 4.11 : Comparaison des profils de la tuyère TIC $M_{ex}=3.1$ | 118 |
| Figure 4.12 : Evolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi | 118 |
| Figure 4.13 : Evolution de la pression sur l'axe et la paroi | 119 |
| Figure 4.14 : Evolution du nombre de mach de la pression sur la paroi de la tuyère | 119 |
| Figure 4.15 : Comparaison des profils de la tuyère TIC $M_{ex}=4.0$ | 120 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 4.16 : Evolution du nombre de machde la pression sur la paroi de la tuyère | 120 |
| Figure 4.17: Comparaison des profils de la tuyère double galbe | 123 |
| Figure 4.18 : Evolution du nombre de mach sur la paroi de la tuyère | 124 |
| Figure 4.19 : Evolution de la pression le long de la paroi de la tuyère | 124 |
| Figure 4.20 : Le maillage du premier galbe avant le tronçage | 128 |
| Figure 4.21 : Le maillage du premier galbe après le tronçage | 128 |
| Figure 4.22: L'allure de profil de la tuyère double galbe | 129 |
| Figure 4.23: L'allure de profil de la tuyère double galbe [14] | 129 |
| Figure 4.24: Le maillage du profil de la tuyère double galbe | 130 |
| Figure 4.25: L'évolution du nombre de mach le long de la paroi | 131 |
| Figure 4.26: L'évolution de la pression le long de la paroi | 132 |
| Figure 4.27: Le profil de la tuyère double galbe | 133 |
| Figure 4.28: Le maillage du profil de la tuyère double galbe | 134 |
| Figure 4.29: L'évolution du nombre de mach le long de la paroi | 134 |
| Figure 4.30: L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère | 135 |
| Figure 4.31: Le profil de la tuyère double galbe | 136 |
| Figure 4.32: Le maillage du profil de la tuyère double galbe | 137 |
| Figure 4.33: L'évolution du nombre de mach le long de la paroi de la tuyère | 137 |
| Figure 4.34: L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère | 138 |
| Tableau 4.2 :Comparaison des données géométriques de la tuyère « Antares » | 105 |
| Tableau 4.3 : Les coefficients du polynôme | 105 |
| Tableau 4.4 : Performances de la tuyère Antares | 106 |
| Tableau 4.5 : Les données de la tuyère « Berenice » | 108 |
| Tableau 4.6 :Données géométriques de la tuyère « Bérenice » | 109 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tableau 4.7 : Les coefficients du polynôme | 110 |
| Tableau 4.8 : Performances de la tuyère Bérenice | 110 |
| Tableau 4.9 : Les données de la tuyère | 113 |
| Tableau 4.10 : Les données de la tuyère | 117 |
| Tableau 4.11 : Les données de la tuyère double galbe | 123 |
| Tableau 4.12 : Les données de la tuyère double galbe | 127 |
| Tableau 4.13 : Les caractéristiques de la tuyère de base | 128 |
| Tableau 4.14 : Comparaison entre nos résultats et résultats de référence [14] | 130 |
| Tableau 4.15 : Les données de la tuyère double galbe | 132 |
| Tableau 4.16 : Comparaison entre nos résultats et résultats de référence [13] | 133 |
| Tableau 4.17 : Les données de la tuyère double galbe | 136 |
| Tableau 4.18 : Comparaison entre nos résultats et résultats de référence [13] | 136 |

INTRODUCTION

La tuyère est la partie où les gaz sont accélérés et éjectés du moteur. Sa forme caractéristique est due au besoin d'adapter la pression du flux de sortie à la pression ambiante pour des raisons de stabilité de combustion et de poussée.

Les tuyères interviennent dans beaucoup de structures telles que les missiles, les moteurs d'avion et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation des écoulements supersoniques réels.

C'est en 1954 que les études expérimentales sur les tuyères ont débuté. En parallèle avec les développements expérimentaux et numériques, ils ont amélioré les performances des tuyères de propulsion. De même, ils ont remarqué que les tuyères coniques délivrent une poussée avec des pertes considérables. Ce problème sera réglé par la recherche d'une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle.

Les tuyères doubles galbe (Dual Bell) permettent une adaptation en altitude par une simple inflexion du contour. L'écoulement est forcé à décoller de façon stable et symétrique à l'inflexion, générant ainsi, une poussée optimisée à basse altitude.

Au cours du vol, lorsque la pression atmosphérique chute sous une certaine valeur, l'écoulement s'attache soudainement dans toute la tuyère permettant ainsi, une détente plus importante pour une poussée plus élevée.

Le but de notre travail est de concevoir le profil de la tuyère double galbe et d'étudier l'évolution des paramètres de l'écoulement.

Pour mener à bien notre étude, nous avons réparti notre thèse en quatre chapitres :

- ✓ Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les tuyères :
 - ✓ Définition et rôle de la tuyère ;
 - ✓ Performances ainsi que le fonctionnement ;
 - ✓ Différents types de tuyère.
- ✓ Le deuxième est dédié à la présentation des différents types d'écoulements ainsi et les équations qui les gouvernes.
- ✓ Le troisième chapitre présente d'une manière détaillée les fondements de base de la méthode des caractéristiques pour la conception des profils de tuyères.
- ✓ Le quatrième chapitre set consacré à l'application de la méthode des caractéristiques au dimensionnement des tuyères classiques et double galbe. Des paramètres thermodynamiques, de pression et le nombre de Mach ont été calculés.
- ✓ Enfin une conclusion est tirée.

CHAPITRE 01

GENERALITES

1.1. Définition d'une tuyère :

Les tuyères sont des canaux d'éjection ayant pour rôle principal de transformer l'énergie de pression «enthalpie», en énergie cinétique. Les profils de ces tuyères sont tels qu'ils se confondent avec une ligne de courant. Leur détermination se fait généralement par la méthode des caractéristiques.

Au début, les tuyères ont été considérées comme étant des organes annexes. Leur rôle consistait essentiellement pour le cas d'un turboréacteur, d'assurer le fonctionnement du compresseur à un régime donné et cela par une adaptation convenable de sa forme géométrique. Les tuyères supersoniques dont le but essentiel est d'accélérer les gaz de combustion de vitesses subsoniques à des vitesses supersonique interviennent dans beaucoup de structures telles que les moteurs-fusées, les moteurs d'avion et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements réels. Les tuyères sont devenues des organes essentiels pour le moteur à réaction. Le rendement de ces machines, leurs poussées ainsi que leurs consommations dépendent énormément de la forme géométrique de la tuyère.

La poussée d'un moteur dépend principalement de la vitesse des produits de combustions à travers la section de sortie de la tuyère qui le propulse. Durant leur passage à travers une tuyère de Laval, les gaz

d'échappement sont accélérés de vitesses subsoniques à des vitesses supersoniques. Le passage de l'écoulement par ces différentes vitesses permet de visiter une tuyère convergente divergente en trois sections de convergent subsonique où l'écoulement passe d'une vitesse presque nulle à celle du son qu'il atteint au col pour enfin se détendre au sein du divergent supersonique. Cette division est appropriée, car d'une part, elle permet la détermination de la poussée totale développée et d'autre part, parce que

différentes méthodes d'analyse sont utilisées pour déterminer le champ d'écoulement dans chaque région.

La vitesse sonique atteinte au col par les gaz d'échappement est fixée par les conditions prévalentes au sein de la chambre de combustion. Si cette vitesse est atteinte, la tuyère est dite **adaptée** et une future détente dans le divergent l'augmente encore pour atteindre des valeurs supersoniques. Cette vitesse additionnelle dépend uniquement de la configuration de la paroi du divergent et de l'aire de la section de sortie. Depuis plusieurs années, la conception de la portion divergente supersonique reçoit une attention particulière et fait l'objet d'intenses et nombreuses recherches afin d'atteindre des vitesses de sortie et des poussées de plus en plus importantes.

L'optimisation du choix d'une tuyère de propulsion doit tenir compte en plus des calculs de dynamique des gaz qui nous intéressent tels que le matériau utilisé, le mode de fabrication de la paroi, les exigences de refroidissement, les limites admissibles de dimensionnement, etc.

1.2. Les différents rôles d'une tuyère : [15]

Surtout pour les avions volant à des vitesses supersoniques, la tuyère est un organe complexe devant remplir de multiples fonctions :

- ✓ Elle doit d'abord assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement du moteur, avec ou sans postcombustion ; ceci implique une possibilité de variation de la surface du col en fonction du débit et des conditions de température et de pression des gaz à évacuer.

- ✓ La tuyère doit aussi réaliser la détente optimale des gaz de combustion, c'est-à-dire la poussée maximale en régime de croisière. Ce problème n'est pas simple, car la section de sortie de la tuyère doit être raccordée au maître couple du moteur ou à la structure de l'avion par un carénage. Il est évident que la forme de ce carénage et par conséquent, les efforts de pression qu'il subira en vol du fait de l'écoulement extérieur dépendent des dimensions de sortie de la tuyère. Il ne servira à rien d'optimiser la tuyère au banc d'essai si des

dépressions importantes – Sources de traînée – devaient se produire en vol sur ce carénage de raccordement. Ainsi l'optimisation impose l'étude globale de l'arrière-corps.

- ✓ Aux régimes de vol intermédiaires, il faut encore que la tuyère ne provoque pas de pertes de poussée trop élevées du fait de son inadaptation.
Dans ces régimes, ce sont les sur-détentes qui sont à craindre et à éviter.
- ✓ En dehors du flux principal du moteur, il existe en général un ou plusieurs flux secondaires provenant soit de l'air de refroidissement, soit du piège à couche limite de la prise d'air. Ces flux, qui représentent jusqu'à 5 à 6% du débit total doivent être éjectés dans les meilleures conditions, soit dans des tuyères séparées, soit dans la tuyère principale elle-même.
- ✓ A l'atterrissage, il est parfois demandé à la tuyère de contribuer au freinage de l'avion. Il faut alors organiser un renversement de la poussée, le plus souvent par déviation du jet à la sortie de la tuyère principale.
- ✓ Enfin, un problème préoccupant, que nous ne citons ici que pour mémoire, est celui de bruit et il peut être demandé à la tuyère de participer à son atténuation.

1.3. Paramètres principaux de performances : [04]

1.3.1. La poussée :

C'est la force délivrée par la tuyère, elle est en fonction de la vitesse d'éjection des gaz et du débit qui la traverse. Elle est décrite par la relation (1.1) :

$$F = \dot{m}V_e + (P_e - P_o) \quad (1.1)$$

Où :

- ✓ P_e : Pression d'éjection des gaz ;
- ✓ P_o : Pression atmosphérique ;
- ✓ V_e : Vitesse d'éjection des gaz.

1.3.2. Le coefficient de poussée :

C'est une entité sans dimension représentant le rapport de la force de poussée sur le produit de la pression génératrice et la section de sortie de la tuyère. Elle caractérise les performances de la partie divergente ou encore la qualité de détente dans la section divergente :

$$C_F = \frac{F}{P_t S_c} \quad (1.2)$$

Où:

- ✓ F : La poussée ;
- ✓ S_c : Section du col ;
- ✓ P_t : La pression totale.

1.3.3. Le coefficient de décharge :

Quand on considère qu'un fluide est parfait sans viscosité ou qu'un écoulement est isentropique, c'est pour simplifier les calculs et réduire les équations qui décrivent un phénomène en aérodynamique ou mécanique des fluides en général. Mais en réalité, ce n'est pas vraiment la réalité, car cette hypothèse inclut immédiatement une erreur dans les résultats. Pour remédier à ça, on introduit dans ce dernier le coefficient de décharge qui est une entité sans dimension pour exprimer l'erreur commise par unité de résultats :

$$C_d = \frac{\text{Débit actuel réel}}{\text{Débit actuel isentropique}} \quad (1.3)$$

Tel que :

$$C_d = C_{dk} + C_{d\delta}$$

Où :

- ✓ C_{dk} : Effet de la géométrie du col sur la ligne sonique ;
- ✓ $C_{d\delta}$: Effet de la couche limite.

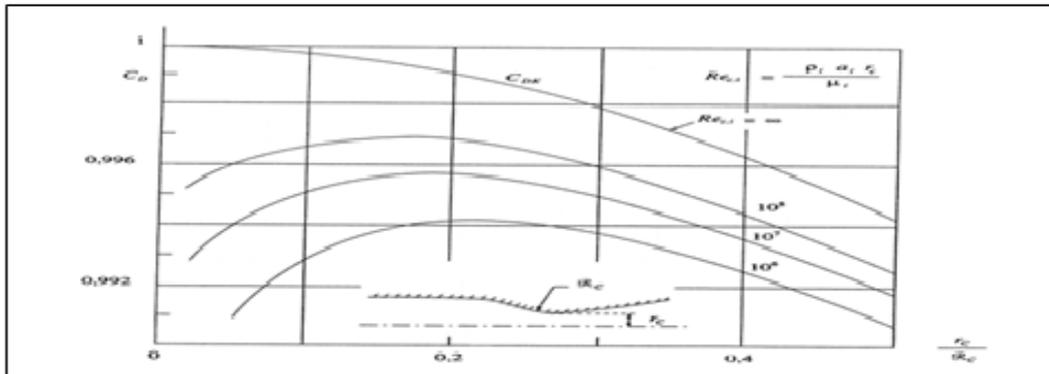


Figure 1.1 : Evolution du coefficient C_d en fonction de la géométrie du col et du nombre de Reynolds.

La figure ci-dessus montre l'évolution du coefficient C_d en fonction de ces paramètres.

1.3.4. La vitesse caractéristique :

C'est la vitesse mesurée au niveau du col noté C^* et aussi un repère en général pris pour exprimer les vitesses tout au long des conduites ou plus particulièrement dans les tuyères, il dépend de la nature du fluide et de sa température génératrice :

$$C = P_t / \dot{m} \quad (1.4)$$

Où :

- ✓ P_t : La pression totale ;
- ✓ \dot{m} : Le débit.

1.3.5. La vitesse effective :

C'est la vitesse réelle mesurée à la sortie d'une tuyère, elle est en fonction de la force de poussée générée par une tuyère adaptée et du débit qui la traverse :

$$V_{eff} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (1.5)$$

Où :

- ✓ F : La poussée ;
- ✓ \dot{m} : Le débit.

1.3.6. L'impulsion spécifique :

C'est une entité très importante dans le domaine de la propulsion noté I_s . On l'utilise généralement pour comparer les performances de différents propergols, elle est exprimée par la force de poussée par le produit du débit massique et de l'accélération gravitationnelle :

$$I_s = \frac{F}{\dot{m} g} \quad (1.6)$$

Où:

- ✓ F : La poussée ;
- ✓ \dot{m} : Le débit ;
- ✓ g : La gravité.

1.3.7. L'impulsion totale :

C'est l'intégrale de la poussée durant toute la durée de

fonctionnement noté par I : $I = \int_0^T F dt \quad (1.7)$

1.4. Fonctionnement des tuyères supersoniques : [02]

L'approche de la théorie monodimensionnelle des gaz calorifiquement parfaits permet de décrire les régimes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente et de comprendre la formation d'une onde de choc à l'intérieur de celle-ci. Nous proposons d'étudier une tuyère alimentée par un réservoir de gaz compressible ayant une pression et une température données.

La section du col de la tuyère est A_c et celle de la sortie est A_e . On va décrire l'écoulement au sein de la tuyère en fonction de la pression ambiante p_a . La différence entre la pression génératrice en amont P_i et la pression en aval p_a de la tuyère permet de créer un écoulement : celui-ci est supposé isentropique tout au long de la tuyère.

1.4.1. Régime subsonique et régime sonique :

Le premier régime d'écoulement est subsonique dans toute la tuyère (Figure 1.2). Nous abaissons progressivement la pression en aval de la tuyère, en partant d'une pression égale à celle du réservoir. Dès que la pression en sortie de la tuyère est inférieure à celle du réservoir, le gaz commence à parcourir la tuyère du réservoir vers la sortie. Le débit massique augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite quand l'écoulement au col est sonique.

Cette valeur limite correspond à un nombre de Mach égal à 1 (vitesse du son au col). Le débit est alors bloqué et la pression en aval tend vers p_{asup} .

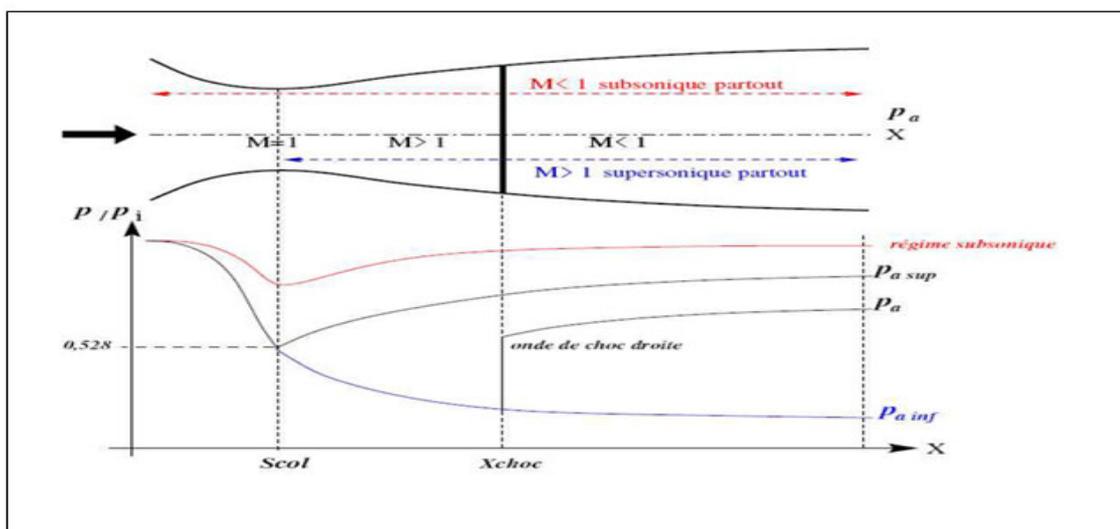


Figure 1.2: Principes de fonctionnement d'une tuyère.

1.4.2. Fonctionnement d'une tuyère en régime supersonique :

En diminuant la pression de sortie, le débit au col reste bloqué et l'écoulement dans le divergent de la tuyère passe en supersonique. Si l'on continue à diminuer la pression, le nombre de Mach au col, reste égal à 1 par contre, il est supérieur à 1 dans une portion de la partie divergente. A un endroit de la partie divergente (fonction de la pression de sortie), une onde de choc droite apparaît. Au-delà de ce choc l'écoulement se met à décélérer et $M < 1$.

Les effets visqueux rendent plus complexes les caractéristiques des régimes d'écoulement précités. On note p_e la pression à la lèvre de la tuyère. Suivant la valeur de la pression ambiante, plusieurs régimes de fonctionnement en supersonique sont possibles :

1.4.2.1. Adaptation :

A l'adaptation, l'écoulement le long de la tuyère suit une distribution de pression strictement décroissante depuis la pression chambre jusqu'à la pression de sortie qui est égale à la pression ambiante (p_a tend vers p_{air}). Au voisinage de la lèvre E (Figure 1.3), les lignes de courant moyennes du jet quittent le divergent sans subir aucune différence de pression statique. En quittant la lèvre E, la couche limite du jet entre en contact avec le fluide ambiant et l'entraîne dans son sillage, ce qui forme une couche de mélange.

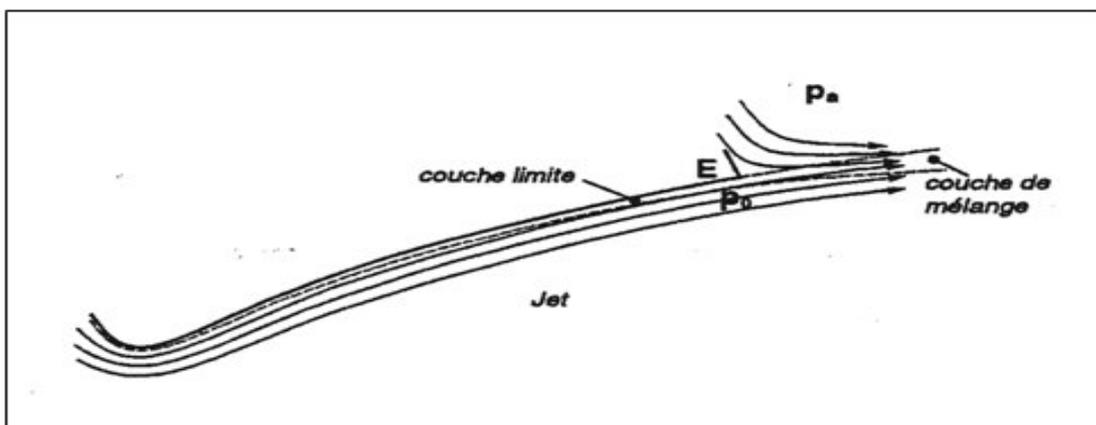


Figure 1.3: Lignes de courant dans une tuyère à l'adaptation, [04]

1.4.2.2. Régime de sous-détente :

Le régime de "**sous détente**" est un régime hors adaptation. Pour tout fonctionnement de la tuyère à une pression ambiante inférieure à celle d'adaptation p_{ainf} , l'écoulement de la tuyère se détend de la pression de sortie jusqu'à la pression p_a lorsqu'il quitte la lèvre E. Un faisceau d'ondes de détente centrées à la lèvre se forme permettant d'ajuster la pression de p_a à p_e (Figure 1.4).

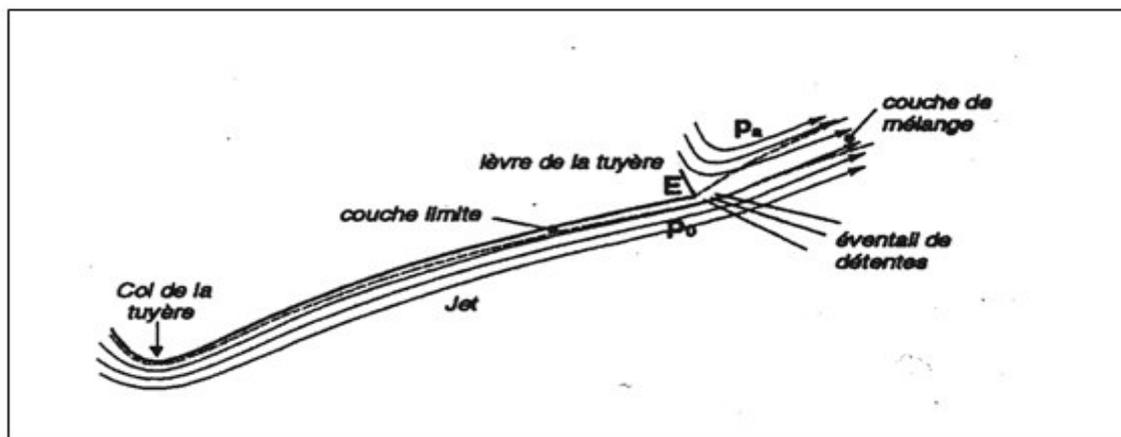


Figure 1.4: Régime de tuyère en sous – détente, [04].

1.4.2.3. Régime de sur-détente :

L'autre régime hors adaptation est le régime dit de "**sur détente**" lorsque la détente des gaz dans la tuyère continue jusqu'à une pression statique p_0 inférieure à la pression ambiante. En sur détente les gaz de la tuyère subissent un rapport de détente supérieure à celui de l'adaptation. La pression statique externe p_a est supérieure à la pression statique interne p_0 résultant de la détente des gaz propulsifs dans la tuyère. Une contre pression s'exerce alors sur la couche limite du jet et un choc d'intensité p_1/p_0 voisin de p_a/p_0 se forme dans le divergent de la tuyère.

1.4.2.3.1. Sur détente avec décollement naissant :

Lorsque l'intensité p_1/p_0 d'un gradient de pression adverse n'atteint pas la valeur critique au-delà de laquelle il y a décollement de la couche limite, le choc se forme à la lèvre de la tuyère (Figure 1.5) mais ne pénètre pas à l'intérieur de celle-ci. Il n'y a pas de point de décollement S situé en amont de la lèvre, car la couche limite décolle de la tuyère au niveau de la lèvre.

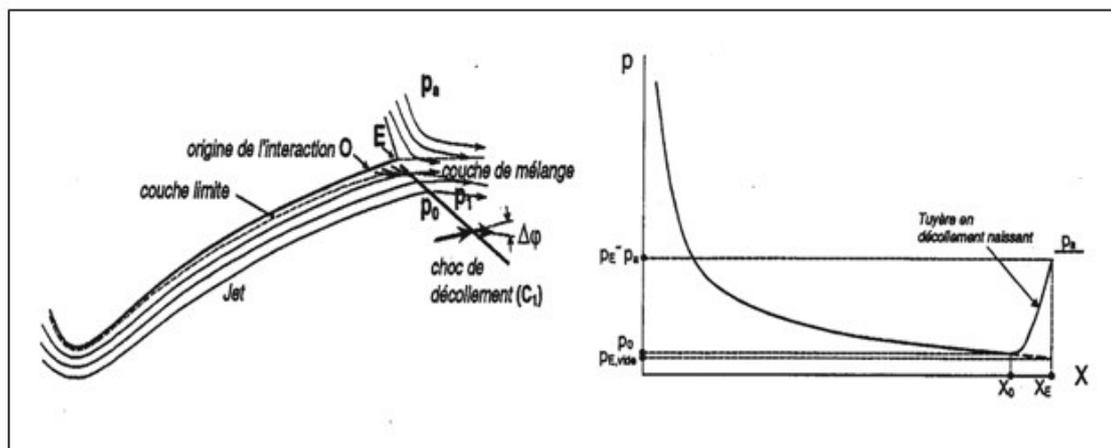


Figure 1.5: Lignes de courant et profil de pression du décollement naissant.

Toutefois la sous-couche subsonique de la couche limite ressent la contre-pression en aval à partir de l'origine O de l'interaction située en amont de la lèvre. Sur la distance d'interaction OE, la pression pariétale évaluée depuis la pression statique p_0 non perturbée jusqu'à la pression $p_1=p_a$ immédiatement en aval du choc est toujours sensiblement inférieure à la pression ambiante. Ce régime de sur détente dans lequel la tuyère ne subit qu'une amorce de décollement est qualifié de sur détente avec décollement naissant.

1.4.2.3.2. Sur détente avec décollement étendu :

Au-delà d'une certaine valeur critique d'intensité de compression, le choc d'intensité fait décoller la couche limite de la paroi sur laquelle elle s'était développée bien en amont de la lèvre (Figure 1.6). Le décollement ainsi créé

se produit dans la région d'un point S situé à l'intérieur de la tuyère et entraîne une profonde modification de l'écoulement de la couche limite initiale.

Au niveau du point de décollement S, il se produit une compression rapide de l'écoulement interne à la tuyère. Le choc de décollement C_1 fait dévier l'écoulement d'un angle $\Delta\varphi$.

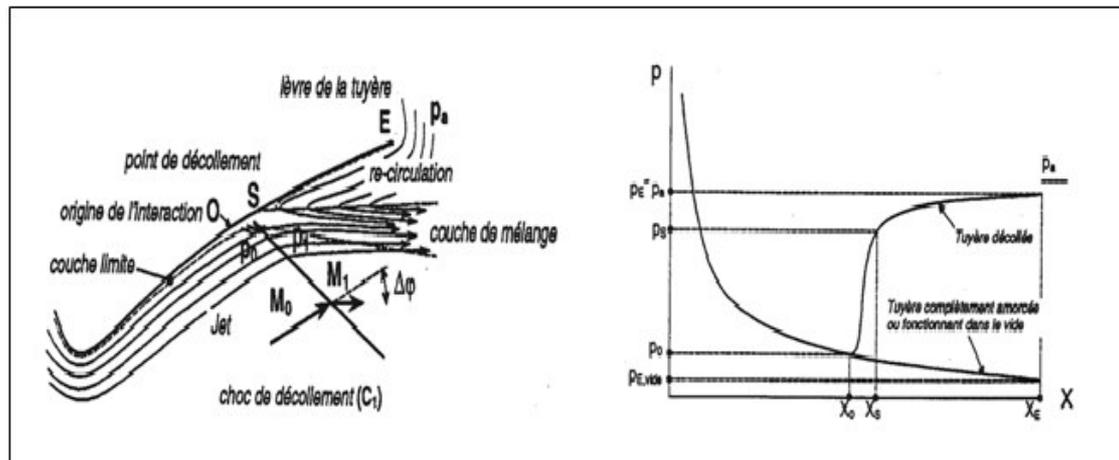


Figure 1.6 : Lignes de courant et profil de pression du décollement étendu.

1.5. Différents types de tuyères :

La poussée d'une tuyère n'est pas uniquement une image du taux d'accélération des gaz dans la partie divergente, mais aussi de la direction des gaz à la section de sortie.

Pour avoir une tuyère à poussée maximale, il faut ramener les gaz d'éjection à la direction axiale, et pour le faire, on est obligé d'augmenter la longueur de la tuyère qui induit automatiquement l'augmentation de son poids qui a un effet néfaste sur le rendement de propulsion de la tuyère. Donc le choix d'une tuyère est un compromis.

1.5.1. Tuyères conventionnelles :

✓ Les tuyères coniques :[5]

C'est la configuration la plus simple d'une tuyère supersonique, elle est largement utilisée pour le cas des moteurs simples qui délivrent de faibles poussées. Car cette configuration engendre, une perte considérable de

poussée causée principalement par la divergence de l'écoulement a la section de sortie, au lieu d'être axiale pour un maximum de poussée, cette perte est quantifiée par Malina [6] en introduisant un facteur qui dépend de l'angle de divergence du cône :

$$\lambda = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (1.8)$$

Où :

- ✓ α : angle de divergence de la tuyère

Le coefficient de poussée de ce type de tuyères devient :

$$C_F = \frac{P_e}{P_0} \frac{A_e}{A_0} + \frac{1 + \cos \alpha}{2} \frac{\rho_e V_e^2 A_e}{P_e A_e} \quad (1.9)$$

Où :

- ✓ P_e : Pression à la sortie de la tuyère ;
- ✓ P_0 : Pression totale ;
- ✓ A_e : Section de sortie de la tuyère ;
- ✓ A_0 : Section au col de la tuyère ;
- ✓ ρ_e : Masse volumique des gaz d'éjections.

Habituellement le demi-angle du divergent α utilisé est entre 15° et 30° , le coefficient de poussée développé est approximativement inférieur à 1.7% d'une tuyère idéal. Cette configuration est aussi vastement utilisée pour la comparaison entre la longueur et la poussée des tuyères de différentes configurations (Figure 1.7).

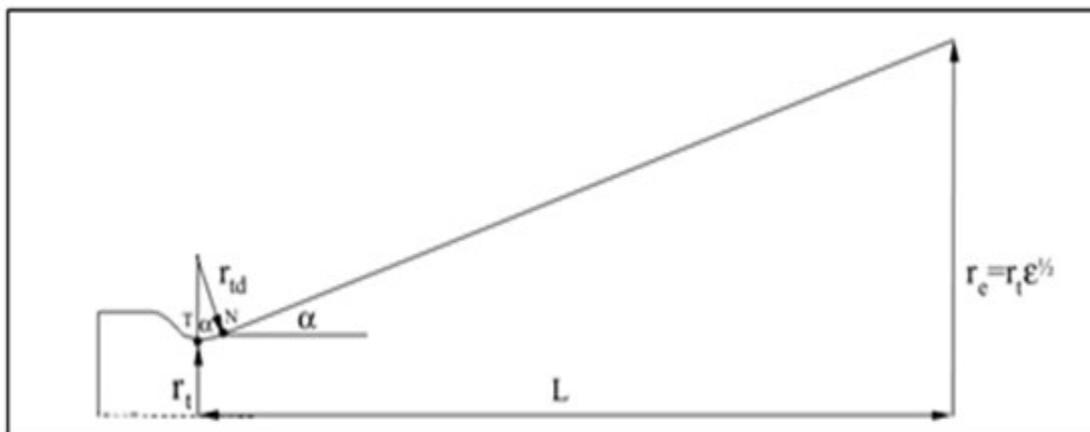


Figure 1.7: Tuyère conique

✓ Tuyère a contour profilé :[16]

Dans le cas d'une telle géométrie, il est possible de donner une valeur relativement importante à l'angle du divergent situé près du col, permettant ainsi la réalisation d'une importante détente. La seconde partie du divergent due à sa forme courbée tend à faire suivre l'écoulement en une direction axiale, limitant ainsi les pertes de poussée dues à la divergence rencontrée avec la tuyère conique.

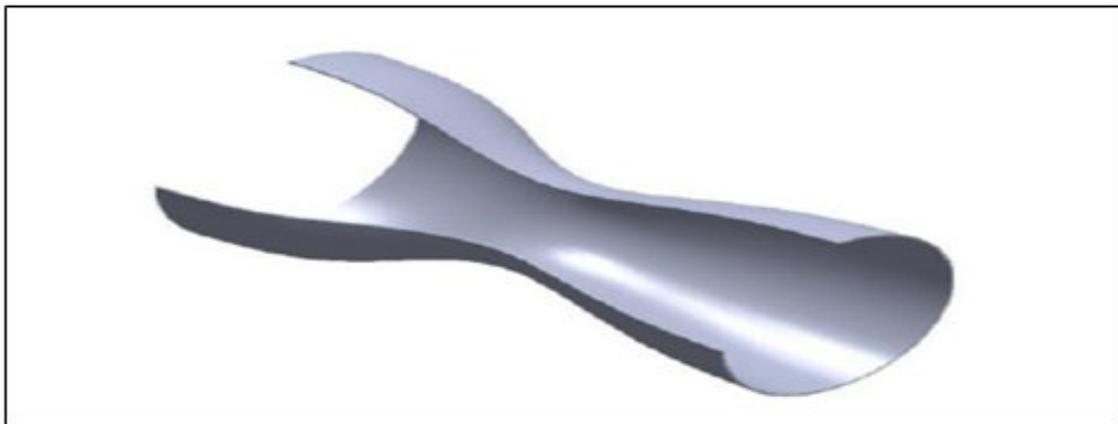


Figure 1.8 : Tuyère a contour profilé.

✓ Tuyère annulaire : [16]

Comme son nom l'indique, les gaz d'échappement passent à partir du col jusqu'à la sortie de la tuyère à travers une conduite sous forme d'anneau au lieu d'une section normale d'origine sur l'axe. Cet anneau est formé par un corps central au col et par une paroi externe qui définit le gabarit de la tuyère. Voir (Figure 1.9).

Ce type de configuration induit toujours une perte de poussée due faite que le contour est de bordures coniques et qu'à la sortie, le gaz d'éjection n'a pas d'une direction axiale. Dans ce cas, le facteur de perte de poussée est défini par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\alpha + \beta) \sin \beta + \cos \beta - \cos \alpha} \quad (1.10)$$

Où :

- ✓ α et β sont respectivement les angles formés par l'axe de la tuyère avec la paroi extérieure et la paroi intérieure.

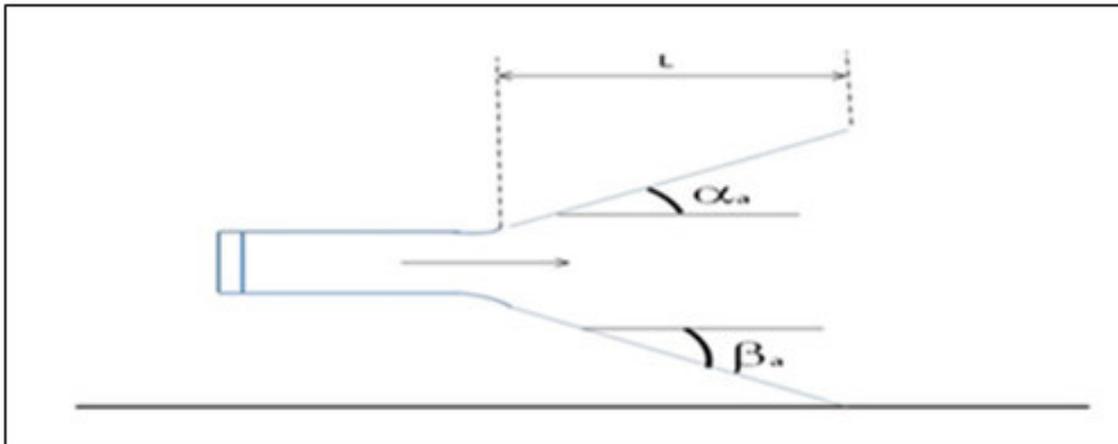


Figure 1.9 : Tuyère annulaire.

1.5.2. Tuyères adaptées en altitude :

Des progrès plus significatifs dans les performances d'une tuyère peuvent être réalisés à travers l'adaptation de la pression de sortie tuyère à la pression ambiante pendant la montée du lanceur dans l'atmosphère. Ceci peut être réalisé par la conception d'une tuyère qui offre une adaptation en altitude continue.

- ✓ Tuyère détente –déviation :

Dans ce type de tuyère, une chambre de combustion compacte se positionne autour de la ligne centrale et présente un col annulaire au voisinage de cette dernière. Dans ce cas, les gaz se dirigent dans la direction de l'écoulement du bouchon central qui réalise une rotation de l'écoulement en expansion à une direction presque axiale. C'est pourquoi on la qualifie de tuyère à détente-déviation « E.D ». [16]

Le concept de la tuyère « E.D » est le sujet de nombreuses études analytiques et expérimentales. Les résultats de ces études ont confirmé que les capacités de compensation en altitude de la tuyère « E.D » sont pauvres à cause des pertes d'aspiration et sur détente.[7]

Malgré la pauvre compensation en altitude, la tuyère « E.D » a un potentiel pour l'application aux étages supérieurs des moteurs fusé [8]

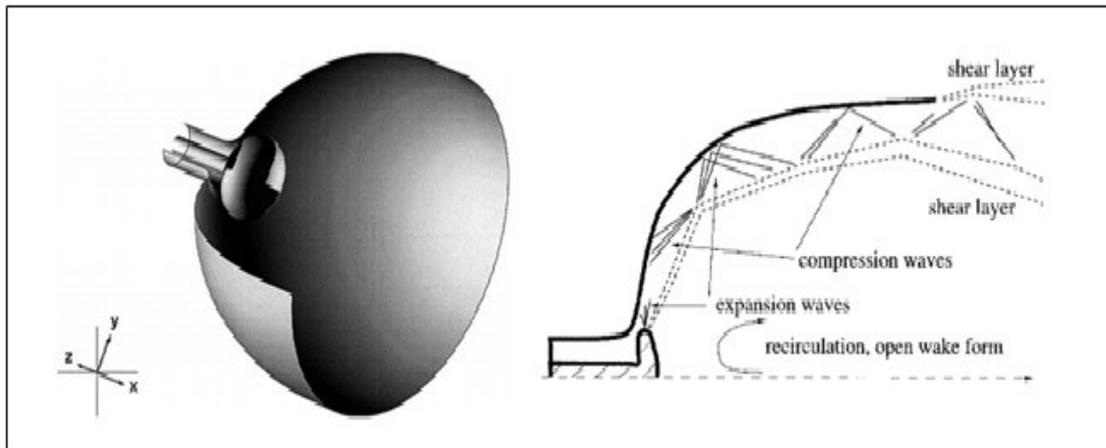


Figure 1.10 : Tuyère type détente déviation.

✓ Tuyère à doubles modes (Dual Mode Nozzle):

A. Tuyère à double col (Dual Throat Nozzle):[7]

La configuration de la tuyère à double col à basse altitude est : chambre de poussée (chambre de combustion + tuyère) externe fonctionnant avec la chambre de poussée interne en parallèle.

Dans ce mode d'opération, le moteur à un col large qui produit un rapport de détente modéré à une certaine altitude, la chambre de poussée externe s'éteint et l'opération continue seulement avec le moteur interne.

Dans cette configuration l'écoulement du moteur interne se détend et s'attache d'une manière super sonique au moteur externe en résultant un rapport de détente élevé pour le reste de la mission [8].

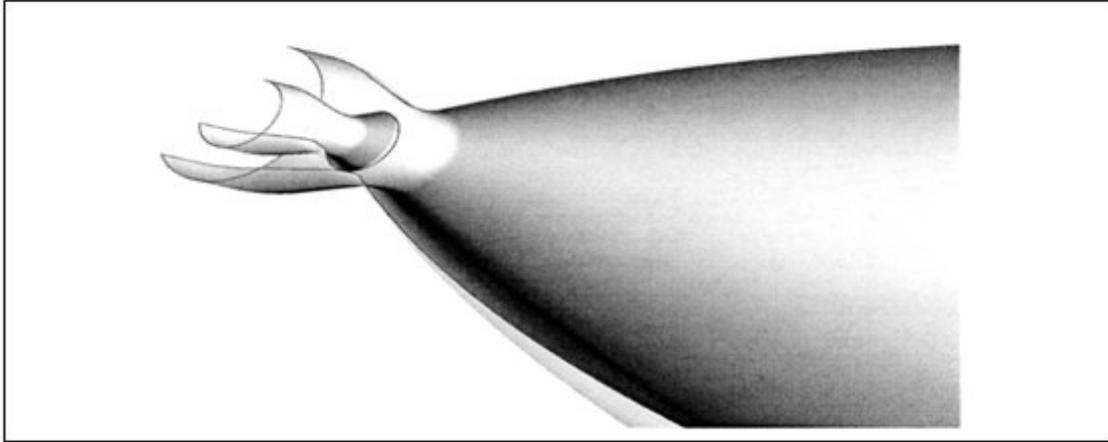


Figure 1.11 : Tuyère double col.

B- Tuyère à double détente (Dual - Expander Nozzle):[8]

A basse altitude, les deux chambres de poussée fonctionnent en partageant la même section de sortie, ce qui donne un rapport de surface de détente modéré.

Une chambre de poussée est éteinte à une altitude donnée permettant à l'autre chambre d'utiliser la totalité de la section de sortie, en créant un rapport de détente élevé pour le reste de la combustion.

En principe, les deux modes d'opération sont ceux d'une tuyère à double corps [8].

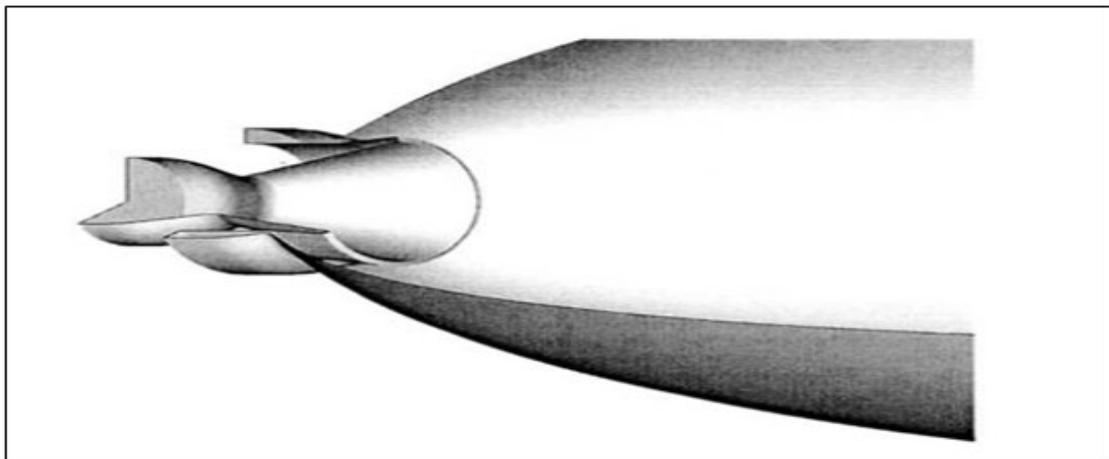


Figure 1.12 : Tuyère double détente.

✓ Tuyère type bouchon : [16]

Le col de ce type de tuyères possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur. L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence.

Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion P_t jusqu'à la pression ambiante P_a , voir (figure 1.13). La pousse de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente - divergente.

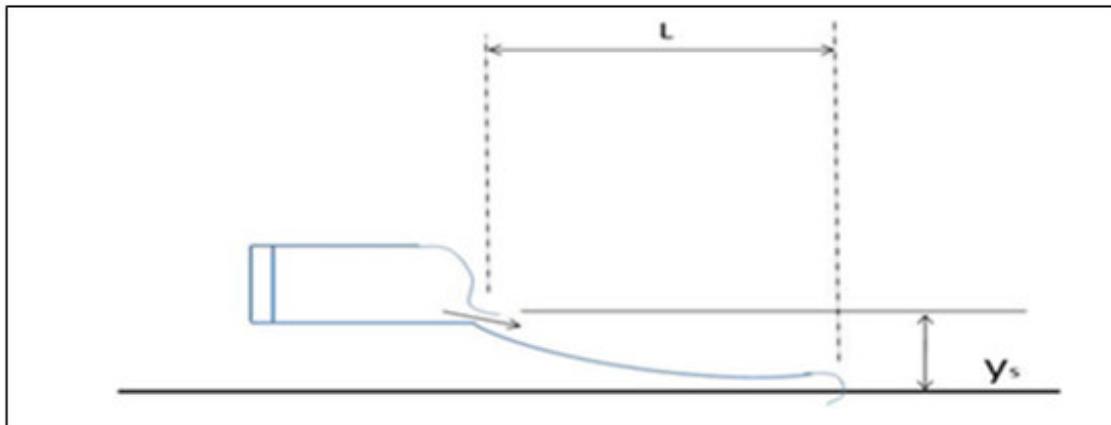


Figure 1.13 : Tuyère type bouchon.

✓ Tuyère double galbe (Dual Bell Nozzle) [13]

Avec ses deux modes de fonctionnement, la tuyère double galbe appartient à la famille des tuyères d'adaptation à deux étapes, c'est à deux modes de fonctionnement distingués. (Figures 1.14 et 1.15)

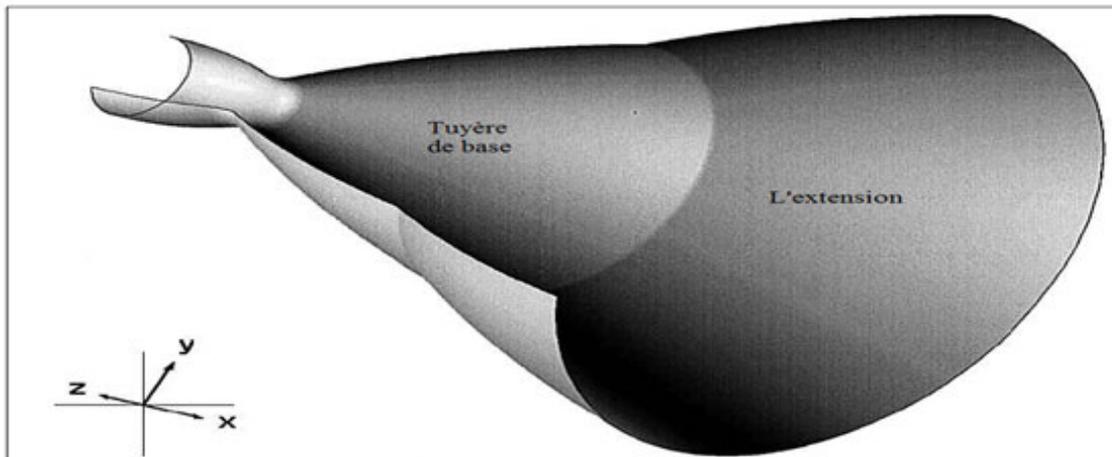


Figure 1.14 :Tuyère double galbe.

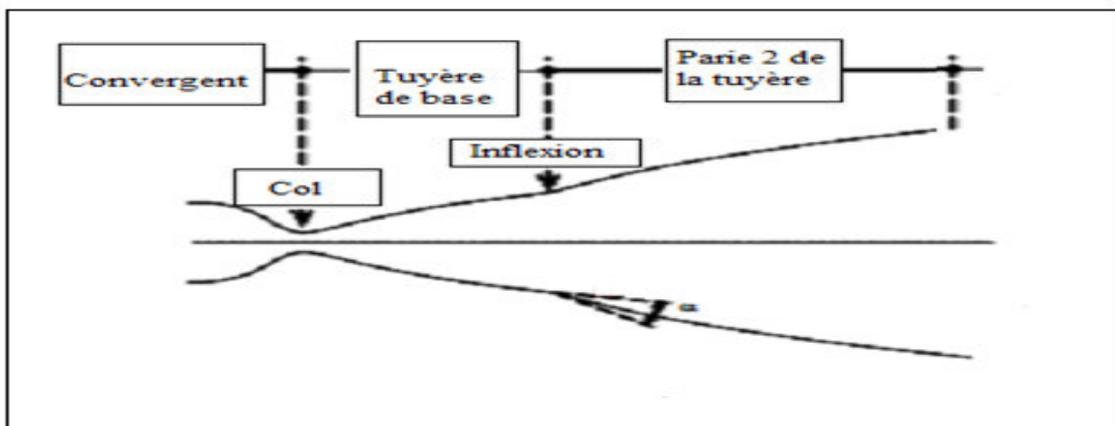


Figure 1.15 : Nomenclature de la tuyère double galbe [14].

A- Historique : [08]

La conception de ce type de tuyères a été étudiée dans le laboratoire de propulsion Jet Propulsion en 1949. En 1960, Rocketdyne a breveté la conception de cette tuyère et c'est que ces dernières années que l'Europe c'est intéressée à ce type de tuyère

B- Principe : [13]

La tuyère double galbe se compose d'une tuyère classique comme tuyère de base liée à un brusque changement d'angle de la tuyère d'extension.

Au niveau de la mer, les forces d'inflexion de flux se séparent de la paroi suivant une position symétrique et contrôlée : les charges secondaires

dangereuses sont évitées et en raison d'un plus petit rapport de section effective, la poussée au niveau de la mer augmente.

La tuyère double galbe se comporte comme une petite tuyère classique avec une section de sortie de A_b (section de sortie de la tuyère de base). Durant la montée du lanceur à une certaine altitude, l'écoulement dans la tuyère s'attache jusqu'à la section de sortie A_b .

Dans son mode de haute altitude, le rapport complet de la zone d'expansion est alors utilisé, ce qui entraîne un rendement plus élevé de performance. Le comportement est alors comparable à une tuyère à un seul galbe avec la section de sortie de l'extension est A_e .

Les figures 1.16 et 1.17 représentent respectivement le fonctionnement de la tuyère double galbe durant ces deux modes (niveau de la mer, haute altitude).

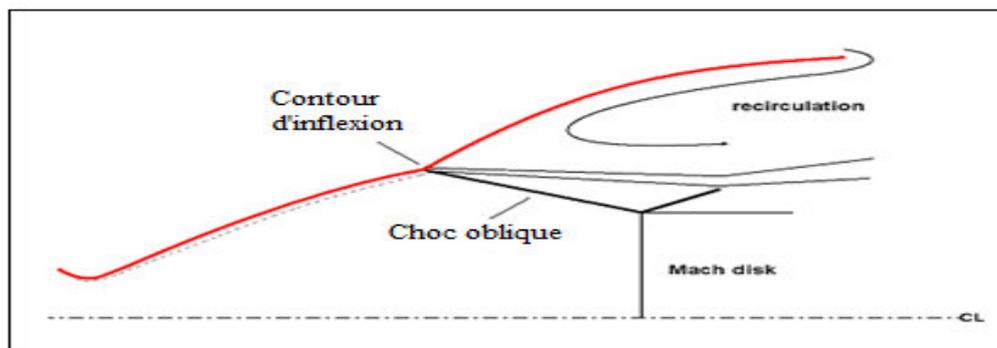


Figure 1.16: Le fonctionnement de la tuyère double galbe au mode de niveau de la mer.

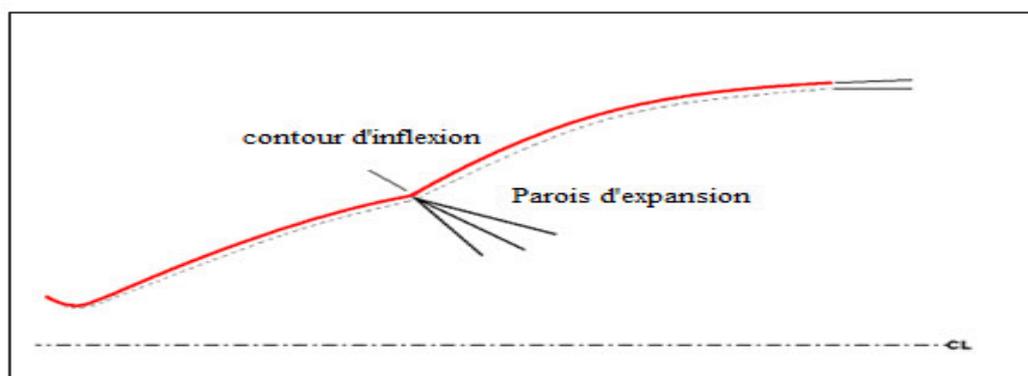


Figure 1.17: Le fonctionnement de la tuyère double galbe au mode de haute altitude.

C- Performances : [13]

La poussée générée par la tuyère double galbe durant le mode de fonctionnement au niveau de la mer peut être écrite comme suit :

$$F = \dot{m}v_2 + (P_{e,b} - P_a)A_b - \Pi_{\text{niveau de la mer}} \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) correspond à la poussée générée par la tuyère conventionnelle avec une section de sortie A_b , La pression moyenne de sortie de la tuyère de base est présentée par $P_{e,b}$, le terme $\Pi_{\text{niveau de la mer}}$ représente les pertes dues à la traînée d'aspiration induite produite par la recirculation de l'air ambiant dans la région séparée de l'extension de tuyère .

Durant le mode de fonctionnement de haute altitude, la poussée générée par la tuyère devient :

$$F = \dot{m}v_2 + (P_{e,ext} - P_a)A_e - \Pi_{\text{Haute altitude}} \quad (1.12)$$

Où :

- ✓ A_e : La section de sortie de la tuyère d'extension;
- ✓ $P_{e,ext}$: La pression moyenne de sortie de la tuyère d'extension ;
- ✓ $\Pi_{\text{Haute altitude}}$: Les pertes dues au contour de la tuyère non optimale.

1.6. Méthode de conception des profils : [4]

Aujourd'hui il existe deux grandes familles de tuyères à profil optimisé :

- a) Les tuyères idéales tronquées ;
- b) Les tuyères paraboliques.

Les principes de conception de ces profils sont succinctement décrits ci-après.

1.6.1. Tuyère conique :

La longueur de la tuyère conique peut-être exprimée par :

$$L_{\alpha, \text{cone}} = \frac{r_t(\sqrt{\varepsilon}-1) + r_{td}(\sec(\alpha)-1)}{\tan \alpha} \quad (1.13)$$

Où:

- ✓ r_t : Rayon du col ;
- ✓ r_{td} : Rayon de courbure du col ;
- ✓ ε : Rapport de détente.

1.6.2. Tuyère idéale:[5]

La tuyère idéale est celle qui produit un écoulement uniforme à la sortie. Le contour de la tuyère qui réalise ça peut être conçu avec la méthode des caractéristiques.

Le contour constitué des points T,N et E représente la portion divergente de la tuyère, après une détente initiale. Les TN la portion NE redresse l'écoulement dans la direction axiale.

TN définit aussi le nombre de Mach au point K , il est égal au nombre de Mach de conceptions obtenues à la sortie.

Avec la définition de la ligne de Mach NK, il est possible de construire les lignes de courants entre le point N et le point E par l'utilisation de la méthode des caractéristiques, ce qui raccorde l'écoulement et devient uniforme et parallèle à la sortie et ainsi, est complétée la conception de la tuyère [5]. (Voir figure 1.18).

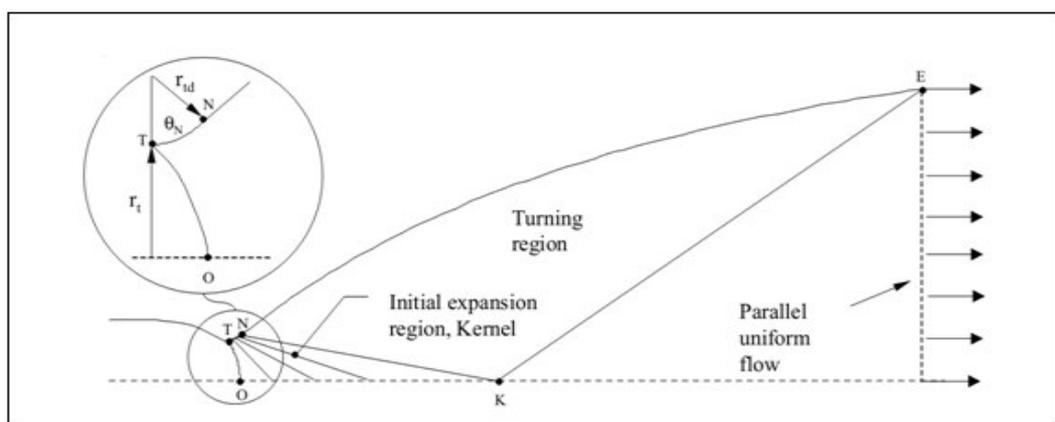


Figure 1.18: Structure de base de l'écoulement dans une tuyère idéal.

✓ Tuyère à contour idéal tronqué (TIC) : [4]

Les premières familles de tuyères qui ont équipé les moteurs-fusées à ergols liquides sont les tuyères à contour idéal tronqué, baptisées par les motoristes Européens tuyères TIC (Truncated Ideal Contour nozzle).

Le profil d'une tuyère TIC est obtenu à partir de celui d'une tuyère idéal de référence qui a été calculée afin d'engendrer dans le plan de sortie un écoulement parallèle à l'axe, de nombre de Mach uniforme M_E et à la pression uniforme correspondante P_E .

La tuyère idéale produit la détente optimale des gaz ainsi que le coefficient de poussée maximal lorsque la pression ambiante P_a est égale à la pression P_E , c'est-à-dire, à la pression d'adaptation. Toutefois il est irréaliste de vouloir équiper un moteur-fusée d'une tuyère idéale en raison de la masse et de l'inertie trop importantes qu'elle occasionnerait.

Dans les conditions d'adaptation d'un moteur type de premier étage d'Ariane 5, la longueur d'une telle tuyère représenterait 7 fois son rayon de sortie (voir Figure 1.16), soit 7 m pour un moteur de premier étage d'Ariane 5.

La dernière moitié du divergent de cette tuyère idéale ne contribuant qu'à hauteur de quelques pour cent à la poussée idéale, une telle tuyère peut donc être significativement tronquée.

La pression à l'abscisse de troncature étant plus élevée que la pression en sortie de tuyère idéale, le motoriste procède à la troncature d'une tuyère idéale qui a été définie à une pression de sortie inférieure à la pression nominale. La tuyère idéale tronquée finale produit une divergence de l'écoulement à laquelle est associée une perte de poussée.

A titre d'exemple, les tuyères équipant les moteurs Vikings du lanceur Ariane 4 sont des tuyères idéales tronquées.

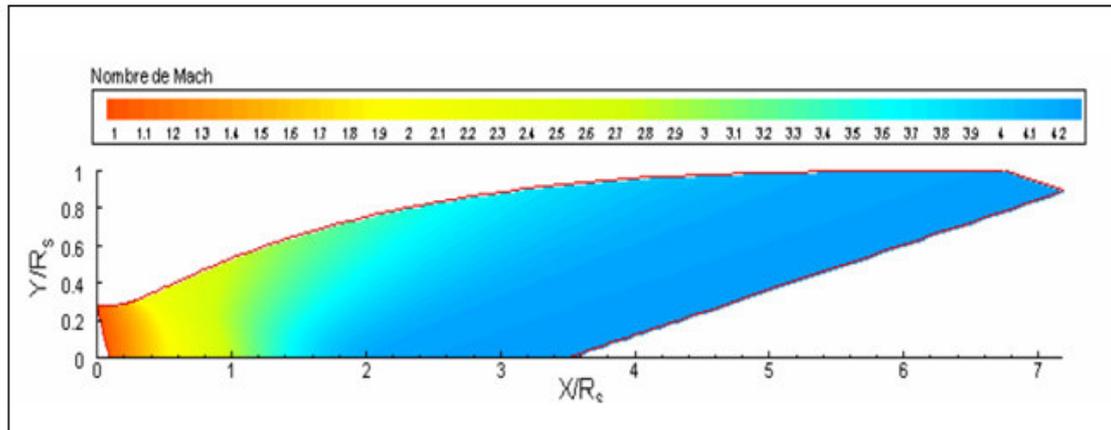


Figure 1.19 : Champ iso-nombre de mach dans une tuyère idéale

✓ Tuyère idéale tronquée compressée (Compressed Truncated Ideal Nozzles (CTIC)):

En 1966 Gorgish [17] propose une méthode de conception de tuyère extrêmement petite. La base de la méthode est de comprimer linéairement une tuyère TIC. Il suggère qu'en comprimant un contour idéal tronqué, on peut avoir de meilleures performances que les tuyères Rao pour la même enveloppe.

Une tuyère CTIC est obtenue en comprimant linéairement une tuyère TIC dans la direction axiale, pour obtenir la longueur de la tuyère désirée.

Cette procédure ramène la tuyère à une détente initiale plus rapide suivie par un retour d'écoulement plus sévère en comparant avec la tuyère TIC. Comme conséquence de fortes ondes de compression de droite vont se propager du contour compressé vers le champ d'écoulement. Si la compression est suffisamment forte, les lignes caractéristiques vont s'unir et former une onde de choc oblique de droite. L'onde de choc va augmenter la pression statique comme l'écoulement à travers l'onde de choc. Par contre, si l'onde s'étend à côté de la paroi tuyère, la pression de la paroi augmente ainsi la poussée augmente.

Cet effet est le mécanisme considéré par Gorgish [17], quand il avait fait la suggestion que la tuyère compressée rapporte de hautes performances

que les tuyères Rao. Toutefois, l'étude réalisée par Hoffman [19], trouve que la tuyère Rao est supérieure à la tuyère CTIC.

Néanmoins, la différence en performance était petite, il indique qu'une tuyère optimale CTIC est certainement une bonne tuyère.

1.6.3. Tuyère a poussée optimisée (Thrust Optimised Contoured Nozzles TOC)

Une méthode directe et élégante pour la conception des contours tuyères est la méthode utilisant le calcul variationnel. Guderly et Hantsh [18] ont formulé le problème de trouver le contour et la section de sortie d'une tuyère qui donne une pousse optimale pour des valeurs prescrites de pression ambiante et de la longueur de la tuyère.

Toutefois la méthode n'était pas largement adaptée jusqu'à ce que la méthode présentée par Guderly et Hantsh [18] fût significativement simplifiée par Rao [20]. Donc, le contour obtenu est souvent appelé par tuyère de Rao.

En Russie, ce type de tuyère est connu sous le nom de Shmyglevsky nozzle [21], puisque ce dernier a formulé indépendamment la même méthode en Russie. L'idée de base de la méthode est montrée dans la (figure 1.20).

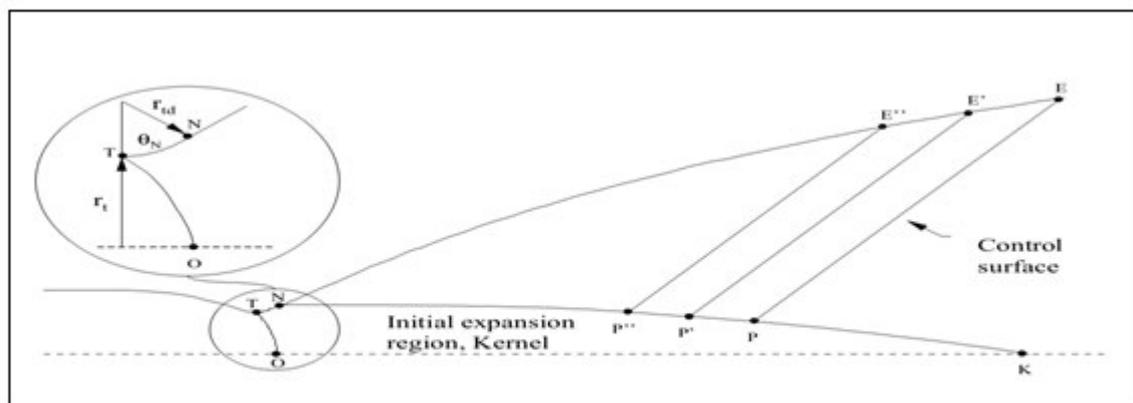


Figure 1.20 : La méthode directe pour la conception des tuyères.

Premièrement l'écoulement de Kernel est généré avec la méthode des caractéristiques, pour une variété de θ_N et une courbure de col donné r_{td} .

Pour des paramètres de conception donnés (comme ε et M_E ou ε et L). Les points P et N peuvent être trouvés en respectant les conditions suivantes :

- ✓ Le débit masse qui traverse PE égale au débit qui traverse NP.
- ✓ La tuyère résultante donne le maximum de poussée par l'utilisation du calcul variationnel.

Ces conditions sont formulées comme une relation spécifique qui doit être accomplie le long de PE et NP.

Une fois N et P sont connus, la ligne kernel TNKO est fixée et la ligne du contour NE est construite en suivant les étapes suivantes :

- ✓ Par la sélection des points P', P''...le long de la ligne NK, une série de surfaces de contrôles peuvent être générées P', E', P'', E''...,etc.. afin de définir les points E', E'' le long de la ligne NE (voir figure 1.20).
- ✓ Si le point P est égal à k, une tuyère idéale est produite par définition. Toutefois, quand $P \neq k$ un retournement d'écoulement plus sévère est obtenu en comparant avec la tuyère idéale. Des ondes de compression sont formées dans la région NPE et qui vont s'unir dans un choc d'écoulement de droite en aval de la surface de contrôle PE (voir figure 1.21) [5].

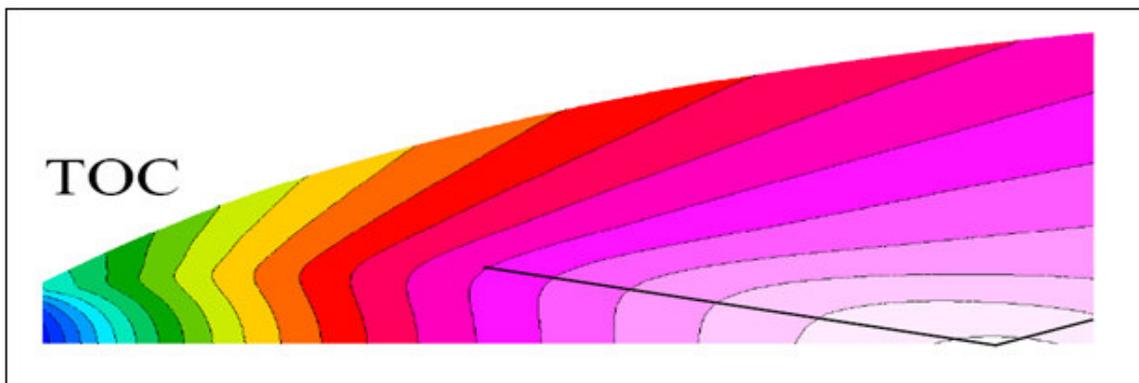


Figure 1.21 : distribution du nombre de Mach

1.6.4. Tuyère a contour parabolique (parabolic bell nozzles):

Puisque le calcul donnant la tuyère (TOC) est plutôt compliqué, Rao a proposé une géométrie parabolique asymétrique comme approximation de la tuyère TOC à partir du point d'inflexion jusqu'à la sortie tuyère.

$$\left(\frac{r}{r_t} + b\frac{x}{r_t}\right)^2 + c\frac{x}{r_t} + d\frac{r}{r_t} + e = 0 \quad (1.14)$$

Où :

- ✓ r_t : Rayon du col.

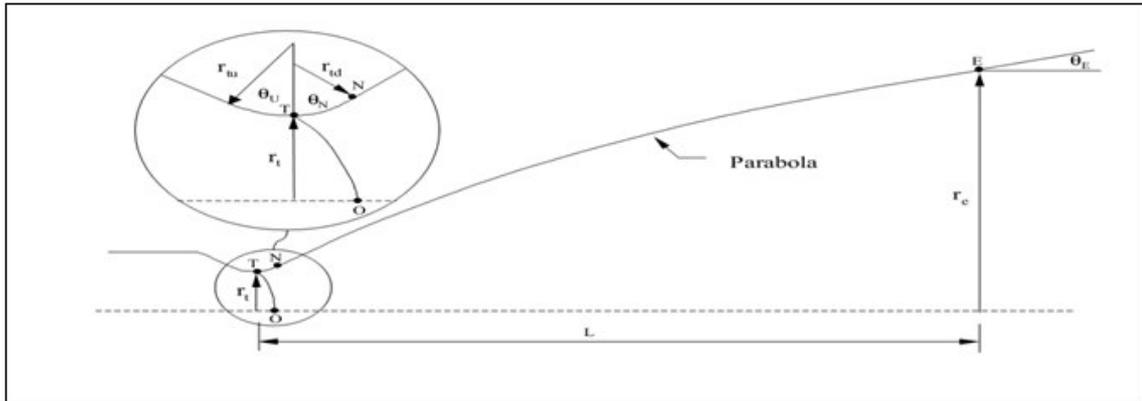
Ces types de tuyères sont appelées Thrust Optimised Parabolic Nozzles (TOP). Avec un contour parabolique asymétrique, qui est défini par les cinq variables indépendantes r_{td}, θ_N, L, r_e et θ_e (figure 1.22.a).

Avec des variables indépendantes, un nombre fini de contours peuvent être générés en sélectionnant des entrées appropriées. Ce type de tuyère peut être approxime aux tuyères TOC sans introduire de pertes de performances significatives.

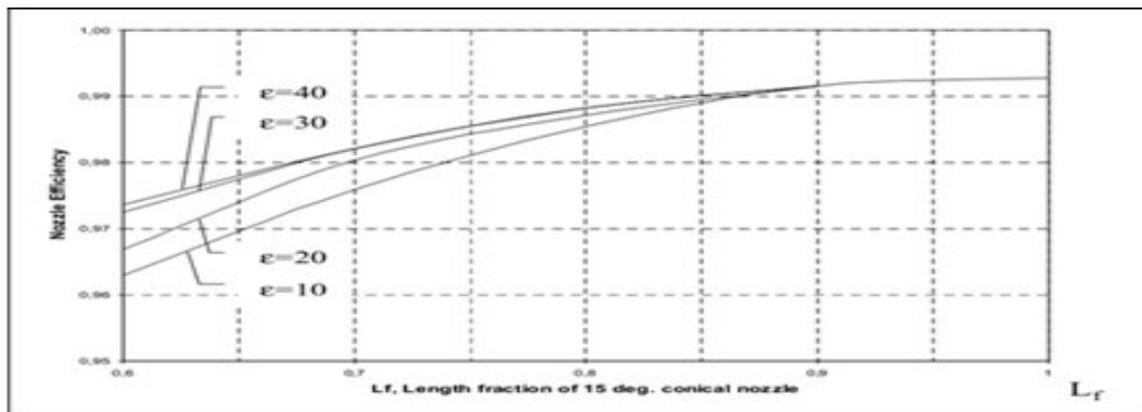
Des approximations paraboliques à un nombre de contours TOC sont montrées dans la (figure 1.22 b-c).

Ces graphes sont utilisés de la manière suivante :

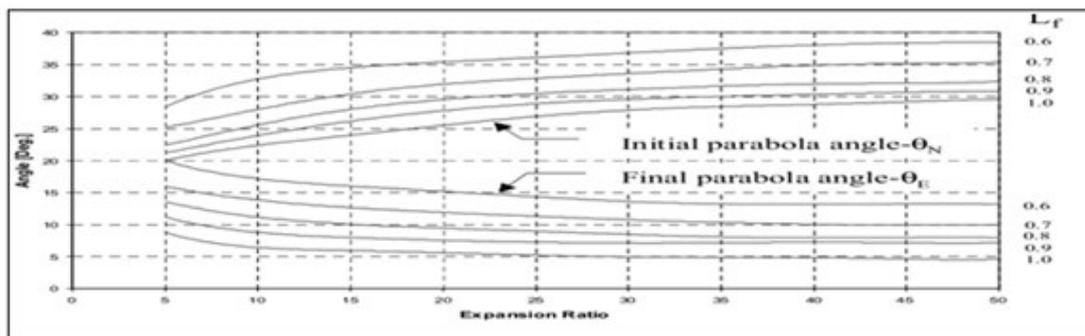
- ✓ Choisir la longueur de la fraction L_f qui donne le rendement tuyère voulu (Figure 1.22.b). En connaissant L_f et le rapport de détente correspondant, les angles paraboliques initiaux et finaux peuvent être déterminés à partir de la figure (1.22.C).
- ✓ On détermine la configuration de la tuyère en utilisant l'équation (1.14) [3].



a. géométrie de base de la tuyère parabolique.



b. Rendement de géométrie en fonction de la longueur d'une tuyère conique 15° équivalente.



c. L'angle initial et final contre un rapport de détente désiré (adapte par Rao)

Figure 1.22: performance et conception d'une tuyère parabolique.

CHAPITRE 2

RÉGIME D'ÉCOULEMENT ET MODÈLE MATHÉMATIQUE

2.1. Introduction :

Tout phénomène physique en mécanique ou en aérodynamique est exprimé mathématiquement par des expressions dites équations gouvernantes.

L'écoulement d'un fluide dans une tuyère supersonique est exprimé par des relations ou des équations de type elliptique dans la région convergente où l'écoulement est subsonique et de type hyperbolique dans la région divergente où l'écoulement est supersonique.

La résolution analytique de ce genre d'équations est possible pour des cas d'applications très simples. Par contre dans les cas d'études complexes, l'obtention d'une solution exacte est d'une difficulté majeure. Alors, le recours à la recherche d'une solution approchée et au développement des techniques de résolution numériques est indispensable.

Pour les équations elliptiques, la résolution se fait en utilisant de préférence une méthode basée sur les éléments finis, par contre dans le cas des équations hyperboliques, la méthode des caractéristiques est la plus utile.

2.2. Écoulement transsonique:

Le problème d'écoulement transsonique dans la partie col d'une tuyère supersonique est de très grande complexité ou les ingénieurs lui en accordent une importance capitale.

La solution de ce genre de configuration prend une très grande dépendance avec la géométrie du col et plus précisément avec le rapport

ρ_t / Y_t . Voir la figure (2.1) [1].

Un certain nombre d'approches ont été utilisées par plusieurs chercheurs pour donner réponse à ce problème, mais possèdent toutes un inconvénient majeur représenté par leur incapacité à décrire l'écoulement transsonique pour des tuyères à faible rayon au col. Parmi ces méthodes, on trouve celle de Kliegel & Levine [25], Hall [24] et celle de Sauer [23] qui est la plus utilisée et celle choisie pour notre étude.

2.2.1. Détermination de la ligne sonique par la méthode de Sauer :

La majeure source d'erreur commise lors du calcul des paramètres de l'écoulement dans la partie divergente est l'approximation utilisée pour déterminer ces paramètres au voisinage du col de la tuyère. La géométrie de la région du col est représentée sur la (figure 2.1).

Parmi plusieurs méthodes proposées pour l'étude de l'écoulement près du col, celle de Sauer [23] qui est la plus simple. Elle est présentée avec certains détails et avec deux objectifs principaux.

- ✓ Illustrer l'application de la technique de petites perturbations sur un problème pratique.
- ✓ Présenter une méthode qui donne une meilleure approximation de l'écoulement le long de la ligne sonique au niveau du col et ainsi définir une ligne initiale à partir de laquelle le calcul avec la méthode des caractéristiques pour l'écoulement supersonique pourra être entrepris.

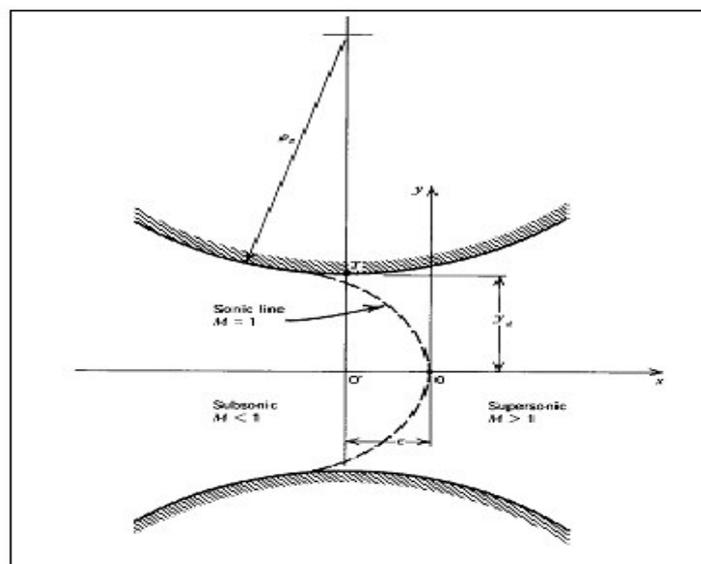


Figure 2.1: Géométrie du col et système de coordonnées pour l'étude transsonique.

Pour des géométries du col ou le rayon de courbure R_t et relativement grand par rapport à celui du col y_t . La méthode de Sauer [23] donne une meilleure approche.

Soit pour un écoulement en deux dimensions plan ou axisymétrique l'équation de perturbation est présentée par l'équation suivante :

$$(1 - M_\infty^2)u_x + v_y + \delta \frac{v}{y} = M_\infty^2 (\gamma + 1) \left(\frac{u}{U_\infty} \right) u_x \quad (2.1)$$

Où :

- ✓ U_∞ : vitesse non perturbée (à l'infini) ;
- ✓ δ : Switch ;
- ✓ M_∞ : Nombre de Mach a un point infiniment lointain.

Avec : $\delta = 0$ pour un écoulement plan et $\delta = 1$ pour un écoulement axisymétrique.

L'écoulement au col est essentiellement sonique et unidimensionnel. La vitesse de l'écoulement libre non perturbé U_∞ est choisie égale à la vitesse critique du son. Le nombre de Mach correspondant M_∞ est égal à l'unité.

On remplaçant ces valeurs dans l'équation précédente (2.1) on obtient :

$$(\gamma + 1) \left(\frac{u}{a^*} \right) u_x - v_y - \delta \frac{v}{y} = 0 \quad (2.2)$$

Où:

- ✓ a^* : vitesse du son au col.

On pose comme $u' = \left(\frac{u}{a^*} \right)$ et $v' = \left(\frac{v}{a^*} \right)$ avec u' et v' les composantes de la vitesse de perturbation. Ces valeurs placées dans l'équation (2.2) on obtient la relation ci-dessous:

$$(\gamma + 1)u'u'_x - v'_y - \delta \frac{v'}{y} = 0 \quad (2.3)$$

Du fait que l'écoulement au col est unidimensionnel, on définit la fonction potentielle Φ pour la vitesse. Elle est égale à :

$$\Phi = U_{\infty}x + \phi = a^* (x + \phi') \quad (2.4)$$

Où:

- ✓ $\phi'(x, y)$: Potentiel adimensionnel de la vitesse de perturbation.

Et par conséquent,

$$u \sim = a^* + u = a^* (1 + u') = \Phi_x = a^* (1 + \Phi_x') \quad (2.5)$$

$$v \sim = v = a^* v' = \Phi_y = a^* \Phi_y' \quad (2.6)$$

Où:

- ✓ $u \sim$: Composante axiale de la vitesse adimensionnelle ;
- ✓ $v \sim$: Composante radiale de la vitesse adimensionnelle.

Avec $u' = \Phi_x'$ et $v' = \Phi_y'$. La substitution des équations (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.3) donne :

$$(\gamma + 1) \Phi' \Phi'_{xx} - \Phi'_{yy} - \delta \frac{\Phi'_y}{y} = 0 \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est une équation différentielle partielle non linéaire décrivant le potentiel de vitesse de perturbation adimensionnelle du régime transsonique.

La technique commune utilisée pour la résolution des équations différentielles partielles non linéaires est l'approximation de la solution à une série de puissances avec les coefficients de puissances. Ces derniers sont choisis de façon à satisfaire l'équation différentielle partielle et également les conditions aux limites sur la paroi.

Dans notre cas, le potentiel de vitesse $\Phi'(x, y)$ peut être représenté en séries de puissances de y et ces coefficients sont fonction de x .

Sachant que $u(x, y)$ est une fonction de y , Φ'_x doit être une fonction de y , par conséquent sauf les puissances en y sont inclus dans les séries de puissances, nous obtenons alors :

$$\Phi'(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i}(x) y^{2i} = f_0(x) y^0 + f_2(x) y^2 + f_4(x) y^4 + \dots \quad (2.8)$$

Où :

$$\checkmark \quad y^0 \equiv 1$$

donc les expressions correspondantes à Φ'_x , Φ'_{xx} , Φ'_y et Φ'_{yy} sont :

$$\Phi'_x = f'_0(x) + f'_2(x) y^2 + f'_4(x) y^4 + \dots \quad (2.9)$$

$$\Phi'_{xx} = f''_0(x) + f''_2(x) y^2 + f''_4(x) y^4 + \dots \quad (2.10)$$

$$\Phi'_y = 2f_2(x) y + 4f_4(x) y^3 + \dots \quad (2.11)$$

$$\Phi'_{yy} = 2f_2(x) + 12f_4(x) y^2 + \dots \quad (2.12)$$

Tel que : $f'_0(x)$ est une notation de $df_0(x)/dx$. On remplace les quatre dernières équations dans l'équation (2.7) on obtient :

$$\begin{aligned} & y^0 \left[(\gamma+1) f'_0 f''_0 - 2f_2 - 2\delta f_2 \right] \\ & + y^2 \left[(\gamma+1) (f'_0 f''_2 + f''_0 f'_2) - 12f_4 - 2\delta f_4 \right] + y^4 [\dots] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour que l'équation (2.13) soit satisfaite pour toute valeur arbitraire de x et y , les puissances de y doivent impérativement être nulles.

L'approximation se fait en tronquant le polynôme à un certain nombre fini de termes, Sauer [23] tronque ce polynôme à partir du terme $f_4(x) y^4$.

Mettons les coefficients de y^0 et y^2 égale à zéro et résolvons pour $f_2(x)$ et $f_4(x)$:

$$f_2(x) = \frac{(\gamma+1)f_0'f_0''}{2(1+\delta)} \quad (2.14)$$

$$f_4(x) = \frac{(\gamma+1)(f_0'f_2'' + f_0''f_2')}{4(3+\delta)} \quad (2.15)$$

Finalement $f_2(x)$ et $f_4(x)$ peuvent être obtenues à partir de la dérivé de $f_0(x)$, pour:

✓ $y=0$: $u'(x,0) = f_0'(x)$ valeur qui définit la vitesse adimensionnelle de perturbation le long de l'axe x.

Par conséquent, sachant $u'(x,0)$ on peut déterminer $f_2(x)$ et $f_4(x)$ à partir de l'équation (2.14) et (2.15).

Si la distribution de la vitesse de perturbation axiale est supposée linéaire, alors $u'(x,0)$ est donnée par :

$$u'(x,0) = f_0'(x) = \alpha x \quad (2.16)$$

Où :

✓ α : Constante appelée coefficient de la vitesse de perturbation linéaire adimensionnelle.

Injectant l'équation (2.16) dans les équations (2.14) et (2.15) pour obtenir :

$$f_2(x) = \frac{(\gamma+1)\alpha^2 x}{2(1+\delta)} \quad (2.17)$$

$$f_4(x) = \frac{(\gamma+1)^2 \alpha^3}{8(1+\delta)(3+\delta)} \quad (2.18)$$

Remplaçons ces deux dernières équations dans l'équation (2.8) :

$$\Phi'(x,y) = f_0(x) + \frac{(\gamma+1)\alpha^2 x}{2(1+\delta)} + \frac{(\gamma+1)^2 \alpha^3}{8(1+\delta)(3+\delta)} \quad (2.19)$$

Qu'on remplace aussi dans l'équation (2.5) et (2.6) :

$$u'(x, y) = \alpha x + \frac{(\gamma+1)\alpha^2 y^2}{2(1+\delta)} \quad (2.20)$$

$$v'(x, y) = \frac{(\gamma+1)\alpha^2 xy}{(1+\delta)} + \frac{(\gamma+1)^2 \alpha^3 y^3}{2(1+\delta)(3+\delta)} \quad (2.21)$$

Les équations (2.20 et 2.21) représentent les vitesses de perturbations adimensionnelles avec une distribution axiale linéaire.

Alors la courbe critique ou $M=1$ et $(u'^2 + v'^2) = a^*$ peut être obtenue comme suit :

✓ Premièrement

En utilisant les équations (2.20) et (2.21) pour obtenir l'équation suivante

$$u'^2 + v'^2 = a^* = (a^* + u)^2 + v^2 = a^{*2} \left[(1 + u')^2 + v'^2 \right] \quad (2.22)$$

Divisant par a^{*2} on aura :

$$(1 + u')^2 + v'^2 = 1 \quad (2.23)$$

En négligeant les puissances de u' et de v' , nous obtenons :

$$u' = 0 \quad (2.24)$$

Et finalement la courbe critique ou $M=1$ est décrite par l'équation suivante :

$$x = -\frac{(\gamma+1)\alpha y^2}{2(1+\delta)} \quad (2.25)$$

✓ Deuxièmement

On doit localiser l'origine du système de coordonnées de la tuyère.

De la (figure 2.1) $v \sim v' = v = 0$ à $x = \varepsilon$ et $y = y_t$. On remplace ces valeurs de x et y dans (2. 25), nous obtenons :

$$\varepsilon = -\frac{(\gamma+1)\alpha y_t^2}{2(1+\delta)} \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) représente l'origine du système de coordonnées relatif au col de la tuyère.

Reste maintenant à déterminer la constante α défini auparavant, elle peut être déduite géométriquement par:

$$\rho_t = \frac{(1+\delta)}{(\gamma+1)\alpha^2 y_t} \quad (2.27)$$

Où:

✓ ρ_t : La masse volumique du gaz a l'état de stagnation.

On peut calculer alors :

$$\alpha = \left[\frac{1+\delta}{(\gamma+1)\rho_t y_t} \right]^{1/2} \quad (2.28)$$

Où:

✓ y_t : représente le rayon au col.

Et donc :

$$\varepsilon = -\frac{y_t}{2(3+\delta)} \left[\frac{(\gamma+1)(1+\delta)}{(\rho_t/y_t)} \right]^{1/2} \quad (2.29)$$

La relation entre les vitesses dimensionnelles (u^{\sim}, v^{\sim}) et les vitesses adimensionnelles de perturbation (u', v') est :

$$u^{\sim}(x, y) = a^*(1 + u') \quad \text{Et} \quad v^{\sim}(x, y) = a^* v' \quad (2.30)$$

Plusieurs travaux ont été entrepris dans le sens de l'application de la méthode de Sauer [23]. Les résultats obtenus montrent que la méthode de Sauer donne des résultats très précis dans les cas où le rapport de rayon de courbure sur le rayon du col ρ_t / Y_t est supérieur à deux, par contre, les résultats sont relativement moins exactes dans le cas contraire.

2.2.2. Détermination de la ligne sonique par la méthode de Kliegel & Levine :

Dans le cas où la méthode de Sauer [23] perd son efficacité, la méthode de Kliegel & Levine [25] vient pour y remédier. Elle propose une méthode de calcul qui donne une meilleure exactitude que celle de Sauer pour un rapport de rayons ρ_t / Y_t inférieure à deux.

L'algorithme de calcul de cette méthode est brièvement présenté ci-dessous du fait qu'elle ne fait pas l'objet de ce mémoire. En outre, les tuyères utilisées pour la comparaison dans cette étude possèdent des rapports de rayons supérieurs ou égaux à deux. Donc la méthode de Sauer [23] est préconisée.

La méthode de Kliegel & Levine [25] est fondée sur le développement en séries de la vitesse radiale et axiale en coordonnées cylindriques en termes de puissances inverses du paramètre $\left(\frac{1}{R+1}\right)$.

Alors:

$$\begin{aligned} \frac{u^{\sim}(x, y)}{a^*} = & 1 + \frac{u_1(r, z)}{(R+1)} + \frac{1}{(R+1)^2} [u_1(r, z) + u_2(r, z)] \\ & + \frac{1}{(R+1)^3} [u_1(r, z) + 2u_2(r, z) + u_3(r, z)] + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{v^-(x,y)}{a^*} = & \left[\frac{\gamma+1}{2(R+1)^2} \right]^{1/2} \left\{ \frac{v_1(r,z)}{(R+1)} + \frac{1}{(R+1)^2} \left[\frac{3}{2}v_1(r,z) + v_2(r,z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R+1)^3} \left[\frac{15}{8}v_1(r,z) + \frac{5}{2}v_2(r,z) + v_3(r,z) \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Où :

$$u_1 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} + z \quad (2.33)$$

$$v_1 = \frac{1}{4}r^3 - \frac{1}{4}r + rz \quad (2.34)$$

$$u_2 = \frac{2\gamma+9}{24}r^4 - \frac{4\gamma+15}{24}r^2 + \frac{10\gamma+57}{288} + z \left(r^2 - \frac{5}{8} \right) - \frac{2\gamma-3}{6}z^2 \quad (2.35)$$

$$v_2 = \frac{\gamma+3}{9}r^5 - \frac{20\gamma+63}{96}r^3 + \frac{28\gamma+93}{288}r + z \left(\frac{2\gamma+9}{6}r^3 - \frac{4\gamma+15}{12}r \right) + rz^2 \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} u_3 = & \frac{556\gamma^2+1737\gamma+3069}{10368}r^6 - \frac{388\gamma^2+1161\gamma+1881}{2304}r^4 \\ & + \frac{304\gamma^2+831\gamma+1242}{1728}r^2 - \frac{2708\gamma^2+7839\gamma+14211}{82944} \\ & + z \left(\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{384}r^4 - \frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{192}r^2 + \frac{92\gamma^2+180\gamma+639}{1152} \right) \\ & + z^2 \left(-\frac{7\gamma-3}{8}r^2 + \frac{13\gamma-27}{144} \right) + \frac{4\gamma^2+57\gamma+27}{144}z^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} v_3 = & \frac{6836\gamma^2+23031\gamma+30627}{82944}r^7 - \frac{3380\gamma^2+11391\gamma+15291}{13824}r^5 \\ & + \frac{3424\gamma^2+11271\gamma+15228}{13824}r^3 - \frac{7100\gamma^2+22311\gamma+30249}{82944}r \\ & + z \left(\frac{556\gamma^2+1735\gamma+3069}{1728}r^5 - \frac{388\gamma^2+1161\gamma+1881}{576}r^3 + \frac{304\gamma^2+831\gamma+1242}{864}r \right) \\ & + z^2 \left(\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{192}r^3 - \frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{192}r \right) - z^3 \left(\frac{7\gamma-3}{12}r \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Où :

$$r = \frac{y}{y_t} ; \quad z = \left(\frac{2R}{\gamma+1} \right)^{1/2} \frac{x}{y_t} ; \quad R = \frac{\rho_t}{y_t}$$

2.2.3. Détermination de la ligne initiale légèrement supersonique:

Pour initier à la solution de l'écoulement bidimensionnel et irrotationnel avec la méthode des caractéristiques (voir chapitre 3) la présence d'une ligne sonique dans laquelle $M > 1$ est obligatoire.

La ligne sonique déterminée par la méthode de Sauer n'est plus utilisable, car les lignes de Mach provenant de la ligne sonique interceptent la paroi du col situé avant le point T. Le point T est une condition aux limites à la paroi.

La méthode des caractéristiques ne peut pas être initiée de La ligne où $\tilde{v} = 0$ illustrée dans la figure (2.2) elle est légèrement distante de la ligne sonique, elle peut être prise comme une ligne initiale pour cette méthode.

Sur la paroi au niveau du col, l'angle et la vitesse radiale sont nuls, par conséquent la vitesse de l'écoulement est parallèle à cette dernière.

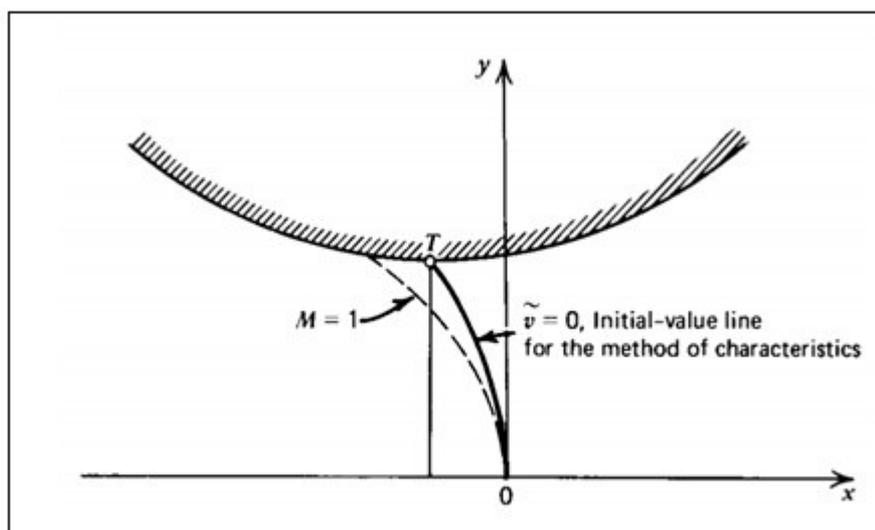


Figure 2.2 : La ligne initiale pour la méthode des caractéristiques.

L'équation de la ligne est obtenue à partir de l'équation (2.21) en posant que $v \sim = 0$:

$$x = -\frac{(\gamma+1)\alpha y^2}{2(3+\delta)}$$

Les vitesses dimensionnelles $u \sim$ et $v \sim$ peuvent être obtenues le long de la ligne $v \sim = 0$ à chaque point où x et y sont spécifiées. On supposant que l'écoulement est isentropique, la vitesse du son n'est qu'une fonction connue de l'angle de l'écoulement et sachant que la vitesse de l'écoulement V et celle du son, on peut tirer le nombre de Mach ainsi que les paramètres thermodynamiques de l'écoulement P, ρ, T à partir des paramètres de stagnation P_0, ρ_0, T_0 et du nombre de Mach.

Les paramètres aérodynamiques et thermodynamiques étant définis et la ligne initiale est utilisée pour initier le calcul numérique de l'écoulement supersonique dans la partie divergente à l'aide de la méthode des caractéristiques.

2.2.4. Calcul des performances de la tuyère au col :

A- Le débit massique :

La figure (2.3) présente un modèle géométrique pour la détermination d'un élément du débit $d\dot{m}$ traversant un élément de surface dA .

$$d\dot{m} = \rho V \cdot dA = \rho u \tilde{2\pi y dy} \quad (2.39)$$

Le débit massique à travers la ligne $v \sim = 0$ est obtenu en intégrant l'équation (2.39).

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{y_t} \rho u \tilde{y dy} \quad (2.40)$$

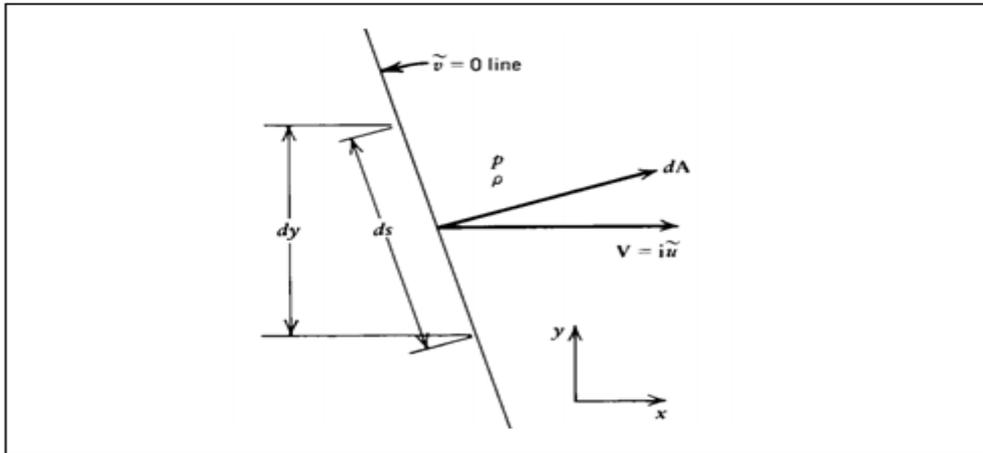


Figure 2.3 : Modèle de calcul du débit massique le long de la ligne $\tilde{v} = 0$.

B- Le débit massique unidimensionnel :

Le débit massique unidimensionnel est donné par la relation suivante :

$$\dot{m}_{1-D} = \rho^* A_t a^* \quad (2.41)$$

Où :

✓ ρ^* : La masse volumique du gaz au col.

Sachant ρ^* et a^* peuvent être calculés à partir de n'importe quelle point sur l'axe de la ligne sonique.

C- Le coefficient de décharge :

Le coefficient de décharge peut être donné par la relation suivante :

$$C_D = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{1-D}} \quad (2.42)$$

Où:

✓ \dot{m}_{1-D} : Le débit massique unidimensionnel

D-La poussée :

Le long de la ligne $\tilde{v} = 0$, la poussée est la somme des forces de pressions et des moments générés par l'écoulement, à partir de la figure 2.3 on obtient la relation suivante:

$$dF = 2\pi y p dy + \tilde{u} \dot{d}m \quad (2.43)$$

Replaçons $\dot{d}m$ par sa valeur. On obtient :

$$dF = 2\pi (p + \rho \tilde{u}^2) y dy \quad (2.44)$$

L'intégrale de cette équation donne:

$$F = 2\pi \int_0^{y_t} (p + \rho \tilde{u}^2) y dy \quad (2.45)$$

Les équations (2.40) et (2.45) sont résolus en utilisant une méthode numérique d'intégration par exemple : la méthode de trapèze après avoir choisi le nombre de points qui constitue la ligne sonique ainsi que les paramètres de l'écoulement à chaque point.

2.2.5. Conclusion :

Chaque une des méthodes présentées ci-dessus, complète l'autre du faite que chacune présente son efficacité dans le domaine où l'autre diverge. Donc avant d'entamer le processus de calcul de la ligne sonique, il faut d'abord faire un choix de la méthode adéquate à utiliser en se basant sur le rapport p_t / Y_t qui définit la géométrie du col.

2.3. Écoulement supersonique :

Le problème de l'écoulement dans les tuyères supersoniques consiste à résoudre simultanément les équations de conservation, telles que : l'équation de conservation de masse dite de continuité ; les équations de conservation de la quantité de mouvement ou les équations de Navier stocks et enfin l'équation de conservation de l'énergie.

Ces équations sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution est relativement très difficile par manque de conditions aux limites qui garantissent l'unicité de la solution. Dans notre cas, la limite c'est la paroi qui est elle-même non définie ou inconnue, pour cette raison le recours à des hypothèses simplificatrices est quasiment obligatoire.

- ✓ L'écoulement est supposé stationnaire ;
- ✓ Les forces volumiques agissantes à distance telles que : la nullité de la gravité est les forces magnétiques ou électriques ;
- ✓ Négligences des forces d'interaction moléculaires ;
- ✓ Le gaz est supposé calorifiquement parfait ou C_p et γ sont constants ;
- ✓ Le gaz est supposé parfait ou pas d'effet de viscosité.

2.3.1. Les équations gouvernantes :

A- Equation d'état :

En plus des lois de conservation, il est important de connaître les équations d'état du fluide. Pour un fluide parfait, ces équations prennent leurs formes algébriques les plus simples suivantes :

$$P = \rho R t \quad (2.46)$$

Et
$$h = C_p t \quad (2.47)$$

Pour un écoulement adiabatique et isentropique où la dissipation est nulle ou négligeable, on a :

$$S = S(p, \rho) \text{ Et } \rho = \rho(p) \quad (2.48)$$

Pour un gaz parfait, l'équation (2.48) devient $P\rho^{-\gamma} = cst$ le long d'une ligne de courant.

Si l'écoulement est bien uniforme alors cette dernière est valable tout le long de l'écoulement.

Pour un écoulement isentropique, la vitesse V et la pression P sont reliées par la relation de Bernoulli donnée par l'équation (2.49)

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cst \quad \text{Le long d'une ligne de courant} \quad (2.49)$$

B- Equation de conservation de la masse :

- ✓ Forme différentielle conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.50)$$

- ✓ Forme différentielle lagrangienne

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V \quad (2.51)$$

- ✓ Adaptation au cas d'étude

Prenons en considération l'ensemble des hypothèses simplificatrices.
L'équation (2.50) peut s'écrire pour notre modèle de calcul comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial X}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \delta \frac{\rho v}{y} = 0 \quad (2.52)$$

C- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

- ✓ Forme intégrale Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho V dV = - \int_{S_0} p n ds + \int_{S_0} \tau \cdot n ds + \int_{V_0} \rho f dV \quad (2.53)$$

- ✓ Forme intégrale eulérienne

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} dV = - \int_{S_0} \rho V V \cdot n ds - \int_{S_0} p n ds + \int_{S_0} \tau \cdot n ds + \int_{V_0} \rho f dV \quad (2.54)$$

- ✓ Forme différentielle conservative

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V V) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho f \quad (2.55)$$

Où :

- ✓ \mathbf{T} : Tenseur des contraintes de Cauchy

✓ f : Force appliquée à l'unité de masse

✓ Forme différentielle Lagrangienne-Loi de Newton

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho f \quad (2.56)$$

✓ Adaptation au cas d'étude

Interprétons les hypothèses simplificatrices dans l'équation (2.55) en l'écrivant sous la forme éclatée, on aboutit à :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.57)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (2.58)$$

A- Equation de conservation d'énergie :

✓ Forme différentielle conservative :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E V) = \rho f \cdot V - \nabla \cdot (pV) + \nabla \cdot (\tau \cdot V) - \nabla \cdot Q \quad (2.59)$$

✓ Forme différentielle Lagrangienne :

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \rho f \cdot V - \nabla \cdot (pV) + \nabla \cdot (\tau \cdot V) - \nabla \cdot Q \quad (2.60)$$

✓ Adaptation au cas d'étude :

L'équation (2.59) peut s'écrire comme suit :

$$\delta \dot{W}_{shaft} + \delta \dot{W}_{shear} - \delta \dot{Q} + \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - p_t = 0 \quad (2.61)$$

Prenons en considération les hypothèses simplificatrices citées ci-dessus, on aboutit à l'équation (2.62).

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = 0 \quad (2.62)$$

B- Equation d'Euler :

Les équations d'Euler ne sont qu'un jumelage des équations de conservation (2.50) (2.55) et (2.59). On suppose que l'écoulement est permanent, adiabatique et sans forces extérieures.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \\ \frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V V) = -\nabla p \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E V) = -\nabla \cdot (p V) \end{cases} \quad (2.63)$$

C- Vue thermodynamique :

L'équation d'énergie pour l'étude multidimensionnelle d'un fluide compressible en absence d'un transfert thermique, forces de cisaillement, travail et les forces exercés par la paroi, est donnée par l'équation (2.62) :

En termes de l'enthalpie totale $H = h + V^2/2$, l'équation (2.62) peut être écrite comme suit :

$$\frac{DH}{Dt} = 0 \quad (2.64)$$

Donc :

$$H = h + V^2/2 = cst \text{ le long d'une ligne de courant} \quad (2.65)$$

D- Expression de la vitesse du son :

La vitesse du son (a) est un paramètre très important pour l'étude d'un écoulement compressible. C'est une grandeur purement thermodynamique qui représente la variation de la masse volumique provoquée par les perturbations ou les fluctuations de la pression. Elle est traduite par la formule (2.66)

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.66)$$

Du fait que l'écoulement est isentropique alors : $a = \sqrt{\gamma r t}$

Pour un écoulement isentropique, l'équation (2.67) exprimée en dérivée partielle peut s'écrire en dérivée totale donc :

$$dp = a^2 d\rho \quad (2.67)$$

Si on dérive par rapport au temps on aura :

$$\frac{Dp}{Dt} - a^2 \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.68)$$

Dans certains cas, l'équation (2.68) est utilisée à la place de l'équation d'énergie (2.62) quand l'écoulement est isentropique, car la dérivée de l'enthalpie dans l'équation (2.62) est nulle.

Dans d'autres cas, cette équation est utilisée pour éliminer la dérivée de la densité des équations gouvernantes.

L'équation de continuité peut être représentée sous la forme :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0 \quad (2.69)$$

Substituant l'équation (2.68) dans (2.69), on obtient l'équation de continuité écrite sous une autre forme en fonction de la vitesse du son :

$$\frac{D\rho}{Dt} + a^2 \rho \nabla \cdot V = 0 \quad (2.70)$$

E- Equation de mouvement en termes de la fonction potentielle

ϕ :

On a :

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz = u dx + v dy + \omega dz \quad (2.71)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y \\ \omega = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z \end{cases} \quad (2.72)$$

Les équations qui gouvernent un écoulement irrotationnel permanent peuvent être combinées et réduites à une équation différentielle partielle qui est fonction du potentiel de vitesse.

L'équation de quantité de mouvement (2.57) et (2.58) réécrite pour un écoulement irrotationnel permanent compressible et adiabatique dans sa forme compacte est donnée par la formule suivante :

$$(V \cdot \nabla) p + \rho (V \cdot \nabla) \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0 \quad (2.73)$$

Donc l'équation de continuité est :

$$(V \cdot \nabla) p + \rho a^2 \nabla \cdot V = 0 \quad (2.74)$$

Combinant les deux dernières équations, on obtient :

$$(v \cdot \nabla) \left(\frac{v^2}{2} \right) - a^2 \nabla \cdot v = 0 \quad (2.75)$$

L'équation (2.75) est une équation très importante généralement appelée équation de la dynamique des gaz.

Écrivant l'équation (2.75) en coordonnées cartésiennes ;

$$\begin{aligned} (u^2 + a^2)u_x + (v^2 - a^2)v_y + (\omega^2 - a^2)\omega_z + uv(u_y + v_x) \\ + u\omega(\omega_x + u_z) + v\omega(\omega_y + u_z) = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Et en termes de la fonction potentielle ;

$$\begin{aligned} (\phi_x^2 + a^2)\phi_{xx} + (\phi_y^2 - a^2)\phi_{yy} + (\phi_z^2 - a^2)\phi_{zz} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} \\ + 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} + 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

L'équation (2.76) est une équation différentielle partielle non linéaire du potentielle de vitesse ϕ décrivant un écoulement multidimensionnel irrotationnel.

Sans condition simplificatrice, il est extrêmement difficile de trouver une solution exacte à cette équation.

Pour un écoulement plan ou axisymétrique, les équations (2.75 et 2.76) s'écrivent comme suit :

$$(u^2 + a^2)u_x + (v^2 - a^2)v_y + 2uvu_y - \delta \frac{a^2 v}{y} = 0 \quad (2.77)$$

$$(\phi_x^2 + a^2)\phi_{xx} + (\phi_y^2 - a^2)\phi_{yy} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} - \delta \frac{a^2 \phi_y}{y} = 0 \quad (2.78)$$

Où:

- ✓ $\delta = 0$ pour un écoulement plan et $\delta = 1$ pour un écoulement axisymétrique.

Et

Pour un écoulement irrotationnel, $\omega = 0$ on a :

$$u_y + u_x = 0 \quad (2.79)$$

2.3.2. Conclusion:

Les deux équations (2.77) et (2.79) représentent un système qui décrit la variation de la vitesse axiale et radiale dans le cas d'un écoulement supersonique irrotationnel plan ou axisymétrique.

La résolution de ce système d'équations fait recourt à des techniques numériques avancées.

La méthode des éléments finis est généralement la plus utilisée dans le cas où la géométrie de la tuyère est définie au préalable. Mais par faute de conditions aux limites sur la paroi, l'utilisation de la méthode des caractéristiques pour le calcul des paramètres d'écoulement est irrévocable.

CHAPITRE 3

DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

3.1. Introduction:

L'interaction entre la mécanique des fluides et les mathématiques appliquées est depuis longtemps fructueuse. Les phénomènes physiques complexes comme les écoulements transsoniques posent des problèmes mathématiques difficiles. Les résultats théoriques actuels ne concernent que des exemples où la physique est modélisée de façon très simplifiée, mais les méthodes numériques développées à partir de ces analyses mathématiques sont de plus en plus performantes et fournissent à l'ingénieur de nouveaux outils (éléments finis par exemple) d'aide à la conception (soufflerie numérique). Notons que ces progrès sont intimement liés à l'emploi de calculateurs de plus en plus puissants comme les ordinateurs.

3.2. L'équation différentielle simple :

Faisons une combinaison linéaire de dérivées partielles de premier ordre de la fonction $f(x, y)$, on obtient l'équation différentielle partielle de premier ordre suivante :

$$af_x + bf_y + c = 0 \quad (3.1)$$

Dans l'équation (3.1) les coefficients **a**, **b** et le coefficient de non-homogénéité **c** peuvent être en fonction de x , y et f . Les équations de caractéristique et de compatibilité correspondons à l'équation (3.1) sont obtenus comme montré ci-dessous.

Considérons premièrement l'approche de la recherche, et réécrivant l'équation (3.1) comme suit :

$$a \left(f_x + \frac{b}{a} f_y \right) + c = 0 \quad (3.2)$$

Si la fonction $f(x, y)$ est continue, la différence totale s'écrit alors :

$$df = f_x dx + f_y dy \quad (3.3)$$

Et peut-être encore écrite:

$$\frac{df}{dx} = \left(f_x + \frac{dy}{dx} f_y \right) \quad (3.4)$$

La caractéristique pour l'équation (3.1) est définie comme la courbe dans le plan x-y qui a une pente à chaque point donné par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \lambda(x, y, f) \quad (3.5)$$

Où

- ✓ La pente λ peut dépendre de x, y et f , car en général les coefficients a et b sont à l'origine en fonction de ces dernières.

L'équation (3.4) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{df}{dx} = \left(f_x + \frac{b}{a} f_y \right) \quad (3.6)$$

En substituant l'équation (3.6) dans l'équation (3.2) on obtient :

$$adf + cdx = 0 \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) est une équation différentielle totale appliquée le long de la caractéristique C spécifié par l'équation (3.5), par conséquent l'équation (3.7) est une équation de compatibilité.

La fonction $f(x, y)$ est déterminée le long de la caractéristique en solvant l'équation de compatibilité (3.7) qui est une équation différentielle totale reliant df à dx , donc la seule démarche pour la résolution de ce genre de problèmes est de remplacer l'équation (3.1) par le système d'équations (3.5) et (3.7). Ce qui est à l'origine de la méthode des caractéristiques.

Dans le cas général où a et b dépendent de la fonction inconnue $f(x, y)$, l'équation (3.5) ne peut être intégrée qu'après avoir déterminé la fonction f en intégrant l'équation (3.7).

Dans certains cas où a , b et c sont d'une expression compliquée le recours aux intégrales numériques est la seule issue.

Pour résoudre l'équation (3.1), la condition $f(x, y) = f_0(x, y)$ est indispensable. La figure (3.1) représente schématiquement la ligne des valeurs initiales $\Gamma_0(x, y)$ dans le plan (xy) le long de laquelle $f(x, y) = f_0(x, y)$ est spécifiée.

Pour la caractérisation d'une équation différentielle de premier ordre, on choisit n'importe quel point $P(x, y)$ dans Γ_0 , pour déterminer la caractéristique C passant par le point initial P , on intègre l'équation (3.3)

La valeur de f du n'importe quel point Q sélectionné sur la caractéristique C est déterminée par l'intégration de l'équation de compatibilité à partir du point P jusqu'au point Q le long de la caractéristique C , l'intégration des équations de compatibilité et de caractéristique doit être effectué simultanément et habituellement par des techniques numériques.

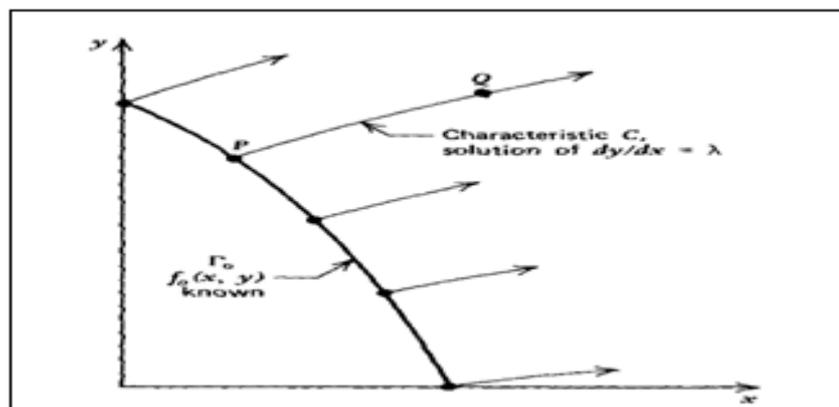


Figure 3.1 : Caractéristique d'une équation différentielle de premier ordre.

En sélectionnant plusieurs points sur la ligne initiale Γ_0 comme par exemple le point P . Le plan (xy) est entièrement couvert de caractéristiques

et sur chacune d'elles, l'ensemble des valeurs dépendantes f sont déterminées.

Il est très important d'observer les restrictions avant d'utiliser la méthode des caractéristiques, car elle est uniquement applicable dans le cas des équations différentielles hyperboliques quasi linéaires.

Elle est développée ici pour une équation différentielle partielle de premier ordre, mais la théorie peut-être étendue à des équations différentielles d'ordre supérieur, autrement il n'y a guère de restrictions dans les équations, elles peuvent même être non homogènes et non linéaires.

3.3. Système de deux équations différentielles partielles :

Considérons un système d'équations différentielles partielles notées par L_1 et L_2 comprenant les deux variables dépendantes $u(x, y)$ et $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} L_1 &= a_{11}u_x + b_{11}u_y + a_{12}v_x + b_{12}v_y + c_1 = 0 \\ L_2 &= a_{21}u_x + b_{21}u_y + a_{22}v_x + b_{22}v_y + c_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les coefficients a, b, c peuvent être fonctions de u et v , il est donc préférable de trouver un système d'équations de caractéristiques et de compatibilités qui remplacent l'équation (3.8).

Du fait, que les équations (3.8) sont couplées de variables $u(x, y)$ et $v(x, y)$ les deux équations doivent être résolues simultanément.

Soit :

$$L = \sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 = 0 \quad (3.9)$$

Où :

- ✓ σ_1 et σ_2 sont deux coefficients à déterminer.

Remplaçons l'équation (3.8) dans celle de (3.9):

$$\begin{aligned}
& (a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2) \left[u_x + \frac{(b_{11}\sigma_1 + b_{21}\sigma_2)}{(a_{11}\sigma_1 + b_{21}\sigma_2)} u_y \right] \\
& + (a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2) \left[v_x + \frac{(b_{12}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2)}{(a_{12}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2)} v_y \right] + (c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Car les variables dépendantes doivent être continues

$$\frac{du}{dx} = u_x + \lambda u_y \quad \text{Et} \quad \frac{dv}{dx} = v_x + \lambda v_y \quad \text{où} \quad \lambda = dy/dx \tag{3.11}$$

Donc les caractéristiques sont définies comme les courbes ayant les pentes suivantes :

$$\lambda = \frac{(b_{11}\sigma_1 + b_{21}\sigma_2)}{(a_{11}\sigma_1 + b_{21}\sigma_2)} \quad \text{Et} \quad \lambda = \frac{(b_{12}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2)}{(a_{12}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2)} \tag{3.12}$$

Le long de la caractéristique spécifiée par (3.12), l'équation (3.10) peut s'écrire de la manière suivante:

$$(a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2) du + (a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2) dv + (C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2) dx = 0 \tag{3.13}$$

L'équation (3.13) est une équation de compatibilité de celle de (3.8).

Par contre, l'équation (3.12) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 (a_{11}\lambda - b_{11}) + \sigma_2 (a_{21}\lambda - b_{21}) &= 0 \\
\sigma_1 (a_{12}\lambda - b_{12}) + \sigma_2 (a_{22}\lambda - b_{22}) &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour que cette équation est une solution autre que la triviale $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, on

doit satisfaire la condition suivante :

$$\begin{vmatrix} (a_{11}\lambda - b_{11}) & (a_{21}\lambda - b_{21}) \\ (a_{12}\lambda - b_{12}) & (a_{22}\lambda - b_{22}) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.15}$$

Ce qui nous ramène à l'équation suivante :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.16}$$

Avec les constantes a, b et c définies par :

$$a = (a_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}), \quad b = (-a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}) \quad \text{et} \quad c = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

Du fait que a , b et c sont fonction des coefficients de l'équation d'origine (3.8), par conséquent, ils sont donc fonction de x , y , u et de v .

Le type de l'équation différentielle partielle est déterminé selon le signe de Δ tel que :

$$\Delta = B^2 - 4AC .$$

- ✓ Si $\Delta < 0$; il n'existe pas de solution réelle pour λ et les caractéristiques sont imaginaires, l'équation est de types elliptiques.
- ✓ Si $\Delta = 0$; une caractéristique réelle traverse chaque point et le type d'équation dans ce cas est parabolique.
- ✓ Si $\Delta > 0$; deux caractéristiques réelles traversent chaque point et l'équation est de type hyperbolique

Dans notre étude on se concentre sur le troisième type du fait. Car, on souhaite étudier l'écoulement supersonique gouverné par un système d'équations hyperboliques.

Les deux caractéristiques qui satisfont ce système d'équations hyperboliques sont :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_+ \quad \text{Et} \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_- \quad (3.16)$$

Sachant que λ_+ et λ_- sont fonctions de x , y , u et v , la position des caractéristiques dépendent de la valeur particulière de u et v .

Supposons que la solution pour u et v existe. Les équations $dy/dx = \lambda_+(u, v, x, y)$ et $dy/dx = \lambda_-(u, v, x, y)$ où u et v sont fonctions de x et y sont deux équations différentielles de premier ordre qui définissent deux familles de caractéristiques dans le plan (x, y) .

L'équation (3.13) qui est une équation de compatibilité du système, les paramètres arbitraires σ_1 et σ_2 peuvent être exprimés en fonction de λ_+ et λ_-

La résolution du système d'équations (3.13 et 3.14) pour des valeurs de σ_1 et σ_2 est simple, car c'est un système de trois équations avec deux inconnus.

Donc deux (2) équations sont obtenues : **I)** la première est en fonction de λ_+ , **II)** la seconde en fonction de λ_- . Ce sont deux équations de compatibilités qui relient du , dv , dx et dy le long de la caractéristique donnée par l'équation (3.16). On peut remplacer l'équation différentielle d'origine (3.8) par les équations (3.13) et (3.16).

L'intégrale de l'équation (3.16) détermine deux caractéristiques dans le plan (x, y) : **I)** une qui correspond à λ_+ **II)** la deuxième à λ_- .

Comme c'est le cas d'une équation différentielle partielle simple, une condition initiale doit être spécifiée ou calculée le long d'une ligne initiale Γ_0 située sur le plan (x, y) et la solution peut être étendue à partir de ces valeurs initiales le long de toutes les caractéristiques sur le plan (x, y) .

Le long de chaque caractéristique C_+ et C_- correspondant respectivement à λ_+ et λ_- , une relation entre du , dv , dx et dy est établie à partir de l'équation de compatibilité, car cette équation comprend u et v en même temps, elle ne peut ne pas être résolu pour u et v dans une seule caractéristique.

Dans l'intersection des deux caractéristiques C_+ et C_- , deux équations relient u et v sont indispensables : **I)** une équation de compatibilité valable le long de C_+ et **II)** une autre valable le long de C_- .

La figure (3.2) illustre schématiquement ce concept, la ligne initiale est notée par Γ_0 où u et v sont connues. En chaque point de cette dernière, les deux caractéristiques C_+ et C_- sont extruder dans le plan (x, y) par l'intégration de l'équation (3.13).

Les deux caractéristiques extruder à partir d'un point par exemple A ne s'intersectent jamais, la même démarche est répétée à partir d'un autre point B.

La caractéristique C_- qui provient du point A est dite descendante. La caractéristique C_+ qui provient du point B est dite montante. L'intersection des deux se fait au niveau du point D. Les deux équations de compatibilités valables le long de AD et de BD doivent être résolus simultanément pour u et v au point D.

Cette procédure va être répétée pour chaque deux points adjacents sur la ligne initiale Γ_0 jusqu'aux points finaux.

Une nouvelle ligne initiale notée par Γ_1 sera obtenue sur laquelle la solution est connue, et on refait la même procédure précédente jusqu'à l'obtention d'un seul point final. Si les points sur la ligne initiale sont terminés, on peut imposer des conditions aux limites sur la paroi par exemple pour démarrer de la même manière le processus de calcul.

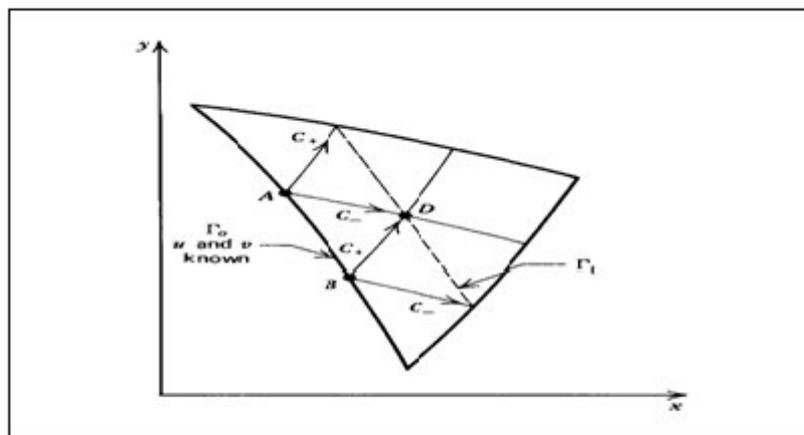


Figure 3.2 : Résultat de caractéristiques pour un système de deux EDP de premier ordre.

En général, du fait de la non-linéarité des équations et que les équations de compatibilité et de caractéristiques sont couplées, le recours à la résolution numérique est pratiquement inévitable.

Il est très important d'assurer avant que les deux variables indépendantes u et v soient bien continus sur tout le domaine d'intégration, inversement c'est ce qui se traduit par la présence d'ondes de choc, loin de ça aucune restriction ne peut s'opposer à l'utilisation de la méthode des caractéristiques.

3.4. Domaine de dépendance et champ d'influence :

Ce qui est présenté dans la section précédente est guidé justement par ce concept de domaine d'influence et champ de dépendance.

La Figure 3.3 [26] illustre le domaine de dépendance du point P, elle est la région dans le plan (x, y) limitée par les deux caractéristiques extrudées à partir de la ligne initiale Γ_0 et qui se rencontrent au point P. C'est le domaine où la solution au problème de valeurs initiales peut être obtenue.

La Figure 3.4 [26] illustre le champ d'influence du point Q situé sur la ligne initiale Γ_0 c'est la région dans le plan x, y qui contient tous les points influencés par la valeur initiale au point Q, le champ d'influence est composé de tous les points incluant le point Q dans leurs domaines de dépendances, autrement dit c'est la région limitée par les deux caractéristiques extrudées à partir du point Q.

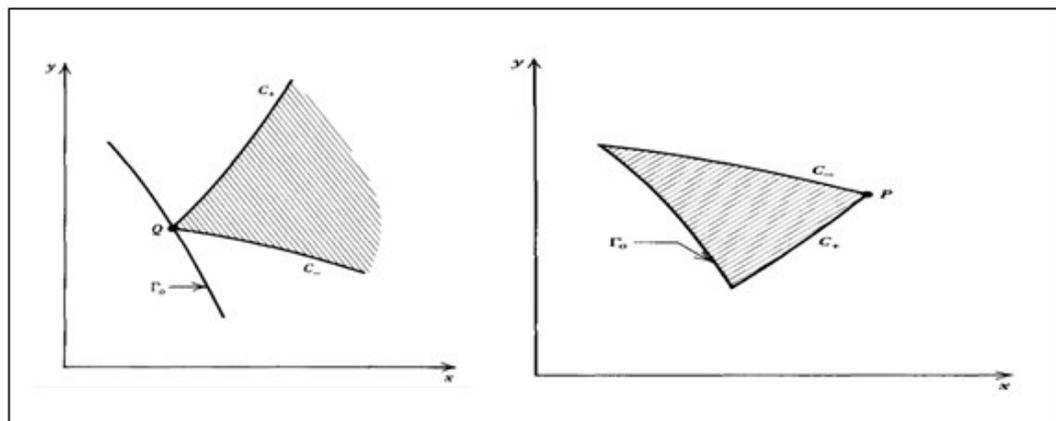


Figure 3.3 : Domaine de dépendance.

Figure 3.4 : Champ d'influence.

Maintenant pour que la solution soit exacte, la ligne de valeurs initiales ne peut pas être à n'importe quelle place. Mais elle est déterminée par la position des points qui la forme, qui doivent être à l'origine d'une intersection de deux caractéristiques, ce type de problème est appelé *problème de Goursat* [27].

En appliquant la méthode des caractéristiques, on peut résoudre plusieurs systèmes d'EDP très compliquée à la condition qu'ils soient quasi linéaire et hyperbolique. Ce type d'équations est fréquemment rencontré dans des problèmes d'écoulements des fluides.

3.5. Application pour étude d'écoulement irrotationnel supersonique plan et axisymétrique :

3.5.1. Introduction :

La théorie de la méthode des caractéristiques est maintenant appliquée pour développer une procédure numérique afin analyser un écoulement bidimensionnel supersonique irrotationnel dans le plan et axisymétrique.

On a montré déjà que les lignes caractéristiques sont des lignes de Mach, en outre, il y a suffisamment d'équations de compatibilité pour remplacer l'équation différentielle partielle qui gouverne ce phénomène physique.

3.5.2. Les équations gouvernantes :

Les équations qui gouvernent cet exemple d'écoulements ne sont pas autres que ce qu'on a cité bien avant au chapitre 2. Elles sont rassemblées ci-dessous.

L'équation de dynamique des gaz (2.77) :

$$(u^2 - a^2)u_x + (v^2 - a^2)v_y + 2uvu_y - \delta \frac{a^2 v}{y} = 0$$

La condition de l'irrotationalité (2.79) :

$$u_y - v_x = 0$$

Et la relation de la vitesse de son (3.17) :

$$a = a(V) = a(u, v) \quad (3.17)$$

✓ L'équation de caractéristiques :

La procédure citée avant dans la partie (3.3), est maintenant intégralement exploité, pour un système d'équations comprenant les deux équations (2.77) et (2.79).

$$\sigma_1(\text{Equation}(2.77)) + \sigma_2(\text{Equation}(2.79)) = 0$$

Remplaçons les deux équations (2.77) et (2.79) dans l'équation précédente et faisant ressortir σ_1 et σ_2 en facteur. On obtient l'équation (3.18) :

$$\begin{aligned} & \sigma_1(u^2 - a^2) \left[u_x + \frac{\sigma_1(2uv) + \sigma_2}{\sigma_1(u^2 - a^2)} u_y \right] \\ & + (-\sigma_2) \left[v_x + \frac{\sigma_1(v^2 - a^2)}{-\sigma_2} v_y \right] - \frac{\sigma_1 \delta a^2 v}{y} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

On vérifiant le critère de continuité des variables $u(x, y)$ et $v(x, y)$ alors l'équation est valable et en accord avec l'équation (3.12). On obtient automatiquement les pentes des caractéristiques correspondant à la relation (3.18) qui sont égaux aux coefficients de u_y et de v_y :

$$\lambda = \frac{\sigma_1(2uv) + \sigma_2}{\sigma_1(u^2 - a^2)} \quad \text{Et} \quad \lambda = \frac{\sigma_1(v^2 - a^2)}{-\sigma_2} \quad (3.19)$$

Substituant l'équation (3.12) dans (3.19) :

$$\sigma_1(u^2 - a^2) du - \sigma_2 dv - \left(\frac{\sigma_1 \delta a^2 v}{y} \right) dx = 0 \quad (3.20)$$

L'équation (3.20) est analogue à la (3.13). C'est une équation différentielle totale, donc une équation de compatibilité correspondant au système d'équations (3.77) et (3.79). L'équation (3.20) est valable si λ est donné par l'équation (3.19).

Il reste maintenant à dériver les expressions par rapport à λ et éliminer les inconnues σ_1 et σ_2 de l'équation (3.20). L'équation (3.19) peut s'écrire:

$$\begin{aligned}\sigma_1 \left[(u^2 - a^2)\lambda - 2uv \right] + \sigma_2 (-1) &= 0 \\ \sigma_1 (v^2 - a^2) + \sigma_2 (\lambda) &= 0\end{aligned}\tag{3.21}$$

L'équation (3.21) est analogue à l'équation (3.14), pour une solution σ_1 et σ_2 autre que la triviale. Il faut que:

$$\begin{vmatrix} \left[(u^2 - a^2)\lambda - 2uv \right] & -1 \\ (v^2 - a^2) & \lambda \end{vmatrix} = 0\tag{3.22}$$

Donc :

$$(u^2 - a^2)\lambda^2 - 2uv\lambda + (v^2 - a^2) = 0\tag{3.23}$$

L'équation (3.23) est analogue à l'équation (3.16).

Résolvant l'équation (3.23) pour la valeur de λ afin que l'équation (3.20) soit valable. On obtient l'équation (3.24):

$$\lambda_{\pm} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\pm} = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2}\tag{3.24}$$

L'équation (3.24) donne deux résultats différents pour λ notés en + et en - qui correspondent respectivement aux signes positif et négatif précédant la racine carrée.

Ces deux équations différentielles ordinaires représentent deux courbes dans le plan (x, y) qui sont bien entendu les deux caractéristiques de ce modèle de calcul.

Elles ne sont réelles que lorsque le nombre de Mach $M > 1$. Par conséquent la méthode des caractéristiques est appliquée pour l'étude d'un écoulement bidimensionnel plan et axisymétrique supersonique et non pas pour un écoulement subsonique.

À partir des géométries présentées sur les figures (3.5 et 3.6), une autre forme alternative de l'équation (3.24) peut être obtenue en exprimant u et v en fonction du module de vitesse V et de l'angle de lignes de courants ou de l'écoulement. On déduit alors une expression de M en fonction de l'angle de Mach α .

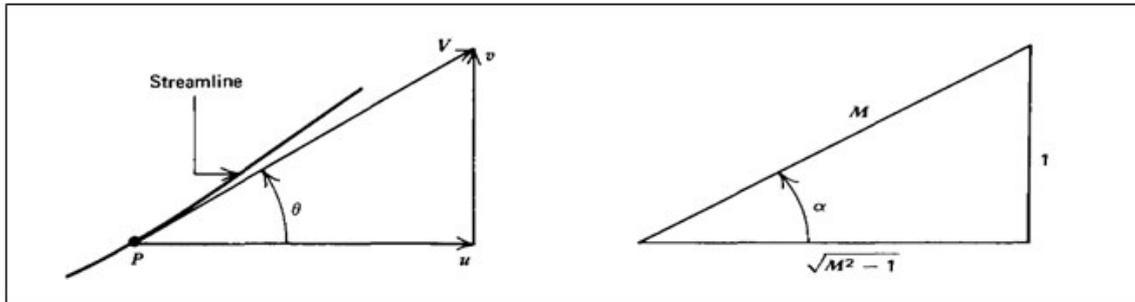


Figure 3.5 : Relation entre u , v et V, θ .

Figure 3.6 : Relation entre α et M .

$$u = V \cos \theta ; \quad v = V \sin \theta \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v}{u} \right) \quad (3.25)$$

À partir de la figure 3.6, on peut obtenir les relations suivantes:

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M} \right) \quad ; \quad M = \frac{V}{a} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad ; \quad \sqrt{M^2 - 1} = \cot \alpha \quad (3.26)$$

Le remplacement des équations (3.45 et 3.46) dans l'équation (3.24) permet d'aboutir à une nouvelle équation (3.27):

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\pm} = \lambda_{\pm} = \tan(\theta \pm \alpha) \quad (3.27)$$

La figure 3.7 illustre la géométrie des caractéristiques C_+ et C_- dans le plan (xy) . Elle montre aussi que les deux caractéristiques sont bien symétriques par rapport à la ligne de courant.

La ligne caractéristique est la courbe le long de laquelle les informations dans un écoulement sont propagées d'un point amont vers un point aval.

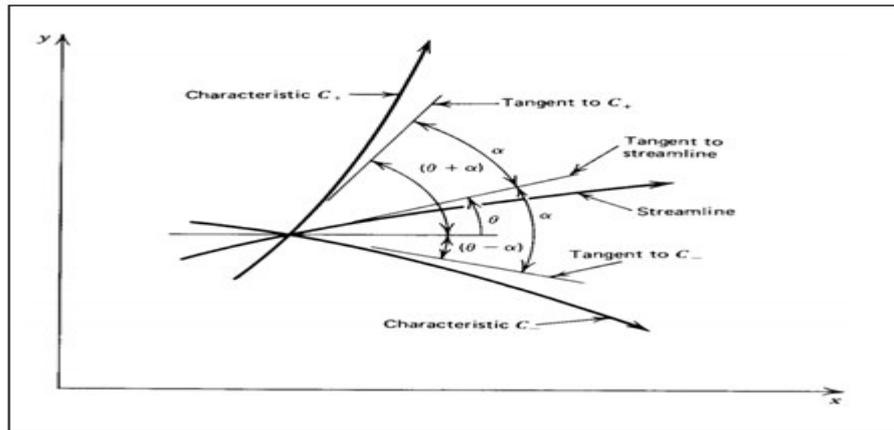


Figure 3.7 : Les caractéristiques d'un écoulement bidimensionnel irrotationnel et supersonique.

✓ L'équation de compatibilité :

L'équation (3.20) est l'équation de compatibilité pour un écoulement supersonique. Elle exprime la relation entre u et v le long de la caractéristique (Ligne de Mach).

Pour appliquer l'équation (3.20), les paramètres σ_1 et σ_2 doivent être éliminés, ce qui est fait en résolvant l'équation (3.21) pour σ_2 en fonction de σ_1 .

Donc :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_1 \left[(u^2 - a^2) \lambda - 2uv \right] \\ \sigma_2 &= -\sigma_1 \frac{v^2 - a^2}{\lambda}\end{aligned}\quad (3.28)$$

En remplaçant l'équation (3.28) dans l'équation (3.20) et divisons par σ_1 , on obtient finalement l'équation de compatibilité pour ce type d'écoulement :

$$(u^2 - a^2) du_{\pm} + [2uv - (u^2 - a^2) \lambda_{\pm}] dv_{\pm} - \left(\frac{\delta a^2 v}{y} \right) dx_{\pm} = 0 \quad (3.29)$$

En remplaçant l'équation (2.27) dans l'équation (2.29), on obtient une autre forme pour l'équation de compatibilité présentée ci-dessous.

$$du_{\pm} + \lambda_{\pm} dv_{\pm} - \delta \left(\frac{a^2 v}{y} \right) dx_{\pm} = 0 \quad (3.30)$$

Dans cette équation le signe inverse \mp indiqué pour λ montre que lorsque du , dv et dx sont calculés le long de la caractéristique, la valeur de λ représente celle de C_- et inversement.

Il existe une multitude, d'autres formes données à l'équation de compatibilité (3.29), mais dans notre cas, on se contente de ce résultat et on l'exploite pour trouver une solution numérique au problème d'écoulement supersonique bidimensionnel irrotationnel plan et axisymétrique.

3.5.3. Récapitulatif :

A présent, on a à résoudre un système d'équations différentielles total suivant :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \lambda_{\pm} = \tan(\theta \pm \alpha) \quad \text{Équation de caractéristique} \quad (3.27)$$

$$(U^2 - a^2)dU_{\pm} + [2UV - (U^2 - a^2)\lambda_{\pm}]dV_{\pm} - \left(\frac{\delta a^2 v}{y}\right) dx_{\pm} = 0$$

Équation de compatibilité (3.29)

3.6. Mise en œuvre numérique de la méthode des caractéristiques :

3.6.1. Introduction :

Dans le paragraphe précédent, on a fait sortir l'équation de compatibilité pour un écoulement irrotationnel bidimensionnel supersonique permanent.

Dans cette partie, une méthode numérique basée sur la prédiction correction d'Euler et des différences finies est développée.

3.6.2. Procédure d'intégration numérique :

La relation (3.27) représente deux caractéristiques passant à n'importe quel point dans l'écoulement. L'équation (3.29) définit une relation entre les composantes (u, v) de la vitesse V dans une des deux caractéristiques précédentes. Pour obtenir deux relations indépendantes entre u et v à un point dans l'écoulement, le processus de calcul doit se faire au point d'intersection des deux caractéristiques.

Car, au point d'intersection on a une relation entre u et v pour chaque caractéristique et donc, deux équations à deux inconnues.

La figure 3.8, illustre comment la caractéristique passant par le point 1 et celle passant par le point 2 s'intercepte au point 4. Cette procédure concerne un point interne, avec une légère modification le processus peut être applicable sur un point paroi et un point sur l'axe.

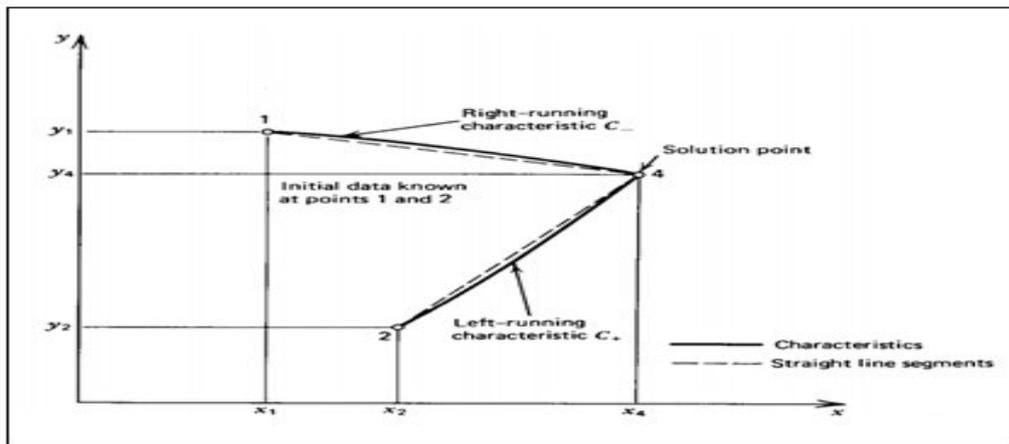


Figure 3.8 : Schéma de calcul par différences finis pour la méthode des caractéristiques.

En général, la méthode des différences finies est employée pour intégrer les équations (3.27) et (3.29). Par conséquent, la portion du maillage qui connecte deux points comme : le point 1 avec le point 4 et le point 2 avec le point 4 (figure 3.8) est remplacé par la ligne droite montrée en pointillée.

Dans cette étude, on a utilisé pour intégrer les équations (3.27) et (3.29), la méthode de prédiction correction d'Euler [9-10] qui est une méthode d'intégration numérique des équations différentielles totales. La partie correction de cet algorithme est basée sur la moyenne des coefficients.

Les coefficients des équations différentielles sont déterminés comme moyennes des valeurs initiales et de la solution initiale. Hoffman [11] à montrer que de bons résultats sont obtenu en utilisant cet algorithme.

Les étapes de bases de cette méthode sont présentées ci-dessous.

Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.31)$$

Qui peut être écrite sous la forme :

$$dy = f(x, y) dx \quad (3.32)$$

Le problème est d'intégrer l'équation (3.32) numériquement à partir d'un point de départ connu désigné comme (x_i, y_i) où $y_i = y(x_i)$.

La valeur prédite de la solution à $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, notée par $y^0(x_i + \Delta x) = y^0_{i+1}$ est obtenue à partir de l'algorithme de prédiction d'Euler suivant :

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x \quad (3.33)$$

Où :

- ✓ Δx est le pas choisi pour la méthode des différences finies.

Il faut vraiment faire attention au choix de ce dernier, car l'erreur commise par la méthode de prédiction varie linéairement avec Δx [26].

L'exactitude de la solution par la méthode d'Euler est obtenue en employant y_i et y^0_{i+1} pour estimer la valeur de $y_{i+1/2} = y(x_i + \Delta x/2)$ et en remplaçant $f(x_i, y_i)$ dans l'équation (2.33) par $f(x, y)$ déterminé au point central de l'intervalle, nous obtenons alors :

$$y^1_{i+1} = y_i + f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, \frac{y_i + y^0_{i+1}}{2}\right) \Delta x \quad (3.34)$$

Où :

- ✓ $y^1_{i+1} = y^1(x_i + \Delta x)$ est la valeur correcte de la solution au point x_{i+1} .

L'équation (3.34) est l'algorithme de correction. La méthode de prédiction correction peut être plus exacte en remplaçant la valeur de y^0_{i+1}

par la valeur de y_{i+1}^1 dans l'équation (3.34) pour obtenir le résultat le plus exact y_{i+1}^2 . Le signe 2 représente la deuxième application du correcteur et la formule suivante représente le cas général du correcteur :

$$y_{i+1}^n = y_i + f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}^{n-1}}{2}\right) \Delta x \quad (3.35)$$

Où :

- ✓ y_{i+1}^n est la valeur de y après n applications du correcteur

L'équation (3.35) est appelée l'algorithme de prédiction correction d'Euler avec itérations.

Généralement pour la stabilité de cette méthode numérique on limite toujours la valeur de Δx par une borne supérieure, mais dans notre cas d'étude d'un écoulement isentropique cette dernière est tellement grande que la stabilité n'est pas affectée [22].

3.6.3. La méthode directe et la méthode inverse :

Il existe deux procédures possibles pour intégrer les équations de caractéristiques et celles de compatibilité ; la méthode directe et la méthode inverse.

La figure (3.9) illustre schématiquement la méthode directe et la figure (3.10) montre la méthode inverse.

Dans la méthode directe, des familles continues de caractéristiques montantes et descendantes sont suivies à travers l'écoulement, en appliquant cette méthode directement à partir de deux points déterminés auparavant comme le point 1 et 2 dans la figure (3.9), la solution au point 4 peut être déterminée.

Dans la méthode inverse, la solution est obtenue à partir de deux lignes successives appelées les *lignes de solutions* qui ne sont pas des caractéristiques. Typiquement ces lignes sont perpendiculaires à l'écoulement, comme la ligne AB et CD de la figure (3.10).

Les points où les propriétés du fluide doivent être déterminées sur la ligne solution comme la ligne AB de la figure (3.10) est préspecifiée. Les propriétés du fluide au point 1 et 2 sont obtenues à l'aide d'une interpolation le long de la ligne de solution connue **C-D**.

L'avantage de la méthode directe est que les points 1 et 2 (figure 3.10) et leurs propriétés sont connus sans procéder à une interpolation. Par contre, la méthode inverse a un léger avantage dans la rapidité de calcul, toutefois le nombre et la position des points solutions doivent être déterminés à l'avance.

En général, la méthode directe est la plus précise des deux méthodes.

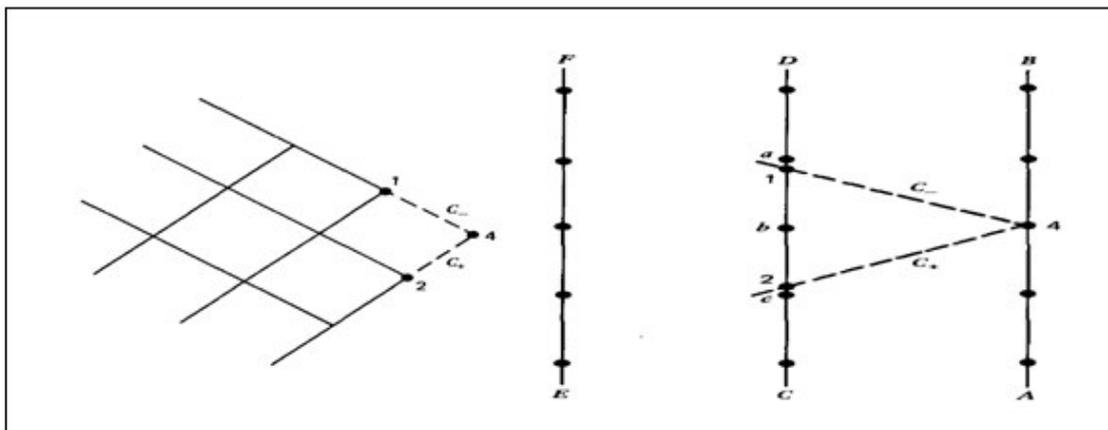


Figure 3.9 : La méthode directe.

Figure 3.10 : La méthode inverse.

3.6.4. Les équations aux différences finies [22] :

La figure (3.8) illustre schématiquement le maillage pour différences finies pour la détermination des propriétés de l'écoulement dans un point interne.

$$\Delta y_{\pm} = \lambda_{\pm} \Delta x_{\pm} \quad (3.36)$$

$$Q_{\pm} \Delta U_{\pm} + R_{\pm} \Delta V_{\pm} - S_{\pm} \Delta x_{\pm} = 0 \quad (3.37)$$

$$\lambda_{\pm} = \tan(\theta \pm \alpha) \quad (3.38)$$

$$Q = u^2 - a^2 \quad (3.39)$$

$$R = 2uv - (u^2 - a^2)\lambda \quad (3.40)$$

$$S = \delta \frac{a^2 v}{y} \quad (3.41)$$

Les relations ci-dessus présentent les équations en différences finies des équations de caractéristiques et de compatibilités où le signe + et – représentent respectivement les caractéristiques montantes et les descendantes. Pour la méthode d'Euler, les équations en différences finies sont obtenues à partir des équations différentielles en remplaçant dx , dy , du et dv par Δx , Δy , Δu et Δv .

Les coefficients λ , Q , R et S sont déterminés aux points initiaux par le prédicteur et à une valeur moyenne par le correcteur.

3.6.5. Procédure de calcul pour un point interne : [28]

Le point situé à l'intérieur de l'écoulement supersonique comme le point 4 sur la figure (3.9) est appelé un point interne. La logique des différences finies et le maillage correspondant est présenté sur la figure (3.8). Le point interne est situé à l'intersection des caractéristiques C_+ et C_- provenant respectivement des points 2 et 1.

La position et les paramètres de l'écoulement aux points 1 et 2 sont supposés connus, les deux points sont appelés *valeurs initiales*.

La problématique est de trouver une méthode pour déterminer la position et les paramètres de l'écoulement au point interne 4 et ce, à partir des deux points 1 et 2.

La solution consiste à intégrer les équations des caractéristiques et de déterminer les deux caractéristiques 14 et 24, en intégrant les équations de compatibilités valables le long de ces deux caractéristiques et résoudre le système de quatre équations algébriques pour les quatre inconnus x_4 , y_4 , u_4 et v_4 .

On présente ci-dessous la logique de résolution sans présenter les détails de la résolution numériques ou les techniques de programmation.

En utilisant les équations (3.36) dans leurs formes éclatées, on obtient les équations suivantes :

$$y_4 - \lambda_+ x_4 = y_2 - \lambda_+ x_2 \quad (3.42)$$

$$y_4 - \lambda_- x_4 = y_1 - \lambda_- x_1 \quad (3.43)$$

Les équations (3.42 et 3.43) forment un système d'où on peut tirer facilement les inconnues x_4 et y_4 , où les pentes sont présentées ci-dessous:

$$\lambda_+ = \tan(\theta_+ + \alpha_+) \quad (3.44)$$

$$\lambda_- = \tan(\theta_- + \alpha_-) \quad (3.45)$$

Où :

$$\theta_{\pm} = \tan^{-1} \left(\frac{V_{\pm}}{u_{\pm}} \right) \quad (3.46)$$

$$V_{\pm} = \sqrt{u_{\pm}^2 + v_{\pm}^2} \quad (3.47)$$

$$a_{\pm} = a(V_{\pm}) \quad (3.48)$$

$$M_{\pm} = \frac{V_{\pm}}{a_{\pm}} \quad (3.49)$$

$$\alpha_{\pm} = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M_{\pm}} \right) \quad (3.50)$$

Par conséquent les valeurs de θ_{\pm} , α_{\pm} et de λ_{\pm} peuvent être déterminées en spécifiant u_{\pm} et v_{\pm} .

Les équations de comptabilités (3.37) peuvent aussi être écrites de la façon suivante :

$$Q_+ u_4 + R_+ v_4 = T_+ \quad (3.51)$$

$$Q_- u_4 + R_- v_4 = T_- \quad (3.52)$$

Tel que :

$$T_+ = S_+(x_4 - x_2) + Q_+ u_2 + R_+ v_2 \quad (3.53)$$

$$T_- = S_-(x_4 - x_1) + Q_- u_1 + R_- v_1 \quad (3.54)$$

De la même manière (3.51 et 3.52) forment un système à deux inconnues qu'on peut résoudre pour u_4 et v_4 , où les coefficients sont listés ci-dessous ;

$$Q_+ = (u_+^2 - a_+^2) \quad (3.55)$$

$$R_+ = (2u_+ v_+ - Q_+ \lambda_+) \quad (3.56)$$

$$S_+ = \delta \frac{a_+^2 v_+}{y_+} \quad (3.57)$$

$$Q_- = (u_-^2 - a_+^2) \quad (3.58)$$

$$R_- = (2u_- v_- - Q_- \lambda_-) \quad (3.59)$$

$$S_- = \delta \frac{a_-^2 v_-}{y_-} \quad (3.60)$$

Par conséquent les coefficients Q_{\pm} , R_{\pm} et T_{\pm} peuvent être déterminées en spécifiant uniquement u_{\pm} , v_{\pm} et y_{\pm} .

Pour l'algorithme de prédiction d'Euler, les valeurs de u_{\pm} , v_{\pm} et y_{\pm} sont données par :

$$u_+ = u_2 \quad v_+ = v_2 \quad y_+ = y_2 \quad (3.61)$$

$$u_- = u_1 \quad v_- = v_1 \quad y_- = y_1 \quad (3.62)$$

Insérant ces valeurs dans les équations (3.42), (3.43), (3.51) et (3.52) et résolvant ces équations simultanément pour obtenir la solution prédite x_4^0 , y_4^0 , u_4^0 et v_4^0 .

Et pour l'algorithme de correction d'Euler, les valeurs de u_{\pm} , v_{\pm} et y_{\pm} sont données par :

$$u_+ = \frac{u_2 + u_4}{2} \quad v_+ = \frac{v_2 + v_4}{2} \quad y_+ = \frac{y_2 + y_4}{2} \quad (3.63)$$

$$u_- = \frac{u_1 + u_4}{2} \quad v_- = \frac{v_1 + v_4}{2} \quad y_- = \frac{y_1 + y_4}{2} \quad (3.64)$$

Les valeurs moyennes de θ_{\pm} , V_{\pm} , a_{\pm} , M_{\pm} et de α_{\pm} sont obtenues en injectant les valeurs ci-dessus dans les équations (3.55) à (3.60). On résolvant les mêmes équations qu'avant pour une deuxième fois on obtient les solutions corrigées suivantes x_4^1 , y_4^1 , u_4^1 et v_4^1 .

On peut répéter la même démarche écrite ci-dessus pour corriger la solution pour une deuxième fois ou pour une troisième, etc. Et pour ça en utilisant l'algorithme de prédiction correction d'Euler avec itération (3.35).

On arrête le processus de calcul à n itérations, lorsqu'on atteint la convergence décrite par la relation logique suivante :

$$\left| P^n - P^{n-1} \right| \leq (\text{tolérance spécifiée}) \quad (3.65)$$

Où P représente x_4, y_4, u_4 et v_4 .

Pour un écoulement axisymétrique le coefficient S donné par la relation (3.41) est indéfini sur l'axe x car y et v sont nuls. Comme montré sur la figure (3.11).

Dans ce cas le rapport v_2/y_2 est approximé au rapport v_1/y_1 pour le prédicteur, par contre le correcteur S est basé sur la valeur moyenne de y_+ et de v_+ qui ne sont pas nulles.

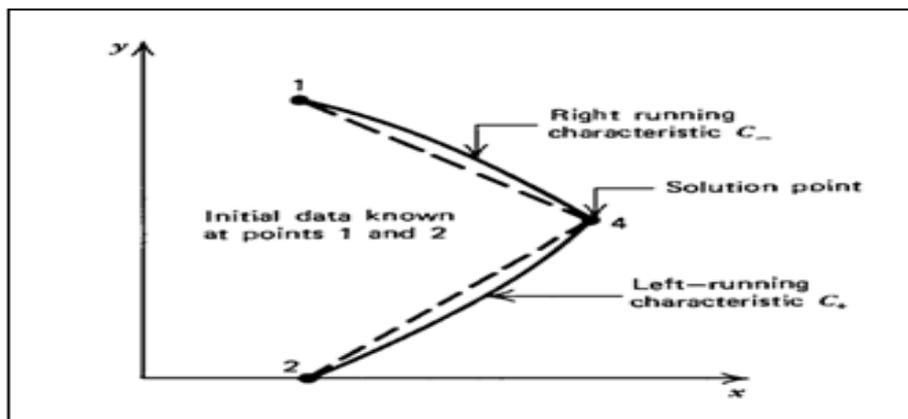


Figure 3.11 : Point intérieur sur l'axe de symétrie.

3.6.6. Procédure de calcul pour un point paroi direct :

Sur la paroi, la direction du vecteur vitesse d'écoulement doit être exactement égale à la pente de la paroi, à cause des conditions aux limites à la paroi, certaines modifications doivent être portées sur la procédure de calcul applicable sur un point interne.

La figure (3.12) illustre schématiquement les conditions typiques pour un point paroi direct. Il est appelé comme point paroi direct parce que la caractéristique montante C_+ est tirée directement à partir d'un point interne connu (point 2) jusqu'à ce qu'elle intercepte la paroi (point 4).

Le point 1 n'est pas présent physiquement, car il est en dehors de l'écoulement, pour cette raison la caractéristique C_- qui relie les points 1 et 4 est présentée comme une ligne discontinue. Par conséquent seulement une équation de caractéristique et une équation de compatibilité sont valables pour déterminer la position et les propriétés du point paroi direct (point 4), alors ;

$$y = y(x) \quad \text{Spécifié} \quad (3.66)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{v}{u} \quad \text{Spécifié} \quad (3.67)$$

Les équations (3.66) et (3.67) constituent deux conditions supplémentaires pour déterminer la position et les propriétés au point 4.

La figure (3.12) montre le cas où la paroi est sur la moitié supérieure du plan (x, y). si le point paroi direct est déterminé, les équations (3.66) et (3.67) doivent être résolues simultanément avec les équations (3.42) et (3.51) qui sont valables le long de la caractéristique C_+ .

Si la paroi est sur la demi-partie inférieure du plan (x, y), là on utilise les équations (3.43) et (3.52).

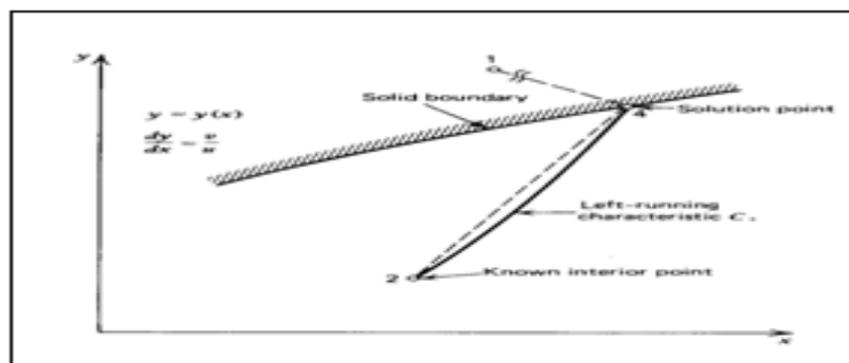


Figure 3.12 : Point paroi direct.

3.6.7. Procédure de calcul pour un point paroi inverse :

Dans les endroits où le gradient d'un paramètre (pression, température, nombre de Mach) est très important, la méthode directe nous donne un espacement incontrôlé ou relativement large entre deux solutions par conséquent un mauvais maillage induit automatiquement des erreurs dans les calculs. Dans ce cas la procédure de calcul par point paroi inverse est recommandée.

Cette méthode est basée sur un espacement préalable entre deux solutions, puis en utilisant la méthode des caractéristiques on calcule les propriétés de l'écoulement dans le point solution pré-spécifié (point 4).

La figure (3.13) [1], illustre schématiquement la situation où les valeurs initiales au point 1 et 3 sont connues d'après des calculs précédents. Le point 4 est le point solution pré-spécifié, le point 2 est le lieu d'intersection de la caractéristique C_+ passant par le point 4 et la caractéristique 13. Du fait que la position du point 4 (x_4, y_4) est pré-spécifié. Donc il nous reste qu'à déterminer les propriétés de l'écoulement à ce point par la méthode des caractéristiques. Ainsi les équations de compatibilités (3.51) et (3.67), valable le long de la caractéristique 14, peuvent être utilisées pour calculer u_4 et v_4 si la position et les propriétés au point 2 sont connues.

Le point 2 est localisé en déterminant la position de l'intersection de la caractéristique 24 (3.42) avec la caractéristique 13 (3.43), les propriétés au point 2 sont déterminées par une interpolation linéaire entre les points 1 et 3.

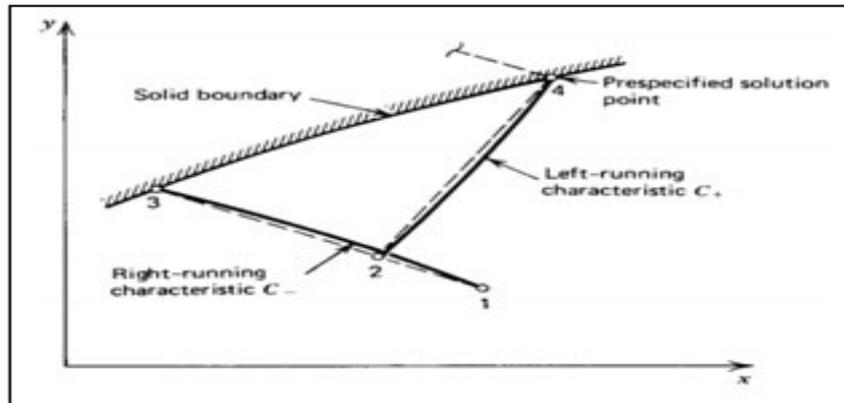


Figure 3.13 : Point paroi inverse.

Comme la pente de la caractéristique 24 dépend des paramètres inconnus des points 2 et 4, l'algorithme de prédiction correction d'Euler est utilisé pour localiser le point 2.

L'étape de prédiction primaire est pour déterminer les propriétés de l'écoulement au point 4, la seconde méthode de prédiction correction est appliquée pour déterminer la position du point 2.

- ✓ Premièrement les propriétés au point 2 sont supposées égales à celles du point 3 et la pente λ_+ de la caractéristique 24 est déterminée.
- ✓ Deuxièmement en utilisant cette valeur de la pente λ_+ , la position du point 2 sur la caractéristique 24 qui passe à travers le point 4 est déterminée.
- ✓ Troisièmement les propriétés au point 2 sont obtenues à l'aide d'une interpolation linéaire entre les points 1 et 3. L'étape de correction est abordée par la suite en utilisant la valeur de u_4 et v_4 à partir de la troisième étape, et le point 2 est relocalisé. La partie correction est répétée itérativement jusqu'à ce que la position du point 2 converge à une tolérance désirée.

Après avoir déterminé la position du point 2, une étape de prédiction primaire est faite pour déterminer les propriétés du point 4, l'étape de correction primaire est utilisée justement avec le point 2 repositionné avec

l'étape de prédiction correction secondaire discutée ci-dessus. Maintenant la pente de la caractéristique 24 est basée sur la valeur de u et v entre les points 2 et 4, des itérations peuvent être appliquées pour l'étape de correction primaire.

3.6.8. Procédure de calcul d'un point sur l'axe de symétrie :

Pour un écoulement bidimensionnel axisymétrique, l'axe x est celui de la symétrie. La figure (3.14) présente schématiquement le point axial (point 4). Si le point 1 est pris sur la caractéristique C_1 et passant par le point 4, le point 2 en dessous de l'axe de symétrie peut être défini comme une image du point 1. Dans ce cas, le point 4 est considéré comme un point interne. De là, la procédure développée (en paragraphe 3.6.5) peut être appliquée pour calculer les propriétés d'un point axial.

Toutefois, dans ce cas $y_4 = v_4 = \theta_4 = 0$, ce qui simplifie grandement la procédure de calcul.

Pour la suite, seule la caractéristique 14 est employée et les équations (3.43) et (3.52) sont résolues simultanément avec les données suivantes :

$$y_4 = v_4 = \theta_4 = 0.$$

Pour un écoulement axisymétrique, le coefficient S est donné par l'équation (3.41).

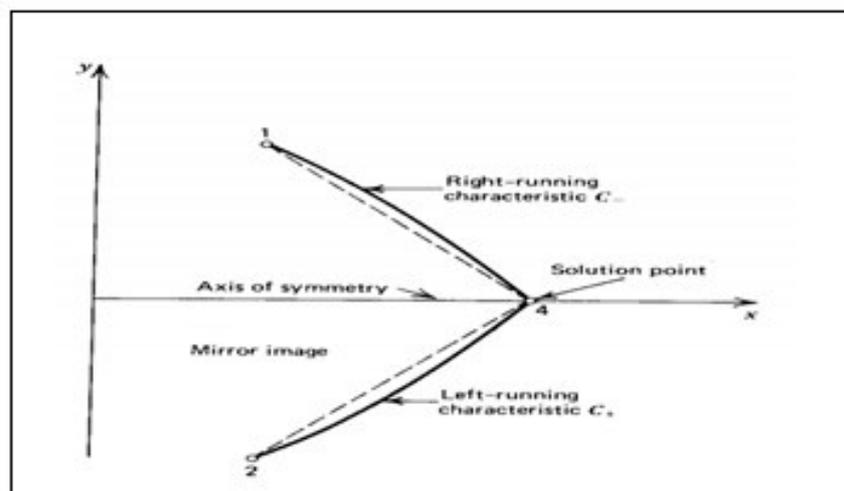


Figure 3.14 : Point axiale.

3.7. Application pour études de tuyères a géométries connues :

La figure (3.15) illustre schématiquement la configuration d'une tuyère convergente-divergente à géométrie connue. Il est recommandé d'exprimer toutes les dimensions de la tuyère relativement à une longueur connue généralement prise égale au rayon du col. Pour pouvoir généraliser le résultat sur n'importe quelle tuyère de même géométrie au col et un gaz à même chaleur spécifique sans être obligé d'exécuter pour chaque cas, le même programme de calcul.

Pour représenter la tuyère il faut définir le rapport de rayon de courbure de la portion convergente avale au col $\lambda_u = \rho_{tu} / y_t$, le rayon de courbure de la portion divergente avant au col $\lambda_d = \rho_{td} / y_t$, les coordonnées du point d'attachement et en fin la partie divergente après le point d'attachement au col.

Comme ça on a spécifié toutes les données géométriques. Ce qui nous reste maintenant c'est bien les données thermodynamiques qui sont ; la constante des gaz parfaits, la pression de stagnation, la température de stagnation et la chaleur spécifique du gaz en question.

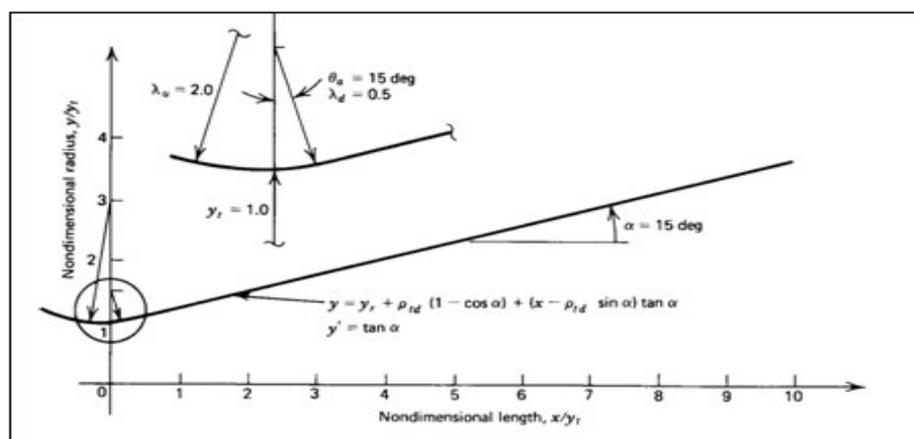


Figure 3.15 : Tuyère supersonique a divergent conique.

À partir de l'écoulement à travers le col une ligne initiale partout supersonique doit être définie, en suite la méthode des caractéristiques peut être démarrée pour calculer les paramètres de l'écoulement.

Dans la région du col l'écoulement est transsonique, connaissant le rayon de courbure du convergent et le rayon du col on peut utiliser pour cela les méthodes discutées dans le chapitre II pour trouver la ligne initiale et les propriétés de l'écoulement sur l'ensemble des points qui la constituent le résultat est de la forme suivante.

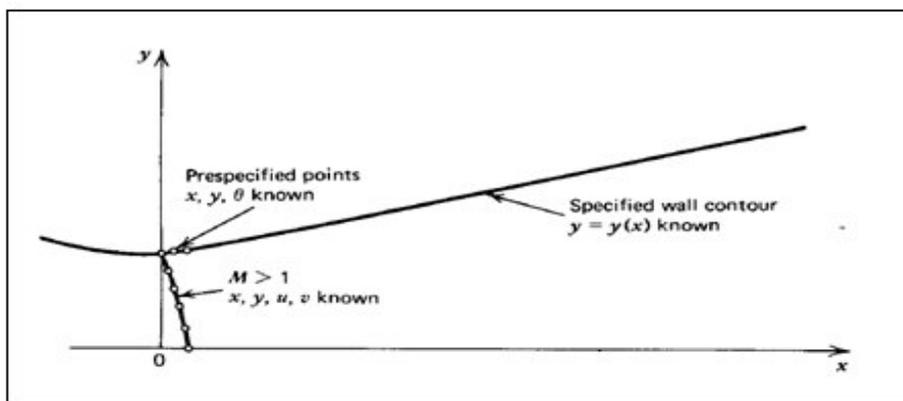


Figure 3.16 : Schéma de la ligne initiale et des points préspecifiés.

Dans la partie divergente initiale amont au col appelé zone d'expansion, le gradient de propriétés thermodynamiques est très large, alors le maillage dans cette région doit être raffiné davantage, et pour le faire on opte pour la méthode inverse décrite dans la partie (3.5.7) qui nous offre l'opportunité d'un raffinement personnalisé. Avant d'arriver à la paroi, il faut d'abord calculer les points internes commençant à partir du point initial situé sur l'axe noté 2 représenté sur la figure (3.17) [28].

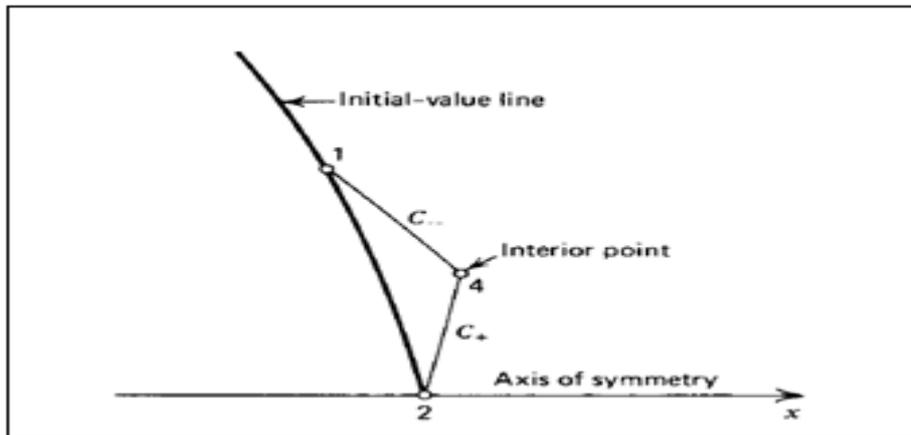


Figure 3.17 : Procédure de calcul d'un point interne à partir de la ligne initiale.

Les propriétés de l'écoulement sur le point solution noté, 4 sur la même figure sont alors déterminées. On procède ensuite au calcul du point sur l'axe noté 4 sur la figure (3.18) [1] à partir du point 1 qui est lui-même le point interne calculé avant.

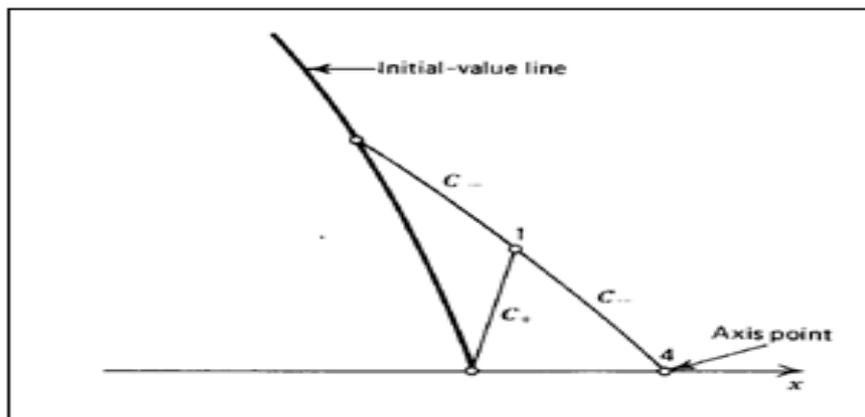


Figure 3.18 : Procédure de calcul d'un point axiale.

La même procédure est répétée pour les deux points suivants sur la ligne initiale, et puis on extrude la caractéristique descendante jusqu'à intersection de l'axe. On termine le calcul à partir de la ligne initiale en arrivant au point situé sur la paroi notée 3 sur la figure (3.19) [1].

Maintenant que la ligne initiale et son voisinage sont raffinés, il nous reste donc qu'à déterminer les propriétés de l'écoulement dans toute la région d'expansion initiale en extrudant toutes les caractéristiques descendantes provenant des points préspecifiés en utilisant le processus du point interne représenté sur la figure (3.19).

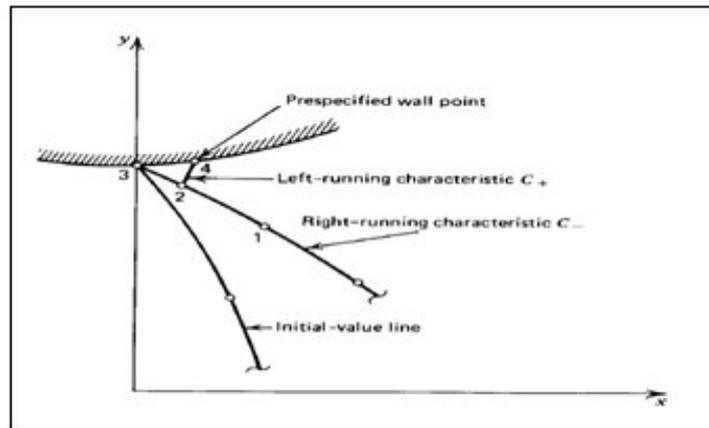


Figure 3.19 : Procédure de calcul d'un point inverse.

On arrête le processus de calcul en arrivant au point d'attachement de la tuyère. La figure (3.20) [1] montre le résultat de maillage de la zone d'expansion initiale.

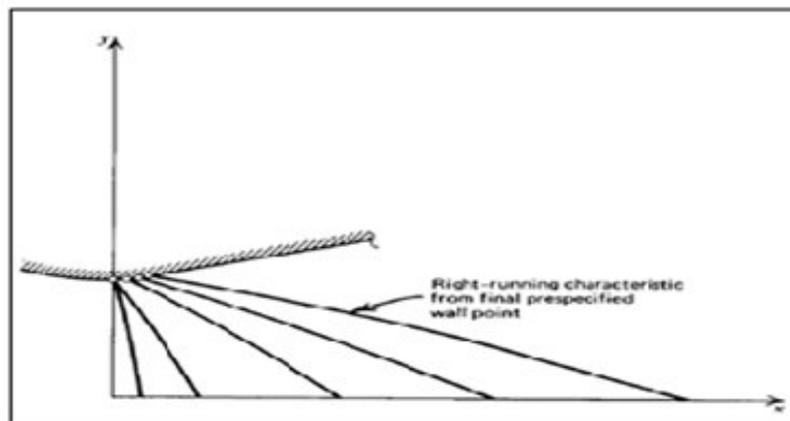


Figure 3.20: Procédure de calcul de la zone d'expansion initiale

Dans la partie jointe à la zone d'expansion au niveau du point d'attache la géométrie est connue, elle peut être définie par un polynôme d'ordre 2 comme suit $A + Bx + Cx^2 = 0$ ou d'ordre supérieur dans le cas d'une

meilleure approximation. Pour le cas d'une tuyère à divergent conique, il suffit de mettre $C=0$ et de calculer les autres facteurs A, B, \dots Ets.

Dans cette région le gradient de propriétés est relativement faible du fait que l'angle de divergence a déjà atteint son maximum au niveau du point d'attache et à partir de là, la divergence diminue dans le cas des tuyères à contours profilés jusqu'à atteindre le zéro dans les tuyères adaptées et au moins reste constant dans le cas des tuyères coniques.

Pour cela on peut sans problèmes utiliser la méthode directe montrée sur la figure (3.21) [1] et expliquée dans la partie (3.5.6) pour trouver la distribution des propriétés le long de cette zone.

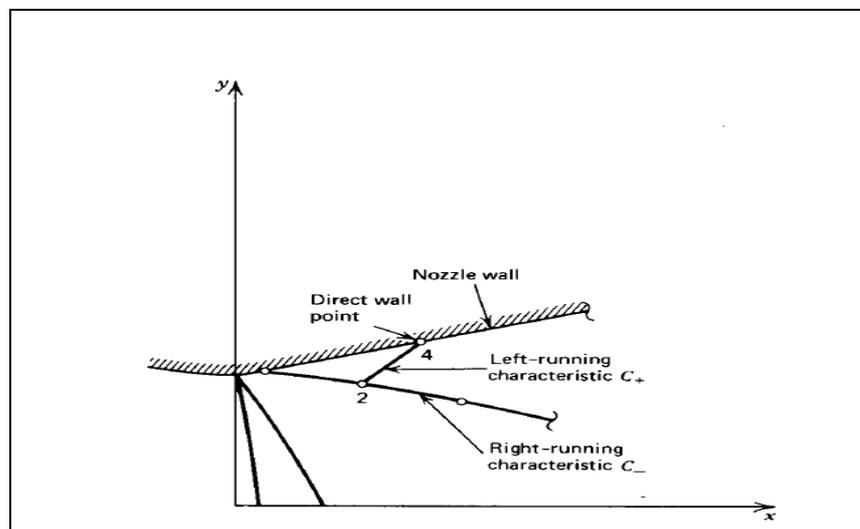


Figure 3.21 : Procédure de calcul d'un point direct.

On applique la même logique de calcul pour toute la partie divergente et on arrête le processus de calcul dès l'arrivée au point de sortie de la tuyère ou aux lèvres de la tuyère, les résultats d'application de cette procédure sont montrés sur la figure (3.22).

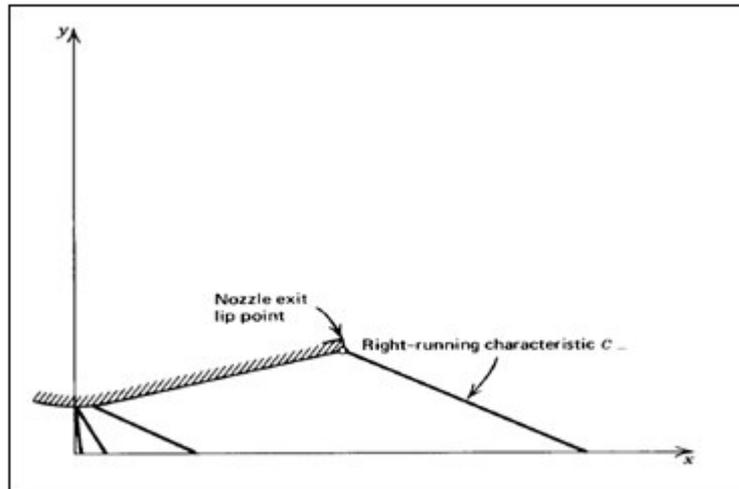


Figure 3.22 : Procédure de calcul de la partie divergente.

Au niveau du point d'attache ou le rayon de courbure avale au col se joint tangentiellement à la partie divergente. À ce point le contour du profil et sa pente sont continués, mais la courbure de la paroi (le taux de changement de la pente) est discontinue. Cette discontinuité généralement génère des ondes à faible compression. Quand deux caractéristiques de même famille se croisent une onde de choc oblique est formée comme le montre la figure (3.23)

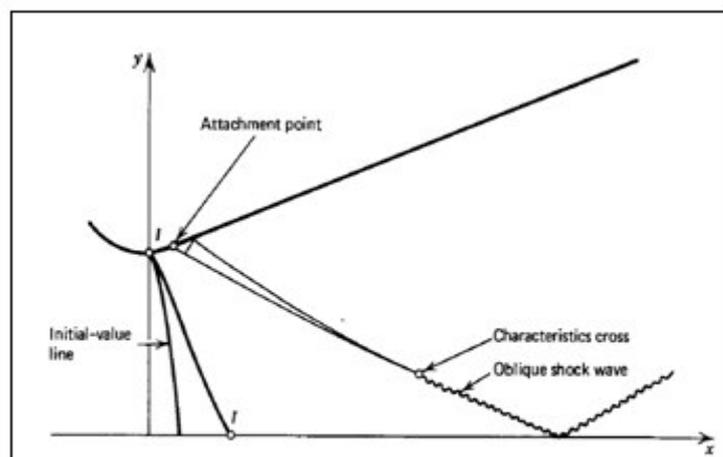


Figure 3.23 : Croisement de deux caractéristiques pour former une onde de choc oblique.

La négligence de celle-ci pendant les calculs peut engendrer de sérieuses erreurs, pour cela il faut trouver une solution qui nous permis justement de surpasser ce type de problèmes.

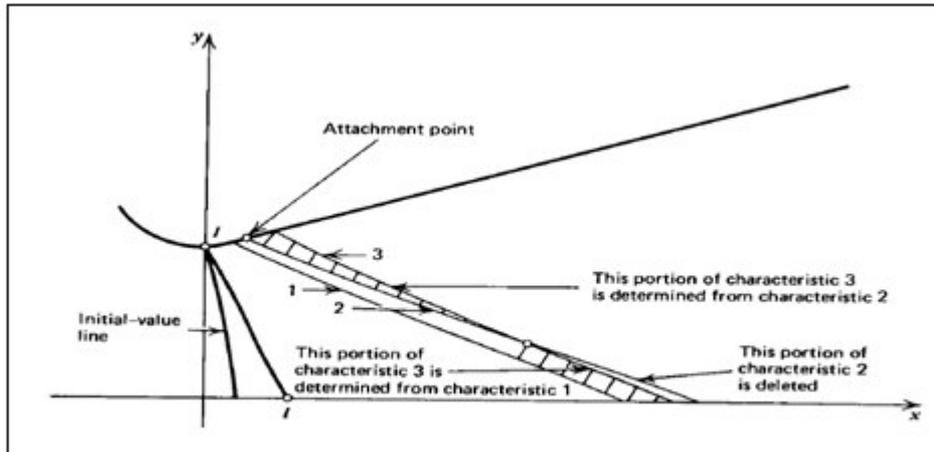


Figure 3.24 : Méthode de correction de calcul dans le cas de croisement de deux caractéristiques de même famille.

Plusieurs méthodes ont été proposées, parmi ces méthodes on trouve celles présentées sur la figure (3.24)

Cette procédure est très simple elle est divisée en trois étapes :

- ✓ La première consiste à localiser le lieu d'intersection des deux caractéristiques par exemple 2 et 3 présentées sur la figure (3.24)
- ✓ La deuxième étape est de supprimer la partie qui vient après l'intersection de la caractéristique 2
- ✓ En fin la dernière étape est de calculer la partie inférieure après l'intersection de la caractéristique 3 à partir de la caractéristique 1.

Cette méthode est répétée à chaque fois qu'un même cas se présente, mais pas pour un nombre illimité, car la méthode des caractéristiques est limitée par le nombre d'ondes de choc oblique présentes dans l'écoulement parce que l'accumulation d'erreurs due a la méthode, peut engendrer une divergence dans les résultats.

Note :

Cette méthode peut être appliquée pour n'importe quel type de tuyères TIC ou TOC, dans le cas où la géométrie de la paroi est définie que ce soit en spécifiant les points qui la décrit ou encore en spécifiant les coefficients du polynôme choisit. Mais dans le cas où rien n'a été spécifié, on calcul les coefficients du polynôme à partir des conditions aux limites de la partie divergente qui sont :

- ✓ Les coordonnées au point d'attache (x_a, y_a)
- ✓ La pente au point d'attachement $\theta = dy/dx$
- ✓ La section de sortie ou bien la longueur de la tuyère

Dans ce cas, le résultat est généralement obtenu pour des tuyères TOC où l'écoulement n'est pas systématiquement uniforme à la sortie de la tuyère.

3.8. Application pour la conception de tuyères supersoniques :

Dans cette partie, nous souhaitons utiliser la méthode des caractéristiques dans le but de dimensionner le divergent d'une tuyère supersonique pour donner un écoulement parallèle et uniforme à un nombre de Mach ou à pression statique donnée à la sortie.

3.8.1. Cas d'une tuyère axisymétrique :

Le calcul analytique suivi pour le dimensionnement de ce type de tuyères est basée sur les procédures présentées dans le paragraphe (3.6). La partie transsonique doit être définie en premier lieu ainsi que les propriétés thermodynamiques propres à cette région. La ligne initiale dans la région transsonique est alors établie en utilisant une des méthodes citées dans le chapitre 02.

Le contour de la portion divergente immédiatement en aval du col est ensuite défini, exemple d'un arc de cercle de rayon donné. La figure (3.25) montre les données initiales nécessaires pour le lancement des calculs pour dimensionner la partie divergente de cette tuyère.

La courbe **A-B** est le contour d'admission, **B-C** est la courbe qui représente le contour de la zone d'expansion initiale, par contre **B-D** est la ligne initiale supersonique.

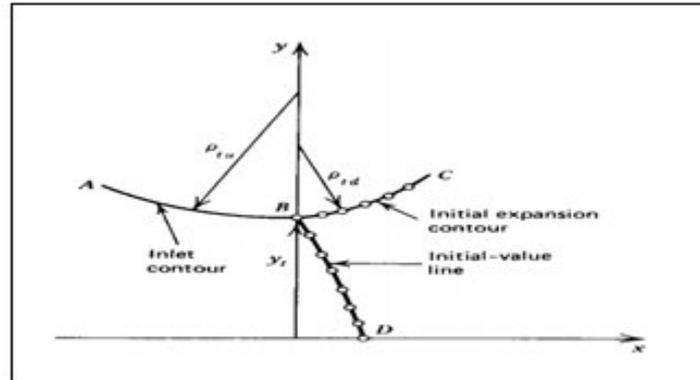


Figure 3.25 : Données initiales du problème.

L'étape d'après, c'est de prendre en considération les données initiales sur la paroi et sur la ligne initiale afin de commencer le calcul des paramètres de l'écoulement dans la région d'expansion initiale, comme représenté sur la figure (3.26). Dans ce cas, on utilise le même algorithme de calcul que celui présenté dans le paragraphe (3.6).

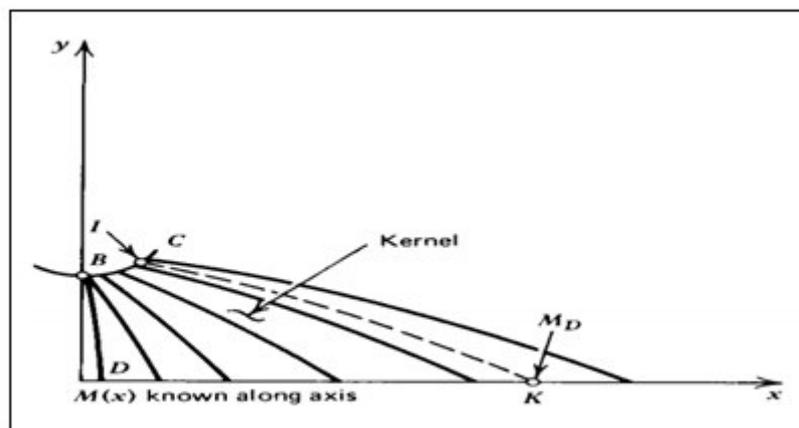


Figure 3.26 : Localisation du mach de désigne sur l'axe X.

Les paramètres de l'écoulement dans la zone d'expansion initiale sont entièrement déterminés à partir des données de la ligne initiale. Cette zone, elle est dite : **zone de kernel**.

La distribution du nombre de Mach sur l'axe X $M_{CL} = M(x)$ est déterminée à partir de cet écoulement (figure 3.26). Le Mach de design M_D est localisé sur l'axe X. Par contre, les paramètres de l'écoulement sont déterminés sur la caractéristique sortante à partir de M_D noté IK , en faisant une simple interpolation entre les paramètres des deux caractéristiques sortantes des points amont et aval au point K sur l'axe de symétrie.

Dans le cas où on souhaite que l'écoulement à la sortie de la tuyère soit uniforme et parallèle à $M = M_D$ et $\theta = 0$. C'est le cas par exemple des tuyères destinées à usage en soufflerie, alors dans cette région toutes les caractéristiques doivent être des lignes droites formant un angle de $\alpha_D = \sin^{-1}(1/M_D)$ voir figure (3.27).

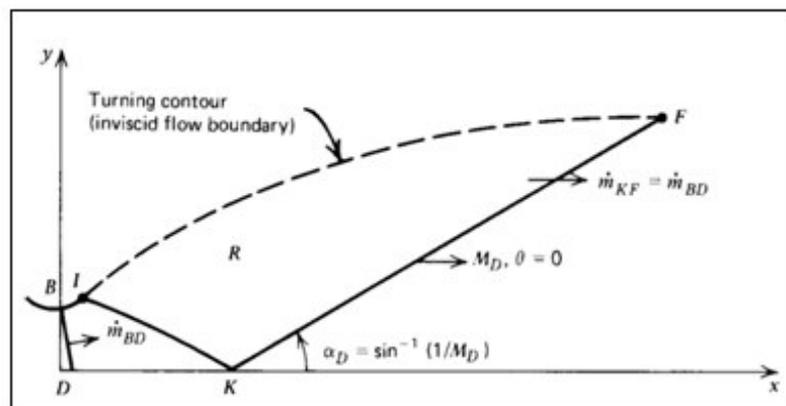


Figure 3.27 : Les conditions imposées à la sortie de la tuyère.

Ainsi la caractéristique droite faisant l'angle α_D par rapport à l'axe de symétrie est extrudée à partir du point k jusqu'au point F . Le débit massique qui traverse la ligne $\mathbf{K-F}$ doit être égal au débit calculé qui traverse la ligne initiale $\mathbf{B-D}$ (figure 3.27).

Pour déterminer les paramètres de l'écoulement à l'intérieur de la région R et en même temps le contour idéal de la paroi du divergent notée $\mathbf{I-F}$, on doit tenir compte des hypothèses fixées à la sortie de la tuyère.

La solution à ce problème est identique à celle de l'étude d'une tuyère à contour donné. Pour cela, il faut appliquer la procédure de calcul d'un point

interne et la généraliser sur tout le domaine de la région R en commençant par la ligne **K-F** comme montrée sur la figure (3.28).

En faisant évoluer la caractéristique à partir du point situé sur la ligne **K-F**, et on calcule au même moment pour chaque point interne de coordonnées (x, y) le débit massique qui traverse la tuyère, en utilisant la relation suivante :

$$d\dot{m} = \rho V \cdot dA = \rho u \pi y dy \quad (3.67)$$

Sachant que le débit au point sur l'axe est nul, alors l'intégrale de l'équation (3.67) est donnée par la relation suivante :

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{y_t} \rho u y dy \quad (3.68)$$

Durant la procédure de calcul du débit le long de la caractéristique, nous arrivons à une étape où le débit trouvé dépasse celui qui traverse la tuyère. Une interpolation entre les deux derniers points calculés permet de trouver la position du point paroi.

Cette procédure est répétée pour chaque point sur la ligne **K-F** jusqu'à obtenir une caractéristique qui comporte un seul point qui définit le point **F**. Delà, on arrête le calcul on définissant que le profil est défini.

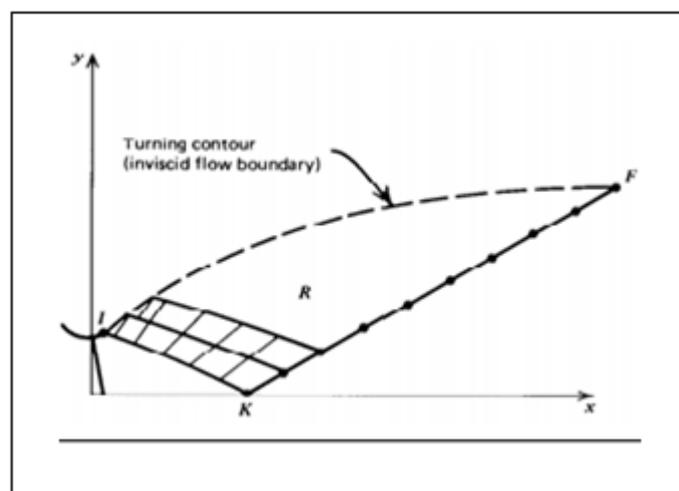


Figure 3.28 : Détermination du contour d'une tuyère supersonique.

3.8.2. Cas de tuyères planes :

Dans le dimensionnement des tuyères de souffleries supersoniques qui sont généralement des tuyères planes, la région R est obtenue en appliquant le concept des ondes simples.

Une zone à ondes simples est une région où les caractéristiques sont des lignes droites ayant les mêmes propriétés. Dans le cas des tuyères supersoniques planes, la région adjacente à la région d'écoulements parallèle et uniforme à ondes simples.

La figure (3.29) montre schématiquement les caractéristiques droites sortant d'un point sélectionné sur la ligne IK. La limite de chaque ligne caractéristique est déterminée par le calcul du débit massique comme décrit dans le paragraphe (3.7.1) et le contour de la tuyère est déterminé sans intégration numérique.

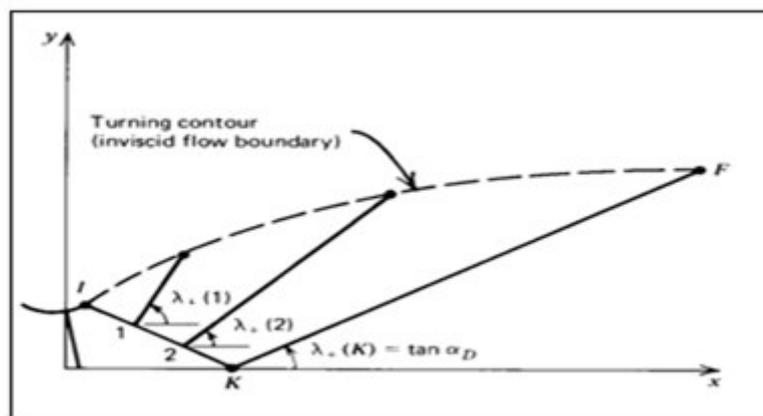


Figure 3.29: Détermination du contour d'une tuyère supersonique plane.

3.9. Conclusion :

La méthode des caractéristiques présente une importance dans le dimensionnement des tuyères supersoniques. En spécifiant les conditions suivantes:

- ✓ Le nombre de Mach à la sortie ;
- ✓ Le rapport de pression ;
- ✓ La poussée désirée ;
- ✓ Les paramètres thermodynamiques d'arrêt du fluide ;
- ✓ Les dimensions du col.

Nous pouvons obtenir le profil de la tuyère.

Pour l'étude de l'écoulement interne, on a opté pour deux méthodes : celles des caractéristiques et des éléments finis.

CHAPITRE 4

RÉSULTATS ET DISCUSSION

4.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'application des méthodes de conception de tuyères supersoniques décrites dans le chapitre précédent.

La démarche est la suite:

- ✓ Tout d'abord concevoir le profil du premier galbe en utilisant la méthode des caractéristiques appliquée pour deux tuyères de types TIC et TOC. La méthode a été validée en comparant nos résultats à ceux obtenus par d'autres auteurs [12]. Par contre pour la tuyère TIC, les résultats ont été validés par rapport à ceux obtenus au niveau du Centre National de Recherche spatiale [CNRS].
- ✓ Pour représenter le deuxième galbe : deux procédures ont été suivies, premièrement on a tronqué la tuyère TIC avec une jonction avec la tuyère TOC afin d'avoir une tuyère double galbe. La méthode n'a pas donné une satisfaction. Une deuxième procédure a été adoptée.
- ✓ La procédure est la même que pour le premier galbe. On tronque la tuyère TIC et pour le deuxième galbe on propose un jet libre ($P=P_a$) ce qui nous permet de dessiner la tuyère double galbe. Les résultats de notre étude ont été comparés aux résultats obtenus par Chloé Génin et Reijasse [13-14].

4.2. La première partie : Conception de la tuyère classique

4.2.1. Application de la première méthode :

Cette méthode consiste à dimensionner une tuyère supersonique en simulant le contour du divergent de la tuyère par un polynôme de second ordre on prenant en considération des conditions aux limites du divergent purement géométriques. On calcule ensuite les paramètres de l'écoulement.

1. Présentation du programme de la première méthode

Le programme de calcul est essentiellement formé d'un programme principal et de dix sous-routines. Le programme principal contient les étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans la partie divergente d'une tuyère supersonique plane ou axisymétrique. Les résultats obtenus sont représentés par les valeurs des propriétés de l'écoulement en chaque point du maillage interne ainsi que les performances de la tuyère.

Le programme principal communique avec dix sous-routines énumérées avec leurs fonctions spécifiques ci-dessous :

- ✓ Sous-routines « **LINITS** » et « **LINITK** »: Initient les calculs le long de la ligne de départ par les approches de Sauer et Kliegel-levine respectivement. Ces méthodes permettent de décrire l'écoulement du fluide dans le col (la région transsonique) d'une manière très précise en donnant la distribution de la pression et du nombre de Mach sur chaque point de maillage sur la ligne sonique.
- ✓ Sous-routine « **PAROI** »: A pour tâche le calcul des paramètres définissant la forme de la paroi (c'est-à-dire) la détermination des coefficients du polynôme qui la simule (dans notre cas on impose un polynôme du deuxième degré). Elle permet aussi de calculer la position de l'intersection des caractéristiques montantes avec la paroi.
- ✓ Sous-routine « **AXE** »: a pour rôle le calcul de la position des points axiaux
- ✓ Sous-routine « **DRPAROI** » : A pour tâche le calcul des points se situant sur la paroi de la partie divergente.
- ✓ Sous-routine « **INPAROI** » : A pour rôle le calcul des points qui se situent sur la paroi de la zone d'expansion initiale, à partir des points pré

spécifiés. Cette subroutine joue un rôle très important dans le raffinement de cette zone à fort gradient.

- ✓ Subroutine « **INTER** » : A pour mission le calcul des points internes.
- ✓ Subroutine « **POUSSE** »: Destinée au calcul des performances de la tuyère, tel que : la poussée, l'impulsion spécifique et les différents coefficients de la tuyère.
- ✓ Subroutine « **THERMO** »: Destinée au calcul des paramètres thermodynamiques pour chaque point de l'écoulement
- ✓ Subroutine « **CLASMEMO** »: Pour classer et mémoriser et écrire tous les paramètres des différents types de points calculés.

2. Les données thermodynamiques et géométriques pour le programme

- ✓ **Données thermodynamiques**: Ce sont les données décrivant l'état de stagnation de l'écoulement. Elles sont principalement représentées par les valeurs de pression et de température totale.
- ✓ **Donnée géométrique de la tuyère**: Elles permettent de décrire la forme géométrique de la région du col.

3. Premier cas d'étude :

Notre premier cas d'étude est représenté par la tuyère équipant le premier étage du moteur SEPR-7341 de l'engin de recherche « ANTARES » de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales. L'écoulement qui prend place est calculé par l'approche de Sauer [23] pour le col (écoulement transsonique). Par contre pour le divergent, on utilise la méthode des caractéristiques (écoulement supersonique). Les données de la tuyère « Antares » sont présentées ci-dessous :

Tableau 4.1 : Les données de la tuyère « Antares »

| P_a (Bar) | P_t (Bar) | T_t (°k) | Y_t (m) | R_{tu} (m) | R_{cd} (m) | θ_a (deg) | θ_s (deg) | Y_s (m) |
|-------------|-------------|------------|--------------|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|--------------|
| 1.013 | 54 | 2500 | 0.088 | 0.176 | 0.044 | 20 | 5 | 0.197 |

3.1. Le profil de la tuyère « Antares » :

La figure (4.1) illustre le profil de la tuyère Antares (TOC) obtenu par la méthode « dite directe » en imposant un profil simulé à un polynôme de deuxième degré.

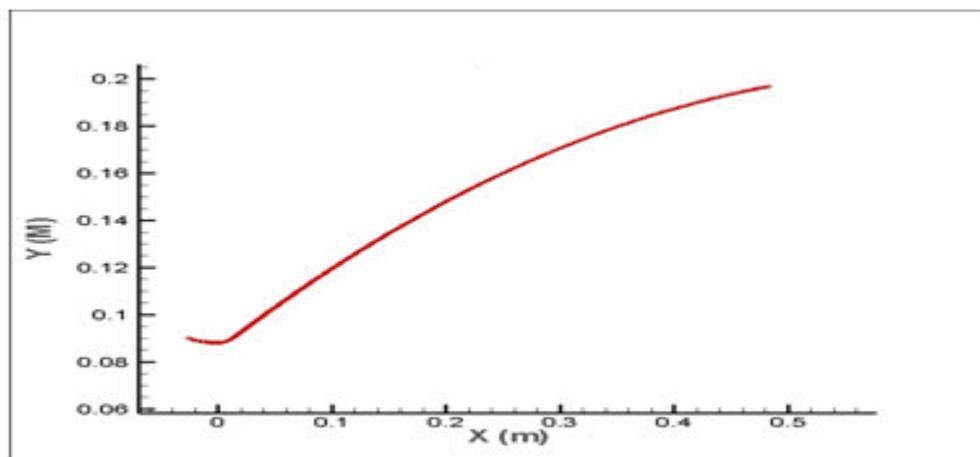


Figure 4.1 : profil de la tuyère Antares

Nous remarquons que le profil de la tuyère « Antares » est de forme parabolique.

3.2. Les résultats géométriques obtenus pour la tuyère « Antares »

Le tableau 4.2 présente la comparaison des données géométriques de la tuyère : le point d'attache (X_a, Y_a) ainsi que la longueur X_s de la tuyère obtenues par le code de calcul que nous avons développé et ceux obtenus par Mr Haddad [12].

Tableau 4.2 : Comparaison des données géométriques de la tuyère
« Antares »

| Le point d'attache | Nos résultats | Résultats Réf [12] |
|---------------------------|----------------------|---------------------------|
| X_a (m) | 0.01505 | 0.01504 |
| Y_a (m) | 0.09065 | 0.09064 |
| Longueur X_s (m) | 0.4861 | 0.486 |

✓ Les coefficients du polynôme représentant le profil de la tuyère :

Le tableau (4.3) représente la comparaison entre les coefficients du polynôme de deuxième degré imposé pour le calcul du profil de la tuyère que nous avons obtenus et ceux de Mr Haddad [12]. On remarque que les deux résultats sont très proches.

Tableau 4.3 : Les coefficients du polynôme

| Les coefficients | Nos résultats | Résultats Réf [12] |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| A | 0.08511 | 0.08510 |
| B | 0.37280 | 0.37278 |
| C | -0.29342 | -0.29353 |

3.3. Les performances de la tuyère « Antares » :

Dans le tableau ci-dessous sont mentionnées les performances de la tuyère « Antares » comparées toujours aux résultats de la référence [12]. On constate que les deux résultats sont compatibles et donne une entière satisfaction.

Tableau 4.4 : Performances de la tuyère Antares

| Performances | Nos résultats | Résultats : Ref [12] |
|-------------------------------|---------------|----------------------|
| Poussée développée F (N) | 202999 | 202925 |
| Débit massique (Kg/s) | 94.72 | 94.92 |
| Coefficient de décharge C_d | 0.994 | 0.992 |
| Coefficient de poussée C_f | 1.545 | 1.535 |
| Vitesse effective F/m | 2143.10 | 2137.85 |
| Mach de sortie M_s | 2.67 | 2.75 |
| Impulsion spécifique I_s | 218.46 | 217.65 |

3.4. Évolution des paramètres de l'écoulement dans la tuyère « Antares »

3.4.1.Évolution du nombre de Mach le long de la tuyère :

La Figure (4.2) montre l'évolution du nombre de Mach sur l'axe et la paroi de la tuyère Antares. On constate que ce nombre de Mach augmente le long de la tuyère, l'évolution sur la paroi est plus rapide que celle sur l'axe. Résultat logique, car le profil de la vitesse dans une tuyère est de forme parabolique.

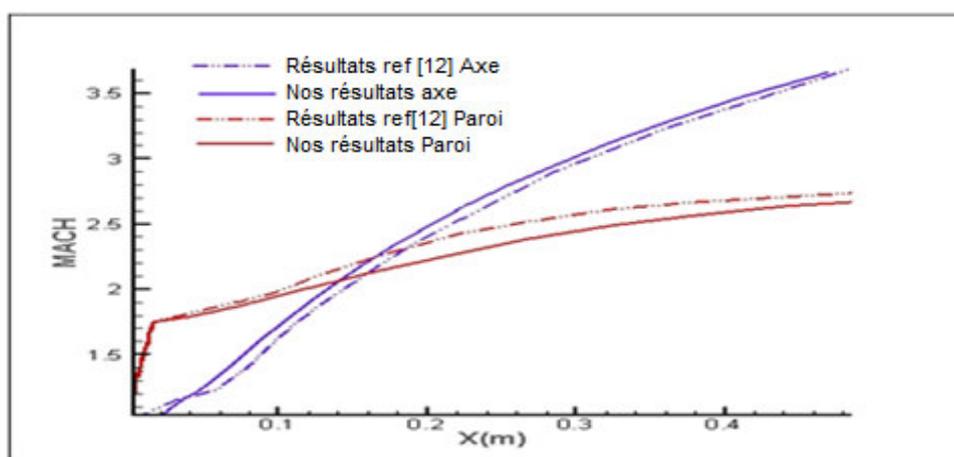


Figure 4.2 : Evolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi.

De même, l'augmentation du nombre de Mach sur la paroi au niveau du col est brusque. C'est le but de la conception des tuyères profilées où on atteint des forts gradients au voisinage du col dans la zone d'expansion

initiale et on ramène en suite le fluide graduellement jusqu'à la sortie de la tuyère avec une direction axiale.

A la sortie de la tuyère, le nombre de Mach sur l'axe est supérieur au Mach à la paroi à cause des pertes qui sont dues aux frottements du fluide avec la paroi de la tuyère.

Sur la figure (4.2), la comparaison des résultats obtenus à ceux de la référence [12] montre une certaine concordance et compatibilité, ce qui nous conforte dans la suite de notre étude.

3.4.2. Évolution de la pression le long de la tuyère :

La Figure (4.3) montre l'évolution de la pression le long de l'axe et la paroi de la tuyère « Antares ». On constate que la pression diminue sur la paroi et l'axe ; du col jusqu'à la section de sortie tout en se rapprochant de la valeur de la pression atmosphérique. Résultat prévisible pour notre cas car la tuyère est de type adaptée.

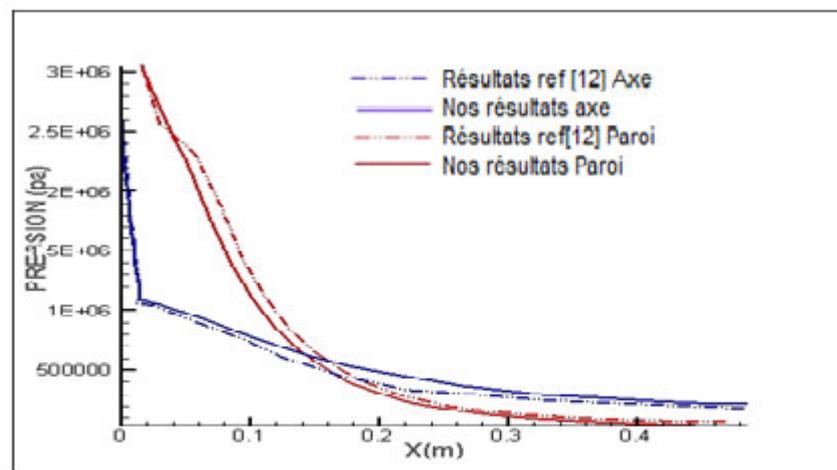


Figure 4.3: Evolution de la pression sur l'axe et sur la paroi.

En outre, l'allure de nos courbes sont compatibles avec ceux de l'expérimental, ce qui montre l'efficacité de notre méthode.

4. Deuxième cas d'étude :

Notre deuxième cas d'étude est représenté par la tuyère équipant le premier étage du moteur SEPR-739P de l'engin de recherche « BERENICE »

de l'Office National d'Études et de Recherches aérospatiales. L'écoulement qui y prend place est calculé par l'approche de Sauer [23] pour le col (écoulement transsonique), par contre, pour le divergent on utilise la méthode des caractéristiques (écoulement supersonique).

Les données de la tuyère «Berenice» sont présentées ci-dessous :

Tableau 4.5 : Les données de la tuyère «Berenice»

| Pa (Bars) | Pt (Bars) | Tt (K) | Yt (m) | Rtu (m) | Rcd (m) | θ_a (deg) | Θ_s (deg) | Ys (m) |
|----------------------|----------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|-------------------|
| 1.013 | 69 | 2800 | 0.069 | 0.138 | 0.0345 | 20 | 5 | 0.223 |

4.1. Le profil de la tuyère «Berenice» :

Comme précédemment, en appliquant la méthode directe sur une la tuyère « Berenice » appartenant toujours à l'ONERA. Le profil de cette tuyère est représenté sur le graphe (4.4), ce profil est toujours simulé à un polynôme de deuxième degré.

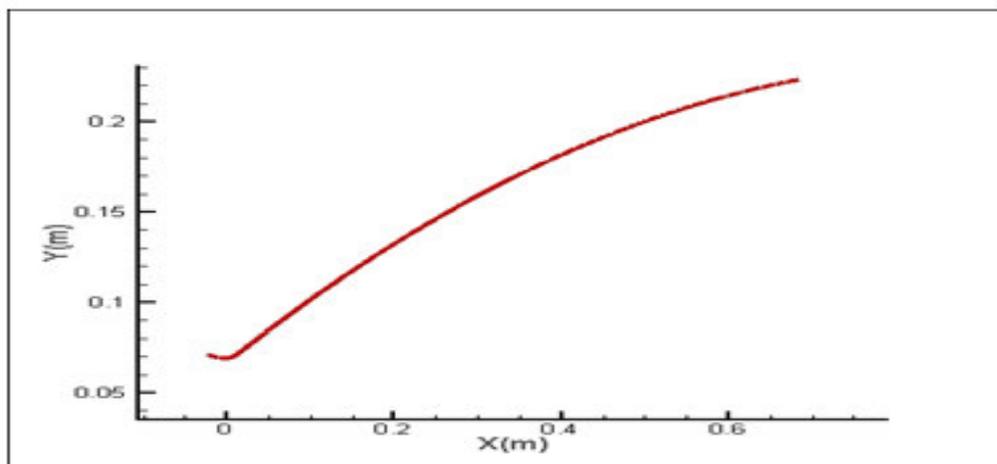


Figure 4.4 : profil de la tuyère Berenice.

Nous constatons que le profil de la tuyère Berenice est de forme parabolique.

4.2. Les résultats géométriques obtenus pour la tuyère «Berenice» :

Comme le cas d'étude précédent ; les tableaux (4.6 - 4.7 et 4.8) représentent respectivement :

- ✓ Les données géométriques de la tuyère ;
- ✓ Les coefficients du polynôme simulant le profil de la tuyère ;
- ✓ Les performances de la tuyère..

La comparaison des résultats à la référence [12] montre une bonne compatibilité.

✓ Les coordonnées du point d'attache (X_a, Y_a) et la longueur de la tuyère X_s :

Le tableau (4.6) présente la comparaison des données géométriques de la tuyère obtenues par le code de calcul que nous avons développé et ceux obtenus par Mr Haddad [12].

Tableau 4.6 : Données géométriques de la tuyère «Berenice»

| Le point d'attache | Nos résultats | Résultats :Réf [12] |
|---------------------------|----------------------|----------------------------|
| $X_a(m)$ | 0.01179 | 0.01175 |
| $Y_a(m)$ | 0.07108 | 0.07106 |
| La longueur $X_s(m)$ | 0.68 | 0.54 |

✓ Les coefficients du polynôme représentant le profil de la tuyère :

Le tableau (4.7) représente la comparaison entre les coefficients du polynôme de deuxième degré imposé pour le calcul du profil de la tuyère que nous avons obtenus et ceux de Mr Haddad [12]. On remarque que les deux résultats sont compatibles.

Tableau 4.7 : Les coefficients du polynôme

| Les Coefficients | Nos résultats | Résultats [12] |
|------------------|---------------|----------------|
| A_w | 0.06676 | 0.06675 |
| B_w | 0.36881 | 0.36880 |
| C_w | -0.20540 | -0.20534 |

4.3. Les performances de la tuyère «Berenice» :

Il est admis que les performances d'une tuyère sont très importantes pour les performances globales du moteur. Le tableau (4.8) présente la comparaison des performances de la tuyère que nous avons obtenus et ceux de Mr Haddad

Tableau 4.8 : Performances de la tuyère

| Performances | Nos résultats | Résultats [12] |
|-------------------------------|---------------|----------------|
| Poussée développée F(N) | 162790.3704 | 164540.8 |
| Débit Massique Kg/s | 70.312 | 70.45 |
| Coefficient de décharge C_d | 0.99439 | 0.992 |
| Coefficient de poussée C_f | 1.5773 | 1.587 |
| Vitesse effective (m/s) | 2315.257 | 2335.57 |
| Mach de sortie M_s | 3.2187 | 3.095 |
| Impulsion spécifique I_s | 236.009 | 236.84 |

4.4. Évolution des paramètres de l'écoulement dans la tuyère «Berenice» :

4.4.1. Évolution du nombre de Mach le long de la tuyère :

La figure (4.5) donne l'évolution du Mach le long de la tuyère pour le deuxième cas d'études (tuyère Bérénice). L'allure des courbes est identique à celle obtenue pour la tuyère Antares.

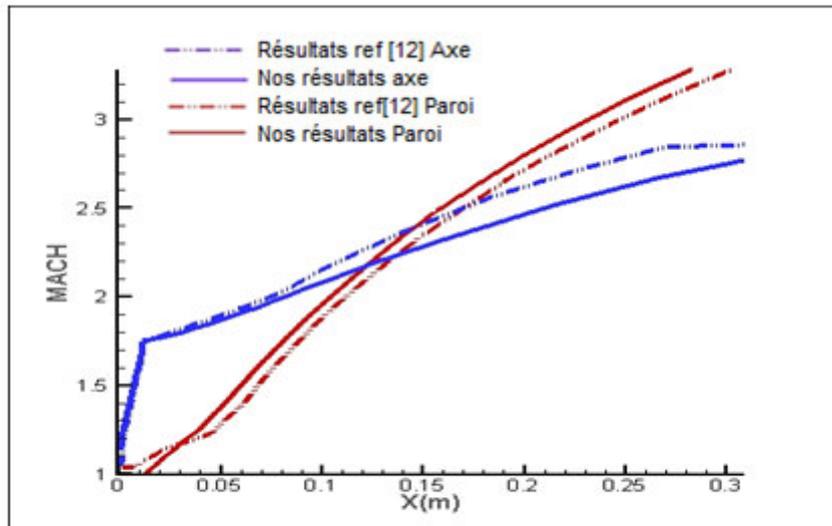


Figure 4.5 : L'évolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi.

En comparant toujours nos résultats à ceux de l'expérimental, nous remarquons une concordance des résultats ce qui valide notre méthode.

4.4.2.Évolution de la pression :

La figure (4.6) donne l'évolution de la pression statique le long de la tuyère pour ce deuxième cas d'études (Bérénice), l'allure des courbes est identique à celle obtenue pour la tuyère Antares avec la même logique que le cas précédent.

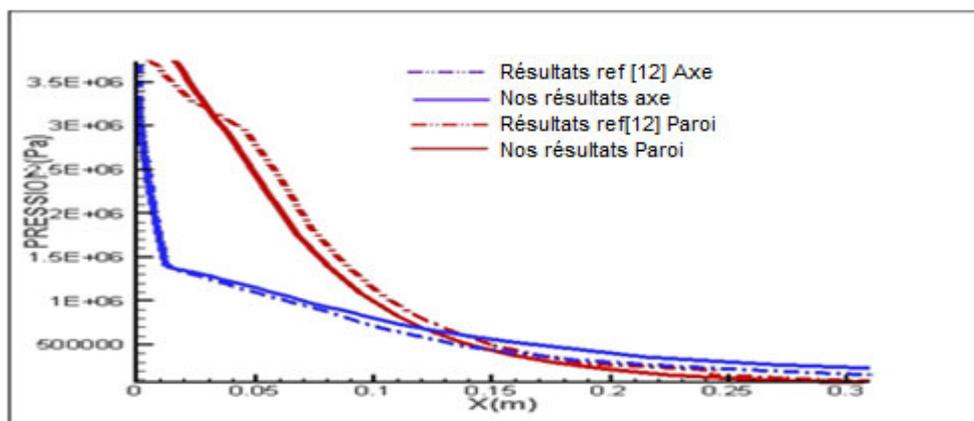


Figure 4.6 : Evolution de la pression sur l'axe et la paroi.

On constate la même chose que le premier cas. La pression diminue le long de la tuyère sur l'axe et sur la paroi jusqu'à atteindre la pression proche l'ambiante puisque notre tuyère est adaptée.

Comme le cas précédent, on constate que nos résultats sont proches aux résultats obtenus par la référence [12].

✓ Les résultats de maillages pour les deux tuyères :

La figure (4.7) illustre schématiquement la focalisation des lignes de Mach et la procédure de correction de calcul cité dans le chapitre 3.

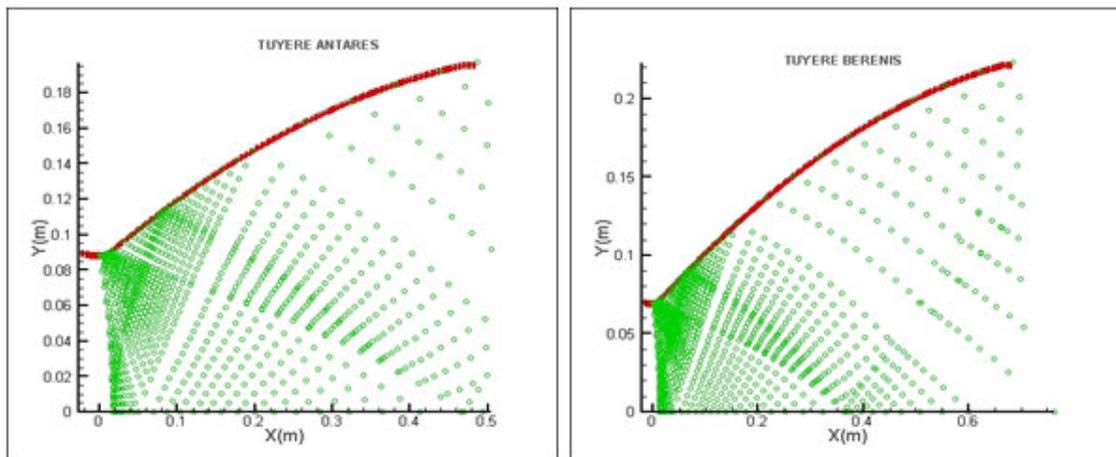


Figure 4.7 : schéma de calcul et maillage des tuyères Antares et Berenice.

Généralement la focalisation de caractéristiques prend origine au niveau point d'attachement de la tuyère, car c'est le seul point où la pente du profil est discontinue.

La focalisation des lignes de Mach est l'intersection de deux ou plusieurs caractéristiques de même famille. C'est ce qui conduit à l'apparition des ondes de choc obliques, la négligence de celle-ci dans le cas des angles d'attache les plus critiques affectent directement la précision de la méthode et engendrent de sérieux problèmes de calcul.

5. Troisième cas d'étude :

Ce cas d'étude est consacré pour les tuyères de type TIC. Les tuyères TIC qui présentent un profil idéal sont dessinées par exemple pour des études en soufflerie. Elles ont l'avantage de ne pas avoir ce choc interne

puisqu'elles sont souvent plus longues et la variation de la section du divergent n'a pas un caractère brutal.

Tableau 4.9 : Les données de la tuyère.

| P_a (Bars) | P_t (Bars) | T_t (K) | Y_t (m) | R_{tu} (m) | R_{cd} (m) | θ_a (deg) | θ_s (deg) | Y_s (m) |
|-----------------|-----------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|--------------|
| 1.013 | 3 | 243 | 0.01 | 0.03 | 0.03 | 14.64 | 0 | 0.022 |

5.1. Le profil de la tuyère TIC

La figure (4.8) représente le profil de la tuyère obtenue par notre méthode qui est représenté par un polynôme de deuxièmes degrés dont les coefficients sont : $A=8.687025E-03$; $B=3.139508E-01$ et $C=-1.769933$

Il est admis que notre profil n'est qu'une approximation car il est simulé d'avance à un polynôme.

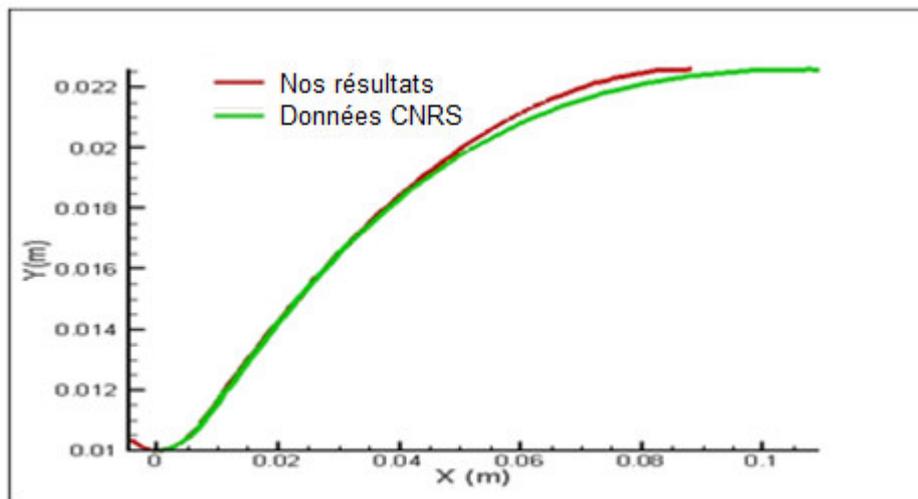


Figure 4.8 : Comparaison des profils de la tuyère TIC $M_{ex}=3.1$

Comparant nos résultats à ceux obtenus par Vladeta , qui a travaillé sur la même tuyère au CNRS d'Orléans. On constate que les deux résultats coïncident à la partie divergente proche du col. On remarque que le profil obtenu par A. Haddad [12] est plus long. Le résultat obtenu par notre méthode est relativement plus compressé car le profil n'a pas été imposé.

5.2.Évolution des paramètres de l'écoulement dans la tuyère TIC :

✓ Évolution du nombre de Mach et de la pression :

Les figures (4.09) et (4.10) montrent respectivement l'évolution du nombre de Mach et de la pression le long de cette tuyère

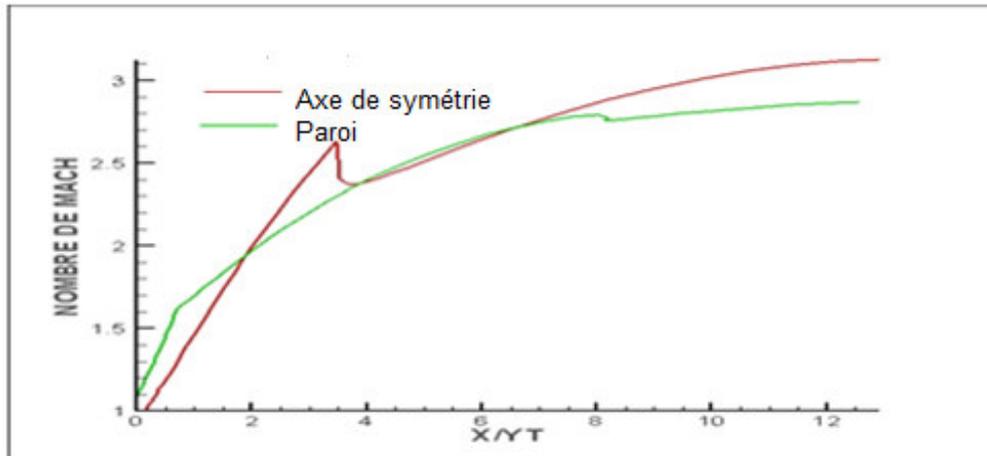


Figure 4.9 : Evolution du nombre de mach sur l'axe et la paroi.

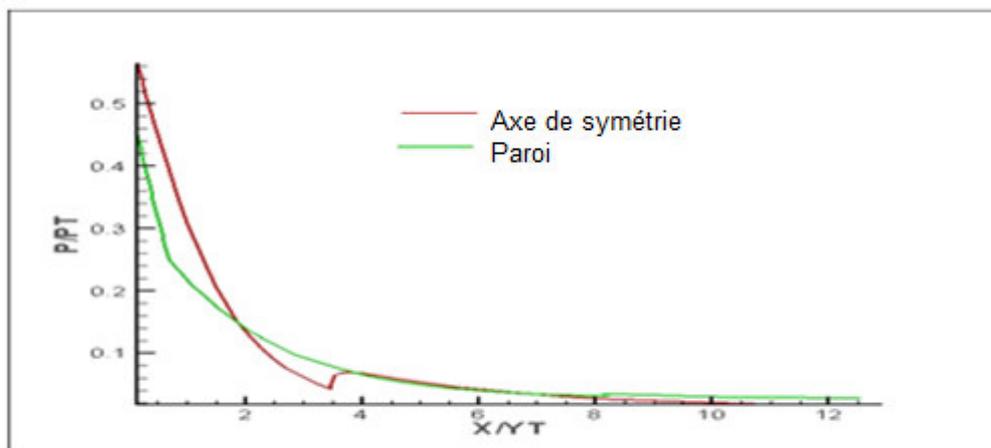


Figure 4.10 : Evolution de la pression sur l'axe et la paroi.

On remarque que ces deux paramètres évoluent de la même manière que les deux cas de tuyères précédentes (tuyères TOC).

Mais en comparant nos résultats à ceux obtenus au CNRS par Vladetta, nous constatons l'apparition d'une onde-choc oblique causée principalement par l'accentuation du profil.

La détente des gaz dans une tuyère de profil relativement plus accentuée incite ces derniers à accélérer davantage pour atteindre des vitesses les plus élevées le plus tôt possible.

C'est vrai que le caractère supersonique de l'écoulement est conservé, et la longueur de la tuyère obtenue est moins importante ce qui est un avantage dans le cas où la tuyère en question est destinée à la propulsion. Mais les charges latérales dues au choc interne en pratique causent de vrais problèmes d'instabilité de la tuyère.

Alors cette approche est loin d'être acceptable pour le cas de tuyère a contour idéal ou (TIC), du moment que le résultat obtenu est à son origine en contradiction avec la définition de ce type de tuyères.

Donc pour ce cas, nos résultats ne sont pas aussi performants ce qui nous incite à proposer une autre méthode pour la conception de tuyère supersonique (TIC).

6. Conclusion :

- ✓ Les polynômes de second ordre ou supérieurs sont généralement utilisés pour déterminer les profils des tuyères optimisées en poussée "Thrust Optimized contour" (TOC).
- ✓ Ces profils sont généralement conçus pour les tuyères de lanceurs (type Vulcain par exemple).
- ✓ Ces tuyères sont caractérisées par un choc interne qui provient du fait de la variation brusque de la section du divergent pour atteindre le rapport de section pour lequel la tuyère est sensée délivrer le maximum de poussée.
- ✓ Ces tuyères sont généralement courtes (pour réduire le poids du lanceur) mais présentent un choc interne qui a des conséquences sur l'instabilité de l'écoulement et sur les charges latérales induites.

4.2.2. Application de la deuxième méthode :

Contrairement à la première méthode où on a imposé une géométrie, pour ensuite calculer les paramètres de l'écoulement dans la tuyère, dans cette méthode, on va imposer un écoulement, pour justement avoir une géométrie de la tuyère qui va nous permettre d'avoir à sa sortie les paramètres et la forme de l'écoulement imposés.

1. Présentation du programme de la deuxième méthode :

Le code de calcul de cette méthode est constitué principalement d'un programme principal comme la première programme qui communique avec neuf sous-routines. Le programme principal contient les étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans la partie divergente d'une tuyère supersonique plane ou axisymétrique. Les résultats qu'il permet d'obtenir sont représentés par les valeurs des propriétés de l'écoulement en chaque point du maillage interne ainsi que les performances de la tuyère.

- ✓ Le programme principal communique avec neuf sous-routines énumérées avec leurs fonctions spécifiques ci-dessous :
- ✓ Subroutines « **LINITS** », « **LINITK** », « **AXE** », « **INPAROI** », « **INTER** », « **POUSSE** », « **THERMO** », « **CLASMEMO** » : font la même fonction que celles citées avant dans le code de la première méthode.
- ✓ Subroutine « **RAO** » sa tâche est le positionnement des points paroi pour tracer le profil de la tuyère voulue.

2. Les données thermodynamiques et géométriques pour le programme :

Données thermodynamiques: Ce sont les données décrivant l'état de stagnation de l'écoulement. Elles sont principalement représentées par les valeurs de pression et de température totale. Et aussi les conditions à la sortie de la tuyère telles que la pression ambiante un choix entre le nombre

de Mach la poussé ou également le rapport de pression qu'on veut avoir par le dimensionnement de la tuyère.

Donnée géométrique de la tuyère: Elles permettent de décrire la forme géométrique de la région du col.

Tableau 4.10 : Les données de la tuyère.

| P_a (Bars) | P_t (Bars) | T_t (K) | Y_t (m) | R_{tu} (m) | R_{cd} (m) |
|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 0 | 3 | 243 | 0.01 | 0.03 | 0.003 |

3. Application pour différent nombre de Mach Ms :

Notre cas d'étude est une tuyère axisymétrique à contour idéal, avec une zone d'expansion initiale de contour simulé à un arc de cercle de rayon connu, délivrant à la sortie un écoulement supersonique parallèle et uniforme de nombre de Mach bien défini.

Les paramètres de l'écoulement sont calculés par la méthode de Sauer au niveau du col dans la région transsonique, et par la méthode des caractéristiques dans la partie divergente supersonique.

La logique de dimensionnement de la tuyère est présentée dans le chapitre 3. Les calculs sont réalisés pour 3 nombres de Mach différents: 3.3, 3.8 et 4.00.

3.1. Les cas d'études (applications) M=3.3 ; M=3.8 ; M=4.0 :

Dans ce qui suit, et pour donner plus de crédibilité à notre travail, la même méthode sera appliquée sur la même tuyère, mais avec un nombre de Mach de sorties différent, on prendra par exemple : M=3.3 ; M=3.8 ; M=4.00. On remarque que les profils des tuyères obtenus sont de forme parabolique qui peut être assimilée à des polynômes d'ordre supérieur.

Les résultats obtenus concernant l'évolution des paramètres thermodynamiques (Pression, Nombre de Mach) dans la tuyère, sont

identique à ceux de la tuyère « Antares », toutes les courbes présentent la même allure, voir figures (4.11- 4.16).

La comparaison des résultats avec ceux obtenus au CNRS montre une bonne compatibilité.

3.1.1.Évolution des paramètres de l'écoulement dans les tuyères :

1. Application pour $M_s=3.3$:

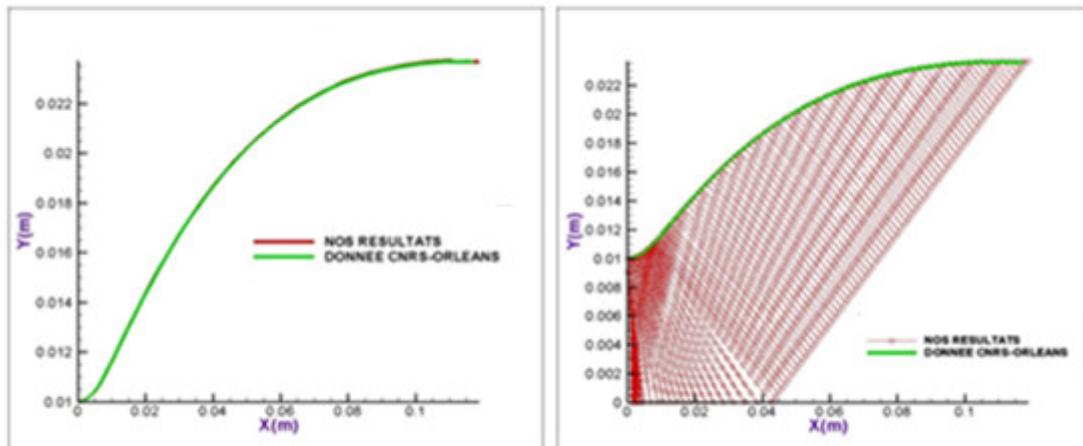


Figure 4.11: comparaison des profils de la tuyère idéale pour $M_s=3.3$

On remarque que le profil de nos résultats est confondu avec les résultats obtenus pas CNRS .

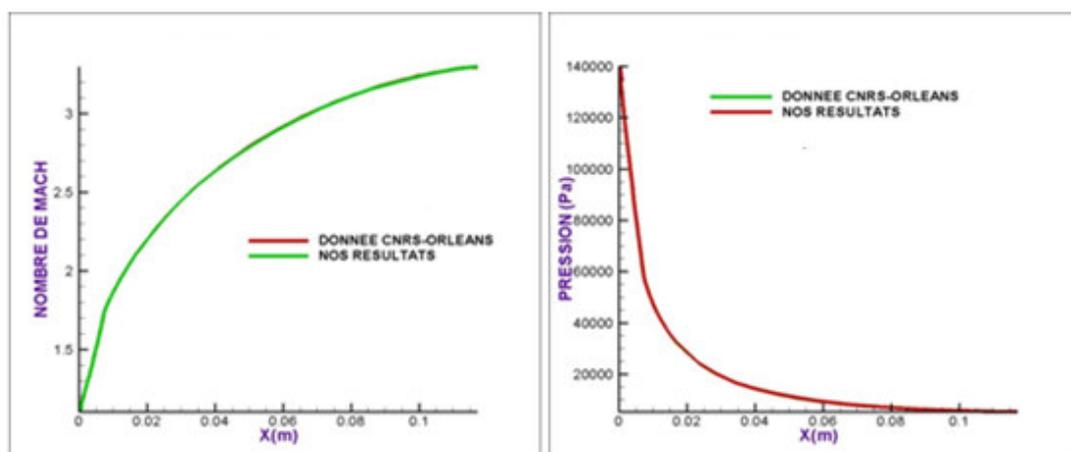


Figure 4.12 : Evolution du nombre de mach et de la pression sur la paroi de la tuyère.

On voit que le nombre de Mach évolue très rapidement jusqu'à atteindre la valeur demandée et la pression diminue rapidement jusqu'à atteindre la pression imposée par le calcul

On remarque que nos résultats convergent de la même manière à ceux obtenus par CNRS, ce qui représente un appui scientifique pour notre travail.

2. Application pour $Ms=3.8$:

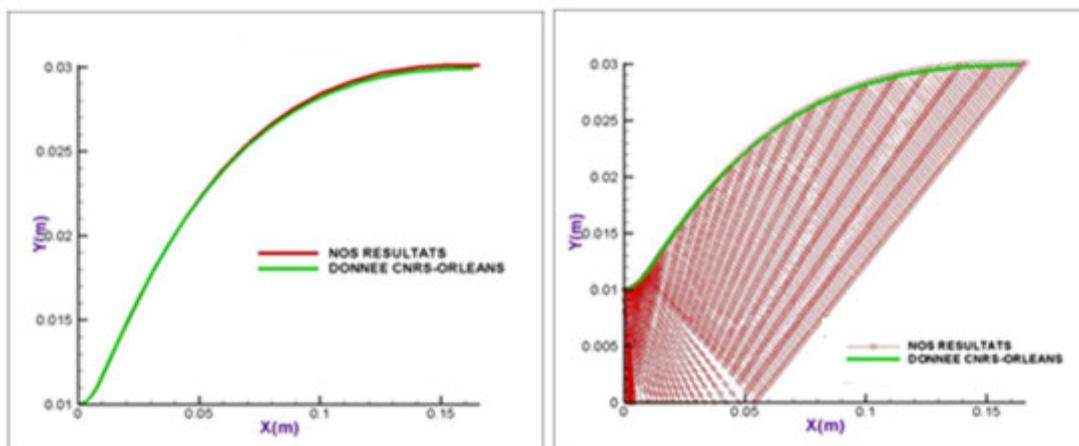


Figure 4.13 : profil de la tuyère idéale pour $Ms=3.8$.

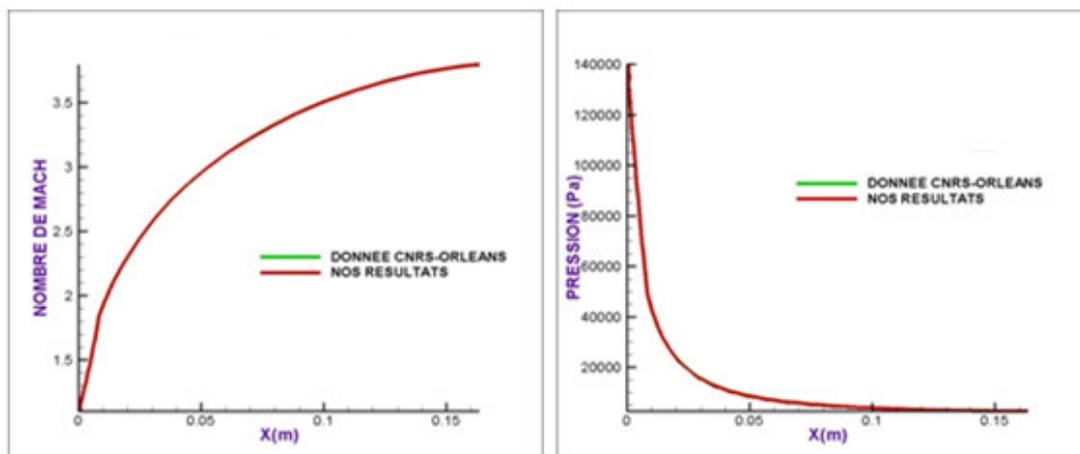


Figure 4.14 : Evolution du nombre de mach et de la pression sur la paroi de la tuyère.

On constate la même chose que le premier cas , nos résultats sont proches aux résultats obtenus par CNRS .

3. Application pour $Ms=4.0$:

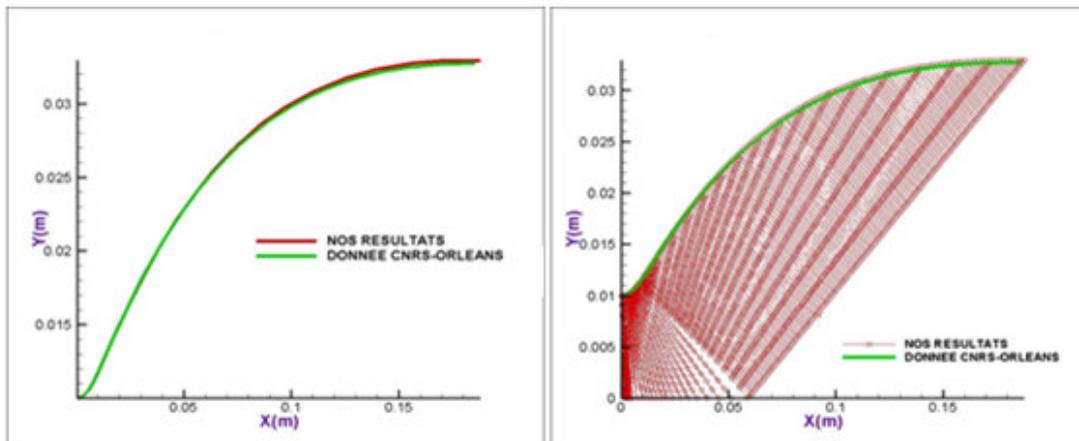


Figure 4.15 : comparaison des profils de la tuyère idéale avec $Ms=4.0$.

On remarque que nos résultats sont confondus aux résultats de CNRS.

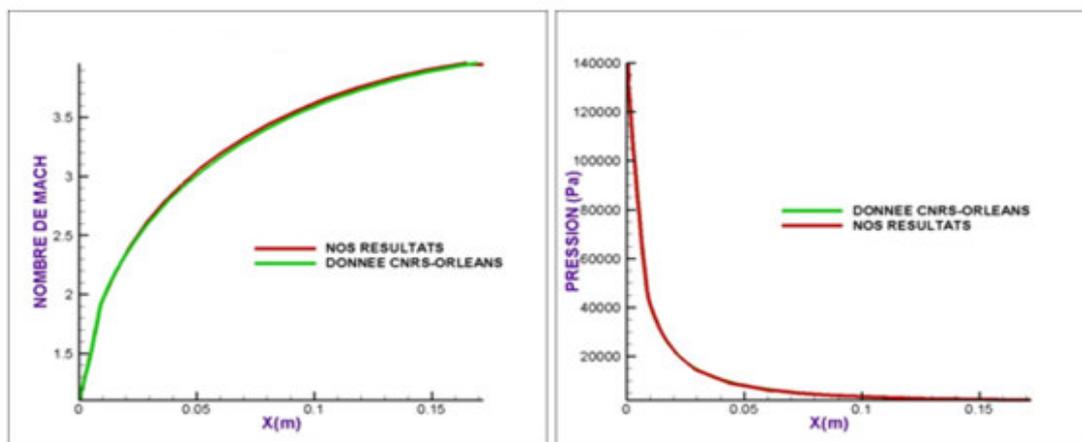


Figure 4.16 : Evolution du nombre de mach et de la pression sur la paroi de la tuyère.

On voit que le nombre de Mach évolue très rapidement jusqu'à atteindre le nombre de Mach de sortie voulu par contre la pression diminue jusqu'à la valeur nulle.

Nos résultats convergent de la même manière avec les résultats de CNRS.

3.1.2. Conclusion :

Cette deuxième méthode développée et applicable pour n'importe quelle tuyère idéale délivrant un écoulement parallèle et uniforme avec un nombre de Mach bien spécifié à la sortie. C'est le cas de tuyères utilisées

dans les souffleries supersoniques qui sont des tuyères assez longues ou le problème de l'onde de choc interne est évité (contrairement aux tuyères TOC).

Comme nous l'avons vu, l'application de cette méthode a donné une satisfaction totale, nos résultats ont été validés d'une manière irréprochable.

1. Premièrement la logique des écoulements dans les tuyères a été respectée.

2. Deuxièmement nos résultats ont été comparés à des résultats de tuyères de soufflerie supersoniques réelles conçues au centre national de recherches spatiales CNRS-Orléans pour différents Mach de sortie et les résultats sont satisfaisants.

Ce type de tuyères sont très longues ce qui donne des tuyères très lourdes à utiliser dans les cas de propulsion d'engins aérospatiaux réels.

Pour remédier à ce problème on fait appel à la troncation de la tuyère à un rapport de pression donné, ce qui va nous permettre de réduire la longueur et le poids de la tuyère, et avoir un rapport poussé poids plus élevé.

4.3. La deuxième partie : Conception de la tuyère double galbe :

4.3.1. La première méthode :

Cette méthode consiste à dimensionner une tuyère double galbe en imposant un écoulement pour avoir le profil du premier galbe et après on le tronque ensuite en simulant le contour du deuxième galbe de la tuyère par un polynôme de second degré, on fait la jonction entre les deux galbes, et à la fin on calcule les paramètres de l'écoulement.

1. Présentation du programme :

Ce code de calcul est constitué principalement d'un programme principal comme les programmes précédents qui communique avec dix sous-routines. Le programme principal contient les étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans le premier galbe de la tuyère. Les résultats qu'il permet

d'obtenir sont représentés par les valeurs des propriétés de l'écoulement en chaque point du maillage interne ainsi que les performances de la tuyère.

- ✓ Le programme principal communique avec dix sous-routines énumérées avec leurs fonctions spécifiques ci-dessous :
- ✓ Sous-routines « **IVLINE** », « **AXE** », « **DRWALL** », « **INWALL** », « **INTER** », « **THRUST** », « **THERMO** » : font la même fonction que celles citées avant dans le code de la première méthode et la deuxième méthode.
- ✓ Sous-routine « **CAT** » : calcul des points pour obtenir l'allure de la tuyère avant et après le col.
- ✓ Sous-routine « **BOUNDY** » : a pour tâche le calcul des paramètres définissant la forme de la paroi de premier galbe c'est-à-dire la détermination des coefficients du polynôme qui la simule. (dans notre cas on a imposé un polynôme du deuxième degré), et aussi de calculer la position de l'intersection des caractéristiques montantes avec la paroi (TIC).
- ✓ Sous-routine « **RAO** » : pour le calcul des points internes pour la région de karnel de deuxième galbe (TOC).

2. Les données thermodynamiques et géométriques pour le programme

Données thermodynamiques: Ce sont les données décrivant l'état de stagnation de l'écoulement. Elles sont principalement représentées par les valeurs de pression et de température totale.

Donnée géométrique de la tuyère: Elles permettent de décrire la forme géométrique de la tuyère.

Tableau 4.11 : Les données de la tuyère double galbe.

| P_a (Bars) | P_t (Bars) | T_t (K) | M_{design} | Y_t (m) | θ_{s1} (deg) | X_b (m) | X_{ext} (m) |
|-----------------|-----------------|--------------|--------------|--------------|------------------------|--------------|------------------|
| 1.013 | 50 | 293 | 5.8 | 0.01 | 7.2 | 0.062 | 0.083 |

3. Les résultats obtenus :

3.1. Le profil de la tuyère double galbe :

La figure présentée ci-dessous montre le profil de la tuyère obtenu par la jonction qui a été faite entre deux profils de la tuyère, comparant nos résultats à ceux obtenus par Mr Chloé Genin [13].

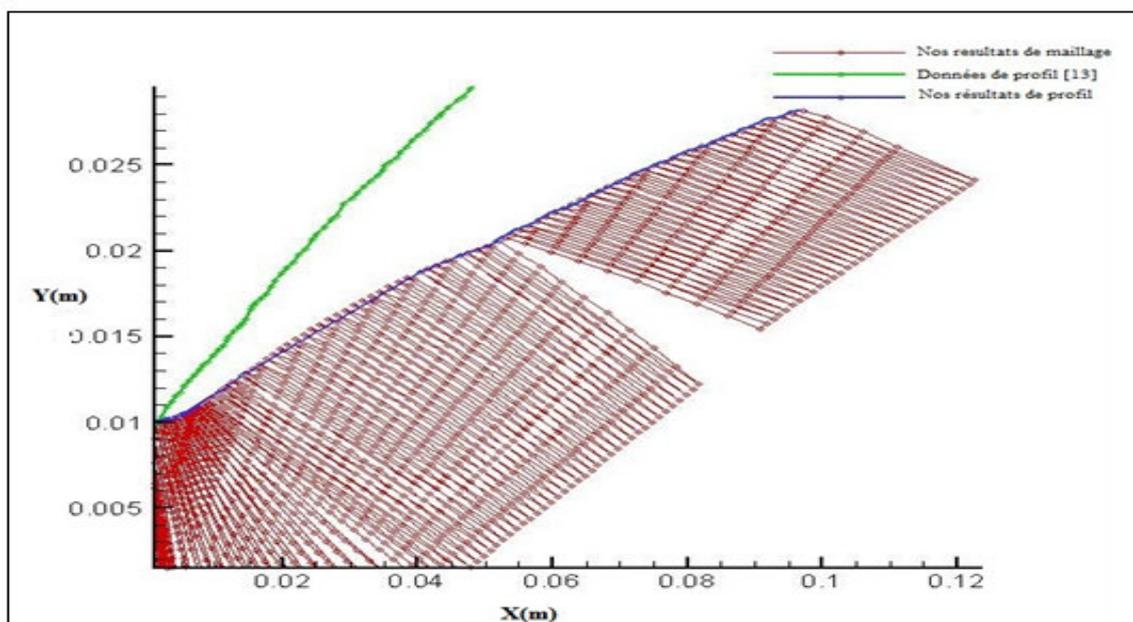


Figure 4.17 : Comparaison des profils de la tuyère double galbe.

On remarque que le profil de la tuyère de nos résultats est assez longue comparant aux résultats de référence [13] le rayon de sortie de la tuyère double galbe n'atteint pas la valeur voulue

3.2. Évolution du nombre de Mach dans la tuyère :

La figure (4.18) présente l'évolution du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère.

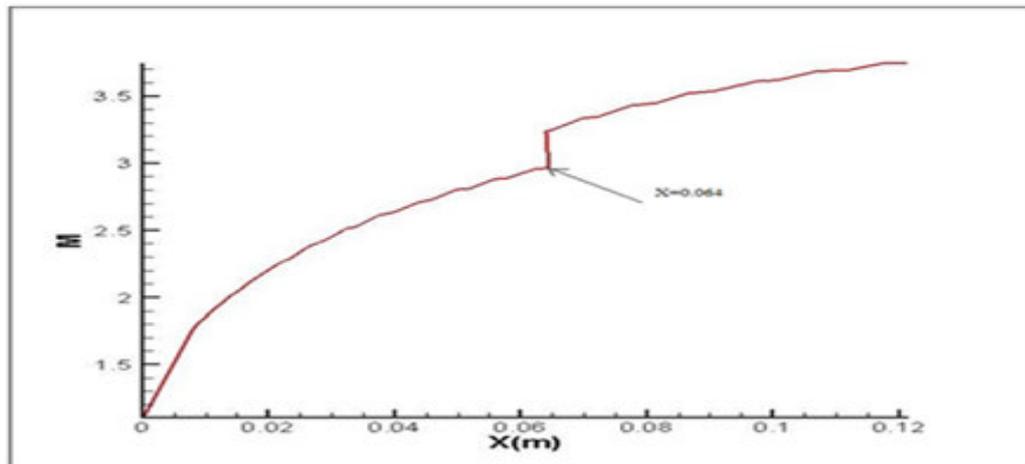


Figure 4.18 : L'évolution du nombre de mach le long de la paroi de la tuyère.

Le nombre de Mach augmente brusquement pour atteindre la valeur 2.88, c'est ce qui se passe au point d'inflexion où de jonction. Dans le deuxième galbe, le Mach évolue faiblement pour atteindre à la sortie 3.66

On voit aussi que le nombre de Mach de sorties n'atteint pas la valeur demandée (5.8).

3.3. Évolution de la pression :

L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère double galbe est donné par la figure ci-dessous :

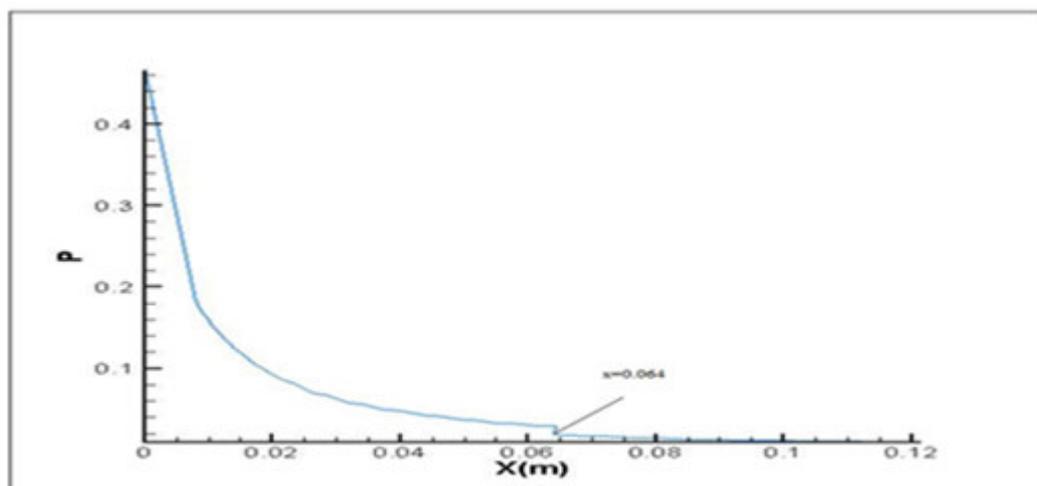


Figure 4.19 : L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère.

On remarque que la pression diminue rapidement dans la région du col et dans le premier galbe (tout à fait le contraire du nombre de Mach) jusqu'au point de jonction où elle chute brusquement jusqu'à la valeur de 0.0223, puis diminue lentement dans le deuxième galbe jusqu'à la valeur (0.00077) à la sortie de la tuyère.

4. Conclusion :

La méthode proposée est un apport de notre part où nous avons essayé de proposer une méthode de conception des tuyères double galbe en profitant de deux profils déjà existants en l'occurrence le profil TIC et un profil de tuyère TOC et de faire la jonction entre eux.

Mais cette méthode s'est avérée inadéquate pour deux raisons :

- ✓ Premièrement, comparant nos résultats à ceux obtenus par d'autres références comme Mr Chloé [13] n'as pas donné satisfaction, une marge d'erreur assez grande a été constatée soit sur la forme de profil, dans ce cas la notre tuyère est assez longue et le rayon de sortie n'est pas atteint.
- ✓ Deuxièmement, l'évolution de la pression et le nombre de Mach dans le deuxième galbe, ça été remarqué que ces deux paramètres évoluent lentement ce qui est en contradiction avec le principe de la tuyère double galbe où la pression et le nombre de Mach restent constants le long de ce deuxième galbe.

4.3.2. La deuxième méthode :

Cette méthode consiste dimensionner une tuyère double galbe en simulant le contour du premier galbe de la tuyère par un polynôme de second ordre et le profil du deuxième galbe est définie par une pression atmosphérique (jet libre) en prenant en considération des données géométriques de col et des données thermodynamiques, en suite on calcule les paramètres de l'écoulement.

1. Présentation du programme de la deuxième méthode :

Ce code de calcul est constitué principalement d'un programme principal comme les programmes précédents qui communique avec dix sous-routines. Le programme principal contient les étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans le premier galbe de la tuyère. Les résultats qu'il permet d'obtenir sont représentés par les valeurs des propriétés de l'écoulement en chaque point du maillage interne ainsi que les performances de la tuyère.

- ✓ Le programme principal communique avec dix sous-routines énumérées avec leurs fonctions spécifiques ci-dessous :
- ✓ Sous-routines « **IVLINE** », « **AXE** », « **DRWALL** », « **INWALL** », « **INTER** », « **THRUST** », « **THERMO** », « **CAT** », « **BOUNDY** » : font la même fonction que celles citées avant dans le code d'application de la première et la deuxième méthode.
- ✓ Sous-routine « **JET** » : a pour tâche le calcul des paramètres définissant la forme de la paroi de deuxième galbe par définition d'une pression atmosphérique constante P_a (jet libre).

2. Les données thermodynamiques et géométriques pour le programme

Données thermodynamiques: Ce sont les données décrivant l'état de stagnation de l'écoulement. Elles sont principalement représentées par les valeurs de pression et de température totale.

Donnée géométrique de la tuyère: Elles permettent de décrire la forme géométrique de la région du col.

3. Premier cas d'étude :

Notre premier cas d'étude est représenté par le modèle de la tuyère double galbe dans une chambre de test de l'Office National d'Études et de Recherches aérospatiales. L'écoulement qui y prend place est calculé par

l'approche de Sauer pour le col (écoulement transsonique), par contre pour le les profils du premier et deuxième galbe on va utiliser la méthode des caractéristiques (écoulement supersonique). Les données de la tuyère sont présentées ci-dessous :

Tableau 4.12 : Les données de la tuyère double galbe.

| P_{a1}/P_t (Bars) | P_{a1}/P_t (Bars) | P_t (Bars) | T_t (K) | M_{design} | Y_t (m) | X_b (m) | Y_{ext} (m) |
|------------------------|------------------------|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|
| 0.01252 | 0.00124 | 52 | 300 | 5.34 | 0.01 | 0.0833 | 0.2083 |

3.1. Les résultats obtenus :

3.1.1. Le profil de la tuyère :

Le profil du premier galbe est obtenu par l'utilisation de la méthode des caractéristiques et la connaissance des conditions aux limites

La première étape est de fixer la ligne sonique par la méthode de Sauer(écoulement transsonique) pour le col et après on utilise la méthode des caractéristiques pour obtenir le profil de la tuyère TIC, on voit que cette dernière est assez longue c'est pour cela on tronque la tuyère à une longueur définie (le tableau suivant présente les différents paramètres avant et après le tronçage) pour l'obtention du premier galbe(voir figures 4 .20 et 4.21).

La deuxième étape est d'obtenir le profil de deuxième galbe on donne comme hypothèse que le fluide est non visqueux, pour cela le profil coïncide avec la ligne de courant isobare du fluide parfait P_2 . Cette ligne de courant est obtenue en utilisant la méthode directe des caractéristiques appliquées pour une onde de détente (Prandtl-Meyer) d'intensité P_2/P_1 au point de jonction.(Voir figures 4.22 et 4.23)

Tableau 4.13 : Les caractéristiques de la tuyère de base.

| Paramètres | Avant troncage | | Après troncage | |
|-----------------------|----------------|--------------------------|----------------|--------------------------|
| | Nos résultats | Résultats référence [14] | Nos résultats | Résultats référence [14] |
| L_1/R_{col} | 11.87 | 15.58 | 8.65 | 8.833 |
| Y_1/R_{col} | 2.37 | 3.10 | 2.83 | 2.87 |
| M | 3.9 | 3.9 | 3.49 | 3.53 |
| $I_{sp1}/I_{sp\ col}$ | 1.287 | 1.294 | 1.218 | 1.282 |

On remarque que nos résultats sont proches aux résultats de référence [14]

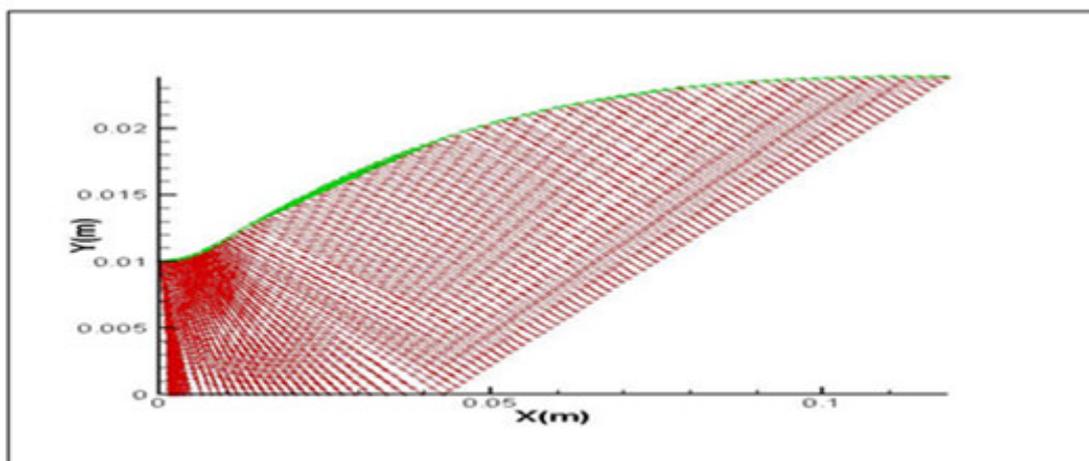


Figure 4.20 : Le maillage du premier galbe avant le troncage.

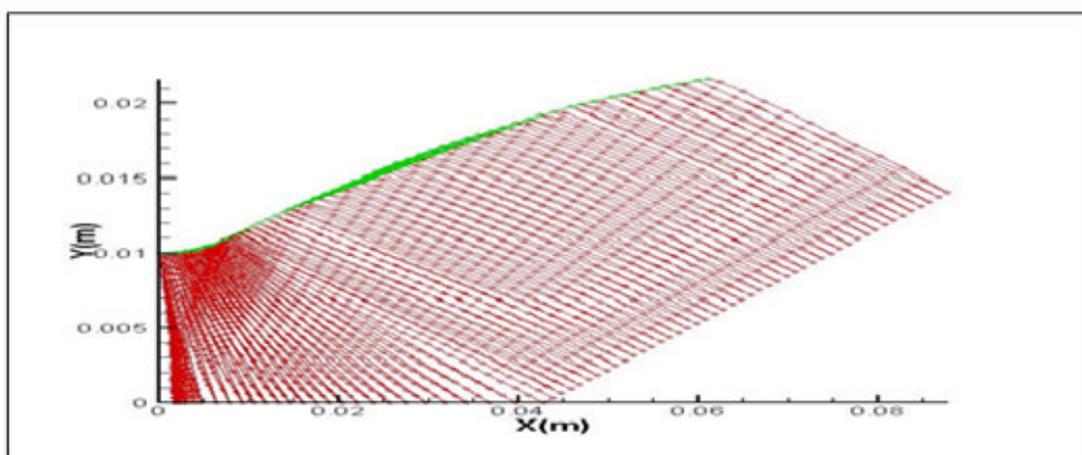


Figure 4.21 : Le maillage du premier galbe après troncage.

On constate d'après le tableau que le nombre de Mach approprié au point de troncage est de 3.49 (au lieu de 3.9 à la sortie) ce qui donne une perte de nombre de Mach égal à 0.41 et une perte d'impulsion spécifique égale à 0.069 et un gain de poids égal à 27.12%

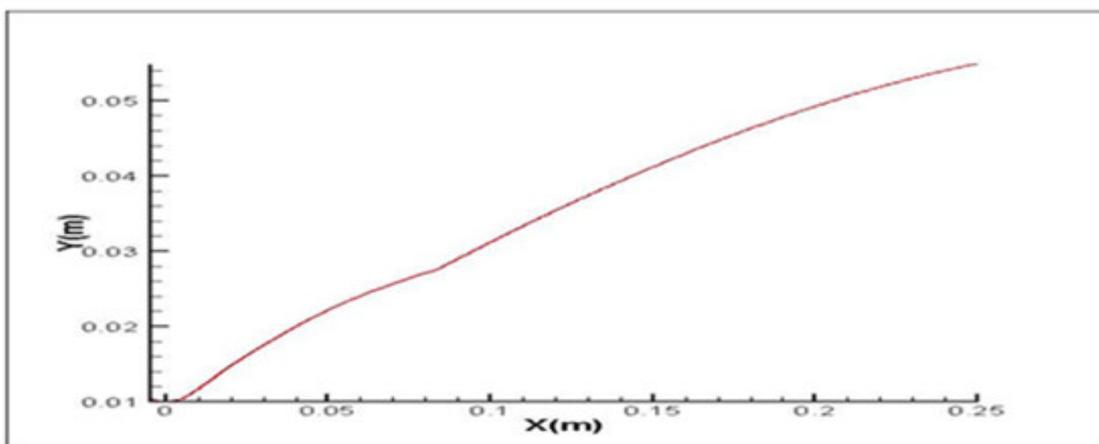


Figure 4.22 : L'allure de profil de la tuyère double galbe.

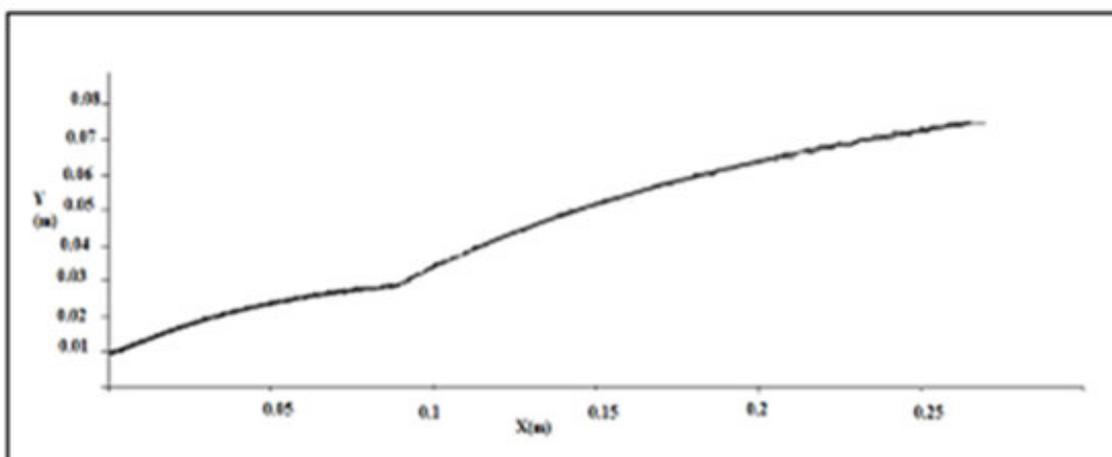


Figure 4.23: L'allure de profil de la tuyère double galbe [14].

On remarque que le profil de nos résultats à la même allure comparant aux résultats de référence [14].

Le tableau suivant présente une comparaison entre nos résultats et les résultats obtenus par la référence [14]

Tableau 4.14 : Comparaison entre nos résultats et résultats de référence [14]

| Les paramètres | Nos résultats | Résultats [14] | L'erreur |
|----------------|---------------|----------------|----------|
| X_b (m) | 0.0880 | 0.0883 | 0.34% |
| Y_b (m) | 0.0285 | 0.0287 | 0.69% |
| X_{ext} (m) | 0.260 | 0.265 | 1.88% |
| Y_{ext} (m) | 0.0564 | 0.0746 | 24.39% |

3.2.1. Le maillage du profil de la tuyère :

La figure suivante présente le maillage de la tuyère double galbe

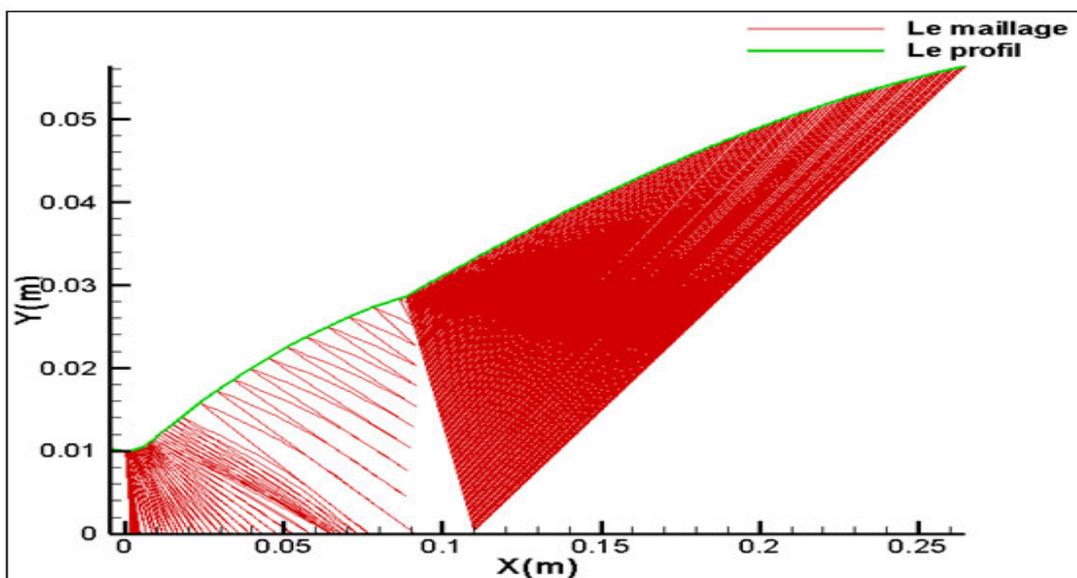


Figure 4.24: Le maillage du profil de la tuyère double galbe.

Le profil de premier galbe est obtenu en simulant ce dernier par un polynôme de deuxième degré et pour la conception du profil de deuxième galbe, on donne comme hypothèse que le fluide est non visqueux, pour cela le profil coïncide avec la ligne de courant isobare du fluide parfait P_2 . Cette ligne de courant est obtenue en utilisant la méthode directe des caractéristiques appliquées pour une onde de détente (Prandtl-Meyer) d'intensité P_2/P_1 au point de jonction.[14]

3.1.3. Évolution du nombre de Mach dans la tuyère :

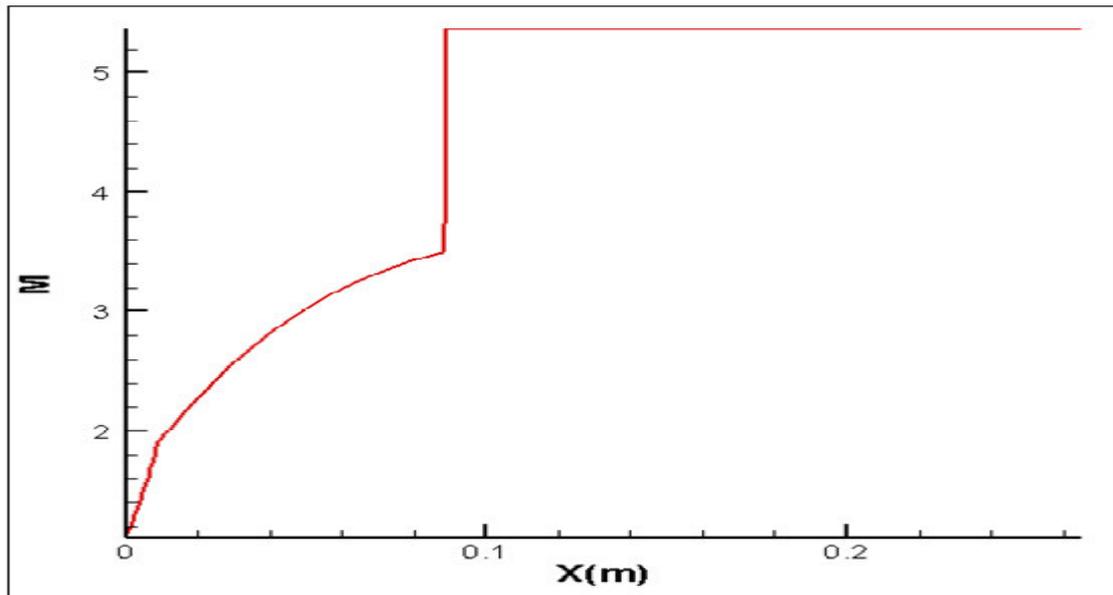


Figure 4.25: L'évolution du nombre de mach le long de la paroi.

La figure (4.25) présente l'évolution du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère.

On remarque que le nombre de Mach évolue rapidement au niveau du col et dans le premier galbe jusqu'à la valeur 3.6 puis monte rapidement jusqu'à la valeur 5.37 au point de jonction des deux galbes, pour rester constant le long du deuxième galbe à la même valeur (5.37).

Comparant ces résultats à celui obtenu dans la référence [14] on constate bien que ces deux résultats sont très proches sachant que dans la référence [14] le nombre de Mach de sortie est de 5.34.

3.1.4. Évolution de la pression :

L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère double galbe est donné par la figure ci-dessous :

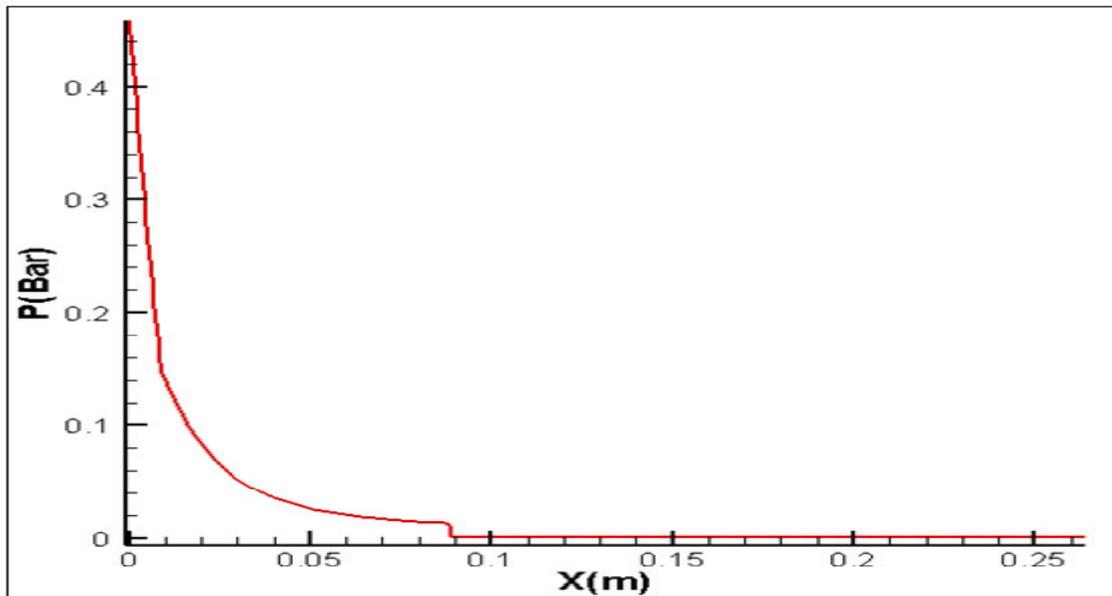


Figure 4.26 : L'évolution de la pression le long de la paroi.

On remarque que cette pression diminue rapidement dans le premier galbe (tout à fait le contraire du nombre de Mach) et chute brusquement dans le point de jonction (saut de détente) jusqu'à atteindre la valeur imposée par les calculs 0.06448 et reste constante dans le deuxième galbe 0.06448

3. Deuxième cas d'étude :

Notre deuxième cas d'étude est représenté par une tuyère double galbe monté sur le test horizontal P6.2 de l'Office National d'Études et de Recherches aérospatiales. L'écoulement qui y prend place est calculé par l'approche de Sauer pour le col (écoulement transsonique), par contre pour les profils du premier et deuxième galbe on va utiliser la méthode des caractéristiques (écoulement supersonique). Les données de la tuyère sont présentées ci-dessous :

Tableau 4.15 : Les données de la tuyère double galbe.

| P_t (Bars) | T_t (K) | M_{design} | Y_t (m) | X_b (m) | X_{ext} (m) | Y_b (m) | Y_{ext} (m) |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|--------------|------------------|
| 50 | 293 | 5.8 | 0.01 | 0.062 | 0.083 | 0.0336 | 0.052 |

4.1. Les résultats obtenus :

3.2.1. Le profil de la tuyère :

La figure suivante présente l'allure du profil de la tuyère double galbe obtenu par la deuxième méthode, et le tableau (4.8) montre la comparaison entre nos résultats et les résultats de la référence [13].

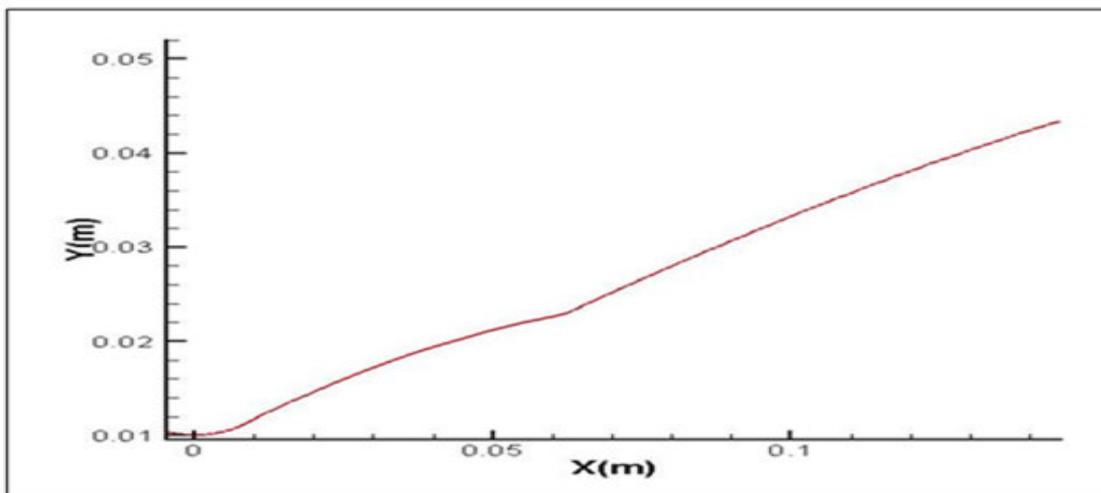


Figure 4.27 : Le profil de la tuyère double galbe.

Tableau 4.16 : Comparaison entre nos résultats et résultats de référence [13].

| Paramètres | Nos résultats | Résultats [13] | L'erreur |
|---------------|---------------|----------------|----------|
| X_b (m) | 0.0619 | 0.062 | 0.16% |
| X_{ext} (m) | 0.0228 | 0.0336 | 32.14% |
| Y_b (m) | 0.0826 | 0.083 | 0.48% |
| Y_{ext} (m) | 0.0434 | 0.052 | 16.53 |

On remarque que nos résultats sont proches aux résultats de référence [13].

3.3. Le maillage du profil de la tuyère :

L'obtention du maillage et du profil de la tuyère double galbe est obtenue suivant les mêmes étapes comme le cas d'étude précédent.

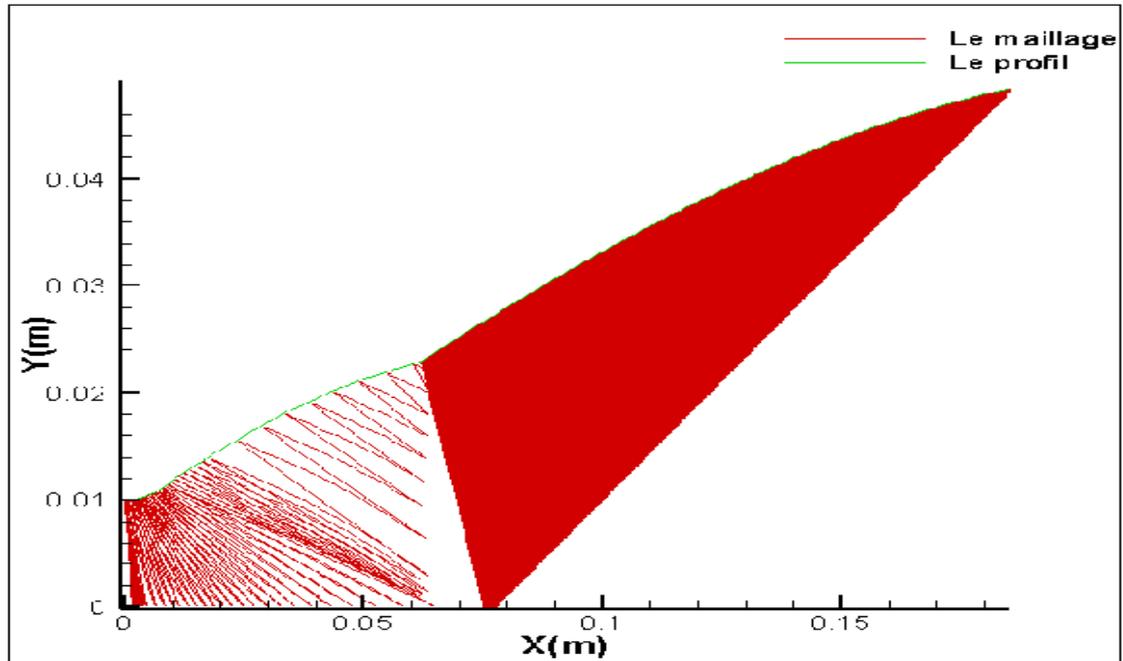


Figure 4.28: Le maillage de la tuyère double galbe.

3.4. Évolution du nombre de Mach dans la tuyère :

La figure (4.29) présente l'évolution du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère.

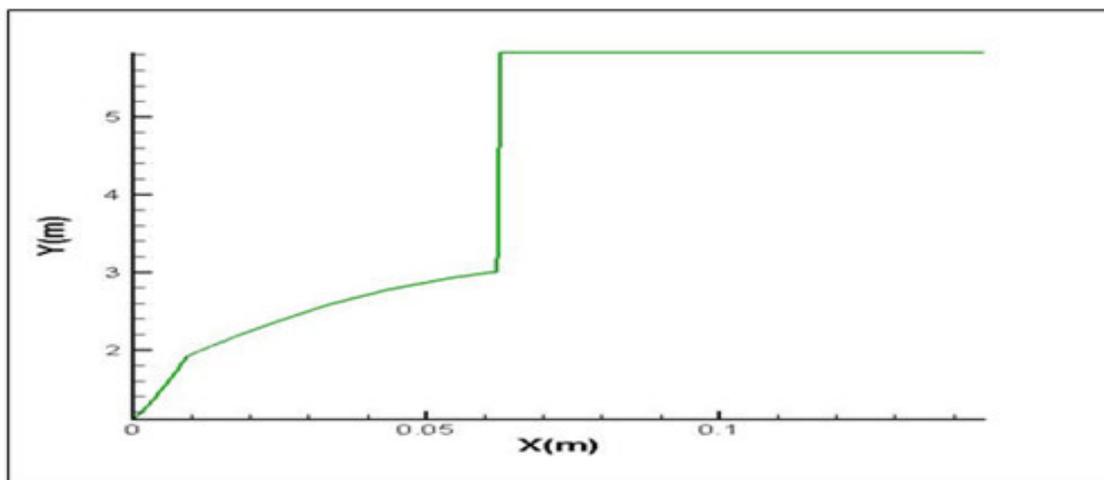


Figure 4.29: L'évolution du nombre de mach le long de la paroi de la tuyère.

On remarque que le nombre de Mach évolue rapidement au niveau du col et dans le premier galbe jusqu'à la valeur 3 puis monte très rapidement dans le point des deux galbes jusqu'à la valeur 5.8 et reste constant dans le deuxième galbe (5.8).

3.5. Évolution de la pression :

L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère double galbe est donné par la figure ci-dessous :

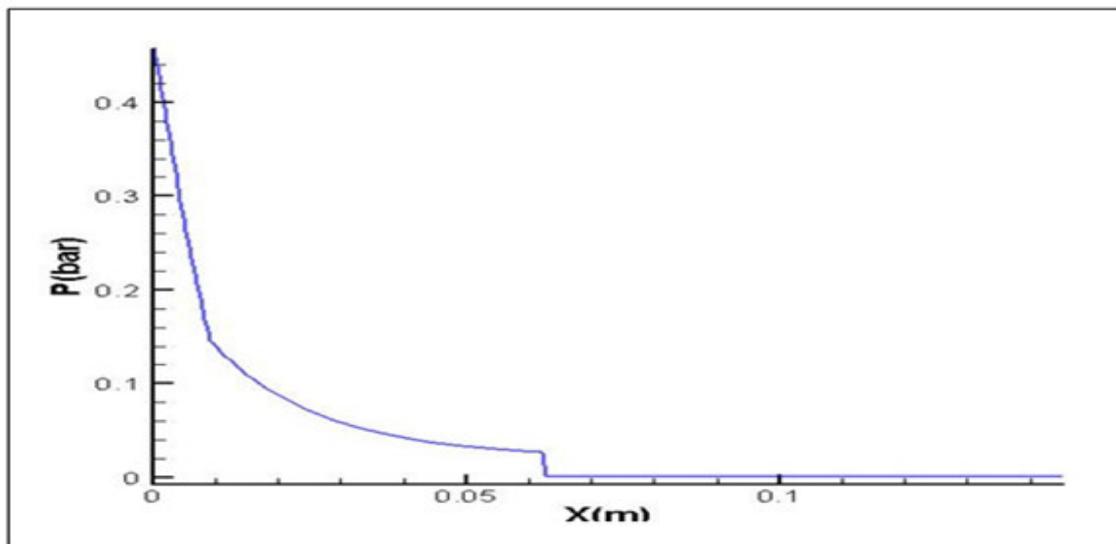


Figure 4.30: L'évolution de la pression le long de paroi de la tuyère.

On remarque que cette pression diminue rapidement dans le premier galbe (tout à fait le contraire du nombre de Mach), et chute brusquement dans le point de jonction (saut de détente) jusqu'à atteindre la valeur imposée par les calculs et reste constante dans le deuxième galbe égal à 0.0389.

4. Troisième cas d'étude :

Notre Troisième cas d'étude est représenté par le modèle de la tuyère double galbe monté au chambre de test M11.4 de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales. L'écoulement qui y prend place est calculé par l'approche de Sauer pour le col (écoulement transsonique), par contre pour les deux profils on va utiliser la méthode des caractéristiques (écoulement supersonique). Les données de la tuyère sont présentées ci-dessous :

Tableau 4.17 : Les données de la tuyère double galbe.

| P_t (Bars) | T_t (K) | M_{design} | Y_t (m) | X_b (m) | X_{ext} (m) | Y_b (m) | Y_{ext} (m) |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|--------------|------------------|
| 30 | 293 | 5.8 | 0.015 | 0.0705 | 0.09 | 0.0373 | 0.0567 |

4.2. Les résultats obtenus :4.2.1. Le profil de la tuyère :

La figure suivante présente l'allure du profil de la tuyère double galbe obtenue par la deuxième méthode, et le tableau (4.8) montre la comparaison entre nos résultats et les résultats de la référence [13].

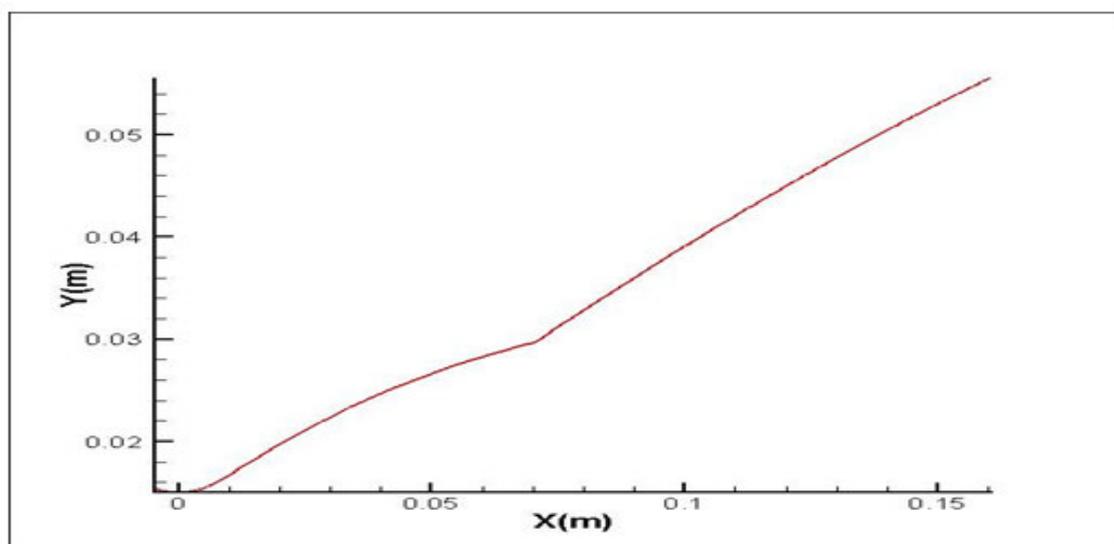


Figure 4.31: Le profil de la tuyère double galbe.

Tableau 4.18 : Comparaison entre nos résultats et ceux de la référence [13].

| paramètres | Nos résultats | Résultats [13] | L'erreur |
|---------------|---------------|----------------|----------|
| X_b (m) | 00704 | 0.0705 | 0.14% |
| X_{ext} (m) | 0.089 | 0.09 | 1.11% |
| Y_b (m) | 0.0297 | 0.0373 | 20.37% |
| Y_{ext} (m) | 0.0556 | 0.0567 | 1.94% |

On remarque que nos résultats sont proches aux résultats de référence [13].

4.3. Le maillage du profil de la tuyère :

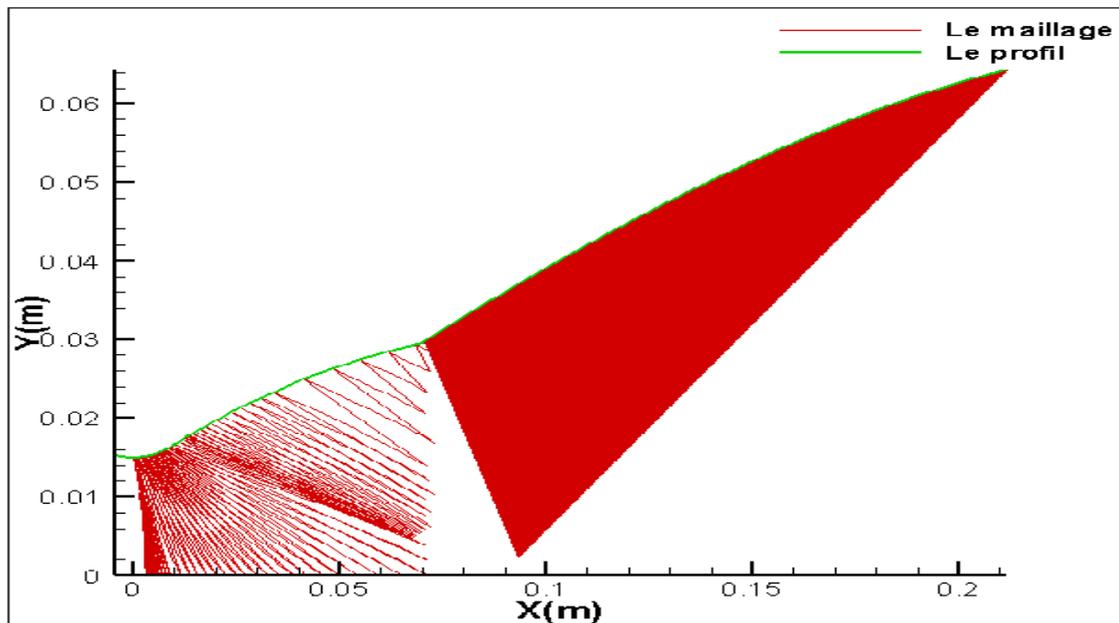


Figure 4.32 : Le maillage du profil de la tuyère double galbe.

L'obtention du maillage et du profil de la tuyère double galbe est obtenue suivant les mêmes étapes comme les cas d'études précédents.

4.4. Évolution du nombre de Mach dans la tuyère :

La figure (4.33) présente l'évolution du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère.

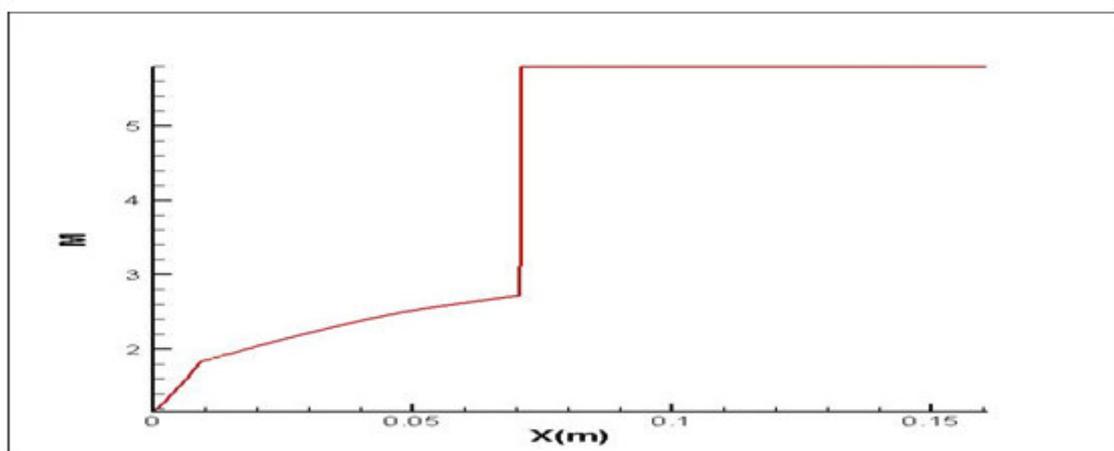


Figure 4.33 : L'évolution du nombre de mach le long de la paroi de la tuyère.

On remarque que le nombre de Mach évolue rapidement au niveau du col et dans le premier galbe jusqu'à la valeur 3 puis évolués très rapidement dans le point de jonction du premier et deuxième galbe jusqu'a la valeur 5.37 et reste constant dans le deuxième galbe (5.8).

4.5. Évolution de la pression :

L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère double galbe est donné par la figure ci-dessous :

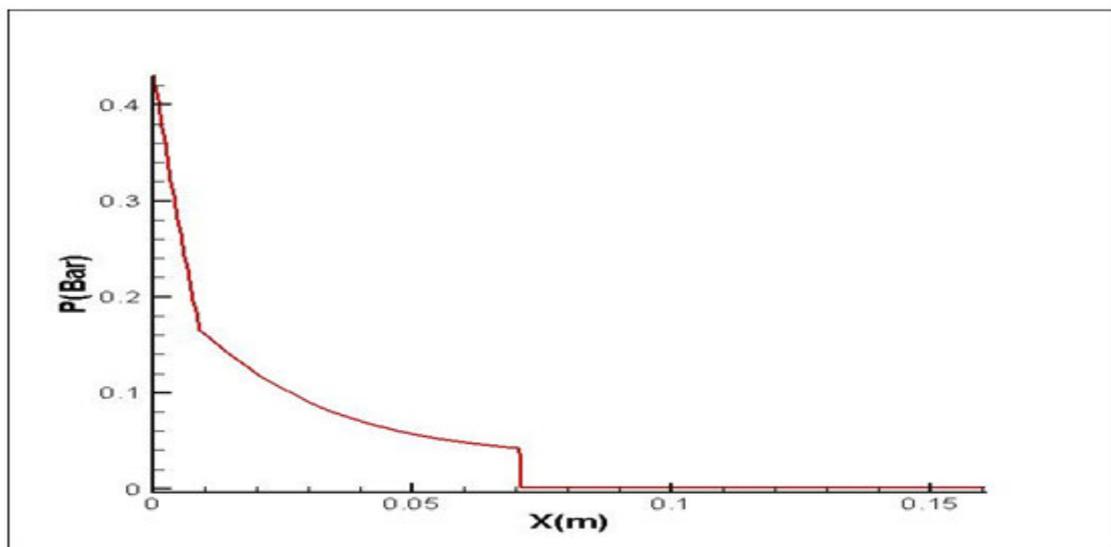


Figure 4.34: L'évolution de la pression le long de la paroi de la tuyère.

On remarque que cette pression diminue rapidement dans le premier galbe (tout à fait le contraire du nombre de Mach), et chute brusquement dans le point de jonction (saut de détente) jusqu'à atteindre la valeur imposée par les calculs.

5. Conclusion :

L'application de la deuxième méthode pour la conception de la tuyère double galbe est applicable pour n'importe quelle tuyère double galbe, délivrant un nombre de Mach de sorties bien spécifié.

Nos résultats sont très proche comparant aux résultats de référence [13] et [14] ; ce qui nous donne un appui scientifique.

CONCLUSION

L'étude actuelle montre que les problèmes posés par la définition et la caractérisation d'une tuyère de propulseur aérothermiques peuvent pour la plupart être résolus par le calcul souvent même avec précision.

Notre étude s'est intéressée à la conception des contours de profils de tuyères supersoniques convergentes-divergente. Mais aussi à la description du comportement de l'écoulement fluide dans la partie divergente dite supersonique.

Dans un premier temps, on s'est intéressé aux calculs de l'écoulement transsonique. Celui-ci a été simulé grâce à l'approche de Sauer. Ce dernier préconise l'équation des petites perturbations en termes de composantes de la vitesse. En outre, une étude comparative entre différentes méthodes (Hall, Sauer et Kligel-Levine) a été réalisé.

Pour la conception de profils de tuyères classiques, on s'est basé sur deux approches :

- ✓ La première méthode consiste à imposer le profil du contour de la tuyère qui est simulée à un polynôme de deuxième degré et dont les constantes sont calculées aux conditions aux limites imposées au col et à la sortie. Cette simulation par un polynôme a été appliquée par Mr Haddad.
- ✓ La deuxième consiste à imposer un nombre de Mach, une pression à la section de sortie ou une poussée et on établit le profil (un ensemble de points qu'on peut simuler après à un polynôme de n'importe quel degré. C'est le fruit des travaux de Zuccrow et Hoffman.

Un programme de calcul numérique a été réalisé pour chaque méthode et l'application est exécutée sur différentes tuyères :

- **Application de la première méthode :**

La première méthode a été appliquée sur deux tuyères TOC (thrust optimized contour nozzle) en l'occurrence les tuyères Antares et Bérénice appartenant à l'ONERA-France dont les données géométriques et thermodynamiques sont connues.

Les résultats obtenus pour les deux tuyères sont acceptables soit en termes : de profils, d'évolution de la pression ou le nombre de Mach le long de la tuyère.

Comparant nos résultats à ceux obtenus par Mr Haddad [12], on a remarqué la concordance et une compatibilité des résultats. Ceci nous conforte dans notre travail.

Par contre, l'application de cette méthode pour une tuyère TIC (tuyère à contour idéal), on a remarqué l'apparition d'une onde-choc oblique dans l'écoulement, malgré que l'écoulement garde toujours son caractère supersonique. L'apparition de cette onde-choc est tout à fait en contradiction avec la définition de la tuyère TIC.

Les tuyères TIC qui présentent un profil idéal sont dessinées par exemple pour des études en soufflerie. Elles ont l'avantage de ne pas avoir de choc interne, car elles sont souvent plus longues et la variation de la section du divergent n'a pas un caractère brutal.

- **Application de la deuxième méthode :**

La deuxième méthode a été appliquée sur une tuyère TIC appartenant au centre de recherches spatiales d'Orléans CNRS-Orléans dont on possède toutes les données géométriques et thermodynamiques pour différents nombres de Mach à la sortie ($M_s=3.3, 3.8$ et 4.0).

Les résultats obtenus sont très satisfaisants et concordent bien, le profil est parabolique, mais pas forcément de deuxième degré. L'évolution de la pression et du nombre de Mach est compatible avec la réalité.

Nos résultats ont été validés par ceux obtenus par Mr Vladetta qui a travaillé sur la même tuyère au niveau du CNRS-Orléans en collaboration avec l'université d'Evry-Paris. Il a imposé une pression de sortie égale à 0 (vide) et le calcul s'arrête dès que l'angle de la paroi devient nul. Le profil calculé, peut-être par la suite représenté par un polynôme de degrés 5 ou supérieur pour une meilleure approximation. La comparaison a donné une totale satisfaction.

Pour la conception de profils de tuyères double galbe, on s'est basé sur deux approches :

- ✚ La première méthode consiste à dimensionner une tuyère double galbe en imposant un écoulement afin d'avoir le profil du premier galbe, on le tronque et en simule par la suite le contour du deuxième galbe de la tuyère par un polynôme de second degré. La jonction entre les deux galbes est matérialisée afin de calculer les paramètres de l'écoulement.

- ✚ La deuxième méthode consiste à dimensionner une tuyère double galbe en simulant le contour du premier galbe de la tuyère par un polynôme de second ordre et pour la conception du profil de deuxième galbe on donne comme hypothèse que le fluide est non visqueux. Pour cela, le profil doit coïncider avec la ligne de courant isobare du fluide parfait P_2 . Cette ligne de courant est obtenue en utilisant la méthode directe des caractéristiques appliquées pour une onde de détente (Prandtl-Meyer) d'intensité P_2/P_1 au point de jonction.[14]

Un programme de calcul a été élaboré pour chaque méthode

✓ **Application de la première méthode :**

Cette méthode a été appliquée sur une tuyère double galbe montée sur le test horizontal P 6.2 appartenant à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales dont on connaît les paramètres thermodynamiques et les données géométriques.

Les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants ni pour le profil qui est assez long, ni pour l'évolution de la pression et le nombre de Mach qui ne suivent pas la logique de la conception des tuyères double galbes.

✓ **Application de la deuxième méthode :**

La conception de tuyères double galbe se répartie en deux parties :

- ✓ La première partie est consacrée à la conception du premier galbe. Pour ce faire, en premier lieu on s'intéresse aux calculs de l'écoulement transsonique. Celui-ci a été simulé grâce à l'approche de Sauer, qui résout l'équation des petites perturbations en termes de composantes de la vitesse, ensuite, vu la nécessité du raffinement du calcul dans la zone d'expansion (zone de kernel) on a utilisé la méthode des caractéristiques inverse. Par contre pour dessiner ce profil on a utilisé la MOC directe, dans ce cas-là le profil peut être simulé par un polynôme de deuxième degré, et enfin la tuyère est tronquée.
- ✓ Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la conception du deuxième galbe. En appliquant l'onde de Prandtl-Meyer on trouve l'angle d'inflexion du deuxième galbe par rapport au premier galbe (point de jonction). L'expansion du deuxième divergent est faite avec l'hypothèse de l'écoulement du jet libre.

Cette méthode a été appliquée sur trois types de tuyères appartenant à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA) et le Centre National des Recherche Spatiales (CNRS) dont on tient compte de toutes les données géométriques et thermodynamique, en imposant aussi un nombre de Mach à la sortie de la tuyère.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par les références [13] et [14], on a constaté que les résultats sont très compatibles et concordent bien avec la logique de la conception de tuyère double galbe.

Recommandations pour d'éventuels travaux futurs :

L'actuelle étude bien qu'assez complète dans son principe pourrait recevoir d'intéressants développements. Nous en recommandons :

- ✓ Une réalisation expérimentale pour la comparaison des nos résultats ;
- ✓ Une intégration de routines d'évaluation de la couche limite qui se développe près de la paroi. L'étude de son influence sur les performances développées par ces tuyères pourrait être intéressante;
- ✓ Calcul des charges latérales appliquées sur la paroi de la tuyère double galbe ;
- ✓ Une étude de l'écoulement au point d'inflexion (Point de jonction des deux galbes)

LISTE DES SYMBOLES

Systeme de coordonnées :

X : coordonnée axiale

Y : coordonnée radiale

Lettres latines

y_t : rayon du col

A_w : coefficient du polynôme simulant le profil de la tuyère

a : vitesse locale du son

B_w : coefficient du polynôme simulant le profil de la tuyère

C_d : coefficient de décharge

C_f : coefficient de poussée

C_w : coefficient du polynôme simulant le profil de la tuyère

C_+ : caractéristique montante

C_- : caractéristique descendante

c : vitesse caractéristique

F : poussée

g : accélération de la pesanteur

I : impulsion totale

I_s : impulsion spécifique

L_f : longueur de la fraction

M : nombre de mach

m : débit massique

P : pression

R : rayon de courbure ou rapport de courbure au rayon au col

R_s : rapport de sections

r_t : rayon de col

S : aire de section

T : température

t : temps
u : composante axiale du vecteur vitesse
v : composante radiale de la vecteur vitesse
 v_{eff} : vitesse effective des gaz
w : fonction poids
 y_{i+1}^n : La valeur de y après n applications de correcteur
 y_t : diamètre de col
 \underline{v} : Composante radiale de la vitesse de perturbation adimensionnelle de Sauer
 U_∞ : vitesse non perturbée (à l'infini)
 M_∞ : Nombre de mach a un point infiniment lointain
 M_{design} : Nombre de mach à la sortie de la tuyère double galbe
 a^* : vitesse du son au col
 $u \sim$: Composante axiale de la vitesse adimensionnelle
 $v \sim$: Composante radiale de la vitesse adimensionnelle

Lettres grecques

α : constante ou angle de mach
 θ : angle
 θ_a : pente au point d'attache de la tuyère
 ρ : densité
 ρ^* : masse volumique des gaz au col
 Φ : potentiel de vitesse
 λ : la pente
 ε : rapport de détente
 δ : Switch

Indice :

a : ambient
A : attache
c : col
cu : col amont
cd : col aval

e : éjection des gaz
s : sortie de la tuyère
s1 : sortie du premier galbe
s2 : sortie du deuxième galbe
t :total
w : paroi
0 :atmosphérique

REFERENCES

1. Maurice J.Zucrow,Joe D.Hoffman, "Gas Dynamics",Edition John Wiley et Sons.Inc,(1976)
2. Nabegh Maarouf,"Modélisation des phénomènes dissymétriques dans le divergent des tuyères supersonique propulsives :Application à la vectorisation de la poussée", Thèse de doctorat, Université d'Evry-Val d'essonne, (Décembre2008)
3. Philippe Reijasse,"Aérodynamique des tuyères supersoniques",ONERA .Centre de Meudon,(Novembre 2007)
4. Philippe Reijasse," Aérodynamique des tuyères propulsives en sur – détente :décollement libre et charges latérales en régime stabilisé",Thèse de doctorat, Université Paris VI,(Septembre 2005)
5. Ostlund,J," Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side loads", rapport technique d'Institut Royal de la Technologie ,Stockholm.Sweden,(2002)
6. J.Franklin Malina , "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases",(1940).
7. Habiballah,M, "Liquid Rocket Thrust Chambers",American institute of Aeronautics and astronautics,vol 200,(Décembre 2004).
8. Hageman,G; "Advanced Rocket Nozzles",Journal of propulsion and power,vol 14,No 5,pp620-634,(Octobre 1998).

9. Bruce Carnahan, H.A.Luther, and James O.Wilkes, "Applied Numerical Methods", (1969).
10. S.D Conte and C.de Boor, "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases", (1972)
11. J.D.Hoffman, "Accuracy Studies of the numerical method of characteristics for axisymmetric, steady supersonic flow", Journal of computational physics, pp210-239, (Fevrier 1973).
12. A.Haddad, "Application de la méthode des caractéristiques à la conception des tuyères supersoniques de propulsion", (1990).
13. C.Génin, " Experimental study of flow behaviour and thermal loads in dual bell nozzles".
14. P.Reijasse, D.Coponet, J-M.Luysen, "Wall pressure and thrust of a dual bell nozzle in a cold gas facility", Troisième conférence européenne pour sciences aérospaciales, (Juillet 2009).
15. J.Delery . "Aérodynamique interne: Tuyère et arrière corps", Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, (1989).
16. K .Boualem, " Simulation numérique sur les tuyères supersoniques tronquées", mémoire d'ingénieur, Département d'Aéronautique, (2009).
17. Y.Gorgish, "Investigation of short supersonic nozzles", (1966)
18. G.Guderly, "Rao's method for computation exhausts nozzles ", (1959)
19. J.Hoffman, "Design of compressed truncated perfect nozzles ", Journal AIAA, vol 3, No 2, pp 150 – 156 ,(1985).
20. G.Rao, "Exhaust nozzle contour for optimum thrust", Journal of jet propulsion, vol 28, No 6, (1958)
21. Shmyglecky.Yu, "Some gaz dynamic variation problems", USSR, (1963).

22. Bruce Carnahan, H. A. Luther, and James O. Wilkes, Applied Numerical Methods, Chap. 6, John Wiley, New York, 1969.
23. R. Sauer, "General characteristics of the flow through nozzles at near critical speed", National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), (Juin 1947)
24. I. M. Hall, "Transonic flow in two dimensional and axially –symmetric nozzles", Journal of mechanic and application maths, Vol 15, pp 487-508, (1962).
25. J. R. Kligel and J. N. Levine, "Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles", Journal AIAA, vol 7, No 7, pp 1375-1378, (1969).
26. J. D. Hoffman, "Accuracy Studies of the Numerical Method of Characteristics for Axisymmetric, "Steady Supersonic Flows", Journal of Computational Physics, (February 1973).
27. R. Courant and K. O. Friedrichs, "Supersonic Flow and Shock Waves", Interscience Publishers, New York, (1948).
28. F. Mechighel, "Developpement d'une method de conception des tuyères supersoniques de propulsion ", mémoire de magister, Département d'Aéronautique, (1997)