

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

THESE DE DOCTORAT

En Génie Mécanique

Spécialité : Génie Mécanique

CALCUL DE LA CONTRAINTE DE TORSION DANS DES SECTIONS COMPLEXES NON CIRCULAIRES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Abdelkader KIRAD

devant le jury composé de :

ALLALI Abderrazak	Professeur,	U. de Blida 1,	Président
SALAH Boualam	Professeur,	ENSH Blida,	Examineur
LOUNIS Mourad	Professeur,	U. Khemis Miliana,	Examineur
NOURA Belkheir	Maitre de Conférences (A),	U. Khemis Miliana,	Examineur
TEMMAR Mustapha	Maitre de Conférences (A),	U. de Blida 1,	Examineur
ZEBBICHE Toufik	Professeur,	U. de Blida 1,	Rapporteur

Blida, 29 Juin 2015

RESUME

Le présent travail consiste à élaborer un nouveau programme de calcul numérique permettant d'évaluer la distribution de la contrainte de torsion dans des sections non circulaires, complexes soumises à un moment de torsion uniforme en utilisant la méthode des éléments finis. L'application sera pour des sections de profil d'aile et d'autre section type rectangle, secteur, hexagone... utilisées dans le domaine de la mécanique industrielle.

On doit procéder à la génération de maillage dans la section en découpant le domaine en petits sous domaines de section quadrilatère.

Dans les applications de torsion, généralement les formules et les résultats pour la section circulaire sont utilisés, malgré que la section dans le cas réel et de type non circulaire. Cela est dû au manque de formule pour les sections considérées. Notons ici que chaque section possède sa propre formule mathématique de l'angle de rotation et de contrainte qui diffère d'une section à l'autre.

La comparaison des résultats sera faite avec la section circulaire connue dans la littérature. Après le développement du programme de calcul pour différentes sections non circulaires, on doit appliquer encore, le programme pour la section circulaire afin de comparer les résultats avec les résultats théoriques connus pour une section circulaire. En fin un calcul d'erreur de contrainte entre la section circulaire et les sections non circulaires est effectué.

Mot clés : Méthode des éléments finis, Élément quadrilatère, Domaine simplement connexe, Génération de maillage type H, Méthode de résolution directe de Khaletski, Matrice bande, Stockage des matrices sous forme de vecteur, Erreur de calcul, Contrainte maximale, Moment d'inertie polaire, constante de torsion.

ABSTRACT

The present work is to develop a new numerical calculation to evaluate the distribution of torsional stress in non-circular section, complex, subject related to a uniform torque using the finite element method. The application will be for airfoil sections and another section rectangle type, industry, hexagon ... used in the field of industrial mechanics.

We must make the mesh generation in the section by cutting the domain into small subdomains with a quadrilateral finite element. In applications of torsion, the authors generally use the formulas and results for the circular cross section, although the section in the real case and non-circular type. This is due to the lack of formula for the sections considered. Note here that each section has its own mathematical formula for the angle of rotation and strain that differs from one section to another.

A comparison of the results will be made with the circular section known in the literature. After development of calculation program for non-circular sections, must be applied again, the program for the circular section to compare the results with the theoretical results known for a circular cross section. At the end of a calculation error in stress between the circular and non circular sections will be made.

Key Words : Finite Element method, Quadrilateral element, Simply connected domains, Mesh generation H type, Resolution method of Direct Khaletski, Bandwidth matrix, Matrix Storage in vector form, Calculation error, Maximum Constraint, Polar moment of inertia, Constant of twist.

ملخص

هذا العمل هو عبارة عن تطوير برنامج عددي جديد لتقييم توزيع الضغط الصادر عن الفتل في المقاطع الأسطوانية غير الدائرية باستخدام طريقة العناصر المنتهية.

التطبيق كان على (المقطع في جناح الطائرة) وعلى المقاطع أخرى مستعملة في مجال الميكانيك الصناعية بصفة عامة

كان علينا تقسيم المقاطع باستعمال عناصر رباعية المستخدم في استخدامات الفتل, عادة نستعمل الصيغ و النتائج لمقطع عرضي دائري, على الرغم من أن المقاطع حقيقة تكون غير دائرية, هنا يجب التعلیم أن كل مقطع له صيغته الرياضية الخاصة لزاوية الدوران و الضغط الذي يختلف من مقطع إلى آخر.

مقارنة النتائج كانت مع المقطع الدائري المعروفة نتائجه سابقا. بعد تطوير البرنامج لعدة مقاطع دائرية, نطبق أيضا البرنامج من أجل المقاطع غير الدائرية و في الأخير يتم حساب الخطأ الوارد في حساب الضغط

كلمات المفاتيح: طريقة العناصر المنتهية، عنصر رباعي الأضلاع، مجالات مرتبطة ببساطة، شبكة من نوع H ، طريقة الحل المباشر لكانتسكي، التخزين المصفوفة في شكل شريط وحيد البعد، خطأ في الحساب، الجهد الأعظمي، عزم العطالة القطبي، ثابت الفتل.

REMERCIEMENTS

Nous remercions premièrement et avant tous notre dieu qui nous a donner la volonté pour terminer ce travail.

Je tiens à donner notre gratitude remerciement à notre directeur de thèse, monsieur **ZEBBICHE Toufik**, Professeur à l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida 1 pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement. Je le remercie encore pour sa disponibilité et son total dévouement de tous les jours malgré ces empêchements.

A monsieur **SALAH Boualam**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Hydraulique de Blida, d'avoir accepté de juger ce travail et d'apporter sa touche particulière.

A monsieur **LOUNIS Mourad**, Professeur au département de Génie Mécanique de l'Université de Khemis Meliana, j'exprime ma profonde gratitude pour son apports scientifiques et d'avoir accepté d'honorer par son présence notre jury d'examen.

La présence de Monsieur **NOURA Belkheir**, Maitre de Conférences A au département de Génie Mécanique de l'Université de Khemis Meliane, dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur **TEMMAR Mustapha**, Maitre de Conférences A au département de Génie Mécanique de l'Université de Blida 1 pour sa confiance et d'avoir accepté être examinateur de mon travail

Pour m'avoir accompagné et conseillé, je suis très particulièrement reconnaissant à monsieur **ALLALI Abderrazak**, Professeur à l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida 1, Je tiens à lui remercier pour avoir présidé le jury.

TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES.....	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	8
INTRODUCTION.....	11
1 . CONTRAINTES ET DEFORMATIONS	16
1.1. Notion de contrainte et de déformation.....	16
1.1.1. Forces et moments externes et forces internes.....	16
1.1.2. Contraintes.....	18
1.1.3. Déformation.....	23
1.2. Relations constitutives:.....	26
1.2.1. Comportement élastique.....	27
1.2.2. Relation de Hooke applicables au domaine élastique.....	27
1.2.3. Ensemble d'équations d'élasticité.....	28
1.2.4. Equations d'équilibre.....	28
1.2.5. Equations de compatibilité géométrique.....	28
1.2.6. Relations déformations/contraintes.....	29
2. MODELE MATHEMATIQUE.....	30
2.1. Méthode de saint-venant.....	31
2.1.1. Etude des déformations et de la compatibilité géométrique.....	31
2.1.2. Etude des contraintes.....	33
2.1.3 Étude des conditions d'équilibres.....	34
2.1.4 Conditions aux rives latérales.....	36
2.2. Fonction de contraintes.....	37
2.2.1 Compatibilité géométriques.....	38
2.2.2 Equilibre différentiel.....	38
2.2.3 Représentation physique de la fonction Φ	38

3. FORMULATION ET ADAPTATION DE LA METHODE DES	
ELEMENTS FINIS	41
3.1. Bref historique de la méthode des éléments finis:.....	41
3.2. Démarches de la méthode des éléments finis.....	42
3.3. Formulation variationnelle.....	44
3.4 Formulation en élément finis.....	47
3.4.1. Fonctions d'interpolations.....	48
3.4.2 Matrice de rigidité d'un élément quadrilatère.....	49
3.4.3. Assemblage des matrices de rigidité élémentaires	52
4. GENERATION DE MAILLAGE.....	56
4.1. Procédure de génération de maillage.....	56
4.1.1. Génération des nœuds sur la frontière du domaine.....	57
4.1.2. Fonction de condensation.....	59
4.1.3. Génération des nœuds internes.....	60
4.2. Numérotation des nœuds.....	61
4.3. Filtrage des nœuds.....	64
4.4. Connexion des éléments finis du maillage.....	65
4.5. Préparation du système d'équations.....	66
5. FORMULATION NUMERIQUE ET PROGRAMMATION.....	69
5.1. Remarques préliminaires	69
5.2. Méthodes de stockage sous forme de vecteur.....	70
5.2.1. Stockage en colonne.....	70
5.2.2. Stockage en diagonal.....	72
5.2.3. Stockage en ligne.....	74
5.2.4. Stockage en ligne de serpent.....	75
5.2.5. Stockage en escalier.....	76

5.3. Algorithmes de résolution de système d'équations.....	80
5.3.1. Méthode de Khaletski.....	81
5.3.2. Méthode de Cholesky.....	85
5.4. Calcul des paramètres intéressants du problème.....	89
5.4.1. Caractéristiques géométriques de la surface de la section.....	89
5.4.2. Constante de torsion.....	90
5.4.3. Contrainte de torsion.....	91
5.5. Position et valeur maximale de la contrainte de torsion.....	92
6. RESULTATAS ET COMMENTAIRES.....	93
6.1. Résultats sur la génération de maillage.....	93
6.2. Effet de la discrétisation sur convergence de problème.....	101
6.3. Variation des paramètres.....	103
CONCLUSION	109
	116
APPENDICES	
A- LISTE DES SYMBOLES.....	113
REFERENCES.....	116

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Corps soumise à des forces externes.....	19
Figure 1.2 : Coupe suivant un plan m d'un corps soumise à des forces externes..	19
Figure 1.3 : La force $\overline{\Delta F}$ est décomposée.....	20
Figure 1.4 : les composantes de contrainte agissent en 1.....	21
Figure 1.5 : Etat de contrainte au point 1.....	22
Figure 1.6 : Corps soumise à une déformation.....	24
Figure 1.7 : Trois éléments parallèles aux axes de référence.....	25
Figure 1.8 : Mise en évidence $\gamma_{xy} > 0$	26
Figure 2.1 : Déformations qui, sous l'effet d'un moment de torsion.....	30
Figure 2.2 : Déformation affectant une membrure prismatique sous l'effet d'un moment de torsion.....	33
Figure 2.3 : Contraintes agissant sur une surface élémentaire dA de section de la membrure.....	36
Figure 2.4 : Conditions imposées aux contraintes de cisaillement sur le contour.....	37
Figure 2.5 : Représentation des contraintes de cisaillement par les dérivées partielle de la fonction de contrainte.....	40
Figure 3.1 : Discrétisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.....	47
Figure 3.2 : Elément quadrilatère a quatre nœuds en décomposition.....	51
Figure 3.3 : Assemblage de deux éléments quadrilatères.....	53
Figure 4.1 : Frontière d'un domaine simplement connexe.....	56
Figure 4.2 : Génération des nœuds sur la frontière du domaine.....	59
Figure 4.3 : Distribution des nœuds selon la relation 4.16.....	60
Figure 4.4 : Illustration de la procédure de détermination les abscisses.....	61
Figure 4.5 : Illustration la procédure de détermination les ordonnées.....	61
Figure 4.6 : Elément Finis quadrilatère à quatre nœuds.....	63
Figure 4.7 : Numérotation des éléments.....	63
Figure 4.8 : Exemple sur la numérotation des nœuds.....	64
Figure 4.9 : Exemple sur la numérotation des nœuds.....	64
Figure 4.10 : Formes de la matrice [K] des deux cas de numérotation après l'application des conditions aux limites.....	68

Figure 5.1 : Stockage en colonne.....	70
Figure 5.2 : Stockage en diagonal.....	73
Figure 5.3 : Stockage en ligne.....	74
Figure 5.4 : Stockage en ligne de serpent.....	75
Figure 5.5 : Stockage en escalier.....	77
Figure 5.6 : Exemple 1 de la matrice bande de la relation 5.23.....	84
Figure 5.7 : Exemple 2 de la matrice bande de la relation 5.23.....	84
Figure 6.1 : Maillage quadrilatérale dans un cercle avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	94
Figure 6.2 : Maillage quadrilatérale dans un triangle équilatéral avec $N_x = 30$ et $N_y = 30$	94
Figure 6.3 : Maillage quadrilatérale dans un carré avec $N_x = 20$ et $N_y = 20$	95
Figure 6.4 : Maillage quadrilatérale dans un pentagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	95
Figure 6.5 : Maillage quadrilatérale dans un hexagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	95
Figure 6.6 : Maillage quadrilatérale dans un heptagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	96
Figure 6.7 : Maillage quadrilatérale dans un octagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	96
Figure 6.8 : Maillage quadrilatérale dans un nanogone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	96
Figure 6.9 : Maillage quadrilatérale dans un décagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	97
Figure 6.10 : Maillage quadrilatérale dans un polygone à 11 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	97
Figure 6.11 : Maillage quadrilatérale dans un polygone à 12 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	97
Figure 6.12 : Maillage quadrilatérale dans un polygone à 13 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	98
Figure 6.13 : Maillage quadrilatérale dans un polygone à 14 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	98
Figure 6.14 : Maillage quadrilatérale dans un demi-cercle avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	98
Figure 6.15 : Maillage quadrilatérale dans un quart de cercle avec $N_x=30$	

et $N_y = 30$	99
Figure 6.16 : Maillage quadrilatérale dans un astroïde avec $N_x=30$	
et $N_y = 30$	99
Figure 6.17 : Maillage quadrilatérale dans une ellipse avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	99
Figure 6.18 : Maillage quadrilatérale dans un losange symétrique avec $N_x = 15$	
et $N_y = 16$	100
Figure 6.19 : Maillage quadrilatérale dans le domaine de profil d'aile RAE 2822	
aile avec $N_x = 10$ et $N_y = 10$	100
Figure 6.20 : Maillage quadrilatérale dans le domaine de profil d'aile RAE 2822	
avec $N_x=30$ et $N_y = 30$	101
Figure 6.21 : Variation des paramètres de torsion I_P , C et $T_{\max} / 2M_t$ par	
rapport au nombre de nœuds de la discrétisation pour la section carré...	103
Tableau 6.1 : Effet de la discrétisation sur les résultats pour la section carré.....	101
Tableau 6.2 : Erreurs obtenus à partir de la discrétisation de la section carrée....	102
Tableau 6.3 : Les points de définition de la surface du profil d'aile RAE 2822.....	104
Tableau 6.4 : Effet de la discrétisation sur les résultats du profil 2822 RAE.....	105
Tableau 6.5 : Les références des profils d'ailes et les paramètres de torsion	
calculé par le programme numérique.....	106
Tableau 6.6 : Paramètres de la torsion pour diverses sections calculées	
par le programme numérique.....	107
Tableau 6.7 : Paramètres de la torsion pour les polygones réguliers calculés	
par le programme numérique.....	107
Tableau 6.8 : Paramètres exactes de torsion pour des polygones réguliers [1]...	108
Tableau 6.9 : Les erreurs sur les paramètres obtenus de torsion pour certains	
polygones réguliers.....	108

INTRODUCTION

Dans le passé, les scientifiques utilisent la méthode expérimentale, afin de prouver et valider leurs théories et les hypothèses de la recherche scientifique qui n'ont pas une estimation analytique, mais, lorsque certains phénomènes naturels sont trop complexes, trop vastes, trop dangereux, trop chers, ou trop long à reproduire dans une expérience, il était nécessaire de créer un processus ou un dispositif simplifié, appelé actuellement la simulation ou le modèle. Qu'il peut s'agir d'un modèle réduit (maquette) ou d'un modèle vivant, comme la souris qui permet d'éviter des expériences sur des humains ou d'un modèle numérique (programme de simulation par ordinateur). Dans notre cas tant que nous travaillons dans la physique et justement dans la résistance des matériaux prendront soin de modèle numérique pour l'appliquer sur notre problème [5], [16], [18], [28], [36].

Le chargement axial, la flexion et la torsion sont les trois modes de chargement fondamentaux pouvant agir sur une membrure prismatique droite. Nous étudions et nous concentrons dans ce travail sur la question de la torsion. On retrouve ce dernier mode de chargement, seul ou combiné avec les autres, dans un grand nombre d'éléments de structures et de machine. Les arbres de transmission de l'énergie mécanique utilisée dans le système de propulsion d'une automobile ainsi que les systèmes de suspension employant des barres de torsion sont certainement des exemples familiers et on le trouve au domaine aéronautique dans les ailes et les aubes du compresseur et de la turbine [28].

Pour étudier la torsion d'un barreau prismatique de section non circulaire, nous devons recourir aux méthodes plus générales découlant de la théorie de l'élasticité.

La résistance des matériaux donne des relations de torsion uniquement pour des sections cylindriques circulaires mais pour un avion, la plus part des ses structures sont non circulaires (Aile, Fuselage, Dérive, Langerons, Aubes, etc) [5], [28], [36].

La présente étude consiste alors, à réaliser un nouveau calcul numérique de contrainte de torsion pour des poutres cylindriques de section non circulaire. En effet, la complexité de ces sections induit que la solution analytique (exacte) du problème n'existe pas, et évidemment notre intérêt s'oriente vers la recherche de solutions numériques approchée. La méthode des éléments finis a été introduite et appliqué avec succès puisqu'elle s'adapte pour n'importe quelle section choisie. La modélisation et la discrétisation des équations gérant se phénomène physique (la torsion) sont donc fondées sur la méthode des éléments finis (2D) dont le principal avantage est de permettre une bonne représentation des géométries complexes, mais relativement assez lourde en volume et en temps de calcul [3], [9], [15], [17], [19], [20], [26], [34], [40].

Cependant, deux difficultés principales ce rencontrent, si la méthode des éléments finis est utilisée, La difficulté majeure est la manière optimale de génération de maillage ainsi que l'adaptation des équations au modèle mathématique de la résolution, l'autre difficulté est le choix de la méthode numérique adéquate à la résolution du système d'équations algébrique vu le nombre important de degrés de liberté alloué.

Pour cela, il faut subdiviser le domaine en petit sous domaines de géométrie simple connue telle que la géométrie triangulaire et quadrilatère par l'intermédiaire des fonctions d'interpolations. Un nombre important d'éléments finis sera établi et appliqué pour le développement d'un programme numérique afin d'avoir une convergence et rapidité d'exécution et faire une comparaison pour justifier l'exactitude des solutions obtenues.

Motivation :

Après une recherche bibliographique dans divers journaux et documents scientifiques spécialisés dont le but de la possibilité de trouver des travaux similaires à notre travail, on a constaté que le problème proposé par le directeur de thèse sur la torsion des prismes ayant des sections non circulaire par la méthode des éléments finis n'est pas encore développé par les auteurs malgré son intérêt pratique dans le domaine de la mécanique et l'industrie, vu que le problème mathématique est très complexe. Il est

représenté par une équation différentielle de 2^{ème} ordre appliquée dans des domaines complexes quelconques. Pour les sections simples comme le cercle et le carré, on peut trouver des solutions exactes à ce problème. Mais si la section est complexe la solution exacte n'existe pas et par conséquent notre intérêt s'oriente vers la recherche de la solution numérique approchée. D'out l'intérêt de notre travail.

Ce problème de torsion est traité autrement par la physique. On veut dire que le problème de calcul de la contrainte de torsion dans des sections des poutres non circulaires est réalisé par la résistance des matériaux, depuis une centaine d'années, en assimilant la section non circulaire comme étant une section circulaire par défaut en calculant uniquement le moment d'inertie polaire dans la formule de calcul de la contrainte de cisaillement et de l'angle de torsion, ou de choisir tout simplement une section circulaire dans les applications de l'industrie si c'est possible. Mais s'il existe des empêchements on utilise la section non circulaire. Ce résultat présente une approche physique au problème pour faciliter le calcul sans avoir connaître l'ordre de grandeur de la contrainte réelle appliquée. Le problème reste toujours analytique quel que soit la forme de la section et il n'était pas résolu dans la littérature, sauf la présentation du modèle mathématique.

Avant 6 années on a engagé avec le directeur de thèse de procéder à la résolution numérique de ce problème afin de corriger le problème précédent et de donner de nouveaux résultats aux problèmes. Le problème posé est de trouver des solutions à l'équation de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet appliquée à des domaines arbitraires, vu l'intérêt pratique des sections non circulaires travaillant à la torsion citons les aubes d'un compresseur et d'autres applications industrielles. Vu la complexité de problème, il doit être résolu numériquement. La méthode des éléments finis est choisie vu son adaptation avec les domaines complexes mais en parallèle son utilisation présente des difficultés lors de développement d'un programme de calcul numérique ainsi que la présentation de génération de maillage dans le domaine. Pour résoudre ce problème plusieurs disciplines entrent en considération citons le calcul numérique approfondi comme la méthode des éléments finis, résolution d'un système d'équation à très grande dimension, Stockage des matrices

avec élimination des zéros, Adaptation des algorithmes pour notre problème, génération de maillage, programmation numérique, Résistance des matériaux et évidemment un calculateur professionnel et rapide (ordinateur). Le langage choisi est le Fortran 90.

Disposition des chapitres:

Cette thèse est organisée en sept (6) chapitres qui présentent un développement mathématique de problème, les divers concepts de la méthode des éléments finis ainsi que les techniques numériques et informatique correspondantes.

Le premier chapitre faisant des connaissances fondamentales sur les propriétés des corps étudié, qui peuvent souvent être divisée en deux parties, des propriétés liées à la géométrie et d'autres liées à la matière. Ces corps dans la nature ou dans le monde de l'industrie sont exposés à des sollicitations extérieures sont souvent divisés en forces et moments [16], [18], [28], [36].

Dans le deuxième chapitre un développement mathématique du problème baser sur un calcul différentielle arrivant à l'équation différentielle des dérivées partielles de deuxième ordre connue se le nom équation de Poisson [3], [5], [14], [17], [18], [25], [27], [28-29], [37].

Nous présenterons, par la suite dans le troisième chapitre une description de la formulation en éléments finis de l'équation de Poisson et la transformation en un système algébrique linéaire ainsi les matrices de rigidités élémentaires de élément fini quadrilatère à 4 nœuds et la manière de procéder à l'assemblage pour l'obtention de système d'équations pour le domaine complet [3], [5-7], [9-10], [15-16], [19-24], [26], [33-34], [39-41], [44], [48-50].

Le quatrième chapitre a pour but de présenter la technique de génération de maillage opté pour notre étude et la méthode numérique nécessaire pour construire le système d'équations [5], [12], [21], [39], [42-43], [46], [50].

Nous présenterons dans le cinquième chapitre une description de la méthode numérique pour résoudre le système d'équation formés au

quatrième chapitre et les techniques de stockage des matrices sous forme de vecteur et finalement les technique de calcul de quelque paramètres physiques nécessaires pour l'interpolation de la solution [2], [4], [5], [8], [11], [13], [20], [22], [30], [31-33], [35], [38-39], [42-43], [46-47].

Le dernier chapitre présente les différente résultats mathématiques calculés pour déférentes domaines, commençant par la plus simple afin de justifier et comparer les résultats et de valider le programme réalisé, ensuite vers quelque autres complexes ou le domaine présente un intérêt physique et la solution exacte est absente [1], [5], [45], .

A la fin une conclusion générale du travail est présentée et qui est suivie par la proposition de quelques travaux de futur.

CHAPITRE 1

CONTRAINTES ET DEFOMRATIONS

La plupart des auteurs traitent les problèmes sur leurs ouvrages après avoir passer sur des introductions qui mènent à partir de laquelle d'expliquer le thème général de l'exposition et d'expliquer certains des concepts et de rappeler certains des renseignements qui aideront le spécialiste lecteur et non-spécialiste de comprendre le contenu de ces ouvrages. Nous avons donc décidé, avant de prendre le sujet de la recherche qu'il est dans nos mains de réserver ce chapitre juste pour expliquer certains des concepts et offrent certaines des informations nécessaires qui nous allons utiliser et qui servira de base à ce modeste travail.

Les corps, qu'ils soient naturels ou fabriqués différents et distincts les uns des autres, et ce qui les distingue les uns des autres est un ensemble de propriétés qui peuvent souvent être divisée en deux parties, des propriétés liées à la géométrie et d'autres liées à la matière, et ces corps dans la nature ou dans le monde de l'industrie sont exposés à des sollicitations extérieures sont souvent divisés en forces et moments, mais le comportement de chaque corps Comme nous l'avons dit est différent en fonction des caractéristiques de géométrie et de matière.

1.1. Notion de contrainte et de déformation :

1.1.1. Forces et moments externes et forces internes :

On représente les charges appliquées (ou sollicitations) sur un système par des forces ou des moments, ce qui permet de quantifier et d'idéaliser l'interaction entre deux systèmes mécaniques. Un point de contact, par exemple, est remplacé, sur chacun des deux corps en contact, par une force normale et une force tangentielle. La résultante de ces forces sur l'un des corps est orientée et elle agit dans le sens opposé à la résultante des forces sur l'autre corps. En outre, la gravité exerce une force sur chacun des points du volume d'un corps. Quoique les deux types de forces (de contact et de gravité) soient des forces externes (elles sont toutes deux

causées par des actions extérieures aux corps considérés), elles sont différentes, car, dans le cas de la résultante au point de contact, on est en présence d'une force externe de surface alors que, dans le cas des forces dues à la gravité, on a affaire à des forces externes de volume.

1.1.1.1 Forces de surface :

Les forces de surface qui, comme leur nom l'indique, agissent à la surface de la pièce, peuvent être exprimées soit par une force totale résultante, soit par des forces réparties (par unité de surface ou de longueur). On détermine les forces externes de surface à partir des conditions d'équilibre, en utilisant la géométrie du corps non déformé ; cela signifie qu'on néglige les variations d'angle et de longueur qui résultent de l'application des forces. Cette façon de faire offre l'avantage d'éviter l'introduction de la non-linéarité dans le développement mathématique. Elle donne des résultats adéquats, sauf lorsque les matériaux sont tellement mous qu'ils ne peuvent garder leur forme initiale sous l'effet des forces appliquées (caoutchoucs mous, tissus biologiques, etc.). L'étude de cas particuliers de grandes déformations dépasse toutefois le cadre de notre travail.

1.1.1.2 Forces de volume :

Les forces de volume, qui sont réparties en tout point du volume du corps, sont exprimées en unités de force par unité de volume. De telles forces sont créées par la gravité, par les effets centrifuges, par des champs électromagnétiques, etc. Il arrive souvent qu'on néglige les forces de volume pour simplifier l'analyse d'un problème ; on ne peut cependant le faire que si ces dernières ne représentent qu'une petite fraction du chargement total agissant sur la pièce sollicitée. On peut également classer les forces externes d'après la durée et le mode d'application de la sollicitation ; on distingue alors les sollicitations constantes et les sollicitations variables.

1.1.1.3 Sollicitations constantes :

Les forces et les moments demeurent constants sur de longues périodes de temps et sont appliqués lentement et sans choc. C'est ce type de sollicitations que nous allons considérer dans cet texte. On peut traiter le cas des fluctuations lentes comme celui des sollicitations constantes.

1.1.1.4 Sollicitations variables :

Les forces et les moments peuvent varier de façon rapide (vibrations, impacts) et causer des phénomènes dynamiques en ce qui concerne le comportement du matériau. Ces phénomènes dynamiques étant souvent complexes à analyser.

1.1.1.5 Forces internes :

L'étude des matériaux révèle qu'il existe des forces d'attraction et de répulsion intermoléculaires, forces qui sont en équilibre et qui maintiennent un certain espacement entre les molécules. Sous l'action de sollicitations externes, cet équilibre est modifié, ce qui entraîne la déformation du matériau. Les forces engendrées par l'action des sollicitations sont appelées forces internes. Le matériau doit être suffisamment résistant pour supporter l'action des forces internes sans se détériorer : c'est là l'essence même de l'étude de la résistance des matériaux.

L'analyse des forces internes sur le plan moléculaire n'a pas de valeur pratique, étant donné les imperfections inhérentes à tous les matériaux. C'est donc sur le plan macroscopique que nous nous situerons, et nous nous contenterons de faire porter l'analyse des forces internes sur un élément qui, quoiqu'infinimental, est assez grand pour satisfaire aux hypothèses de continuité, d'homogénéité et d'isotropie.

1.1.2. Contrainte :

Considérons un corps sollicité par un système de forces externes F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et déterminons l'état des forces internes en un point I, figure (1.2).

Choisissons, au départ, un système d'axes de référence (x, y, z) : ce système est en général déterminé, pour plus de commodité, par la forme du corps ; ainsi, dans le cas d'une membrure mince et droite, l'axe longitudinal coïncide avec un des axes de référence.

Pour déterminer les forces internes en I , sectionnons le corps selon un premier plan normal, par exemple, à l'axe des x et passant par I , figure (1.11a). Dans cette section, des forces internes agissent en tout point et peuvent varier en intensité et en direction d'un point à l'autre.

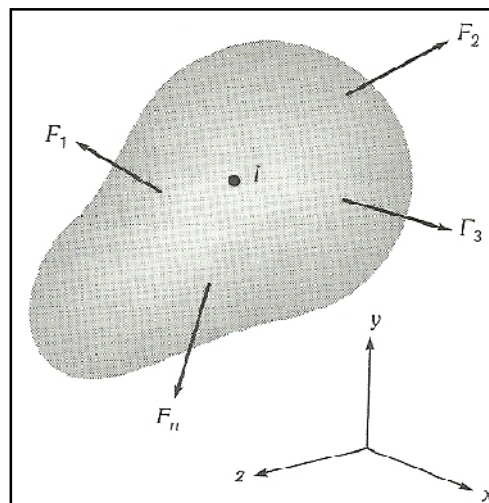


Figure 1.1: Corps soumise à des forces externes.

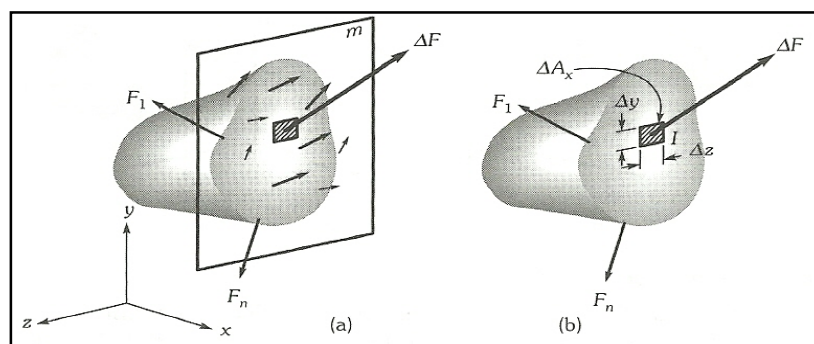


Figure 1.2: Coupe suivant un plan m d'un corps soumise à des forces externes.

Divisons la section en un grand nombre de petites surfaces et examinons, en particulier, la zone qui entoure le point I , figure (1.2b). Une

force interne $\overline{\Delta F}$ agit sur un élément de surface, $\Delta A_x = \Delta y \Delta z$. Cette force a une direction et une intensité qui dépendent de l'état d'équilibre global qui existe entre les forces internes à la section m et les forces externes agissant sur la partie gauche du corps.

Décomposons le vecteur $\overline{\Delta F}$ selon le système d'axes de référence ; nous obtenons : ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z . Figure (1.3). L'intensité moyenne de chacune de ces composantes, par unité de surface, est donc [29] :

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} = \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} = \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (1.1)$$

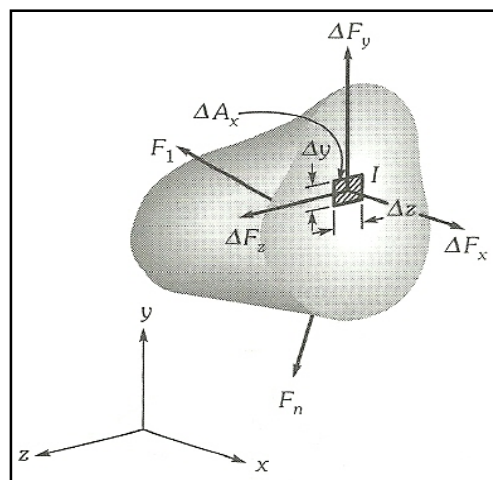


Figure 1.3: La force $\overline{\Delta F}$ est décomposée.

Si ΔA_x tend vers zéro, ces trois rapports tendent vers des limites qu'on définit comme étant les composantes de contrainte qui agissent sur la face normale à l'axe des x, au point 1. Le comportement physique relié au premier rapport $\Delta F_x/\Delta A_x$ est différent de celui relié aux deux autres puisque, dans ce cas, la force interne agit dans la direction normale à la face considérée. On appelle ce premier rapport contrainte normale, σ . Dans les deux autres cas, la force agit parallèlement à la face, et on appelle contrainte de cisaillement τ , chacune de ces deux autres composantes. Ces deux contraintes sont illustrées à la figure (1.4). On définit la contrainte normale σ par la relation suivante [29]:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad (1.2)$$

Et la contrainte de cisaillement par :

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} \quad (1.3)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (1.4)$$

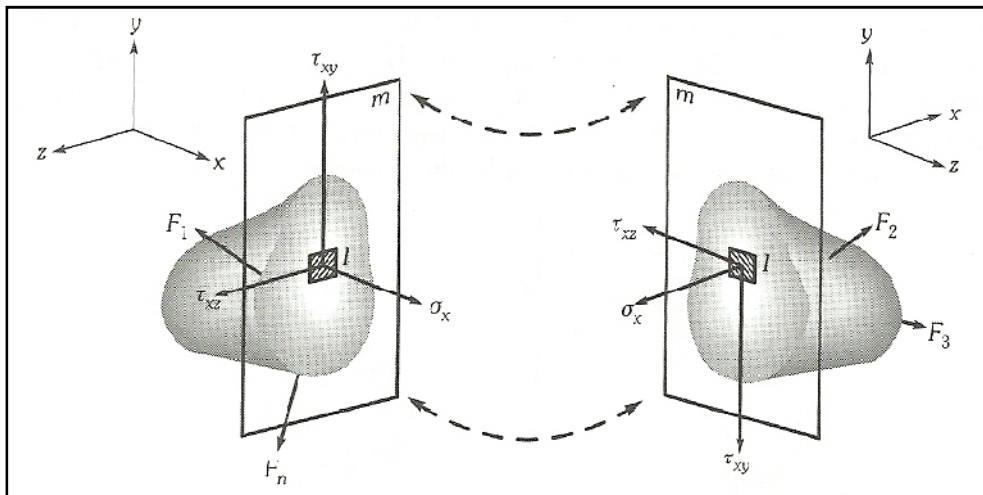


Figure 1.4: les composantes de contrainte agissent en 1.

1.1.2.1 Convention de signes :

La figure (1.13) présente les deux moitiés du corps original, sectionné selon le plan m . On aurait pu utiliser pour la partie droite, avec le même résultat, le cheminement suivi précédemment pour déterminer les composantes de contrainte σ_x , τ_{xy} et τ_{xz} au point 1. Cependant, pour satisfaire à l'équilibre des forces internes, on aurait indiqué pour celles-ci un sens opposé à celui de la partie gauche. Pour avoir des composantes de contrainte de même signe lorsqu'elles agissent dans des sens opposés sur des faces opposées, il faut adopter la convention de signes suivante :

- Une face est positive lorsque sa normale externe est dirigée dans le sens positif d'un axe ;
- Une contrainte est positive lorsqu'elle agit dans le sens positif d'un axe sur une face positive, ou dans le sens négatif d'un axe sur une face négative. Toutes les composantes de contrainte illustrées à la figure (1.13) sont positives.

1.1.2.2 Etat de contrainte en un point:

En reprenant le même processus, mais en sectionnant le corps au point I selon un plan normal à l'axe des y ou à l'axe des z, on obtient les composantes de contrainte suivantes :

- sur la face normale à l'axe des y : σ_y , τ_{yz} et τ_{yx} ;
- sur la face normale à l'axe des z : σ_z , τ_{zy} et τ_{zx} .

Enfin, on peut isoler complètement le point I et identifier son état de contrainte en définissant six plans, de façon à isoler un parallélépipède infinitésimal de dimensions Δ_x , Δ_y , Δ_z figure (1.5). Notons toutefois que, sur deux faces parallèles (par exemple les faces AEHD et BFGC) séparées par une distance infinitésimale Δ_x , les intensités des contraintes correspondantes ne sont pas nécessairement les mêmes. Ainsi, la contrainte normale σ'_x agissant sur AEHD diffère en général de la contrainte σ_x agissant sur BFGC, mais d'une quantité infinitésimale.

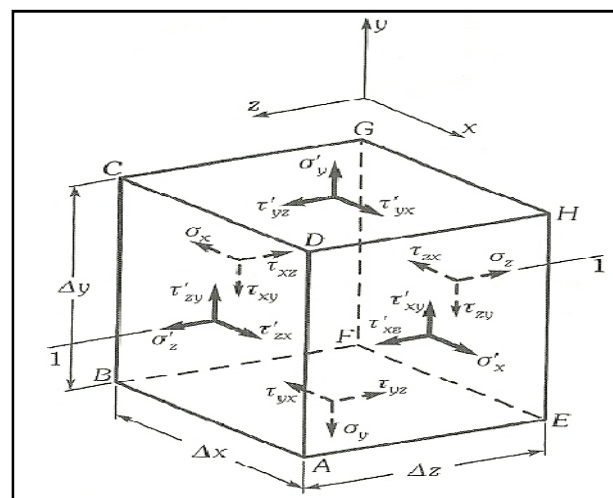


Figure 1.5: Etat de contrainte au point 1.

Il est utile d'établir dès maintenant une relation importante qui régit les contraintes de cisaillement. Considérons, figure (1.5). Les composantes de contrainte qui contribuent, par exemple, au cisaillement selon le plan xy : les composantes τ_{xy} et τ_{yx} agissent sur les faces négatives, et leurs contreparties τ'_{xy} et τ'_{yx} agissent sur les faces positives. Ces dernières peuvent être différentes des premières mais, comme nous l'avons mentionné précédemment, d'une quantité infinitésimale. L'équilibre des moments autour d'un axe (1-1) parallèle à l'axe des z et passant par le centre de l'élément donne [29]:

$$\left(\sum M\right)_{(1-1)} = 0, [+ \uparrow] \quad (1.5)$$

$$(\tau_{xy} + \tau'_{xy}) \Delta_y \Delta_z \frac{\Delta_x}{2} - (\tau_{yx} + \tau'_{yx}) \Delta_x \Delta_z \frac{\Delta_y}{2} = 0 \quad (1.6)$$

Si on divise par le volume de l'élément ($\Delta_x \Delta_y \Delta_z$) et qu'on fasse tendre les dimensions de l'élément vers zéro, les composantes de contrainte sur les faces positives tendent vers leurs contreparties sur les faces négatives. On obtient ainsi [29]:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.7)$$

L'étude du cisaillement selon les plans dont les normales sont y et z donnerait des résultats équivalents pour les autres composantes de contrainte de cisaillement soit [29]:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.8)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.9)$$

1.1.3. Déformation :

Sous l'action d'un chargement externe ou d'une variation de température, les dimensions d'un corps varient : il en résulte une déformation. Nous pouvons distinguer deux types de déformations. Le

premier concerne la variation de longueur : c'est la déformation normale ; le second a trait à la variation d'angle : c'est la déformation de cisaillement. La figure (1.6) représente un corps avant et après déformation (comme pour l'étude de la contrainte, le système d'axes de référence adopté est x, y, z) ; il s'agit d'étudier les déformations qui se produisent en un point 1.

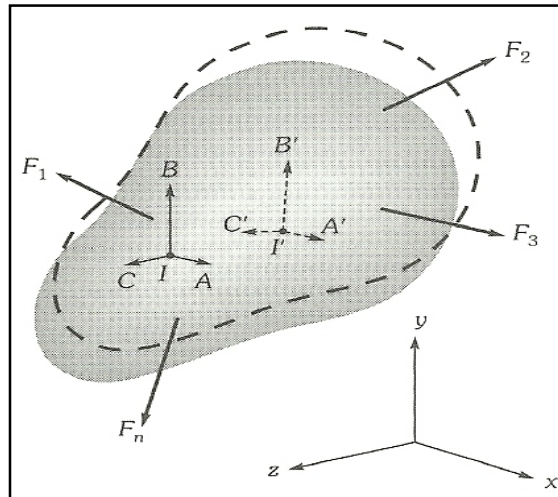


Figure 1.6: Corps soumise à une déformation

Identifions, au point I, trois éléments de longueur infinitésimale, parallèles aux axes de référence, soit $IA = \Delta_x$, $IB = \Delta_y$ et $IC = \Delta_z$. Après déformation, ces trois éléments deviennent I'A', I'B' et I'C', figure (1.7). On définit la déformation normale e comme le quotient de la variation de longueur par la longueur initiale, lorsque celle-ci tend vers zéro.

Puisqu'on a identifié trois directions initiales, on obtient trois déformations normales, soit [29]:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{I'A' - IA}{IA} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta_y \rightarrow 0} \frac{I'B' - IB}{IB} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta_z \rightarrow 0} \frac{I'C' - IC}{IC} \quad (1.12)$$

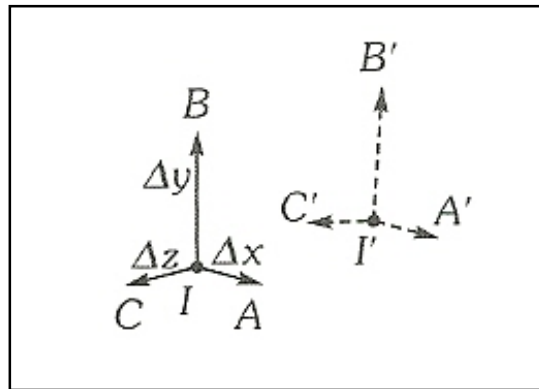


Figure 1.7: Trois éléments parallèles aux axes de référence.

On définit la déformation de cisaillement γ comme la variation (en radians) d'un angle originalement droit lorsque les côtés qui sous-tendent l'angle tendent vers zéro. Pour les trois angles droits initiaux (AIB, BIC et CIA) dont les côtés sont respectivement parallèles à xy , à yz et à zx , et dans le cas de petites variations d'angle, ce qui permet de remplacer une variation d'angle par la tangente de cette variation, on a effectivement trois déformations de cisaillement [29]:

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta_x \rightarrow 0 \\ \Delta_y \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A'I'B'} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A'I'B'} \right) \quad (1.13)$$

$$\gamma_{yz} = \lim_{\substack{\Delta_y \rightarrow 0 \\ \Delta_z \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B'I'C'} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B'I'C'} \right) \quad (1.14)$$

$$\gamma_{zx} = \lim_{\substack{\Delta_z \rightarrow 0 \\ \Delta_x \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{C'I'A'} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{C'I'A'} \right) \quad (1.15)$$

Il est plus facile de visualiser la déformation de cisaillement lorsqu'elle ne se manifeste que sur un seul plan figure (1.8). Les valeurs de ε et de γ sont adimensionnelles.

1.1.3.1 Convention de signes :

Nous adoptons la convention de signes suivante pour les déformations :

- Une déformation normale s est positive lorsqu'il y a allongement (c'est-à-dire accroissement de la longueur) ;
- Une déformation de cisaillement est positive lorsque l'angle droit, soutenu par des côtés dirigés selon le sens positif d'axes de référence, diminue figure (1.8).

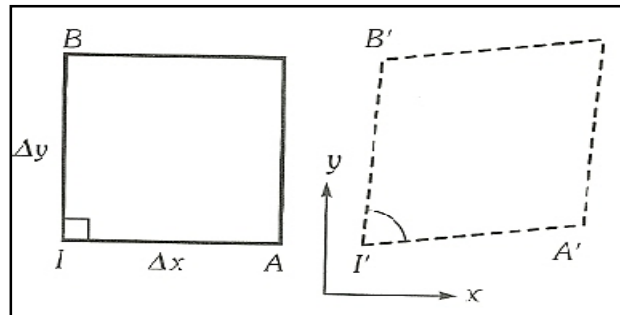


Figure 1.8: Mise en évidence $\gamma_{xy} > 0$.

1.2. Relations constitutives :

Nous mentionnons qu'il faut tenir compte, dans la résolution d'un problème de résistance des matériaux, des relations forces/déplacements, ce qui équivaut à des relations contraintes/déformations. Nous avons défini et étudié la notion de contrainte (causée par les forces externes) et celle de déformation (provenant du changement de géométrie). Les relations que nous avons alors établies étaient indépendantes des propriétés du matériau. Toutefois, il y a nécessairement une relation entre la contrainte et la déformation, relation qui dépend du type de matériau utilisé.

L'étude détaillée des matériaux, de leur structure moléculaire et de leur comportement particulier étant traitée dans plusieurs ouvrages, nous n'établirons ici que les relations constitutives dont nous avons besoin, à partir des observations expérimentales macroscopiques des déformations et des relations de celles-ci avec les contraintes en présence.

Cette approche dite «phénoménologique» est très utile, car elle permet de décrire de façon relativement simple le comportement des matériaux et de les classer en fonction de leur comportement idéalisé. On distingue ainsi les comportements élastique, plastique et visqueux.

1.2.1. Comportement élastique :

Un matériau a un comportement élastique lorsque, après avoir subi une déformation sous l'action de sollicitations, il reprend instantanément sa forme initiale dès que celles-ci cessent. Si, en outre, il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations, le matériau est réputé avoir un comportement linéaire. C'est à ce type de comportement que nous nous intéresserons particulièrement, car il s'applique à la plupart des matériaux d'ingénierie (de moins jusqu'à une certaine limite de déformation). On utilise les relations tirées de la loi de Hooke pour décrire le comportement élastique (nous les exposerons brièvement après).

1.2.2. Relation de Hooke applicables au domaine élastique :

C'est Robert Hooke qui, le premier, énonça, à fin du XVII^e siècle, la loi de la déformation élastique : (l'allongement suit la force). On exprimer cette loi de la façon suivante [29]:

$$\delta = \frac{1}{K} F \quad (1.16)$$

La rigidité, K , est constante pour une géométrie et un matériau donnés, à condition que le matériau soit élastique. La loi de Hooke a cependant été généralisée pour permettre d'établir une corrélation entre la déformation et la contrainte. Pour un matériau élastique isotrope soumise à une seule contrainte, soit σ_x ou τ_{xy} , on a les relations linéaires suivantes [29]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (1.17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (1.18)$$

Ou E est appelé module d'élasticité (ou module de Young) et G, module de rigidité (ou module d'élasticité en cisaillement).

1.2.3. Ensemble d'équations d'élasticité :

A l'aide des relations entre contraintes et déformations que nous venons de mettre en évidence, il nous est possible de résumer et de rassembler, en ce qui concerne un matériau isotrope, les équations valable dans le domaine élastique. Ce sont les équations d'élasticité fondamentales.

La résolution d'un problème d'élasticité consiste donc à évaluer, lorsqu'on considère les trois dimensions, les 15 fonctions fondamentales suivantes [29]:

- Les six contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$;
- Les six déformations $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$;
- Les trois déplacements u, v, w.

Ces 15 équations (qui, en général, dépendent de x, de y et de z) doivent satisfaire aux 15 équations d'élasticité (regroupées sous les trois rubriques suivantes) ainsi qu'aux conditions aux rives.

1.2.4. Equations d'équilibre :

On va établi les équations d'équilibre et en incluant les forces massiques par unité de volume, F_y et F_z [29] :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

1.2.5. Equations de compatibilité géométrique :

Il s'agit des relations entre déformations et déplacements [29].

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{1.20}$$

1.2.6. Relations déformations/contraintes :

On a [29] :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ * \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{1.21}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

CHAPITRE 2

MODELE MATHEMATIQUE

Le chargement uni-axial, la flexion et la torsion sont les trois modes de chargement fondamentaux pouvant agir sur une membrure prismatique droite nous étudions et nous concentrons dans ce travail sur la question de la torsion. On retrouve ce dernier mode de chargement, seul ou combiné avec les autres, dans un grand nombre d'éléments de structures et de machine. Les arbres de transmission de l'énergie mécanique utilisée dans le système de propulsion d'une automobile ainsi que les systèmes de suspension employant des barres de torsion sont certainement des exemples familiers et on le trouve au domaine aéronautique dans les ailes et les aubes du compresseur et de la turbine.

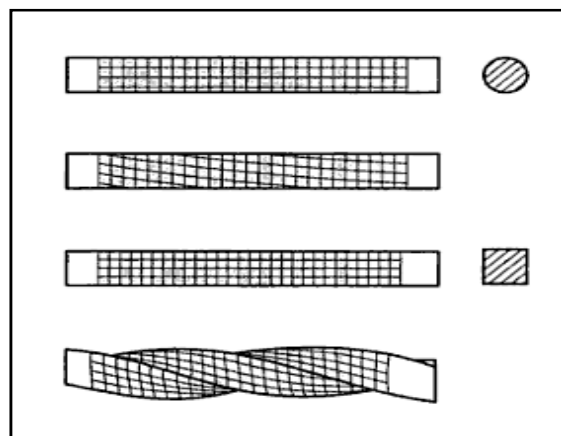


Figure 2.1 : Déformations qui, sous l'effet d'un moment de torsion.

Pour étudié la torsion d'un barreau prismatique de section non circulaire, nous devons recourir aux méthodes plus générales découlant de la théorie de l'élasticité. La figure (2.1) illustre les déformations subies par un barreau de section circulaire et par un barreau de section carrée soumis à un moment de torsion. En général, une section plane, normale à l'axe longitudinal de la membrure, ne resté plus, plane après déformation.

2.1. Méthode de saint-venant:

Considérons une membrure, de section uniforme, soumise à un moment de torsion M à ses extrémités. Selon le principe de Saint-Venant, à une section suffisamment éloignée des points d'application du moment de torsion, la répartition des contraintes dépend uniquement de l'intensité de ce moment et, pour une membrure assez longue, la répartition des contraintes aux extrémités n'affecte pas celle qu'on retrouve à la section considérée

2.1.1. Etude des déformations et de la compatibilité géométrique :

Puisque les principes de symétrie ne s'appliquent pas ici la méthode de Saint-Venant nous oblige à émettre l'hypothèse selon laquelle la membrure, originalement doit posséder un axe de rotation autour duquel chaque section se déplace. Les projections des déplacements des sections sur le plan normal à l'axe de torsion, sont comparables aux déplacements dus à la rotation d'un corps rigide

Dans le système de coordonnées cartésiennes x, y, z , l'axe des x est l'axe de torsion de la membrure et le plan yz (avec $x=0$), le plan de référence, figure (2.2a).

Considérons un point A , de coordonnées x, y et z figure (2.2a). Quand on applique un moment M , ce point se retrouve en A' , dont les coordonnées sont $x+u, y+v$ et $z+w$. Les déplacements v et w sont associés principalement à la rotation de la section qui contient le point A , rotation d'un angle φ relié à β (angle de torsion unitaire) par [29]:

$$\beta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.1)$$

Lorsque β est constante la relation (2.1) donne l'équation :

$$\varphi = \beta x \quad (2.2)$$

La figure (2.2b) montre la projection des points A et A' en A_l et en A dans le plan de référence; les expressions des déplacements v et w en fonction de β sont données par les relations suivantes :

$$V = -r\beta x \sin\theta = -\beta xz \quad (2.3a)$$

$$W = r\beta x \cos\theta = \beta xy \quad (2.3b)$$

Le déplacement selon l'axe longitudinal (u) est dû au gauchissement de la section. D'après le principe de Saint-Venant, ce déplacement ne dépend pas de x. On peut donc écrire :

$$u = u(y,z) \quad (2.4)$$

On obtient les déformations à partir les équations suivantes (voir chapitre I équation (1.20)) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \beta z \quad (2.5d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.5e)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \beta y \quad (2.5f)$$

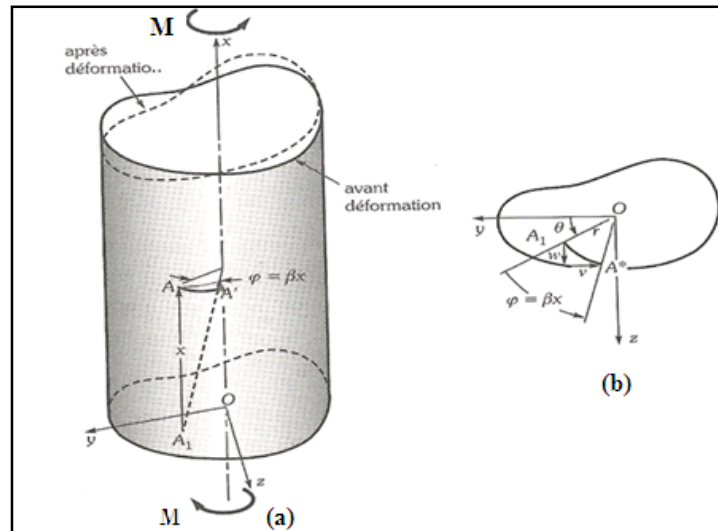


Figure 2.2: Déformation affectant une membrure prismatique sous l'effet d'un moment de torsion.

Puisque le déplacement $u(y, z)$ n'est pas défini, on peut l'éliminer en soustrayant la dérivée partielle de γ_{xz} par rapport à y de celle de γ_{xy} par rapport à z , ce qui donne (équation (2.5d) et (2.5f)):

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = -2\beta \quad (2.6)$$

2.1.2. Etude des contraintes :

En ce qui concerne le comportement élastique d'une membrure prismatique de matériau isotrope soumise à une torsion, l'application des relations contraintes/déformations permet d'écrire :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (2.7a)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \neq 0 \quad (2.7d)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \neq 0 \quad (2.7e)$$

Le fait qu'ici $\tau_{yz} = \gamma_{yz} = 0$ confirme que les sections normales à l'axe longitudinal de la membrure ne subissent aucune distorsion dans leur propre plan ; par conséquent, un angle droit dont les deux côtés sont situés dans le plan de la section ne peut subir aucune modification.

D'après les équations (2.7d), (2.7f), (2.7c) et (2.7d), on a :

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \beta z \right) \quad (2.8a)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \beta y \right) \quad (2.8b)$$

Ces relations conduisent, en ce qui concerne les contraintes, à une équation similaire à l'équation

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\beta \quad (2.9)$$

2.1.3 Étude des conditions d'équilibres :

Équations différentielles d'équilibre :

Si les forces de volume sont négligeables, les conditions d'équilibre différentiel, appliquées à la torsion donnent les résultats suivants :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0 \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.10c)$$

Les équations (2.10b) et (2.10c) sont automatiquement satisfaites par les équations (2.4), (2.8a) et (2.8b). Puisque, les contraintes τ_{xy} et τ_{xz} doivent satisfaire à l'équation (2.10a) en utilisant les équations (2.8a) et (2.8b), on obtient [29]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

L'équation (2.11), qui permet de calculer les déplacements due au gauchissement est connue sous le nom d'équation différentielle de Laplace ; sa solution est une fonction harmonique.

Conditions générales d'équilibre :

La répartition des contraintes τ_{xy} et τ_{xz} sur une section normale à l'axe longitudinale doit satisfaire aux conditions générales d'équilibre statique.

A partir de la figure (2.3), on obtient les relations suivantes :

$$\left(\sum \mathbf{F} \right)_x = 0 \quad (\text{vérifié}) \quad (2.12a)$$

$$\left(\sum \mathbf{F} \right)_y = 0 \quad , \quad \text{d'où} \quad \int_A \tau_{xy} dA = 0 \quad (2.12b)$$

$$\left(\sum \mathbf{F} \right)_z = 0 \quad , \quad \text{d'où} \quad \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (2.12c)$$

$$\left(\sum \mathbf{M} \right)_x = 0 \quad , \quad \text{d'où} \quad \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA - \mathbf{M} = 0 \quad (2.12d)$$

$$\left(\sum M\right)_y = 0 \text{ (v\u00e9rifi\u00e9)} \quad (2.12e)$$

$$\left(\sum M\right)_z = 0 \text{ (v\u00e9rifi\u00e9)} \quad (2.12f)$$

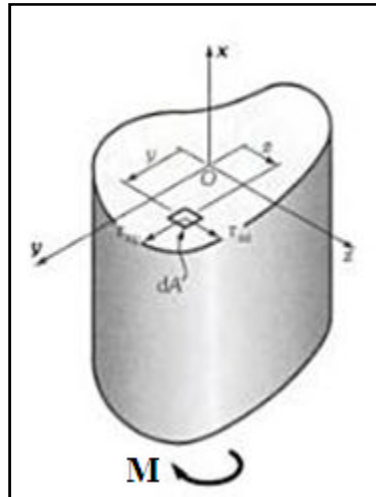


Figure 2.3 : Contraintes agissant sur une surface \u00e9l\u00e9mentaire dA de section de la membrure.

2.1.4 Conditions aux rives lat\u00e9rales :

Puisque la surface lat\u00e9rale d'une membrure prismatique soumise \u00e0 une torsion est libre de contraintes, la r\u00e9sultante (τ) des contraintes de cisaillement qui affectent un \u00e9l\u00e9ment situ\u00e9 sur le contour de la section doit agir selon la direction tangentielle s au contour, au point qui repr\u00e9sente cet \u00e9l\u00e9ment, figure (2.4). Cette r\u00e9sultante est donn\u00e9e par l'\u00e9quation suivante :

$$\tau_{xs} = -\tau_{xy} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha \quad (2.13)$$

O\u00f9 α est l'angle form\u00e9 par la normale n \u00e0 la paroi est l'axe des y . la projection des composante τ_{xy} et τ_{xz} sur la direction n donne ce que suit :

$$\tau_{xy} \cos\alpha + \tau_{xz} \sin\alpha = 0 \quad (2.14)$$

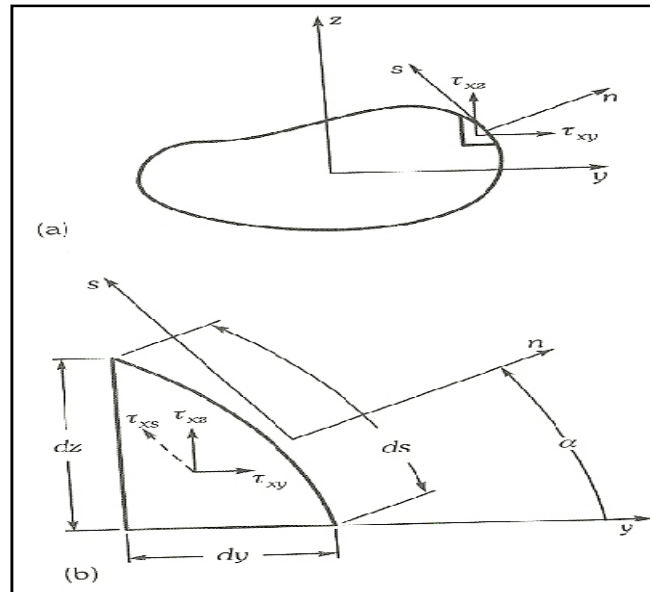


Figure 2.4: Conditions imposées aux contraintes de cisaillement sur le contour.

La figure (2.4b) montre que :

$$\sin\alpha = -\frac{dy}{ds} \text{ et } \cos\alpha = \frac{dz}{ds}$$

Par conséquent les équations (2.13) et (2.14) deviennent respectivement :

$$\tau_{xs} = \tau_{xy} \frac{dy}{ds} + \tau_{xz} \frac{dz}{ds} \quad (2.15a)$$

$$\tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (2.15b)$$

2.2. Fonction de contraintes :

Pour résoudre un problème posé par la torsion, il suffit de calculer les valeurs des quatre inconnues τ_{xy} , τ_{xz} , u et β , à l'aide des équations (2.8a), (2.8b), (2.11), (2.12b), (2.12c) et (2.12d), tout en respectant les conditions aux rives, équation (2.15b).

Par la suite, Prandtl a introduit le concept selon lequel on pouvait résoudre les problèmes posés par la torsion en calculant la valeur d'une seule inconnue, appelée «fonction de contraintes» $\Phi(y, z)$. Cette fonction est différentiable et elle est associée aux contraintes de la manière suivante [29]

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.16a)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.16b)$$

La fonction Φ doit satisfaire aux conditions de compatibilité géométriques d'équilibre différentielle, ainsi qu'aux conditions aux rives latérales [29].

2.2.1 Compatibilité géométriques :

Si on introduit les dérivées partielles équation (2.16) dans l'équation (II.9), on obtient l'équation de Prandtl :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\beta \quad (2.17)$$

2.2.2 Equilibre différentiel :

On s'aperçoit que les équations (2.16) satisfont automatiquement aux équations d'équilibre différentiel, équation (2.10), puisqu'on a alors :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0 \quad (2.18)$$

2.2.3 Représentation physique de la fonction Φ :

On peut représenter la fonction comme une surface bombée qui s'étend sur toute la section de la membrure. Il est possible d'interpréter ses caractéristiques, exprimées par les équations (2.16), ainsi : la pente de la

surface, selon la direction z , indique que l'intensité de la contrainte de cisaillement qui agit dans la direction y , et la pente selon la direction y donne, avec le signe contraire, la contrainte de cisaillement qui agit dans la direction z . on peut voir à la figure (2.5a) les contrainte qui agissent en général en un point A [29].

Dans le plan de la section, considérons un système d'axes (n, s) formant avec le système (y, z) un angle α , figure (2.5) on peut établir les relations suivantes :

$$\cos\alpha = \frac{dy}{dn} \text{ (figure (2.5b))} = \frac{dz}{ds} \text{ (figure (2.5c))} \quad (2.19a)$$

$$\sin\alpha = \frac{dz}{dn} \text{ (figure (2.5b))} = -\frac{dy}{ds} \text{ (figure (2.5c))} \quad (2.19b)$$

La composante de la contrainte de cisaillement qui agit selon la direction s , figure (2.5b), est donnée par l'équation suivante, équation (2.13):

$$\tau_{xs} = -\tau_{xy} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha \quad (2.20)$$

À partir des équations (2.16), (2.26) et (2.27), on obtient

$$\tau_{xs} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dn} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad (2.21)$$

La composante de la contrainte de cisaillement qui agit selon la direction n est donnée par l'équation :

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha \quad (2.22)$$

En effectuant les mêmes opérations, figure (2.5c), on obtient

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \quad (2.23)$$

En général, la dérivée partielle de la fonction Φ , effectuée selon une direction quelconque, donne l'intensité de la contrainte qui est normale à cette direction. Si la direction n coïncide avec la normale au contour (défini par $\Phi = \text{constante}$) passant par le point A , la composante τ_{xn} est nulle, car $\partial\Phi/\partial s = 0$, ce qui implique que la composante τ_{xs} est tangentielle au contour ($\Phi=\text{constante}$), au point de rencontre avec la normale passant par le point A [29]

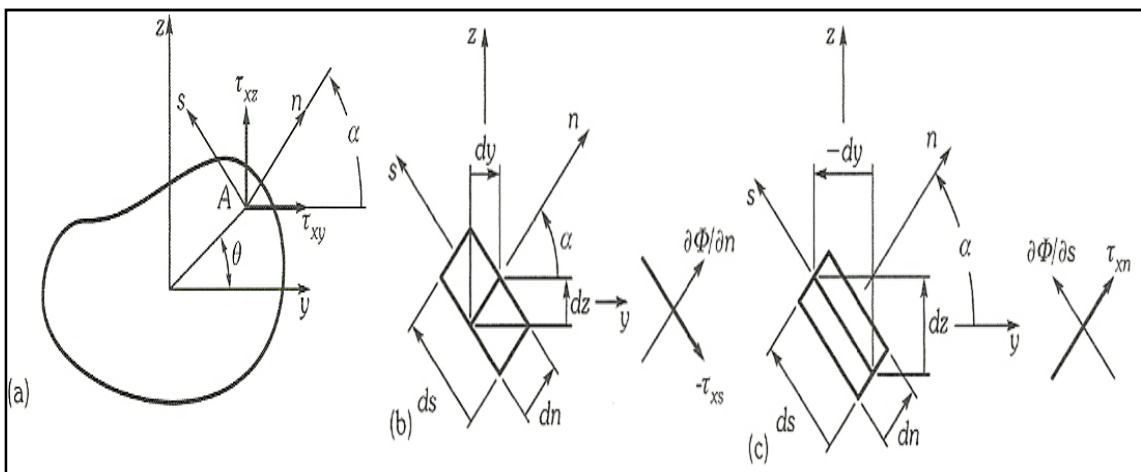


Figure 2.5: Représentation des contraintes de cisaillement par les dérivées partielles de la fonction de contrainte.

CHAPITRE 3

FORMULATION ET ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Les techniques de calcul des structures ont connu un développement très considérable dans ces dernières décennies, tout cela est pour les besoins de l'industrie et soutenu par les progrès dans le domaine des ordinateurs.

Parmi ces approches, nous optons la technique des éléments finis pour la résolution de notre problème vu à son principal avantage qui permet une bonne représentation des géométries complexes mais relativement assez lourde en volume et en temps de calcul.

Dans la suite, on entame la formulation de cette technique (la méthode) en traitant deux types d'éléments finis, afin de valider les résultats d'une part et d'autre part en comparant avec ceux des résultats analytiques pour les géométries simples disponibles.

3.1. Bref historique de la méthode des éléments finis:

Depuis une cinquantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres [7]. Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux.

A partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou nœuds. La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure.

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie et de l'aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique entre

les années 1950 et 1960 : [9] introduisent en 1956 le concept d'élément fin³. Ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement, à partir de ce concept, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c.à.d. aux déplacements en tout point du milieu continu [13]

Dès 1960 la méthode des éléments finis est réputé un développement rapide dans plusieurs directions :

- La méthode est reformulée, à partir des considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés [2], [21].
- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou iso-paramétriques [25].
- La méthode des éléments finis est reconnue un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : mécanique des fluides, nucléaire, thermique, etc. [10], [18].
- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle [14].

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis [21], [23] et [28]. Elle est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique, des interactions fluide-structure.

Dans la suite, nous citons les principales démarches de cette méthode.

3.2. Démarches de la méthode des éléments finis :

Les démarches suivies dans l'analysé d'élément fini pour un problème typique sont :

1/-Discrétisation (ou représentation) du domaine donné dans une collection en choisissant l'E.F.

- Construire la maille d'élément fini en choisissant l'élément.
- Numéroté les nœuds et les éléments.
- Engendrer les propriétés de la géométrie (coordonnées, l'aire de la section, ...) d'avoir besoin pour le calcul du problème.

2/-Dérivation de l'équation d'élément pour tous les éléments de la maille.

- Construire la formulation variationnelle de l'équation différentielle donnée sur l'élément typique.
- Supposer que la variable dépendant typique (u) est de la forme :

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \Psi_j$$

Tel que n est le nombre de nœuds du domaine.

En lui substituant dans la démarche (2a), on obtient l'équation d'élément (e) sous la forme :

$$[K^e]u^e = F^e$$

- Dériver les fonctions d'interpolations Ψ_j de l'élément et calculer les matrices d'élément.

3/- Assembler les équations pour obtenir le système équations entière du problème.

- Identifier les conditions de continuité de l'inter de l'élément parmi les variables principales (parenté entre les degrés de liberté locaux et les degrés de libertés globaux).
- Assembler les équations d'éléments en utilisant (3a) et la propriété de superposition.

4/- Imposer les conditions aux limites du problème.

- Identifier les spécifiques degrés de liberté principale globale
- Identifier les spécifiques degrés de liberté secondaires globale.

5/- Solution de l'équation d'assemblage (le système algébrique) et autres paramètres.

- Résoudre le système d'équations pour la variable dépendant inconnu (u).
- Calculer le gradient de la solution ou autres quantités désirées à partir de degrés de liberté principaux (u) calculé à la démarche (5a).

Dans les problèmes à deux dimensions, nous ne cherchons pas seulement une solution approximative du système d'équations différentielles partielles mais, nous avons aussi des approximations sur le domaine donné par un maillage approprié d'élément fin³. Par conséquent, nous aurons des erreurs dues à l'approximation de la solution et aussi les erreurs de discrétisation dues à l'approximation du domaine par des éléments finis (2D).

La maille des éléments finis est constituée par des simples éléments à deux dimensions tel qu'un triangle, rectangle et quadrilatérale... etc., qui sont collectés les uns aux autres par des nœuds sur leurs périphériques, figure (13.1a).

Capacité de représenter le domaine de forme irrégulière, par collection d'éléments finis fait de la méthode un outil pratique très valable pour la résolution des problèmes de conditions aux limites de valeur limitée, qui sont rencontrés dans plusieurs domaines de l'ingénieur.

Maintenant, dans la suite nous traitons le concept de la méthode d'éléments finis par ces formulations théoriques.

3.3. Formulation variationnelle :

L'analyse des éléments finis est un peu compliquée, par le fait que les problèmes à deux dimensions sont décrits par des équations aux dérivées

partielles. Le contour Γ du domaine Ω à deux dimensions est en générale une courbe. Cependant, les éléments finis ont des formes géométriques simples que l'on peut utiliser comme une approximation donnée au domaine à deux dimensions. D'autre part, pour les problèmes à 2D, on ne cherche pas uniquement l'approximation de la solution pour les équations aux dérivées partielles données, mais on approxime aussi le domaine donné par un maillage convenable en éléments finis [9].

Par conséquent, on va obtenir une bonne approximation de l'erreur (due à l'approximation de la solution) comme l'erreur de la discrétisation (due à l'approximation du domaine) dans l'analyse des problèmes des éléments finis à deux dimensions. Le maillage des éléments finis concerne les éléments simples 2D tels que les quadrilatères qu'ils soient connectés entre eux par des points nodaux sur le contour de l'élément. La possibilité de représenter la géométrie du domaine par la collection des éléments finis rend la méthode valable et pratique et un outil pour la résolution des problèmes aux valeurs aux limites [2], [8], [9], [10], [11], [12].

Le problème que nous allons considérer, dans cette formulation c'est la résolution de l'équation de Prandtl. C'est une équation différentielle de second d'ordre linéaire de type elliptique associée avec des conditions aux limites du 1^{er} type dites de Dirichlet dans un domaine arbitraire plan $\Omega(x,y)$ de frontière

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad ; \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.1)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$M_t = 2 \int \Phi(x,y) dx dy \quad (3.3)$$

Le plan rapporté à la section est celui (xGy)

Pour résoudre un problème posé par la torsion, il suffit de calculer les valeurs des quatre inconnues Φ , τ_{xy} , τ_{xz} et θ , à l'aide des équations (3.1), (3.2) et (3.3).

Par la suite, Prandtl a introduit le concept selon lequel on pouvait résoudre les problèmes posés par la torsion en calculant la valeur d'une seule inconnue, appelée '*fonction de contraintes*' $\Phi(x, y)$. Cette fonction est différentiable et elle est associée aux contraintes suivant les relations (3.2) [29].

Si on pose que $\Phi = 2G\theta u$ dans l'équation (3.1), on aura la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \quad ; \quad u=0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.4)$$

Avec $a=-1$

et

$$\frac{\tau_{xz}}{M_t} = \frac{2}{C} \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\tau_{yz}}{M_t} = -\frac{2}{C} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\theta = \frac{M_t}{G C} \quad (3.6)$$

Avec

$$C = 4 \int u(x,y) dx dy \quad (3.7)$$

On développe la forme variationnelle de l'équation (3.4) pour un élément typique en multipliant cette équation par une fonction test $v(x, y)$, dont en supposant dérivable une fois par rapport à x et y , et puis on intègre dans le domaine de l'élément (Ω^e) on aura:

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - v a \right] dx dy \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) est la base de la forme variationnelle du modèle en l'élément finis de l'équation (3.4).

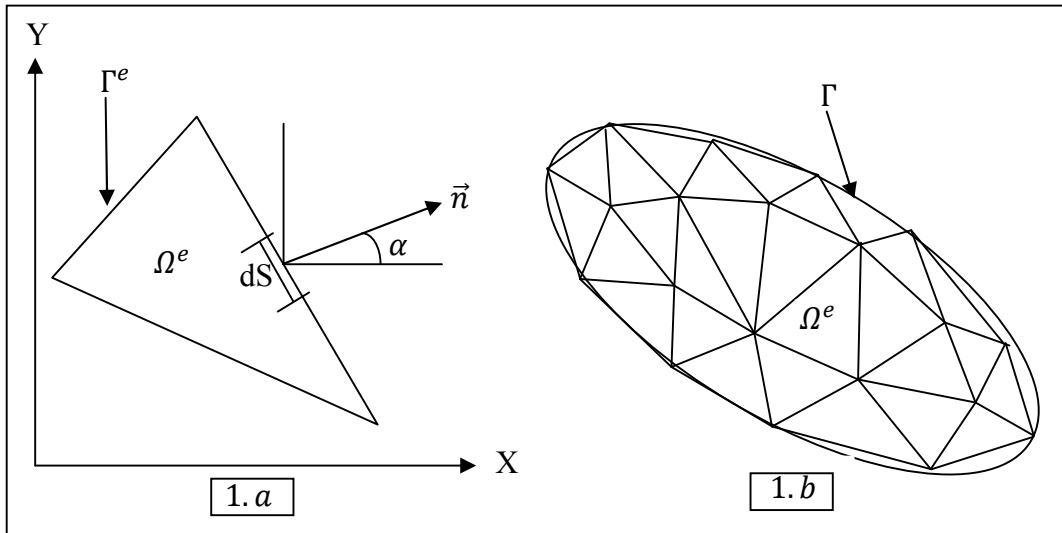


Figure 3.1: Discretisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.

3.4 Formulation en éléments finis :

La forme variationnelle de l'équation (4) indique que l'approximation de u choisie doit être au moins bilinéaire en x et en y . Supposons que u est approximé par l'expression suivante :

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{j=n} u_j N_j(x,y) \quad (3.9)$$

La forme spécifique de $N_j(x,y)$ sera dérivée pour l'élément quadrilatère à 4 nœuds, voir figure 3. Substituons l'équation (3.9) dans la forme variationnelle (3.8) on obtient :

$$\sum_{j=1}^{j=n} K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad (3.10)$$

telle que

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.11)$$

et

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} a N_i dx dy \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

L'équation (3.11) représente le modèle mathématique en éléments finis de l'équation (3.4).

Un examen de la forme variationnelle (3.8) et les matrices de rigidité de l'élément fini dans les équations (3.9) montre que la fonction $N(x, y)$ doit être au moins une fonction bilinéaire en x et en y . Il y a donc une correspondance entre le nombre des nœuds dans l'élément et le nombre des termes utilisés dans l'approximation polynomiale d'une variable dépendante.

Pour les problèmes à deux dimensions, la correspondance entre le nombre de nœuds (qui est égale au nombre de termes d'approximations polynomiales) et le degré de polynôme n'est pas unique. Pour notre cas le polynôme :

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy \quad (3.13)$$

Contient quatre termes (linéairement indépendants) est également linéaire en x et y . Cette approximation nécessite un élément avec quatre nœuds, où on choisit un quadrilatère avec les nœuds à ses sommets.

On peut utiliser l'approximation (3.14) suivante au lieu de l'approximation (3.25). Elle contient aussi quatre constante généralisées et elle est symétrique. Mais pour notre étude on s'intéresse à la relation (3.13).

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 (x^2 + y^2) \quad (3.14)$$

3.4.1. Fonctions d'interpolations :

Nous devons réécrire l'approximation (3.13) telle ce qu'elle satisfait les conditions aux nœuds de sommets de quadrilatère par:

$$\begin{cases} u_1 = u(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 + c_4 x_1 y_1 \\ u_2 = u(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 + c_4 x_2 y_2 \\ u_3 = u(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 x_3 y_3 \\ u_4 = u(x_4, y_4) = c_1 + c_2 x_4 + c_3 y_4 + c_4 x_4 y_4 \end{cases} \quad (3.15)$$

On pose

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, [H] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Soit $[L]=[H]^{-1}$, la matrice inverse de la matrice $[H]$ avec

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Alors la relation (3.9) devient :

$$u(x,y)=[N]\{u\} \quad (3.18)$$

Les fonctions d'interpolations $\{N\}$ dans la relation (3.18) sont alors données par

$$\begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ N_4(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11}+L_{12}x+L_{13}y+L_{14}xy \\ L_{21}+L_{22}x+L_{23}y+L_{24}xy \\ L_{31}+L_{32}x+L_{33}y+L_{34}xy \\ L_{41}+L_{42}x+L_{43}y+L_{44}xy \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

3.4.2 Matrice de rigidité d'un élément quadrilatère :

Le calcul des matrices $[K^{(e)}]$ et le vecteur force $\{F^{(e)}\}$ de l'élément dans l'équation (3.11) se fait en remplaçant la relation (3.19) dans les expressions (3.11) et (3.12) ensuite faire une intégration directe en utilisant les résultats donnés par la relation (3.20) suivante pour un quadrilatère explicitées ci-après.

L'élément quadrilatère est considéré comme l'union de deux triangles comme indique la figure (3.1). Cette considération est faite uniquement pour calculer les intégrales $I_{00}, I_{10}, I_{01}, I_{11}, I_{20}, I_{02}$ ainsi que x_G, y_G d'un quadrilatère.

Les relations concernant I_{mn} ($m=0, 1, 2$), ($n=0, 1, 2$) dans la relation (3.32) ainsi que les valeurs de x_G et y_G d'un triangle quelconque comme nous

montre le triangle numéro (1) dans la figure (3.1) sont présentées dans la référence.

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (m=0, 1, 2) \quad (n=0, 1, 2) \quad (3.20)$$

A l'aide de ces relations, on peut calculer les intégrales ainsi que la position x_G, y_G du centre de gravité de l'élément quadrilatère comme suit.

$$I_{00} = \int dx dy = A = A_{123} + A_{134} \quad (3.21)$$

$$I_{01} = \int x dx dy = A_{123}(x_G)_{123} + A_{134}(x_G)_{134} \quad (3.22)$$

$$I_{10} = \int y dx dy = A_{123}(y_G)_{123} + A_{134}(y_G)_{134} \quad (3.23)$$

$$I_{20} = \int x^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9(x_G)_{123}^2] + \frac{A_{134}}{12} [x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + 9(x_G)_{134}^2] \quad (3.24)$$

$$I_{02} = \int y^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9(y_G)_{123}^2] + \frac{A_{134}}{12} [y_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + 9(y_G)_{134}^2] \quad (3.25)$$

$$I_{11} = \int x y dx dy = \frac{A_{123}}{12} \left[\sum_{j=1}^{j=3} x_j y_j + 9(x_G)_{123}(y_G)_{123} \right] + \frac{A_{134}}{12} [x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 9(x_G)_{134}(y_G)_{134}] \quad (3.26)$$

$$x_G = \frac{A_{123}(x_G)_{123} + A_{134}(x_G)_{134}}{A} \quad (3.27)$$

$$y_G = \frac{A_{123}(y_G)_{123} + A_{134}(y_G)_{134}}{A} \quad (3.28)$$

Tel que:

$(x_G)_{123}, (y_G)_{123}$ représentent les coordonnées du centre de gravité du triangle limité par les nœuds 1, 2 et 3, données par :

$$(x_G)_{123} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad (3.29)$$

$$(y_G)_{123} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \quad (3.30)$$

et

$(x_G)_{134}, (y_G)_{134}$ représentent les coordonnées du centre de gravité du triangle limité par les nœuds 1, 3 et 4 données par :

$$(x_G)_{134} = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4) \quad (3.31)$$

$$(y_G)_{134} = \frac{1}{3}(y_1 + y_3 + y_4) \quad (3.32)$$

A_{123}, A_{134} se sont les aires des surfaces des triangles limité respectivement par les nœuds 1, 2, 3 et 1, 3, 4 comme indique la figure (3.1), données par :

$$A_{123} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)] \quad (3.33)$$

$$A_{134} = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_1)] \quad (3.34)$$

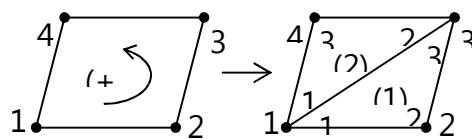


Figure 3.2. Élément quadrilatère a quatre nœuds en décomposition.

Le moment d'inertie polaire I_P de quadrilatère est par conséquent égal à la somme des moments d'inerties par rapport aux axes x et y passant par le centre de gravité de la section. Dans ce cas il faut utiliser la formule de Huygens pour permettre de transformer les moments d'inerties quadratiques d'un axe quelconque à un axe passant par le centre de gravité de la section.

Dans la relation (3.7), la constante de torsion C est égale au moment d'inertie polaire I_P pour une section circulaire et différente pour, une section non circulaire.

En appliquant les équations (3.23) et (3.24), avec les fonctions d'interpolations (3.19). Après une intégration en utilisant les expressions (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26), on aura les résultats suivants:

$$K_{ij} = (L_{2i}L_{2j} + L_{3i}L_{3j})I_{00} + (L_{2i}L_{4j} + L_{2j}L_{4i})I_{01} + (L_{3i}L_{4j} + L_{4i}L_{3j})I_{10} + (L_{4i}L_{4j})I_{02} + (L_{4i}L_{4j})I_{20} \quad (3.35)$$

$$F_i^{(e)} = L_{i1} + I_{00} + L_{i2}I_{10} + L_{i3}I_{01} + L_{i4}I_{11} \quad (3.36)$$

La matrice de rigidité d'un élément quadrilatère est de rang 4×4 et le vecteur force est de rang 4. Pour l'élément fini on aura la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ Sym & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

La matrice de rigidité élémentaire est singulière. On note, que la matrice de rigidité élémentaire doit être singulière.

Un problème est rencontré lors de la détermination des coefficients de la matrice de rigidité. C'est le calcul de la matrice $[L]$ l'inverse de la matrice $[H]$ pour chaque élément fini de maillage. Puisque le rang de cette matrice est petit (égal à 4), le problème est réduit. A titre information, le nombre d'opérations mathématiques que fait la procédure d'inversion d'une matrice d'ordre 4×4 est de l'ordre 300 opérations.

3.4.3. Assemblage des matrices de rigidité élémentaires :

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale $[K]$ et le vecteur global $\{F\}$ du domaine complet à partir des matrices élémentaires $[K^{(e)}]$ et des vecteurs élémentaires $\{f^{(e)}\}$ des éléments finis.

Pour représenter l'assemblage des matrices d'éléments finis, nous illustrons la procédure en considérant que le maillage est construit par deux éléments quadrilatères.

Soient $[K_{ij}^{(1)}]$, $[K_{ij}^{(2)}]$ ($i, j=1, 2, 3, 4$), les coefficients des matrices de rigidité correspondant à ces deux éléments et $\{F_i^{(1)}\}$ et $\{F_i^{(2)}\}$ ($i=1, 2, 3, 4$) les cases de vecteur force des deux éléments respectivement. Le maillage d'éléments finis est présenté dans la figure (3.3).

A partir de ce maillage, nous notons la correspondance entre les valeurs globales et les valeurs nodales d'éléments.

$$u_1=u_1^{(1)}, \quad u_2=u_4^{(1)}, \quad u_3=u_2^{(1)}=u_1^{(2)}, \quad u_4=u_3^{(1)}=u_4^{(2)}, \quad u_5=u_2^{(2)}, \quad u_6=u_3^{(2)} \quad (3.38)$$

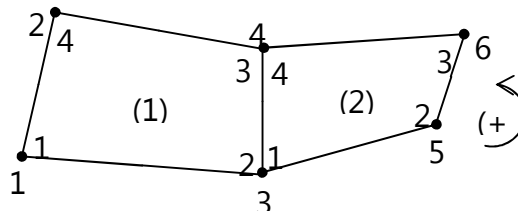


Figure 3.3. Assemblage de deux éléments quadrilatères

Pour l'élément (1) on a :

$$(38) \quad [K^{(1)}] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\ \hline K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ \hline K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ \hline K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\{F^{(1)}\} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline F_1^{(1)} \\ \hline 3 \\ \hline F_2^{(1)} \\ \hline 4 \\ \hline F_3^{(1)} \\ \hline 2 \\ \hline F_4^{(1)} \\ \hline \end{array}$$

Pour l'élément (2) on a :

$$[K^{(2)}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 3 & 5 & 6 & 4 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{11}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{12}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{13}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{14}^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline K_{21}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{22}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{23}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{24}^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline K_{31}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{32}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{33}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{34}^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline K_{41}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{42}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{43}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_{44}^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\{F^{(2)}\} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline F_1^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline F_2^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline F_3^{(2)} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline F_4^{(2)} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

A l'extérieur des matrices de rigidité et vecteurs forces élémentaires des éléments (1) et (2), on voit des chiffres (1, 3, 4, 2) pour l'élément (1) et les chiffres (3, 5, 6 et 4) pour l'élément (2) dans cet ordre comme le montre la figure (3.3). Ces chiffres correspondent à l'emplacement des cases de chaque matrices et vecteur dans la matrice de rigidité et vecteur force globaux du domaine complet. Alors, pour le domaine complet, on aura le résultat suivant :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{24}^{(1)} + K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{44}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

(3.39)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(1)} + F_4^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

La matrice (3.51) représente la matrice de rigidité globale du domaine complet. Elle est de rang 6×6 , vu que le nombre de nœuds dans le domaine est égal à 6. On note ici que chaque nœud contient un seul degré de liberté (une inconnue). L'équation (3.52) représente le vecteur force du domaine complet. Il est de rang 6.

CHAPITRE 4

GENERATION DE MAILLAGE

La mise en œuvre de la méthode des éléments finis nécessite l'utilisation des méthodes numériques puissantes pour résoudre le système algébrique qui en résulte. Ces équations se résolvent dans un domaine discret, en passant d'un milieu continu à un milieu discrétisé. Dans ce paragraphe on traite le problème de la génération de maillage pour les domaines 2D. Donc on va développer une méthode algébrique qui donne un maillage structuré, dont les cellules sont de forme quadrilatères. Il est nommé par maillage type 'H'.

4.1. Procédure de génération de maillage:

On s'intéresse aux domaines de type simplement connexes (2D). La forme générale est représentée dans la figure (4.1).

Pour générer le maillage à l'intérieur de ce domaine, et parmi les plusieurs techniques existantes et suivant la méthode de résolution du système algébrique ainsi que la manière de considérer la forme de la matrice de rigidité, il est très intéressant d'appliquer l'idée de génération de maillage dans les régions rectangulaires pour ce type de problème.

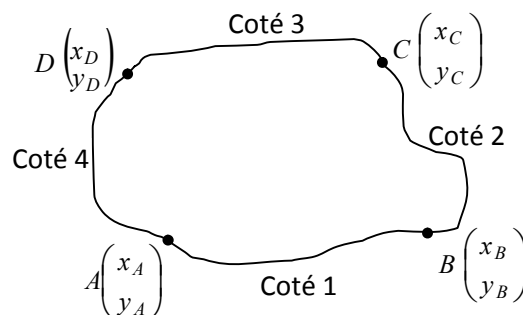


Figure 4.1. Frontière d'un domaine simplement connexe

On obtient par conséquent quatre cotés qui sont respectivement AD , AB , BC et CD . Si on fait des transformations continues à chaque cotés, on peut les rendre des lignes de droites. Considérons la subdivision par N_x et N_y nœuds sur l'axe horizontal des x et vertical des y respectivement.

4.1.1. Génération des nœuds sur la frontière du domaine :

Dans le cas général, il n'est pas facile de procéder à une méthode universelle qui sera appliquée pour n'importe quelles courbes, mais on essaye d'adapter pour chaque forme complexe une procédure convenable. Le choix des points A , B , C et D influe sur la forme des quatre cotés du domaine.

Considérons les cotés AB et CD . On regarde est ce qu'on divise le segment $[x_A, x_B]$ en N_x nœuds ensuite déterminer les y_i ($i=1, 2, \dots, N_x$) correspondantes ou, de diviser le segment $[y_A, y_B]$ en N_x nœuds ensuite déterminer les x_i ($i=1, 2, \dots, N_x$). Pour prendre décision, on essaye de calculer les valeurs suivantes :

$$x_{dis} = |x_B - x_A| \quad ; \quad y_{dis} = |y_B - y_A| \quad (4.1)$$

On calcul la valeur maximale entre x_{dis} et y_{dis} par :

$$d_{max} = \text{Max}(x_{dis}, y_{dis}) \quad (4.2)$$

Si $d_{max} = x_{dis}$ on propose les valeurs des x_i ($i=1, 2, \dots, N_x$) ensuite déterminer les y_i en utilisons la fonction qui passe par les points A et B . On suppose qu'on à fait le choix des x_i ensuite calculer les y_i . Alors, on divise le segment $[x_A, x_B]$ en N_x nœuds dont les points A et B sont inclus. Pour simplifier, on choisi un pas de subdivision constant et si le coté est courbe au voisinage du point A ou B ou n'importe quelle région, il est recommander d'utiliser une procédure de condensation des nœuds, dont on propose sa procédure dans le prochain paragraphe. On obtient, par conséquent (N_x-1) sous intervalles. La longueur de chaque intervalle est donnée par :

$$\Delta x_{AB} = \frac{|x_B - x_A|}{(N_x - 1)} \quad (4.3)$$

Les coordonnées des points de ce coté sont données par :

$$x_{AB}(i) = x_A + (i-1) \Delta x_{AB} \quad i=1, 2, \dots, N_x \quad (4.4)$$

$$y_{AB}(i) = f_{AB}(x_{AB}(i)) \quad i=1, 2, \dots, N_x \quad (4.5)$$

Pour le coté CD et par analogie avec le coté AB , on aura les résultats suivants :

$$\Delta x_{CD} = \frac{x_C - x_D}{(N_x - 1)} \quad (4.6)$$

$$x_{DC}(i) = x_D + (i-1) \Delta x_{CD} \quad i=1, 2, \dots, N_x \quad (4.7)$$

$$y_{DC}(i) = f_{DC}(x_{DC}(i)) \quad i=1, 2, \dots, N_x \quad (4.8)$$

où $f_{DC}(x)$ st la fonction du coté DC

La génération des nœuds sur les contours AD et BC se fait de la même démarche que celle des cotés AB et DC . On aura pour le coté AD :

$$\Delta x_{AD} = \frac{x_A - x_D}{(N_y - 1)} \quad (4.9)$$

$$x_{AD}(j) = x_D + (j-1) \Delta x_{DC} \quad j=1, 2, \dots, N_y \quad (4.10)$$

$$y_{AD}(j) = f_{AD}(x_{AD}(j)) \quad j=1, 2, \dots, N_y \quad (4.11)$$

Pour le coté BC on aura:

$$\Delta y_{BC} = \frac{x_B - x_C}{(N_y - 1)} \quad (4.12)$$

$$x_{BC}(j) = x_C + (j-1) \Delta y_{BC} \quad j=1, 2, \dots, N_y \quad (4.13)$$

$$y_{BC}(j) = f_{BC}(x_{BC}(j)) \quad j=1, 2, \dots, N_y \quad (4.14)$$

Finalement, on obtient un schéma comme de la figure 5. L'exemple présenté est pour $N_x=10$ et $N_y=6$.

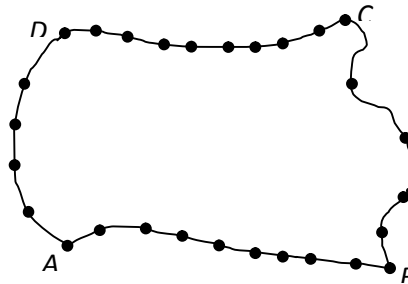


Figure 4.2. Génération des nœuds sur la frontière du domaine

4.1.2. Fonction de condensation :

La fonction de condensation 1D est utilisée pour distribuer des points le long d'une frontière où une région d'un domaine nécessite une résolution précise. Dans ce cas, le gradient de la solution est fort.

Si la fonction de condensation est appliquée sur le côté EA dans la figure (4.3), la variable indépendante normalisée est donnée par :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \quad (4.15)$$

avec : $0 \leq \eta^* \leq 1$ et $\eta_A \leq \eta \leq \eta_E$

où : η peut représenter x ou y

On peut même donner la distribution sur l'intervalle $[0, 1]$ par η^* avec des sous intervalles égaux. La fonction de condensation utilisée est donnée par :

$$s = P \eta^* + (1 - P) \left[1 - \frac{\tanh [Q(1 - \eta^*)]}{\tanh [Q]} \right] \quad (4.16)$$

Une fois on obtient la valeur de s , il est demandé de spécifier la distribution de x et y . Par exemple,

$$x=x_A+s(x_A-x_E) \quad , \quad y=y_A+s(y_A-y_E) \quad (4.17)$$

Pour des valeurs de $P > 1.0$, il est possible de condenser les nœuds vers le point A.

Des distributions typiques des points sur le segment EA pour différentes valeurs de P et Q , sont présentées sur la figure (4.3) suivante :

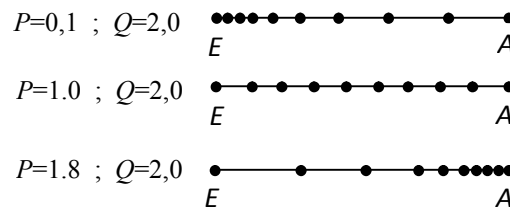


Figure 4.3. Distribution des nœuds selon la relation (4.16)

4.1.3. Génération des nœuds internes :

On procède maintenant à la présentation de la méthode utilisée pour la génération des nœuds internes. La procédure consiste en premier lieu, de déterminer les abscisses x_i de tous les points en ignorant les ordonnées, et cela par une interpolation entre les cotés gauche et droite, voir figure (4.4). On procède par suite à la détermination des ordonnées y_i de ces nœuds par une interpolation entre les cotés bas et haut du domaine, voir figure (4.5). On suivra la même démarche présentée pour la génération des points de la frontière. Les détails de la procédure se trouvent dans la référence.

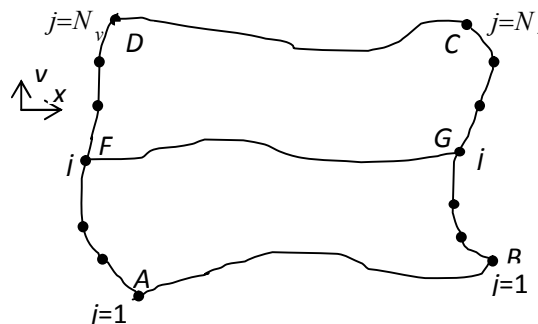


Figure 4.4. Illustration de la procédure de détermination des abscisses.

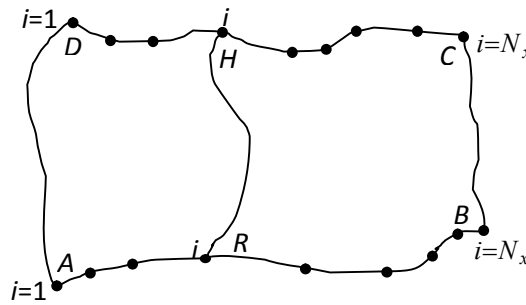


Figure 4.5. Illustration la procédure de détermination les ordonnées

4.2. Numérotation des nœuds :

La numérotation des nœuds joue un rôle très important pour la mémorisation des matrices, surtout, si le rang de la matrice devient de plus en plus élevé. Pour une matrice carré quelconque d'ordre $N \times N$, il faut stocker N^2 cases, ce qui devient impossible pour les valeurs de N élevée. Le besoin en mémoire de l'ordinateur pour notre problème est important, ce qui nous oblige à penser à une technique pour résoudre un système d'équations d'ordre très élevé à fin de faire la résolution du problème physique avec une bonne précision voulue.

Si on regarde le domaine, on peut rendre la matrice de rigidité correspondante pleine de zéro qui se condensent vers une région connue et les éléments non nuls se condensent vers la diagonale principale. Ce que l'on appelle par des matrices bandes. En plus la formulation mathématique en éléments finis donne une matrice symétrique.

Le résultat de l'application des opérations mathématiques entre deux nombres réels, dont l'un est nul est connu au départ sans refaire un calcul par ordinateur. Donc, il n'est pas nécessaire de réserver toute une case pour stocker un zéro. Comme le nombre des zéros peut être important, il reste d'indiquer leurs positions dans la matrice de rigidité. Cette matrice est caractérisée par la valeur de la demi-bande. Le nombre des zéros de la matrice augmente si la valeur de la demi-bande diminue.

Il est à noter qu'on peut trouver dans la partie bande des éléments nuls. Mais si on veut travailler avec les matrices bandes, on ne peut pas éliminer ces éléments de la mémorisation puisque le travail avec ce type de matrice ainsi que la décomposition en deux matrices triangulaires est aussi bandes. On note que si on calcul le nombre des zéros qui se trouvent dans la partie bande, on peut trouver pour certaines numérotation un nombre qui dépasse la moitié ou même 80%.

La demi-largeur de la demi-bande est égale à la différence maximale plus un (problème des intervalles) entre les numéros de deux nœuds d'un même élément, multiplié par le nombre de degré de liberté des nœuds (pour notre cas, chaque nœud contient un degré de liberté). Si on a un domaine plan rectangulaire, formé par NE éléments quadrilatère, la valeur de la demi bande B de la matrice avant l'application des conditions aux limites) est donnée par :

Soit B_L la valeur de la demi-bande donnée par l'élément numéro L suivant. Alors :

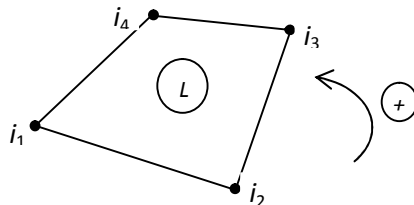


Figure 4.6. Élément Finis quadrilatère à quatre nœuds.

$$B_L = \text{Max}(i_1, i_2, i_3, i_4) - \text{Min}(i_1, i_2, i_3, i_4) + 1 \quad (4.18)$$

Par conséquent, la valeur de B est donnée par :

$$B = \text{Max}(B_1, B_2, B_3, \dots, B_{NE}) \quad (4.19)$$

Considérons un domaine de forme rectangulaire qui sera discrétisé en quinze (15) éléments quadrilatères comme indique la figure suivante :

11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

Figure 4.7. Numérotation des éléments

La numérotation des éléments ne pose aucun problème sur la valeur de la demi-bande de la matrice de rigidité. On considère pour cet exemple deux cas de numérotation des nœuds. Pour chaque cas, on va construire la matrice de rigidité du domaine complet et ça indépendamment des conditions aux limites. Il est à noter que pour cet exemple, le nombre de nœuds est égal à 24, alors la matrice de rigidité $[K]$ est de rang (24×24) .

Cas 1 :

On va numéroté les nœuds suivant l'axe horizontal de gauche vers la droite en montons suivant l'axe vertical des y comme le montre la figure suivante.

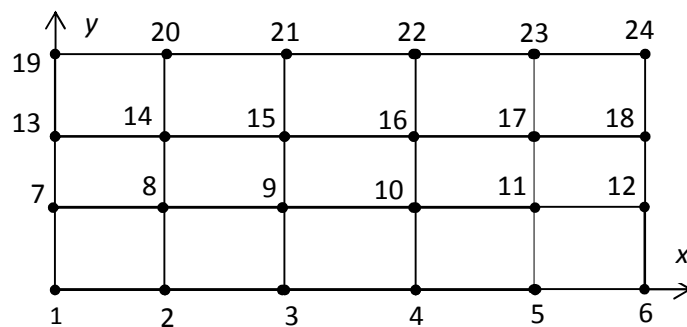


Figure 4.8. Exemple sur la numérotation des nœuds

On trouve dans ce cas $B=8$.

Cas 2 :

On va numéroté maintenant les nœuds suivant l'axe vertical des y de bas en haut en déplacements suivant l'axe horizontal x de gauche vers la droite, voir figure suivante.

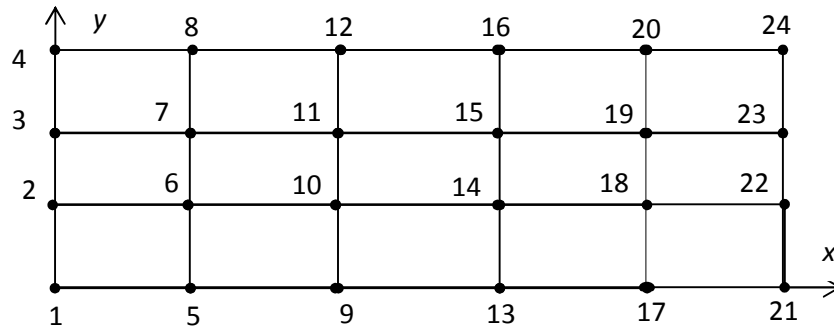


Figure 4.9. Exemple sur la numérotation des nœuds

On peut remarquer dans ce cas que la largeur de la demi-bande est égale $B=6$.

On déduit entre les deux cas de numérotation que le cas 2 correspond à une numérotation optimale pour la quelle les cases non nulles se condensent le plus possible vers la diagonale principale.

4.3. Filtrage des nœuds :

Il est parfois très efficace d'utiliser l'option appelée filtrage des nœuds. Dans certain cas, la taille des cellules de maillage est non homogène. On trouve des cellules de tailles grande et d'autre de taille très petite. Surtout pour les points aux voisinage de la frontière. Pour rendre les tailles des cellules de meme grandeur, on repositionne les points internes de maillage plusieurs fois en utilisant la procédure présentée par la relation (4.20) suivante [1], [8]:

$$\begin{aligned}
 x_i^{\text{nouveau}} &= x_i^{\text{ancien}} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (x_k^{\text{ancien}} - x_i^{\text{ancien}}) \\
 y_i^{\text{nouveau}} &= y_i^{\text{ancien}} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (y_k^{\text{ancien}} - y_i^{\text{ancien}})
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

4.4. Connexion des éléments finis du maillage :

Après faire la discrétisation du domaine en petits éléments, on obtient un ensemble de points et éléments finis. Chaque élément contient sa propre matrice de rigidité $[K^{(e)}]$ et vecteur force $\{f^{(e)}\}$. Le problème consiste à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires pour obtenir celle du domaine complet. Pour arriver aux résultats, il faut connaître les numéros des nœuds de chaque élément. Alors, il faut déclarer une matrice d'ordre $(NE \times 4)$. On désigne cette matrice par $NUMNT$. Par exemple, pour les deux cas de numérotations précédents, le vecteur $NUMNT(NE, 4)$ sera rempli de la façon suivante :

- Cas 1
- Cas 2

	1	2	3	4
1	1	2	8	7
2	2	3	9	8
3	3	4	10	9
4	4	5	11	10
5	5	6	12	11
6	7	8	14	13
7	8	9	15	14
8	9	10	16	15
9	10	11	17	16
10	11	12	18	17
11	13	14	20	19

	1	2	3	4
1	1	5	6	2
2	5	9	10	6
3	9	13	14	10
4	13	17	18	14
5	17	21	22	18
6	2	6	7	3
7	6	10	11	7
8	10	14	15	11
9	14	18	19	15
10	18	22	23	19
11	3	7	8	4

12	14	15	21	20	12	7	11	12	8
13	15	16	22	21	13	11	15	16	12
14	16	17	23	22	14	15	19	20	16
15	17	18	24	23	15	19	23	24	20

Les quatre valeurs de chaque ligne du vecteur *NUMNT* représentent les numéros des lignes et des colonnes de la matrice de rigidité globale du domaine complet avant l'application des conditions de aux limites.

4.5. Préparation du système d'équations :

Dans ce paragraphe, on va présenter les étapes nécessaires et la technique développée pour faire la préparation du système d'équations algébriques. Plus précisément la matrice de rigidité $[K]$ globale du domaine complet et le vecteur force $\{f\}$ correspondant. Notre problème ici est de préparer le système d'équations avant et après l'introduction des conditions aux limites, en plus, *sous forme de vecteur*. Le rang de la matrice de rigidité du système avant l'introduction des conditions aux limites est égal à NN , et après l'introduction des conditions aux limites devient $NDDL$ inférieur à NN , diminué par $NDDLE$. On note ici que la matrice de rigidité est singulière et ça avant l'introduction des conditions aux limites et que l'application de ces dernières enlève la singularité de la matrice et elle la rendre régulière. Le problème qui réside ici est que les numéros des lignes et des colonnes à enlevées à la matrice de rigidité avant l'introduction aux limites durant la phase de l'application de ces derniers sont les numéros des nœuds de la frontière du domaine. Pour arriver à l'enlèvement de ces lignes et colonnes, il faut déclarer un vecteur unicolonne de type entier de rang NN , nommé par exemple '*ICL*', afin d'indiquer chaque nœud du domaine par sa présence ou l'absence dans la matrice de rigidité finale par un code. Le code utilisé ici est les deux chiffres 0 et 1.

- Si la case $ICL(I)=1$, alors, le nœud de numéro ' I ' sera présent dans la matrice finale.
- Si la case $ICL(I)=0$, alors, le nœud de numéro ' I ' sera absent dans la matrice finale.

On peut tirer de ce remplissage que le nombre des cases contenant le chiffre '1' est le même pour les deux cas et est égale à 8 pour ces exemples. Ce nombre est celui le rang de la matrice de rigidité finale, après l'application des conditions aux limites.

Après qu'on a fait le remplissage du vecteur ' ICL ', d'où, le connaître les lignes et les colonnes enlevées de la matrice de rigidité durant l'introduction des conditions aux limites, il nous reste de connaître le cas contraire, c'est-à-dire, le numéro du nœud dans le maillage correspondant à la ligne ou à la colonne de la matrice de rigidité finale. La forme de la matrice de rigidité des deux cas de numérotation après l'introduction des conditions aux limites possède les formes suivantes, et cela près l'enlèvement les lignes et les colonnes possédant les numéros des nœuds de la frontière du domaine. Le rang de la matrice devient (8×8) . On peut regarder exactement les numéros des lignes les colonnes restants comme présente la figure 14. On Aura :

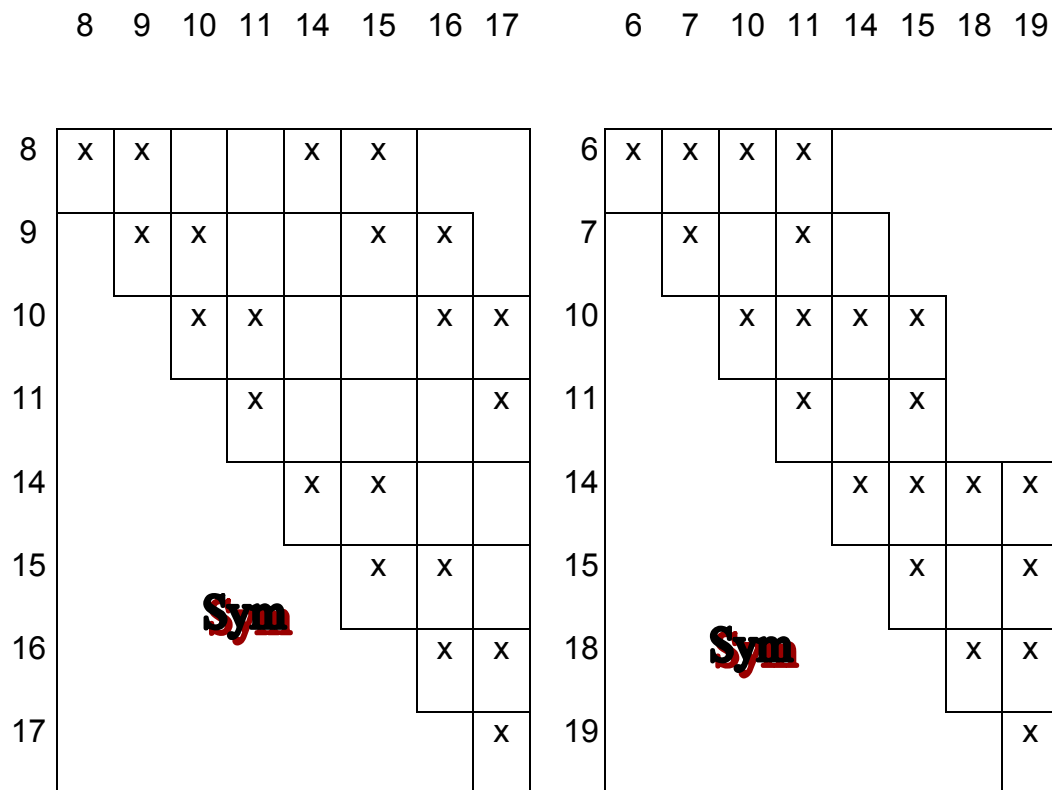
Cas 1Cas 2

Figure 4.10. Formes de la matrice $[K]$ des deux cas de numérotation après l'application des conditions aux limites

Si on fait une petite comparaison sur le changement de la valeur de B du cas 1 et du cas 2, on remarque que la valeur de B est changée. Elle diminue ou reste-la même. Pour le cas 1, la nouvelle valeur devient 6. Pour le cas 2, elle devient 4.

CHAPITRE 5

FORMULATION NUMERIQUE ET PROGRAMMATION

Cette partie de notre modeste travail est consacrée à la résolution du problème numériquement.

5.1. Remarques préliminaires:

- Le programme proposé est conçu spécialement surtout pour un cadre de discrétisation élevée.
- L'élément fini utilisé dans le programme est un triangle linéaire à trois (3) nœuds.
- Le travail a été limité pour des matrices $[K]$ symétriques et bandes. Ces deux propriétés nous ont conduit à stocker la partie supérieure (ou inférieure) de la matrice en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieure de la bande, dans un vecteur uni colonne (ou uni-ligne), qui donne l'équivalence des cases pour la matrice $[K]$ dans le vecteur $\{vk\}$ qui représente la matrice de rigidité fictive.

La méthode de calcul est simple et consiste à donner à chaque fois qu'on tombe dans une case de la matrice $K(i, j)$, sa position dans le vecteur $\{vk\}$ à partir d'une certaine formule qui varie avec la façon de stockage .

Si une fois on tombe dans une case $K(i, j)$ au dessus de la diagonale (dans la partie supérieure) mais à l'extérieure de la bande, le calcul sera ignoré puisque cette case est réellement nulle et elle ne présente aucun changement de résultat d'addition, puisque on connaît au départ sans calcul, le résultat des opérations (d'addition, soustraction, multiplication, division et autres opérations de fonctions) d'un nombre quelconque avec le zéro.

Si une fois on tombe dans une case $K(i, j)$ au dessous de la diagonale (dans la partie inférieure), il suffit uniquement d'utiliser la propriété $K(i, j)=K(j, i)$ (puisque dans le programme on a choisi le stockage de la partie

supérieure) et le traitement se fait comme une case $K(i, j)$ avec les deux cas précédents.

5.2. Méthodes de stockage sous forme de vecteur :

Considérons une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique et bande avec la largeur de la demi-bande est B . Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur $\{vk\}$. Il est parfois plus difficile de faire une équivalence entre une case de la matrice $[K]$ et la case de vecteur $\{vk\}$, ce qui a supposé plusieurs formes de stockages (ou même infini) sous la forme de vecteur. Ces formes de stockages sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence. On va proposer cinq (05) formes de stockages en prenant une matrice $[K]$ d'ordre (7×7) symétrique et sa bande B est égale a 4 et cela pour fixé les idées [10], [19], [24], [28], [30], [32], [33], [34], [35], [36], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [62], [63].

5.2.1. Stockage en colonne :

La méthode de stockage choisie est représenté par la direction des flèches, c'est-à-dire, colonne par colonne, comme le montre la figure 5.1:

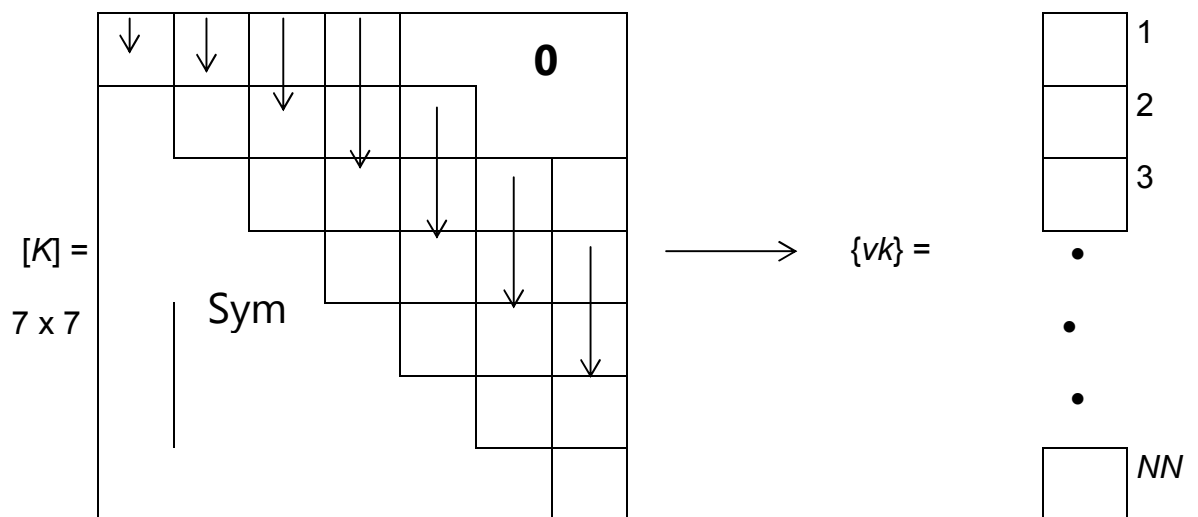


Figure 5.1 : Stockage en colonne

$$\begin{array}{llll}
 vk(1)=K(1,1) & vk(2)=K(1,2) & vk(3)=K(2,2) & vk(4)=K(1,3) \\
 vk(5)=K(2,3) & vk(6)=K(3,3) & vk(7)=K(1,4) & vk(8)=K(2,4)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
vk(9) &= K(3,4) & vk(10) &= K(4,4) & vk(11) &= K(2,5) & vk(12) &= K(3,5) \\
vk(13) &= K(4,5) & vk(14) &= K(5,5) & vk(15) &= K(3,6) & vk(16) &= K(4,6) \\
vk(17) &= K(5,6) & vk(18) &= K(6,6) & vk(19) &= K(4,7) & vk(20) &= K(5,7) \\
vk(21) &= K(6,7) & vk(22) &= K(7,7) & & & &
\end{aligned}$$

On peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ est égale à 22, c'est à dire $NN = 22$.

Maintenant si on veut généraliser à une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique avec largeur de la demi-bande égale à B

$$NN = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (N-B) \cdot B$$

$$= \sum_{i=1}^{i=B} i + B \cdot (N-B)$$

comme $\sum_{i=1}^{i=B} i = \frac{B(B+1)}{2}$ suite arithmétique de raison unité, alors :

$$NN = \frac{B(B+1)}{2} + (N-B) \cdot B$$

donc :

$$NN = \frac{B(2N-B+1)}{2} \quad (5.1)$$

On peut vérifier la validité de cette formule pour l'exemple précédant :

$$\begin{cases} N=7 \\ B=4 \end{cases} \rightarrow NN = \frac{4(2 \times 7 - 4 + 1)}{2} = 22$$

On procède maintenant à la détermination de la formule de stockage des éléments de la matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure uniquement) dans le vecteur $\{vk\}$, c'est-à-dire, l'équivalence d'une case de la matrice $[K]$ dans le vecteur $\{vk\}$. Pour trouver la formule de récurrence, on divise la matrice $[K]$ en deux blocs.

- ❖ Pour une case $K(i, j)$, telle que $j \leq B$, son équivalence (position) dans le vecteur $\{vk\}$ est $vk(L)$ avec :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j-1) + i = \frac{(j-1)j}{2} + i$$

alors

$$L = \frac{(j-1)j}{2} + i \quad \text{si } j \leq B \quad (5.2)$$

On peut remarquer que le nombre $(j-1)j$ est un nombre paire.

- ❖ Pour une case $K(i, j)$, telle que $j > B$, son équivalence (position) dans le vecteur $\{vk\}$ est $vk(L)$ est donnée par :

$$L = 1+2+3+\dots+B+(j-B-1)B+i-(j-B) = i-j + \frac{B(1-B+2j)}{2}$$

alors :

$$L = i - j + \frac{B(1-B+2j)}{2} \quad \text{si } j > B \quad (5.3)$$

Remarque :

- Pour la formule (5.2), le compteur 'i' varie de $1 \leq i \leq j$.
- Pour la formule (5.3), le compteur 'i' varie de $j - (B-1) \leq i \leq j$.
- La fonction $L(i, j)$ est continue au point $j = B$, c'est-à-dire, pour $j = B$ on peut appliquer n'importe quelle formules (5.2) ou (5.3).
- Pour les formes suivantes, on va seulement donner les formules de récurrences de stockage sans détailler les calculs.

5.2.2. Stockage en diagonal :

La matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure) sera transférée diagonalement dans le vecteur $\{vk\}$ par:

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = \sum_{p=1}^{p=j-i} (N+1-p) + i = \frac{1}{2} (j-i) (2N-j+i+1) + i \quad (5.4)$$

avec $\begin{cases} j=1, 2, 3, \dots, B \\ i=j, 2, 3, \dots, B \end{cases}$ et $\begin{cases} j=B+1, B+2, \dots, N \\ i=j-B, j-B+1, \dots, j \end{cases}$

L'exemple suivant pour une matrice d'ordre (7 x 7) illustre schématiquement le transfert des cases entre la matrice et le vecteur correspondant.

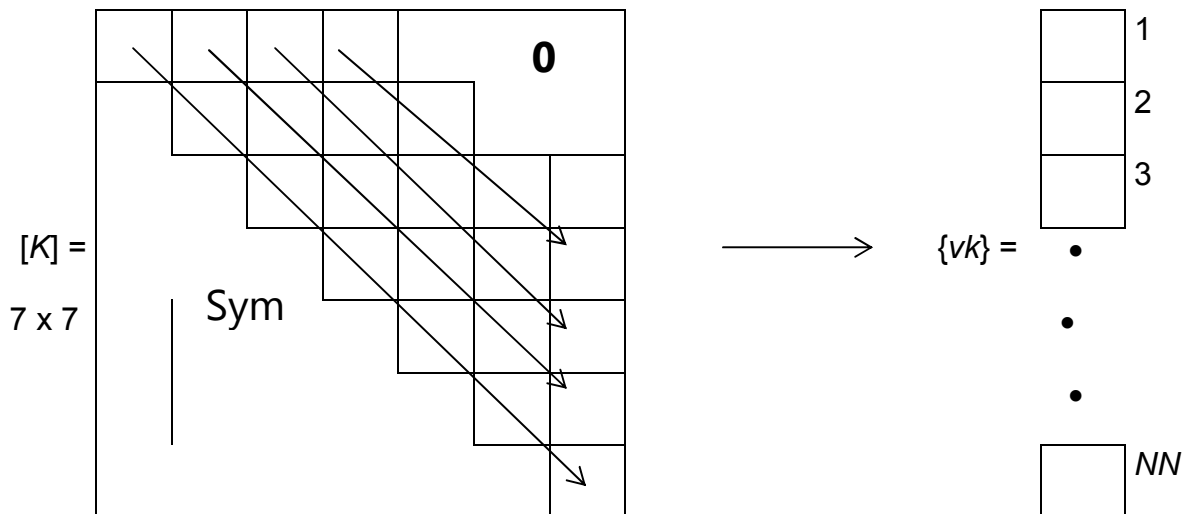


Figure 5.2 : Stockage en diagonal

La dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ est donnée toujours par la formule (5.1). Si on applique la formule (5.4) à cette matrice d'ordre (7x7) et $B=4$ pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{array}{llll} vk(1)=K(1,1) & vk(2)=K(2,2) & vk(3)=K(3,3) & vk(4)=K(4,4) \\ vk(5)=K(5,5) & vk(6)=K(6,6) & vk(7)=K(7,7) & vk(8)=K(1,2) \\ vk(9)=K(2,3) & vk(10)=K(3,4) & vk(11)=K(4,5) & vk(12)=K(5,6) \\ vk(13)=K(6,7) & vk(14)=K(1,3) & vk(15)=K(2,4) & vk(16)=K(3,5) \\ vk(17)=K(4,6) & vk(18)=K(5,7) & vk(19)=K(1,4) & vk(20)=K(2,5) \\ vk(21)=K(3,6) & vk(22)=K(4,7) & & \end{array}$$

5.2.3. Stockage en ligne :

La matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure) sera transférée ligne par ligne dans le vecteur $\{vk\}$ par:

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = (i - 1) B + j + i + 1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=1, 2, 3, \dots, N-B \\ j=i, i+1, \dots, i+B-1 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$L = \frac{B}{2} (2N - B + 1) - \frac{1}{2} (N - i) (N - i + 1) - N + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=N-B+1, \dots, N \\ j=i, i+1, \dots, N \end{cases} \quad (5.6)$$

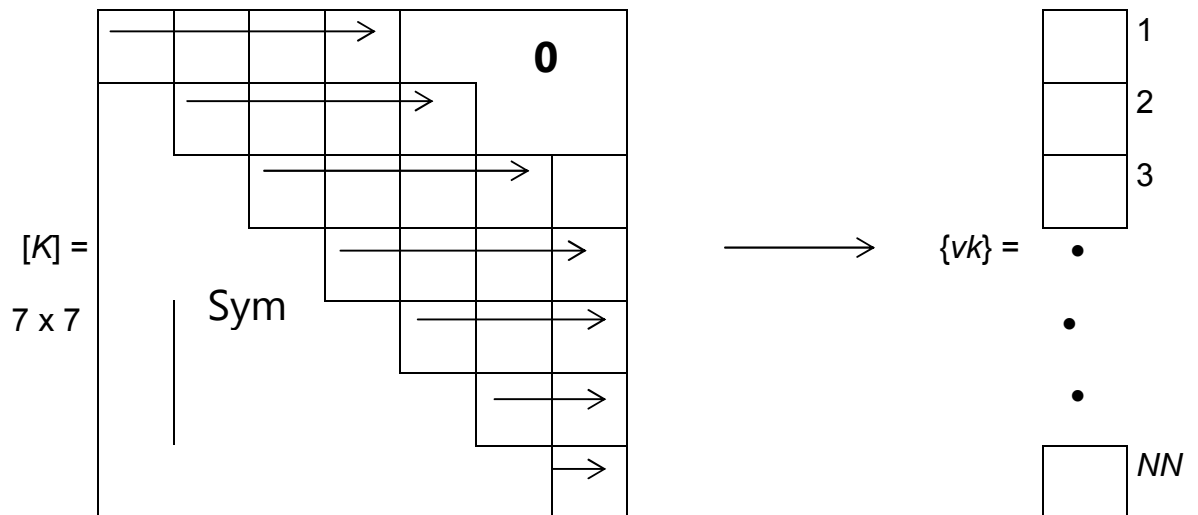


Figure 5.3 : Stockage en ligne

La dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ est donnée toujours par la formule (5.1).

Si on applique les deux formules (5.5) et (5.6) à cette matrice d'ordre (7×7) et $B=4$, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{array}{llll} vk(1)=K(1,1) & vk(2)=K(1,2) & vk(3)=K(1,3) & vk(4)=K(1,4) \\ vk(5)=K(2,2) & vk(6)=K(2,3) & vk(7)=K(2,4) & vk(8)=K(2,5) \\ vk(9)=K(3,3) & vk(10)=K(3,4) & vk(11)=K(3,5) & vk(12)=K(3,6) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 vk(13) &= K(4,4) & vk(14) &= K(4,5) & vk(15) &= K(4,6) & vk(16) &= K(4,7) \\
 vk(17) &= K(5,5) & vk(18) &= K(5,6) & vk(19) &= K(5,7) & vk(20) &= K(6,6) \\
 vk(21) &= K(6,7) & vk(22) &= K(7,7).
 \end{aligned}$$

5.2.4. Stockage en ligne de serpent :

La matrice $[K]$ (les éléments de la bande supérieure) sera transféré ligne par ligne alternativement dans le vecteur $\{vk\}$ comme le présente la figure 5.4 suivante. Pour une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ on a :

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$\begin{aligned}
 L &= (i-1)B + (-1)^{i-1} (j-i+1) + \left(i+1 - 2 \operatorname{Int}\left(\frac{i}{2}\right) \right) (B+1) \\
 \text{si } & \begin{cases} i=1, 2, \dots, N-B \\ j=i, i+1, \dots, i-B-1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

et

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{B}{2} (2N-B+1) - \frac{1}{2} (N-i) (N-i+1) - N + j + \left[i+1 - 2 \operatorname{Int}\left(\frac{N}{2}\right) \right] (N-2j+i) \\
 \text{si } & \begin{cases} i=N-B+1, \dots, N \\ j=i, i+1, \dots, N \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

avec $\operatorname{Int}(x)$: Veut dire la partie entière d'un nombre fractionnaire.

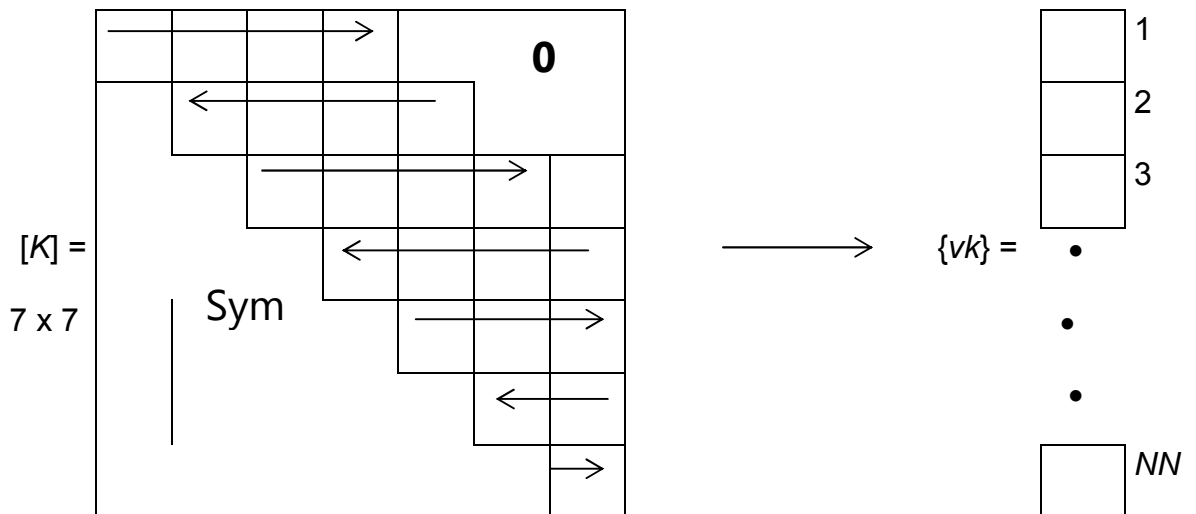


Figure 5.4 : Stockage en ligne de serpent

De même la dimension du vecteur $\{vk\}$ est donnée par la formule (5.1). Si on applique les deux formules (5.7) et (5.8) à cet exemple pour $N=7$, $B=4$, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 vk(1) &= K(1,1) & vk(2) &= K(1,2) & vk(3) &= K(1,3) & vk(4) &= K(1,4) \\
 vk(5) &= K(2,5) & vk(6) &= K(2,4) & vk(7) &= K(2,3) & vk(8) &= K(2,2) \\
 vk(9) &= K(3,3) & vk(10) &= K(3,4) & vk(11) &= K(3,5) & vk(12) &= K(3,6) \\
 vk(13) &= K(4,7) & vk(14) &= K(4,6) & vk(15) &= K(4,5) & vk(16) &= K(4,4) \\
 vk(17) &= K(5,5) & vk(18) &= K(5,6) & vk(19) &= K(5,7) & vk(20) &= K(6,7) \\
 vk(21) &= K(6,6) & vk(22) &= K(7,7)
 \end{aligned}$$

5.2.5. Stockage en escalier :

Le schéma de transfert des éléments de la matrice $[K]$ se fait comme indique la figure 5.5 suivante pour $N=7$ et $B = 5$. Pour une matrice d'ordre $(N \times N)$ avec une bande B , le transfert des éléments se fait par la formule de récurrence suivante :

$$vk(L) = K(i, j) \quad \text{par :}$$

$$L = (i-1) \frac{(2N-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=1, 2, 3, \dots, B \\ j=i, i+1, \dots, B \end{cases} \quad (5.9)$$

et

$$L = (B-j+i-1) \frac{(2N-B+j-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, N \\ j=B+1, B+2, \dots, i+B-1 \end{cases} \quad (5.10)$$

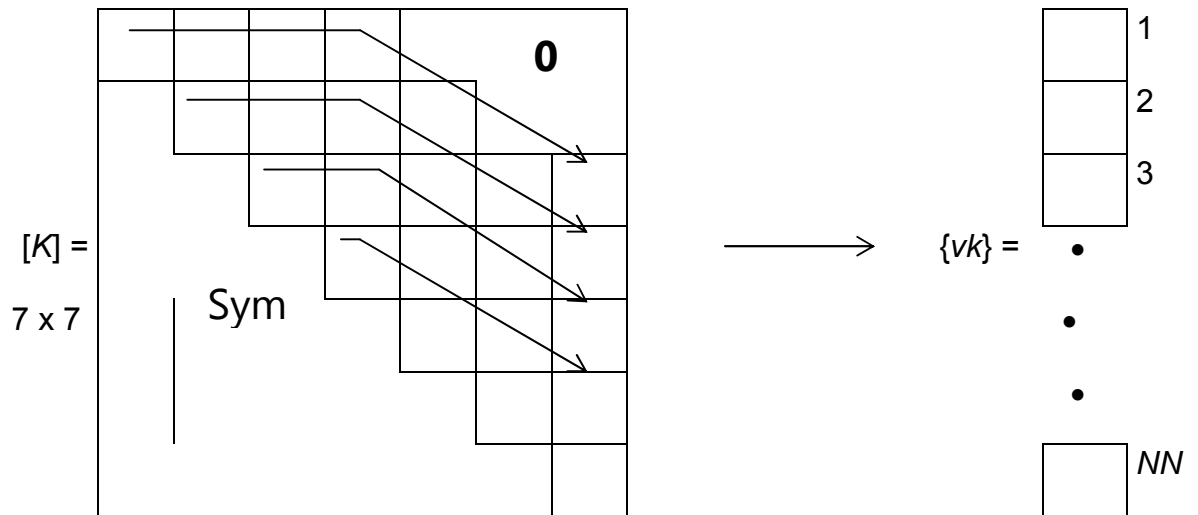


Figure 5.5 : Stockage en escalier

Pour bien voir le transfert des éléments, voici la correspondance :

$$\begin{aligned}
 vk(1) &= K(1,1) & vk(2) &= K(1,2) & vk(3) &= K(1,3) & vk(4) &= K(1,4) \\
 vk(5) &= K(2,5) & vk(6) &= K(3,6) & vk(7) &= K(4,7) & vk(8) &= K(2,2) \\
 vk(9) &= K(2,3) & vk(10) &= K(2,4) & vk(11) &= K(3,5) & vk(12) &= K(4,6) \\
 vk(13) &= K(5,7) & vk(14) &= K(3,3) & vk(15) &= K(3,4) & vk(16) &= K(4,5) \\
 vk(17) &= K(5,6) & vk(18) &= K(6,7) & vk(19) &= K(4,4) & vk(20) &= K(5,5) \\
 vk(21) &= K(6,6) & vk(22) &= K(7,7)
 \end{aligned}$$

Remarques :

La méthode de stockage des matrices bandes sous forme de vecteur nous fait gagner en espace mémoire l'ordre suivant :

Pour une matrice [K] d'ordre ($N \times N$), symétrique et bande, on a :

$$NDCE = N \times N - NN = N^2 - \frac{B(2N - B + 1)}{2}$$

avec $NDCE$: Nombre De Case Eliminés

Au lieu de stocker N^2 cases dans la mémoire de l'ordinateur, on stocke uniquement NN cases. Pour voir un ordre sur les valeurs de $NDCE$ et NN , on propose les exemples suivants :

- $N = 100$

B	N^2	NN	$NDCE$	Pourcentage des cases gagnées
100	10000	5050	4950	$\approx 49,50 \%$
70	10000	4585	5415	$\approx 54,15 \%$
35	10000	2905	7095	$\approx 70,95 \%$
10	10000	955	9045	$\approx 90,45 \%$
2	10000	199	9801	$\approx 98,01 \%$

- $N = 5000$

B	N^2	NN	$NDCE$	Pourcentage des cases gagnées
480	25000000	2285040	22714960	$\approx 90,85 \%$
270	25000000	1313685	23686315	$\approx 94,74 \%$
150	25000000	738825	24261175	$\approx 97,04 \%$
70	25000000	347585	24652415	$\approx 98,60 \%$

- $N = 100000$

B	N^2	NN	$NDCE$	Pourcentage des cases gagnées
480	10^{10}	47885040	9952114960	$\approx 99,52 \%$
270	10^{10}	269636685	9973036315	$\approx 99,73 \%$
150	10^{10}	14988825	9985011175	$\approx 99,85 \%$
70	10^{10}	6997585	9993002415	$\approx 99,93 \%$

Il est bien clair d'après ces exemples que plus la largeur de la demi bande est petite plus le nombre des cases gagnées augmente rapidement, ce qui veut dire que, durant la numérotation des nœuds du maillage généré, il est important de choisir celle qui donne la bande minimale, ce que l'on appelle par numérotation optimale.

On peut démontrer que toute régions plane ou surfacique peut être transformée ou considérée comme un carré ou rectangle. Le maillage généré est appelé maillage de type H. Pour un carré, considérons N_x nœuds suivants l'axe horizontale x et N_y nœuds suivant l'axe verticale y .

Alors le nombre des nœuds totale N et donné par :

$$N = N_x \cdot N_y$$

On suppose que $N_x \leq N_y$. Si $N_y > N_x$, il suffit uniquement de permuter les axes de coordonnées.

On peut démontrer que le nombre des nœuds restant après l'entrée des conditions aux limites (si ces dernières sont de type Dirichlet) c'est-à-dire l'ordre de la matrice $[K]$ pour la résolution est donnée par

$$N = N_x \cdot N_y - 2 N_x - 2 N_y + 4 \quad (5.11)$$

Dans ce cas, la largeur optimale de la demi-bande B est donnée par :

$$B \leq N + 2 - 1 + 1$$

ou

$$B \leq N_x + 2 \quad \text{Puisque on a supposé que } N_x \leq N_y$$

Dans ce cas la dimension nécessaire du vecteur $\{vk\}$ pour le cas le plus défavorable est donnée par :

$$B_{\max} = N_x + 2$$

Pour bien voir l'ordre de la dimension, ainsi que le pourcentage des cases gagnés, on considère l'exemple suivant:

- $N_y = 100$

N_x	B_{\max}	N	NN	$NDCE$	Pourcentage des cases gagnées
100	102	9604	974457	91262359	$\approx 98,94 \%$
80	82	7644	623487	57807249	$\approx 98,93 \%$
50	52	4704	243282	21884334	$\approx 98,90 \%$
30	32	2744	87312	7442224	$\approx 98,84 \%$
10	12	784	9342	605314	$\approx 98,48 \%$
3	5	98	480	9124	$\approx 95,00 \%$

On remarque bien que le nombre de cases gagnés dans les cas les plus défavorables dépasse 90% de la méthode classique de stockage complet. Donc on a bien vu l'intérêt pratique de la technique de la matrice bande. Après avoir résolu le problème de stockage, on va procéder maintenant à la description qualitative des méthodes de résolution d'un système adapté pour des matrices bandes, stockées sous forme d'un vecteur.

5.3. Algorithmes de résolution de système d'équations :

On a amené à résoudre le problème après avoir rempli la matrice de rigidité $[K]$ globale et le vecteur $\{F\}$ afin de déterminer le vecteur $\{u\}$ de solution à un système d'équations suivant [16], [19], [20], [28] [30], [33], [34], [36], [48], [49], [52], [53], [54]:

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (5.12)$$

On a choisi deux méthodes pour la résolution numérique de ce système d'équations.

5.3.1. Méthode de Khaletski :

Supposons dans la première étape que la matrice $[K]$ est carré mais pleine et quelconque. Après avoir présenté l'algorithme de résolution, en essaye de faire l'extension vers une matrice pleine mais symétrique, et dans la dernière étape en déduit l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et bande [19], [63].

➤ $[K]$ matrice carré pleine quelconque [19], [20], [21]

Mettons la matrice $[K]$ sous la forme d'un produit de deux matrices triangulaires inférieure $[L] = [L_{ij}]$ et de la matrice triangulaire supérieure $[H] = [H_{ij}]$ à diagonale unité, c'est-à-dire :

$$[K] = [L] [H] \quad (5.13)$$

où :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ L_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \cdot & \cdot & H_{1N} \\ & 1 & H_{23} & \cdot & \cdot & H_{2N} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & H_{3N} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments L_{ij} et H_{ij} se calculent d'après les formules suivantes:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= K_{11} \quad , \quad H_{1j} = \frac{K_{1j}}{L_{11}} \quad j=2, 3, \dots, N \\ L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} H_{mj} \quad j=1, 2, 3, \dots, i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left(K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} H_{mj} \right) \quad j=i+1, i+2, i+3, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (5.14)$$

On aura par suite deux systèmes d'équations à matrice triangulaire

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad \rightarrow \quad [L][H] \{u\} = \{F\}$$

on pose

$$[H]\{u\}=\{y\} \quad (5.15)$$

alors

$$[L]\{y\}=\{F\} \quad (5.16)$$

La résolution de système (5.16) en suite (4-15) se fait par les procédures suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} y_m \right) \end{cases} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (5.17)$$

et

$$\begin{cases} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \sum_{m=i+1}^{m=N} H_{im} u_m \end{cases} \quad i=N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \quad (5.18)$$

- $[K]$ matrice carrée pleine et symétrique [19], [20], [21]:

Si la matrice $[K]$ est symétrique, c'est-à-dire, si $K_{ij}=K_{ji}$ ce qui est le cas. Alors, on peut démontrer que:

$$H_{ij} = \frac{L_{ji}}{L_{ii}} \quad (5.19)$$

La propriété (5.19) nous a permet de ne pas déclarer la matrice $[H]$ dans la mémoire de l'ordinateur et de calculer uniquement les éléments de la matrice $[L]$, ce qui engendre un gain d'espace mémoire en plus. L'algorithme présenté par les formules (5.14), (5.17) et (5.18) se simplifié à :

$$\begin{aligned} &L_{11} = K_{11} \\ &\left\{ \begin{array}{l} L_{11} = K_{11} \\ L_{ij} = K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} \frac{L_{jm}}{L_{mm}} \end{array} \right\} \quad j=1, 2, 3, \dots, i \quad i=2, 3, \dots, N \quad (5.20) \end{aligned}$$

Remarque :

- La matrice $[L]$ qui vient de la décomposition de la matrice $[K]$ possède la même structure que $[K]$ sauf qu'elle est triangulaire. Après l'élimination des opérations sur les zéros (les éléments à l'extérieur de la bande), la formule de décomposition (5.20) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=1}^{r=j-1} L_{ir} \frac{L_{jr}}{L_{rr}} \\ L_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=i-B+1}^{r=j-1} L_{ir} \frac{L_{jr}}{L_{rr}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i=1, 2, 3, \dots, B \\ j=2, 3, \dots, i \\ i=B+1, B+2, \dots, N \\ j=i-B+1, \dots, i \end{array} \right. \quad (5.24)$$

De la même manière les formules (5.21), et (5.22) deviennent respectivement de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{r=1}^{r=i-1} L_{ir} y_r \right) \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{r=i-B+1}^{r=i-1} L_{ir} y_r \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i=2, 3, \dots, B \\ i=B+1, \dots, N \end{array} \right. \quad (5.25)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^{r=N} L_{ri} u_r \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^{r=i+B-1} L_{ri} u_r \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i=N-1, N-2, \dots, N-B+1 \\ i=N-B, N-B-1, \dots, 3, 2, 1 \end{array} \right. \quad (5.26)$$

5.3.2. Méthode de Cholesky :

Dans le cas d'une matrice indéfinie, la matrice $[K]$ symétrique peut être décomposée sous la forme suivante [19], [20], [21]:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (5.27)$$

avec :

$[L]$: Matrice triangulaire inférieure (les éléments au-dessous de la diagonale sont non nuls) avec diagonale unité.

$[D]$: Matrice diagonale avec les éléments Pivots $d_{ii} \neq 0$

$[L]^T$: La transposée de la matrice $[L]$

Sous la forme matricielle :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & & \vdots & \vdots \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ L_{N1} & L_{N2} & L_{N3} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & d_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{NN} \end{bmatrix}$$

Les équations donnant les éléments de $[L]$ et $[D]$ sont données par:

$$\sum_{r=1}^{r=\min(i,j)} d_{rr} L_{ri} L_{rj} = K_{ij} \quad \begin{cases} i=1, 2, 3, \dots, N \\ j=1, 2, 3, \dots, i \end{cases} \quad (5.28)$$

Remarque :

L'algorithme de Cholesky devient celui de Khaletski si on pose :

$$\begin{aligned} [L][D] \text{ de Cholesky} &= [L] \text{ de Khaletski} \\ [L]^T \text{ de Cholesky} &= [H] \text{ de Khaletski} \end{aligned}$$

On présente uniquement l'algorithme de factorisation de la matrice $[K]$ (symétrique et pleine) sans calculer le vecteur $\{u\}$ et sans le faire pour la matrice bande.

- Algorithme I :

Cet algorithme est conçu si la matrice $[K]$ n'est pas forcément définie positive. On obtient $\frac{N(N+1)}{2}$ équations résultantes à partir de la décomposition.

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= K_{11} \\
 L_{j1} &= \frac{K_{j1}}{d_{11}} \quad j=2, 3, \dots, N \\
 d_{ii} &= K_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} d_{rr} L_{ri}^2 \\
 L_{ji} &= \frac{1}{d_{ii}} \left(K_{ji} - \sum_{r=1}^{i-1} d_{rr} L_{ri} L_{rj} \right) \quad j=i+1, i+2, \dots, N
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} d_{11} \\ L_{j1} \\ d_{ii} \\ L_{ji} \end{aligned}} \right\} i=2, 3, \dots, N \quad (5.29)$$

Le déterminant de la matrice $[K]$ est obtenu par :

$$\det [K] = \prod_{i=1}^N d_{ii} \quad (5.30)$$

Remarque :

Si la matrice $[K]$ est symétrique et définis positive, on peut décomposer la matrice $[K]$ sous la forme suivante :

$$[K] = [L]^T \cdot [L] \quad (5.31)$$

Dans ce cas, la matrice $[L]$ est triangulaire supérieure (les éléments au-dessus de la diagonale sont non nuls) et sous la forme matricielle possède la structure suivante :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1N} \\ & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2N} \\ & & L_{33} & \cdots & L_{3N} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & L_{NN} \end{bmatrix}$$

- Algorithme II :

- Le problème de la racine d'un nombre négatif de l'algorithme (5.32) pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice $[L]$ ne se pose plus, puisque la condition supplémentaire que doit vérifier la matrice $[K]$ pour que l'algorithme II soit applicable est que la matrice $[K]$ soit définie positive.
- Les mêmes remarques présentées pour l'algorithme de Cholesky sont valables pour l'algorithme de Khaletski.
- La détermination du vecteur solution $\{u\}$ par l'algorithme de Cholesky ne diffère pas beaucoup par celui de Khaletski.

On n'a pas présenté ici les détails de l'algorithme de Cholesky pour des matrices symétriques et bandes vu que on n'a pas fait la programmation de cette méthode et qu'elle se semble à un certain niveau.

5.4. Calcul des paramètres intéressants du problème :

Après la détermination de la solution du vecteur $\{u\}$ dans chaque nœud du maillage, notre intérêt s'oriente vers le calcul de quelques paramètres intéressants.

5.4.1. Caractéristiques géométriques de la surface de la section :

La surface du domaine à été subdivisée en petits éléments finis de forme quadrilatères de forme simples. Alors, l'aire totale de cette section sera approximer par la somme de toutes les aires des surfaces des éléments finis. On peut écrire donc :

$$A = \sum_{i=1}^{i=NE} A_i \quad (5.33)$$

Le centre de gravité de cette section composée en petits éléments quadrilatère est donnée par :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=NE} (x_G)_i A_i}{A} ; y_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=NE} (y_G)_i A_i}{A} \quad (5.34)$$

Les moments d'inerties polaire I_P de la section complète par rapport à l'axe passant par le centre de gravité de la section peut être calculé par la relation suivante. Alors :

$$I_P = \sum_{i=1}^{i=NE} (I_{20})_i + \sum_{i=1}^{i=NE} (I_{02})_i - [(x_G)^2 + (y_G)^2] A \quad (5.35)$$

La valeur de A , x_G et y_G sont données respectivement par les relations (5.33) et (5.34). Les expressions de I_{20} et I_{02} dans la relation (5.35) sont données respectivement par les relations (3.26) et (3.27).

5.4.2. Constante de torsion :

Le calcul de la constante de torsion C de la section présentée par le domaine discrétisé en N_E quadrilatères peut être calculée en utilisant la relation (1.7). On peut considérer l'intégrale comme suit :

$$C = 4 \sum_{i=1}^{i=NE} \left[\int_{A_i} u(x,y) \, dx \, dy \right] \quad (5.36)$$

La fonction $u(x,y)$ de l'élément fini est donnée par la formule (3.20) et les fonctions d'interpolations sont données par la relation (3.21). Substituons ces deux équations dans la relation (3.16) on aura :

$$C = 4 \sum_{i=1}^{i=NE} \left[(L_{11}I_{00} + L_{21}I_{10} + L_{31}I_{01} + L_{41}I_{11})u_1 + (L_{12}I_{00} + L_{22}I_{10} + L_{32}I_{01} + L_{42}I_{11})u_2 + (L_{13}I_{00} + L_{23}I_{10} + L_{33}I_{01} + L_{43}I_{11})u_3 + (L_{14}I_{00} + L_{24}I_{10} + L_{34}I_{01} + L_{44}I_{11})u_4 \right]_i \quad (5.37)$$

En substituant le résultat obtenu par la relation (5.37) dans la relation (3.6), on peut facilement déduire la valeur de l'angle de torsion unitaire.

5.4.3. Contrainte de torsion :

Après la détermination de la variable dépendante u , la constante de torsion C et l'angle de torsion unitaire θ , on peut déterminer distribution de la contrainte de torsion dans les deux directions x et y pour chaque nœud du domaine de calcul en utilisant les relations (3.5). En utilisant les relations (3.20) et (3.21) dans (3.5) on aura :

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{M_t}\right)_i = \frac{2}{C} \sum_{j=1}^{j=4} \left[\begin{array}{l} (L_{3j} + L_{4j}x)u_1 + (L_{3j} + L_{4j}x)u_2 + \\ (L_{3j} + L_{4j}x)u_3 + (L_{3j} + L_{4j}x)u_4 \end{array} \right]_i \quad (5.38)$$

$i=1, 2, \dots, N$

$$\left(\frac{\tau_{yz}}{M_t}\right)_i = -\frac{2}{C} \sum_{j=1}^{j=4} \left[\begin{array}{l} (L_{2j} + L_{4j}y)u_1 + (L_{2j} + L_{4j}y)u_2 + \\ (L_{2j} + L_{4j}y)u_3 + (L_{2j} + L_{4j}y)u_4 \end{array} \right]_i \quad (5.39)$$

$i=1, 2, \dots, N$

Pour chaque point de maillage on a deux composantes de contrainte de torsion nommées par τ_{xz} et τ_{yz} . Alors la résultante est donnée par la relation suivante. Cette contrainte travaille dans la section de la poutre dans une direction bien déterminée.

$$\frac{\tau_{xs}}{M_t} = \sqrt{\left(\frac{\tau_{xz}}{M_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{M_t}\right)^2} \quad (5.40)$$

On peut calculer l'erreur relative pour chaque paramètre entre la solution exacte et la solution calculée par notre programme par la formule suivante :

$$\varepsilon(\%) = \left| 1 - \frac{\text{Paramètre}_{\text{Calculé}}}{\text{Paramètre}_{\text{Exacte}}} \right| \times 100 \quad (5.41)$$

5.5. Position et valeur maximale de la contrainte de torsion :

Il est intéressant de déterminer la valeur et la position de la contrainte maximale τ du problème à fin de localiser la section et le point dangereux qui provoque la rupture, ou, pour faire un dimensionnement d'une structure travaillante sous une contrainte inférieure à une certaine contrainte admissible de rupture, déterminée par les essais pratiques de la résistance des matériaux.

CHAPITRE 6

RESULTATAS ET COMMENTAIRES

La première partie de ce chapitre consiste à obtenir des maillages 2D de type H obtenu engrené dans des configurations simples et d'autres complexes. La seconde partie est consacrée à la présentation des résultats sur la résolution de l'équation de Poisson dans les configurations choisies.

6.1. Résultats sur la génération de maillage:

La figure (6.1) montre un type de maille quadrilatérale dans un domaine circulaire. Ici, nous avons un exemple pour $N_x = 30$ et $N_y = 30$. Par conséquent, le nombre de nœuds est égal à 900 et le nombre de quadrilatères est égal à 841.

Les figures (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (6,7), (6,8), (6,9), (6.10), (6.11), (6.12) et (6.13) représentent des maillages dans des zones de polygones réguliers inscrits dans un cercle, ayant respectivement un nombre de côtés égal à 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14. Sur la figure (6.2), le champ est un triangle équilatéral. Figure (6.3) montre un maillage quadrilatère dans un domaine carré. Figure (6.4) montre un maillage dans une zone pentagone. Le maillage montré respectivement dans les figures (6,5), (6,6), (6,7), (6,8) et (6,9) est que l'hexagone, heptagonale, octogonale, nanogone et décagone. De même dans les figures (6.10), (6.11), (6.12) et (6.13) ont présenté une aire d'un polygone régulier avec respectivement 11, 12, 13 et 14 côtés. Dans la figure (6.14) on a présenté un champ de maillage dans une forme de demi-cercle, et dans la figure (6.15) un maillage dans un quart de cercle.

La figure (6,16) présente un maillage quadrilatère dans un astéroïde. Cette zone est un type de champ mathématique. Dans la figure (6.17), la zone concernée est celle d'une ellipse. A été choisi dans la figure (6.18), un domaine d'un losange symétrique. Ce type de domaine est intéressé par les

aéronauticiens pour l'étude de la torsion des ailes ayant une forme d'un profil d'aile. Dans ces figures, nous avons choisi $N_x = 30$ et $N_y = 30$. Ensuite, le nombre de nœuds est égal à 900 nœuds et donc le nombre d'éléments de quadrilatère est égal à 841. La différence entre les mailles présentées est que la limite est variable.

Dans notre application, nous avons utilisé plusieurs profils de type affectant toutes les compagnies aériennes. Cette partie de génération de maillage est nécessaire pour faire la résolution de l'équation de Poisson appliquée pour l'étude de la torsion.

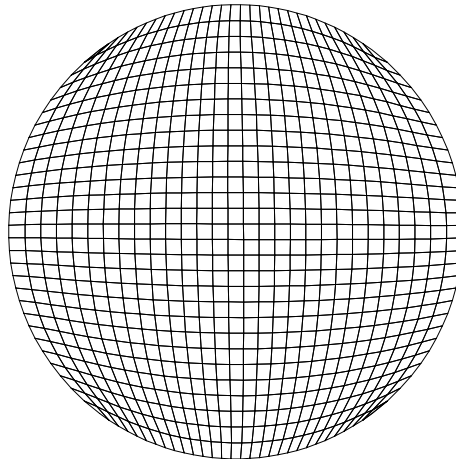


Figure 6.1 : Maillage quadrilatère dans un cercle avec $N_x=30$ et $N_y = 30$

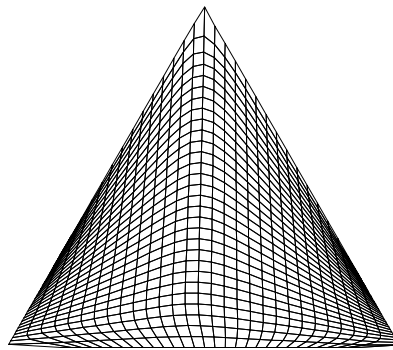


Figure 6.2: Maillage quadrilatère dans un triangle équilatéral avec $N_x = 30$ et $N_y = 30$.

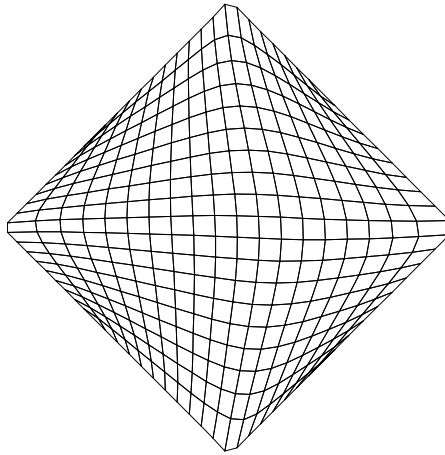


Figure 6.3: Maillage quadrilatérale dans un carré avec $N_x = 20$ et $N_y = 20$.

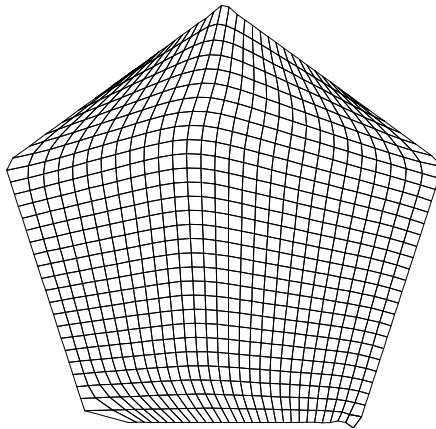


Figure 6.4: Maillage quadrilatérale dans un pentagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

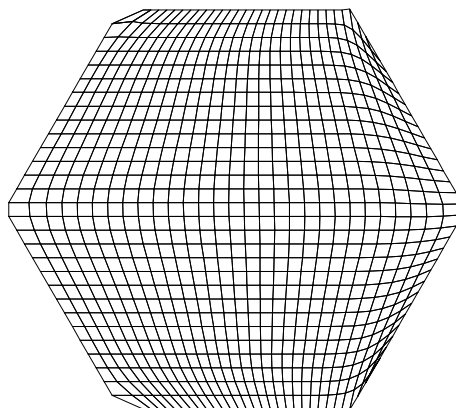


Figure 6.5: Maillage quadrilatérale dans un hexagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

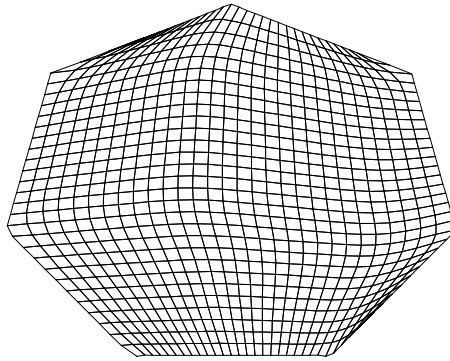


Figure 6.6: Maillage quadrilatérale dans un heptagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

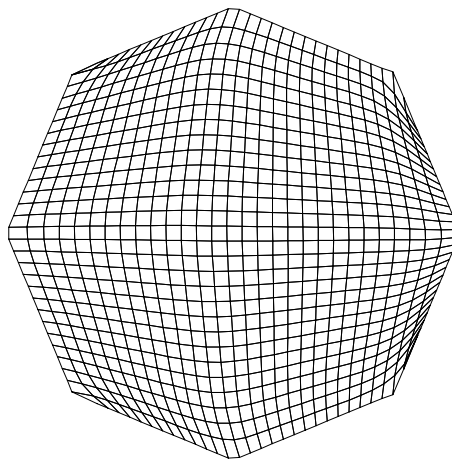


Figure 6.7: Maillage quadrilatérale dans un octagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

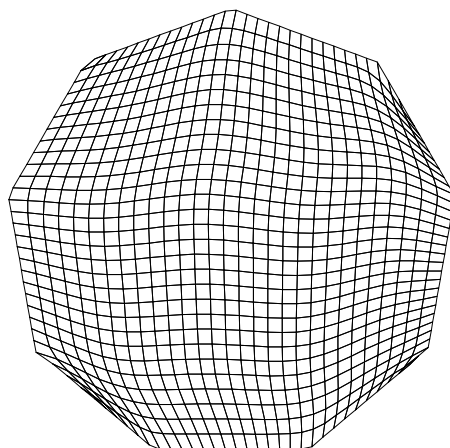


Figure 6.8: Maillage quadrilatérale dans un nanogone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

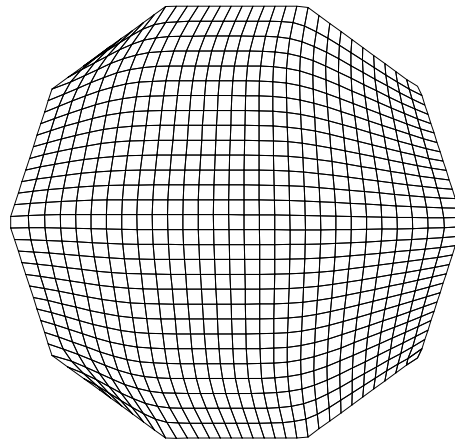


Figure 6.9: Maillage quadrilatérale dans un décagone régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

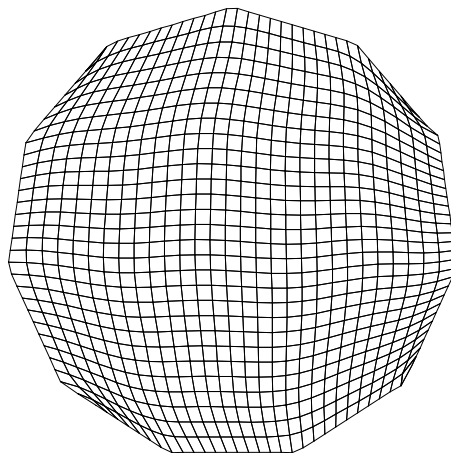


Figure 6.10: Maillage quadrilatérale dans un polygone à 11 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

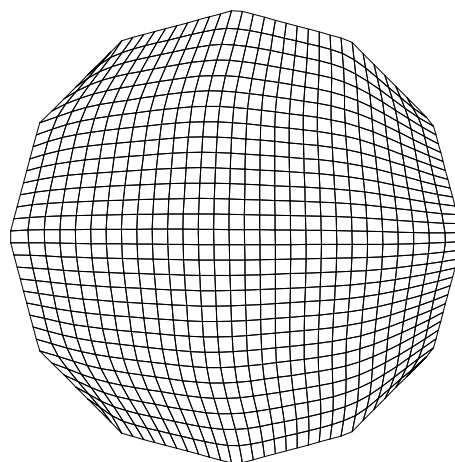


Figure 6.11: Maillage quadrilatérale dans un polygone à 12 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

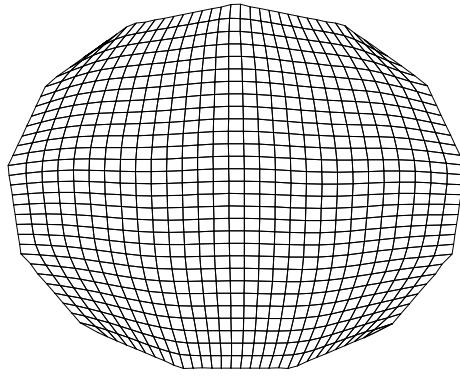


Figure 6.12: Maillage quadrilatérale dans un polygone à 13 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

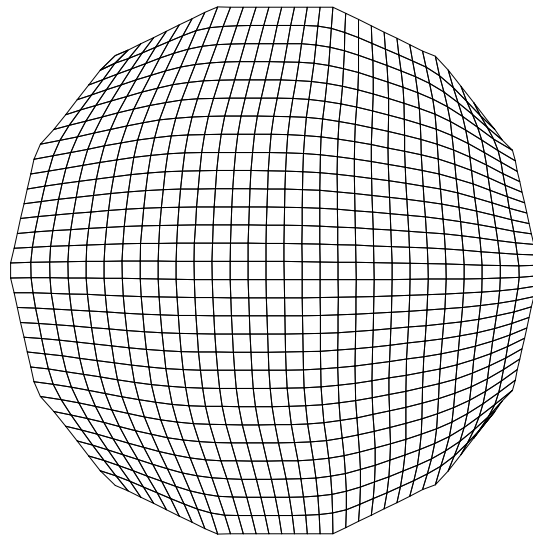


Figure 6.13: Maillage quadrilatérale dans un polygone à 14 cotés régulier avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

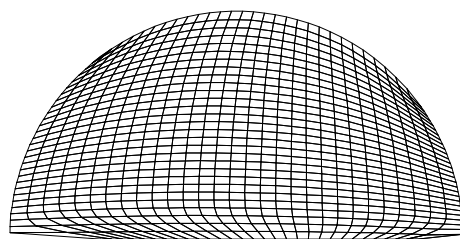


Figure 6.14: Maillage quadrilatérale dans un demi-cercle avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

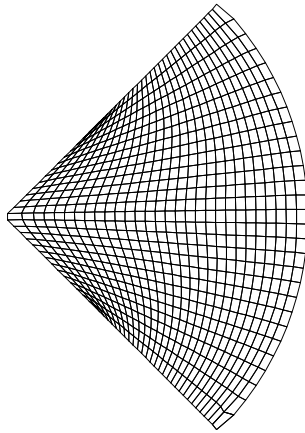


Figure 6.15: Maillage quadrilatérale dans un quart de cercle avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

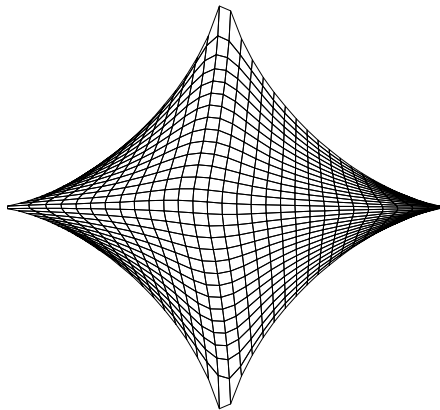


Figure 6.16: Maillage quadrilatérale dans un astroïde avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

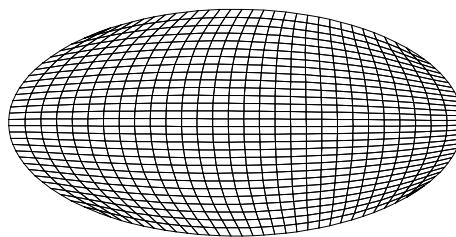


Figure 6.17: Maillage quadrilatérale dans une ellipse avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

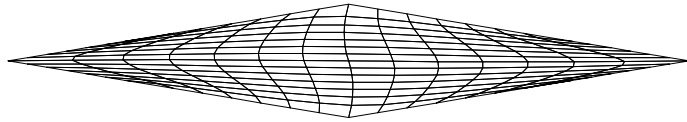


Figure 6.18: Maillage quadrilatérale dans un losange symétrique avec $N_x = 15$ et $N_y = 16$.

L'exemple montré dans les figures (6,19) et (6,20) est pour le profil d'aile nommé RAE 2822 avec cambrure symétrique. Cette zone est d'un grand intérêt pour les chercheurs intéressants à l'aérodynamique et l'élasticité. Par exemple, si on peut chercher et étudier le problème de torsion des pales d'hélicoptères, les pales de l'hélice du moteur, les aubes de compresseur et d'autres cas, il est nécessaire de générer ce type de maillage. Supposons que nous voulons déterminer les caractéristiques géométriques (position du centre de gravité, moments et produits d'inertie) pour un profil d'aile qui nous servira pour une étude de résistance et la rigidité, il est toujours intéressé de faire ce type de maillage. Dans la figure (6.21), nous n'avons pas pris un repère orthonormé pour but de visualiser les cellules internes.

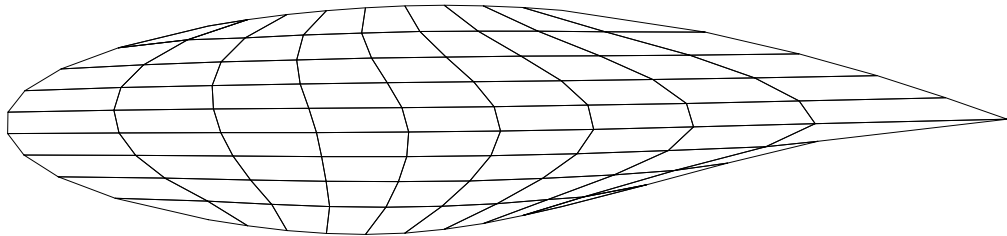


Figure 6.19: Maillage quadrilatérale dans le domaine de profil d'aile RAE 2822 aile avec $N_x = 10$ et $N_y = 10$.

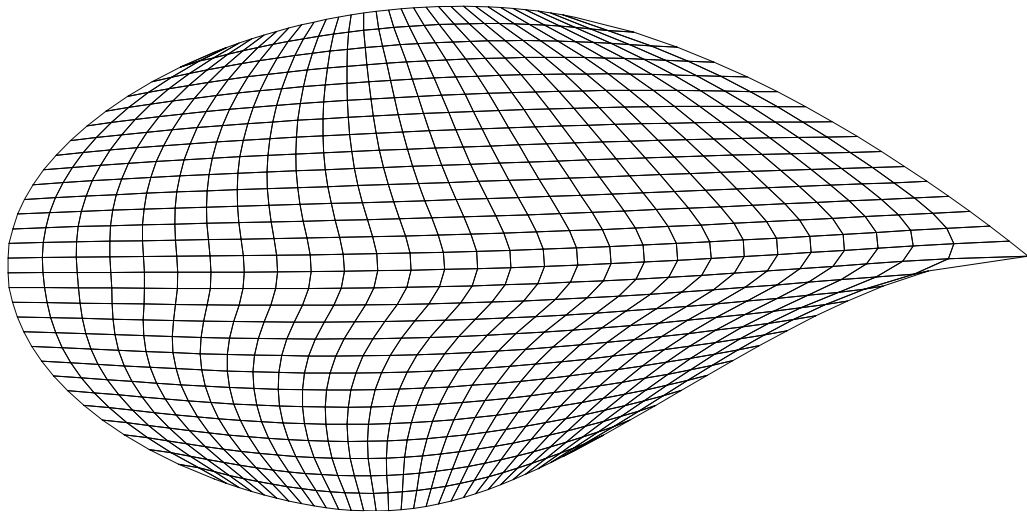


Figure 6.20: Maillage quadrilatérale dans le domaine de profil d'aile RAE 2822 avec $N_x=30$ et $N_y = 30$.

6.2. Effet de la discrétisation sur convergence de problème :

Nous considérons l'exemple du carré inscrit dans un cercle de rayon $R = 1,00$, voir la figure (6.3). Dans ce cas, la longueur de chaque côté est égal à $R\sqrt{2}$. Le choix de la section carré, car nous savons la solution exacte pour le flux de torsion, ainsi que la distribution des contraintes de torsion. Dans ce cas, et pour $R = 1,00$, nous avons les résultats suivants. Alors $I_p = 0.666666$, $C = 0.555555$ et $\tau_{max}/M_t = 1,590990$. La contrainte maximale se produit à la frontière sur les points médians de chaque côté de carré, c'est-à-dire aux points les plus proches du centre de gravité. Il est à noter que la déclaration des variables à été choisie en double précision. Nous considérons le cas $N_x = N_y$ suivant les axes x et y puisque les cotés du carré ayant même longueur.

Tableau 6.1: Effet de la discrétisation sur les résultats pour la section carré

$N_x=N_y$	I_p	C	τ_{max}/M_t
10	0.654340	0.550022	1.603855
20	0.664541	0.558885	1.673216
50	0.666674	0.561739	1.689697
80	0.666909	0.562084	1.693005
100	0.666964	0.562163	1.694256
120	0.666993	0.562206	1.694910

150	0.667017	0.562242	1.695659
180	0.667029	0.562261	1.696093
200	0.667035	0.562270	1.696345
250	0.667044	0.562283	1.696752
300	0.667048	0.562290	1.697030

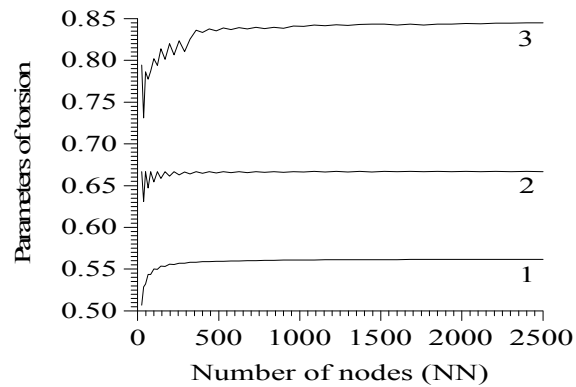
Tableau 6.2: Erreurs obtenus à partir de la discrétisation de la section carrée.

$N_x=N_y$	ϵ_I (%)	ϵ_C (%)	ϵ_τ (%)
10	1.848	0.995	0.808
20	0.318	0.599	6.168
50	0.001	1.113	6.204
80	0.036	1.175	6.412
100	0.044	1.189	6.490
120	0.049	1.197	6.531
150	0.052	1.203	6.578
180	0.054	1.207	6.606
200	0.055	1.208	6.621
250	0.056	1.210	6.647
300	0.057	1.212	6.665

Le tableau (6.1) présente les résultats obtenus sur le moment d'inertie polaire, la constante de torsion et la valeur de la contrainte maximale du couple en fonction de la discrétisation. Nous remarquons clairement la convergence de ces paramètres à la solution exacte.

Selon le tableau (6.2), l'erreur relative obtenue diminue à mesure que le nombre de noeuds augmente. Donc, pour la discrétisation $N_x = N_y = 300$ noeuds, ce sera une erreur qui se stabilise à $\epsilon_I=0.05\%$, $\epsilon_C=1.21\%$ and $\epsilon_\tau = 6.66\%$ respectivement pour I_P , C et T_{max} .

À propos de l'erreur de 6,66% obtenu sur la contrainte maximale. Ici, la contrainte est obtenue à partir de la dérivée de la solution primaire, qui est le flux de torsion, qui représente une approximation de premier ordre. Si nous calculons l'erreur relative sur le flux de torsion nous obtiendrons une erreur $\epsilon = 0,02\%$ pour la discrétisation de $N_x = N_y = 300$ noeuds. Cette influence des erreurs va nous donner une autre erreur sur la contrainte maximale. En plus de l'élément fini utilisé affecte l'erreur obtenue. De même, l'erreur dépend de la discrétisation, étant donné le grand nombre d'opérations mathématiques effectuées. Tout cela nous a donné une erreur de 6,66%, ce qui est une erreur acceptable.



Courbe 1: constante de torsion C

Courbe 2: moment d'inertie polaire I_p

Courbe 3: Contrainte maximale de torsion $\tau_{max} / (2M_t)$

Figure 6.21: Variation des paramètres de torsion I_p , C et $\tau_{max} / (2M_t)$ par rapport au nombre de nœuds de la discrétisation pour la section carré.

Figure (6,21) montre l'effet de la discrétisation sur la convergence du problème, en particulier sur la convergence de la constante de torsion, le moment d'inertie polaire et la contrainte maximale de torsion de la section carrée. Notant que, si nous augmentons le nombre de nœuds NN de la discrétisation, nous allons diminuer de plus en plus l'erreur de calcul et par conséquent obtenir la convergence de ces paramètres. Dans ce cas, nous avons pris $N_x=N_y$ depuis la dimension le long de l'axe x est la même que la dimension le long de l'axe y de la section carrée, voir la figure (6,21).

6.3. Variation des paramètres :

Le deuxième exemple choisi est celui de la géométrie d'une surface portante. Le profil sélectionné est que le RAE 2822 avec cambrure non symétrique. La définition de la géométrie est présentée par 65 points comme le montre le tableau (6.3) [23] et [24]. Les points du tableau (6.3) sont utilisés pour déterminer la fonction d'analyse de l'extrados et de l'intrados en utilisant l'interpolation cubic spline Comme la dimension le long de l'axe vertical est environ 10 fois plus faible par rapport à la dimension longitudinale, on a pris

$N_x = N_y / 6$. La solution exacte dans ce cas n'existe pas pour les paramètres indiqués dans le tableau suivant:

Tableau 6.3 : Les points de définition de la surface du profil d'aile RAE 2822.

		Extrados En (%) de la corde	Intrados En (%) de la corde
	$x/Corde$ (%)	$y/Corde$ (%)	$y/Corde$ (%)
01	0.0000	0.0000	0.0000
02	0.0602	0.3165	-0.3160
03	0.2408	0.6306	-0.6308
04	0.5412	0.9416	-0.9443
05	0.9607	1.2480	-1.2559
06	1.4984	1.5489	-1.5649
07	2.1530	1.8441	-1.8707
08	2.9228	2.1348	-2.1722
09	3.8060	2.4219	-2.4685
10	4.8005	2.7062	-2.7586
11	6.9039	2.9874	-3.0416
12	7.1136	3.2644	-3.3170
13	8.4265	3.5360	-3.5843
14	9.8396	3.8011	-3.8431
15	11.3495	4.0585	-4.0929
16	12.9524	4.3071	-4.3326
17	14.6447	4.5457	-4.5610
18	16.4221	4.7729	-4.7773
19	18.2803	4.9874	-4.9805
20	20.2150	6.1885	-6.1694
21	22.2215	6.3753	-6.3427
22	24.2949	6.5470	-6.4994
23	26.4302	6.7026	-6.6376
24	28.6222	6.8414	-6.7547
25	30.8658	6.9629	-6.8459
26	33.1555	6.0660	-6.9046
27	36.4858	6.1497	-6.9236
28	37.8510	6.2133	-6.8974
29	40.2455	6.2562	-6.8224
30	42.6635	6.2779	-6.6979
31	46.0991	6.2774	-6.5257
32	47.5466	6.2530	-6.3099
33	50.0000	6.2029	-6.0563
34	52.4534	6.1254	-4.7719
35	54.9009	6.0194	-4.4642
36	57.3365	6.8845	-4.1397
37	59.7545	6.7218	-3.8043
38	62.1490	6.5344	-3.4631
39	64.5142	6.3258	-3.1207
40	66.8445	6.0993	-2.7814

41	69.1342	4.8575	-2.4495
42	71.3778	4.6029	-2.1289
43	73.5698	4.3377	-1.8232
44	76.7051	4.0641	-1.5357
45	77.7785	3.7847	-1.2690
46	79.7850	3.5017	-1.0244
47	81.7197	3.2176	-0.8027
48	83.5779	2.9347	-0.6048
49	86.3553	2.6554	-0.4314
50	87.0476	2.3817	-0.2829
51	88.6505	2.1153	-0.1592
52	90.1604	1.8580	-0.0600
53	91.5735	1.6113	0.0157
54	92.8864	1.3769	0.0694
55	94.0961	1.1562	0.1033
56	96.1995	0.9508	0.1197
57	96.1940	0.7622	0.1212
58	97.0772	0.5915	0.1112
59	97.8470	0.4401	0.0935
60	98.5016	0.3092	0.0719
61	99.0393	0.2001	0.0497
62	99.4588	0.1137	0.0296
63	99.7592	0.0510	0.0137
64	99.9398	0.0128	0.0035
65	100.0000	0.0000	0.0000

Tableau 6.4 : Effet de la discrétisation sur les résultats du profil 2822 RAE

N_x	$I_P \times 100$	$C \times 1000$	τ_{max}/M_t
20	0.370332	0.195192	421.340907
50	0.392467	0.240049	533.990253
80	0.392170	0.245799	557.266527
100	0.385273	0.247247	563.674954
150	0.388690	0.248807	569.357837
200	0.390404	0.249376	440.179398
250	0.387818	0.249719	443.746902
300	0.388899	0.249869	446.554339
350	0.389734	0.249924	448.722860
400	0.390395	0.250001	450.323953
420	0.388883	0.253347	450.745781
500	0.389447	0.250072	452.780371

Selon le tableau (6.4), on peut estimer que de la discrétisation $I_P = 0,00389$, $C = 0,25 \cdot 10^{-3}$ et $\tau_{max} / M_t = 452$.

Il a été noté que la contrainte maximale à la torsion est appliquée sur la frontière au point le plus proche de centre de gravité.

Les tableaux (6.5), (6.6) et (6.7) présentent les résultats de notre programme de calcul numérique sur les paramètres de torsion pour différents profils d'ailes.

A partir des résultats des tableaux (6.5), (6.6) et (6.7), nous notons que la constante de torsion C est différente à la valeur de moment d'inertie polaire, et ils sont égaux que pour la section circulaire. Ce résultat démontre que les formules de torsion pour être à section circulaire ne peuvent être appliquées pour déterminer l'angle et la contrainte de torsion pour des sections non circulaires. Pour plus d'informations, la résistance des matériaux utilise les formules de section circulaire pour résoudre les problèmes des sections transversales non circulaires, faute de formules pour des sections non circulaires.

Les données choisies pour une ellipse sont $a = 1,00$ pour la dimension suivant x et $b=0.50$ suivant la dimension de l'axe vertical.

Tableau 6.5: Les références des profils d'ailes et les paramètres de torsion calculé par le programme numérique.

N°	Profil	$I_P \times 100$	$C \times 1000$	T_{max}/M_t
1	NACA0012	0.45676	0.26529	399.08590
2	NACA 63-412	0.36272	0.24708	420.87451
3	RAE 2822	0.38944	0.25007	452.78037
4	NACA 0010-34	0.38521	0.16356	583.57260
5	NACA 62	0.43352	0.25077	406.82622
6	RAF 30	0.45039	0.30239	369.10962
7	E-385	0.25918	0.07119	893.24166
8	NACA 23009	0.33112	0.11169	740.68206
9	NACA 2412	0.45392	0.26271	387.64443
10	NASA AMES A-01	0.42064	0.18631	511.91241
11	AQUILA 9.3%	0.32706	0.11939	684.18450
12	AVISTAR	0.55099	0.44278	297.30366
13	CHEN	0.47803	0.22210	401.29769
14	FAUVEL 14%	0.46431	0.35844	419.88393
15	EIFFEL 385	0.46795	0.17628	541.23755
16	WORTMANN FX 2	0.69805	1.22280	150.50565
17	NACA M1	0.25223	0.03912	1460.7545
18	ONERA OA209	0.34690	0.12437	680.52890
19	OAF 128	0.40518	0.25349	356.60385
20	ONERA NACA CAMBRE	0.43818	0.23403	447.10304

21	NASA LANGLEY RC-08 B3	0.33782	0.09061	852.98645
22	NASA LANGLEY RC-08 N1	0.27303	0.07561	1016.7932
23	TRAINER 60	0.63998	0.76799	198.53963
24	TSAGI 8%	0.30171	0.08056	906.49433
25	TSAGI 12%	0.45632	0.26677	408.91175
26	EPPLER 520	0.46965	0.49061	276.53948
27	EPPLER 635	0.41251	0.21891	477.61889
28	LOCKHEED L-188 ROOT	0.53324	0.43066	283.99791
29	NACA 63-415	0.45078	0.45563	284.58813
30	NACA 63-210	0.30272	0.13986	644.56645
31	NACA 64-108	0.24624	0.07243	1003.9759
32	NASA LANGLEY 64-012	0.36658	0.23890	449.37313

Tableau 6.6 : Paramètres de la torsion pour diverses sections calculées par le programme numérique.

N°	Section	I_P	C	T_{max}/M_t
1	Demi-cercle	0.497787	0.295882	2.824595
2	Quart de cercle	0.109622	0.082265	6.828792
3	Losange	0.057088	0.005809	47.217214
4	Astroïde	0.257599	0.159554	4.859267
5	Ellipse	0.490792	0.314019	2.520921

Tableau 6.7: Paramètres de la torsion pour les polygones réguliers calculés par le programme numérique.

N°	Polygones réguliers	I_P	C	T_{max}/M_t
1	3 cotés	0.321788	0.194179	3.858309
2	4 cotés	0.666985	0.562223	1.597483
3	5 cotés	0.912464	0.843477	1.220653
4	6 cotés	1.079139	1.033943	1.008196
5	7 cotés	1.196632	1.163550	0.920556
6	8 cotés	1.276903	1.252984	0.856709
7	9 cotés	1.333891	1.316137	0.805976
8	10 cotés	1.376275	1.362921	0.777727
9	11 cotés	1.408764	1.398027	0.760770
10	12 cotés	1.432861	1.424582	0.743825
11	13 cotés	1.454615	1.446645	0.726902
12	14 cotés	1.469686	1.463530	0.716779
13	Cercle	1.570537	1.570212	0.636754

La formule exacte de moment d'inertie polaire pour des polygones réguliers de n ($n \geq 3$) côtés inscrit dans un cercle de rayon R est donné par [1] et [4]:

$$I_P = \frac{n R^4}{12} \sin \frac{2\pi}{n} \left[2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right] \quad (6.1)$$

De même, la valeur de la constante de torsion et la contrainte maximale à la torsion pour certains polygones réguliers apparaissent dans le tableau (6.8) suivant [1] et [4].

L'erreur obtenue pour ces paramètres est présentée dans le tableau (6.9). Notant que l'erreur est très faible pour une discrétisation de $N_x = N_y = 200$. Si nous augmentons le nombre de nœuds dans la discrétisation, nous verrons une erreur inférieure à celle présentée dans le tableau (6.9).

Pour la section circulaire, nous avons obtenu une erreur dans les environs de 0,01% sur tous les paramètres pour une discrétisation de $N_x = N_y = 200$. Notant que nous n'avons pas trouvé dans la littérature la solution exacte pour les sections de profils.

Tableau 6.8 : Paramètres exactes de torsion pour des polygones réguliers [1].

N°	Polygone régulier	I_P (exacte)	C (exacte)	τ_{max}/M_t (exacte)
1	3 cotés	0.32475952	0.19485571	3.84900179
2	4 cotés	0.66666666	0.55555555	1.59099025
3	6 cotés	1.08253175	1.03831376	1.02009999
4	8 cotés	1.27614237	1.25510511	0.85671294
5	Cercle	1.57079632	1.57079632	0.63661977

Tableau 6.9 : Les erreurs sur les paramètres obtenus de torsion pour certains polygones réguliers.

N°	Polygone régulier	ε (%) de I_P	ε (%) de C	ε (%) de τ_{max}/M_t
1	3 cotés	0.752 %	0.213 %	0.171 %
2	4 cotés	0.023 %	0.802 %	0.302 %
3	6 cotés	0.281 %	0.357 %	0.925 %
4	8 cotés	0.042 %	0.905 %	0.00046 %
5	Cercle	0.012 %	0.027 %	0.019 %

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de procéder à la simulation numérique de distribution de contrainte dans des poutres ayant des sections complexes arbitraires, simplement connexe pour la torsion, par la méthode des éléments finis, tous en déterminant le champ de contrainte, ainsi que les paramètres de problème. Permettant ainsi au constructeur aéronautique ou industriel un choix judicieux selon ses critères et les exigences de la sécurité.

Une simulation basée sur l'extension de l'analyse mathématique de la torsion a été adoptée, qui a abouti à un problème de l'équation de Poisson. La modélisation et la discrétisation numériques utilisées sont basées sur la méthode des éléments finis, pour la résolution de l'équation différentielle partielle du second ordre type elliptique dans les domaines complexes. Elle a été largement détaillée.

Peuvent être tirées de ce travail sur les points suivants:

1. La mise en œuvre de la méthode des éléments finis par un programme important de calcul, nous a permis de trouver des solutions numériques pour des sections circulaires et non circulaires complexes avec une bonne adaptation aux frontières tout en ajustant la précision d'interpolation.
2. Le programme numérique développé peut résoudre un système d'équations de très grande dimension, qui peut atteindre des millions voire plus.
3. La méthode de génération de maillage présentée dans ce travail a été présentée pour les domaines simplement connexe, tel qu'on a élaboré le procédé pour la génération de maillages type 'H'. Par ailleurs, il est à noter que l'application d'une méthode de génération de maillage est indépendante de la nature mathématique des équations qui régissent le problème physique.
4. On a présenté un ensemble de géométries communément utilisées dans la mécanique; tel que, pour un choix d'une section non existante dans notre liste, il suffit de changer les fonctions des frontières d'un domaine

existant ou bien d'incorporer uniquement une subroutine pour générer les nœuds du domaine.

5. Le temps nécessaire pour générer ces maillages représente une petite fraction (moins de 8%) du temps de calcul nécessaire pour la résolution de problème.
6. Le problème délicat de stockage des éléments de la matrice de rigidité à rang élevé obtenue après la discrétisation en élément fini, a été traité avec diversité. Tel qu'en premier lieu, on a programmé l'algorithme de stockage bande de type diagonal par diagonale dans un vecteur, vu la simplicité de ses formules de récurrences, où on a adapté une méthode de résolution directe du système d'équations algébriques, cette méthode est celle de *Khatetsky*. Mais l'inconvénient majeur réside au niveau de la bande de la matrice de rigidité qui contient encore des cases nulles où atteignent environ de 60 à 70 % du nombre de cases total, et au niveau la méthode directe utilisée pour la résolution qui nécessite un temps important de calcul pour les rangs élevés de la matrice.
7. De ce fait, un programme important de calcul donc a été mis au point, permettant de calculer l'angle de torsion unitaire, Il prend aussi en charge le calcul nécessaire pour l'évaluation de la constante de torsion à travers les poutres ayant des sections simplement connexes.
8. Cependant, les solutions numériques obtenues ont fait l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques obtenus par d'autres auteurs ou la résistance des matériaux, où ils sont consacrés pour les sections circulaires, rectangulaires et elliptiques, dont lesquelles on a pu d'avoir leurs solutions analytiques. D'où la validation a été très satisfaisante lors la comparaison.
9. Nous avons remarqué en premier lieu qu'en augmentant la discrétisation, on obtient une meilleure précision et une convergence vers la solution exacte. On peut remarquer aussi que, les solutions obtenues avec des éléments finis de type quadrilatère sont plus précises et meilleures avec un temps d'exécution élevé, que celles avec les éléments de type triangulaire, pour un même nombre total de nœuds.
10. Le problème peut être considérée comme la résolution mathématique de l'équation de Poisson dans un domaine simplement connexe à deux

dimensions par la méthode des éléments finis avec des conditions aux limites type Dirichlet.

11. Différents domaines ont été présentés dans ce travail impliquant de nombreuses disciplines implicitement.
12. Le repère doit être choisi dans le centre de gravité de la section.
13. Tous les profils considérés sont présentés en valeurs du tableau. L'interpolation spline cubique est utilisée en l'occurrence pour obtenir une fonction analytique de la surface supérieure et inférieure.
14. Condensation des nœuds est utilisée pour affiner les points au bord d'attaque et dans les régions présentant un fort gradient.
15. Un filtrage des nœuds est utilisé pour repositionner les nœuds internes du maillage pour résoudre le problème de la taille des cellules obtenues.
16. La comparaison des résultats pour déterminer l'exactitude du programme développé a été faite pour le domaine carré, où la solution exacte existe.
17. La contrainte maximale est indiquée sur la frontière au point le plus proche du centre de gravité de la section.
18. La constante de torsion est égale à la valeur du moment d'inertie polaire pour section circulaire, et elle est différente pour le cas non circulaire.
19. Nous ne pouvons pas appliquer les formules de torsion de section circulaire pour déterminer l'angle et de torsion pour les sections non circulaires. Ce qui est le cas pour la résistance des matériaux discipline.
20. La résolution du système d'équations obtenu est faite par la technique des matrices bandes lors du stockage de la partie supérieure de la matrice du groupe est considéré dans un vecteur parce que la matrice de rigidité est symétrique et bande.
21. L'algorithme pour résoudre le système d'équations est celui de Khaletski conçu spécifiquement pour la solution directe de systèmes d'équations. boîtes de transfert entre la matrice et le vecteur correspondant est effectué par le stockage en diagonale.

Comme toute étude réalisée, On recommande les thèmes suivants comme des travaux de futur et perspectives

1. Problèmes avec les conditions aux limites de Neumann et Cauchy sont laissés en travaux futurs pour d'autres disciplines.
2. Comme le travail futur, nous pouvons faire l'extension de calcul pour le domaine relié doublement ou même multi connexes.
3. Résoudre le même problème pour les sections creuses à paroi minces.
4. Le problème pour les matériaux anisotropes à un grand intérêt pour l'élasticité et l'application industrielles.
5. On peut adapter et utiliser d'autres éléments de type triangulaire à 4 et 6 nœuds ainsi que des éléments quadrilatères à 5 et 8 nœuds ainsi leurs connections adéquatement pour les différentes géométries complexes optés. Et pour chaque type d'éléments, on teste la convergence, et l'efficacité.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES

- v : Fonction test.
 δ_{ij} : Symbole de Kronecker.
 e : Erreur de l'élément
 E : Erreur total.
 $u(x, y)$: Fonction inconnue (solution de l'équation différentielle).
 $\Psi_i(x, y)$: Fonctions d'interpolations.
 (x_j, y_j) : Coordonnées d'un nœud.
 u_j : La valeur de u au point (x_j, y_j) .
 Γ : Frontière du domaine Ω .
 Γ^e : Frontière d'un élément fini.
 Ω : Domaine plan.
 Ω^e : Domaine de l'élément fini.
 K_{ij} : Les éléments de la matrice de rigidité.
 $[K]$: Matrice de rigidité.
 $\{F\}^e$: Vecteur force pour un élément fini.
 $\{F\}$: Vecteur force totale du domaine.
 F_i : Les éléments du vecteur force.
 c_1, c_2, c_3, c_4 : Constantes pour l'approximation de la fonction $u(x, y)$.
 $S_{ij}^{11}, S_{ij}^{12}, S_{ij}^{22}, S_{ij}$: Les éléments des matrices de base.
 r : Degré du polynôme d'approximation.
 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$: Coefficients des fonctions d'interpolations d'un triangle ($i = 1, 2, 3$).
 ξ, η : Système du coordonnées locale pour un rectangle.
 $[S^{\alpha\beta}], [S]$: Matrices de base constitutives de la matrice de rigidité ($\alpha = 1, 2$), ($\beta = 1, 2$).
 $I_{m,n}$: Intégrales dans un triangle ($m = 0, 1, 2$), ($n = 0, 1, 2$).
 I_{10}, I_{01} : Moments statiques.

I_{00}, A_e	:	Aire de la surface d'un triangle.
x_G, y_G	:	Coordonnées du centre de gravité d'un triangle.
B	:	Largeur de la demi bande de la matrice de rigidité.
B_L	:	Largeur de la demi bande donnée par l'élément fini numéro L.
BI	:	Largeur de la demi bande donnée par un élément fini.
IBAV	:	Valeur de la bande avant l'introduction des conditions aux limites.
IBAP	:	Valeur de la bande après l'introduction des conditions aux limites.
NN	:	Nombre totale de nœuds dans le maillage.
NE	:	Nombre totale des éléments finis.
NDDLE	:	Nombre de Degré De Liberté Eliminés.
NDDL R	:	Nombre de Degré de Liberté Restant du problème.
NZERO	:	Nombre des zéros qui se trouvent à l'extérieure de la bande.
NN	:	Dimension de vecteur $\{vk\}$ nécessaire pour la matrice $[K]$.
NX, NY	:	Nombre de nœuds suivants l'axes x et y respectivement.
η^*	:	Variable normalisée.
P, Q	:	Paramètres pour le contrôle des points de maillage.
$\{vk\}$:	Vecteur remplaçant la matrice de rigidité.
[L], [H]	:	Matrices triangulaires déterminées par la décomposition de la matrice de rigidité $[K]$.
i, j, k, l	:	Numéros des nœuds d'un élément fini.
M	:	Moment de torsion appliqué.
θ	:	Angle de torsion unitaire par unité de longueur.
G	:	Module de Young de torsion.
$u(x, y)$:	Solution de l'équation différentielle.
$N_i(x, y)$:	Fonctions d'interpolations d'un élément fini ($i=1, 2, 3, 4$).
n	:	Nombre d'élément dans le domaine.
C	:	Constante de torsion.
I_{20}, I_{02}	:	Moments quadratiques d'un quadrilatère.
I_{10}, I_{01}	:	Moments statiques d'un quadrilatère.
I_{11}	:	Produit d'inertie d'un quadrilatère.
I_P	:	Moment d'inertie polaire.
Φ	:	Fonction de contrainte
t	:	Epaisseur de profil d'aile

δ	Déplacement relatif, ou allongement résultant, suivant la direction de la force
K	Rigidité
F	Force appliquée

Indices

A , B , C , D	:	Points spécifiés sur la frontière du domaine.
i , j	:	Compteur sur les nœuds.
123		Triangle limité par les nœuds 1, 2 et 3.
134		Triangle limité par les nœuds 1, 3 et 4.

Exposant

T	:	Transposée d'un vecteur ou matrice.
(e)	:	Elément.
i, j	:	Compteur sur les nœuds.
nouveau	:	Nouvelle position.
ancien	:	Ancien position.

REFERENCES

1. Abbott I. H. and von Doenhoff A. E., "Theory of wing sections : Including a summary of Airfoil data," Dover Publications, Inc., New York, Vol. II, 1959.
2. Always G. G. and Martin D. W., 'An algorithm for reducing the bandwidth of a matrix of symmetric configuration,' Computer Journal, Vol. 8, PP. 264-272, 1998.
3. Bathe K. J., 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis,' Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
4. Beauquet G. et Pogu M., 'Programmation des éléments finis (2D)' Edition Cepadues – Toulouse, France, 1987.
5. Boun-jad M. et Zebbiche T., "Résolution de l'équation de Poisson dans un domaine simplement connexe," Editions Universitaire Européenne, ISBN 978- 3-8417-9282-2, Avril 2012.
6. Bramble J. H. and Zlamal M., 'Triangular Elements in th Finite Element Methods,' Mathematical Computation, Vol. 24, PP. 809-820, 1970.
7. Brezis H., 'Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications,' Masson, Paris, 1983.
8. Cheng K. Y., 'Minimizing the bandwidth of sparse symmetric matrices,' Computing, Vol. 11, PP. 103-110, 1985.
9. Ciarlet P. G., 'Numerical Analysis of the Finite Element Method,' Université de Montréal, Montreal, 1976.
10. Cook R. D., 'Concepts and Applications of Finite Element Analysis,' 2nd edition, John Wiley and Sons., New York, 1981.
11. Demidovitch B. et Marron I., 'Eléments de Calcul Numérique,' Edition Mir, Moscou, 1987.
12. Fletcher C. A. J., 'Computational Techniques for Fluid Dynamics,' Volume II, Specific Techniques for Different Flow Categories, Springer-Verlag, 1988, Austria.
13. Forsythe G. and Moler C. B., 'Computer Solution of Linear Algebraic Systems,' Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1993.
14. Gilbarg D. and Trudinger N. S., 'Elliptic Partial Differential Equations of Sccond Order,' Springer, Berlin, 1977.

15. Gouri F. et Touzout G., ' Une présentation de la méthode des éléments finis, 'Maloine Editeur, 1984, France.
16. Hoff N. J. 'Analysis of Structures'. John Wiley and Sons Edition, New York, 1956.
17. Hrennikoff A. ' Solution Of Problems in Elasticity by The Framework Method' J.Appel. Mech, Vol. 8,pp 169-175, 1941.
18. Hughes W. F. & Gaylord E. W. 'Basic Equations of Engineering Science' Schaums Outline serie. Mc Graw-Hill Book Company, 1964.
19. Imbert J. F., 'Analyse des Structures par Eléments Finis,' 3^{ème} Edition, Sup'Aéro, Cepadues-Editions, 1991, France.
20. Irons B. M. and Ahmed S., 'Techniques of Finite Elements,' John Wily and Sons., New York, 1990.
21. Irons B. M. and Zienkiewicz O. C. 'The Isoparametric Finite Element System – a new concept in Finite Element Analysis 'Proceedings, conference on recent advances in stress analysis. Royal Aeronautical Society, London, 1968.
22. Kardestuncer H., 'Elementary Matrix Analysis of Structures,' McGraw-Hill, New York, 1999.
23. Kardestuncer H. et al, 'Finite Element Handbook,' McGraw-Hill Book Company, 2010, USA.
24. Khenane A. ' Méthodes des éléments finis, énoncé des principes de base,' Edition OPU, Algérie, 2007.
25. Ladyzenkaja O. A. and Ural'ceva N. N., 'Equations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique,' Dunod, Paris, 1998.
26. Masatake M., 'The Finites Elements Method And Its Application' MAC Millan publishing company, New York (U.S.A) 1986.
27. Miranda S., 'Partial Differential Equations of Elliptic Type,' 2nd edition, Springer, Berlin, 1970.
28. Muvdi B. B. and McNabb J. W., "Engineering Mechanics of Materials," Macmillan Publishing company, 1984.
29. Necas J., 'Les Méthodes Dircetes en Théorie des Equations Elliptiques' Masson,Paris/Academica, Prague, 1967.
30. Perzemieniecki J. S. 'Theory of Matrix Structural Analysis 'McGraw-Hill , New York, 1968.

31. Petrica P., Matei O. and Comes C. A., 'Reducing the bandwidth of a sparse matrix with a genetic algorithm,' *Programming and Operation Research*, Vol. 63, N° 12, PP. 1851-1876, 2014.
32. Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," *Comput. J.*, Vol. 9, PP. 404-407, 1978.
33. Ralston, A. and Rabinowitz, A., "A First Course in Numerical Analysis", McGraw Hill Book Company, 2005.
34. Reddy J. N., 'An Introduction to the Finite Element Method,' Edition Mc-Graw Hill Book Company, 2007.
35. Rosen R., 'Matrix Bandwidth Minimization,' *Proceedings of the 23rd National Conference, Association for Computing Machinery, Brandon Systems Press, Princeton, N. J., 1989.*
36. Russell C. Hibbeler, "Mechanics of Materials," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., USA, 9th edition, 2013.
37. Schechter M., 'Modern Methods in Partial Differential Equations: An Introduction,' McGraw-Hill, New York, 1977.
38. Schwarz H. R. and Rutishauser H., 'Numerical Analysis of Symmetric Matrices,' English edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2006.
39. Smith I. M., Griffiths D. V. and Margetts L., 'Programming the Finite Element Method,' John Wiley and Sons., 5th Edition, New York, November 2013.
40. Strang G. A. A. 'An Analysis Of The Finite Element method' Wellesley-Combridge Press, Wellesley, 1973.
41. Stroud, A. H. and Secrest, D. H., "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966.
42. Thompson J. F., Bharat S. and Weatherill N. P., 'Handbook of Grid Generation,' CRC Press, USA, 2008.
43. Topping B. H. V., Muylle J. , Ivanyi P., Putanowicz R. and Cheng B., 'Finite Element Mesh Generation,' Saxe Coburg Publications, Hardback, USA, 2004.
44. Turner M., Clough R. W., Martin H. and Topp L. J., 'Stiffness and Deflection Analyses of Complex Structures' *Journal of Aeronautical science*, Vol. 23, pp.: 805-823, 1956.

45. UIUC Applied Aerodynamics Group, http://www.ae.illinois.edu/m-selig/ads/coord_database.html, department of Aerospace Engineering, College of Engineering, University of Illinois at Urbana, Champaign, IL, 2013.
46. Weatherill N. P., 'A method for generating irregular computational grids in multiply connected planar domain,' International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, PP. 181-197, 1993.
47. Wilson E. L., Bathe K. J. and Doherty W. P., 'Direct solution of large systems of linear equations,' Computers and Structures, Vol. 4, PP. 363-372, 1984.
48. Zienkiewicz O. C., 'The Finite Element Method In Engineering Science' 2nd Edition McGraw-Hill, London, 1971.
49. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. and Fox D. D., 'The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics,' 7th Edition, Butterworth-Heinemann, USA, December 2013.
50. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. and Zhu J. Z., "The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals," Butterworth-Heinemann edition, 7th edition, USA, October 2013.