

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE BLIDA1**

**DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

**Thèse de Doctorat en Génie Mécanique**

**Présenté par : Mahmoud Gouasmi**

**Thème : LES QUATERNIONS DUAUX ET LE MOUVEMENT  
HELICOIDAL EN ROBOTIQUE .**

**Devant le jury composé de :**

<b>Abdelkrim AIAD</b>	<b>Prof., US 1, Blida</b>	<b>Président</b>
<b>Salem ABUDURA</b>	<b>Prof., Univ. Médéa</b>	<b>Examineur</b>
<b>Abderrahmane BELAIDI</b>	<b>M.C.A., U.Boumerdes</b>	<b>Examineur</b>
<b>Abdelfetah HOCINE</b>	<b>M.C.A., U.Khemis-Miliana</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mustapha TEMMAR</b>	<b>M.C.A., US 1, Blida</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mohammed OUALI</b>	<b>Prof., US 1, Blida</b>	<b>Directeur de thèse</b>

**Soutenue le: 30 - 11 - 2015**

**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015**

# RÉSUMÉ

Grace à cette étude, nous offrons un guide à la pratique de l'utilisation des Quaternions Daux pour représenter les rotations et les translations dans des hiérarchies basées sur des caractères. Les quaternions ont fait leurs preuves dans de nombreux domaines de la science et de l'informatique en fournissant une définition claire, non encombrante et efficace, ou une méthodologie de pointe pour la représentation des informations concernant les rotations.

Nous espérons que le lecteur aura une vue similaire sur les quaternions daux.

Nous expliquons comment la théorie des nombres daux peut s'étendre aux quaternions daux (nommés aussi : biquaternions ou double-quaternions) et comment nous pouvons les utiliser pour représenter les transformations rigides (translations et rotations) ou le mouvement hélicoïdal en robotique. Grâce à une série d'exemples, nous montrons exactement la relation entre les quaternions daux d'une part et les transformations (rotations et translations) ou mouvements hélicoïdaux d'autre part en les comparant aux traditionnelles combinaisons de matrices axe-angle ou d'angles d'Euler avec concaténation de matrices. Le lecteur, nous croyons, après avoir consulté ce travail devrait être en mesure de constater comment les quaternions daux peuvent donner une solution simple et rapide à la représentation des transformations rigides. Nous montrons comment les quaternions daux proposent une nouvelle alternative aux pures Euler-Matrice méthodes et la façon dont un système hybride en combinaison avec les résultats des matrices donne une solution plus rapide et plus fiable. Nous nous concentrons sur la démonstration des avantages énormes apportés par les quaternions daux pour les transformations rigides et en particulier leur application dans des hiérarchies complexes de personnages 3D et surtout dans le domaine de la robotique.

**Mots clés :**

Quaternion Dual, 3D, Transformation Rigide, Hélicoïdal, Robotique.

# ABSTRACT

In this work, we give a beginners guide to the practicality of using dual-quaternions to represent the rotations and translations in character-based hierarchies. Quaternions have proven themselves in many fields of science and computing as providing an unambiguous, un-cumbersome, computationally efficient method of representing rotational information. We hope after reading this paper the reader will take a similar view on dual-quaternions. We explain how dual number theory can extend quaternions to dual-quaternions and how we can use them to represent rigid transforms (i.e., translations and rotations), hélicoïdal or 'screw'motions in robotics. Through a set of examples, we demonstrate exactly how dual-quaternions relate rotations and translations and compare them with traditional Euler's angles in combination with Matrix concatenation. We give a clear-cut, step-by-step introduction to dual-quaternions . The reader, I believe, after reading this paper should be able to see how dual-quaternions can offer a straightforward solution of representing rigid transforms (e.g., in complex character hierarchies). We show how dual-quaternions propose a novel alternative to pure Euler-Matrix methods and how a hybrid system in combination with matrices results in a faster more reliable solution. We focus on demonstrating the enormous rewards of using dual-quaternions for rigid transforms and in particular their application in complex 3D character hierarchies and mainly in robotics.

**Keywords :**

Dual-Quaternion, 3D, Real-Time, Rigid Transformation, Hélicoïdal, Robotics

## ملخص

وبفضل هذه الدراسة، ونحن نقدم دليلا لممارسة استخدام الارباع (الكواتيرنيون) المزدوج لتمثيل دورانات وانسحابات في التسلسلات الهرمية القائمة على الحرف. وقد أثبت الارباع قدرته في كثير من المجالات العلمية من خلال تقديم منهجية واضحة، غير مزعجة وفعالة، ومتقدمة لتمثيل المعلومات حول الدوران.

نأمل أن القارئ سوف يكون له رأي مماثل على الارباع المزدوج. نفسر كيف أن نظرية الأعداد المزدوجة يمكن أن تمتد إلى الارباع المزدوج، (يسمى أيضا : biquaternions أو كواتيرنيون مزدوجة) وكيف يمكننا استخدامها لتمثيل تحولات الاجسام الصلبة أو حركة حلزونية في مجال الروبوتات. من خلال مجموعة من الأمثلة، وتبين لنا العلاقة الدقيقة بين الارباع المزدوج من جهة والتحويلات أو حركة حلزونية من الجهة الأخرى بمقارنتهم مع التقنيات التقليدية (المصفوفات). القارئ، ونحن نعتقد، بعد قراءة هذا العمل يستطيع أن يلاحظ كيف أن الارباع المزدوج يمكن له أن يعطي حلا بسيطا لتمثيل التحويلات. وتبين لنا كيف أن الارباع المزدوج يمثل تقدما بديلا جديدا غير الحساب التقليدي (المصفوفات). نركز في هذا العمل على توضيح المنافع الكثيرة للارباع المزدوج ممثلا لتحويلات الاجسام الصلبة، وخاصة تطبيقها في التسلسلات الهرمية المعقدة من تشخيص ذي ثلاثة الابعاد (3D) وخاصة في مجال الروبوتات.

المفاتيح :

الارباع المزدوج، تحويلات الاجسام الصلبة، الحركة الحلزونية، الروبوتات.

# REMERCIEMENTS

Ce mémoire a été effectué sous la direction du professeur Mohammed Ouali, que je remercie sincèrement pour son soutien technique et moral. Je salut et remercie aussi tous les collègues, enseignants et travailleurs, de l'Institut de Mécanique ainsi que ceux du Tronc Commun de Technologie de l'Université Blida.

Je tiens à remercier Messieurs Abdelkrim Aiad, Salem Abudura, Abderrahmane Belaidi, Abdelfetah Hocine et Mustapha Temmar qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

# TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIÈRES .....	iii
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX .....	iv
INTRODUCTION .....	v
1 LA ROBOTIQUE	
1.1 Introduction.....	01
1.1.1 Historique.....	01
1.1.2 Justification technico-économique.....	04
1.2 Les robots industriels.....	10
1.2.1 Définitions.....	10
1.2.2 Caractéristiques.....	11
1.2.3 Éléments constitutifs d'un robot .....	12
1.3 Classification des robots .....	15
1.3.1 Classification fonctionnelle.....	15
1.3.2 Classifications géométrique.....	18
1.4 Performances des robots.....	20
1.4.1 Les performances-tâches .....	21
1.4.2 Les performances-homme .....	30
1.4.3 Les performances économiques .....	30
1.5 Quelques chiffres et statistiques mondiales récentes .....	31
1.5.1 Degré de liberté et types de robots .....	31
1.5.2 Les origines des robots industriels .....	34
1.5.3 Les robots industriels d'aujourd'hui .....	38
1.5.4 Applications .....	42
2 MODELÉS GÉOMÉTRIQUES DIRECTS DE ROBOTS MANIPULATEURS (séries)	
2.1 Introduction .....	44
2.2 Constituants d'un robot .....	44
2.3 Degré de liberté – Architecture .....	47
2.3.1 Positionnement d'un solide dans l'espace .....	47
2.3.2 Liaison .....	48
2.3.3 Mécanismes .....	49
2.3.4 Morphologie des robots manipulateurs .....	50
2.3.5 Modèle géométrique d'un robot en chaîne simple .....	53
2.4 Coordonnées articulaires et opérationnelles .....	54
2.4.1 Coordonnées et matrices de transformation homogènes .....	55
2.4.2 Application aux robots séries .....	56
2.4.3 Matrices de passage élémentaires : Est-ce l'utopie du siècle ? ....	57
2.4.3 (A) .....	57
2.4.3 (B) .....	62
2.4.3 (C) Modèle géométrique du robot PUMA 560 .....	66
2.4.4 Remarques importantes .....	71
2.4.5 La solution Systématique : Méthode classique de conjugation $TMT^{-1}$ .....	72

### 3 MÉTHODES CLASSIQUES

3.1 Travaux connexes récents .....	79
3.1.1 Infographie .....	79
3.1.2 Robotique .....	79
3.2 Concepts physiques .....	80
3.2.1 Orientation et translation .....	81
3.2.2 Translation .....	81
3.2.3 Angles d'Euler .....	81
3.2.4 Variantes aux angles d'Euler : Matrices (3x3), (4x4) et Axe-Angle .....	87
3.2.5 Rotation et quaternion unitaire .....	96
3.2.6 Matrices .....	108
3.2.7 Résumé des méthodes .....	109

### 4 NOMBRES DUAUX, QUATERNIONS, QUATERNIONS DUAUX

4.1 Introduction : Pourquoi des Quaternions Duaux ? .....	110
4.2 Nombres Duaux .....	111
4.2.1 Opérations arithmétiques en Nombre Dual .....	113
4.2.2 Différenciation du Nombre Dual .....	114
4.2.3 Écriture Matricielle d'un nombre dual .....	116
4.2.4 Géométrie de lignes .....	116
4.2.5 Les coordonnées de Plücker .....	119
4.2.6 Algèbre vectorielle duale .....	123
4.3 Mouvement hélicoïdal (Screw motion) .....	125
4.4 Quaternions .....	131
4.4.1 Opérations Arithmétiques sur les Quaternions .....	133
4.4.2 Quaternions et rotations .....	137
4.4.3 Conversions .....	146
4.4.4 Représentation matricielle des quaternions .....	149
4.4.5 Interpolation des quaternions .....	149
4.5 Quaternions Duaux .....	152
4.5.1 Opérations Arithmétiques sur les Quaternions Duaux .....	153
4.5.1.1 Rotations .....	155
4.5.1.2 Translations .....	157
4.5.1.3 Combinaisons (compositions) .....	158
4.5.2 Applications générales .....	166
4.5.2.1 Manipulateurs Plans .....	166
4.5.2.2 Mouvement hélicoïdal .....	173
4.5.3 Conversions .....	197
4.5.4 Quelques illustrations .....	200
4.5.5 Jacobien .....	201
CONCLUSION .....	203
APPENDICES	
A Liste des symboles .....	205
B Plus de géométrie .....	206
C Récapitulatif .....	211
RÉFÉRENCES .....	218

# LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: <i>Les six types d'articulation de base (Reulaux)</i> .....	13
Figure 1.2: <i>classe A : Télémanipulateur</i> .....	16
Figure 1.3 : <i>classe B : Manipulateur à cycle pré-réglé</i> .....	17
Figure 1.4 : <i>classe C : Robot programmable</i> .....	17
Figure 1.5 : <i>classe D : Robot "intelligent"</i> .....	18
Figure 1.6 : <i>Coordonnées cartésiennes et cylindriques</i> .....	19
Figure 1.7 : <i>Coordonnées polaires et universelles</i> .....	20
Figure 1.8 : <i>Robot SCARA</i> .....	20
Figure 1.9 : <i>Représentation du volume de travail</i> .....	22
Figure 1.10 : <i>Structure PPP</i> .....	24
Figure 1.11 : <i>Structure RPP (ou PRP)</i> .....	24
Figure 1.12 : <i>Structure RPR</i> .....	24
Figure 1.13: <i>Structure RRP</i> .....	25
Figure 1.14: <i>Structure RRR</i> .....	25
Figure 1.15 : <i>(a) robot sériel à six articulations KR 1000 et (b) robot sériel à cinq articulations KR 470</i> .....	32
Figure 1.16 : <i>robot parallèle (Le Quattro d'Adept Technology)</i> .....	33
Figure 1.17 : <i>Robots redondants à sept ddl : le robot MR20 de Nachi</i> .....	34
Figure 1.18 : <i>Deux des premiers brevets de robots industriels</i> .....	35
Figure 1.19 : <i>Les premiers robots industriels :</i> a) <i>le premier robot Unimate juste avant son entrée en fonction en 1961</i> ....	36
b) <i>la première ligne robotisée qui consiste en 26 robots soudeurs Unimate</i> .	36
Figure 1.20 : <i>Les trois premiers modèles du robot PUMA commercialisés par Unimation</i> .....	37
Figure 1.21 : <i>Les premiers robots de la nouvelle ère de la robotique industrielle :</i> a) <i>le premier robot de Asea (aujourd'hui ABB), fabriqué en 1973</i> .....	38
b) <i>le premier robot de Yaskawa, fabriqué en 1977</i> .....	38
c) <i>(c) le premier robot SCARA, fabriqué en 1980</i> .....	38
Figure 1.22 : <i>robot SCARA (le TP80 de Staubli)</i> .....	40
Figure 1.23 : <i>Deux modèles de la série de robots industriels Foxbot fabriqués par le géant taiwanais Foxconn</i> .....	41
Figure 1.24 : <i>Deux robots susceptibles de révolutionner la robotique industrielle</i> a) <i>UR10 de l'entreprise danoise Universal Robots</i> .....	42
b) <i>Baxter de l'entreprise américaine Rethink Robotics</i> .....	45
Figure 1.25 : <i>La robotique industrielle dans les hopitaux :</i> a) <i>un système développé par KUKA et Siemens Healthcare</i> .....	43
b) <i>un système pour le remplissage de seringues développé par Health Robotics</i> .....	43
Figure 2.1 : <i>Terminologie utilisée (Robot SCARA)</i> .....	44
Figure 2.2 : <i>Organigramme général</i> .....	45

Figure 2.3 : Symboles de l'articulation rotoïde .....	46
Figure 2.4 : Symboles de l'articulation prismatique .....	46
Figure 2.5 : Position du solide .....	47
Figure 2.6 : Angles d'Euler .....	48
Figure 2.7 : Mécanismes .....	49
Figure 2.8 : Chaînes simples ouvertes .....	50
Figure 2.9 : Chaînes complexes .....	50
Figure 2.10 : Porteurs et morphologies possibles .....	51
Figure 2.11: Poignets .....	52
Figure 2.12 : Porteur et poignet .....	53
Figure 2.13 : Schéma d'un robot série .....	54
Figure 2.14 : Transformation homogène .....	55
Figure 2.15 : Numérotation des corps et axes d'articulations .....	57
Figure 2.16 : Numérotation des corps et des axes d'articulations .....	59
Figure 2.17 : Repères de Denavit et Hartenberg .....	59
Figure 2.18 : Localisation du repère associé au corps $i$ .....	61
Figure 2.19 : Localisation des repères pour un robot série de type RRPRRR .....	61
Figure 2.20 : Systèmes de coordonnées et les paramètres de Denavit et Hartenberg .....	64
Figure 2.21 : Manipulateur RRR et sa position initiale .....	64
Figure 2.22 : Bras de robot PUMA 560 .....	66
Figure 2.23 : Système de coordonnées des liaisons et les paramètres des articulations .....	67
Figure 3.1 : Cardan avec des points indiqués de rotation .....	84
Figure 3.2 : Une transformation $T$ permettant l'expression des coordonnées du repère $R_j$ dans le repère $R_i$ .....	88
Figure 3.3 : La rotation du point d'un angle $\alpha$ autour d'un axe $n$ .....	89
Figure 3.4 : Décomposition vectorielle permettant de démontrer facilement la formule de Rodrigues .....	91
Figure 3.5 : A gauche, la table de multiplication des unités des quaternions. A droite, un moyen mnémotechnique pour s'en souvenir .....	98
Figure 3.6 : Ici, dans un éclair de génie, Hamilton découvrit la formule fondamentale des quaternions .....	98
Figure 3.7 : Table de multiplication (Octonions) .....	101
Figure 3.8 : Rotation $(n, \theta)$ .....	105
Figure 4.1 : Angle Dual .....	117
Figure 4.2 : Une ligne définie par ses coordonnées de Plücker .....	118
Figure 4.2.a : Une deuxième ligne définie par ses coordonnées de Plücker .....	119
Figure 4.3 : une droite $l$ .....	121
Figure 4.4 : Géométrie vectorielle duale .....	124
Figure 4.5 : Mouvement hélicoïdal .....	126
Figure 4.6 : Exemple Numérique (mouvement hélicoïdal) .....	129
Figure 4.7 : Rotation $(n, \theta) = q$ .....	143
Figure 4.8 : Rotation autour du centre $C$ .....	166
Figure 4.9 : Mouvement hélicoïdal .....	182
Figure 4.10 : Mouvement hélicoïdal: "General Screw Motion" .....	200
Figure 4.11: Mouvement hélicoïdal ou le théorème de Chasles revisité .....	201

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Estimation de la population en robots .....	03
Tableau 2.1: Valeurs des paramètres de Denavit - Hartenberg correspondantes .....	62
Tableau 2.2 : Les paramètres du manipulateur .....	65
Tableau 2.3 : Paramètres de Denavit et Hartenberg du Robot PUMA 560 .....	69
Tableau 2.4 : Les paramètres (D-H) du poignet du manipulateur .....	76
Tableau 4.1: Nombre d'opérations (Quaternions) .....	150
Tableau 4.2 : Nombre d'opérations (Matrices de rotation) .....	152

# *INTRODUCTION*

# INTRODUCTION

Les scientifiques ont souvent le sentiment que, par leur travail, ils apprennent certains aspects d'eux-mêmes. Dans l'étude de la robotique, la connexion entre le domaine d'études et nous-mêmes est particulièrement évidente. Et, contrairement à une science qui cherche seulement à analyser, la robotique actuellement poursuivie prend la forme d'ingénierie vers une synthèse globale. C'est peut-être pour ces raisons que le champ fascine tant d'entre nous.

L'étude de la robotique se préoccupe de la volonté de synthétiser certains aspects de la fonction humaine par l'utilisation de mécanismes, de capteurs, d'actionneurs et d'ordinateurs. Évidemment, c'est une entreprise énorme, qui semble certain, d'exiger une multitude d'idées provenant de divers domaines "classiques". Actuellement, différents aspects de la recherche en robotique sont effectués par des experts en divers domaines. Il n'est généralement pas le cas que tout un chacun puisse avoir toute la zone de la robotique à sa portée. Il est naturel de s'attendre à un cloisonnement rapide du champ de travail. À un niveau relativement élevé d'abstraction de la robotique, le découpage en quatre grands domaines semble être la prochaine étape.

Il est, d'une autre part, souvent intéressant et parfois nécessaire de changer la représentation d'un problème afin de se ramener à un problème pour lequel on dispose d'outils d'analyse plus naturels qui permettent d'exprimer les idées très clairement et avec moins d'efforts. Dans cette thèse, nous nous fixons pour objet de définir les bases théoriques et les fondements mathématiques préliminaires aux thèmes abordés pour établir nos modèles.

Ainsi, elle est essentielle à la compréhension des raisons qui ont motivé nos choix autant sur le plan de la modélisation géométrique que dynamique du comportement des systèmes articulés. Enfin, nous verrons comment ces méthodes exactes peuvent servir pour l'algébrisation de notions physiques dont l'utilisation sous la forme classique, dans des développements formels, est souvent responsable à la complication des calculs et des modèles. Nous montrerons, plus loin dans ce mémoire, que l'ensemble des moyens que nous proposons font de nos méthodes des outils indispensables à une détermination systématique de modèles généraux des systèmes articulés. Les modèles s'exprimeront alors dans ce langage mathématique sous des formes syntaxiques relativement simples.

C'est dans ce contexte qu'on a choisi d'utiliser l'outil mathématique 'quaternion dual' pour la représentation des transformations homogènes et ainsi du mouvement hélicoïdal.

Ce modeste travail s'articulera autour de quatre principaux chapitres :

Le premier sera consacré à la robotique et son historique en général et à celle des robots sériels en particulier, le deuxième s'intitulera 'modèles géométriques directs de robots manipulateurs (séries)' ou seront définies les différentes architectures possibles, les types d'articulation, les notions de porteurs, de poignets, de liaisons, de mécanismes, de chaînes cinématiques et de

degré de liberté (*d.d.l.*). Les incontournables et bien connus paramètres de Denavit et Hartenberg en robotique seront utilisés pour établir les modèles géométriques directs d'un manipulateur plan et d'un robot Puma. Il sera établi, par contre, que la méthode la plus simple, directe, évidente et rapide pour déterminer ces mêmes modèles pour ces mêmes robots est la technique de conjugaison  $TRT^{-1}$  ou  $TMT^{-1}$ .

Les méthodes classiques ; Les matrices de rotations, les angles d'Euler, la méthode axe-angle et 'un avant gout' de quaternions seront développés et leurs avantages et inconvénients discutés au troisième chapitre.

Il est question au quatrième et dernier chapitre, de nouvelles notions : nombre dual, coordonnées plükeriennes d'une droite quelconque  $l$  dans l'espace 3D, quaternions, quaternions duaux et donc de mouvement hélicoïdal et leurs applications en robotique.

# *CHAPITRE I*

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Historique

Dans les associations que l'on établit entre la robotique et la science-fiction, on serait toutefois incomplet si on oubliait de faire référence à l'œuvre d'Isaac Asimov (6 avril 1992), dont certains livres sont maintenant disponibles dans des collections de poche. Les robots imaginés par Asimov dans les années 40 sont des machines conçues de manière à réaliser leur travail en toute sécurité. Il cristallise cette notion dans trois lois de la robotique, dont la validité est largement reconnue :

1. Un robot ne peut porter atteinte à un être humain. Le robot doit au contraire toujours agir en sorte que la sécurité de l'être humain soit assurée ;
2. Un robot doit toujours obéir à l'homme, sauf s'il devait pour cela transgresser la première loi ;
3. Un robot doit toujours veiller à sa propre sécurité, sauf s'il devait pour cela transgresser les deux lois précédentes.

Mais ce mythe du robot, tel qu'il est largement entretenu par des œuvres de fiction ou de science-fiction, a peut-être parfois ralenti l'introduction de robots dans les processus de production, notamment par une crainte de menace sur l'emploi des hommes : sans doute les premières machines étaient-elles trop axées sur l'universalité des fonctions et trop orientées vers le remplacement sans contrepartie de l'homme par le robot. Dès lors, l'homme s'est senti menacé dans son travail et son emploi. En outre, le prix des premiers robots industriels, un certain manque de fiabilité et l'indisponibilité de certains composants ont incontestablement freiné la diffusion des robots pendant des années.

La robotique est un ensemble de disciplines techniques (mécanique, électronique, automatique, informatique) articulées autour d'un objectif et d'un objet communs. Cet objectif est l'automatisation flexible de nombreux secteurs de l'activité humaine réputés jusqu'à très récemment comme ne pouvant se passer de la présence de l'homme, et l'objet est le robot, sorte de machine universelle dont l'homme rêve depuis toujours (mais qui n'a pas encore la forme de ce rêve !).

D'une part, les progrès réalisés dans les différentes disciplines permettent de construire des robots et autres systèmes "mécatroniques" performants et fiables. D'autre part, les situations économiques actuelles dans les pays industrialisés, notamment la crise qui a suivi le "choc pétrolier" des années 70 et l'émergence de nouveaux pays industrialisés, conduisent à une compétition industrielle très vive, ne laissant survivre que les industries capables de produire à faible coût ou de fournir rapidement des produits nouveaux et/ou de qualité supérieure et garantie. Ces exigences ont conduit au développement d'une automatisation flexible impliquant l'implantation de robots dans de nombreuses branches d'activités.

C'est l'apparition des robots et leur association à d'autres machines automatiques d'inspiration "classique" (par exemple, des machines-outils à commande numérique) qui permettent d'automatiser ou d'essayer d'automatiser des opérations considérées jusqu'ici comme non automatisables.

Il est à noter que, dans l'esprit du grand public, il est deux domaines de la technologie qui sont étroitement liés à la science-fiction : les techniques spatiales et la robotique. Pour le premier de ces domaines, les médias audiovisuels ont largement contribué à le démystifier par une description objective et détaillée des conquêtes successives de l'homme dans l'espace. Pour le second, au contraire, les médias contribuent souvent à entretenir le mythe du robot en le présentant comme un être mécanique constitué de composants mystérieux, capable d'actions humaines, doué de la parole, mettant souvent une force surhumaine au service d'une intelligence primitive, et animé de sinistres intentions. Il est vrai que le terme de robot est emprunté de la science-fiction. Il trouve en effet son origine dans une pièce de l'auteur tchèque Capek, écrite en 1923, intitulée "Les robots universels de Rossum". Le mot "robot" ou "robota" est le mot tchèque, et aussi russe, pour désigner le travail ou un travailleur. Dans la pièce de Capek, les robots sont des humanoïdes créés par Rossum et son fils, dans l'espoir qu'ils se mettront avec obéissance au service de l'homme. Mais la réalité des robots est bien antérieure à l'œuvre de Capek. Nombreux sont les mécanismes automatiques qui ont été imaginés et proposés au cours des siècles. Leurs inventeurs ne disposaient malheureusement pas de la discipline extraordinairement puissante que constitue

l'électronique, pour le contrôle des processus qu'ils imaginaient et le traitement de l'information correspondante.

Le concept d'un robot industriel a été breveté en 1954 par G.C. Devol (U.S. Patent N° 2988237).Le brevet décrit comment construire un bras mécanique commandé capable d'accomplir certaines tâches dans l'industrie. En 1956, une société, UNIMATION, a été créée aux U.S.A., avec pour seul domaine d'activité la robotique ; elle a installé le premier robot industriel dans une entreprise de métallurgie mécanique en 1961. En 1972, soit 16 ans après sa fondation et après avoir investi 12 millions de dollars, UNIMATION a réalisé ses premiers bénéfices, en produisant de vrais robots industriels. Cette année, 1972, a aussi vu l'apparition du premier robot "tout électrique», commercialisé par la firme suédoise A.S.E.A. (maintenant A.B.B.). Mais ce que l'on peut appeler l'ère de la robotique ne s'est engagé que fin des années 70 et début des années 80. [ 1 ], [ 2 ],[ 3 ]

**Tableau 1.1 : Estimation de la population en robots.**

Années pays	1980	1981	1985	1990	2000
Japan	6000	14000	85000	100 360000	- +800000
U.S	3500	5000	25000	150 250000	- +500000
Europe	3700	7300	25000	62 200000	- +300000
total	13200	26300	135000	312 810000	- +1600000

A l'instar de ce que nous venons de vivre avec l'informatique, les projets technologiques en cours nous permettent d'assister à la succession sur une période de quelques années de plusieurs générations de robots industriels.

- Sur le plan technique, cette évolution se concrétise par l'intégration de la mécanique, l'électronique et l'informatique en une nouvelle discipline, la mécatronique, dont la robotique n'est qu'un des aspects au même titre que

la conception et la fabrication assistées par ordinateur (CAO et FAO). Le mot "mécatronique" a été introduit par les Japonais au début des années '80 pour signifier "l'harmonie des capacités mécaniques et électroniques". Plus précisément, la mécatronique est la synergie de l'ingénierie mécanique de précision, de systèmes électroniques de contrôle-commande et d'une approche "systémique" dans la conception des produits et des processus de fabrication.

- Sur le plan économique, le marché mondial connaît une situation de concurrence, liée notamment à la très grande disparité dans les coûts salariaux, qui oblige les pays à plus longue tradition industrielle à accroître la compétitivité de leurs outils de production et à concevoir des systèmes de production flexibles capables de produire des séries relativement petites de produits de types différents (dans une gamme de produits donnée bien entendu).
- Sur le plan social, il apparaît de plus en plus que le risque que constitue pour le marché de l'emploi l'automatisation des processus industriels n'est qu'un des aspects à prendre en compte. Patrons et travailleurs prennent progressivement conscience du fait que le robot peut accroître la dimension humaine du travail, en remplaçant avantageusement l'homme à de nombreux postes de travail pénibles, insalubres ou dangereux. De plus, l'industrie de la robotique peut être elle-même génératrice d'emplois nouveaux plus nobles et plus qualifiés.

### 1.1.2 Justification technico-économique

#### Les domaines de la robotique :

On peut considérer trois grands domaines d'application des robots. Les problèmes à résoudre à l'intérieur de chacun de ces domaines ont une certaine ressemblance, mais ils peuvent être assez différents d'un domaine à l'autre.

**A. Le domaine de la production :** C'est dans ce domaine que l'effort est porté le plus particulièrement par les industriels, qui voient de nombreux avantages à l'utilisation des robots, notamment un accroissement de la productivité et une diminution de la main d'œuvre. En fait, l'association de robots entre eux et avec

d'autres machines amène deux avantages fondamentaux par rapport aux modes de production traditionnels :

1. l'automatisation quasi intégrale de la production qui peut s'accompagner :
  - d'une meilleure qualité du produit fini
  - d'une plus grande fiabilité dans le maintien de cette qualité
  - d'une meilleure adaptation de la quantité produite à la demande.
2. la flexibilité, c'est-à-dire la rapidité de reconfiguration de l'unité de production quand on passe de la fabrication d'un produit à celle d'un produit voisin (exemple : fabriquer des modèles différents de voitures sur la même chaîne) ou bien quand un incident immobilise une machine de l'unité de production. Ces unités de production "reconfigurables" ou adaptatives sont qualifiées de flexibles (en anglais "flexible manufacturing systems"). On parle de:
  - cellule flexible lorsqu'un petit nombre de robots et de machines sont associés (exemple : un tour et un robot de chargement de ce tour)
  - atelier flexible lorsqu'on associe plusieurs cellules flexibles ou bien un nombre assez important de machines et robots.

**B. Le domaine de l'exploration :** Il s'agit d'un problème différent. On veut exécuter des opérations dans un lieu :

1. d'accès difficile : exploitation forestière, construction, maintenance, réparations ou nettoyage de bâtiments, lignes électriques, ....
2. dans un milieu hostile ou dangereux pour l'homme :
  - le milieu sous-marin
  - le milieu spatial
  - le milieu irradié des centrales nucléaires
  - les sites de catastrophes ou d'accidents, survenus ou potentiels : incendies, agressions terroristes, .....
  - les théâtres d'opérations militaires.

La robotique envisage deux types de solution pour ces interventions :

- le robot autonome, envoyé dans le milieu hostile avec une mission bien définie, programmée à l'avance, avec toutefois certaines libertés d'initiative ; actuellement, on sait réaliser des robots doués d'une certaine autonomie, mais le travail qu'on peut leur confier doit rester d'une grande simplicité et ne doit surtout pas exiger que le robot ait à appréhender et comprendre seul tout son environnement.

C'est pourquoi la solution qui est encore aujourd'hui la plus opérationnelle, quoique restant grandement à améliorer, est celle de :

- la télé-opération (appelée aussi télé-présence), qui consiste à envoyer un engin (un robot qu'on appelle machine-esclave) dans ce milieu hostile et à pouvoir contrôler et commander cette machine à distance, à partir d'un poste appelé poste-maître aux commandes duquel se trouve un homme (l'opérateur). C'est donc l'homme qui effectue toutes les tâches de réflexion et de déclenchement des mouvements de l'esclave. Cela nécessite bien sûr le renvoi vers le maître de ce qui se passe dans l'univers de l'esclave. Ce qui est le plus utile, c'est de voir (présence de caméras), mais il importe aussi de sentir les efforts qui s'exercent sur l'esclave. On doit donc avoir des systèmes de vision et des systèmes à retour d'effort.

**C . Le domaine de l'assistance individuelle :** Des films de science-fiction nous montrent souvent des robots à forme plus ou moins humaine, qui remplacent l'homme ou l'assistent dans les tâches ennuyeuses, fatigantes ou dangereuses. Ces robots restent encore du domaine de la science-fiction et, actuellement on peut tout au plus envisager des machines du genre "robot de ménage" qui nettoient les sols par exemple (en évitant les obstacles, personnes, murs, meubles, ... ). L'autonomie de ces robots est encore très limitée, leur coût plutôt exorbitant et leur intérêt très réduit.

Il y a cependant un domaine où la robotique d'assistance individuelle tend à se développer, c'est celui de la robotique médicale permettant d'améliorer les conditions de vie des personnes handicapées, paralysées ou amputées. La robotique recouvre alors le domaine des :

- prothèses (mains et jambes artificielles par exemple) ;
- orthèses, structures rigides motorisées que l'on met autour d'un membre paralysé et qui entraînent ce dernier dans leurs mouvements
  - téléthèses, destinées aux personnes paralysées des quatre membres (tétraplégiques) ; ce sont des robots que la personne handicapée commande à distance (en télé-opération) à partir des zones de motricité volontaire qu'il a pu conserver (par exemple : la langue, la bouche, les muscles des yeux, etc....)
- certaines opérations (chirurgie) médicales.

### **Les raisons de la robotisation de la production :**

Les raisons de la robotisation, ou plus généralement de l'automatisation, de la production, sont essentiellement technico-économiques :

#### **1. le caractère répétitif des tâches à accomplir.**

S'il faut répéter inlassablement les mêmes gestes et opérations simples, une automatisation classique (dite "dure") sera sans doute préférable. Dès que le nombre de variations ou la complexité de la tâche augmente, il faut penser aux robots. A remarquer d'ailleurs que ceux-ci étant de mois en mois stupides et coûteux, une automatisation autrefois effectuées par une machine spécialement conçue à cet effet peut être aujourd'hui réalisée par le simple apprentissage de la tâche par un robot polyvalent. La combinaison de robots et de simples manipulateurs et/ou automates est également une solution extrêmement intéressante à de nombreux problèmes d'automatisation.

#### **2. la production de séries moyennes**

La production de pièces dans l'industrie mécanique se répartit grosso-modo en :

- 1/4 de la production sous forme de grandes séries ;
- 3/4 de la production en petites et moyennes séries.

La production en grandes séries a fait depuis longtemps l'objet d'une automatisation poussée, par la mise en service de machines spéciales non convertibles ("automatisation dure" ou hard automation, le qualificatif hard ayant ici la même signification qu'en informatique, à savoir l'automatisation par matériel).

De plus en plus, il faut aussi automatiser des productions en moyennes et même en petites séries, afin d'utiliser aux mieux les capacités de production et de diminuer les temps de passage sur machine et la quantité de pièces "en cours". Une telle automatisation doit être très flexible ; une robotisation bien conçue permet en effet de supprimer les temps morts nécessaires aux réglages entre des séries différentes, et même de remplacer la production par lots de pièces identiques par une production mélangeant différents produits sur une même chaîne de production (ex. : construction automobile). Il est à noter que cette flexibilité est permise essentiellement par le système informatique de gestion de la production ; on peut donc considérer l'automatisation flexible comme une solution logicielle, tandis que l'automatisation dure correspond à une réalisation matérielle.

Le choix entre automatisation dure, automatisation flexible et production manuelle résulte de l'importance des séries à produire ; en gros, on peut dire que :

- pour les grandes séries, il y a intérêt à utiliser des chaînes de production dédiées et des machines automatiques spécialisées (automatisation dure) ;
- pour les moyennes et petites séries, il vaut mieux utiliser des chaînes de production et des machines automatiques convertibles et reprogrammables, en particulier des robots et des éléments de péri-robotique (automatisation flexible) ;
- pour les très petites séries, une fabrication manuelle, à l'aide de machines "universelles", reste préférable.

Pour une production déterminée, la distinction entre ces différents cas peut être précisée, et le choix de l'une ou l'autre solution peut être dicté, par l'examen de courbes ou de tables donnant le coût de production unitaire en fonction du nombre d'unités produites. Les coûts de production se répartissent en coûts fixes  $F$  indépendants de la quantité de la production et en coûts variables  $V$  qui, en première approximation, sont proportionnels au nombre  $n$  de pièces produites :  
 $V = v \times n$ .

Le coût de production unitaire  $c$  est donc donné par la formule :

$$c = (F + v \times n)/n$$

### **3. Meilleure utilisation ou accroissement de la capacité de production**

La robotisation de goulots d'étranglement d'une chaîne de production et la réduction des temps morts par robotisation permettent souvent un accroissement de 20 à 30 % de la capacité de production. Le travail en 2 ou 3 "pauses" (8 heures/jour) d'une chaîne robotisée permet de pratiquement doubler ou tripler la capacité de production sans demander un investissement supplémentaire pour les machines de base.

### **4. Caractère pénible ou dangereux des opérations**

L'exécution de ces tâches par des robots permet d'éviter l'installation de moyens de protection coûteux, contraignants et souvent peu efficaces, ou d'éviter l'organisation de longues (et coûteuses) périodes de repos pour les personnes exposées. La robotisation permet d'améliorer les conditions de travail et la productivité (ex. : marquage de colis à haute température).

### **5. Relation entre la qualité du produit et le soin apporté à sa fabrication**

Le robot assure une qualité constante tout au long de son travail, alors qu'un ouvrier ne pourra généralement garder la même attention pendant toute sa période de travail et que la qualité de celui-ci risque donc de connaître des fluctuations importantes (ex. construction automobile, points de soudure, rubans de colle).

### **6. Manutentions**

Manutentions entre les opérations successives d'un processus de fabrication : Les robots sont bien adaptés à la manipulations d'objets (pièces, outils, ... ) de masse moyenne (  $\pm 0,1$  kg,  $\pm 5$  kg ou  $\pm 50$  kg suivant la catégorie de robot). On peut citer comme exemple d'application une cellule flexible constituée de plusieurs MOCN (machines-outils à commande numérique) rassemblées autour d'un robot de chargement- déchargement)

## 1.2 Les robots industriels

### 1.2.1 Définitions

La définition que l'on donne actuellement du robot industriel diffère quelque peu selon les pays. C'est au Japon que la définition est la plus vague. On y qualifie de robot *"tout mécanisme permettant d'effectuer, en tout ou en partie, une tâche normalement réalisée par l'homme"*. Le rôle du robot y est essentiellement de servir d'intermédiaire entre l'homme et la machine. Il permet de changer le système de production d'un système à interaction directe entre la machine et l'homme en un système où l'homme gère la machine par l'intermédiaire du robot. Le peu de précision de la définition japonaise du robot a une incidence immédiate sur les statistiques correspondantes : le JIRA (Japan Industrial Robot Association) a recensé en 1981 77000 robots industriels dans l'industrie japonaise. Toutefois, plus de 50% de ces robots sont des manipulateurs à séquence fixe qui ne seraient pas recensés comme tels aux USA ou en France, où la définition d'un robot est beaucoup plus restrictive. La définition américaine du robot (Robot Institute of America) est beaucoup plus spécifique :

*"Un robot est un manipulateur reprogrammable à fonctions multiples. Il est conçu pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils ou des instruments spécialisés suivant des trajectoires variables programmées, en vue d'accomplir des tâches très diverses"*.

Le caractère multifonctionnel du robot n'implique nullement son universalité : le succès de l'insertion d'un robot dans un processus de fabrication est toujours lié au choix du robot le plus approprié à la tâche à effectuer. C'est la définition de l'Association Française de Robotique Industrielle (AFRI) qui est la plus explicite, et aussi la plus proche de la technologie actuelle des robots :

*"Un robot industriel est une machine formée de divers mécanismes comportant divers degrés de liberté, ayant souvent l'apparence d'un ou de plusieurs bras se terminant par un poignet capable de maintenir un outil, une pièce ou un instrument de contrôle. En particulier, son unité de contrôle doit contenir un système de mémorisation, et il peut parfois utiliser des accessoires sensitifs et adaptables qui*

*tiennent compte de l'environnement et des circonstances. Ces machines, ayant un rôle pluridisciplinaire, sont généralement conçues pour effectuer des fonctions répétitives, mais sont adaptables à d'autres fonctions".*

En plus de la définition américaine, la définition française, du fait qu'elle envisage la perception de l'environnement par le robot, implique une certaine prise de décision. Elle annonce la génération des robots dits "intelligents".

### **1.2.2 Caractéristiques**

Deux caractéristiques essentielles se dégagent des définitions précédentes, notamment de celle du RIA :

- la variété des tâches que le robot peut effectuer
- la possibilité de reprogrammation.

La première de ces caractéristiques, appelée aussi "versatilité", est l'aptitude physique du robot à l'exécution de tâches diverses et/ou à l'exécution diversifiée d'une même tâche. Elle est liée aux potentialités géométriques et mécaniques du robot et implique que celui-ci possède une structure à géométrie variable ; elle dépend aussi d'autres éléments, en particulier de la structure de l'organe terminal du robot et notamment de la possibilité d'y adapter des outils différents.

La seconde caractéristique, qui distingue les définitions américaine et française de la japonaise, a été rendue possible par les développements de la micro-électronique et de la micro-informatique dans les années 70, c'est ce qui a permis l'essor de la robotique industrielle.

La définition française implique la possibilité d'une troisième caractéristique : l'auto-adaptabilité à l'environnement, c.-à-d. une capacité d'initiative du robot pour mener à bien des tâches incomplètement spécifiées, malgré des modifications imprévues de l'environnement ; ceci implique des capacités d'appréhension de l'environnement (capteurs), des capacités de réflexion pour l'analyse de la tâche

et l'élaboration d'une stratégie d'exécution (IA) et des modes de commande automatique adéquats.

### 1.2.3 Eléments constitutifs d'un robot

Un robot est essentiellement une structure mécanique polyarticulée, équipée d'actionneurs, de capteurs, d'une unité de traitement de l'information et de sources d'énergie ; l'analogie avec l'être humain et plus généralement avec tout individu vertébré est immédiate : squelette, muscles, sens et cerveau. On voit aussi ici les concours des différentes disciplines : mécanique, électronique, automatique et informatique.

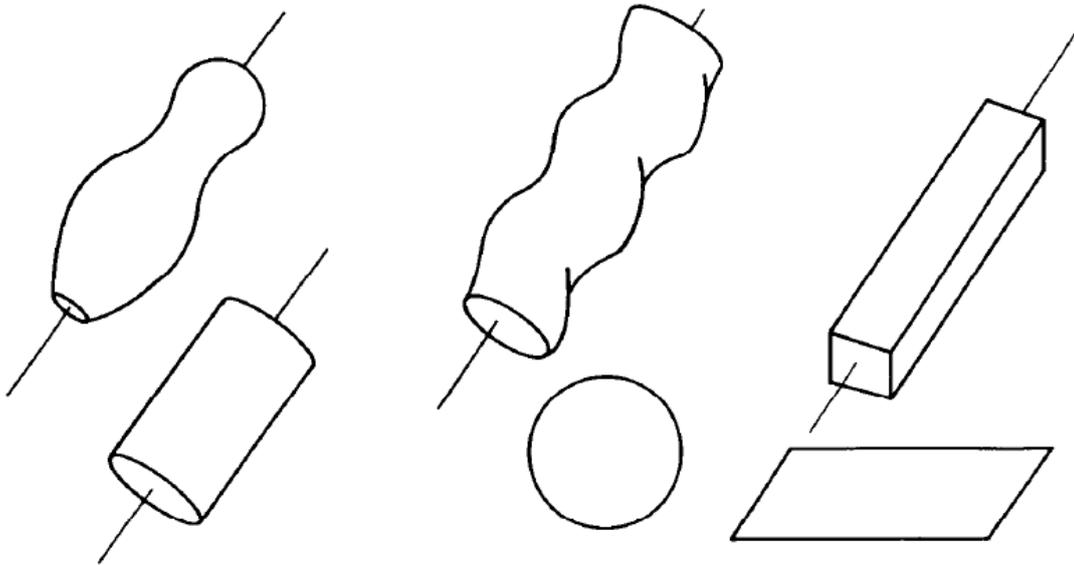
Le robot est en effet conçu pour saisir et déplacer des objets. Ceci suppose donc une structure mécanique. La maîtrise d'un objet dans l'espace implique sa localisation et son orientation. Pour localiser un point de l'objet dans l'espace, il faut disposer de 3 degrés de liberté (ddl), qui peuvent être des translations ou des rotations. Un point de l'objet étant fixe, si l'on désire orienter l'objet de manière quelconque, il faut disposer en plus de 3 autres ddl qui sont nécessairement des rotations (si possible autour d'axes orthogonaux concourants).

En 1870 Franz Reuleaux, un ingénieur Allemand simplifie les choses avec sa définition de paires : Chaque mouvement de base est un mouvement relatif entre deux surfaces identiques ; une surface pleine et l'autre creuse possédant la même forme ou géométrie :

Sur la figure suivante ; un seul (ddl) pour les trois premières paires de gauche à droite :

Rotation **R**, Hélicoïdal **H**, Prismatique **T** (ou **P**)

Cylindrique **C** (2(ddl)) , Sphérique **S** (3(ddl)) , Planaire **E** (3(ddl))



**Figure 1.1 :** *Les six types d'articulation de base (Reulaux)*

Les 3 premiers ddl définissent ce que l'on appelle le porteur (bras articulé), alors que les suivants constituent un poignet à l'extrémité duquel se trouve l'organe terminal du robot. Il faut donc, et il suffit de, 6 ddl pour qu'un système soit complet (cela ne signifie pas qu'il sera universel ; mais que l'on doit rechercher pour un robot, une multifonctionnalité maximale).

De nombreuses tâches industrielles ne nécessitent pas 6 degrés de liberté (assemblage de circuits imprimés ou de mécanismes plans, peinture, soudure,...). Cependant, il est très rare de trouver un porteur qui n'ait pas ses 3 ddl ; c'est presque toujours sur le poignet que se fait la réduction de mobilité. Inversement, dans certains cas, on a besoin de plus de mobilité, soit pour des raisons de fonctionnalité (fonctions spécialisées, robot à plusieurs bras), soit pour des raisons de précision ou d'accessibilité. L'utilisation d'un nombre de degrés de liberté, c.-à-d. d'un nombre de liaisons cinématiques (par exemple, articulations) supérieur à celui des ddl effectifs peut être justifiée par la nécessité de contourner des obstacles ou d'utiliser une structure dont les éléments sont de petite longueur. En effet, la précision d'exécution de la tâche demande des bras de levier assez petits de façon à réduire les déformations et vibrations dues à l'élasticité de la structure mécanique et à ne pas demander des rotations trop petites et difficilement contrôlables. Ceci implique que l'on utilise dans la mesure du possible, les ddl situés immédiatement en amont du point à déplacer. Par conséquent, si les

dimensions du volume dans lequel doit travailler le robot sont grandes vis à vis des longueurs des éléments de celui-ci, il faut placer le porteur sur un véhicule qui amènera le porteur dans la région où le robot doit travailler. Ce véhicule peut être doté de 1 ddl (translation, c'est le cas de certains robots industriels) à 6 ddl (3 translations et 3 rotations ; c'est le cas de satellites artificiels ou de sous-marins équipés de manipulateurs). Il importe donc de faire la distinction entre degrés de liberté (ddl), qui définissent la position et l'orientation de l'organe terminal du robot dans l'espace, et degrés de mobilité (ddm) correspondant aux différents mouvements possibles du robot et donc aux différentes configurations possibles de celui-ci. C'est pourquoi il est préférable de parler d'articulations, d'axes, de liaisons cinématiques ("joints") ou de ddm plutôt que ddl. (Il faut signaler que certains constructeurs ou vendeurs de robots mentionnent dans leurs documents des faux degrés de liberté, par exemple la commande de fermeture ou d'ouverture de la pince qui constitue l'organe terminal du robot ; ces faux degrés de liberté ne participent évidemment pas au déplacement ou à l'orientation de l'organe terminal du robot).

La structure mécanique d'un robot industriel comprendra par conséquent :

- un porteur doté généralement de 3 ddm, parfois plus
- un poignet doté de 1 à 3 ddm
- parfois un véhicule, possédant le plus souvent 1, rarement 2 ou 3 ddm.

Lorsqu'il y a plus de 6 ddm, certains de ceux-ci sont nécessairement redondants. Cette redondance peut aussi exister lorsqu'il y a moins de 6 ddm, par exemple, la localisation d'un point dans un plan correspond à 2 ddl mais peut se faire au moyen de  $n$  ( $\geq 2$ ) rotations autour de  $n$  axes distincts perpendiculaire à ce plan.

Les autres éléments constitutifs du robot sont essentiellement :

- les actionneurs (motorisation) qui font mouvoir les différentes articulations.
- les capteurs qui recueillent des informations sous forme logique, analogique ou numérique, il y a au moins des capteurs de déplacements ou de positions de différentes articulations, et parfois aussi des capteurs de vitesse, de force, ...

- l'unité de traitement de l'information, qui peut généralement se décomposer en plusieurs éléments :
- une (ou plusieurs) unité(s) de contrôle commande qui traite(nt) l'information fournie par les capteurs et assure(nt) le pilotage des actionneurs.
- un système de programmation qui assure la consommation avec un opérateur ou un réseau de communications, et lui permet de définir des tâches que le robot doit effectuer.

## 1.2 Classification des robots

On peut classer les robots d'un point de vue fonctionnel ou d'après leur structure géométrique.

### 1.3.1 Classification fonctionnelle

Le nombre de classe et les distinctions entre celles-ci varient de pays à pays (6 classes au Japon, 4 en France). L'A.F.R.I. distingue 4 classes illustrées ci-dessous :

- Classe A : manipulateurs à commande manuelle ou télécommande.
- Classe B : manipulateurs automatiques à cycles pré-réglés (le réglage se fait mécaniquement par cames, butées, la commande peut se faire par automate programmable) ; on peut distinguer entre manipulateurs à cycle fixe et manipulateurs à cycle programmable.
- Classe C : robots programmables ; c'est la première génération de robots industriels ; ils répètent les mouvements qu'on leur a appris ou programmés, sans informations sur l'environnement ou la tâche effectuée. On peut aussi faire la distinction entre robots "play-back" qui reproduisent la tâche apprise et robots à commande numérique qui peuvent être programmés hors-ligne. Pour de nombreux robots, l'apprentissage de la tâche se fait à l'aide d'un "syntaxeur" ("boîte à boutons", "teach pendant") qui permet à un opérateur d'amener le robot en un certain nombre de points, qui sont ensuite mémorisés ; lors de l'exécution de la tâche, le robot

suivra une trajectoire passant successivement par tous les points programmés, le passage d'un point au suivant se faisant suivant un profil de vitesse en fonction du temps qui est prédéfini (triangulaire ou trapézoïdal), l'opérateur n'ayant qu'à choisir la fraction de la vitesse maximum à laquelle il souhaite que le robot effectue la tâche. Pour certains robots, par exemple les robots de peinture, qui doivent suivre une trajectoire complexe qu'il est difficile d'exprimer mathématiquement, un opérateur humain spécialiste de la tâche effectue la trajectoire en guidant le bras du robot à l'aide d'un "pantin", et l'entièreté de la trajectoire est mémorisée par le robot.

- Classe D : robots "intelligents" ; on trouve actuellement des robots de seconde génération qui sont capables d'acquérir et d'utiliser certaines informations sur leur environnement (systèmes de vision, détecteurs de proximité, capteurs d'efforts, ... ). On étudie des robots de troisième génération, capables de comprendre un langage oral proche du langage naturel et de se débrouiller de façon autonome dans un environnement complexe, grâce à l'utilisation de l'intelligence artificielle.

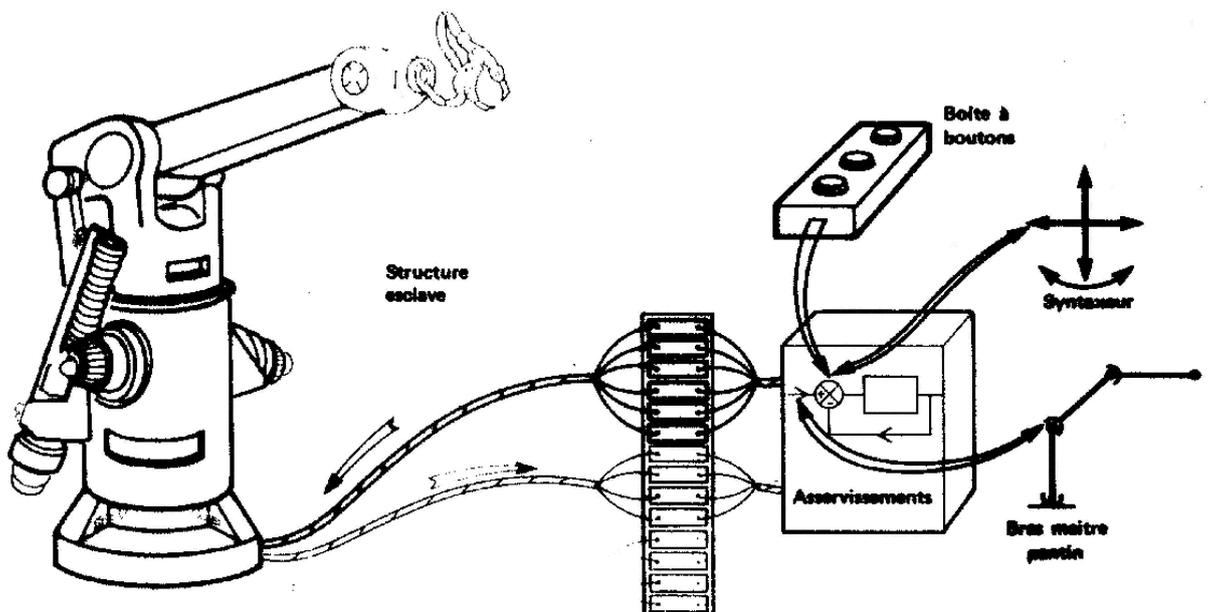


Figure 1.2 : classe A : Télémanipulateur

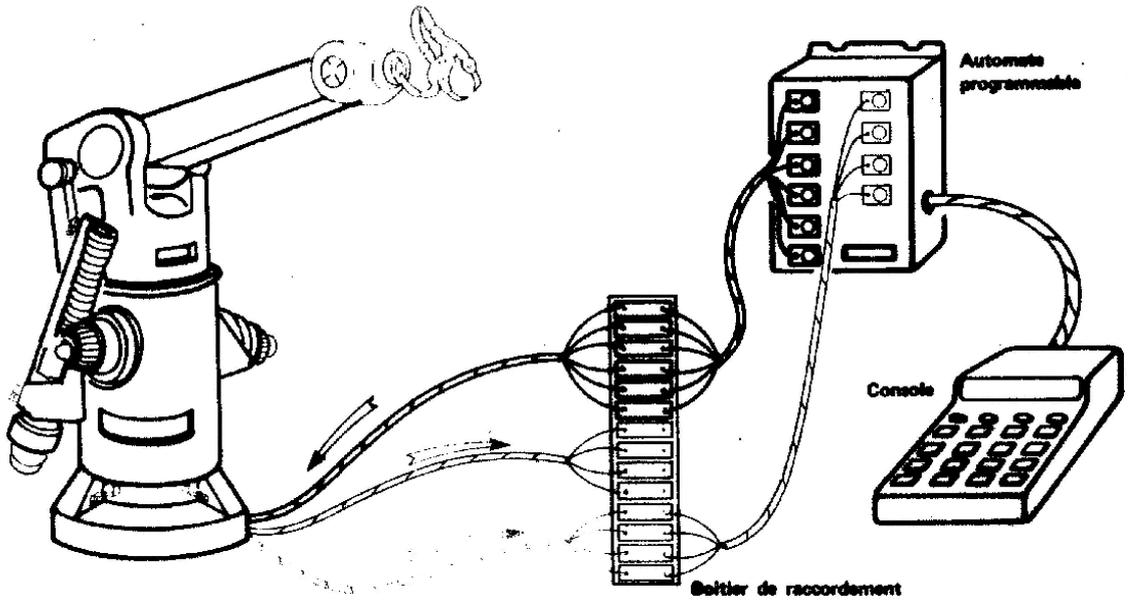


Figure 1.3 : classe B : Manipulateur à cycle pré-réglé

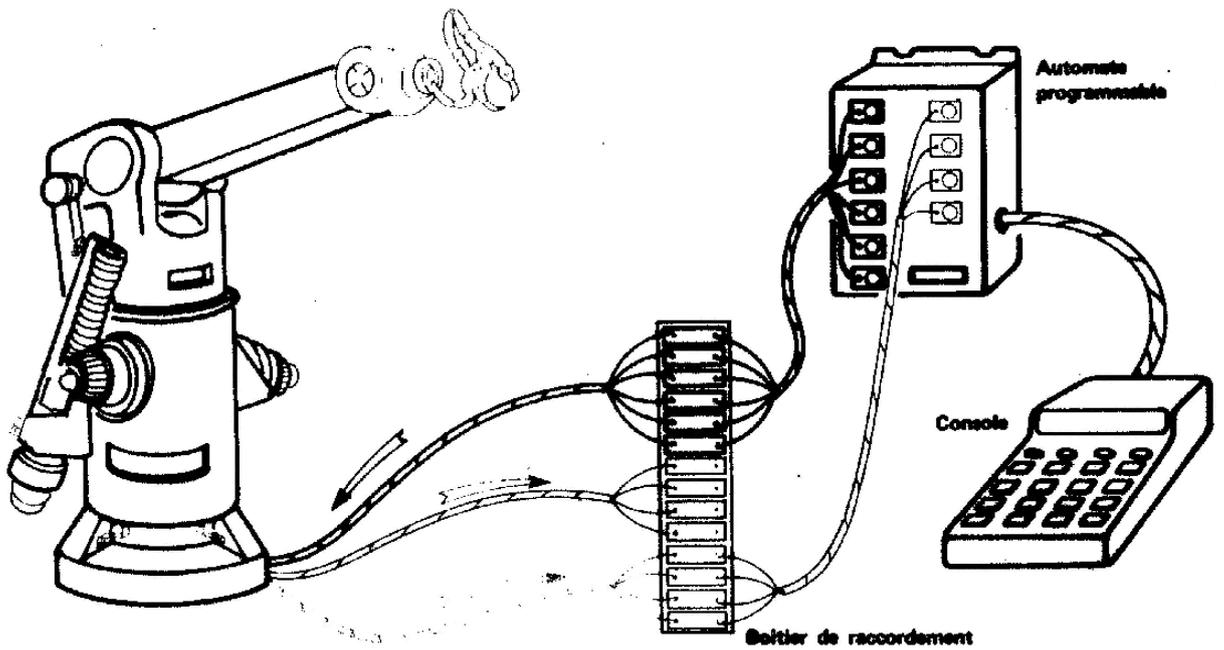


Figure 1.4 : classe C : Robot programmable

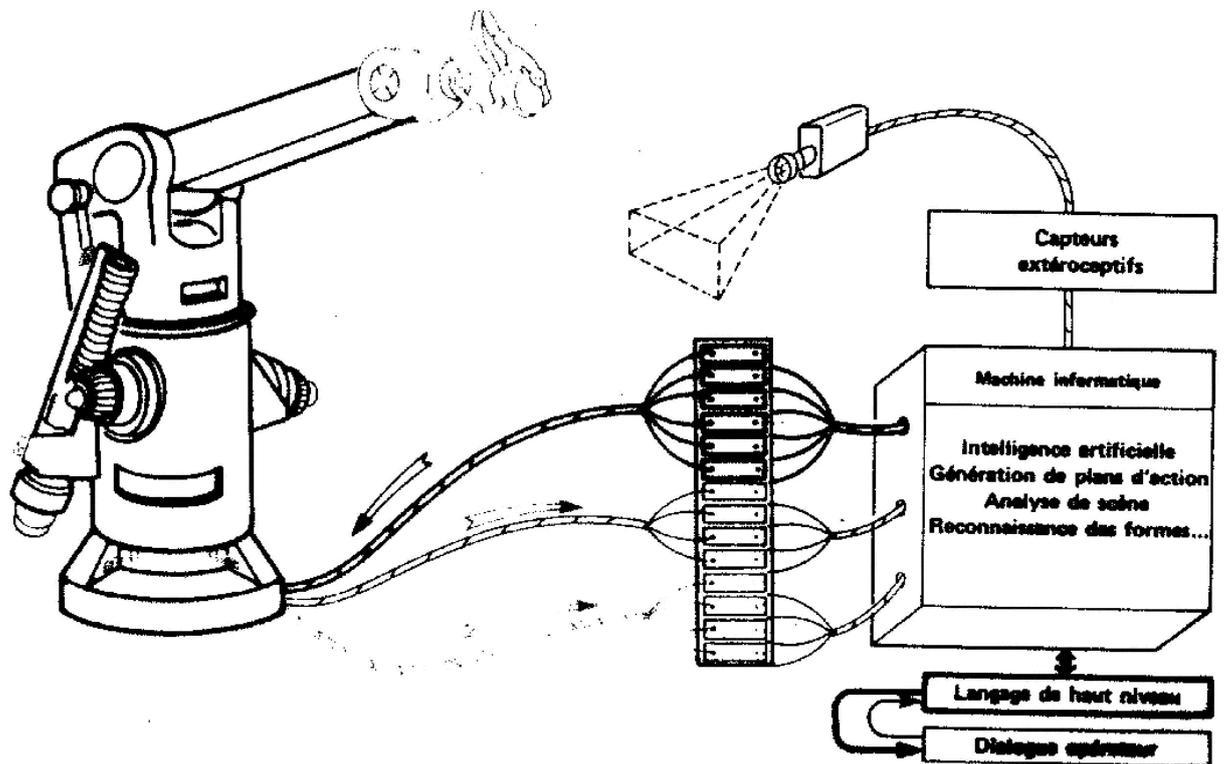


Figure 1.5 : classe D : Robot "intelligent"

En Europe et aux U.S.A., seuls les éléments des classes C et D sont appelés "robots", les américains appellent aussi manipulateurs ou robots "pick and place" certains manipulateurs de classe B.

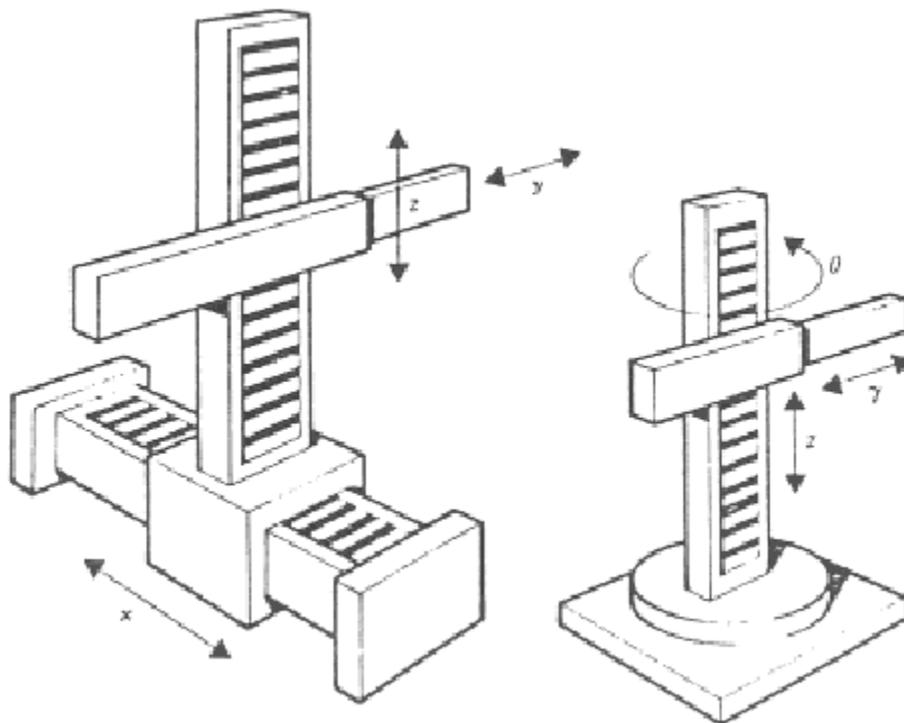
### 1.3.2 Classification géométrique

On peut aussi classer les robots suivant leur configuration géométrique, autrement dit l'architecture de leur porteur. Les 3 premiers ddm d'un robot peuvent être réalisés avec un grand nombre de combinaisons de translations (max. 3T) et de rotations (max. 3R), autrement dit par des articulations prismatiques (P) ou rotoïdes (R) ; en pratique, on n'utilise que 4 ou 5 d'entre elles:

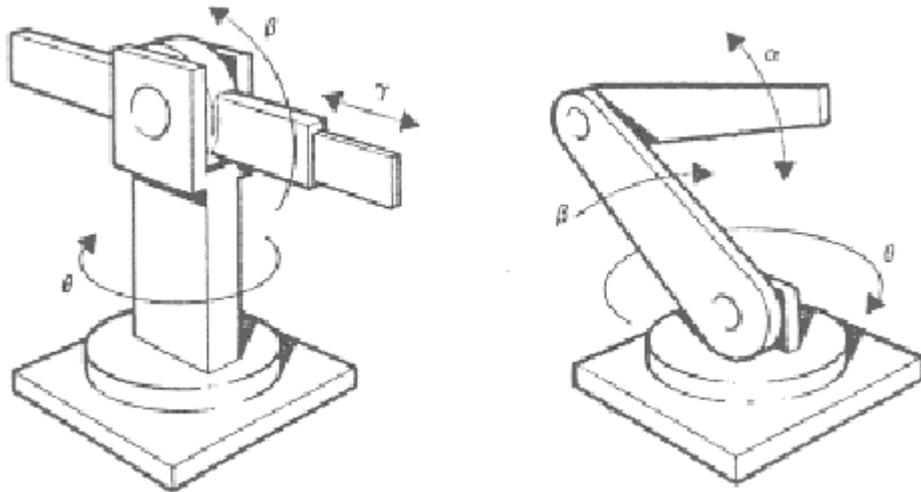
- porteur cartésien (TTT ou PPP) : les 3 axes sont animés d'un mouvement de translation.
- porteur en coordonnées cylindriques (RTT ou RPP) : un mouvement de rotation et une translation axiale, complétées par une translation radiale

— porteur en coordonnées polaires ou sphériques (RRT ou RRP) : deux rotations (longitude et latitude) autour d'axes orthogonaux, complétées par une translation radiale.

— porteur en coordonnées universelles, appelé aussi configuration polyarticulée ou anthropomorphe (RRR), trois rotations dont les deux dernières se font autour d'axes parallèles orthogonaux au premier, les trois articulations correspondant respectivement au tronc (base), à l'épaule et au coude d'un être humain.



**Figure 1.6:** *Coordonnées cartésiennes et cylindriques*



**Figure 1.7:** *Coordonnées polaires et universelles*

Une cinquième architecture comprend deux rotations autour de deux axes parallèles, précédées ou suivies d'une translation dans la même direction (éventuellement celle-ci peut être reportée au niveau du poignet, qui peut aussi tourner autour du même axe, soit au total 4 ddm). Cette architecture est celle des robots SCARA (Selective Compliance Arm for Robotic Assembly) que l'on utilise dans des opérations d'assemblage.



**Figure 1.8 :** *Robot SCARA*

## 1.4 Performances des robots

Lorsqu'on désire fabriquer un appareil, une machine ou un équipement quelconque, l'utilisateur ou celui qui passe commande présente un cahier des charges. Ce cahier des charges définit les contraintes d'exploitation et il est souvent aisé de mesurer les performances de l'appareillage réalisé car elles s'expriment vis-à-vis de ces contraintes. Celles-ci peuvent être le poids et

l'indépendance énergétique pour une machine transportable, le respect de la précision, la vitesse d'exécution, la fiabilité, etc... pour d'autres machines. On a vu qu'une des caractéristiques d'un robot est la versatilité, c'est-à-dire cette possibilité de faire des tâches diverses mais dont on ne sait pas dire lesquelles à l'avance. Comme on ignore à priori les utilisations du robot, on peut difficilement connaître les paramètres de référence permettant d'établir les performances. Certains se sont lancés dans des énumérations de qualité impliquant plusieurs centaines de paramètres si bien qu'il est impossible de s'y retrouver. En réalité, l'utilisateur potentiel de robots industriels se pose des questions de quatre ordres dont les réponses englobent les performances pratiques :

1. J'envisage l'utilisation d'un robot pour faire telle ou telle tâche : en est-il capable ?
2. Qu'est-ce que l'utilisation du robot m'impose comme contraintes techniques ? (place, fluides, protection contre les poussières, renforcement du sol, liaison avec une chaîne de production, mise en place de sécurités, etc.)
3. Qu'est-ce que l'utilisation du robot impose au niveau des moyens humains ? (facilité de programmation, de réglage, etc.)
4. Quel est le coût et la rentabilité de l'opération ? (investissement, maintenance, augmentation de productivité, etc.) On peut regrouper les questions 2 et 4, qui ont une incidence directe sur le coût, et diviser l'analyse des performances d'un robot en 3 classes correspondant aux questions précédentes.

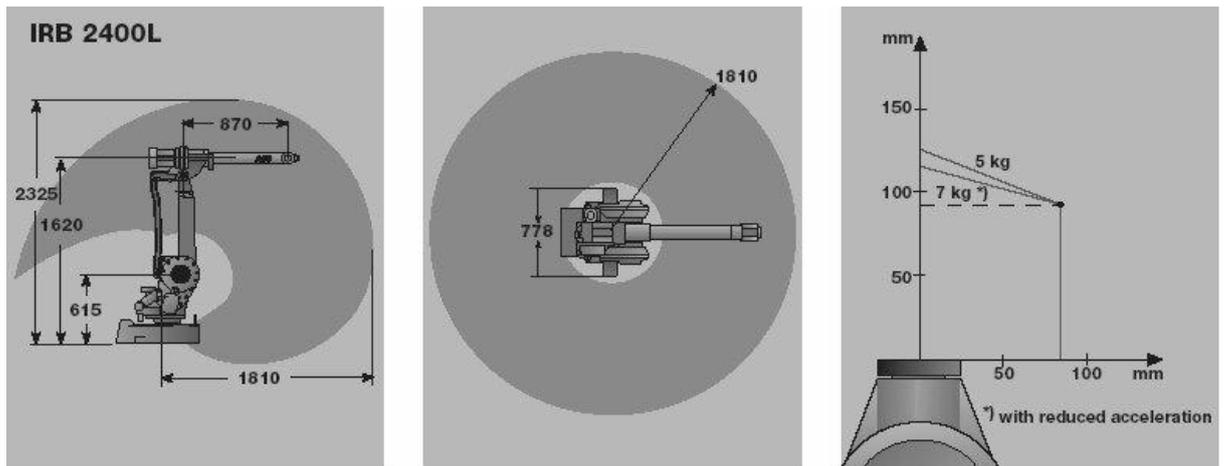
#### **1.4.1 Les performances-tâches**

Un robot appliquant des efforts et des déplacements à son organe terminal, on peut en cerner les caractéristiques qui sont importantes en pratique.

##### **1) Le volume atteignable (volume de travail)**

Le volume de travail en position d'un robot manipulateur est défini comme l'espace physique engendré par un point de l'organe terminal lorsque la configuration du robot évolue. Il s'exprime en unités volumiques, mais la forme de son enveloppe (qui peut-être compliquée puisque formée par la combinaison des mouvements de plusieurs articulations) est aussi importante. Il est plus simple et

plus parlant de la décrire par une surface inscrite au vrai volume mais de forme simple (par exemple intersection de sphères ou des parallélépipèdes ou des ellipsoïdes). Sinon il faut une représentation graphique. Le volume de travail est alors habituellement représenté par deux sections perpendiculaires choisies en fonction du type de robot manipulateur, cette représentation étant préférable à une seule vue en perspective.



**Figure 1.9:** Représentation du volume de travail

Remarquons que le choix du point précédemment évoqué est arbitraire. Certains industriels considèrent le centre du poignet, s'il existe, et obtiennent donc un volume de travail minimal. D'autres prennent le point situé à l'extrémité de l'organe terminal ou encore le centre de la platine de fixation de celui-ci, qui existe sur tous les modèles. Ceci démontre la relative imprécision qui affecte la définition de cette caractéristique. De plus, les orientations de l'organe terminal qu'il est possible d'obtenir en un point du volume de travail, fonctions de la configuration, n'apparaissent pas dans la définition de ce volume de travail.

Le volume de travail, bien qu'étant une caractéristique approximative de la performance d'un robot manipulateur, permet cependant de comparer les différentes classes de robots, à la fois du point de vue du volume proprement dit et de sa forme. Si on admet que chaque liaison rotoïde permet une rotation d'un tour complet ( $360^\circ$ ), on obtient les résultats suivants pour un robot manipulateur doté d'un poignet quelconque dont le centre O est le point de référence (les volumes de travail sont représentés en perspective, pour chacune des structures de base) :

— robot PPP

Le volume de travail est un parallélépipède dont les dimensions sont les translations permises par les trois liaisons prismatiques, d'où :

$$V = L_1 L_2 L_3$$

— robots RPP et RPR ou RRP : Le volume de travail est un cylindre plein ou creux, autrement dit un tore à section rectangulaire, dont la hauteur  $L$  est la translation permise par une liaison prismatique et dont les rayons intérieur et extérieur,  $R_i$  et  $R_e$ , sont fixés soit par la disposition d'une liaison prismatique et la translation qu'elle permet, soit par les longueurs des deux parties du bras :

$$V = \pi L (R_e^2 - R_i^2)$$

— robots RRP et RRR : Le volume de travail est une sphère creuse, dont les rayons intérieur et extérieur,  $R_i$  et  $R_e$ , sont fixés soit par la disposition de la liaison prismatique et la translation qu'elle permet, soit par les longueurs des deux parties du bras :

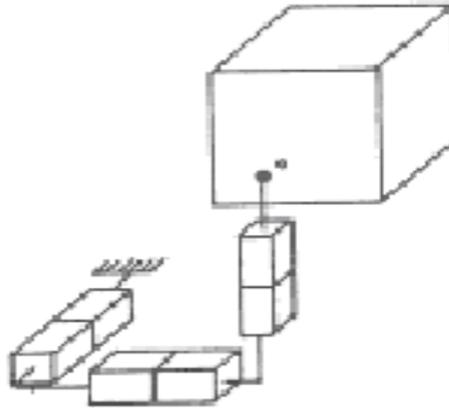
$$V = 4/3 \pi (R_e^3 - R_i^3)$$

Pour pousser la comparaison plus loin, nous ferons les hypothèses suivantes, qui seront justifiées plus loin et qui sont réalisées au moins approximativement dans les robots industriels :

1. Chaque liaison rotoïde permet une rotation d'un tour complet ( $360^\circ$ ),
2. Les différentes parties du bras manipulateur ont la même dimension "principale" (la plus grande dimension ou longueur)  $L$
3. Chaque liaison prismatique permet une translation égale à  $L$ . Dans ces conditions, on a :

— robot PPP : Le volume de travail est un cube de côté  $L$  :

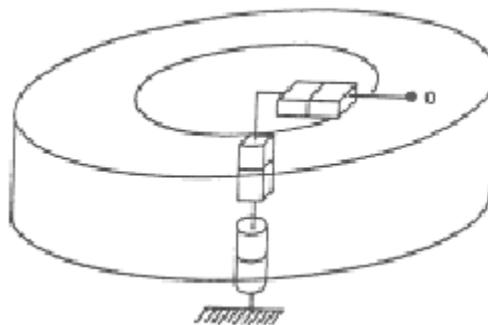
$$V = L^3$$



**Figure 1.10 :** *Structure PPP*

— robot RPP : Le volume de travail est un cylindre creux, autrement dit un tore à section carrée, de hauteur  $L$  et de rayons intérieur et extérieur  $L$  et  $2L$

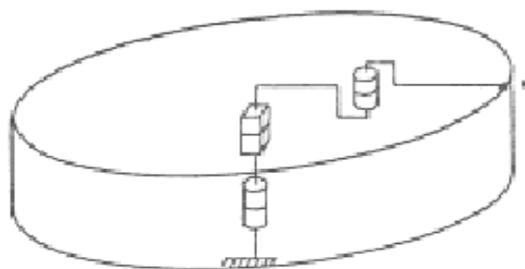
$$V = 3\pi L^3 \approx 9L^3$$



**Figure 1.11 :** *Structure RPP (ou PRP)*

— robot RPR ou RRP : Le volume de travail est un cylindre de hauteur  $L$  et de rayon  $2L$

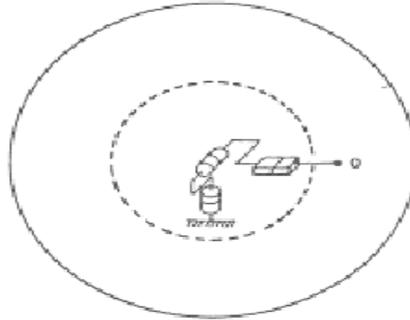
$$V = 4\pi L^3 \approx 12L^3$$



**Figure 1.12 :** *Structure RPR*

— robot RRP : Le volume de travail est une sphère creuse de rayons intérieur et extérieur  $L$  et  $2L$  :

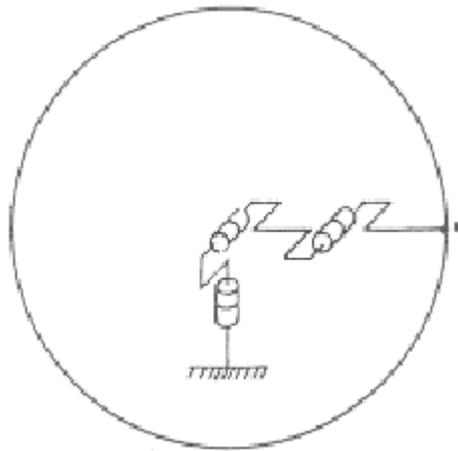
$$V = 28/3(\pi L^3) \approx 29L^3$$



**Figure 1.13:** *Structure RRP*

— robot RRR : Le volume de travail est une sphère de rayon  $2L$  :

$$V = 32/3 \pi L^3 \approx 34L^3$$



**Figure 1.14:** *Structure RRR*

Cette comparaison montre la nette supériorité des structures RRP et RRR qui, à dimensions égales des différentes parties du manipulateur, possèdent un volume de travail environ 30 fois supérieur à celui de la structure PPP. Les structures RPP et RPR, avec un volume de travail environ 10 fois supérieur à celui de la structure PPP, offrent donc un volume de travail moyen.

En réalité, si on tient compte des limitations sur les débattements permis par chaque liaison et des dimensions principales des corps constituant le robot manipulateur, les volumes de travail réels diffèrent légèrement de ceux donnés précédemment.

On cherche cependant toujours à maximiser le volume de travail pour une élongation donnée. Pour les robots PPP, RPP et RRP, c'est assez facile ; pour les robots RRP et RRR, le problème de maximisation est beaucoup plus complexe et la solution n'est pas triviale, mais il est cependant possible de justifier les hypothèses précédentes par une analyse intuitive simple.

## 2) La capacité de charge

La capacité de charge est la charge que peut porter et manipuler le robot. Evidemment, les couples qui doivent développer les actionneurs sont fonction de la configuration du robot. C'est pourquoi la charge maximum indiquée dans les catalogues des constructeurs de robots n'est souvent supportable que dans une fraction du volume de travail, mais pas dans tout le volume atteignable ni avec toutes les orientations atteignables. Il faudrait plutôt fournir 2 chiffres : la charge maximum soulevable dans la configuration la meilleure et la charge utile c'est-à-dire celle qui est effectivement manœuvrable dans tout le volume atteignable. Actuellement, on peut distinguer trois grandes catégories de robots suivant leur capacité de charge :

- robots de grande capacité : 50 à 100 kg
- robots de capacité moyenne : 5 à 10 kg
- robots de petite capacité : quelques centaines de grammes.

## 3) Précision, répétabilité et résolution

Pour expliquer ces notions, considérons un robot manipulateur quelconque dont l'organe terminal est immobile dans une situation  $A$  et doit être déplacé pour arriver à une vitesse nulle dans une situation  $B$ . Si ce déplacement est exécuté un grand nombre de fois, il est possible de définir une situation moyenne  $B_{\text{moy}}$  qui

correspond à la moyenne des situations  $B_i$  atteintes au cours des déplacements répétés :  $B_{\text{moy}}$  est le centre de la plus petite sphère qui contient tous les points  $B_i$ .

L'écart entre la situation  $B$  programmée et la situation moyenne  $B_{\text{moy}}$  définit la *précision statique* du robot manipulateur. Elle caractérise l'aptitude du robot à situer l'organe terminal en conformité avec la situation programmée. Cette précision peut être fonction des situations  $A$  et  $B$  (à l'intérieur du volume de travail) et du type de mouvement choisi pour effectuer le déplacement. Elle est également fonction :

- de la précision statique des chaînes d'asservissement de position des actionneurs,
- de la flexibilité de chacun des corps du manipulateur et de la charge portée par celui-ci,
- de la raideur et des jeux des transmissions mécaniques, notamment dans les réducteurs de vitesse,
- de la résolution des capteurs de position.

Compte tenu de ces multiples sources d'erreurs, on peut évaluer la précision en position de l'organe terminal à quelques dixièmes de mm pour un robot industriel de petite ou moyenne capacité de charge et à quelques mm pour un robot de grande capacité de charge ; quant à la précision en orientation de l'organe terminal, elle est généralement de quelques dixièmes de degré.

L'écart maximal entre la situation moyenne  $B_{\text{moy}}$  et les situations atteintes  $B_i$ , autrement dit le rayon de la sphère définie plus haut, détermine la répétabilité du robot. Pour la plupart des robots industriels, elle est nettement meilleure que la précision, généralement elle est de l'ordre du dixième de mm. C'est une des raisons pour lesquelles beaucoup de constructeurs ne mentionnent que la répétabilité dans leurs catalogues de robots, une autre raison étant que c'est évidemment la répétabilité qui intéresse les utilisateurs lorsque le robot doit répéter un grand nombre de fois la même tâche. Dans une telle application, il est en effet possible de corriger l'imprécision statique au cours d'un ou plusieurs essais préliminaires en programmant une situation désirée  $B$  différente de celle que l'on doit effectivement atteindre ; on peut en effet comparer l'imprécision

statique à une erreur systématique tandis que la répétabilité est associée à des erreurs accidentelles.

Enfin, on appelle *résolution* d'un robot le plus petit écart entre la situation initiale  $A$  et la situation programmée  $B$  qui puisse se traduire par une modification réelle de la situation de l'organe terminal, c.-à-d. qui entraîne un déplacement de celui-ci.

#### 4) La vitesse

C'est évidemment une caractéristique fondamentale pour les robots industriels, puisqu'elle déterminera les temps nécessaires à l'exécution d'une tâche. Or, ce sont ceux-ci qui intéressent essentiellement l'utilisateur. Dans l'évaluation des performances à priori, on ignore naturellement ces tâches. Il faut donc s'en tenir à des vitesses de déplacement et de rotation de l'organe terminal.

Soient :  $x$  le vecteur des coordonnées opérationnelles qui définissent la position et l'orientation de l'organe terminal dans l'espace de la tâche, et  $q$  le vecteur des coordonnées articulaires (paramètres de configuration) qui définissent la configuration du robot. La connaissance du modèle géométrique de celui-ci permet d'écrire :

$$x = f(q)$$

D'où en dérivant par rapport au temps, le vecteur des vitesses de déplacement et de rotation de l'organe terminal :

$$x' = J(q)q'$$

Si les actionneurs déplacent les différents corps du robot à des vitesses constantes dans l'espace articulaire, la vitesse instantanée vue dans l'espace de la tâche (c'est ce qui est intéressant pour l'utilisateur) dépend de la configuration du robot.

Les constructeurs sont assez évasifs sur les performances en vitesse de leurs robots. On parle d'ordre de grandeur ou de vitesse maximum, mais toujours pour des translations de l'organe terminal (1 à 2 m/s). On donne aussi souvent les vitesses de rotations articulaires maximales (1 rad/s à 1 tour/s), mais il est difficile d'en déduire la vitesse instantanée dans l'espace de la tâche, qui est la grandeur que l'utilisateur attend.

### **5) L'orientation possible de l'organe terminal**

De par la présence de butées sur chaque articulation, et aussi parfois de par l'existence de couplages mécaniques entre articulations, il n'est pas toujours possible d'atteindre le débattement maximum sur chacun des degrés de mobilité de l'organe terminal dans tout le volume atteignable.

Il y aurait donc lieu, soit de donner les débattements angulaires minimaux de l'organe terminal par rapport au repère fixe dans tout le volume atteignable, soit de fournir une cartographie de ces débattements. (Ceci serait plus utile que la présentation des constructeurs, qui donnent le débattement de chaque articulation à partir d'une position de référence, en négligeant les problèmes de butées et de couplages qui modifient quelquefois de façon non négligeable les possibilités du mécanisme).

### **6) La fiabilité**

Bien qu'elle mette en jeu tous les éléments présents dans le robot, c'est une donnée qui intéresse au plus haut point l'utilisateur, même s'il ignore tout du système. C'est pourquoi on peut la classer dans les performances-tâche. Comme pour tout autre système, elle sera définie par un taux de pannes, celui-ci étant exprimé soit par la fraction du temps durant laquelle le robot ne remplit pas la fonction qui lui est assignée, soit par un MTBF (Mean Time Between Failures). On exprime aussi souvent cette fiabilité à l'aide d'un diagramme fréquentiel (fréquence de pannes) tout au long de la vie du système. Le robot peut être sujet à deux grandes catégories de pannes :

- arrêt total du fonctionnement.
- dégradation des performances. Par exemple sur la précision spatiale : une dérive plus ou moins lente peut se produire et, après un certain temps, le robot n'exécute plus la tâche. Ou bien un degré de mobilité ne fonctionne plus (il serait intéressant alors d'avoir une redondance des degrés de mobilité qui permette par une procédure automatique de compenser la défaillance en attendant de pouvoir réparer le robot).

### **7) Les possibilités de synchronisation avec d'autres machines**

Dans une fabrication, les tâches successives sont reliées temporellement. Il faut donc pouvoir synchroniser le robot avec d'autres machines et avec un réseau informatique de gestion de la production. Par conséquent, un robot ne peut pas être un système fermé et isolé, sans possibilités de communication avec le monde extérieur. Le nombre d'entrées et sorties (1-0) permettant des échanges d'informations avec l'extérieur, y compris avec un opérateur, peut donc être un point important des performances. En général, les robots ont une carte d'entrées-sorties permettant un échange de  $m \times 8$  informations de type binaire.

#### **1.4.2 Les performances-homme**

On entend par là la facilité d'utilisation du robot, ce dernier étant sur le site d'utilisation et entre les mains d'un opérateur non spécialiste. Les compétences exigées pour faire fonctionner un robot ont trait :

- à la connaissance du matériel/ réglages, etc.
- à la connaissance du logiciel de programmation du robot.

Il est important de savoir si, après une faible période d'apprentissage, normalement quelques jours, un technicien pourra programmer et régler le robot ou s'il faudra faire appel à un ingénieur. De même la maintenance courante et les réparations de pannes mineures pourront-elles être assurées par l'utilisateur (existe-t-il des procédures de test et de diagnostic de pannes ou de défauts ?) ou devra-t-on faire venir un spécialiste de chez le constructeur à chaque incident même mineur ?

#### **1.4.3 Les performances économiques**

Il s'agit essentiellement de la rentabilité d'utilisation de robots dans l'entreprise. Elle dépend bien sûr d'un grand nombre de facteurs :

- a) coûts d'investissements :
- prix d'achat
  - coût d'installation du robot et des équipements de péri-robotique
  - coût de modification de l'atelier ou de la chaîne de production.

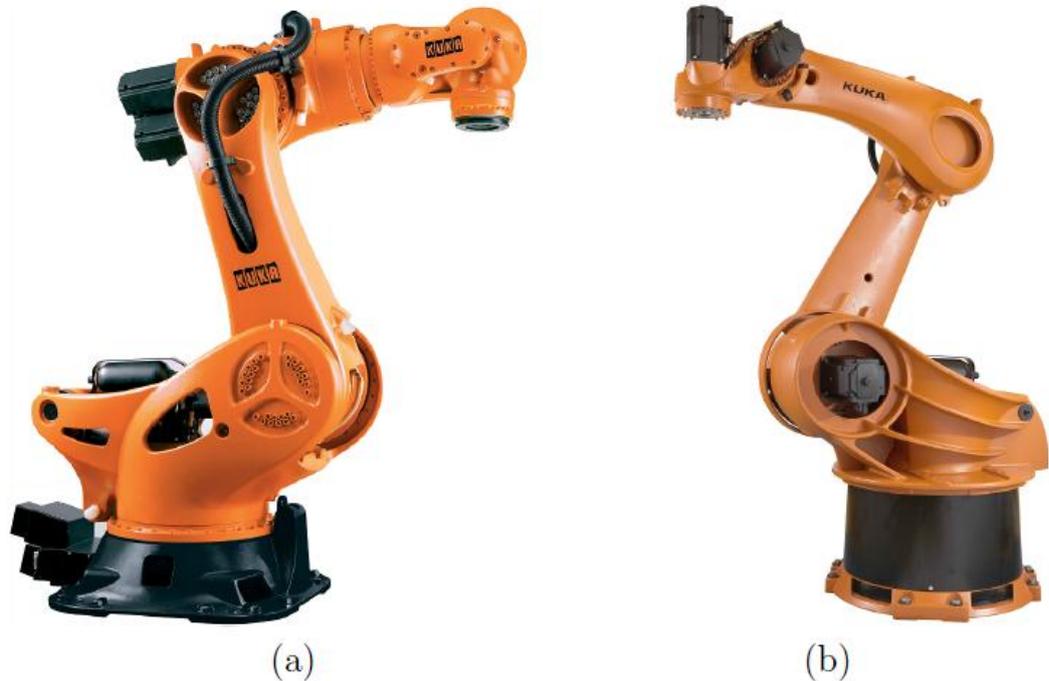
- b) coûts d'exploitation : énergies, maintenance, espérance de vie, fiabilité (doit-on laisser une possibilité de travail manuel en cas de panne ?) et pourcentage temporel d'utilisation.
  
- c) nature des tâches que les robots vont exécuter
  - tâches qui revenaient cher en main-d'œuvre ou non ?
  - la cadence de la fabrication augmentera-t-elle ?
  - la qualité de la production sera-t-elle améliorée ?
  - y aura-t-il réduction de la main-d'œuvre ? (supprime-t-on un poste d'O.S. pour le remplacer par un poste de technicien ?)
  
- d) le degré d'automatisation déjà présent dans l'atelier : Insérer un robot entre deux hommes ou réciproquement ne se justifie que dans des circonstances particulières, par exemple si la tâche est dangereuse.
  
- e) la taille de l'entreprise
  - Un robot seul peut ne pas être "rentable" mais une chaîne de plusieurs robots en ligne peut l'être.

Le constructeur de robots ne peut que proposer des robots "les plus performants possibles" et au "meilleur prix", en espérant atteindre le bon créneau après une étude de marché. C'est à l'utilisateur d'établir les performances économiques qu'il peut espérer, après avoir défini les tâches qu'il veut automatiser et les performances tâches et homme que les constructeurs peuvent lui proposer.

## **1.5 Quelques chiffres et statistiques mondiales récentes**

### **1.5.1 Degré de liberté et types de robots**

Selon la norme internationale ISO 8373, un robot industriel (figure 1.15) est un « manipulateur multi-application reprogrammable commandé automatiquement, programmable sur trois axes ou plus, qui peut être fixé sur place ou mobile, destiné à être utilisé dans des applications d'automatisation industrielle ».



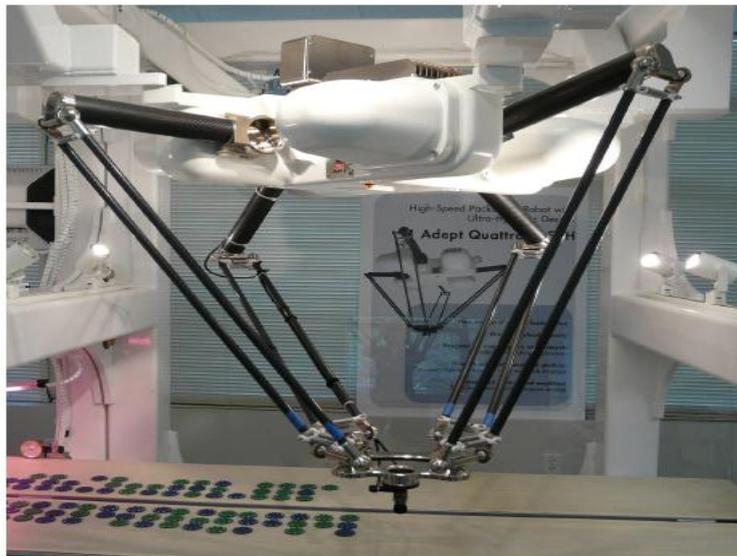
**Figure 1.15 :** (a) robot sériel à six articulations KR 1000 et (b) robot sériel à cinq articulations KR 470

Selon cette même norme, un manipulateur est une « machine dont le mécanisme est généralement composé d'une série de segments, articulés ou coulissants l'un par rapport à l'autre, ayant pour but de saisir et/ou de déplacer des objets (pièces ou outils) généralement suivant plusieurs degrés de liberté ». La partie extrême du manipulateur qui porte l'outil (préhenseur, pince de soudage, etc.) s'appelle l'effecteur du robot. Dans l'espace tridimensionnel, un corps rigide libre peut se déplacer selon six degrés de libertés (ddl) : trois translations et trois rotations. On utilise le terme pose pour désigner la localisation du corps par rapport à un référentiel. Une pose est composée d'une position et d'une orientation. Pour placer un corps rigide n'importe où dans l'espace tridimensionnel, on a besoin d'un robot avec au minimum six articulations motorisées, c.à.d. d'un robot à six ddl.

La grande majorité de robots industriels sont de type sériel. Un robot sériel est composé d'une série de segments reliés par des articulations motorisées

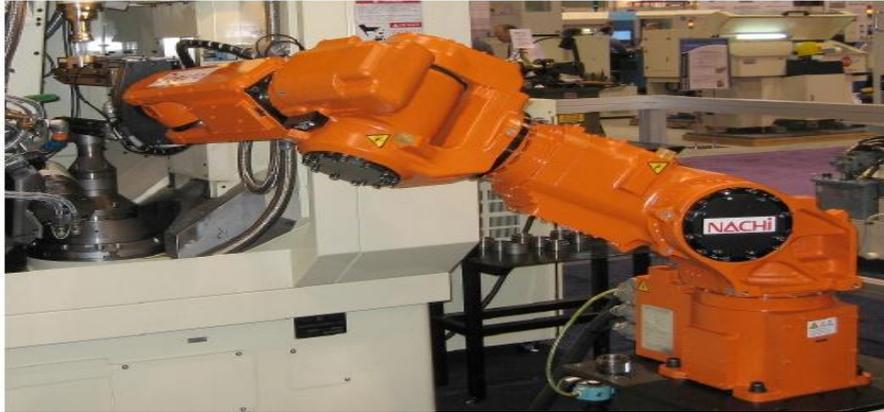
rotoïdes (en rotation) ou prismatiques (en translation). Dans certaines applications, on n'a pas besoin de déplacer les objets selon six ddl mais seulement selon cinq ou même quatre ou trois ddl.

Dans un robot parallèle (ou à chaîne fermée), l'effecteur est relié à la base via plusieurs « bras », et la plupart des articulations ne sont pas motorisées. Les robots parallèles peuvent eux aussi avoir six, cinq, quatre, trois ou même deux ddl. Les robots parallèles à six ddl les plus connus sont les hexapodes, comme ceux qui déplacent les cockpits des simulateurs de vol. Les robots parallèles sont généralement plus rigides et plus rapides que les robots sériels. En revanche, ils sont beaucoup plus difficiles à étudier et il en existe de milliers d'architectures différentes. La figure 1.16 illustre un des robots parallèles les plus rapides.



**Figure 1.16 :** *robot parallèle (le Quattro d'Adept Technology)*

Enfin, il existe aussi des robots à sept ddl (c.à.d. avec sept articulations motorisées), comme le robot illustré à la figure 1.17, mais ils sont rarement utilisés.



**Figure 1.17 :** Robots redondants à sept ddl : le robot MR20 de Nachi

L'avantage d'un tel robot redondant est l'existence d'une infinité de possibilités pour atteindre une pose désirée, ce qui permet au robot de contourner des obstacles. Beaucoup plus souvent, on monte un robot à six articulations sur un guide linéaire ou sur une table pivotante, ce qui résulte aussi en un système robotique redondant. Cependant, la raison principale n'est pas de contourner des obstacles mais d'augmenter l'espace de travail du robot (l'ensemble de poses que l'effecteur du robot peut atteindre) [4].

### 1.5.2 Les origines des robots industriels

Un des premiers robots industriels a été conçu par l'américain Willard L. G. Pollard Jr. qui a fait une demande de brevet pour son invention en 1934. Il s'agit d'un robot parallèle à deux ddl destiné à l'application de peinture sur la carrosserie d'une automobile. Une licence de ce brevet a été vendue à la compagnie DeVilbiss en 1937. En 1941, DeVilbiss a fabriqué le premier robot industriel (un robot de peinture) sous la direction de Harold Roselund. Ce robot n'était pas le robot de Pollard, mais un robot sériel (figure 1.13a) inventé par M. Roselund lui-même. Il est intéressant de mentionner, qu'entre-temps, le père de M. Pollard, M. Willard L. V. Pollard a lui aussi inventé un robot de peinture fort intéressant et a déposé une demande de brevet en 1938.

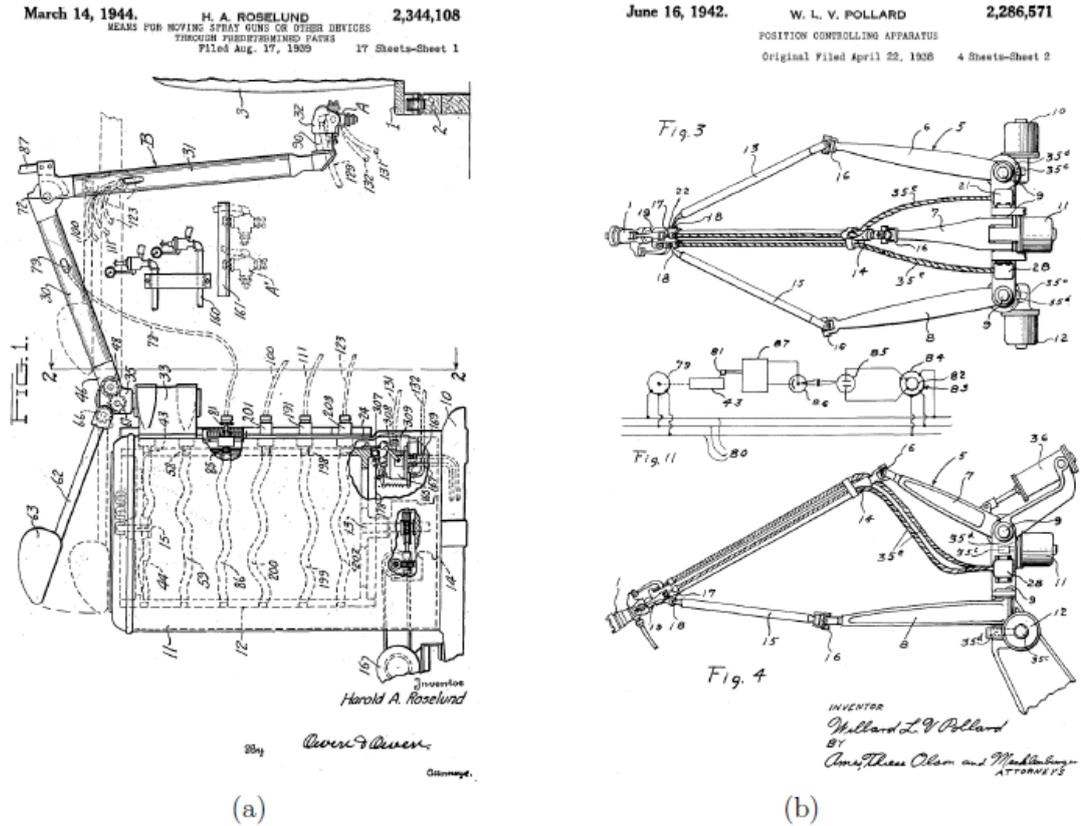


Figure 1.18 : Deux des premiers brevets de robots industriels

Il s'agit d'un robot parallèle à cinq ddl (figure 1.18(b)) qui ressemble beaucoup au fameux robot Delta, inventé par le professeur suisse Raymond Clavel, à la fin des années 1980.

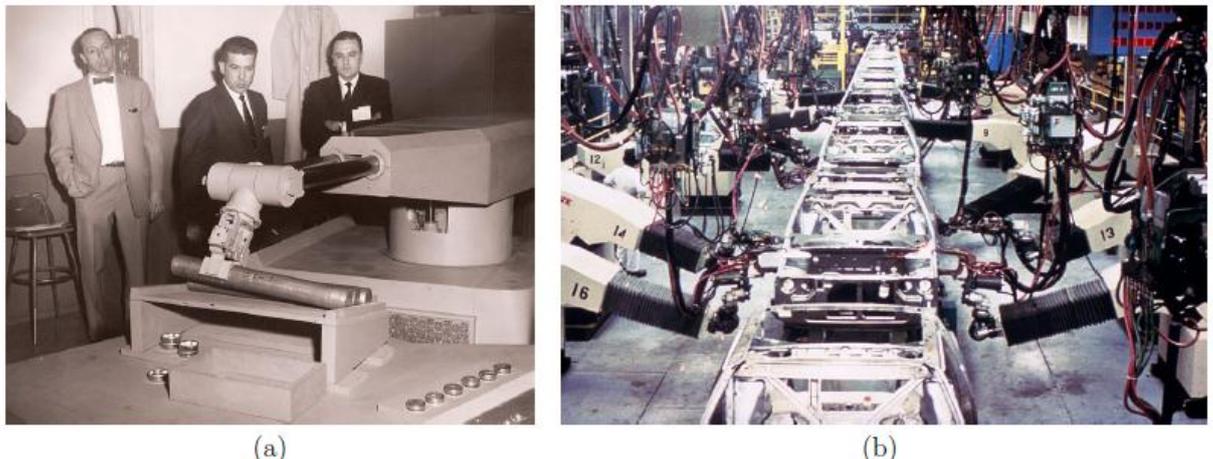
De toute évidence, les inventions des messieurs Pollard et de M. Roselund n'ont pas eu l'effet désiré.

C'est beaucoup plus tard, en 1954 que l'américain George Devol fait la demande d'un brevet pour un robot de transfert qui va donner naissance à la robotique industrielle, telle qu'on la connaît aujourd'hui. C'était dans un cocktail au Connecticut en 1956 que M. Devol rencontre M. Joseph Engelberger, un jeune ingénieur qui travaillait dans l'industrie spatiale, et lui fait part de son invention. Engelberger devient rapidement passionné par l'invention de Devol et démarre la compagnie Unimation.

Entre temps, la compagnie AMF (American Machine and Foundry) introduit le robot Versatran, le premier robot cylindrique. En 1962, six robots Versatran ont été installés dans une usine de Ford.

C'est en 1961 qu'Unimation développe leur premier prototype, l'Unimate, et le vend (à forte perte) à General Motors (figure 1.18(a)). Ce robot a été utilisé pour assister une machine à coulée par injection.

En 1964, General Motors commande 66 autres robots Unimate, mais la demande pour ces robots reste toujours très faible. En 1969, Unimation installe 26 robots soudeurs sur une ligne d'assemblage (figure 1.19(b)) de Chevrolet Vega, chez General Motors [5], [6], [7], [8], [9].



**Figure 1.19 :** *Les premiers robots industriels : (a) le premier robot Unimate juste avant son entrée en fonction en 1961 et (b) la première ligne robotisée qui consiste en 26 robots soudeurs Unimate*

En 1969, Victor Scheinman développe le Stanford Arm à l'Université Stanford. Il s'agit de l'architecture qui est aujourd'hui utilisée par presque tous les robots sériels à six ddl.

En 1973, Scheinman démarre sa propre entreprise et commercialise son design sous le nom Vicarm. A ce moment, il y a déjà environ 3000 robots industriels en opération à travers le monde, construit par quelques 71 compagnies. Environ un tiers de ces robots avait été construit par Unimation.

Unimation achète le Vicarm en 1977, l'améliore, et le renomme PUMA pour Programmable Universal Machine for Assembly (figure 1.20). Le premier robot PUMA est installé en 1979, dans une usine de General Motors. Unimation finit par être vendu à l'entreprise suisse Staubli en 1989.

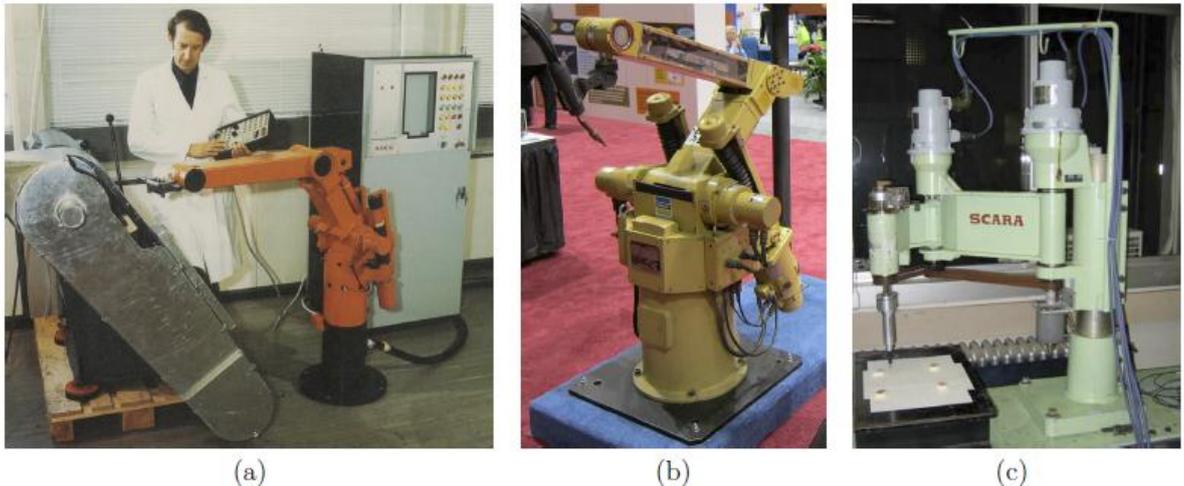


**Figure 1.20 :** *Les trois premiers modèles du robot PUMA commercialisés par Unimation*

Aux débuts des années 1970, plusieurs grandes entreprises se lancent dans la fabrication de robots industriels. Asea (aujourd'hui ABB), après avoir installé quelques 25 robots Unimate, développe son propre robot à six ddl en 1973, l'IRB 6, le premier robot à six ddl avec un parallélogramme (figure 1.21(a)).

Le parallélogramme sert à placer le troisième moteur plus proche de la base et ainsi diminuer l'inertie du robot. La même année, le fabricant allemand KUKA développe son propre robot à six ddl, le FAMULUS.

En 1968, Unimation vend une licence à Kawasaki Heavy Industries, qui développe le premier robot industriel au Japon en 1969, le Kawasaki-Unimate 2000. Tout de suite après la sortie du robot IRB 6, plusieurs « copies » apparaissent au Japon, dont une fabriquée en 1977 par Yaskawa, le Motoman L10 (figure 1.21(b)). En 1974, Fujitsu-Fanuc, un grand fabricant de machines à commandes numériques, produit son premier robot industriel. En 1980, 19 000 robots industriels ont déjà été fabriqués au Japon par quelques 150 fabricants, dont Kawasaki, Yaskawa, Kitachi, Mitsubishi Heavy Industries, Fanuc et Nachi [10].



**Figure 1.21 :** *Les premiers robots de la nouvelle ère de la robotique industrielle : (a) le premier robot de Asea (aujourd'hui ABB), fabriqué en 1973 ; (b) le premier robot de Yaskawa, fabriqué en 1977 ; et (c) le premier robot SCARA, fabriqué en 1980.*

Le Japon devient le plus grand fabricant et utilisateur de robots industriels. En 1978, Hiroshi Makino, professeur à l'université de Yamanashi, invente le robot SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm). Sankyo Seiki et Nitto Seiko sont les premiers fabricants à produire des versions commerciales de ce robot, en 1981 (figure 1.21c) [11].

### 1.5.3 Les robots industriels d'aujourd'hui

Après une importante crise en 2009, l'année 2011 a été un record avec quelque 166 028 robots industriels installés à travers le monde. En cinquante ans, plus de 2 300 000 robots industriels ont été installés, dont au moins la moitié sont encore en service (la durée de vie utile d'un robot industriel est environ de douze ans).

Le Japon continue d'être le plus gros marché pour la robotique industrielle (avec 28 000 robots installés en 2011), suivi par la Corée du Sud (25 536 nouveaux robots) et la Chine (22 577 nouveaux robots). En Europe, c'est l'Allemagne qui est le pays qui a installé le plus grand nombre de robots industriels en 2011 (19 533), suivi de loin par l'Italie (5 091), la France (3

058), l'Espagne (3 091) et la Grande-Bretagne (1 514). Quant aux Amériques, c'est les Etats-Unis qui mènent le palmarès en 2011 (avec 20 555 nouvelles installations), suivies par le Mexique (1 938), le Canada (1 848) et le Brésil (1 440) [12].

L'Afrique reste le continent le moins robotisé avec seulement 323 nouvelles installations en 2011. Environ deux tiers des robots industriels installés en 2011 étaient de type anthropomorphe. Cette même année, environ 20 % des nouveaux robots étaient de type cartésien et 11 % de type SCARA. Les robots parallèles, majoritairement de type Delta, constituaient environ 1 % des ventes (2 093 robots). Le club des fabricants de robots a peu changé en quarante ans (depuis l'entrée en jeu d'ABB, KUKA, Fanuc et Yaskawa). L'entreprise japonaise Fanuc est le plus important fabricant de robots industriels avec plus de 240 000 robots vendus. Elle est suivie de près par l'entreprise japonaise Yaskawa (dont la division robotique se nomme Motoman), le plus gros fabricant de variateurs de vitesse et de servomoteurs, avec plus de 230 000 robots vendus. Les numéros trois et quatre dans ce palmarès sont le groupe ABB (dont la division robotique est basée en Suède) avec plus de 160 000 unités vendues et l'entreprise allemande KUKA avec quelque 110 000 unités vendues (dont 14 445 en 2011). Il existe plusieurs autres fabricants de robots industriels, dont les plus importants sont Kawasaki (au Japon, avec plus de 100 000 robots vendus), Denso (au Japon, avec plus de 60 000 installations), Mitsubishi (au Japon), Nachi (au Japon), Epson (au Japon), Staubli (en Suisse) et Adept Technology (aux Etats-Unis).

En quarante ans, la robotique industrielle a évolué de façon relativement lente. Certes, à part quelques exceptions, les ventes de robots progressent d'année en année, mais de façon linéaire et le prix d'un robot industriel reste relativement élevé (environ 30 000 \$ pour un petit robot). A part quelques innovations remarquables qui restent très niche, telles que les robots à sept ddl ou les robots parallèles, les robots industriels d'aujourd'hui ressemblent énormément aux robots d'il y a quatre décennies.

Bien évidemment, les robots d'aujourd'hui sont nettement plus performants. A titre d'exemple, le plus récent robot SCARA de la compagnie Staubli (figure 1.22) peut effectuer 200 aller-retour par minute avec une charge de 0,1 kg (25 mm en haut, 300 mm en horizontal, 25 mm vers le bas) . Le robot M-2000iA/1200 de la compagnie Fanuc peut manipuler des charges de 1200 kg . Plusieurs modèles de robots peuvent être contrôlés en force (plutôt que seulement en position).



**Figure 1.22 :** *robot SCARA (le TP80 de Staubli)*

Les avancées en vision robotique sont aussi spectaculaires. Enfin, de plus en plus la programmation des robots se fait à l'aide de logiciels de simulation très avancés. Par contre, il n'existe toujours pas de langage de programmation commun et la programmation d'un robot industriel reste assez difficile. De plus, même le plus petit robot industriel reste assez dangereux pour l'humain et nécessite l'installation de dispositifs de sécurité dispendieux.

Cependant, depuis deux ou trois ans, on assiste à un revirement important dans le monde de la robotique industrielle. Premièrement, à cause du prix montant de la main d'œuvre en Chine, la demande dans ce pays pour les robots industriels a récemment explosé et il est prévu qu'en 2015, la Chine sera déjà le plus gros marché. En effet, la Chine a installé 22 577 robots industriels en 2011, comparé à seulement 14 978 en 2010 et 5 000 en 2009. Le pays a maintenant ses propres fabricants de robots industriels, tels qu'Estun Robotics,

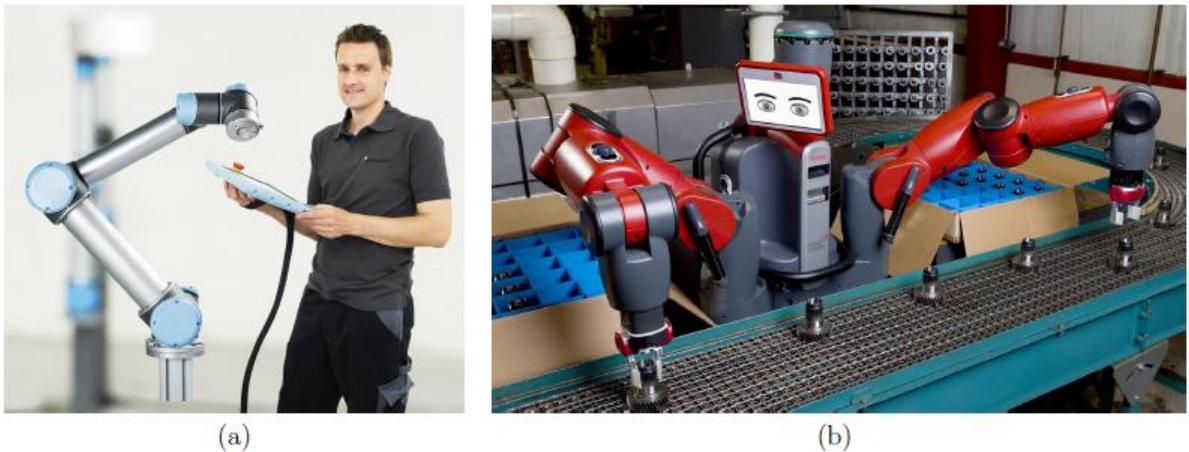
dont la division robotique est dirigée par un ancien étudiant gradué de l'Université Laval, et plusieurs des gros fabricants tels que Fanuc, ABB, KUKA et Yaskawa, y ont des unités de production. En 2011, Foxconn, un géant manufacturier taiwanais spécialisé dans la fabrication de produits électroniques et principalement implanté en Chine continentale où il emploie 1.5 millions de travailleurs, a annoncé son intention de fabriquer un million de robots industriels en trois ans. La date buttoir a été repoussée de quelques années en juin 2012, mais Foxconn a quand même installé 30 000 de ces robots en 2012, dont le prix varie entre 20 000 \$ et 25 000 \$ (figure 1.23). Deuxièmement, la compagnie danoise Universal Robots a lancé en 2009 le premier robot industriel convivial, destiné aux PME (figure 1.24(a)). L'entreprise offre aujourd'hui deux modèles à six ddl, UR5 et UR10. Le poids, la charge utile et le prix du robot UR5 sont respectivement 18 kg, 5 kg, et 28 000 \$.



**Figure 1.23 :** *Deux modèles de la série de robots industriels Foxbot fabriqués par le géant taiwanais Foxconn*

Ces robots sont très faciles à programmer et peuvent être mis en service sans protection particulière. En mode collaboration, dès que le robot entre en contact avec un objet et qu'une force d'au moins 150 newtons est exercée, le robot s'arrête automatiquement. Cette compagnie d'environ 40 employés a déjà vendu 400 robots en 2011, et près de 1000 robots en 2012. Il s'agit sans aucun doute d'une entreprise qui va enfin révolutionner le domaine de la robotique industrielle.

En septembre 2012, Rethink Robotics, une entreprise fondée par un ancien professeur du MIT, Rodney Brooks, a lancé Baxter, un autre robot destiné aux PME et qui se vaut encore plus conviviale (figure 1.24(b)). A seulement 22 000 \$, Baxter offre non un, mais deux bras à sept articulations chaque, une charge utile de 2 kg par bras, un système de vision, et un système intégré de sécurité. Ce robot ne nécessite aucune programmation. Les mouvements à exécuter lui sont enseignés à l'aide d'une interface graphique et en manipulant directement les bras.



**Figure 1.24 :** Deux robots susceptibles de révolutionner la robotique industrielle :  
(a) UR10 de l'entreprise danoise Universal Robots et (b) Baxter de l'entreprise américaine Rethink Robotics

#### 1.5.4 Applications

L'industrie automobile représente toujours le plus grand utilisateur de robots industriels, avec plus d'un tiers des nouvelles installations en 2011. L'industrie de l'électronique a quant à elle acquit 26 % des nouveaux robots en 2011. Étonnamment, l'industrie alimentaire reste un des plus petits marchés pour la robotique industrielle, avec une part de seulement 3 % en 2011 (soit 4 650 robots).

Parmi les applications les plus communes, ABB recense le soudage à l'arc, le soudage par point, la manutention, le chargement/déchargement de machines outils, la mise en peinture, le transfert de pièces (palettisation, emboîtement, etc.), l'assemblage, l'enlèvement de matière (ébavurage, polissage, etc.), et l'application de colle ou de scellant. Les robots industriels sont aussi

utilisés dans des endroits inhabituels tels que les parcs d'amusement, les hôpitaux ( figure 1.25), et même les restaurants [12].



**Figure 1.25 :** *La robotique industrielle dans les hopitaux : (a) un système développé par KUKA et Siemens Healthcare ; (b) un système pour le remplissage de seringues développé par Health Robotics*

# *CHAPITRE II*

## 2.1 Introduction

Le Petit Larousse définit un robot comme étant un appareil automatique capable de manipuler des objets, ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe ou modifiable. En fait, l'image que chacun s'en fait est généralement vague, souvent un robot est défini comme un manipulateur automatique à cycles programmables.

Pour "mériter" le nom de robot, un système doit posséder une certaine flexibilité, caractérisée par les propriétés suivantes :

- La versatilité : Un robot doit avoir la capacité de pouvoir exécuter une variété de tâches, ou la même tâche de différente manière ;
- L'auto-adaptativité : Un robot doit pouvoir s'adapter à un environnement changeant au cours de l'exécution de ses tâches.

L'Association Française de Normalisation (A.F.N.O.R.) définit un robot comme étant un système mécanique de type manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent (i.e., à usages multiples), à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un, ou plusieurs, bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel.

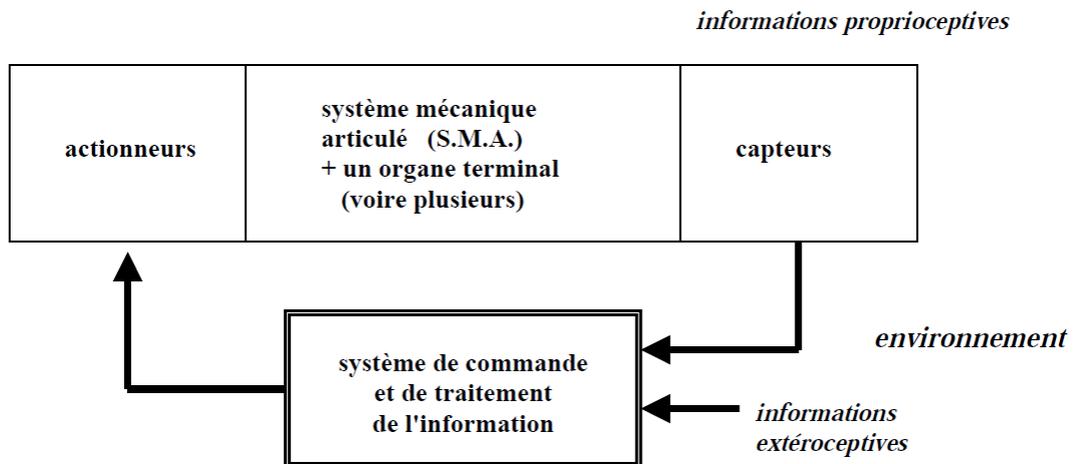
## 2.2 Constituants d'un robot

Vocabulaire :



**Fig.2.1** : Terminologie utilisée (Robot SCARA)

On distingue classiquement 4 parties principales dans un robot manipulateur :



**Fig.2.2 : Organigramme général**

Le **système mécanique articulé** (S.M.A.) est un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain. Il permet de remplacer, ou de prolonger, son action (le terme "manipulateur" exclut implicitement les robots mobiles autonomes)<sup>3</sup>. Son rôle est d'amener l'*organe terminal* dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides (ou supposés comme tels), assemblés par des liaisons appelées *articulations*. Sa motorisation est réalisée par des *actionneurs* électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux *articulations* par des systèmes appropriés.

**Notion d'articulation** : Une *articulation* lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit  $m$  le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé *mobilité de l'articulation*. La mobilité d'une articulation est telle que :

$$0 \leq m \leq 6 .$$

Lorsque  $m = 1$  ; ce qui est fréquemment le cas en robotique, l'articulation est dite *simple* : soit *rotoïde*, soit *prismatique*.

□□□□ **Articulation *rotoïde*** : Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée  $R$ , réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun.

La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe (figure 2.3).



**Fig.2.3 :** Symboles de l'articulation rotoïde.

□□□ Articulation **prismatique** : Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée  $P$ , réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe (figure 2.4).



**Fig.2.4 :** Symboles de l'articulation prismatique.

**Remarque :** Une articulation complexe, *i.e.*, avec une mobilité supérieure à 1, peut toujours se ramener à une combinaison d'articulations *prismatique* ou *rotoïde*. Par exemple, une rotule est obtenue avec trois articulations rotoïdes dont les axes sont concourants.

Pour être animé, le S.M.A. comporte des moteurs le plus souvent avec des transmissions (courroies crantées), l'ensemble constitue les **actionneurs**. Les actionneurs utilisent fréquemment des moteurs *électriques* à aimant permanent, à courant continu, à commande par l'induit (la tension n'est continue qu'en moyenne car en général l'alimentation est un hacheur de tension à fréquence élevée ; bien souvent la vitesse de régime élevée du moteur fait qu'il est suivi d'un réducteur, ce qui permet d'amplifier le couple moteur). On trouve de plus en plus de moteurs à commutation électronique (sans balais), ou, pour de petits robots, des moteurs pas à pas.

Pour les robots devant manipuler de très lourdes charges (par exemple, une pelle mécanique), les actionneurs sont le plus souvent *hydrauliques*, agissant en translation (vérin hydraulique) ou en rotation (moteur hydraulique).

Les actionneurs *pneumatiques* sont d'un usage général pour les *manipulateurs à cycles (robots tout ou rien)*. Un manipulateur à cycles est un S.M.A. avec un nombre limité de degrés de liberté permettant une succession de mouvements contrôlés uniquement par des capteurs de fin de course réglables manuellement à la course désirée (asservissement en position difficile dû à la compressibilité de l'air).

La perception permet de gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des **capteurs** dits *proprioceptifs* lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions et vitesses des articulations) et

*extéroceptifs* lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, de contact, mesure de distance, vision artificielle).

La partie **commande** synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs, à partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur.

## 2.3 Degré de libertés – Architecture

### 2.3.1 Positionnement d'un solide dans l'espace

La position d'un solide dans l'espace requiert 6 paramètres indépendants (figure 2.5 suivante) :

- 3 paramètres indépendants définissent la position d'un point, noté  $P$ , du solide (coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, ..., dans la base du repère fixe),
- 3 paramètres indépendants déterminent l'orientation du solide autour du point  $P$  (angles d'*Euler*, paramètres d'*Euler*, ...).

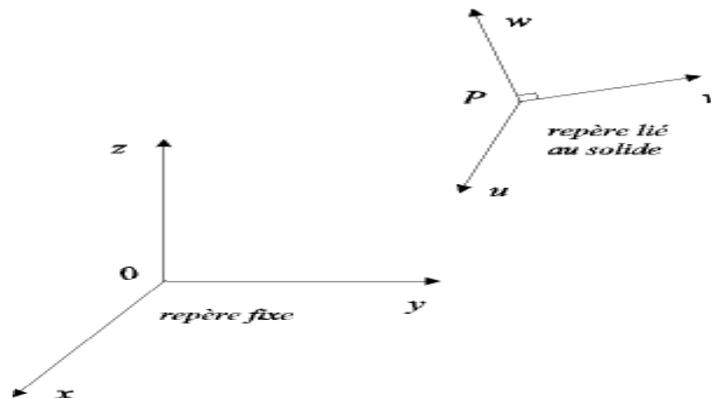


Fig. 2.5: Position du solide

#### **Exemple d'orientation d'un repère** (utilisation des angles d'*Euler*) :

L'orientation d'un repère orthonormé (lié au solide) par rapport au repère fixe est spécifiée par 3 angles  $\Psi$  (psi),  $\theta$  (thêta) et  $\phi$  (phi), correspondant à une séquence de 3 rotations (figure 2.6). De tels angles sont très utilisés en mécanique. Ils permettent une définition minimum de l'orientation (3 paramètres), par contre, ils appréhendent difficilement le cas de composition de mouvement.

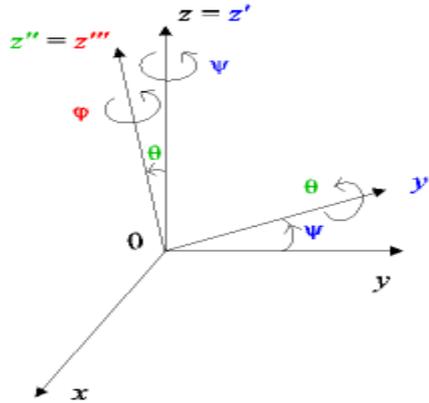


Fig. 2.6: Angles d'Euler

Les angles sont définis dans le cas présent, selon la convention (z, y, z), comme suit :

- On fait une rotation d'un angle  $\Psi$ , appelé *lacet* (*yaw* en anglais), autour de l'axe Oz,
- On fait une rotation d'un angle  $\theta$ , appelé *tangage* (*pitch* en anglais), autour de l'axe Oy',
- On fait une rotation d'un angle  $\varphi$ , appelé *roulis* (*roll* en anglais), autour de l'axe Oz''.

Un solide peut également être repéré par les coordonnées de 3 points (non situés sur une droite du solide).

Il en résulte 9 paramètres (3 coordonnées par point) non indépendants (3 équations expriment l'invariabilité de la distance entre les 3 points). Notons que de par le lien établi par ces équations, il reste 6 paramètres indépendants.

On dit qu'un solide situé dans l'espace possède 6 *degrés de liberté* (*d.d.l.*).

Réciproquement, il faut 6 variables de commande indépendantes pour placer de manière quelconque un solide dans l'espace.

En pratique, les robots les plus courants sont dotés de 6 *d.d.l.*, *i.e.*, d'au moins 6 actionneurs, ce qui permet de spécifier de manière quelconque la situation (position et orientation) de leurs organes terminaux.

### 2.3.2 Liaison

Une *liaison* entre 2 solides indéformables (en théorie) limite le *d.d.l.* d'un solide par rapport à l'autre. On appelle *d.d.l.* de la liaison le nombre de paramètres indépendants permettant de définir la localisation (position et orientation) d'un solide par rapport à l'autre dans tout déplacement (compatible avec la liaison).

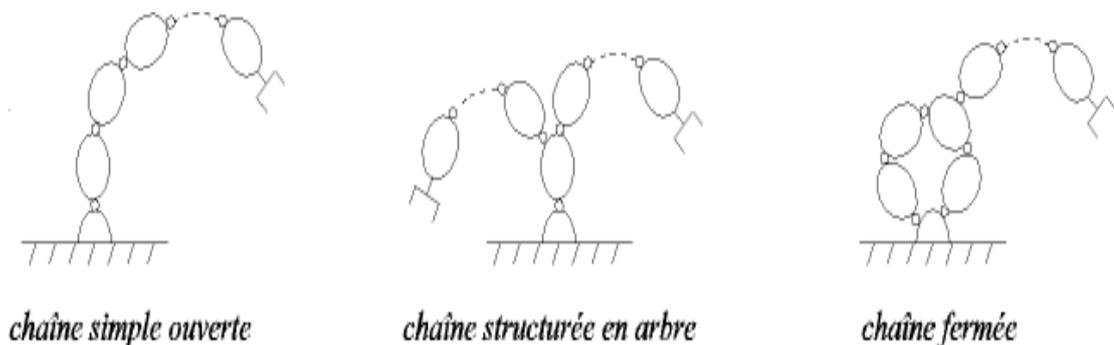
### 2.3.3 Mécanismes

On appelle *mécanisme* un ensemble de solides reliés 2 à 2 par des liaisons. On distingue 2 types de *mécanismes* :

- Les *mécanismes en chaîne simple ouverte* (ou *en série*). Lorsque l'on parcourt le mécanisme, on ne repasse jamais 2 fois sur la même liaison, ou sur le même solide. Ce type de système est le plus répandu.
- Les *mécanismes en chaîne complexe*, *i.e.*, tout ce qui n'est pas *en série* (au moins un solide avec plus de 2 liaisons). De tels systèmes se subdivisent en 2 groupes : les *chaînes structurées en arbre* (arborescentes), et les *chaînes fermées* (dont l'avantage est d'être *a priori* plus rigide, plus précis, capable de manipuler de lourdes charges). A titre d'exemple, le *pantographe* et le parallélogramme que constitue 3 barres articulées sont des *mécanismes en chaîne fermée*.

Pour représenter un mécanisme, on dispose de 2 méthodes :

- Le schéma cinématique<sub>8</sub> : On utilise la représentation normalisée des liaisons pour représenter le mécanisme, soit en perspective, soit en projection.
- Le graphe, non normalisé. A titre d'exemples, considérons quelques mécanismes :



**Fig. 2.7:** Mécanismes

**Définition** (degré de liberté, *d.d.l.*) : Le nombre de *d.d.l.* d'un mécanisme est le nombre de paramètres *indépendants* qui permettent de définir la position du *mécanisme* à un instant donné du mouvement.

**Exemples :**

**Chaînes simples ouvertes :**

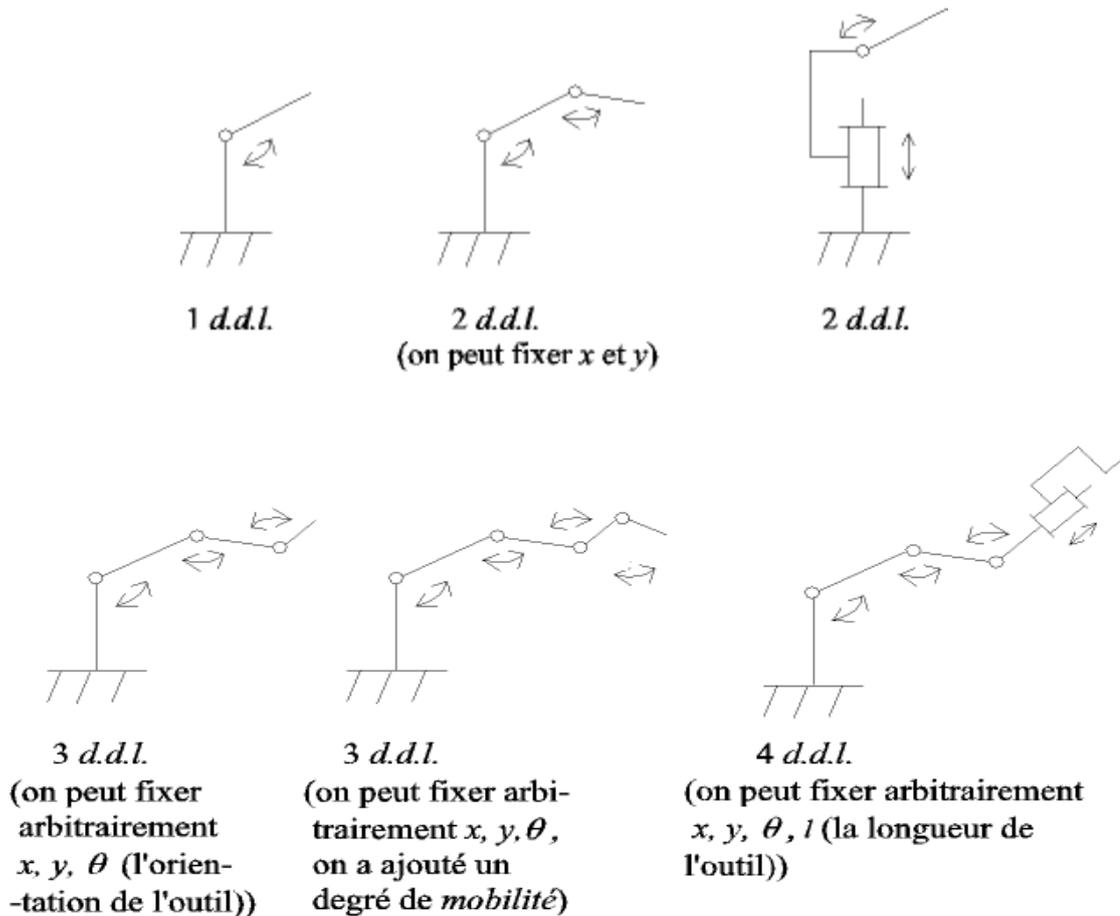


Fig. 2.8: Chaînes simples ouvertes

**Chaînes complexes :**

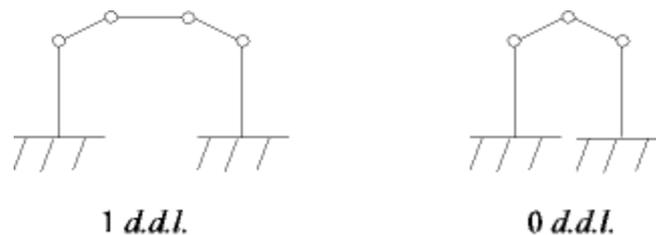


Fig. 2.9: Chaînes complexes

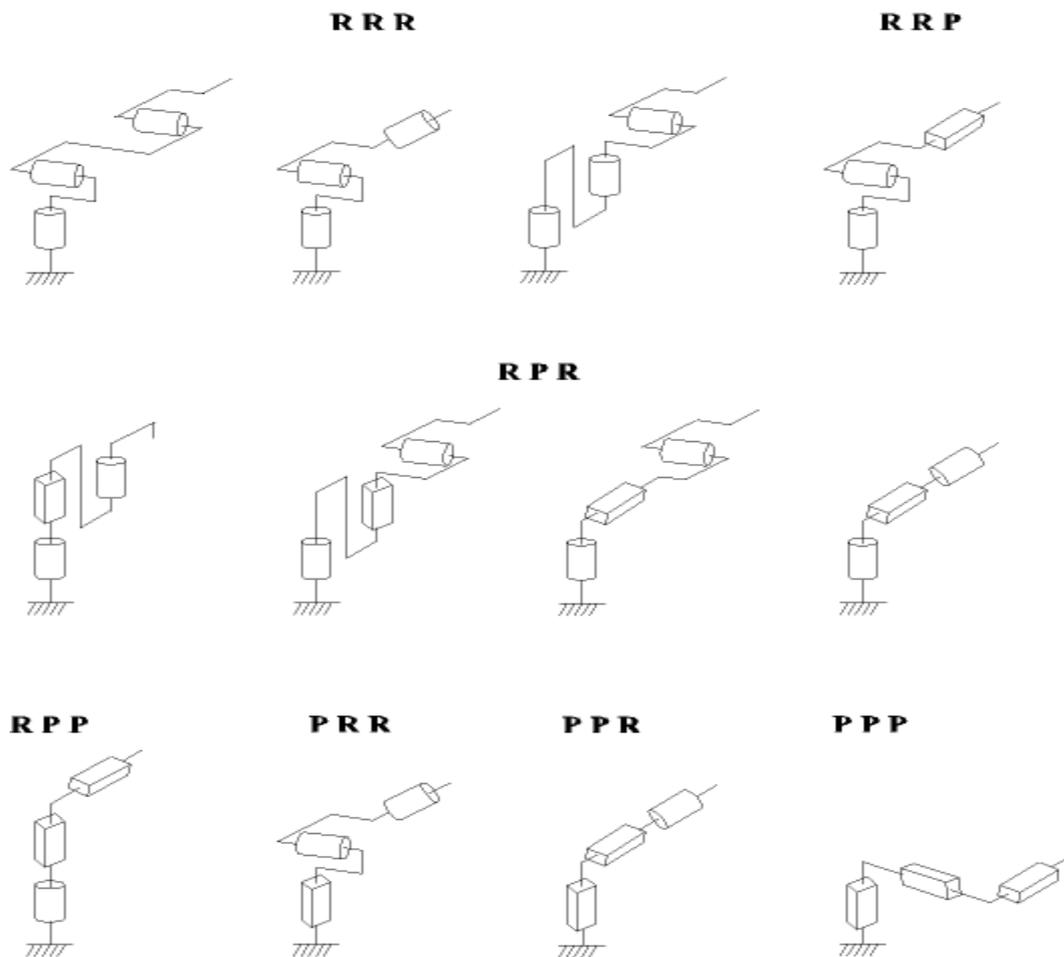
**Définition** (redundant) : Un robot est *redundant* lorsque le nombre de *d.d.l.* du mécanisme est inférieur au nombre d'articulations indépendantes (motorisées). Cette propriété permet de préserver les capacités de déplacement de l'organe terminal en présence d'obstacles, le (ou les) *d.d.l.* supplémentaire(s) autorisant leur contournement.

**2.3.4 Morphologie des robots manipulateurs**

Ce paragraphe est relatif aux chaînes ouvertes simples. Afin de dénombrer les différentes architectures possibles, on ne considère que 2 paramètres : le type

d'articulation (rotoïde ( $R$ ) ou prismatique ( $P$ )) et l'angle que font deux axes articulaires successifs ( $0^\circ$  ou  $90^\circ$  ; sauf cas très particulier, les axes consécutifs d'un robot sont soit parallèles, soit perpendiculaires).

On convient d'appeler les 3 premiers *d.d.l.* le **porteur du robot**. Les *d.d.l.* résiduels forment le **poignet**, caractérisé par des dimensions beaucoup plus petites et une plus faible masse. Sont schématisées dans la figure qui suit les 12 morphologies possibles de porteur (ces morphologies sont non redondantes (on élimine *a priori* les structures limitant les mouvements du porteur à des déplacements linéaires ou planaires : 3 liaisons prismatiques d'axes parallèles, par exemple, ou 3 liaisons rotoïdes d'axes parallèles)).



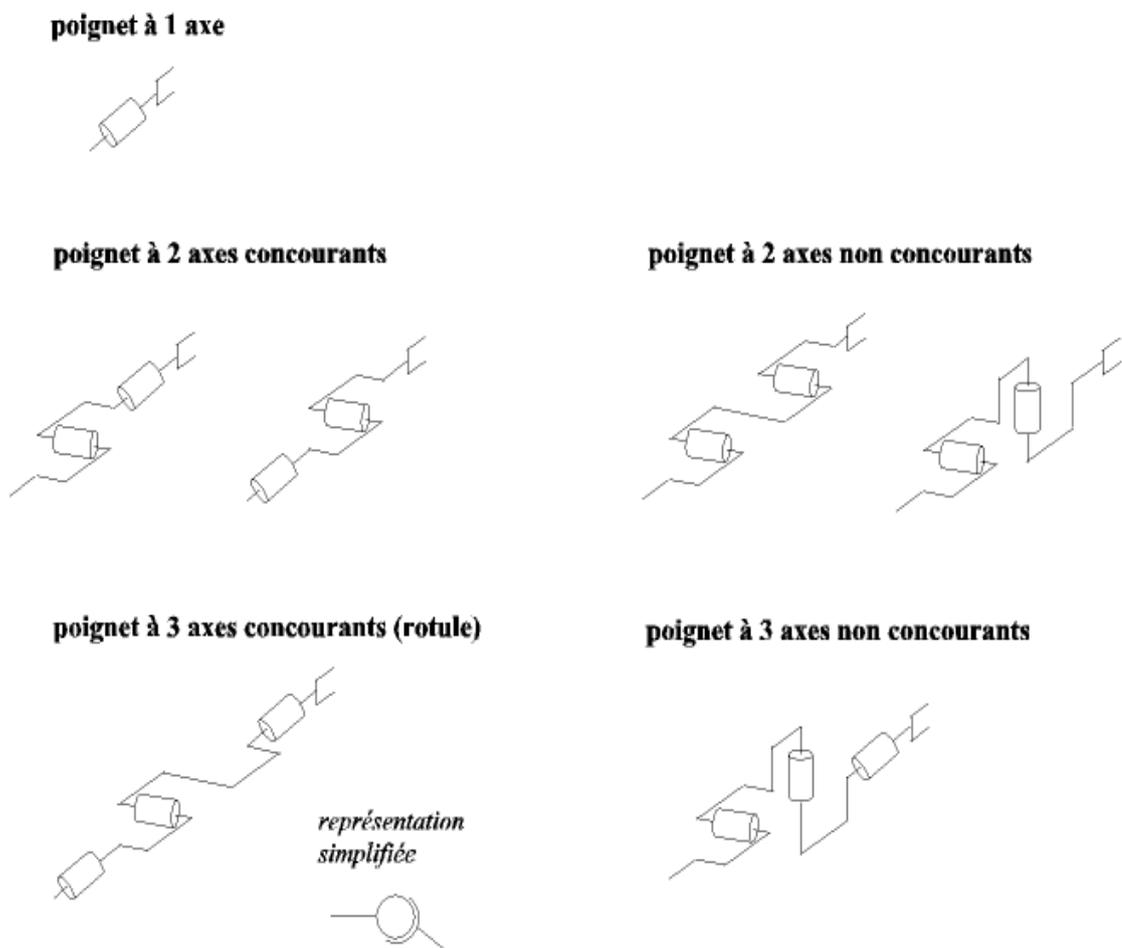
**Fig. 2.10:** Porteurs et morphologies possibles

Dans la pratique, on trouve les 5 structures suivantes :

- Les porteurs anthropomorphes ( $RRR$ ), et plus précisément la première structure de cette classe (voir figure précédente), comme par exemple les robots FANUC (LR, ARC), STÄUBLI RX, ACMA (V80 et SR400), UNIMATION (PUMA), SCEMI (6P-01), AID (V5), CINCINNATI (T3-7XX), AKR 3000, ASEA (IRB6 et 60), KUKA (IR600), AXEA (V08) ;

- Les porteurs sphériques (*RRP*) comme par exemple les robots STANFORD, UNIMATION (1000, 2000, 4000), PSA (BARNABE) ;
- Les porteurs toriques (*RPR*) et plus précisément la première structure de cette classe, comme par exemple les robots ACMA (H80), les robots de type SCARA (IBM, AXERA, ADEPT, ...) ;
- Les porteurs cylindriques (*RPP*) comme par exemple les robots ACMA (TH8), MANTEC (A, I et M), CINCINNATI (T3-363) ;
- Les porteurs cartésiens (*PPP*) comme par exemple les robots ACMA (P80), IBM (7565), SORMEL (CADRATIC), OLIVETTI (SIGMA).

La structure *RRR* dont les 3 axes sont concourants forme ainsi une rotule et s'utilise plus généralement comme un *poignet*. D'autres types de poignets de un à trois axes sont représentés sur la figure suivante.



**Fig. 2.11: Poignets**

Dans la pratique, le *poignet* de type rotule est très répandu. Le robot, obtenu en lui associant un porteur à 3 *d.d.l.*, est la structure la plus classique à 6 *d.d.l.*. Elle permet d'assurer un découplage entre la position et l'orientation de l'organe terminal :

- Le porteur a pour rôle de fixer la position du point d'intersection, noté *P*, des axes des 3 dernières articulations (centre du poignet) ; cette position (*P*) ne

dépend que de la configuration des solides (corps) 1, 2 et 3 (*i.e.*, du porteur),

- Le poignet est destiné à l'orientation de l'organe terminal (pince, outil). (figure :2.12)

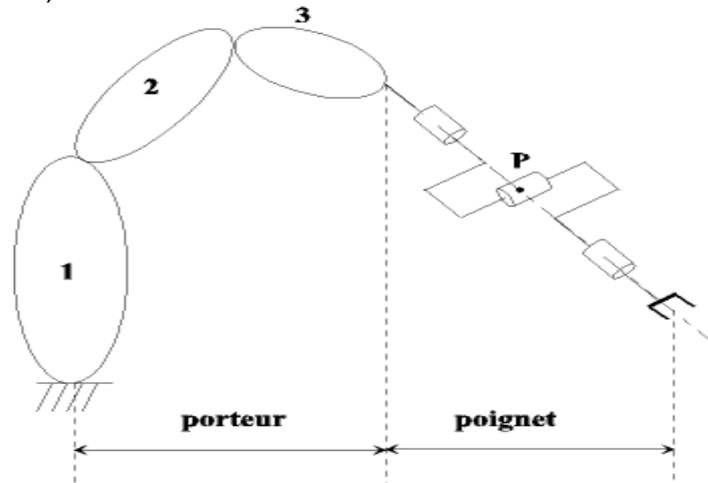


Fig. 2.12: Porteur et poignet

Cette structure de robot à poignet de type rotule correspond à celle des robots Stäubli RX-90 , FANUC ARC ou LR et PUMA.

### 2.3.5 Modèle géométrique d'un robot en chaîne simple

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- Les modèles de transformation entre l'**espace opérationnel** (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'**espace articulaire** (dans lequel est définie la configuration du robot). Parmi ces modèles, on distingue :
  - Les modèles **géométriques direct** et **inverse** qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme et inversement,
  - Les modèles **cinématiques direct** et **inverse** qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction de la vitesse articulaire et inversement,
- Les modèles **dynamiques** définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

Définir les différentes tâches d'un robot réclame de pouvoir positionner l'organe terminal par rapport à un repère de référence. En effet :

- Les informations proprioceptives (issues du S.M.A.) sont généralement définies dans des repères liés aux différents solides du robot.
- La position à atteindre est souvent définie dans un repère lié au socle du robot,

- L'objet à saisir peut être défini dans un repère mobile indépendant du robot (par exemple, des pièces à prendre sur un tapis roulant),
- Les informations extéroceptives (issues de l'environnement) sont définies dans divers repères.

Aussi, il faut un référentiel commun afin de "ramener" les diverses informations dans un même référentiel, notamment pour concevoir les consignes des actionneurs.

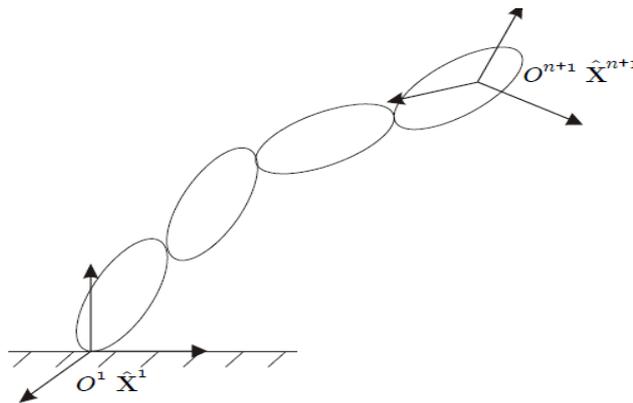
Écriture du **modèle géométrique inverse** : Connaissant la position du point  $X$  (coordonnée opérationnelle), on veut connaître les variables articulaires  $q$  (actionneurs, coordonnée articulaire). Pour connaître le vecteur  $q$  conduisant à une position donnée du point  $X$ , il faut disposer d'une relation du type  $q = g(X)$ , correspondant au **modèle géométrique inverse** ( on a  $g = f^{-1}$  ). [13],[14],[15],[16],[17], [18],[19],[20].

## 2.4 Coordonnées articulaires et opérationnelles

Considérant un robot série tel que symbolisé sur la figure 2.13, on cherche à déterminer la relation qui lie les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires  $q$  :

$$\begin{pmatrix} x_p \\ x_r \end{pmatrix} = f(q)$$

où  $x_p$  représente les trois coordonnées opérationnelles de position (coordonnées du centre  $O^{n+1}$  par rapport à l'origine fixe  $O^1$ ) et où  $x_r$  représente les coordonnées opérationnelles d'orientation de la base  $\{\hat{X}^{n+1}\}$  par rapport à la base fixe  $\{\hat{X}^1\}$ .



**Fig. 2.13: Schéma d'un robot série**

Alors que pour les coordonnées  $x_p$  tout le monde s'accorde pour choisir les composantes cartésiennes de la position de  $O^{n+1}$  par rapport à  $O^1$  exprimées

dans la base  $\{\hat{X}^1\}$ , plusieurs choix sont possibles (et adoptés en pratique) pour les coordonnées  $x_r$  :

- Angles d'Euler
- Angles de Tait Bryan (ou angles nautiques)
- Quaternions d'Euler
- Axe-Angle
- Méthode de Sheth

Dans le but d'obtenir un résultat qui soit intrinsèque et ne dépende pas d'un choix particulier des coordonnées de rotation, nous nous baserons sur la relation :

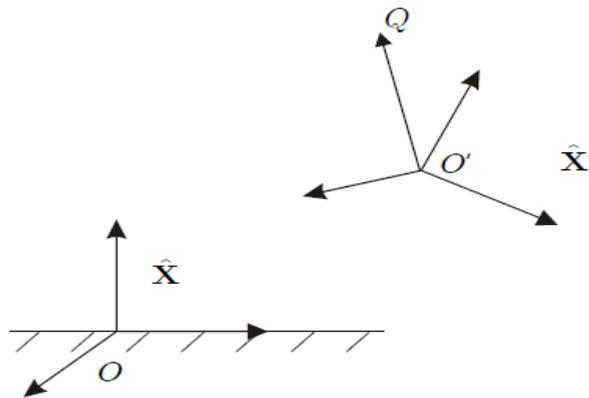
$$[\hat{X}^{n+1}] = A^{n+1,1}[\hat{X}^1]$$

qui fait apparaître la matrice de rotation entre les deux repères, et nous chercherons la relation :

$$\begin{pmatrix} x_p \\ A^{n+1,1} \end{pmatrix} = f(q)$$

Sachant que, quel que soit le choix des coordonnées opérationnelles de rotation, ces dernières peuvent s'exprimer (en dehors d'éventuelles positions singulières) en fonction des éléments (i, j) de la matrice  $A^{n+1,1}$

#### 2.4.1 Coordonnées et matrices de transformation homogènes



**Fig. 2.14:** Transformation homogène

Connaissant les coordonnées de la position du point Q par rapport à l'origine  $O'$  dans le repère  $\{\hat{X}'\}$ , on souhaite déterminer les coordonnées de ce même point Q par rapport à l'origine absolue O dans le repère de départ  $\{\hat{X}\}$ . On cherche donc :

$$\overline{OQ} = [\hat{X}]^T x$$

Sachant que :

$$\overline{OQ} = \overline{OO'} + \overline{O'Q} = \vec{p} + [\widehat{X}]^T x'$$

avec  $\vec{p} = [\widehat{X}]^T p$  et  $[\widehat{X}] = A[\widehat{X}]$ , et où  $p$  et la matrice  $A$  sont supposés connus. On obtient facilement par substitution :

$$x = A^T x' + p \tag{2.1}$$

c.-à-d. une relation linéaire entre  $x$  et  $x'$ , mais malheureusement non-homogène en raison de la présence du terme  $p$ . Pour remédier à ce caractère non-homogène, on introduit les *coordonnées homogènes* du point  $Q$  de la manière suivante :

$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$  position par rapport à  $O'$ , exprimée dans le repère  $\{\widehat{X}'\}$

$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$  position par rapport à  $O$ , exprimée dans le repère  $\{\widehat{X}\}$

ce qui permet d'écrire la relation (2.1) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

La matrice  $\begin{pmatrix} A^T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ainsi définie est dite (Fig.2.13) matrice de transformation homogène. Les matrices et coordonnées homogènes sont également utilisées en infographie pour la représentation de solides dans l'espace

Le caractère homogène de la relation (2.2) permet de l'utiliser aisément de manière récursive lorsqu'on se trouve devant une succession d'origines et de bases. Ainsi, si :

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} x'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

on trouve (et on programme) sans difficulté :

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = TT' \begin{pmatrix} x'' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c.à.d} \quad \mathbf{T''} = \mathbf{TT'}$$

#### 2.4.2 Application aux robots séries

Si on cherche la position absolue d'un point d'outil  $Q$  caractérisé par le vecteur :

$$\overline{O^{n+1}Q} = [\widehat{X}^{n+1}]^T u^{n+1}$$

Dans le repère associé à la pince du robot, on obtient immédiatement :

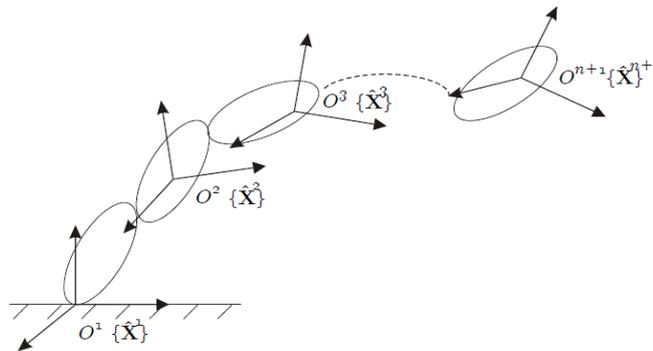
$$\overrightarrow{O^1 Q} = [\hat{X}^1]^T u^1$$

Au moyen de la relation :

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ 1 \end{pmatrix} = T^{1,2}(q_1) T^{2,3}(q_2) T^{3,4}(q_3) \dots T^{n,n+1}(q_n) \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le modèle géométrique direct d'un robot manipulateur série se résume à calculer la matrice homogène  $T^{1,n+1}$

$$T^{1,n+1}(q) = T^{1,2}(q_1) T^{2,3}(q_2) T^{3,4}(q_3) \dots T^{n,n+1}(q_n) \quad (2.3)$$



**Fig. 2.15: Numérotation des corps et axes d'articulations**

En effet, cette même matrice fournit aussi l'orientation du repère lié à la pince par rapport au repère absolu :

$$T^{1,n+1} = \begin{pmatrix} R^{1,n+1} & p^{1,n+1} \\ (0 \ 0 \ 0) & 1 \end{pmatrix}$$

Avec :  $R^{1,n+1} = R^{1,2}(q_1) R^{2,3}(q_2) \dots R^{n,n+1}(q_n)$

### 2.4.3 Matrices de passage élémentaires : Est-ce l'utopie du siècle ?

Dans les années 1950s, les messieurs Jacques Denavit and Richard Hartenberg ont eu l'excellente idée de proposer une méthode simple et systématique pour placer des référentiels sur chaque lien d'un mécanisme sériel qui facilite énormément le calcul des matrices de transformations. Leur idée était de placer les référentiels de telle manière que l'axe  $Z_i$  (où  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ) est le long de l'axe de l'articulation ( $i + 1$ ), dans le cas d'une articulation rotoïde, ou parallèle à la direction de l'articulation ( $i + 1$ ), dans le cas d'une articulation prismatique, et de contraindre l'axe  $X_i$  d'intersecter l'axe  $Z_{i-1}$  à angle droit. Grace à cette double contrainte (non seulement intersecter mais aussi à angle droit),

nous avons besoin de seulement quatre paramètres géométriques, plutôt que six, pour décrire la pose du référentiel  $F_i$  par rapport au référentiel  $F_{i-1}$ . Ces quatre paramètres géométriques, deux distances et deux angles, sont en plus très faciles à trouver.

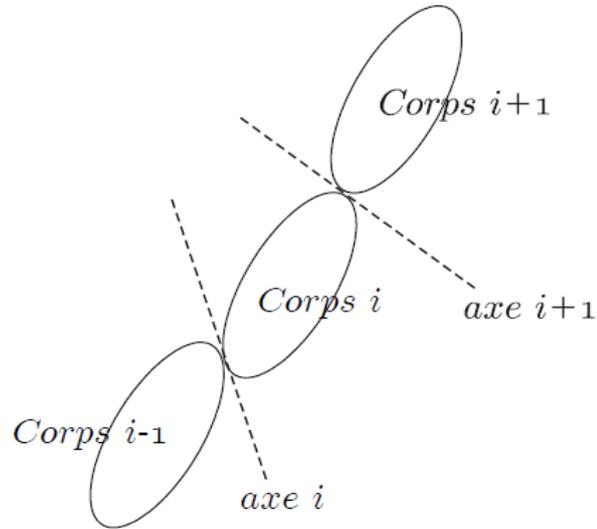
Bien sûr, il est possible de trouver d'autres séquences de quatre transformations consécutives, mais nous sommes intéressés uniquement au le résultat final :

En voici deux exemples :

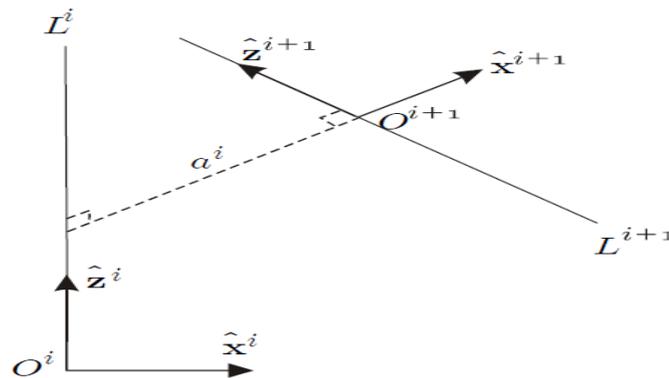
**2.4.3 A)** Les paramètres de *Denavit et Hartenberg* sont quasi universellement adoptés par les roboticiens pour définir, avec un nombre minimum de paramètres, les matrices de transformations homogènes élémentaires qui permettent de passer du repère associé à un corps du robot au corps qui le suit dans la chaîne cinématique. Les différentes articulations du robot, qu'elles soient rotoïdes ou prismatiques, sont caractérisées par leurs axes (axe de translation pour une liaison prismatique, axe de rotation pour une liaison rotoïde).

Considérons deux axes successifs, l'axe  $L^i$  et l'axe  $L^{i+1}$  : ces deux axes sont tout deux solidaires du corps  $i$  qui les séparent. Par ailleurs, ces deux axes définissent dans l'espace deux droites qui, en toute généralité, peuvent être considérées comme deux droites gauches (le cas de deux axes parallèles et le cas de deux axes concourants devront être traités comme cas particuliers). Ces deux droites, ainsi que leur perpendiculaire commune  $a^i$  sont représentées sur la figure 2.16. Le repère  $\{O^{i+1}, \{\hat{X}^{i+1}\}\}$ , qui sera solide du corps  $i$ , est défini comme suit :

- l'origine  $O^{i+1}$  est placée sur l'axe  $L^{i+1}$ , au pied de la perpendiculaire commune  $a^i$
- l'axe  $\hat{z}^{i+1}$  est aligné suivant l'axe de l'articulation  $L^{i+1}$
- l'axe  $\hat{x}^{i+1}$  est aligné suivant la direction de la perpendiculaire commune  $\hat{y}$
- l'axe  $\hat{y}^{i+1}$ , non représenté sur la figure, est choisi de manière à former un trièdre orthonormé direct avec  $\hat{x}^{i+1}$  et  $\hat{z}^{i+1}$ .



**Fig. 2.16:** Numérotation des corps et des axes d'articulations



**Fig. 2.17:** Repères de Denavit et Hartenberg

Le dessin illustré sur la figure 2.16 suppose que les mêmes règles ont été adoptées pour définir le repère  $\{O^i, \{\hat{x}^i\}\}$  sur l'axe  $L^i$ .

Cela étant, les transformations élémentaires qui permettent d'exprimer le passage du repère  $\{O^i, \{\hat{x}^i\}\}$  au repère  $\{O^{i+1}, \{\hat{x}^{i+1}\}\}$  sont :

1. une rotation d'angle  $\theta^i$  autour de l'axe  $\hat{z}^i$ . L'amplitude  $\theta^i$  de cette rotation est donnée par l'angle que forme la perpendiculaire commune avec l'axe  $\hat{x}^i$ .
2. une translation suivant l'axe  $\hat{z}^i$ . L'amplitude de cette translation, notée  $r^i$ , est donnée par la distance (signée) entre le pied de la perpendiculaire commune (coté  $L^i$ ) et l'origine  $O^i$ .

3. une translation suivant la direction  $\hat{x}^{i+1}$  (aligné suivant la perpendiculaire commune) dont l'amplitude, notée  $a^i$ , est égale à la longueur de la perpendiculaire commune.

4. une rotation d'angle  $\alpha^i$  autour de l'axe  $\hat{x}^{i+1}$ . L'amplitude  $\alpha^i$  de cette rotation (suivant l'axe de la direction perpendiculaire commune) est donnée par l'angle que forme la direction  $\hat{z}^{i+1}$  avec la direction  $\hat{z}^i$ .

Les quatre paramètres  $\theta^i, r^i, a^i, \alpha^i$  sont les paramètres de Denavit et Hartenberg. On remarquera que seul quatre paramètres (au lieu de six) sont nécessaires pour passer du repère  $\{O^i, \{\hat{X}^i\}\}$  au repère  $\{O^{i+1}, \{\hat{X}^{i+1}\}\}$ , grâce notamment au choix de l'emplacement de ces derniers sur les deux axes des articulations  $L^i$  et  $L^{i+1}$ . En terme de matrice de transformation homogène, ces quatre transformations élémentaires donnent :

$$T^{i,i+1} = \begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\sin\theta^i & 0 & 0 \\ \sin\theta^i & \cos\theta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha^i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha^i & -\sin\alpha^i & 0 \\ 0 & \sin\alpha^i & \cos\alpha^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\sin\theta^i & 0 & 0 \\ \sin\theta^i & \cos\theta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha^i \\ 0 & \cos\alpha^i & -\sin\alpha^i & 0 \\ 0 & \sin\alpha^i & \cos\alpha^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{i,i+1} = \begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\cos\alpha^i \sin\theta^i & \sin\alpha^i \sin\theta^i & a^i \cos\theta^i \\ \sin\theta^i & \cos\alpha^i \cos\theta^i & -\sin\alpha^i \cos\theta^i & a^i \sin\theta^i \\ 0 & \sin\alpha^i & \cos\alpha^i & r^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On remarquera aisément que les transformations élémentaires n°1 et n°2 sont permutables (de même que les transformations élémentaires n°3 et n°4). Se souvenant que le repère  $\{O^i, \{\hat{X}^i\}\}$  est solidaire du corps  $i - 1$  (c.-à-d. juste en amont de l'articulation  $i$ ) :

— si l'articulation  $i$  est rotoïde, l'angle  $\theta^i$  est variable et joue le rôle de coordonnée articulaire  $q^i$ . Les trois autres paramètres  $\alpha^i, a^i$  et  $r^i$  sont constants, et caractéristiques de la dimension géométrique du corps  $i$ . On a donc

$$q^i = \theta^i \quad \text{et} \quad T^{i,i+1} = T^{i,i+1}(q^i, r^i, a^i, \alpha^i)$$

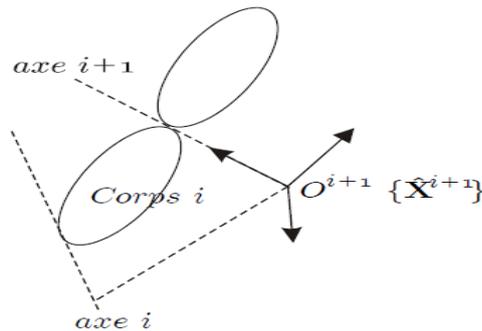
— si l'articulation  $i$  est prismatique, c'est  $r^i$  qui est variable et joue le rôle de coordonnée articulaire  $q^i$ . Les trois autres paramètres  $\theta^i, a^i$  et  $\alpha^i$  sont les constantes caractéristiques de la dimension géométrique du corps  $i$ . On a donc

$$q^i = r^i \quad \text{et} \quad T^{i,i+1} = T^{i,i+1}(q^i, \theta^i, a^i, \alpha^i)$$

En conclusion, le modèle géométrique direct du manipulateur complet s'écrira bien sous la forme annoncée :

$$T^{1,n+1}(q) = T^{1,2}(q_1)T^{2,3}(q_2)T^{3,4}(q_3)\dots T^{n,n+1}(q_n)$$

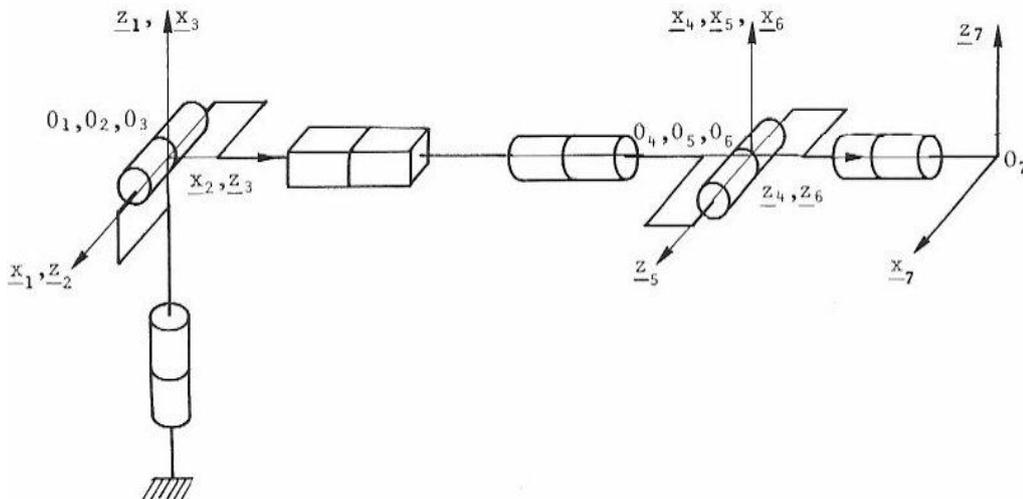
On remarquera toutefois que les différents repères associés aux corps sont localisés de façon toute particulière (voir figure 2.17). Pour le repère associé aux corps n°1, il n'y a pas d'axe d'indice 0 : il faudra donc utiliser son bon sens pour localiser l'origine  $O^1$  et la direction de l'axe  $\hat{X}^1$  de la manière la plus judicieuse possible.



**Fig. 2.18:** Localisation du repère associé au corps  $i$

De même, la localisation du repère  $\{O^{n+1}, \{\hat{X}^{n+1}\}\}$  se fera en définissant un axe fictif  $L^{n+1}$  : son origine et la direction de son axe  $\hat{X}^{n+1}$  détermineront le "centre d'outil" et la direction de celui-ci.

On trouvera un exemple sur la figure 2.18 et la table correspondante des paramètres de Denavit et Hartenberg sur le Tableau 2.1.



**Fig. 2.19:** Localisation des repères pour un robot série de type RRPRRR

**Tableau 2.1** : valeurs des paramètres de Denavit - Hartenberg correspondantes.

Par. \ i	1	2	3	4	5	6
$\sigma_i$	0	0	1	0	0	0
$\alpha_i$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
$a_i$	0	0	0	0	0	0
$\theta_i$	$q_1$	$q_2$	0	$q_4$	$q_5$	$q_6$
$r_i$	0	0	$q_3$	0	0	$r_6$
Valeur de $q_i$ pour la figure 2.8	$\pi/2$	$\pi/2$	positive	0	0	$\pi/2$

• Pour identifier le type du joint, on attache une nouvelle variable indicatrice  $\sigma_n$  qui vaut 0 si le joint est de type rotoïde ou 1 si le joint est de type prismatique. Dès lors le ddl du joint est:

$$* q_n = (1 - \sigma_n) \theta_n + \sigma_n r_n \quad \text{Identification}^*$$

### 2.4.3 B)

La convention de Denavit et Hartenberg est une méthode systématique. Elle permet le passage entre articulations adjacentes d'un système robotique. Elle concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède uniquement un degré de liberté, et les surfaces adjacentes restent en contact. Pour cet aspect l'utilisation des charnières ou des glissières est indispensable. Le choix adéquat des repères dans les liaisons facilite le calcul des matrices homogènes de DH et permet d'arriver à exprimer rapidement des informations de l'élément terminal vers la base ou l'inverse.

Les étapes à suivre pour cette technique sont les suivantes :

1. Numérotation des segments constitutifs du bras manipulateur de la base vers l'élément terminal. On associe le référentiel zéro à la base de celui-ci, et l'ordre n à l'élément terminal (effecteur) ;
2. Définition des axes principaux de chaque segment :
  - Si  $z_i$  et  $z_{i-1}$  ne se coupent pas et on choisit  $x_i$  de manière à être la parallèle avec l'axe perpendiculaire à  $z_i$  et  $z_{i-1}$ .
  - Si  $z_i$  et  $z_{i-1}$  sont colinéaires on choisit  $x_i$  dans le plan perpendiculaire à  $z_{i-1}$ .
3. Fixer les quatre paramètres géométriques:  $d_i, q_i, a_i$  et  $\theta_i$  (voir la figure 2.13) pour chaque articulation tel que :
  - $d_i$  coordonnée de l'origine  $o_i$  sur l'axe  $z_{i-1}$ . Pour une glissière  $d_i$  est une variable et pour une charnière  $d_i$  est une constante.

- $\theta_i$  est l'angle que l'on obtient par vissage de  $x_{i-1}$  vers  $x_i$  autour de l'axe  $z_{i-1}$ .

Pour une glissière  $q_i$  est une constante et pour une charnière  $q_i$  est une variable.

- $a_i$  est la distance entre les axes  $z_i$  et  $z_{i-1}$  mesurée sur l'axe  $x_i$  négatif à partir de son origine jusqu'à l'intersection avec l'axe  $z_{i-1}$ .

- $\alpha_i$  est l'angle entre  $z_i$  et  $z_{i-1}$  obtenu en vissant  $z_{i-1}$  vers  $z_i$  autour de  $x_i$ .

On forme enfin la matrice homogène DH de déplacement qui lie la rotation et la translation.

La partie supérieure gauche définit la matrice de rotation  $R_{i-1}^i$ , et le dernier vecteur colonne la translation  $d_{i-1}^i$ .

$$T_{i-1}^i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Similaire à l'équation (2.4) définie précédemment  $r^i$  équivalent à  $d_i$ .

avec: 
$$R_{i-1}^i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

et 
$$d_{i-1}^i = \begin{cases} a_i \cos\theta_i \\ a_i \sin\theta_i \\ d_i \end{cases}$$

La figure 2.19 représente les paramètres de Denavit et Hartenberg pour les deux repères successifs  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  et  $(x_i, y_i, z_i)$ .

Enfin, la matrice de transformation homogène de Denavit et Hartenberg est la suivante :

$$T_{i-1}^i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Les quatre paramètres  $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$  sont les paramètres de Denavit et Hartenberg. On remarquera que seul quatre paramètres (au lieu de six) sont nécessaires pour passer du repère  $\{O^{i-1}, \{\hat{X}^{i-1}\}\}$  au repère  $\{O^i, \{\hat{X}^i\}\}$ , grâce notamment au choix de l'emplacement de ces derniers sur les deux axes des articulations  $L^{i-1}$  et  $L^i$ . En terme de matrice de transformation homogène, ces quatre transformations élémentaires donnent [21]:

$$T_{i-1}^i =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta^i & -\sin \theta^i & 0 & 0 \\ \sin \theta^i & \cos \theta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha^i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha^i & -\sin \alpha^i & 0 \\ 0 & \sin \alpha^i & \cos \alpha^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le même résultat (2.4)

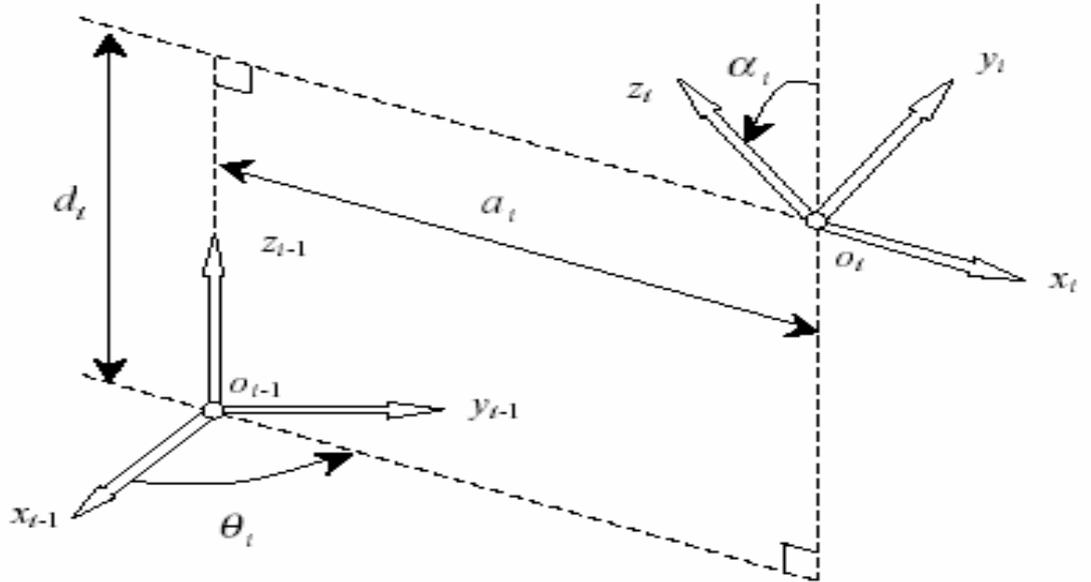


Fig. 2.20 : Systèmes de coordonnées et les paramètres de Denavit et Hartenberg

Exemple (a) : Manipulateur plan (RRR)

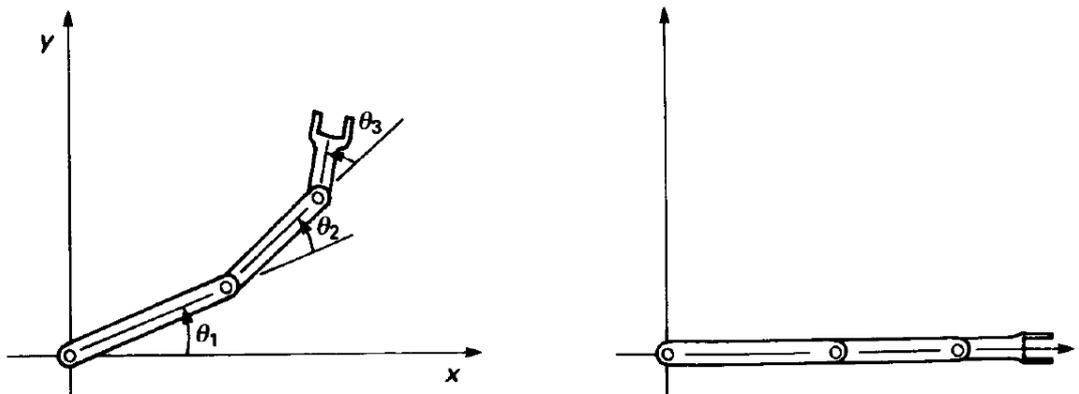


Fig .2.21 : Manipulateur RRR et sa position initiale.

**Tableau 2.2:** Les paramètres du manipulateur.

lien	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$ Variable
1	$a_1$	0	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	$a_3$	0	0	$\theta_3$

En utilisant le tableau des paramètres (2.2) et l'équation (2.4) et avec une position initiale du manipulateur telle que :  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$  ; on peut écrire nos transformations homogènes :

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$T_0^2 = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière colonne de la matrice de transformation homogène nous donne les coordonnées x et y de l'outil terminal (l'extrémité du manipulateur), ce qui peut être confirmé par une simple lecture graphique (ou analyse géométrique) de la figure 2.20.

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123}$$

$$y = a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \quad = \text{Résultat (a)}$$

### 2.4.3 C) exemple (b) Modèle géométrique du robot PUMA 560

Parmi les différentes structures de robots manipulateurs (Robot à coordonnées : cartésienne, cylindrique, sphérique, etc.), nous avons opté pour l'architecture d'un manipulateur la plus utilisée en robotique qui est celle d'un robot articulé PUMA 560 représenté par la figure 2.21. Ce bras de robot manipulateur réalise six degrés de liberté caractérisés par des mouvements de rotations.



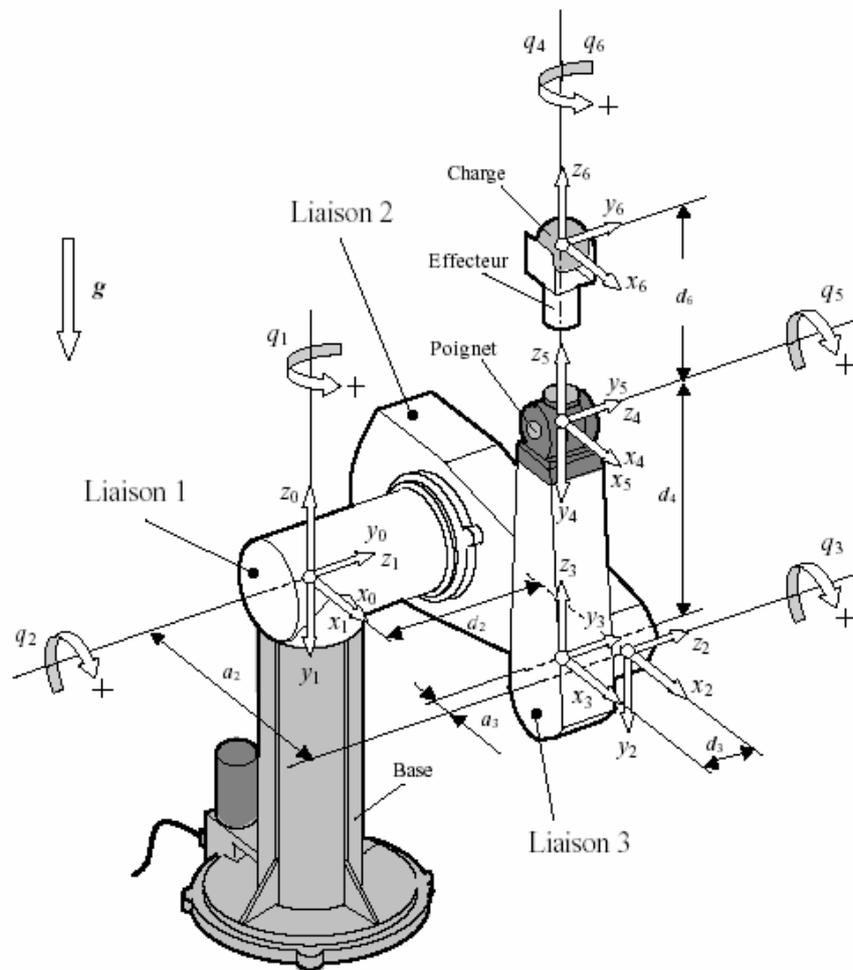
**Fig. 2.22 :** Bras de robot PUMA 560

Les trois premières articulations de ce manipulateur correspondant respectivement au tronc (base ,Waist,), à l'épaule (Shoulder) et au coude ( Elbow) d'un être humain , caractérisent pour la première une rotation autour d'un axe vertical, la seconde et la troisième suivant deux axes horizontaux dont les mouvements sont identifiés par les variables  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  .

Les trois dernières articulations (Wrist rotation, Wrist bend, Flange), qui constituent le poignet du bras de robot, sont caractérisées par les variables de rotations  $q_4$ ,  $q_5$  et  $q_6$  .

On admet les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Les liaisons du manipulateur sont rigides.
- Les jeux dans les articulations sont négligeables.



**Fig. 2.23 :** *Système de coordonnées des liaisons et les paramètres des articulations*

L'épaule du robot (articulations 1, 2 et 3) est du type RRR, le poignet est du type rotule, c'est-à-dire, est tel que les articulations 4, 5 et 6 sont de type rotoïde dont les axes se coupent en un même point.

La représentation du bras de robot PUMA 560 suivant la convention de Denavit et Hartenberg est présentée par la Figure 2.22 avec une configuration d'origine.

La définition des repères associés aux segments suivant la convention de Denavit et Hartenberg est la suivante [22] :

Liaison 1 : Repère  $(x_0, y_0, z_0)$ .

L'origine est prise dans la liaison 1 à l'intersection de l'axe de la base avec l'axe de la liaison 1.

$z_0$  axe de rotation,  $+z_0$  vers le haut.

$+y_0$  coïncide avec l'axe de la liaison 1 et l'axe  $+z_1$ .

$y_1$  est en parallèle avec la liaison 2.

Liaison 2 : Repère  $(x_1, y_1, z_1)$ .

L'origine coïncide avec l'origine du repère  $(x_0, y_0, z_0)$ .

$z_1$  axe de rotation,  $+z_1$  est perpendiculaire à la liaison 2 et en parallèle à l'axe  $+z_2$ .

$+y_1$  vers le bas, superposé avec l'axe de la base et en parallèle avec  $+y_2$ .

$+x_1$  est en parallèle à la liaison 2.

Liaison 3 : Repère  $(x_2, y_2, z_2)$ .

L'origine est prise dans la liaison 2 à l'intersection de l'axe de la liaison 2 avec l'axe de l'articulation 3.

$z_2$  axe de rotation,  $+z_2$  est perpendiculaire à la liaison 2 et l'axe  $+z_3$ .

$+y_2$  vers le bas, opposé avec  $+z_3$ .

$+x_2$  est en parallèle avec la liaison 2.

Liaison 4 : Repère  $(x_3, y_3, z_3)$ .

L'origine est prise dans la liaison 3.

$z_3$  axe de rotation,  $+z_3$  vers le poignet est perpendiculaire à  $+z_4$ .

$+y_3$  est perpendiculaire à la liaison 2, en parallèle avec  $+z_4$ .

$+x_3$  est en parallèle avec la liaison 2.

Liaison 5 : Repère  $(x_4, y_4, z_4)$ .

L'origine est prise dans le centre du poignet.

$z_4$  axe de rotation,  $+z_4$  est perpendiculaire à la liaison 2 superposé avec  $+z_5$ .

.

$+y_4$  est opposé à  $+z_5$ .

$+x_4$  en parallèle avec la liaison 2.

Liaison 6 : Repère  $(x_5, y_5, z_5)$ .

L'origine coïncide avec l'origine du repère  $(x_4, y_4, z_4)$ .

$z_5$  axe de rotation,  $+z_5$  vers l'effecteur colinéaire avec  $+z_6$ .

$+y_5$  coïncide avec l'axe de l'articulation 5.

$+x_5$  est perpendiculaire à l'axe de l'articulation 5.

L'effecteur : Repère  $(x_6, y_6, z_6)$ .

L'origine coïncide avec les origines des repères  $(x_4, y_4, z_4)$  et  $(x_5, y_5, z_5)$ .

$+z_6$  est colinéaire avec  $+z_5$ .

$+y_6$  est en parallèle avec  $+y_5$ .

$+x_6$  est en parallèle avec  $+x_5$ .

En respectant la position d'origine du robot et la définition des repères des liaisons présentées par la figure 2.22, les paramètres du bras de robot PUMA 560 suivant la convention de Denavit et Hartenberg sont représentés dans le tableau 2.3.

**Tableau (2.3) :** Paramètres de Denavit et Hartenberg du Robot PUMA 560.

i Numéro de la liaison	$\alpha_i$ (degrés)	$q_i$ Variable	$a_i$ (mètres)	$d_i$ (mètres)
1	-90	$q_1$	0	0
2	0	$q_2$	$a_2$	$d_2$
3	+ 90	$q_3$	$a_3$	$d_3$
4	- 90	$q_4$	0	$d_4$
5	+ 90	$q_4$	0	0
6	0	$q_5$	0	$d_6$

Pour des raisons inertielles évidentes (stabilité, centre de masse etc...) les quantités  $a_3$  et  $d_3$  sont généralement négatives. La distance  $d_6$  varie selon l'effecteur utilisé pour l'application (l'effecteur est l'outil attaché au poignet sur la dernière articulation du robot pour la manipulation des objets). Dans notre application la distance entre la fin de l'effecteur et l'axe du poignet est supposée nulle  $d_6 = 0$ .

La dynamique des trois dernières articulations est négligeable par rapport aux trois premières. Par conséquent, nous nous sommes intéressés à étudier le mouvement des trois premières articulations du bras de robot PUMA 560 (Waist, Shoulder, Elbow), en fixant les autres à la position d'origine (i.e., poignet fixé à la position d'origine :  $q_4 = 0$ ,  $q_5 = 0$  et  $q_6 = 0$ ).

Les transformations appropriées pour les trois premières articulations considérées sont :

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T_0^2 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 - d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 c_2 s_1 + d_2 c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T_2^3 = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & a_3 c_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 & a_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^3 = T_0^2 T_2^3 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 - d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 c_2 s_1 + d_2 c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & a_3 c_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 & a_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T_0^3 = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - (d_2 + d_3) s_1 \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) + (d_2 + d_3) c_1 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Avec**  $c_i = \cos \theta_i$  ,  $s_i = \sin \theta_i$  ,  $c_{ij} = \cos (\theta_i + \theta_j)$  ,  $s_{ij} = \sin (\theta_i + \theta_j)$

A L'aide du formalisme de Denavit et Hartenberg nous pouvons calculer facilement les coordonnées de l'élément terminal (fin de l'effecteur) dans le repère  $(x_0, y_0, z_0)$  fixé à la base. La notation simplificatrice  $r_3^6$  signifie le vecteur des

coordonnées homogènes de l'élément terminal exprimées dans le repère  $(x_3, y_3, z_3)$ . Avec la supposition (poignet fixé à la position d'origine:  $(q_4 = 0, q_5 = 0$  et  $q_6 = 0$ ), le vecteur  $r_3^6$  est donné par l'équation suivante :

$$r_3^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 + d_6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par la transformation de Denavit et Hartenberg  $T_0^3$ , on peut calculer les coordonnées de l'élément terminal exprimées dans le repère  $(x_0, y_0, z_0)$  par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = T_0^3 r_3^6$$

Donc

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 c_1 s_{23} & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - (d_2 + d_3)s_1 \\ s_1 c_{23} & c_1 s_1 s_{23} & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) + (d_2 + d_3)c_1 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 + d_6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, Nous définissons le vecteur position de l'élément terminal exprimé dans le repère fixé à la base  $(x_0, y_0, z_0)$  comme suit :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - (d_2 + d_3)s_1 + (d_4 + d_6)c_1 s_{23} \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) + (d_2 + d_3)c_1 + (d_4 + d_6)s_1 s_{23} \\ -(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) + (d_4 + d_6)c_{23} \end{pmatrix} = \text{Résultat (b)}$$

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_1 = \sin \theta_1$$

En analysant les signes des sinus et cosinus de la dernière coordonnée  $P_z$  on peut remarquer que la hauteur maximale est atteinte pour  $\theta_2 = -\pi/2$  et  $\theta_3 = \pi/2$  ; Ce qui peut être facilement remarqué sur la figure 2.22 .

#### 2.4.4 Remarques Importantes :

#### 2.4.3 (A) ou 2.4.3 (B) ? Ni l'une ni l'autre !

Comme on vient peut être de le remarquer ( voir 2.4.3 (A) et 2.4.3 (B)), on pourra citer, tant la liste est longue, des paragraphes 2.4.3 ( $c_m$ ), des tableaux (2.1<sub>m</sub>), (2.2<sub>m</sub>) ou 2.3<sub>m</sub>) ainsi que des figures ( 2.14<sub>m</sub> ) ou (2.16<sub>m</sub>) et parfois même

pour le même type de robot ; où l'indice  $m$  correspondrait au nombre d'auteurs (ou 'd'écrivains') qui traitent chacun à sa façon de cette 'convention de Denavit and Hartenberg'. En outre 'un angle de vrillage' ou 'twist angle'  $\alpha_i$  **généralement** égal à :  $0, -\pi/2$ , ou  $+\pi/2$  devra être soigneusement choisi. Ils existent même plusieurs options de la dite convention (annexe II) qu'on appelle '**Paramètres de Denavit-Hartenberg modifié**' avec chacune son PostScript de la forme : **La convention de Denavit-Hartenberg (non modifié) est telle que l'axe  $z_j$  du repère  $R_j$  est confondu avec l'axe n°  $j+1$  (et non  $j$ ) du robot.**

La formulation de Denavit et Hartenberg n'a rien de systématique ! En effet : Pourquoi faudrait-il s'encombrer à devoir élire une telle ou telle option concernant ces paramètres de Denavit et Hartenberg se basant sur plusieurs matrices ainsi qu'un effrayant et imposant arsenal de repères, qu'il faudra falloir distribuer en respectant avec précaution certaines normes ou pré conditions 'fondamentales' de travail, aux différentes articulations du robot ou manipulateur s'il est parfaitement possible de se libérer et ainsi choisir la méthode mécanique, classique et directe ?.

Et le comble pour compléter ; a-t-on vraiment besoin de \*l'identification\* de surcroît évidente qui apparaît en fin du paragraphe (2.4.3 (A)) ?

#### **2.4.5 La solution systématique : Méthode classique de conjugation $TMT^{-1}$**

Un seul repère de base dextrogyre absolu fixé à l'origine du premier lien ( $O$ ;  $x, y, z$ ) est utilisé, en respectant la position d'origine du robot et des liens qui le composent ; Effectuer la première transformation relative au premier lien,  $M$  étant la matrice de transformation (4x4) à appliquer ; Il s'agira alors de déplacer ou d'appliquer une translation  $T^{-1}$  du deuxième lien vers l'origine  $O$  du repère, lui faire effectuer la transformation  $M$  et finalement lui faire reprendre sa position initiale en lui appliquant la translation  $T$ .

Le même procédé est utilisé successivement pour les autres liens du robot connaissant leurs positions relativement au repère fixe.

Reprenons nos deux exemples :

#### **Exemple (a) : Méthode directe ; Manipulateur plan (RRR)**

On effectue les trois rotations suivantes (voir fig :(2.20)) :

Une rotation  $R$  du troisième segment ou lien d'un angle  $\theta_3$  autour de l'axe  $O_3z_3$ , la position du centre de l'articulation  $O_3$  par rapport au repère de base étant :  $(a_1 + a_2, 0, 0)^T$  :

$$A_3 = \mathbf{TRT}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(a_1 + a_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & (1 - c_3)(a_1 + a_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & -s_3(a_1 + a_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une deuxième rotation  $\mathbf{R}$  du deuxième segment d'un angle  $\theta_2$  autour de l'axe  $O_2z_2$ , la position du centre de l'articulation  $O_2$  par rapport au repère de base étant :  $(a_1, 0, 0)^T$  :

$$A_2 = \mathbf{TRT}^{-1} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & (1 - c_2)a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & -s_2a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et enfin l'opération finale ; Une simple rotation  $\mathbf{R}$  du premier segment d'un angle  $\theta_1$  autour de l'axe passant par l'origine  $O$  du repère de base :

$$A_1 = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le mouvement du manipulateur est décrit par le produit des trois matrices :

$$\bullet \quad \underbrace{T_0^3}_{\underbrace{\quad}} = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & k_x \\ s_{123} & c_{123} & 0 & k_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de  $k_x$  et  $k_y$  sont :

$$k_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} - (a_1 + a_2) c_{123}$$

$$k_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12} - (a_1 + a_2) s_{123}$$

La matrice  $T_0^3 = A_1 A_2 A_3 \neq T_0^3$ , représente la cinématique directe du manipulateur plan. L'amplitude résultante ou l'angle que fait le dernier lien avec l'axe des x (position initiale) est  $\Theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

Pour déterminer les coordonnées ou le vecteur position de l'extrémité de l'outil final ou terminal (the end effector EF) , on calcule le produit :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & k_x \\ s_{123} & c_{123} & 0 & k_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_1 + a_2 + a_3) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne : 
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{pmatrix}$$

le même résultat (a) :

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123}$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123}$$

Pour être partial envers les adeptes de la convention de la convention de Denavit et Hartenberg on doit reconnaître que le résultat précédent est directement annoncé par la dernière colonne de  $T_0^3$  ; P étant l'origine du repère (  $n+1= 3+1= 4$ ) ou  $P \sim O_4$

**Exemple (b): Méthode classique  $TMT^{-1}$ ; Puma 560.**

Première opération : Une rotation  $R_1$  du premier lien d'un angle  $\theta_1$  autour de l'axe z passant par l'origine O du repère de base :

$$A_1 = R_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deuxième opération : Une rotation  $R_2$  du deuxième lien d'un angle  $\theta_2$  autour de l'axe y passant par l'origine O du repère de base :

$$A_2 = R_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 A_2 = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -s_1 c_1 s_2 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 s_1 s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées (la nouvelle position) du centre  $O_3$  de la troisième articulation qui sont données par la quatrième colonne de la transformation  $T_0^2$

(voir exemple (a) ) peuvent être définies par le produit de  $(A_1 A_2)$  et du vecteur position initiale du centre  $O_3:(a_2, d_2, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 c_1 c_2 - d_2 s_1 \\ a_2 s_1 c_2 + d_2 c_1 \\ -a_2 s_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troisième opération : Une rotation  $R_3$  du troisième lien d'un angle  $\theta_3$  autour de l'axe  $O_3 y_3$  parallèle à  $O y$  :

$$A_3 = T R_3 T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & -a_2 c_3 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & -d_2 + d_2 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & -a_2 c_3 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & -a_2 c_3 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & c_1 a_2 (-c_{23} + c_2) \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & s_1 a_2 (-c_{23} + c_2) \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & a_2 (s_{23} - s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut déterminer les coordonnées du centre  $O_4$  de la quatrième articulation qui sont données par la quatrième colonne de la transformation  $T_0^3$  (voir exemple (b) ) par le produit de  $(A_1 A_2 A_3)$  et du vecteur position initiale du centre  $O_4$  ;

$$O_4:(a_2 + a_3, d_2 + d_3, 0)^T$$

$$A_1 A_2 A_3 \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ d_2 + d_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & c_1 a_2 (-c_{23} + c_2) \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & s_1 a_2 (-c_{23} + c_2) \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & a_2 (s_{23} - s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ d_2 + d_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) c_1 - (d_2 + d_3) s_1 \\ (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) s_1 + (d_2 + d_3) c_1 \\ -a_2 s_2 - a_3 s_{23} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec les mêmes suppositions (poignet fixé à la position d'origine: ( $q_4 = q_5 = q_6 = 0$ )), le vecteur  $r_3^6$  sera donné par l'équation suivante :

$$r_3^6 = \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ d_2 + d_3 \\ d_4 + d_6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et ainsi on pourra calculer les coordonnées de l'élément terminal en utilisant la transformation classique  $T_0^3 = A_1 A_2 A_3 \neq T_0^3$  :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = T_0^3 r_3^6$$

$$\begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & c_1 a_2 (-c_{23} + c_2) \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & s_1 a_2 (-c_{23} + c_2) \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & a_2 (s_{23} - s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ d_2 + d_3 \\ d_4 + d_6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{cases} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - (d_2 + d_3)s_1 + (d_4 + d_6)c_1 s_{23} \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) + (d_2 + d_3)c_1 + (d_4 + d_6)s_1 s_{23} \\ -(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) + (d_4 + d_6)c_{23} \end{cases}$$

Ce qui est **exactement** équivalent au vecteur position déterminé par les matrices D-H. = Résultat (b)

On peut facilement montrer que les trois dernières variables,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  constituent les bien connues angles d' Euler :  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , respectivement, par rapport au repère  $O_3x_3y_3z_3$ .

Il suffit de calculer les matrices  $A_4$ ,  $A_5$ , et  $A_6$  en réutilisant le tableau (2.3) ou le tableau (2.4) et l'équation (2.4):

**Tableau (2.4):** Les paramètres (D-H) du poignet du manipulateur.

lien	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$ Variable
4	0	- 90	0	$\theta_4$
5	0	+ 90	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^6 = A_4 A_5 A_6 = \begin{pmatrix} R_3^6 & O_3^6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La méthode directe  $TMT^{-1}$ , peut être facilement généralisée au poignet du robot Puma 560 : Une transformation  $T_3^6$  qui se compose des trois rotations (3x3) ou (4x4) successives ou (Angles d'Euler) :  $R_4 (\theta_4, O_3Z_3)$   $R_5 (\theta_5, O_3Y_3)$   $R_6 (\theta_6, O_3Z_3)$  :

$$T_3^6 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et finalement pour trouver la position de l'outil final :

$$\begin{cases} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{cases} = T_3^6 r_3^6$$

$$\text{Avec } r_3^6 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ d_6 \\ 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{cases} c_4 s_5 d_6 \\ s_4 s_5 d_6 \\ c_5 d_6 \end{cases}$$

**Le même résultat** que celui trouvé précédemment par la méthode ( D - H ) conventionnelle et qui correspond à la quatrième colonne de la transformation  $T_3^6$ .

Pour conclure le chapitre et à la lumière de ces trois exemples, il est évident que les résultats trouvés se rejoignent quelle que soit la méthode adoptée.

Cette méthode directe et classique ne s'encombre pas d'une série de choix de repères, d'angles de vrillage (twist angles) avec leurs amplitudes et différents signes, en plus d'une série de consignes auxquelles il faudra avec précaution se référer selon l'une ou l'autre de ses conventions.

# *CHAPITRE III*

### 3.1 TRAVAUX CONNEXES RÉCENTS (Etat de l'art)

Le quaternion dual a existé depuis 1882 mais a gagné moins d'attention par rapport aux seuls quaternions tout court. D'une façon comparable aux quaternions, les quaternions duaux ont eu à souffrir d'un tabou qui leur est associé, permettant aux utilisateurs d'éviter les quaternions et ainsi donc les quaternions duaux. Bien que la communauté internationale spécialisée en robotique ait commencé à adopter les quaternions duaux ces dernières années, la communauté d'infographie ne les a pas encore adoptés. Nous passons en revue certains travaux récents qui ont pris racine et ont démontré la faisabilité des quaternions duaux, à la fois dans les domaines de la robotique et de l'infographie [23].

#### 3.1.1 Infographie

Kavan a montré les avantages des quaternions duaux dans le dépouillement (Skinning) et le mélange (blending) de caractères.

Ivo a étendu le travail de Kavan avec les quaternions duaux et q-tangents comme une méthode alternative pour représenter les transformations rigides au lieu de matrices, et fournit des preuves que les résultats peuvent être plus rapides avec des transformations cumulées des articulations si les inférences par sommet sont assez grandes.

Selig a pu résoudre le problème clé dans les jeux informatiques. En examinant le problème de la résolution des équations de mouvement en temps réel, il a mis en avant la façon dont les quaternions duaux peuvent donner un moyen très soigné et succinct des transformations de corps rigides.

Vasilakis a discuté l'animation de personnages sur la base du dépouillement (Skinning) d'un squelette rigide.

Kuang a présenté une stratégie pour la création d'animations en temps réel de mouvements de solide (corps) habillé (clothed) [24] [25] [26] [27] [28].

#### 3.1.2 Robotique

Pham a résolu des problèmes de cinématique inverse (IK) pour des chaînes liées en utilisant la matrice jacobienne dans l'espace dual-quaternion.

Malte a associé un modèle informatique multiple (MMC) avec des quaternions duaux pour modeler des corps rigides.

Ge a montré que les quaternions duaux constituent la méthode la plus efficace et pratique pour l'interpolation des mouvements en trois dimensions.

Yang-Hsing a calculé l'orientation relative en utilisant des quaternions duaux. Perez a formulé les contraintes dynamiques pour des systèmes robotiques articulés en utilisant des quaternions duaux.[29] [30] [31] [32] [33].

### 3.2 CONCEPTS PHYSIQUES

Nous passons en revue les méthodes les plus courantes pour représenter les orientations de corps rigides et les translations dans notre monde physique (trois dimensions spatiales). Bien que l'orientation et la rotation sont des concepts familiers, il ya plusieurs façons de les représenter à la fois mathématiquement et numériquement, chacune avec ses propres forces et faiblesses. Nous décrivons brièvement quatre des méthodes les plus populaires pour la représentation des transformations rigides. Cela permet d'illustrer les problèmes mathématiques et informatiques qui se produisent.

Les quatre autres méthodes que nous comparons du point de vue mathématiques et informatique aux quaternions duaux sont les suivantes:

- Matrices
- Axe-Angle
- Angles d'Euler + Translations
- Les quaternions

Chaque méthode alternative doit représenter à la fois l'orientation et la translation. Dans certains cas, ceci est réalisé en utilisant deux variables d'état séparés et leurs combinaisons, tandis que pour les matrices et quaternions duaux une seule variable d'état unifié suffit.

Pour chaque cas, nous nous concentrons sur les questions d'interpolation, la vitesse de calcul, la robustesse mathématique et les mesures de distance (Métriques).

Les propriétés que nous recherchons pour représenter les transformations d'un corps rigide (solide) (rigid body) sont:

**Robustesse** : - être continu et ne contenant aucune discontinuité (comme blocage ou verrouillage de cardan du aux angles d'Euler que nous discuterons plus tard). Contenir une unique représentation, sachant que certaines méthodes contiennent des informations redondantes, de sorte que plusieurs ou un nombre infini d'éléments peuvent représenter la même transformation.

**Efficacité** : - prendre la plus petite et nécessaire quantité d'espace et d'être numériquement (calcul) rapide. Fournir un nombre minimal de calculs et de combinaisons et de conversions vers d'autres représentations (estimer le coût de conversion entre des matrices et les angles d'Euler).

**Facilité d'utilisation** : - peut être utilisé sans trop de complications.

### 3.2.1 Orientation et translation

Il peut sembler intuitif comment les objets sont mis en mouvement c.-à-d. en rotation et en translation. Par exemple, on peut choisir tout objet autour de nous et le faire tourner (rotation, spin) et/ou translater (déplacer), sans réfléchir.

Cependant, comment peut-on modéliser ce mouvement numériquement et mathématiquement? Les sous-sections suivantes sont consacrées à l'explication et à la compréhension de ces principes de base.

Pour les méthodes qui sont formés de parties distinctes, l'*orientation* et la *translation*, nous pouvons analyser leur fonctionnement en tenant compte de l'*orientation* et de la *translation* séparément et en les combinant à la fin de chaque opération.

### 3.2.2 Translation

Les coordonnées de translation sont relativement simples à travailler avec. Ils se composent des valeurs scalaires le long de chacun des axes principaux (x, y, z). Les orientations sont combinées aux translations en faisant tourner l'axe principal.

### 3.2.3 Angles d'Euler

Une façon familière de représenter l'orientation et la translation pour les systèmes de caractères est de tenir compte des trois angles successifs à travers le principe des axes orthogonaux (x, y, z).

**Les Angles d'Euler en 3D ne sont pas (en général ) commutatifs par composition.**

Dans la pratique, les angles sont utilisés en les insérant dans des matrices. Le produit des trois matrices- angle produit l'ensemble des angles d'Euler. Il ya douze produits possibles: XYZ, XYX, YZX, YZY, ZXY, ZXZ, XZY, XZX, YXZ, YXY, ZYX, et ZYZ.

Il s'agit de l'ordre par lequel ces rotations sont appliquées. Par exemple, pour la factorisation XYZ, cela signifierait faire tourner autour de Z puis autour de Y et finalement autour de X.

Pour pouvoir travailler avec des angles d'Euler, il faut les convertir en matrices:

Les matrices de rotation standard autour des axes principaux Z, Y et X, représentant les angles de Lacet, de Tangage et de Roulis, s'écrivent donc :

$$R(\theta, k) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$R(\Phi, j) = \begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$R(\varphi, i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

La matrice **R**, formée par la composition d'une rotation autour de l'axe X , $R(\varphi, i)$ , suivie d'une rotation autour de l'axe Y , $R(\Phi, j)$ , et finalement suivie d'une rotation autour de l'axe Z,  $R(\theta, k)$  est donnée par (C = cos ; S = sin) :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta C\Phi & C\theta S\Phi S\varphi - S\theta C\varphi & C\theta S\Phi C\varphi + S\theta S\varphi \\ S\theta C\Phi & S\theta S\Phi S\varphi + C\theta C\varphi & S\theta S\Phi C\varphi - C\theta S\varphi \\ -S\Phi & C\Phi S\varphi & C\Phi C\varphi \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La combinaison avec la translation est juste une question de rotation des composantes de translation  $(x, y, z)$  par la rotation.

Pour combiner et calculer les différences d'interpolation on doit trouver l'équivalent Axe- Angle des deux orientations et extrapoler les angles d'Euler.

- \* Créer une matrice pour chaque angle d'Euler.
- \* Multiplier les trois matrices ensemble.
- \* Extraire l'axe-angle à partir de la matrice résultante

La conversion, la combinaison, et l'extraction des angles d'Euler est coûteuse en ressources informatiques. En outre, les angles d'Euler peuvent avoir des discontinuités autour de 0 et  $2\pi$ , car les composantes se trouvent sur des cercles séparés et non dans un espace vectoriel unique.

#### *Avantages :*

Nos ingénieurs préfèrent les angles d'Euler, car ils peuvent les assimiler sans effort et peuvent les utiliser pour créer des orientations sans difficulté. Ils sont aussi très intuitifs et possèdent une longue histoire en physique et en infographie, ils peuvent aussi calculer certaines intégrales dans l'espace de rotation plus facilement.

Les angles d'Euler sont minimales et nécessitent seulement trois paramètres, mais nous verrons plus loin comment quatre paramètres sont mieux que trois. En outre, puisque les angles sont utilisés directement, il n'existe pas de dérive et pas de besoin de normalisation.

#### *Inconvénients :*

Les angles d'Euler souffrent du problème de singularités : Des angles peuvent instantanément changer par jusqu'à  $2\pi$  radians pendant que les autres angles passent par la singularité; Les angles d'Euler sont pratiquement impossibles à utiliser pour des rotations successives.

Il ya douze séquences de rotation différentes possibles pour les angles d'Euler- XYZ, YXZ, XZY, et ainsi de suite.

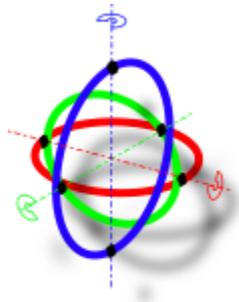
Il n'existe pas d'ensemble d'angles d'Euler "plus simple" ou "plus approprié". Pour utiliser un ensemble d'angles d'Euler, on doit savoir quelle séquence de rotation on utilise et de s'y tenir.

Dans la pratique, lorsque les angles d'Euler sont nécessaires, les opérations sous-jacentes de rotation sont effectuées en utilisant les quaternions et sont enfin converties en angles d'Euler pour la tâche à accomplir.

A) *Blocage de cardan (Gimbals lock)*

La singularité de coordination dans les angles d'Euler est communément appelé 'gimbal lock' ou 'verrouillage cardan'.

Un cardan est un dispositif physique constitué de cerceaux sphériques concentriques avec des pivots reliant les anneaux adjacents, ce qui leur permet de tourner l'un autour de l'autre (Figure 3.1).



**Figure 3.1 :** *Cardan avec des points indiqués de rotation*

Le blocage de cardan est la perte d'un degré de liberté, connu aussi sous le nom anglais de gimbal lock, qui survient quand les axes de deux des trois cardans nécessaires pour appliquer ou compenser les rotations dans l'espace à trois dimensions sont portés par la même direction. L'approche moderne est d'éviter complètement d'utiliser des cardans. Dans le contexte de centrales à inertie, cela peut se faire en montant directement les capteurs inertiels au corps du véhicule plate-forme inertielle liée et en exploitant les données de rotation et d'accélération ainsi captées en utilisant des méthodes à base de quaternions pour en déduire l'orientation et la vitesse du véhicule.

Un cardan est constitué par un alignement de trois bagues attachées orthogonalement. Les cardans sont souvent considérés dans les gyroscopes utilisés par l'industrie aéronautique.

Comme les objets sont tournés, ils abordent le blocage de cardan, si la singularité est atteinte un mauvais conditionnement numérique s'occasionnerai,

cela est souvent physiquement évident du au grand tremblement du cardan en s'approchant de la singularité. C'est une des raisons pour lesquelles l'industrie aérospatiale, dès le début, a adopté les quaternions pour représenter l'orientation.

Le problème du blocage de cardan apparaît lorsque l'on utilise les angles d'Euler dans une application (voir exemple).

Les angles d'Euler offrent une description numérique d'une rotation quelconque dans l'espace à trois dimensions au moyen de trois nombres.

Pour faire une comparaison, toutes les translations peuvent se décrire au moyen de trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  comme la succession de trois mouvements en ligne droite le long de trois axes perpendiculaires,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Il en va de même pour les rotations, toutes les rotations peuvent se décrire au moyen de trois nombres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\Phi$ , comme la succession de trois mouvements de rotation autour de trois axes perpendiculaires l'un avec le suivant. Cette ressemblance entre les coordonnées linéaires et les coordonnées angulaires rend les angles d'Euler très intuitifs, mais malheureusement ils souffrent du problème du blocage de cardan.

#### B) Perte d'un degré de liberté avec les angles d'Euler (Exemple) :

Une rotation dans l'espace à trois dimensions peut se représenter numériquement au moyen de matrices de plusieurs manières. Une de ces représentations est :

$$R = \begin{pmatrix} C\theta C\Phi & C\theta S\Phi S\varphi - S\theta C\varphi & C\theta S\Phi C\varphi + S\theta S\varphi \\ S\theta C\Phi & S\theta S\Phi S\varphi + C\theta C\varphi & S\theta S\Phi C\varphi - C\theta S\varphi \\ -S\Phi & C\Phi S\varphi & C\Phi C\varphi \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

En dehors du fait que ce résultat est assez encombrant on a des problèmes quand l'angle  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , car la matrice devient :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & C\theta S\varphi - S\theta C\varphi & C\theta C\varphi + S\theta S\varphi \\ 0 & S\theta S\varphi + C\theta C\varphi & S\theta C\varphi - C\theta S\varphi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\varphi - \theta) & \cos(\varphi - \theta) \\ 0 & \cos(\varphi - \theta) & -\sin(\varphi - \theta) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le même résultat quelque soit, ou pourvu que, la différence entre les deux angles ( $\varphi - \theta$ ) soit égale à une constante.

On est donc en présence d'une singularité (ou aberration). Ceci est expliqué par la perte d'un degré de liberté.

La seule solution pour que  $\varphi$  et  $\theta$  recommencent à jouer leurs rôles différents est d'éloigner  $\varphi$  de la valeur  $\frac{\pi}{2}$ .

On peut choisir d'autres conventions pour représenter une rotation avec une matrice au moyen d'angles d'Euler que la convention Z, X et Z ci-avant et on peut également choisir d'autres intervalles de variation pour les angles, mais dans tous les cas, il y a au moins une valeur pour laquelle un degré de liberté est perdu.

La solution au problème du blocage de cardan est de modéliser les rotations dans l'espace non pas à l'aide des angles d'Euler, mais en utilisant une rotation autour d'un axe quelconque. Cette rotation peut être modélisée sous forme de quaternions ou à l'aide de matrices de rotation.

On remarquera que le problème du blocage de cardan ne rend pas les angles d'Euler « faux » (ils continuent à jouer leur rôle de système de coordonnées), mais les rend mal adaptés à certaines *applications* pratiques.

### C) *Interpolation*

Le problème majeur avec une interpolation d'Euler est qu'elle souffre de problèmes lors de l'interpolation près des régions de blocage de cardan. Quand près d'une singularité (blocage de cardan) l'interpolation devient incontrôlable, un bruit assourdissant se fait entendre et elle devient finalement aléatoire et instable en convergeant vers la singularité.

Si les angles d'Euler sont interpolés linéairement le chemin résultant n'est pas forcément celui le plus court entre les positions, comme cela se fait dans l'espace vectoriel [34].

### 3.2.4 Variantes aux angles d'Euler : Matrices (3x3) ,(4x4) et Axe-Angle

#### A. Généralités : Paramétrisation des rotations et des déplacements

Chaque fois qu'on a affaire à déterminer la position relative des objets 3D, on doit utiliser une représentation qui donne l'orientation et la position d'un objet par rapport à un autre.

Cette position relative se traduit par une transformation géométrique entre deux repères, chacun de ces deux repères étant lié à un objet. Plusieurs types de paramétrisation peuvent être utilisés pour décrire cette transformation. La plus classique et la plus familière est la représentation matricielle : l'orientation relative est donnée par une matrice orthogonale, de dimension 3 x 3, appelée matrice de rotation ; la position relative est donnée par un vecteur, de dimension 3, appelé vecteur de translation. L'ensemble des rotations constitue un groupe, il en est de même pour l'ensemble des déplacements (rotation et translation).

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la paramétrisation de ces deux groupes. Nous décrivons la paramétrisation (vectorielle et quaternion) des rotations ainsi que des déplacements. Nous présentons également leur équivalence avec la représentation matricielle. La représentation vectorielle utilise des paramètres impliqués directement dans le déplacement, autrement dit, ces paramètres constituent les éléments géométriques du déplacement concerné. La représentation quaternion utilise des objets mathématiques, les quaternions et les quaternions duaux, qui sont les plus adéquats aux problèmes de la localisation 3D. Grâce à eux, les solutions du problème de la localisation (analytiques ou numériques) deviennent plus élégantes.

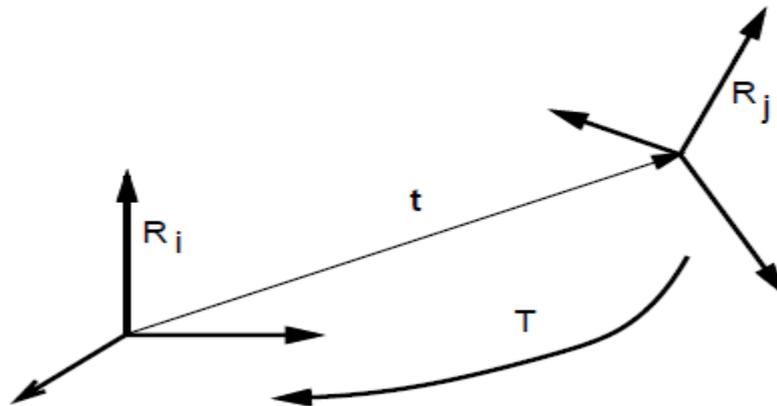
En robotique et en vision par ordinateur on associe à tout élément du poste de travail un ou plusieurs repères. Ces repères sont généralement définis de telle sorte que leurs axes et leurs origines correspondent respectivement à des directions et à des points privilégiés ayant un rôle fonctionnel lors de l'exécution de la tâche : direction d'insertion ou centre de gravité d'une pièce par exemple. Ils permettent de situer dans l'espace les objets fixes de l'environnement ainsi que les corps mobiles comme les éléments constitutifs d'un robot.

Soit une transformation quelconque (Figure 3.2) qui amène le repère  $R_i$  sur le repère  $R_j$

La représentation la plus familière de cette transformation est la représentation matricielle.

Elle est définie par une matrice de dimension 4 x 4 appelée matrice de transformation homogène, telle que :

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$



**Figure 3.2 :** Une transformation  $T$  permettant l'expression des coordonnées du repère  $R_j$  dans le repère  $R_i$  ; géométriquement, cette transformation amène le repère  $R_i$  sur le repère  $R_j$

$\mathbf{R}$  représente la matrice de rotation, elle est de dimension 3 x 3 et possède les propriétés suivantes :

1. Son déterminant est égal à 1.
2. Son inverse est égale à sa transposée.
3. Ses valeurs propres sont : 1,  $e^{i\alpha}$ ,  $e^{-i\alpha}$  (complexes conjugués).

$\mathbf{t}$  représente le vecteur de translation.

Les 9 éléments de la matrice  $\mathbf{R}$  vérifient 6 contraintes d'orthonormalité qui exprime que les vecteurs ligne (ou colonne) sont de norme égale à 1 et orthogonaux entre eux. On a ainsi 3 éléments, parmi les 9, qui sont indépendants.

Si un point  $P$  est exprimé dans le repère  $R_i$  par le vecteur  $p_i$  et dans le repère  $R_j$  par le vecteur  $p_j$ , on aura la relation suivante :

$$p_i = \mathbf{R}p_j + \mathbf{t}$$

Si nous utilisons les coordonnées homogènes, la dernière équation devient:

$$\begin{pmatrix} p_i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} p_j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette représentation nous permet :

- De représenter dans des repères différents des caractéristiques telles que les points, les vecteurs, les droites et les plans.
- De calculer la transformée de ces caractéristiques par une certaine transformation donnée.

Cependant, cette représentation matricielle n'est pas la plus adéquate pour résoudre les problèmes de la localisation 3D qui consiste à estimer la rotation et la translation entre deux repères différents.

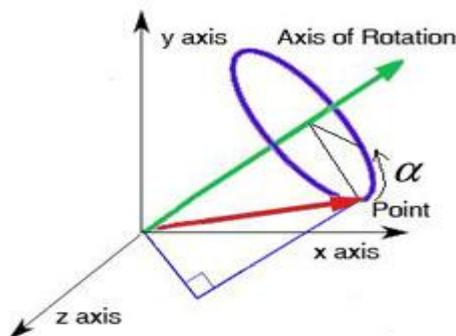
Dans la suite, nous allons décrire deux représentations de la rotation : la représentation vectorielle et la représentation quaternion. Ensuite, nous allons décrire deux représentations du déplacement (rotation et translation) : le vissage et le quaternion dual.

### B. Rotation et représentation vectorielle

Chaque rotation dont la matrice est donnée par  $\mathbf{R}$  peut être effectuée par une rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe passant par l'origine. Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur directeur de cet axe.

L'axe de rotation est tel qu'il n'est pas modifié par la rotation (Figure 3.3). C'est donc la direction propre associée à la valeur propre unitaire de la matrice  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} \mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (3.6)$$



**Figure 3.3:** La rotation du point d'un angle  $\alpha$  autour d'un axe  $n$

La représentation Axe-angle nous préserve du problème de “gimbal lock”. C’est aussi, une manière très intuitive pour représenter une orientation quelconque.

L’angle de rotation  $\theta$  est fourni par les valeurs propres complexes conjuguées.

En notation matricielle, un vecteur  $\mathbf{v}$  se transforme en un vecteur  $\mathbf{v}'$  grâce à la relation suivante :

$$\mathbf{v}' = R \mathbf{v}$$

En notation vectorielle, un vecteur subissant une rotation d’axe  $\mathbf{n}$ , ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ) et d’angle  $\theta$  devient un vecteur  $\mathbf{v}'$  qui s’obtient par la formule de *Rodrigues* :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

où  $\times$  dénote le produit vectoriel et  $\cdot$  le produit scalaire.

Pour démontrer cette formule nous allons décomposer le vecteur  $\mathbf{v}$  en une composante ( $\parallel$ ) parallèle à  $\mathbf{n}$  et une composante ( $\perp$ ) orthogonale à  $\mathbf{n}$  (Figure 3.4):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n})$$

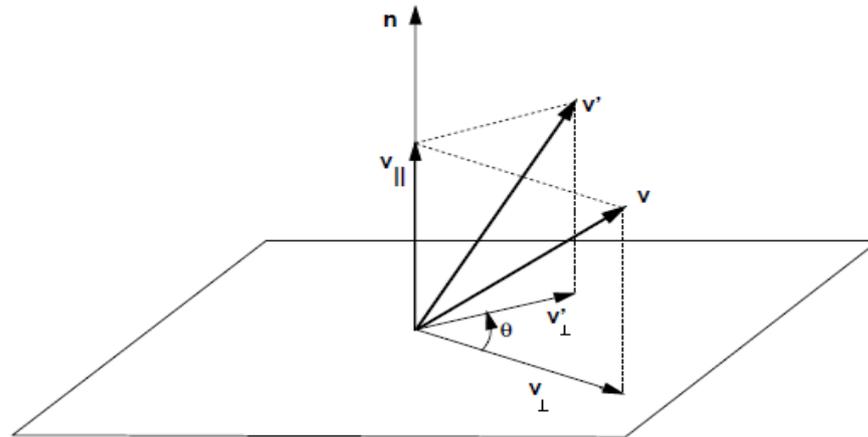
Le vecteur  $\mathbf{v}'$  sera donc obtenu en additionnant  $\mathbf{v}_{\parallel}'$  et  $\mathbf{v}_{\perp}'$ . En remarquant que  $\mathbf{v}_{\parallel}' = \mathbf{v}_{\parallel}$  (puisque  $\mathbf{v}_{\parallel}$  a la même direction que  $\mathbf{n}$ ), on aura :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}'$$

$\mathbf{v}_{\perp}'$  est obtenu en faisant tourner  $\mathbf{v}_{\perp}$  d’un angle  $\theta$  dans un plan orthogonal à  $\mathbf{n}$ .

Dans la base  $\mathbf{n}, \mathbf{v}_{\perp}$  et  $\mathbf{n} \times \mathbf{v}_{\perp}$ , on a:

$$\mathbf{v}_{\perp}' = \cos \theta \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{v}_{\perp}$$



**Figure 3.4 :** Décomposition vectorielle permettant de démontrer facilement la formule de Rodrigues.

Finalement, on obtient pour  $\mathbf{v}'$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp} \\
 &= \mathbf{v}_{\parallel} + \cos \theta \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{v}_{\perp} \\
 &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \cos \theta (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \sin \theta (\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n})) \\
 &= \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a la relation vectorielle suivante :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}$$

Mais comme  $\mathbf{n}$  est unitaire, on obtient:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{v} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})$$

Et en substituant dans l'équation précédente on obtient bien la formule de Rodrigues, soit l'équation (3.7).

La représentation d'une rotation par un axe et un angle est très pratique pour résoudre le problème de la recherche d'une transformation rigide optimale ainsi

que pour représenter le déplacement (rotation et translation) avec un vissage et un quaternion dual comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Nous présentons ici le passage entre les deux représentations : vectorielle et matricielle.

(I): De  $(\mathbf{n}, \theta)$  à  $R$

Remarquons tout d'abord qu'un produit vectoriel peut se mettre sous forme matricielle :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -n_z v_y + n_y v_z \\ n_z v_x - n_x v_z \\ -n_y v_x + n_x v_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$$

$\mathbf{K}(\mathbf{n})$  est la matrice antisymétrique associée au vecteur  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{K}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel devient alors :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{K}(\mathbf{n}) \mathbf{v}$$

En utilisant cette égalité nous obtenons la version matricielle de la formule de Rodrigues :

$$\mathbf{v}' = [(\mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{K}(\mathbf{n}) + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}^2(\mathbf{n}))] \mathbf{v}$$

Soit pour la matrice de rotation :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{K}(\mathbf{n}) + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}^2(\mathbf{n}) \quad (3.8)$$

En explicitant les termes et avec les notations  $s = \sin \theta$  et  $c = \cos \theta$  on obtient pour  $R$ :

$$R = \begin{pmatrix} c + (1-c)n_x^2 & -n_z s + (1-c)n_x n_y & n_y s + (1-c)n_x n_z \\ n_z s + (1-c)n_x n_y & c + (1-c)n_y^2 & -n_x s + (1-c)n_z n_y \\ -n_y s + (1-c)n_x n_z & n_x s + (1-c)n_z n_y & c + (1-c)n_z^2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Il est intéressant de remarquer que  $(\mathbf{n}, \theta)$  représente la même rotation que  $(-\mathbf{n}, -\theta)$ , ou que  $(-\mathbf{n}, 2\pi - \theta)$ . Il suffit de substituer  $\mathbf{n}$  par  $-\mathbf{n}$  et  $\theta$  par  $-\theta$  ou par  $2\pi - \theta$  dans l'équation précédente.

(II): De  $R$  à  $(\mathbf{n}, \theta)$

$$\text{Soit la matrice } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

Il sera également utile de pouvoir extraire l'axe et l'angle de rotation à partir de la matrice de rotation. Pour cela il y a deux possibilités :

1. Extraire les valeurs propres de cette matrice. Calculer le vecteur associé à la valeur propre 1 et normaliser ce vecteur. Ce qui donne la direction de l'axe de rotation.

L'angle de rotation se calcule facilement à partir des valeurs propres complexes conjuguées.

2. Identifier les éléments  $R_{ij}$  de la matrice de rotation avec l'expression de cette matrice telle qu'elle est fournie par la formule de *Rodrigues* ; équation (3.7).

En additionnant les termes diagonaux de la matrice (3.9) on obtient la trace  $T$  :

$$T = R_{11} + R_{22} + R_{33} = 1 + 2 \cos \theta$$

Par ailleurs, on a les relations suivantes :

$$R_{21} - R_{12} = 2n_z \sin \theta$$

$$R_{13} - R_{31} = 2n_y \sin \theta$$

$$R_{32} - R_{23} = 2n_x \sin \theta$$

En tenant compte du fait que le vecteur  $\mathbf{n}$  doit être unitaire, on obtient :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{4} ((R_{21} - R_{12})^2 + (R_{13} - R_{31})^2 + (R_{32} - R_{23})^2)$$

Nous avons ainsi la valeur du cosinus et la valeur absolue du sinus, ce qui implique qu'il y a deux angles appartenant à l'intervalle  $[0; 2\pi]$  qui vérifient les deux équations précédentes. La somme de ces deux angles est égale à  $2\pi$ . Ce qui ne pose aucun problème puisque  $(n, \theta)$  et  $(-n, 2\pi - \theta)$  représente la même rotation. On peut ainsi imposer à l'angle  $\theta$  d'être compris entre 0 et  $\pi$  (l'axe de rotation sera déterminé d'une façon unique si  $\sin \theta \neq 0$ ). Nous pouvons donc choisir la valeur positive du sinus et nous avons finalement :

$$\theta = \arctan(\sin \theta / \cos \theta) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

La direction  $\mathbf{n}$ , correspondant à l'angle  $\theta$  ainsi calculé, est alors donnée par (si  $\sin \theta \neq 0$ ) :

$$n_x = (R_{32} - R_{23})/2 \sin \theta$$

$$n_y = (R_{13} - R_{31})/2 \sin \theta$$

$$n_z = (R_{21} - R_{12})/2 \sin \theta$$

Deuxième méthode :

Lorsque  $\sin \theta$  est petit, les paramètres  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  ne sont pas déterminés avec précision par les équations citées ci-dessus. Une autre méthode plus exacte peut être utilisée et la solution est donnée par :

Si  $R_{11}$  est la plus positive des éléments diagonaux de la matrice  $R$ , alors :

$$n_x = \operatorname{sgn}(R_{32} - R_{23}) \left( \frac{R_{11} - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{1/2}$$

$$n_y = \frac{R_{12} + R_{21}}{2n_x(1 - \cos \theta)}$$

$$n_z = \frac{R_{13} + R_{31}}{2n_x(1 - \cos \theta)}$$

Si  $R_{22}$  est la plus positive des éléments diagonaux de la matrice  $R$ , alors :

$$n_y = \operatorname{sgn}(R_{13} - R_{31}) \left( \frac{R_{22} - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{1/2}$$

$$n_x = \frac{R_{21} + R_{12}}{2n_y(1 - \cos \theta)}$$

$$n_z = \frac{R_{32} + R_{13}}{2n_y(1 - \cos \theta)}$$

Si  $R_{33}$  est la plus positive des éléments diagonaux de la matrice  $R$ , alors :

$$n_z = \operatorname{sgn}(R_{21} - R_{12}) \left( \frac{R_{33} - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{1/2}$$

$$n_x = \frac{R_{13} + R_{31}}{2n_z(1 - \cos \theta)}$$

$$n_y = \frac{R_{32} + R_{23}}{2n_z(1 - \cos \theta)}$$

où le symbole  $\operatorname{sgn} ( )$  désigne la fonction signe.

En résumé, la représentation  $(\mathbf{n}, \theta)$  comporte 4 paramètres. Si, de plus, on choisit le module de  $\mathbf{n}$  tel qu'il soit égal à une fonction de l'angle de rotation:

$$|| \mathbf{n} || = f(\theta)$$

On n'a alors plus que trois paramètres pour décrire une rotation et cette représentation est minimale. Ainsi, dans la représentation d'une rotation avec l'exponentielle d'une matrice antisymétrique, le module du vecteur associé est

égal à  $\theta$ ; dans le cas où l'on cherche à estimer la rotation optimale, ce module est égal à  $\arctan \theta/2$ .

### 3.2.5 Rotation et quaternion unitaire

#### a) Notion de 'Quaternions : Plus que complexes'

Les nombres entiers naturels et relatifs, les rationnels, les p-adiques et les réels ainsi que les nombres complexes (comme les réels, mais à deux dimensions) ayant été définis; on a besoin de faire comme Hamilton, et généraliser encore les nombres complexes : des nombres à 3, 4 voire plus de dimensions ?!

Histoire de revoir toutes les définitions algébriques nécessaires à la compréhension globale, revenons à l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. L'ensemble  $\mathbb{R}$  est muni d'une addition (+) et d'une multiplication (.) qui vérifient un nombre de propriétés élémentaires (on note a, b et c des éléments de  $\mathbb{R}$ ):

$A_1$  : [ + est une loi de composition interne ] ;  $a+b \in \mathbb{R}$

$A_2$  : [ + admet un élément neutre 0 ] ;  $a+0 = 0+a = a$

$A_3$  : [ + est associative ] ;  $(a+b)+c = a+(b+c)$

$A_4$  : [les éléments de  $\mathbb{R}$  sont inversibles pour +, l'inverse de a est -a] ;  $a+(-a)=(-a)+a = 0$

$A_5$  : [ + est commutative ] ;  $a+b = b+a$

$A_6$  : [ . est une loi de composition interne ] :  $a.b \in \mathbb{R}$

$A_7$  : [ . admet un élément neutre 1 ] ;  $a.1 = 1.a = a$

$A_8$  : [ . est associative ] ;  $(a.b).c = a.(b.c)$

$A_9$  : [ . est distributive par rapport à + ] ;  $a.(b+c)=a.b+a.c$  et  $(a+b).c=a.c+b.c$

$A_{10}$  : [les éléments de  $\mathbb{R}$  non nuls sont inversibles pour ., l'inverse de a est  $a^{-1}$ ];

$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

$A_{11}$  : [ . est commutative ] ;  $a.b = b.a$

Grâce à  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ ,  $\mathbb{R}$  est un groupe, grâce à  $A_5$ ,  $\mathbb{R}$  est en plus un groupe abélien (ou groupe commutatif), grâce à  $A_6, A_7, A_8$  et  $A_9$ ,  $\mathbb{R}$  est en plus un anneau (anneau commutatif) à cause de  $A_{11}$ , grâce à  $A_{10}$ ,  $\mathbb{R}$  est en plus une algèbre à division et enfin grâce à  $A_{11}$   $\mathbb{R}$  est en plus un corps.

Ce qui est valable ici avec  $\mathbb{R}$  l'est aussi également avec  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{C}$  : ce sont des corps.  $\mathbb{Z}$ , quant à lui, est juste un anneau commutatif, pendant que  $\mathbb{N}$  n'est algébriquement pas grand-chose de très intéressant.

Par rapport à  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes possède une dimension de plus, mais reste tout de même un corps : on peut y faire sans problèmes des multiplications et des divisions. Après avoir construit les complexes de la façon dont tout le monde connaît ("un nombre complexe est un nombre de la forme  $a+ib$ , avec  $i^2=-1$ "), le mathématicien écossais **William R Hamilton** a cherché à généraliser encore l'ensemble des complexes. Peut-on construire un ensemble de nombres de la forme  $a+ib+jc$  qui serait un corps, pour étendre les propriétés de  $\mathbb{C}$  à l'espace tridimensionnel?

### Les quaternions de Hamilton

Quelles propriétés doivent vérifier  $i$  et  $j$  pour que l'ensemble des nombres  $a+ib+jc$  forme un corps ? On pourrait partir de  $i^2=j^2=-1$ , mais dans ce cas là, à quoi est égal  $ij$  ? Hamilton a eu beau tourner le problème dans tous les sens, il s'est avoué vaincu : Impossible de généraliser les complexes en dimension 3. Convaincu tout de même que les complexes étaient généralisables, il s'attaqua aux nombres de la forme :

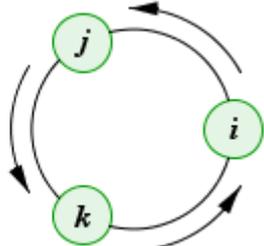
$$a + b.i + c.j + d.k$$

Où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels, et  $i, j$  et  $k$  des nombres plus qu'imaginaires. Le 16 octobre 1843, alors qu'il se promène tranquillement sur le Broom Bridge à Dublin, un éclair de génie le frappe ! Sous les yeux de sa femme, il s'empresse alors de graver sur le pont :

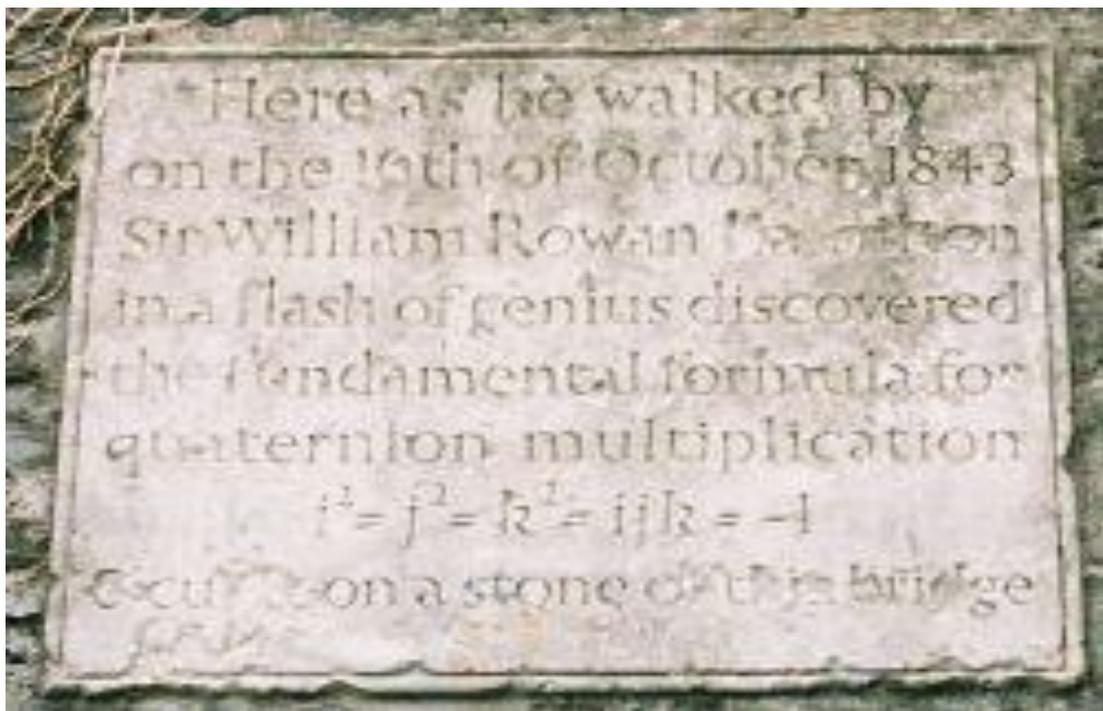
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Les quaternions venaient de naître ! En faisant quelques manipulations sur les égalités, on peut trouver la table de multiplication des unités :

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1



**Figure 3.5 :** A gauche, la table de multiplication des unités des quaternions. A droite, un moyen mnémotechnique pour s'en souvenir :  $i \cdot j = k$  (en tournant dans le sens des flèches), et  $k \cdot j = -i$  (en tournant dans l'autre sens)



**Figure 3.6 :** Ici, dans un éclair de génie, Hamilton découvrit la formule fondamentale des quaternions.

Les additions se font quant à elles de la plus simple manière qui soit.

Mais en voulant ajouter une dimension supérieure, on a tout de même perdu quelque chose d'essentiel : la commutativité de la multiplication ! On a, par exemple,  $k = ij \neq ji = -k$  ! Mais cela ne va pas nous empêcher de faire des calculs !

Premier exemple de multiplication de quaternions :

$$A = (22-2i+6j+8k), B = (1+i-j);$$

$$A.B =$$

$$\begin{aligned} (22-2i+6j+8k).(1+i-j) &= 22.(1+i-j)-2i(1+i-j)+6j(1+i-j)+8k(1+i-j) \\ &= 22 + 22i -22j -2i - 2i^2 + 2ij + 6j + 6ji - 6j^2 + 8k +8ki - 8kj \\ &= 22 + 22i -22j -2i + 2 + 2k + 6j - 6k + 6 + 8k +8j + 8i \\ &= 30 + 28i -8j +4k \end{aligned}$$

(On pourrait donner la forme générale de  $(a+bi+cj+dk).(e+fi+gj+hk)$ . On peut non seulement faire des multiplications, mais on peut même faire des divisions ! Pour cela, il faut définir (de la même façon que pour les nombres complexes) la norme et le conjugué d'un quaternion, de la façon suivante :

$$\text{Norme : } \|a + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\text{Conjugué : } (a+bi+cj+dk)^* = a-bi-cj-dk$$

On peut alors remarquer que, pour un quaternion  $Q$ , on a l'égalité  $Q.Q^* = \|Q\|^2$ . Cette égalité permet de calculer l'inverse d'un quaternion  $Q$  :

$$\frac{1}{Q} = \frac{Q^*}{Q.Q^*} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Pour diviser deux quaternions, il suffit alors de multiplier l'un par l'inverse de l'autre. Étant donné que la multiplication n'est pas commutative, on peut diviser de deux façons différentes : le nombre  $P/Q$  peut désigner  $P.Q^{-1}$  ou  $Q^{-1}.P$ .

L'ensemble des nombres de la forme  $a+bi+cj+dk$  forme alors l'ensemble des quaternions, noté  $\mathbf{H}$ . Cet ensemble (muni de son addition et de sa multiplication) vérifie toutes les propriétés de  $(A_1)$  à  $(A_{10})$  : c'est une algèbre à division ! En

doublant le nombre de dimension, pour passer de  $\mathbb{C}$  à  $\mathbf{H}$ , on a alors perdu la commutativité ( $A_{11}$ ) :  $\mathbf{H}$  n'est malheureusement pas un corps.

Le passage de  $\mathbb{C}$  à  $\mathbf{H}$  a permis de donner de nouvelles racines carrées au nombre -1, puisqu'on a maintenant  $(\pm i)^2 = (\pm j)^2 = (\pm k)^2 = -1$ , soit, au moins 6 racines carrées pour -1 ! Mais on peut en fait remarquer qu'il y en a en fait une infinité, il suffit de prendre un triplet de nombres vérifiant  $b^2+c^2+d^2=1$ , on aura alors  $(bi+cj+dk)^2=-1$ .

Tout comme pour les complexes, il existe d'autres manières équivalentes pour construire les quaternions :

Géométriquement, d'abord : un quaternion  $a+bi+cj+dk$  peut se voir comme un couple  $(a,v)$ , où  $a$  est un réel et  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi, les opérations deviennent :

$$\begin{aligned} (a, \vec{u}) + (b, \vec{v}) &= (a + b, \vec{u} + \vec{v}) \\ (a, \vec{u}) \times (b, \vec{v}) &= (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v}) \end{aligned}$$

(Où  $\cdot$  représente le produit scalaire, et  $\wedge$  le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ )  
A noter que les vecteurs ont été inventés par Hamilton à cette occasion !

Concernant le même exemple que plus haut :

$$A.B = (22-2i+6j+8k).(1+i-j) = (22, 2i+6j+8k)(1, i-j+0k)$$

La quantité scalaire:  $ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 22 - (-8) = 30$

et les trois vecteurs :

$$a\mathbf{v} = (22 \mathbf{i} - 22\mathbf{j})$$

$$b\mathbf{u} = (-2 \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (8 \mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

On obtient bien sur le même quaternion résultat :  $(30, 28\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

### Les octonions de Cayley

Peut-on aller plus loin, et fabriquer des algèbres à divisions dans des espaces de dimensions 5, 6 ou plus ? L'anglais Arthur Cayley l'a fait ! En 1845, il fabrique l'ensemble  $\mathbb{O}$  des octonions (alias octaves de Cayley), qui est un

ensemble de couples de quaternions. Il pose alors la multiplication suivante (où les nombres a, b, c et d sont des quaternions) :

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$$

L'ensemble ainsi fabriqué peut se voir comme un ensemble de nombres à 8 dimensions sur  $\mathbb{R}$  ! Les 8 unités imaginaires sont alors :

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0) & e_1 &= (i, 0) & e_2 &= (j, 0) & e_3 &= (k, 0) \\ e_4 &= (0, 1) & e_5 &= (0, i) & e_6 &= (0, j) & e_7 &= (0, k) \end{aligned}$$

Et tout octonion peut s'écrire sous la forme :

$$na_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$$

On peut alors donner la table de multiplication des unités :

·	1	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>
1	1	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>
e <sub>1</sub>	e <sub>1</sub>	-1	e <sub>3</sub>	-e <sub>2</sub>	-e <sub>5</sub>	e <sub>4</sub>	-e <sub>7</sub>	e <sub>6</sub>
e <sub>2</sub>	e <sub>2</sub>	-e <sub>3</sub>	-1	e <sub>1</sub>	-e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>4</sub>	-e <sub>5</sub>
e <sub>3</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>2</sub>	-e <sub>1</sub>	-1	-e <sub>7</sub>	-e <sub>6</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>4</sub>
e <sub>4</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	-1	-e <sub>1</sub>	-e <sub>2</sub>	-e <sub>3</sub>
e <sub>5</sub>	e <sub>5</sub>	-e <sub>4</sub>	-e <sub>7</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>1</sub>	-1	-e <sub>3</sub>	e <sub>2</sub>
e <sub>6</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	-e <sub>4</sub>	-e <sub>5</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	-1	-e <sub>1</sub>
e <sub>7</sub>	e <sub>7</sub>	-e <sub>6</sub>	e <sub>5</sub>	-e <sub>4</sub>	e <sub>3</sub>	-e <sub>2</sub>	e <sub>1</sub>	-1

**Figure 3.7 :** Table de multiplication (Octonions)

On s'aperçoit alors de deux choses :

- la multiplication n'est pas commutative (par exemple,  $e_3 = e_1e_2 \neq e_2e_1 = -e_3$ ). Il faut dire que la multiplication des octonions provient de celle des quaternions, on s'y attendait.
- la multiplication n'est pas associative ! Par exemple, les calculs donnent  $(e_1.e_2).e_5 = e_3.e_5 = -e_6$  et  $e_1.(e_2.e_5) = e_1.e_7 = e_6$  : on a pas toujours  $a.(b.c) = (a.b).c$  !

La division se définit de la même façon que pour les quaternions, mais l'ensemble que l'on obtient n'est pas une algèbre à division, ni même un corps, puisque la propriété  $(A_8)$  n'est pas vérifiée ! Un corps ne semble pouvoir posséder que deux dimensions, 4 si on admet qu'un corps puisse ne pas être commutatif !

Les seuls algèbres à division (l'endroit le plus général où faire des divisions) plus grands que  $\mathbb{R}$  sont  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbf{H}$ , d'après le théorème de Frobenius, démontré au début du XXe siècle. Malgré tout, ces ensembles créés juste pour le plaisir de faire des gros ensembles de nombres, ont fait le bonheur des infographistes et des physiciens quantiques : rien de mieux qu'un quaternion pour représenter une rotation dans l'espace, et un octonion est parfait pour représenter le spin d'un électron .

#### b) Rotations

Une autre représentation possible des rotations est celle utilisant les quaternions unitaires :

L'utilisation des quaternions se justifiera par une formulation très élégante du problème d'optimisation associé à la localisation 3D. Dans un premier temps (chapitre quatre ), nous allons étudier quelques propriétés des quaternions, ensuite nous les utiliserons pour décrire une rotation et nous établirons également l'équivalence avec les autres représentations déjà utilisées.

Les quaternions sont très utiles dans les domaines de l'informatique, de la vision de la robotique, des graphismes et de l'animation.

L'intérêt d'utiliser les quaternions plutôt que d'autres représentations comme les angles d'Euler provient du fait que les quaternions permettent de s'approcher au plus près des solutions de systèmes algébriques intégrant des paramètres de rotation inconnus.

Les graphistes ont maintenant réalisés le potentiel des quaternions en tant que puissant et très général opérateur de rotation.

Ils sont utilisés dans l'algorithme avancé dans la programmation de jeux et dans l'animation comme la simulation de mouvement de caméra dans un espace en trois dimensions.

Au lieu de tourner un objet via une série de rotations successives, les quaternions permettent au programmeur de tourner un objet autour d'un axe arbitraire et d'un angle quelconque. La rotation est néanmoins toujours réalisée par des calculs matriciels. Cependant, au lieu de multiplier les matrices ensemble, il suffit de multiplier les quaternions les représentants. Le résultat final est reconverti en la matrice désirée.

Les quaternions offrent aussi l'avantage de permettre l'interpolation. Ceci permet des rotations plus souples et plus réalistes.

Le gain n'est pas négligeable, si en plus on considère que pour mémoriser un quaternion il suffit seulement de ses 4 valeurs contre les 9 de la matrice. Les quaternions permettent de faire des opérations sur les matrices qu'ils représentent en occultant certains défauts de ces dernières. On transforme les matrices en quaternions, on effectue les opérations avec les quaternions puis on repasse en matrice. De plus, les quaternions prennent moins de place en volume de mémoire.

### c) Principale Application

Utiliser les quaternions se révèle être très intéressant pour les objets animés en particulier et en robotique en général. En effet, très souvent pour animer des objets on a besoin d'interpolation. Pour les positions, les méthodes sont bien connues, mais cela s'avère être plus dur pour les orientations. L'avantage des quaternions est qu'ils permettent une méthode très élégante, il s'agit de l'interpolation linéaire sphérique, autrement appelée SLERP (pour Spherical Linear interpolation).

Cette méthode est particulièrement utilisée par les moteurs pour l'interpolation de positions clefs (notamment pour les personnages) et pour la cinématique inverse. Il existe d'autres façons d'interpoler mais elles sont beaucoup moins utilisées. En 3D, on utilise essentiellement les matrices homogènes (c'est-à-dire 4x4) car elles permettent de représenter de manière

homogène (c'est-à-dire en une seule notation mathématique) les transformations dans l'espace. Ces transformations sont généralement des changements d'orientation et de position. Or, quand on travaille essentiellement sur les positions on préfère utiliser des vecteurs, plus faciles à manipuler et plus rapides à calculer. Les quaternions permettent de faire la même chose avec les orientations.

***"En 3D les quaternions sont aux orientations ce que les vecteurs sont aux positions"***

Pourquoi n'y a-t-il pas de problème équivalent à celui du blocage de cardan en utilisant une seule rotation ? Cela peut s'expliquer de manière intuitive par le fait que l'on accomplit la rotation en un seul coup :

(« Faites tourner de  $\theta$  radians, le solide, autour de l'axe porté par le vecteur  $\mathbf{n}$  »)

Tandis que les angles d'Euler sont composés de trois rotations successives. Avec trois axes de rotation, deux d'entre eux peuvent se retrouver alignés, tandis qu'un seul axe ne pourra pas poser de tel problème.

Enfin, nous allons consacrer le chapitre qui va suivre à l'étude et l'utilisation pratique des quaternions et quaternions duaux dans le domaine de la robotique.

d) Exemples illustratifs de représentation axe-angle( $\mathbf{n}, \theta$ ):

i) L'axe-angle est représenté par un axe unitaire  $\mathbf{n}$  et un angle  $\theta$  ou la paire ( $\mathbf{n}, \theta$ ).

Soit une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{n} = \left( \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^t$  (représentée par la figure 3.8).

En notant que :  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{6}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{4} = 1$  ; Ce qui implique  $|\mathbf{n}| = 1$

Cette transformation ou rotation 3-D autour de l'axe  $\mathbf{n}$  peut s'écrire sous forme matricielle en utilisant le résultat (A) ou l'équation (3.7) ou (3.9) :

$$[R] = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{5\cos\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{8} - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{4} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{8} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2} & \frac{1}{8} + \frac{7\cos\theta}{8} & \frac{(1-\cos\theta)}{4} - \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{4} - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} & \frac{(1-\cos\theta)}{4} + \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

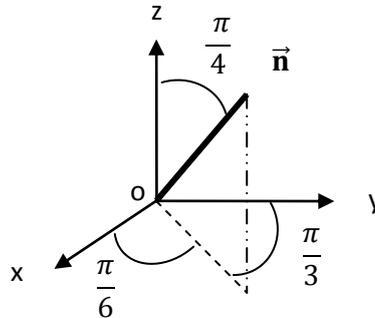


Figure 3.8 : Rotation ( $n, \theta$ )

L'unique remarque réconfortante, concernant cette matrice, est de facilement constater que :  $R = I$  (la matrice identité), pour  $\theta = 0$  ou  $2\pi$ .

Vérifions l'équation ( 3.2 ) :  $R \mathbf{n} = \mathbf{n}$  stipulant que l'axe de rotation reste inchangé :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{5\cos\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{8} - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{4} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{8} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2} & \frac{1}{8} + \frac{7\cos\theta}{8} & \frac{(1-\cos\theta)}{4} - \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{4} - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} & \frac{(1-\cos\theta)}{4} + \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

L'axe de rotation  $\vec{n}$  pourrait être déplacé de l'origine  $O$  vers une autre position désirée en utilisant les mouvements planaires (ou la conjugaison).

ii) Composition de rotations :

Appliquons deux rotations successives ; une première rotation d'amplitude  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $Ox$  suivie par une deuxième rotation de même amplitude  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $Oy$  :

En utilisant le calcul matriciel on trouve la rotation résultante  $R$  :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plusieurs techniques matricielles, peuvent nous permettre de déterminer l'axe  $\mathbf{n}$  et l'amplitude  $\theta$  résultants, dont la technique axe-angle décrite plus haut (3.3.4) :

$$R_{11} + R_{22} + R_{33} = 1 + 2 \cos \theta = 0 ;$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

Ce qui nous donne deux solutions différentes  $\theta_1 = 120^\circ$  et  $\theta_2 = 240^\circ$  toutes fois équivalentes vis-à-vis du formalisme axe-angle ( $\mathbf{n}, \theta$ )

Qu'en-t-il de l'axe de rotation résultant  $\mathbf{n}$  ?

C'est l'axe qui devra rester inchangé par la rotation  $R$ ;  $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} n_x \\ n_y \\ n_z \end{cases} = \begin{cases} n_x \\ n_y \\ n_z \end{cases}$$

On aura donc le système d'équations suivant :

$$n_y = n_x$$

$$-n_z = n_y$$

$$-n_x = n_z$$

Ou par la méthode valeurs propres/ vecteurs propres ;  $(R - I) \mathbf{n} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} n_x \\ n_y \\ n_z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

On aura le même système d'équations :

$$-n_x + n_y = 0$$

$$-n_y - n_z = 0$$

$$-n_x - n_z = 0$$

L'axe  $\mathbf{n}$  devant être unitaire ; les deux solutions pour l'axe sont:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc quatre solutions en considérant l'ambiguïté de choix d'angles et de signes.

Si l'ordre de rotation est inversé :

En utilisant le calcul matriciel on trouve la rotation résultante  $R_i$  :

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve les mêmes angles avec un axe différent ; On constate la même ambiguïté de signes et d'axes.

La méthode axe-angle, la formule de Rodrigues ou des techniques de conversion (quaternions vers matrices) sont utilisées pour la formulation d'une transformation rigide quelconque dans l'un ou l'autre de ces systèmes.

*Avantages :*

Le plus grand et unique avantage de la représentation axe-angle est qu'elle représente directement l'action de rotation, tout en étant simple et intuitive.

*Inconvénients :*

Nous pouvons renormaliser l'axe car c'est un vecteur unitaire, mais des erreurs numériques peuvent encore se glisser dans la partie représentant l'angle.

Nombre infini de choix d'angle (multiples de  $2\pi$ ), de sorte que deux paires axes - angle peuvent se référer à la même rotation, tout en étant différentes.

Il est difficile de combiner les éléments axe-angle sous leur forme native; étant généralement converti sous une représentation alternative pour une concaténation (de matrices, de quaternions).

L'interpolation Axe-angle ne peut être faite en utilisant une interpolation linéaire des quatre éléments. L'interpolation entre les quatre éléments naïvement de cette façon ne donne pas le plus court chemin.

En interpolant seulement l'angle, on peut introduire des discontinuités car l'angle doit couvrir la zone de 0 à  $2\pi$ .

Ces «sauts» sont hautement indésirables et peuvent causer une sorte d'anarchie dans l'interpolation et l'intégration numérique.

### 3.2.6 : Matrices

Pour représenter une transformation rigide en utilisant une matrice il faudra étendre une matrice de rotation 3x3 pour inclure les informations de la translation ce qui en fait une matrice 4x3. Même si une matrice 4x3 est la plus efficace, la plupart du temps une matrice 4x4 est utilisée en raison de la disponibilité.

La partie 3x3 de la matrice se compose de trois vecteurs colonnes orthogonaux et unitaires.

Une matrice de transformation peut transformer un vecteur de coordonnées simplement par la multiplication matricielle:

$$y = Tx$$

Où T est une matrice de transformation, x un vecteur de coordonnées et y le résultat transformé

Si la position et les vecteurs de base sont connus, la matrice de transformation peut être trivialement calculée, car chacune des colonnes de la partie 3x3 de la matrice représente les vecteurs de base et la ligne du bas représente la translation.

La combinaison des éléments de matrice est obtenue par simple multiplication. Les matrices ne sont pas commutatives et donc leur représentation matricielle des transformations des corps rigides est non commutative aussi.

### 3.2.7 : Résumé des méthodes

Avantages :

Les matrices sont enseignées en algèbre linéaire au début de collèges ce qui les rend plus familières et favorables. En outre, un grand nombre d'algorithmes ont été élaborés et testés avec des matrices et ainsi les gens les choisissent en premier lieu instinctivement.

Inconvénients :

Bien que les matrices semblent être l'utopie, on pourra y trouver plusieurs problèmes. Tout d'abord, ils prennent un minimum de 12 paramètres pour représenter une structure à seulement six degrés de liberté, ce qui peut être indésirable pour la mémoire (stockage).

L'ambiguïté concernant le choix de signes pour les amplitudes et les axes de rotations.

D'autre part, la partie rotation de la matrice se compose de colonnes orthogonales qui peuvent dériver et ainsi introduire une mise en échelle (Scaling) non désirée. Nous pouvons renormaliser la matrice en utilisant le procédé de Gram-Schmidt mais cela peut être coûteux du point de vue informatique (numérique).

Quatrièmement, l'interpolation entre des matrices est difficile. Les trois colonnes de la partie rotation de la matrice formant les directions de l'axe orthogonal ne sont pas représentatives de l'espace vectoriel et ne peuvent être interpolées.

Enfin, il est difficile d'imaginer une matrice et son homologue Axe-Angle (Autour duquel le solide doit tourner et le long duquel il translate [35]).

Nous avons décrit et examiné les méthodes actuelles et courantes qui représentent une solution robuste, pratique, viable et hiérarchique à la rotation de corps rigides. Nous allons montrer dans ce qui suit maintenant, en introduisant et expliquant la méthode des quaternions et celle des quaternions duaux, comment et pourquoi cette méthode s'avère être la meilleure et ressort au-dessus des précédentes méthodes classiques.

# *CHAPITRE IV*

#### 4.1 Introduction : Pourquoi des Quaternions Daux?

En temps réel les systèmes dynamiques de personnages 3D combinent les animations, la cinématique inverse (IK) et des modèles physiques de base pour produire des mouvements contrôlables, réactionnels et réalistes. La majorité des systèmes à base de caractères utilise une composition squelette hiérarchique des transformations rigides. Chaque transformation rigide possède six degrés de liberté (DDL) qui se compose de trois composantes de translation et trois composantes de rotation. Les matrices sont la méthode la plus populaire (utilisée) pour stocker et enfin combiner ces transformations.

Bien que les matrices sont adéquates, nous posons la question, existe-il une meilleure méthode?

Nous pouvons utiliser les quaternions daux comme un outil pour exprimer et analyser les propriétés physiques des corps rigides :

Dans cette étude, nous examinons les avantages et les inconvénients des matrices tout en proposant une nouvelle alternative basée sur les quaternions et les quaternions daux. Le but est de présenter un guide d'utilisation des quaternions daux avec suffisamment de détails afin que l'étudiant ou le chercheur puisse commencer à les utiliser comme un outil de résolution de problèmes pratiques pour les transformations rigides. Ce document couvre les bases des quaternions daux ainsi que leur application à des systèmes complexes hiérarchiques à plusieurs degrés de liberté (DOF).

Beaucoup de chercheurs semblent avoir beaucoup de mal à comprendre essentiellement ce que sont ces quaternions et comment peuvent-ils représenter une rotation. Ainsi, lorsque les quaternions daux sont présentés, ils ne sont généralement pas accueillis à bras ouverts. Les quaternions daux sont une pause (coupure, cassure) dans la norme (des matrices) dont nous espérons inciter le lecteur à utiliser pour représenter leurs transformations rigides. En fin de compte, le lecteur pourra ainsi avoir une idée (compréhension) claire concernant ces quaternions daux et comment ils peuvent être utilisés.

La majorité des chercheurs en informatique sont familiers avec les vecteurs, les matrices et même les quaternions. Ils fournissent un ensemble d'outils pour aider à résoudre les problèmes ; auxquels il est fortement préconisé d'y ajouter l'outil **utile** à savoir les quaternions daux.

Différents outils mathématiques sont utilisés pour la modélisation de mécanismes cinématiques et, en particulier, concernant la détermination des familles de trajectoires pour un de ses composants. Les Torseurs et la Théorie des Groupes (algèbre duale des quaternions) sont les plus souvent utilisés (ou Groupes de Lie , Algèbre de Lie). Cependant, les torseurs ne sont pas homogènes pour les combinaisons des rotations et des translations à cause du leur produit scalaire et produit vectoriel et, par conséquent, ils ne sont pas adaptés pour décrire les mouvements hélicoïdaux généraux ainsi que leurs combinaisons quand ils sont placés arbitrairement l'un par rapport à l'autre. Les mouvements décrits avec les Matrices Homogènes (Algèbre de Matrices Homogènes) ne sont pas bien adaptés puisque les axes de rotation sont difficiles d'être caractérisées.

Finalement, il ya plusieurs raisons pour l'utilisation de quaternions duaux, que nous résumons ci-dessous:

- Sans singularité
- Interpolation du plus court chemin
- La forme la plus efficace et plus compacte pour la représentation des transformations rigides : ( matrice (3x4) =12 éléments flottants par rapport à un quaternion dual 8 flottants)
- Une représentation unifiée de la translation et de la rotation
- Peut être intégré dans un système en cours avec peu d'efforts de codage
- L'information concernant la translation et celle concernant la rotation sont combinées pour produire un seul invariant de coordonnées

## 4.2 Nombres Duaux

Le mathématicien William Kingdon Clifford (1845-1879) a introduit une idée très originale sur la théorie des "moteurs" qui réside dans l'utilisation d'un certain opérateur  $\varepsilon$  qui permet d'exprimer symboliquement un "moteur" (M, Mo) sous forme d'un vecteur spécial:

$$M + \varepsilon Mo \quad (4.1)$$

Où  $\varepsilon$  est un opérateur nilpotent de second ordre.

C'est ainsi, et à la suite des travaux de W.K. Clifford, que l'existence d'un tel opérateur a été implicitement acceptée. Plus tard, en se basant sur les travaux de Bail et Zanchevskiy sur la théorie des vis et de ceux de Kotel'nikov sur l'application des nombres duaux à la théorie des vecteurs, F.M. Dimentberg a proposé une large application du calcul dual sur les vis pour le traitement des problèmes de cinématique.

Dans de récents travaux, plusieurs auteurs [K. Sugimoto & J. Duffy, G.R. Veldkamp A.K. Pradeep, P.J. Yoder & R. Mukundan, D. Chevallier ont proposé des présentations modernes des applications de tels nombres en cinématique [32], [33], [34] ,[35].

Dans le chapitre présent, nous allons introduire la notion de nombres duaux comme un outil mathématique. Nous nous attacherons à mettre de la rigueur mathématique dans notre exposé afin de ressortir les idées réelles qui existent derrière l'utilisation des nombres duaux. Avec cet outil, nous allons construire un certain nombre de structures algébriques adjacentes et établir nombre de résultats analytiques et algébriques afin de mettre en évidence les propriétés caractéristiques qui nous permettront d'envisager un calcul symbolique direct (et systématique) sur cette notion.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, travailler sur des structures algébriques et des outils basés sur les nombres duaux n'est pas une simple généralisation tridimensionnelle du calcul sur ces mêmes notions dans  $R$ . Il s'agit en fait de travailler dans de nouvelles structures algébriques qui n'ont plus les mêmes propriétés que les structures algébriques correspondantes sur  $R$ . En effet, même si les axiomes d'un module sont identiques à ceux d'un espace vectoriel, au changement près du corps de base en un anneau, et même si les principales définitions d'algèbre linéaire sont valables dans les modules, les propriétés algébriques d'un module peuvent différer substantiellement de celles d'un espace vectoriel. En particulier, des propriétés intuitives de la géométrie ou de l'existence d'une norme peuvent être en défaut dans un module. Et manque d'une justification mathématique rigoureuse des résultats, on ne peut affirmer avec certitude la validité des modèles généralisés.

Dans ce paragraphe nous allons définir les éléments de base du calcul sur les nombres duaux. Les éléments de ce langage sont indispensables pour aborder des structures algébriques duales plus complexes.

Clifford a introduit les nombres duaux; similaires aux nombres complexes qui se composent de deux parties appelées composante réelle et complexe. Les nombres duaux décomposent le problème en deux parties qui sont définies comme suit:

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + \mathbf{d} \varepsilon \quad (4.2)$$

Qui peut aussi s'écrire :  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{r} + \mathbf{d} \varepsilon$

Où  $\varepsilon$  est l'opérateur dual,  $\mathbf{r}$  est la partie réelle et  $\mathbf{d}$  est la partie duale. Semblable à la théorie des nombres complexes, où  $i$  est ajouté afin de distinguer les deux composantes, le réel du complexe, l'opérateur dual  $\varepsilon$  est utilisé dans cette même optique.

Avec  $\varepsilon^2 = \mathbf{0}$  mais  $\varepsilon \neq \mathbf{0}$  est l'élément nilpotent d'ordre deux de cet ensemble :

$\varepsilon = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$  tandis que son élément identité ( unité ) est :  $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$

La théorie des nombres duaux peut être étendue à d'autres concepts, tels que les vecteurs et les nombres réels, mais nous nous concentrons sur leur applicabilité en collaboration avec des quaternions pour représenter les transformations de rotation et de translation.

#### 4.2.1 Opérations arithmétiques en Nombre Dual

Avec des nombres duaux on peut effectuer les opérations arithmétiques fondamentales ci-dessous:

L'addition;

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} \varepsilon) + (\mathbf{c} + \mathbf{d} \varepsilon) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b} + \mathbf{d}) \varepsilon \quad (4.3)$$

La multiplication;

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} \varepsilon) (\mathbf{c} + \mathbf{d} \varepsilon) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} \varepsilon + \mathbf{bc} \varepsilon + \mathbf{bd} \varepsilon^2 = \mathbf{ac} + (\mathbf{ad} + \mathbf{bc}) \varepsilon \quad (4.4)$$

La division (Quotient) ;

$$\frac{a + b \varepsilon}{c + d \varepsilon} = \frac{a + b \varepsilon}{c + d \varepsilon} \cdot \frac{c - d \varepsilon}{c - d \varepsilon} = \frac{(ac + (bc - ad) \varepsilon)}{c^2}$$

$$= (ac + (bc - ad) \varepsilon)/c^2 = ac/c^2 + ((bc - ad) \varepsilon)/c^2 = a/c + ((bc - ad) \varepsilon)/c^2 \quad (4.5)$$

Avec  $c \neq 0$

L'inverse d'un nombre dual ;

Soit le nombre dual:  $z = r + d \varepsilon$

Son inverse  $z^{-1}$  est

$$(r + d \varepsilon)^{-1} = 1/r - d \varepsilon / r^2 \quad (4.6)$$

Avec  $r \neq 0$

Puissance de nombre dual ;

$$z^n = (r + d \varepsilon)^n = r^n + \varepsilon n d r^{n-1} \quad (4.7)$$

Racine carrée

$$; \sqrt{z} = \sqrt{r} + \varepsilon \frac{d}{2\sqrt{r}} = \sqrt{r} \left(1 + \varepsilon \frac{d}{2r}\right) \quad r > 0 \quad (4.8)$$

Pour en savoir plus sur le sujet des nombres duaux: Consulter [ 36 ].

#### 4.2.2 Différenciation du Nombre Dual

Les nombres duaux se différencient de la même manière que n'importe quelle autre fonction en utilisant les principes élémentaires de calcul ;

$$dy/dx = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x))/h \quad (4.9)$$

La dérivée d'un nombre dual est un autre nombre dual. Fait remarquable, l'opérateur dual nilpotent de second ordre  $\varepsilon^2 = 0$  nous permet de tirer parti des séries de Taylor pour trouver n'importe quelle dérivée :

Le développement en série de Taylor de la fonction  $f$  indéfiniment dérivable d'une variable réelle ou complexe et  $a$  un point au voisinage duquel la fonction est définie, s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots$$

Ainsi en est-il pour une fonction d'une variable duale,  $f(a + b \varepsilon)$ , que l'on peut voir ci-dessous, si on substitue un nombre dual en série de Taylor, nous obtenons:

$$f(a + b\varepsilon) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}b\varepsilon + \dots \quad (4.10)$$

car  $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \varepsilon^4 = \dots = 0$

Exemple :

Calculons la dérivée  $f'$  pour la valeur  $x = 1$  de la fonction  $f = \frac{x^3}{x^2+1}$  :

En utilisant les propriétés précédentes, on trouve :

$$f(1+\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^2+1} = \frac{1+3\varepsilon}{2+2\varepsilon} = \frac{1}{2} + \frac{(6-2)}{4}\varepsilon = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Ce qui nous donne la valeur de la dérivée en ce point à la partie duale  $f' = 1$

On pourra utiliser les techniques classiques de dérivation et confirmer ce résultat.

On aurait tout aussi bien pu calculer la dérivée  $f'$  du quotient de polynômes

$$f = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{P_1}{P_2}$$

écrits sous leur formes duales :  $P_1 = (x + \varepsilon)^3$  et  $P_2 = (x + \varepsilon)^2 + 1$

On obtient en utilisant correctement les opérations duales définies précédemment :

$$f(x + \varepsilon) = \frac{(x+\varepsilon)^3}{(x+\varepsilon)^2+1} = \frac{x^3+3\varepsilon x^2}{x^2+2\varepsilon x+1} = \frac{x^3}{x^2+1} + \frac{(3x^2(x^2+1)-2x^4)}{(x^2+1)^2}\varepsilon$$

Surprise, surprise ! la dérivée  $f' = \frac{(3x^2(x^2+1)-2x^4)}{(x^2+1)^2}$ , apparait à sa partie duale.

Par conséquent, nous pouvons également trouver la tangente en un point arbitraire,  $p$ , sur une courbe paramétrique donnée qui sera égale à la partie duale normalisée du point  $p$ .

- ⊕ Toute fonction réelle différentiable peut être étendue aux nombres duaux:

$$f(a + b \varepsilon) = f(a) + b f'(a) \varepsilon$$

- ⊕ Par exemple,

$$\sin(a + b \varepsilon) = \sin(a) + b \cos(a) \varepsilon$$

$$\cos(a + b \varepsilon) = \cos(a) - b \sin(a) \varepsilon \quad (4.11)$$

$$\cot(a + b \varepsilon) = \cot(a) - b \sin^2(a) \varepsilon \quad \sin(a) \neq 0$$

### 4.2.3 Ecriture Matricielle d'un nombre dual

Tout nombre dual  $(a + b \varepsilon)$  peut s'écrire sous la forme d'une matrice carrée d'ordre (2x2) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Ou ;  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice identité (ou unitaire) étant  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon$  ; la matrice duale.

$\varepsilon$  peut être étendu à une matrice 3D :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

En effet :  $\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et  $\varepsilon^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

### 4.2.4 Géométrie de lignes

Cette section se veut une introduction afin de se familiariser avec la géométrie des lignes.

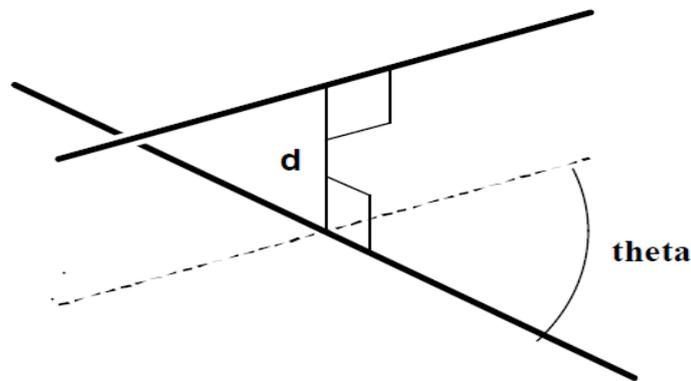
Définissons tout d'abord le concept d'angle dual :

Un nombre dual peut spécifier complètement la position relative de deux lignes dans l'espace. Dans ce cas, il est appelé angle dual et il est défini par :

$$\hat{\theta} = \theta + \epsilon d \quad (4.14)$$

Avec :  $\theta$  est l'angle entre les directions des deux lignes, et  $d$  est la distance entre ces deux lignes (Fig. 4.1).

The dual angle describing the relationship is  $\hat{\theta} = \theta + \epsilon \cdot d$ .



**Figure 4.1 : Angle Dual**

Les deux premières équations (4.11) peuvent s'écrire pour l'angle dual :

$$\hat{\theta} = \theta + \epsilon d :$$

$$\sin \hat{\theta} = \sin(\theta + \epsilon d) = \sin \theta + \epsilon d \cos \theta$$

$$\cos \hat{\theta} = \cos(\theta + \epsilon d) = \cos \theta - \epsilon d \sin \theta$$

À ce stade, nous sommes intéressés à avoir une bonne définition utile d'une ligne dans l'espace. Plus tard, nous pourrions être intéressés à la façon de définir des plans ou des volumes, et nous verrons que nous pouvons le faire de la même façon.

Les lignes ou les droites sont très utilisées en cinématique, et pour chaque déplacement, on peut trouver une droite invariante. Nous trouvons ces lignes invariantes partout dans les mécanismes qui effectuent le mouvement, ils définissent habituellement où les articulations doivent être situées.

Une ligne  $\mathbf{l}$  possède une direction et un emplacement (position) dans l'espace tridimensionnel. Le terme d'une ligne paramétrée utilise un point  $\mathbf{c}$  sur la ligne, un vecteur de direction  $\mathbf{s}$  et un paramètre  $\mathbf{t}$ , des points décrivant leurs appartenance à la ligne sont tels que :

$$\mathbf{l} : \mathbf{c} + \mathbf{t}\mathbf{s}, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{R} \quad (4.15)$$

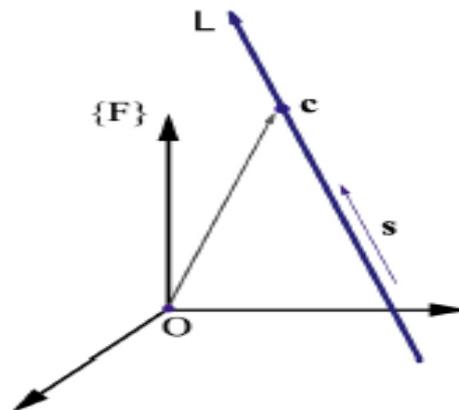
Cependant, cette description n'est pas très commode pour les opérations algébriques. Nous voulons déterminer des distances entre des lignes, des angles etc..

Nous utilisons une description d'une ligne qui est celle des **coordonnées de Plücker**. Ils définissent la ligne comme se composant de deux vecteurs, le vecteur de direction et le vecteur de son moment :

$$\mathbf{L} = \mathbf{S} + \varepsilon \mathbf{S}^0 = \mathbf{S} + \varepsilon \mathbf{c} \times \mathbf{S}, \quad (4.16)$$

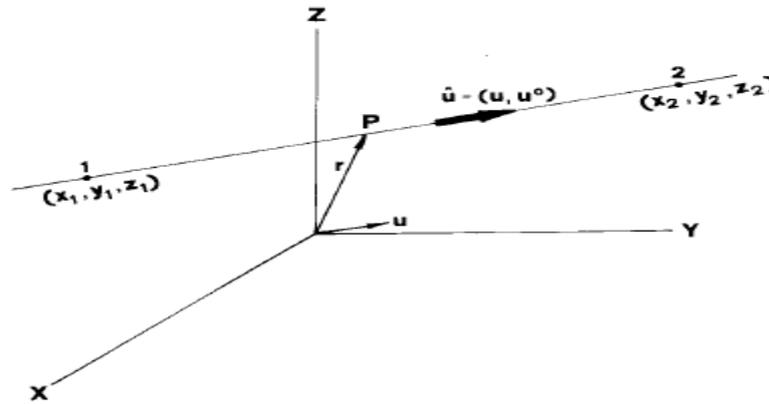
Où  $\mathbf{S}$  est un vecteur de direction tridimensionnel indiquant la direction de la ligne et  $\mathbf{S}^0$  est aussi un vecteur tridimensionnel, appelé moment de la ligne, et qui est obtenu en calculant le produit vectoriel de n'importe quel point  $\mathbf{c}$  appartenant à la ligne par le vecteur de direction  $\mathbf{S}$ . Le symbole  $\varepsilon$  qui représente l'unité duale est utilisé pour séparer les deux vecteurs. Il est significatif de remarquer que tout point situé sur la ligne donne le même vecteur moment  $\mathbf{S}^0$ .

La Figure 4.2 montre les paramètres qui définissent une ligne  $\mathbf{L}$  (droite) donnée :



**Figure 4.2:** Une ligne définie par ses coordonnées de Plücker

Pour plus de clarté (précision) voir la figure 4.2.a et l'exemple numérique.



**Figure 4.2.a:** Une deuxième ligne définie par ses coordonnées de Plücker

$\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire (ou axe de rotation) and  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$  est son vecteur moment par rapport à l'origine  $O$ ,  $\mathbf{r}$  étant le vecteur position d'un point arbitraire  $\mathbf{P}$  appartenant à la ligne. Les vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^0$  sont les vecteurs de Plücker de la droite.

Un vecteur unitaire d'une ligne dans sa forme duale peut être représenté par;

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}^0 \quad (4.17)$$

Dans un contexte plus général, un objet de la forme  $\mathbf{S} = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{w}$  est reconnu comme étant un **vecteur dual** ou une **vis (a screw)**, les lignes sont considérées comme un cas particulier des vecteurs duaux, dans lequel les contraintes (conditions) suivantes sont vérifiées:

$$|\mathbf{v}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (4.18)$$

L'algèbre vectoriel s'étend naturellement à l'algèbre vectoriel dual en opérant composante par composante et en utilisant la propriété de l'unité duale.

#### 4.2.5 Les coordonnées de Plücker revisitées

Les coordonnées de Plücker sont bien connues, notamment en informatique graphique, comme un outil de modélisation et de manipulation de droites de

l'espace 3D. La plupart des introductions sur le sujet définissent ces coordonnées soit directement par la géométrie, soit au moyen de l'algèbre linéaire, malheureusement sans fournir de définition claire quant à l'espace de droites sous-jacent. Cela en fait un outil certes pratique, mais peu intuitif.

Le résultat est le risque (avéré dans certaines publications) d'erreur d'interprétation ou encore de mauvaise utilisation. Une troisième définition de ces coordonnées, moins connues que les deux précédentes, repose sur l'algèbre de Grassmann, et offre à ce titre un vrai espace de manipulation. Le but est d'apporter un éclairage complet, et en ce sens différent des approches traditionnelles, des coordonnées de Plücker. Il suggère aussi des exemples d'utilisation de ces définitions de coordonnées de droites, en remontrant quelques-unes des propriétés utilisées dans la communauté graphique.

Les coordonnées de Plücker sont une représentation des droites de l'espace affine 3D, introduite par Julius Plücker dans ses travaux sur la *géométrie des lignes*. En informatique graphique, elles sont utilisées par exemple par Seth Teller, notamment pour le calcul des droites passant par 4 droites. Ces coordonnées sont, de plus, largement utilisées pour formuler et résoudre des calculs de visibilité.

Shoemake présente la vision purement géométrique des coordonnées de Plücker, tout en proposant un ensemble de propriétés en découlant fort utile. Cet aspect des coordonnées de Plücker n'est pas le seul : il existe ainsi une seconde formulation basée sur l'algèbre linéaire, donc exprimée sous forme matricielle, permettant justement de démontrer quelques unes des propriétés énumérées par Shoemake.

L'interprétation géométrique se place dans l'espace affine 3D usuel muni d'un repère cartésien, qui offre par définition un espace de points et un espace vectoriel dit directeur.

Soit une droite  $l$ , définie en toute généralité par deux points  $A$  et  $B$ , connus par leurs vecteurs de coordonnées notés  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)^t$  et  $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)^t$ . Comme illustré sur la figure 4.3.b, la vision géométrique d'une droite  $l$  consiste à définir, d'une part, sa direction  $\mathbf{u}$  d'expression  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ , et, d'autre part, sa position  $\mathbf{v}$  d'expression  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , où  $\times$  représente le produit vectoriel ou moment, orthogonal à l'hyperplan contenant  $l$  et l'origine du repère cartésien.

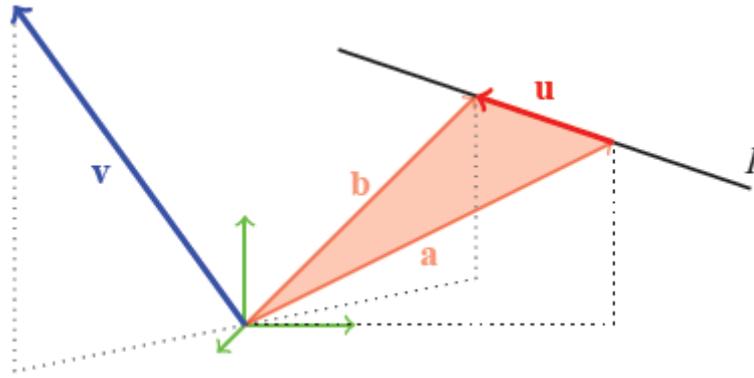


Figure 4.3 : une droite  $l$

En mécanique, où nos deux points formant la droite sont assimilés à deux particules en mouvement, cette position  $\mathbf{v}$  est aussi connue comme un moment de force.

Autrement dit, les coordonnées d'une droite  $l$  sont définies à l'aide du sextuplé suivant :

Etant donné  $(x_1, y_1, z_1)^t$  et  $(x_2, y_2, z_2)^t$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{cases} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{cases} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$$

Ces coordonnées identifient la droite modulo un scalaire  $\neq$  nul : tous les sextuplés  $\{\lambda \mathbf{u} : \lambda \mathbf{v}\}$  représentent la même droite. Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

**Théorème:** Soient, dans  $\mathbb{R}^3$ , deux points  $A$  et  $B$  distincts et de vecteurs coordonnées  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Posons les vecteurs  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Ces deux vecteurs définissent sans ambiguïté une unique droite  $L$ , identifiée par les coordonnées :  $\{\lambda \mathbf{u} : \lambda \mathbf{v}\}$ , et ce  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Une droite (ou ligne)  $L$  dans l'espace Euclidien 3D est déterminée par deux points distincts qu'elle contient, ou par deux plans distincts qui la contiennent.

Considérons le premier cas avec les points  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)^t$  et  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)^t$  voir figure 4.3.

Le vecteur déplacement de  $P_1$  vers  $P_2$  est non nul car les points sont distincts et ils représentent la *direction* de la ligne  $d$ . C'est à dire que tout déplacement entre des points sur la ligne est un scalaire multiple de  $d = P_2 - P_1$ .

Dans son mouvement de  $P_1$  vers  $P_2$ , une particule physique de masse unitaire, aurait un moment par rapport à l'origine. L'équivalent géométrique est un vecteur dont la direction est perpendiculaire au plan contenant à la fois  $L$  et l'origine du repère cartésien, et dont le module est égal à deux fois l'aire du triangle formé par le déplacement et l'origine. En traitant les points comme des déplacements depuis l'origine, le moment est  $m = OP_1 \times OP_2$

L'aire du triangle est proportionnelle à la longueur du segment entre (séparant)  $P_1$  et  $P_2$  considéré comme étant la base du triangle. Par définition le vecteur moment est perpendiculaire à tout déplacement le long de la ligne donc  $d \cdot m = 0$ , où ' $\cdot$ ' dénote le produit scalaire. Les quantités  $d$  ou  $m$  à elles seules ne peuvent déterminer une droite  $L$ , uniquement la paire ensemble le peut.

Ainsi les coordonnées :  $(d:m) = (d_1:d_2:d_3:m_1:m_2:m_3)$  peuvent être considérés comme des coordonnées homogènes de  $L$ , dans le sens que toutes les paires  $(\lambda d:\lambda m)$ , pour  $\lambda \neq 0$ , peuvent être reproduites par des points appartenant à  $L$  et seulement  $L$  et que toute paire détermine une ligne unique pourvu que ;

$$d \neq 0 \text{ et } d \cdot m = 0.$$

Application numérique :

Soient  $c_1$  ou  $r_1$  ou  $P_1$  ou  $OP_1 = (2,3,7)$  et  $c_2$  ou  $r_2$  ou  $P_2$  ou  $OP_2 = (2,1,0)$ .

Alors  $(d:m) = (0:-2:-7:-7:14:-4)$ .

Alternativement soient les équations suivantes de points  $x$  appartenant à deux plans distincts contenant  $L$  :

$$0 = a + a \cdot x$$

$$0 = b + b \cdot x.$$

Leurs plans respectifs sont perpendiculaires aux vecteurs  $a$  et  $b$  et la direction de  $L$  doit être perpendiculaires aux deux simultanément.

On peut assumer que :  $d = a \times b$  quantité non nulle puisque  $a$  et  $b$  ne le sont pas et ne sont pas parallèle entre eux (car les deux plans sont distincts et s'intersectent). Si nos points  $x$  vérifient les équations des deux plans, ils doivent aussi satisfaire la combinaison suivante :

$$0 = a(b + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) - b(a + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = (a \mathbf{b} - b \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}$$

Cela signifie que  $a\mathbf{b} - b\mathbf{a} = \mathbf{m}$  est un vecteur perpendiculaire aux déplacements des points sur la droite  $L$  et qui est égal au moment  $\mathbf{m}$  consistant avec la quantité  $d$  déterminée précédemment de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .

Pour le même exemple : Soient  $a_0 = 2$ ,  $\mathbf{a} = (-1, 0, 0)$  et  $b_0 = -7$ ,  $\mathbf{b} = (0, 7, -2)$ .

Alors les coordonnées de Plücker de  $L$  sont :  $(\mathbf{d}:\mathbf{m}) = (0:-2:-7:-7:14:-4)$ . On trouve ainsi le même résultat donné par la première méthode.

#### 4.2.6 Algèbre vectorielle duale

On peut naturellement étendre aux vecteurs duaux les opérations de l'algèbre de vecteurs à trois dimensions. L'addition de vecteurs duaux est effectuée composante par composante. On peut également étendre à la fois le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs.

Soit  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{v}_1 + \varepsilon \mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{S}_2 = \mathbf{v}_2 + \varepsilon \mathbf{w}_2$  deux vecteurs duaux. Leur produit scalaire dual est défini comme :

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \varepsilon (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2), \quad (4.20)$$

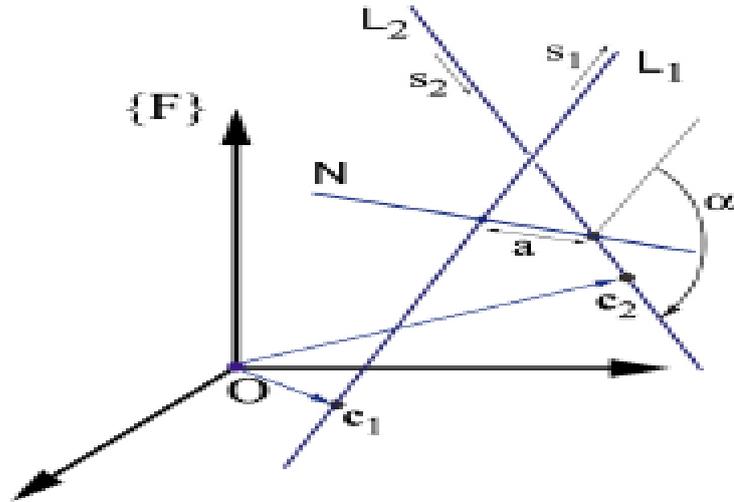
Où  $\cdot$  représente le produit scalaire habituel.

De même, on définit le produit vectoriel dual de deux vecteurs duaux comme :

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \varepsilon (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_2), \quad (4.21)$$

Où  $\times$  est le produit vectoriel de vecteurs tridimensionnels.

Le produit scalaire et le produit vectoriel ont une signification géométrique, qui peut être déduite de la géométrie de l'algèbre vectorielle. Nous allons montrer cela pour le cas où les vecteurs duaux sont des lignes.



**Figure 4.4:** Géométrie vectorielle duale

Soient  $L_1 = S_1 + \varepsilon c_1 \times s_1$  et  $L_2 = S_2 + \varepsilon c_2 \times s_2$  deux lignes arbitrairement situées dans l'espace 3D comme le montre la Figure 4.4. Le nombre dual obtenu pour le produit scalaire des deux lignes est :

$$L_1 \cdot L_2 = \cos \alpha - \varepsilon a \sin \alpha, \quad (4.22)$$

Où  $\alpha$  est l'angle entre les vecteurs de direction  $S_1$  et  $S_2$  et  $a$  est la distance entre les deux lignes le long de leur ligne normale commune. De même, le vecteur dual obtenu par le produit vectoriel des lignes est :

$$L_1 \times L_2 = (\sin \alpha + \varepsilon a \cos \alpha) N, \quad (4.23)$$

Où  $N$  est la ligne normale commune entre  $L_1$  et  $L_2$ .

On pourra facilement démontrer les équations (4.22) et (4.23) en utilisant les points  $c_1$ ,  $c_2$  comme les points d'intersection de  $L_1$ ,  $L_2$  avec la ligne normale commune.

Qu'est-ce qui se passe si les vecteurs duaux  $L_1$  et  $L_2$  ne sont pas des lignes? Rappelons-nous que les seules conditions pour qu'un vecteur dual soit une ligne donnée sont données par l'Eq. (4,18). Si la partie réelle (la direction) du vecteur dual n'est pas unitaire, on peut calculer sa longueur, que l'on notera par  $m$ . Si la partie duale (pour le moment) n'est pas perpendiculaire à la partie réelle, on peut

toujours l'écrire comme une composante perpendiculaire, plus une composante parallèle à la direction. Donc, finalement, nous pouvons exprimer un vecteur dual général, également appelé vis (Screw), comme

$$\mathbf{S} = m\mathbf{s} + \varepsilon (\mathbf{m}\mathbf{c} \times \mathbf{s} + m\mathbf{k}\mathbf{s}), \quad (4, 24)$$

Où la grandeur  $\mathbf{k}$  le long de la partie réelle est appelé le pas de la vis.

Ce concept de dualité pourra être généralisé aux matrices (voir Appendice B: Plus de géométrie), elles pourront ainsi avoir une forme duale. Les coordonnées de Plücker d'une ligne ou droite, étant une représentation des lignes ou droites de l'espace 3D, peuvent être utilisées et transformées par des quaternions duaux dont la définition va suivre. Cela pourra être généralisé à la transformation de droites, de plans et pourquoi pas de volumes.

### 4.3 Mouvement hélicoïdal (Screw motion) / Mouvement général dans l'espace 3D d'un solide rigide :

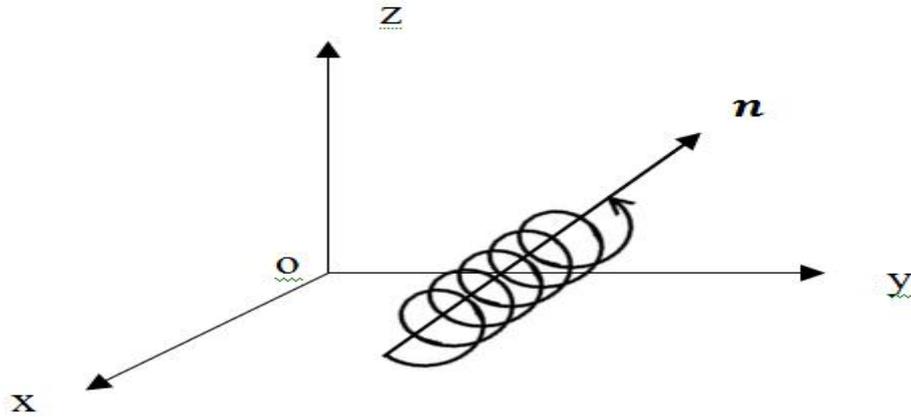
a) Méthode classique:

Toute translation peut être représentée par des vecteurs à trois composantes.

Un mouvement général dans l'espace 2D d'un solide rigide est 'presque' une rotation autour d'un point dans le plan.

Pour le mouvement général dans l'espace 3D d'un solide rigide on peut être tenté de penser que ce mouvement serait une rotation autour d'une ligne dans l'espace. Cela ne serait pas assez général et exact: On doit permettre et prévoir une translation (coulissement) quelconque le long de ce même axe de rotation.

Le résultat d'une telle rotation accompagnée d'une possible translation représente le mouvement hélicoïdal. Voir figures : (4.5) et (4.6)



**Figure 4.5:** *Mouvement hélicoïdal*

Un tel mouvement peut être donné par la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta, \mathbf{n}) & \frac{\theta p}{2\pi} \mathbf{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta, \mathbf{n}) & \frac{\theta p}{2\pi} \mathbf{n} + (I - R(\theta, \mathbf{n}))\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice centrale représente un mouvement hélicoïdal autour d'une ligne (axe) passant par l'origine; une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{n}$  suivie d'une translation le long de  $\mathbf{n}$ .

Les deux matrices externes conjuguent le mouvement hélicoïdal et servent à placer l'axe (la ligne) à une position quelconque donnée dans l'espace.

Afin de démontrer que le mouvement général dans l'espace 3D d'un solide rigide est un mouvement hélicoïdal (Théorème de Chasles) on doit montrer comment écrire une transformation générale sous la forme dérivée plus haut; ce qui revient à pouvoir trouver  $\theta$  et  $p$  et un extra paramètre  $\mathbf{u}$ . Il est beaucoup plus difficile de trouver le vecteur  $\mathbf{u}$  car c'est le vecteur position de n'importe quel point se trouvant sur l'axe de rotation.

On peut quand même imposer une extra restriction à savoir  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ ; Alors pour écrire une matrice (4x4) :  $\begin{pmatrix} R(\theta, \mathbf{n}) & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sous la forme voulue on doit solutionner le système d'équations linéaires suivant:

$$\frac{\theta p}{2\pi} \mathbf{n} + (I - R(\theta, \mathbf{n}))\mathbf{u} = \mathbf{t} \quad (4.25)$$

b) Application numérique:

Décrivons les éléments  $(\mathbf{n}, p, \mathbf{u})$  relatifs à la transformation  $[T]$  (4x4) rigide donnée suivante:

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{2 + \sqrt{3}}{4} & \frac{2 - \sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2 - \sqrt{3}}{4} & \frac{2 + \sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant le calcul matriciel classique, on peut déterminer l'axe  $\vec{\mathbf{n}}$ , l'angle  $\theta$  ainsi que le pas  $p$  du mouvement considéré en trouvant les solutions de l'équation  $(I - R)\mathbf{n} = 0$  ;

puisque l'axe  $\mathbf{n}$  reste inchangé par la rotation  $[R]$  :

$$[R] = \begin{pmatrix} \frac{2 + \sqrt{3}}{4} & \frac{2 - \sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2 - \sqrt{3}}{4} & \frac{2 + \sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

C'est bien une rotation car  $\det [R] = 1$

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ; p = 4 ; \theta = \frac{\pi}{6}$$

Pour trouver l'angle  $\theta$  on doit remarquer que  $\mathbf{n}$  n'a pas de composantes suivant l'axe  $z$  , alors  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Et puisque  $\mathbf{k}$  est perpendiculaire à l'axe de rotation  $\mathbf{n}$  , sa rotation va s'effectuer tout simplement autour de  $\mathbf{n}$ . On aura donc  $\mathbf{k} \cdot R \mathbf{k} = \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ; ce qui implique que  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . On doit aussi vérifier que c'est le bon

résultat et non  $-\frac{\pi}{6}$  ce qui reviendrait à changer la direction de  $\mathbf{n}$ . Ce qui est fait en vérifiant le signe du triple produit scalaire  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{R} \mathbf{k})$  qui est positif.

$$\text{Le pas } p \text{ est donné par : } p = \frac{2\pi}{\theta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{-1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 12 \left( \frac{-1}{12} + \frac{5}{12} \right) = 4$$

Pour trouver l'axe  $\vec{\mathbf{n}}$ , on aurait pu utiliser les méthodes matricielles classiques bien connues entre autres celle de la matrice antisymétrique :  $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) = \lambda \check{\mathbf{n}}$ , avec  $\lambda = 2 \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_z & \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z & 0 & -\mathbf{a}_x \\ -\mathbf{a}_y & \mathbf{a}_x & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui confirme bien les résultats déterminés auparavant à savoir l'axe  $\vec{\mathbf{n}} =$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et l'angle de rotation : } \lambda = 2 \sin \theta = 1 \text{ implique } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ et } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

donc  $\theta = +\frac{\pi}{6}$  ]

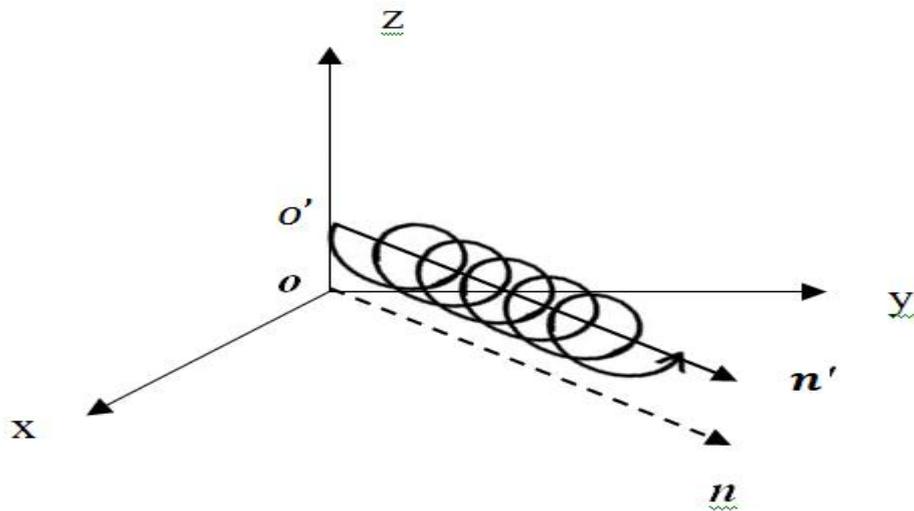
Finalement  $\mathbf{u}$  doit satisfaire :

$$(I - R)\mathbf{u} = t - \frac{\theta p}{2\pi} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{-2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

La solution générale à ce système d'équations homogènes est :

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 + \lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 0 \end{vmatrix}$$

La solution particulière (satisfaisant la restriction  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ ) ; perpendiculaire à l'axe de rotation est donc  $\mathbf{u} = (0,0,1)^T$



**Figure (4.6):** Exemple Numérique (mouvement hélicoïdal)

On peut tout aussi bien vérifier que :  $[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} I & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{T}_0] \begin{pmatrix} I & -\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[\mathbf{T}_0]$  étant la matrice qui représente le mouvement hélicoïdal d'axe  $\mathbf{n}$  passant par l'origine  $\mathbf{O}$ .

Il faudra aussi assurer une translation  $[\mathbf{t}]$  de pas  $p = 4$  unités le long de l'axe  $\vec{\mathbf{n}}$ .

Donc un vecteur translation  $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$  de module  $\left| \frac{1}{3} \right|$  pour une rotation d'amplitude

$\theta = \frac{\pi}{6}$  (une rotation complète (un tour) correspondrait à  $12 \cdot \frac{\pi}{6}$  c-à-d  $12 \cdot \left| \frac{1}{3} \right| = \rho = 4$  unités) :

$$[\mathbf{T}_0] = [\mathbf{t}] \cdot [\mathbf{R}] = [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{t}]$$

Il n'y a pas de problème de commutativité : Les deux produits sont parfaitement égaux puisqu'il s'agit ici du mouvement hélicoïdal. En effet ;

$$[\mathbf{T}_0] = [\mathbf{t}] \cdot [\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

=

Et:

$$[\mathbf{T}_0] = [\mathbf{R}] [\mathbf{t}] = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Alors et finalement pour placer l'axe  $\mathbf{n}$  à son bon endroit  $\mathbf{n}'$  :

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} I & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{T}_0] \begin{pmatrix} I & -\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left( \frac{-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]$$

c) Remarques générales :

➤ A la lumière de cet exemple numérique on peut facilement observer qu'il est beaucoup plus simple, connaissant l'axe et l'amplitude de la rotation ainsi que la translation (ou le pas s'il s'agit d'un mouvement hélicoïdal), d'écrire la matrice homogène (4x4) de transformation (l'opération 'montage') que de faire l'opération inverse ('démontage'), c'est à dire connaissant la matrice (4x4) trouver ses éléments ou paramètres caractéristiques fondamentaux.

➤ Il est utile de rappeler que les rotations agissent sur les translations, l'inverse n'étant pas vrai en effet et en faisant une multiplication par blocks :

Pour une translation suivie d'une rotation :  $\begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & R\mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la rotation affecte la translation.

Tandis que, Pour une rotation suivie d'une translation:  $\begin{pmatrix} I & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

la rotation n'est pas affectée par la translation.

Ou plus généralement parlant :

$$\begin{pmatrix} R_2 & \mathbf{t}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 R_1 & R_2 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4.4 QUATERNIONS

Un robot est généralement conçu afin qu'il puisse positionner son outil terminal doté de ces trois degrés de liberté en translation et de ces trois degrés de liberté en orientation dans son volume de travail (celui du robot bien sûr).L'analyse cinématique étudie les mouvements relatifs, comme les déplacements, vitesses, et accélérations, associés aux différents liens d'un quelconque robot.

Les méthodes analytiques basées sur le mouvement hélicoïdal (Screw Theory) ont été largement utilisées dans plusieurs applications en robotique : les

éléments de cette théorie peuvent être le fruit logique des travaux de Chasles et Poincaré vers les années 1800. Utilisant les théorèmes de Chasles et Poincaré comme point de départ, Robert S. Ball a développé une théorie complète consacrée au mouvement hélicoïdal (Screws) qu'il publia en 1900 [37].

A travers le développement de la cinématique, plusieurs théories [38] et [38a] et outils mathématiques ont été introduits et appliqués. Comme par exemples, les matrices (4x4) de transformation homogènes introduites par Denavit et Hartenberg [21], ou les groupes de Lie et l'Algèbre de Lie [39] de Selig et enfin les quaternions et les quaternions duaux introduits par Yang and Freudenstein (1964) [40], voir aussi Bottema and Roth (1979) [41] et McCarthy (1990) [42].

Introduit par Hamilton [43] en 1843, l'ensemble des quaternions, noté  $H$  est une extension des nombres complexes à  $\mathbb{R}$ . [44], [45], [46]. Cependant et après avoir longtemps souffert avant d'être acceptés par la communauté scientifique, ces nombres s'avèrent être parfaits pour les rotations. Muni d'une loi de multiplication et d'une norme, chaque quaternion unitaire est associé à une rotation. La composition de rotations se trouve réduite à une multiplication de quaternions unitaires. Autre avantage, ils sont faciles à interpoler alors que l'interpolation de matrices de rotation est très difficile. Toutefois, ils ne peuvent représenter que les rotations et donc les mouvements sphériques.

Dans un premier temps, nous allons étudier quelques propriétés des quaternions, ensuite nous les utiliserons pour décrire une rotation et nous établirons également l'équivalence avec les autres représentations déjà utilisées.

Les quaternions peuvent être considérés comme des couples  $(w; \mathbf{q})$  où  $w$  est un élément de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbf{q}$  est un vecteur de dimension trois. L'ensemble de quaternions est alors l'ensemble  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

Un quaternion est un nombre hypercomplexe avec une partie réelle et trois parties imaginaires.

Un quaternion est défini comme:

$$q = w + (xi + yj + zk) = \hat{q} \quad (4.26)$$

Où  $w$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des valeurs numériques, tandis que  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  sont les composantes imaginaires.

Il est souvent plus utile de le représenter sous forme de paire ; le scalaire ( $w$ ) et le vecteur  $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$  :

$$q = (w, \mathbf{v}) = (w, \vec{v}) = (S, \mathbf{m})$$

Si le scalaire ( $w$ ) = 0 alors  $q = (0, \mathbf{v}) = (0, \vec{v})$  représente un quaternion vecteur.

Tout point dans l'espace peut être considéré comme un quaternion purement imaginaire (partie réelle nulle).

Les quaternions peuvent être vus également comme des nombres complexes à trois parties imaginaires :

$$q = q_0 + i q_x + j q_y + k q_z$$

avec :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

On peut remarquer qu'on obtient également :

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

#### 4.4.1 Opérations Arithmétiques sur les Quaternions

Puisque on peut associer aux quaternions la théorie des nombres duaux, on peut déduire les opérations arithmétiques élémentaires ci-dessous:

Multiplication par un scalaire  $\lambda$ ;

$$\lambda q = (\lambda w, \lambda \mathbf{v}) \quad (4.27)$$

Où  $\lambda$  est une valeur scalaire.

Addition;

$$q_1 + q_2 = (w_1 + w_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (4.28)$$

Multiplication ;

$$q_1 \otimes q_2 = (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)) \quad (4.29)$$

Où  $(x)$  désigne le produit vectoriel. L'élément identité pour la multiplication est :  $(1, (0, 0, 0))$

Le produit quaternionien ( $\otimes$ ) des deux quaternions  $p$  et  $q$  est associatif et non commutatif (dû à la présence du produit vectoriel) et est donné par :

$$\begin{aligned} p \otimes q &= (p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)q \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + i(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2) + j(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - \\ &\quad p_1q_3) + k(p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1) \end{aligned} \quad (4.30)$$

L'équation (4.30) est similaire et équivalente à l'écriture compacte de l'équation (4.29). Comme le produit vectoriel, le produit de deux quaternions peut s'écrire sous forme matricielle :

$$p \otimes q = Q(p)q$$

Avec  $Q(p)$  donnée par :

$$Q(p) = \begin{bmatrix} p_0 & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & p_0 & -p_z & p_y \\ p_y & p_z & p_0 & -p_x \\ p_z & -p_y & p_x & p_0 \end{bmatrix}$$

On peut également écrire le produit sous la forme suivante :

$$q \otimes p = W(p)q$$

Avec  $W(p)$  définie par :

$$\begin{bmatrix} p_0 & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & p_0 & p_z & -p_y \\ p_y & -p_z & p_0 & p_x \\ p_z & p_y & -p_x & p_0 \end{bmatrix}$$

La matrice  $W(p)$  est obtenue à partir de la matrice  $Q(p)$  en transposant sa sous-matrice :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_0 & -p_z & p_y \\ \cdot & p_z & p_0 & -p_x \\ \cdot & -p_y & p_x & p_0 \end{bmatrix}$$

Si le quaternion  $p$  est écrit comme une concaténation d'un réel et d'un vecteur de dimension trois,  $p = (p_0, \mathbf{p})$ , on peut alors exprimer les matrices  $Q(p)$  et  $W(p)$  par :

$$Q(p) = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 I + K(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

$$W(p) = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 I - K(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

$K(\mathbf{p})$  est la matrice antisymétrique associée au vecteur  $\mathbf{p}$  :

$$K(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

On peut facilement vérifier que les matrices  $Q(p)$  et  $W(p)$  possèdent les propriétés suivantes :

$$Q(p)^T Q(p) = Q(p) Q(p)^T = p^T p I$$

$$W(p)^T W(p) = W(p) W(p)^T = p^T p I$$

$$Q(p) q = W(q) p$$

$$Q(p)^T p = W(p)^T p = p^T p e$$

$$Q(p) Q(q) = Q(Q(p) q)$$

$$W(p) W(q) = W(W(p) q)$$

$$Q(p) W(q)^T = W(q)^T Q(p)$$

$p$  et  $q$  étant deux quaternions quelconques,  $e$  étant le quaternion unité :

$$e = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T .$$

Si  $q$  et  $p$  sont deux quaternions purement imaginaires (vecteurs de dimension trois) nous aurons les deux égalités suivantes :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2} (q \otimes p + p \otimes q)$$

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{q})$$

Le conjugué ;

$$\mathbf{q}^* = (w, -\mathbf{v}) \quad (4.31)$$

Notons que si  $Q(\mathbf{q})$  et  $W(\mathbf{q})$  sont les matrices associées à  $\mathbf{q}$ , alors  $Q(\mathbf{q})^T$  et  $W(\mathbf{q})^T$  seront les matrices associées au quaternion conjugués  $\mathbf{q}^*$ . On a :

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2$$

On en déduit que l'inverse d'un quaternion unitaire (de norme égale à 1) est égal à son conjugué.

La conjugaison permet de retrouver facilement la partie réelle et la partie vectorielle d'un quaternion :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{q} + \mathbf{q}^*) &= w \\ \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) &= \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.32)$$

La norme ;

$$\|\mathbf{q}\| = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^*)^{1/2} \quad (4.33)$$

L'inverse ; Puisque  $\mathbf{q} \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{q} = 1$

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* \quad (4.34)$$

Pour un quaternion unitaire, représentant une rotation :  $\|\mathbf{q}\| = 1$ .

Le produit scalaire de deux quaternions est donné par :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_0 q_0 + p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$$

Nous allons maintenant établir quelques propriétés du produit qui seront facilement vérifiables si l'on utilise la notation matricielle. On a :

$$(\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$$

On en déduit facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \\ \|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \end{aligned}$$

$$(p \otimes q) \cdot r = p \cdot (r \otimes q^*)$$

Un vecteur de dimension trois peut s'écrire comme un quaternion purement imaginaire :

$$q = 0 + iq_x + jq_y + kq_z$$

Et les matrices associées à un quaternion purement imaginaire sont des matrices antisymétriques. Par exemple on a :

$$Q(q) = \begin{bmatrix} 0 & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & 0 & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & 0 & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix}$$

Avec les propriétés évidentes :

$$Q(q)^T = -Q(q)$$

$$W(q)^T = -W(q)$$

#### 4.4.2 Quaternion et rotation

On sait que les transformations géométriques planes de base peuvent être représentées par des opérations agissant sur des nombres complexes. Comme l'ensemble des quaternions contient l'espace  $\mathbb{R}^3$ , on espère trouver une certaine analogie concernant les transformations géométriques dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous nous intéressons à la rotation.

On peut représenter une rotation avec un quaternion unitaire à condition de pouvoir trouver une transformation qui change un vecteur (un quaternion purement imaginaire) en un vecteur de façon que la transformation préserve la longueur du vecteur transformé ainsi que le produit scalaire et le signe du produit vectoriel.

Soit  $r$  un quaternion purement imaginaire et  $q$  un quaternion unitaire. On peut alors remarquer que le quaternion  $r'$  tel que :

$$r' = q \otimes r \otimes q^*$$

$r$  est un quaternion purement imaginaire et de plus on a :

$$q \otimes r \otimes q^* = (Q(q) r) \otimes q^* = (W(q)^T Q(q)) r \quad (4.35)$$

Par ailleurs notons que :

$$(-q) \otimes r \otimes (-q^*) = q \otimes r \otimes q^*$$

Ce qui implique que les quaternions  $q$  et  $-q$  représentent la même rotation. La matrice  $W(q)^T Q(q)$  est une matrice orthogonale puisque les deux matrices  $W(q)$  et  $Q(q)$  sont orthogonales lorsque  $q$  est unitaire :

$$\begin{aligned} [W(q)^T Q(q)]^{-1} &= Q(q)^{-1} (W(q)^T)^{-1} \\ &= Q(q)^T W(q) \\ &= [W(q)^T Q(q)]^T \end{aligned}$$

Elle est donnée par :

$$W(q)^T Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 0 & 2(q_x q_y + q_0 q_z) & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 0 & 2(q_x q_z - q_0 q_y) & 2(q_y q_z + q_0 q_x) & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant établir l'expression d'une matrice de rotation  $R$  en fonction d'un quaternion unitaire  $q$ :

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_x q_y + q_0 q_z) & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_x q_z - q_0 q_y) & 2(q_y q_z + q_0 q_x) & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}$$

Et on peut également écrire :

$$W(q)^T Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Nous pouvons également extraire un quaternion unitaire à partir d'une matrice de rotation.

Soit  $R_{ij}$  un élément de la matrice de rotation. En considérant les termes diagonaux de la matrice précédente on obtient les combinaisons suivantes :

$$1 + R_{11} + R_{22} + R_{33} = 4q_0^2$$

$$1 + R_{11} - R_{22} - R_{33} = 4q_x^2$$

$$1 - R_{11} + R_{22} - R_{33} = 4q_y^2$$

$$1 - R_{11} - R_{22} + R_{33} = 4q_z^2$$

Ces équations nous donnent les carrés des composantes du quaternion correspondant.

On choisit la composante du quaternion ayant la valeur absolue la plus élevée. Ensuite, on injecte la composante choisie dans trois parmi les six expressions suivantes :

$$R_{32} - R_{23} = 4q_0q_x$$

$$R_{13} - R_{31} = 4q_0q_y$$

$$R_{21} - R_{12} = 4q_0q_z$$

$$R_{21} + R_{12} = 4q_xq_y$$

$$R_{32} + R_{23} = 4q_yq_z$$

$$R_{13} + R_{31} = 4q_zq_x$$

Cette démarche évite le calcul imprécis des composantes du quaternion puisque les trois autres composantes ne sont plus obtenues par une division de deux nombres dont la valeur absolue est très petite. Notons que le signe de la composante choisie (ayant la valeur absolue la plus élevée) est arbitraire puisque  $q$  et  $-q$  représentent la même rotation.

**Remarque :** Equivalence avec la formule de Rodrigues.

Nous venons d'établir l'équivalence entre la représentation matricielle et la représentation quaternion d'une rotation. Il y a une relation très simple entre un quaternion unitaire et l'axe et l'angle d'une rotation. Comme nous venons de l'établir (équation (4.29)) le produit de deux quaternions  $p = (p_0; \mathbf{p})$  et  $q = (q_0; \mathbf{q})$  peut être exprimé par :

$$p \otimes q = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}; p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q})$$

L'équation (4.35) précédente devient alors :

$$r' = (0; (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{r} + 2 q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{r} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{q})$$

$r'$  est donc un quaternion purement imaginaire et sa partie purement imaginaire est :

$$r' = (q_0^2 - \mathbf{q}\mathbf{q}) \mathbf{r} + 2 q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{r} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{q}$$

Et on peut donc confondre un quaternion purement imaginaire avec un vecteur de dimension trois :

$$r' = \mathbf{r}'$$

Notons que la formule de Rodrigues (équation (3.7)) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

Ou

$$\mathbf{v}' = \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

Et donc pour  $\mathbf{r}'$  :

$$\mathbf{r}' = \cos \theta \mathbf{r} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

En identifiant les deux expressions précédentes de  $\mathbf{r}'$  et en utilisant les deux égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \sin \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ \sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

on obtient :

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\mathbf{q} = \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n}$$

Le quaternion représentant une rotation d'axe  $\mathbf{n}$  et d'angle  $\theta$  s'écrit donc :

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{i} n_x + \mathbf{j} n_y + \mathbf{k} n_z) \quad (4.36)$$

Enfin, nous pouvons noter qu'à chaque quaternion unitaire correspond une rotation unique.

On vient donc de définir (4.36) le quaternion de rotation  $q$  par identification avec la formule de Rodrigues ce qui confirme bien l'utilisation du demi angle  $\frac{\theta}{2}$ .

On peut aussi facilement vérifier et noter :

$$q^{-1} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^2 q^*; (q \neq 0) \text{ Où } |q|^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = q \otimes q^* = q^* \otimes q$$

Puisque le produit de deux quaternions unité donne un quaternion unité,  $N$  rotations peuvent être combinées pour donner un seul quaternion unité :

$$c_R = q_{RN} \dots q_{R3} \cdot q_{R2} \cdot q_{R1} \quad (4.37)$$

Il est possible, en utilisant la multiplication, d'appliquer une rotation au vecteur 3D :

$$\mathbf{V} = (v_x, v_y, v_z)^T$$

On doit d'abord définir l'écriture d'un tel vecteur dans le vocabulaire des quaternions comme :  $q_v = (0, \mathbf{v}) = (0, v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) = (0, \vec{v})$

Le résultat  $\mathbf{V}' = (v_x', v_y', v_z')$  est défini comme :

$$q_{v'} = (0, \mathbf{v}') = 0 + v_x' \mathbf{i} + v_y' \mathbf{j} + v_z' \mathbf{k}$$

$$q_v = (0, \mathbf{v}) = (0, v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) = (0, \vec{v})$$

Sachant que  $q_R^{-1} = q_R^*$ , la rotation du vecteur  $q_v$  par le quaternion rotation  $q_R$  est donnée par :

$$q'_v = q_R \otimes q_v \otimes q_R^{-1} = q_R \otimes q_v \otimes q_R^* \quad (4.38)$$

Deux rotations successives peuvent être appliquées au vecteur  $\mathbf{V}$  comme suit :

$$q'_v = p_R \otimes (q_R \otimes q_v \otimes q_R^{-1}) \otimes p_R^{-1} \quad (4.39)$$

On peut supposer  $c_R = p_R \otimes q_R$  ce qui implique :  $q'_v = c_R \otimes q_v \otimes c_R^{-1}$

Où  $q_R$  et  $p_R$  sont des quaternions rotation et  $c_R$  en est leur combinaison. Le résultat précédent implique que le vecteur  $\mathbf{V}$  subit d'abord la rotation  $q_R$  suivie par la rotation  $p_R$ .

On peut remarquer à partir de la définition du quaternion que :

$$rot (\alpha, \vec{n}) = rot (-\alpha, -\vec{n}) \quad (4.40)$$

Quelques applications :

i) Quaternions de bases :

Les quaternions de bases qui représentent, successivement, les rotations d'angles  $\theta$  autour des axes principaux (centraux)  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  sont :

$$\begin{aligned} q_x &= \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right), \text{ avec } n_x = 1 \\ q_y &= \left( \cos \frac{\theta}{2}, 0, \sin \frac{\theta}{2}, 0 \right), \text{ avec } n_y = 1 \\ \text{et } q_z &= \left( \cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2} \right), \text{ avec } n_z = 1 \end{aligned}$$

Seulement deux termes suffisent pour leurs écritures, en termes de matrices (3x3) on doit utiliser cinq termes.

ii) Soit une rotation pure d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{n} = \left( \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^t$  (représentée par la figure 3.8 ).

Exemple similaire à d) i) chapitre III

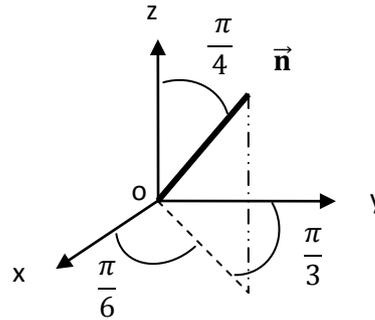
En notant que :  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{6}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{4} = 1$  ; Ce qui implique  $|\mathbf{n}| = 1$

Le quaternion unitaire qui représente cette rotation pure s'écrit :

$$q = R = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \text{ avec } |q| = 1$$

Cette transformation ou rotation 3-D autour de l'axe  $\mathbf{n}$  peut s'écrire sous forme matricielle en utilisant le résultat (A) ou l'équation ( 3.8) ou (3.9) :

$$[ R ] = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{5\cos\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{8} - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{4} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{8} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2} & \frac{1}{8} + \frac{7\cos\theta}{8} & \frac{(1-\cos\theta)}{4} - \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{4} - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} & \frac{(1-\cos\theta)}{4} + \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$



**Figure 4.7:** Rotation  $(\mathbf{n}, \theta) \sim q$

La méthode axe angle, la formule de Rodrigues ou des techniques de conversion (quaternions vers matrices) sont utilisées pour la formulation d'une transformation rigide quelconque dans l'un ou l'autre de ces systèmes.

Des programmes Matlab de calcul de telles conversions pour DQs vers matrices /ou matrices vers DQs ont été élaborés.

Comparons les deux formats de cette transformation : Toute personne 'novice en la matière' dirait que c'est vraiment comparer l'incomparable :

- La formulation Quaternion est beaucoup plus compacte et instructive; seulement quatre termes (ou une seule ligne) qui peuvent décrire clairement le mouvement (l'amplitude  $\theta$  et l'orientation  $\vec{\mathbf{n}}$ ).

- Trois lignes et trois colonnes ou neuf 'confusing' termes composent la matrice (3 x 3) et doivent satisfaire la contrainte :  $\det(R) = +1$  ; Ce qui correspond à la condition sur les quaternions :  $|q| = 1$ . Cela pourrait se faire à l'aide d'un logiciel Matlab quelconque ou directement (ie : Un dur labeur et plus d'une demie page de calcul).

L'unique remarque réconfortante, concernant cette matrice, est de facilement constater que :  $R = I$  (la matrice identité), pour  $\theta = 0$  ou  $2\pi$ .

Nous pouvons vérifier ( 3.2 ) :  $R \mathbf{n} = \mathbf{n}$  stipulant que l'axe de rotation reste inchangé pour le quaternion  $q$  correspondant à cette rotation  $R$

$$q = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \text{ et } \mathbf{n} = \left( 0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \mathbf{V}$$

$\mathbf{V}' = q(\mathbf{V})q^*$  une multiplication (associative) de quaternions :

En suivant les règles de multiplication (4.54) et (4.55), on obtient :

$$\begin{aligned}
V' &= q \cdot V \cdot q^* \\
&= \left( \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left( 0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \cos \frac{\theta}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. , -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \left( -\sin \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \frac{\theta}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4} \sin \frac{\theta}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. , -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \left[ \left( -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} (\cos \frac{\theta}{2}^2 + \sin \frac{\theta}{2}^2), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\sqrt{2}}{4} (\cos \frac{\theta}{2}^2 + \sin \frac{\theta}{2}^2), \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{\theta}{2}^2 + \sin \frac{\theta}{2}^2) \right] = \left( 0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = V
\end{aligned}$$

L'axe  $n$  reste donc inchangé.

iii) Composition de rotations (application similaire à d) ii) chapitre III) :

Appliquons deux rotations successives ; une première rotation d'amplitude  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe Ox suivie par une deuxième rotation de même amplitude  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe Oy :

Exploitions nos quaternions :

La première rotation s'écrira :

$$q_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right) \text{ car } \frac{\theta_1}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ donc } \cos \frac{\theta_1}{2} = \sin \frac{\theta_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

La deuxième s'écrira :

$$q_2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \text{ car } \frac{\theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ donc } \cos \frac{\theta_2}{2} = \sin \frac{\theta_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La composition de ces deux rotations est donnée par  $q$  telle que :

$$q = q_2 \cdot q_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

En explicitant ce résultat on trouve facilement l'amplitude  $\theta$  résultante :

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \text{ cela implique } \theta = \pm 120^\circ$$

Le résultat trouvé pourra s'écrire sous la forme :

$$q = q_2 \cdot q_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

$$\text{Ou } q = q_2 \cdot q_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \left( +\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

$\theta = + 120^\circ$  : ( qui est la première solution  $\theta_1 = 120^\circ$  )

On pourra alors facilement remarquer le  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et l'axe de rotation

$$(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ou  $\theta = -120^\circ$

$q = q_2 \cdot q_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$  ; même quaternion

On pourra alors remarquer le  $\sin \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et l'axe de rotation  $(-\mathbf{n}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Un seul résultat, une seule solution : Une rotation d'amplitude  $\theta$  autour de  $\mathbf{n}$  similaire et équivalente à une rotation d'amplitude  $-\theta$  autour de  $-\mathbf{n}$  ce qui caractérise le même mouvement.

C'est plus clair et plus précis car ils n'existent plus d'ambigüités d'angles ou de signes.

Concernant la méthode axe-angle ; il faudra faire 'le bon choix 'et faire correspondre la bonne amplitude avec la bonne direction  $\mathbf{n}$ .

Si l'ordre des rotations est inversé :

En utilisant le calcul matriciel on trouve la rotation résultante :  $R_i$

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve les mêmes angles avec un axe différent ; On constate la même ambigüité de signes et d'axes.

La meilleure manière de contourner ces 'ambigüité matricielles' de signes et d'axes et de vérifier ces applications numérique par la méthode axe-angle ou équation (3.5).

Si on utilise par contre les quaternions :

$$\begin{aligned} q_i &= q_1 \cdot q_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \end{aligned}$$

$\theta = +120^\circ$  autour de l'axe  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ou  $\theta = -120^\circ$  autour de l'axe  $(-\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ;

$$q_i = \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

Les quaternions offrent d'une manière plus intuitive un meilleur cadre pour l'utilisation et la compréhension des effets des rotations à trois dimensions parce que l'axe et l'angle de rotation sont explicites dans leur définition.

L'axe de rotation  $\vec{n}$  pourrait être déplacé de l'origine  $O$  vers une autre position désirée en utilisant les mouvements planaires (ou la conjugaison).

#### 4.4.3 Conversions

Il est possible et très utile de convertir un quaternion en forme de matrice de rotation et vice versa :

$$q_R = \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) = q_0 + \vec{q}$$

Définissons les dénommés 'paramètres d'Euler' :

$$q_0 = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$q_1 = \sin \frac{\alpha}{2} n_x$$

$$q_2 = \sin \frac{\alpha}{2} n_y$$

$$q_3 = \sin \frac{\alpha}{2} n_z$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  qui est donnée par  $W(q)^T Q(q)$  (voir 4.4.2 ) peut s'écrire aussi :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Ce résultat (4.41) en termes de quaternions est similaire au résultat (3.9) calculé précédemment au chapitre trois.

On peut aussi l'écrire sous une forme plus condensée afin d'avoir une formule similaire à l'équation (3.8) :

Soient le vecteur  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  , son transposé  $\vec{q}^T$  et la matrice antisymétrique qui le représente :

$$\check{A} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors  $\mathbf{R}$  s'écrira sous une forme plus compacte et similaire au résultat (3.8) :

$$\mathbf{R} = 2(q_0^2 - 1)I + 2\vec{q}\vec{q}^T + 2q_0\check{A} \quad (4.42)$$

Les quatre paramètres d'Euler introduits sont des quantités algébriques qui jouent le même rôle. Ils sont liés par la contrainte :

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (4.43)$$

Sous la forme (4.41) on n'aura pas de problèmes de singularités concernant la cinématique inverse (IK). Ces résultats sont améliorés en observant la matrice  $\mathbf{S}$  symétrique (4x4) obtenue à partir des éléments constitutifs de  $\mathbf{R}$ .

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + r_{11} + r_{22} + r_{33} & r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \\ r_{32} - r_{23} & \mathbf{1} + r_{11} - r_{22} - r_{33} & r_{12} + r_{21} & r_{13} + r_{31} \\ r_{13} - r_{31} & r_{12} + r_{21} & \mathbf{1} - r_{11} + r_{22} - r_{33} & r_{32} + r_{23} \\ r_{21} - r_{12} & r_{13} + r_{31} & r_{32} + r_{23} & \mathbf{1} - r_{11} - r_{22} + r_{33} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Ou sous une forme quadratique, mais cette fois-ci en termes de quaternions :

$$\mathbf{S} = 4 \begin{pmatrix} q_0^2 & q_0q_1 & q_0q_2 & q_0q_3 \\ q_0q_1 & q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_0q_2 & q_1q_2 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_0q_3 & q_1q_3 & q_2q_3 & q_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

La connaissance d'une seule ligne de la matrice  $\mathbf{S}$  nous permet de calculer les paramètres  $q_0$  et  $q$ . En pratique l'algorithme est le suivant :

- déterminer  $k$  tel que  $S_{kk} = \max_j(S_{jj})$
- calculer  $q_k = \frac{1}{2}\sqrt{S_{kk}}$
- et enfin trouver  $q_i = \frac{S_{kk}}{4q_k} \quad i = 0, 1, 2, 3$

Une question importante se pose : Pourquoi utiliser un demi angle ( $\frac{\alpha}{2}$ ) et pas l'angle lui même  $\alpha$ ?

Pour répondre une dernière fois à cette question (voir démonstration (4.4.2)), il suffit d'appliquer une rotation d'amplitude  $\frac{\alpha}{2}$  pour un quaternion quelconque et de déterminer (ou vérifier) sa contrepartie en appliquant le calcul classique ou la matrice (3.9) du chapitre précédent :

$$R(\alpha, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} c + (1-c)n_x^2 & -n_zs + (1-c)n_xn_y & n_ys + (1-c)n_xn_z \\ n_zs + (1-c)n_xn_y & c + (1-c)n_y^2 & -n_xs + (1-c)n_zn_y \\ -n_ys + (1-c)n_xn_z & n_xs + (1-c)n_zn_y & c + (1-c)n_z^2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Vérifions la première ligne de la matrice (4.41) :

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) = 1 - 2[(\sin \frac{\alpha}{2} n_y)^2 + (\sin \frac{\alpha}{2} n_z)^2] \\ &= 1 - 2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 (1 - n_x^2) \\ &= 1 - 2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + 2(n_x \sin \frac{\alpha}{2})^2 = \cos \alpha + n_x^2(1 - \cos \alpha) \\ r_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3) = 2\left(\sin \frac{\alpha}{2} n_x \sin \frac{\alpha}{2} n_y - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} n_z\right) \\ &= 2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 n_x n_y - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} n_z = n_x n_y (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha n_z \\ r_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2) = 2\left(\sin \frac{\alpha}{2} n_x \sin \frac{\alpha}{2} n_z + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} n_y\right) \\ &= 2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 n_x n_z + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} n_y = n_x n_z (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha n_y \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques usuelles (sin et cos du demi angle) et la contrainte fondamentale  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , on remarque que la première ligne de la matrice (4.41) est équivalente à la première ligne de la matrice (3.9). Il en est de même pour les deux autres lignes restantes relatives aux deux matrices.

Les deux matrices décrivent exactement le même mouvement ; cela signifie que pour effectuer une rotation d'amplitude  $\alpha$  autour d'un axe quelconque  $\mathbf{n}$

passant par l'origine, en utilisant la méthode classique (axe, angle) ou  $R(\alpha, \mathbf{n})$  il suffit d'effectuer une rotation d'amplitude  $\frac{\alpha}{2}$  autour du même axe  $\mathbf{n}$  si des quaternions sont utilisés.

#### 4.4.4 Représentation matricielle des quaternions

Tout quaternion peut être représenté par une matrice colonne quadridimensionnelle :

$$\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [q_0 \ \mathbf{q}]^T$$

Dans de telles conditions le quaternion produit  $\mathbf{a} = p\mathbf{q}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{a} = A_p \mathbf{q} = B_q \mathbf{p}$$

Ou en utilisant des matrices (4x4)

$$A_p = \begin{pmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 I + \check{p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_q = \begin{pmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 I - \check{q} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Où  $I$  est la matrice unité (identité) et  $\check{p}$  est la matrice antisymétrique représentant le vecteur  $\mathbf{p}$ .

$$\check{p} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.4.5. Interpolation

##### 4.4.5.1 Interpolation des quaternions

Une qualité extrêmement importante des quaternions qui les rendent indispensables dans les systèmes d'animation est leur capacité à interpoler deux ou plusieurs quaternions d'une manière lisse et continue. Shoemake [47], présente un document exceptionnel sur l'utilisation des courbes quaternions pour animer les rotations. En outre, il convient de noter, les propriétés de l'interpolation linéaire sphérique (SLERP) des quaternions qui sont héritées par les quaternions duaux :

Soient deux quaternions  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  avec un angle  $\theta$  les séparant, le Slerp est défini comme :

$S(t ; p, q) = p(p \cdot q)^t$  pour  $t \in [0; 1]$ . Noter que  $S(0; p, q) = p$  et  $S(1; p, q) = q$ . Une définition équivalente du Slerp plus pratique pour les calculs est :

$$S(t; p, q) = \frac{\sin((1-t)\theta)p + \sin(t\theta)q}{\sin(\theta)}$$

Si  $p$  and  $q$  matérialisent deux points sur une sphère (cercle) unité, l'équation précédente représente une paramétrisation du plus petit arc entre eux (plus court chemin). Si un point matériel parcourt la courbe suivant la dite paramétrisation, il le fera à une vitesse constante. Alors, quel que soit le choix uniforme de  $t$  dans  $[0 ; 1]$  cela va produire des points avec des espaces égaux sur l'arc.

On suppose que seuls  $p, q,$  et  $t$  sont spécifiés. Plus encore, puisque  $q$  and  $-q$  représentent la même rotation, on peut remplacer  $q$  par  $-q$  si nécessaire afin de garantir que le choix de l'angle entre  $p$  et  $q$  est le plus adéquat ; ou ,  $p \cdot q \geq 0$ .  $p$  et  $q$  étant de modules unité, leurs produit scalaire est donc  $p \cdot q = \cos(\theta)$ . Le tableau (4.1) nous donne le nombre d'opérations nécessaires et suffisantes à l'opération Slerp.

**Tableau 4.1: Nombre d'opérations (Quaternions)**

term	A	M	D	F
$a_0 = p \cdot q$	3	4		
$\theta = \cos^{-1}(a_0)$				1
$1 - t$	1			
$(1 - t)\theta$		1		
$t\theta$		1		
$\sin(\theta)$				1
$\sin((1 - t)\theta)$				1
$\sin(t\theta)$				1
$a_1 = 1/\sin(\theta)$			1	
$a_2 = a_1 \sin((1 - t)\theta)$		1		
$a_3 = a_1 \sin(t\theta)$		1		
$a_2p + a_3q$	4	8		
<b>total</b>	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>1</b>	<b>4</b>

#### 4.4.5.2 Interpolation des matrices

L'absence d'une définition pratique et significative d'une formule pour l'interpolation qui s'appliquerait aux matrices de rotation est un argument quant à la supériorité des quaternions sur les matrices de rotation.

Cependant, les rotations peuvent être interpolées directement d'une manière équivalente à celle du Slerp : Si  $P$  et  $Q$  sont les rotations correspondantes aux quaternions  $p$  and  $q$ , le Slerp des matrices sera :  $S(t; P, Q) = P(P^T Q)^t$  : Formulation similaire à celle qui définit le Slerp pour les quaternions. Le problème technique est de savoir ce que devrait signifier la quantité  $R^t$  concernant une rotation  $R$  à une valeur réelle  $t$ .

Si la rotation se fait autour de l'axe  $A$  avec un angle  $(\theta)$ , alors  $R^t$  aura le même axe de rotation, mais l'angle de rotation sera  $(t\theta)$ . La procédure à suivre pour le calcul du Slerp des matrices de rotation est :

1. Calculer  $R = P^T Q$ .
2. Extraire un axe  $A$  et un angle  $(\theta)$  de  $R$ .
3. Calculer  $R^t$  et la convertir en matrice axe-angle sous la forme de pair  $(A, (t\theta))$ .
4. Calculer le  $S(t; P, Q) = PR^t$ .

Cet algorithme nécessite une extraction axe-angle qui impliquerait une fonction trigonométrique inverse et une racine carrée, quelques évaluations trigonométriques (pour  $(t\theta)$ ), et une conversion vers une matrice de rotation.

C'est certainement plus coûteux que l'utilisation du Slerp de quaternions qui nécessitera seulement trois fonctions trigonométriques. L'interpolation de quaternion est donc plus efficace et plus évidente.

Le tableau (4.2) fournit de la même manière le nombre d'opérations utilisées. L'interpolation de quaternions et celle de matrices de rotation utilisent 1 division et 4 fonctions. Cependant, le nombre d'additions et de multiplications utilisées dans l'interpolation des matrices de rotation est excessivement grand comparé à celui utilisé dans l'interpolation des quaternions.

Tableau 4.2 : Nombre d'opérations (Matrices de rotation)

term	A	M	D	F
$R = P^*Q$	18	27		
$a_0 = 0.5(\text{Trace}(R) - 1)$	4	1		
$\theta = \cos^{-1}(a_0)$				1
$\mathbf{D} = (r_{21} - r_{12}, r_{02} - r_{20}, r_{10} - r_{01})$	3			
$a_1 = 1/ \mathbf{D} $	2	3	1	1
$\mathbf{A} = a_1\mathbf{D}$		3		
$t\theta$		1		
$a_2 = \sin(t\theta)$				1
$a_3 = 1 - \cos(t\theta)$	1			1
matrix $S$ , no cost				
$S^2$	3	6		
$R^t = I + a_2S + a_3S^2$	9	9		
$PR^t$	18	27		
total	58	77	1	4

#### 4.5 Quaternions Daux

Le quaternion dual unitaire est notre principale préoccupation, car il peut représenter toutes transformations rigides rotationnelles et/ou de translation.

Quand les quaternions sont combinés avec des nombres daux, nous obtenons des quaternions daux qui ont été présentés par Clifford en 1882 [23]. Alors que le quaternion unité peut seulement représenter une rotation, le quaternion dual unité peut représenter à la fois la translation et la rotation. Chaque quaternion dual se compose de huit éléments ou de deux quaternions. Les deux quaternions sont appelés quaternion réel et quaternion dual :

$$q = q_r + q_d \varepsilon = \hat{q} \quad (4.47)$$

Où  $q_r$  et  $q_d$  sont des quaternions tels que :

$$\hat{q} = (\hat{s}, \hat{\mathbf{m}}) = (s, x, y, z, s_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = (\hat{s}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon = s + xi + yj + zk + \varepsilon(s_\varepsilon + x_\varepsilon i + y_\varepsilon j + z_\varepsilon k) \quad (4.48)$$

Avec la combinaison des opérations d'algèbre associées aux quaternions et avec le nombre dual  $\varepsilon$ , on peut former l'arithmétique des quaternions duaux.

#### 4.5.1 Opérations Arithmétiques sur les Quaternions Daux

Les opérations arithmétiques élémentaires et nécessaires pour les quaternions duaux sont les suivantes:

Multiplication scalaire ;

$$\lambda \hat{q} = \lambda q_r + \lambda q_d \varepsilon \quad (4.49)$$

Addition ;

$$\hat{q}_1 + \hat{q}_2 = q_{r1} + q_{r2} + (q_{d1} + q_{d2}) \varepsilon \quad (4.50)$$

Multiplication ;

$$\hat{q}_1 \otimes \hat{q}_2 = q_{r1} q_{r2} + (q_{r1} q_{d2} + q_{d1} q_{r2}) \varepsilon \quad (4.51)$$

Le conjugué classique voir (4.31) ;

$$q_r^* + q_d^* \varepsilon \quad (4.52)$$

La norme ;

$$|| \hat{q} || = (q q^*)^{1/2} \quad (4.53)$$

Condition d'unité ;

$$|| \hat{q} || = 1 \quad (4.54)$$

Et

$$q_r^* q_d + q_d^* q_r = 0 \quad (4.55)$$

Une deuxième conjugaison s'impose celle relative à l'inverse du quaternion dual :

$$\hat{q}^{-1} = \frac{1}{\hat{q}} = \frac{\bar{\hat{q}}}{\bar{\hat{q}}\hat{q}} = \frac{1}{q} - \varepsilon \frac{q_\varepsilon}{q^2},$$

(un pur nombre dual ( $q = 0$ ) n'admet pas d'inverse)

Car :

$$[\hat{q} \otimes \hat{q}^{-1}] = (q + \varepsilon q_\varepsilon) \otimes \left( \frac{1}{q} - \varepsilon \frac{q_\varepsilon}{q^2} \right) = \frac{q}{q} - \varepsilon \frac{q_\varepsilon}{q} + \varepsilon \frac{q_\varepsilon}{q} = [\hat{q}^{-1} \otimes \hat{q}] = 1$$

La combinaison de ces deux conjugués (le classique et celui relatif à l'inversion) pour le quaternion dual  $\hat{q}$  peut s'écrire  $\bar{\hat{q}}^*$ . Ce qui nous donne :

$$\bar{\hat{q}}^* = (s, -x, -y, -z, -s_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \quad (4.56)$$

Naturellement les quaternions duaux ( DQ ) héritent de plusieurs propriétés des quaternions réguliers comme :

$$\hat{q}(\theta, \vec{n}) = \hat{q}(-\theta, -\vec{n}) : \text{m\^eme transformation} \quad (4.57)$$

Le mouvement hélicoïdal représenté par le DQ :  $\hat{S} = \hat{q} = (q, q_0)$  doit être de magnitude (norme) l'unité : 1

$$|\hat{q}|^2 = |\hat{S}|^2 = (q_1 + \varepsilon q_{01})^2 + (q_2 + \varepsilon q_{02})^2 + (q_3 + \varepsilon q_{03})^2 + (q_4 + \varepsilon q_{04})^2 = 1$$

Cela se traduit par les deux conditions ou contraintes suivantes (équivalentes aux équations (4.54) et (4.55) définies plus haut):

$$\begin{cases} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \\ q_1 q_{01} + q_2 q_{02} + q_3 q_{03} + q_4 q_{04} = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

Lesquelles imposées sur un quelconque DQ contenant huit paramètres font diminuer le nombre de degrés de liberté ( $8 - 2$ ) = 6 équivalant au nombre de degrés de liberté de n'importe quel solide (rigide) libre dans l'espace 3D.

### 4.5.1.1 Rotations

Les transformations 3D de rotation sont définies comme des séries de multiplications de DQ similaires aux transformations en termes de quaternion; Eq (4.38) et (4.39):

$$\hat{q}_v' = \hat{q}_R \otimes \hat{q}_v \otimes \bar{\hat{q}}_R^* = (\hat{q}_R \otimes \hat{q}_v) \otimes \bar{\hat{q}}_R^* = \hat{q}_R \otimes (\hat{q}_v \otimes \bar{\hat{q}}_R^*); \text{associativité} \quad (4.59)$$

Pour une rotation: Le DQ représente seulement une rotation 3D ( $q_\varepsilon = 0$ ,  $\hat{q}_R = \hat{q} = q = R$ ).

Exemple:

Trouver le vecteur  $\vec{V}' = (x', y', z')^T$  résultant de la rotation du vecteur  $\vec{V} = (x, y, z)^T$  autour de l'axe Ox avec une amplitude  $\alpha$ . Cela se résume à faire les opérations quaternioniques suivantes (4.38):

$$q_v' = q_R \otimes q_v \otimes q_R^{-1} = q_R \otimes q_v \otimes q_R^* = \hat{q} = \hat{q}_1 \otimes \hat{q}_2 \otimes \hat{q}_3$$

Avec :

$$q_R = [\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} (1, 0, 0)] = \hat{q}_1$$

$$q_v = (1, (0, 0, 0)) + \varepsilon (0, (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})) = (1, \varepsilon V) = \hat{q}_2$$

$$q_R^{-1} = q_R^* = [\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} (1, 0, 0)] = \hat{q}_3$$

On peut commencer par le produit des deux quaternions les plus à droite ou par celui des deux quaternions les plus à gauche (produit associatif (4.59)). Afin d'alléger nos équations mathématiques, n'utilisons plus l'opérateur ( $\otimes$ ) ;

Donc :

$$q_v' = \hat{q} = (1, (0, 0, 0)) + \varepsilon ((0, (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}))) = (1, \varepsilon V')$$

$$= [\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} (1, 0, 0)][(1, \varepsilon V)][\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} (1, 0, 0)] = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3$$

En commençant par le produit le plus à droite, et en détaillant pour chaque quaternion dual sa partie réelle et sa partie duale et en utilisant la règle de multiplication (4.51) :

$$\hat{q}_1 \hat{q}_2 = q_{r1} q_{r2} + (q_{r1} q_{d2} + q_{d1} q_{r2}) \varepsilon \quad (4.51) \text{ et } (4.29)$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad q_{r1} &= [c, s(1,0,0)] & q_{d1} &= [0, (0,0,0)] \\ q_{r2} &= [1, (0,0,0)] & q_{d2} &= [0, (x, y, z)] \\ \hat{q}_{12} = \hat{q}_1 \hat{q}_2 &= [c, s(1,0,0)] + \varepsilon [-sx, (cx, cy - sz, cz + sy)] \end{aligned}$$

Pour le dernier produit :  $\hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 = \hat{q}_{12} \hat{q}_3$  et en explicitant les parties réelles et duales :

$$\begin{aligned} q_{r12} &= [c, s(1,0,0)] & q_{d12} &= [-sx, (cx, cy - sz, cz + sy)] \\ q_{r3} &= [c, -s(1,0,0)] & q_{d3} &= [0, (0,0,0)] \end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat final :

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 &= [c^2 + s^2, (-cs + cs, 0,0)] + \\ &\varepsilon [-scx + scx, (s^2x, 0,0) + (c^2x, c^2y - csz, c^2z + csy) + (0, -scz - s^2y, scy - s^2z)] = \\ &[1, (0,0,0)] + \varepsilon [0, (x, 0,0) + (0, c^2y - csz, c^2z + csy) + (0, -scz - s^2y, scy - s^2z)] \end{aligned}$$

Avec :  $s = \sin \frac{\alpha}{2}$  et  $c = \cos \frac{\alpha}{2}$  et en utilisant les lois trigonométriques d'usage :

$$\begin{aligned} s^2 + c^2 &= 1 \\ \sin \alpha &= 2sc \\ \cos \alpha &= c^2 - s^2 \end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$q'_v = \hat{q} = (1, (0,0,0)) + \varepsilon ((0, (x'i + y'j + z'k))) = (1, \varepsilon V')$$

Un vrai vecteur dont la partie duale  $\hat{q}_d$  est donnée par :

$$\hat{q}_d = [0, (x', y', z')] = [0, (x, y \cos \alpha - z \sin \alpha, z \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

Ce résultat est rapidement vérifié si on utilise le calcul matriciel :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{vmatrix}$$

On aurait pu procéder, en remarquant les parties duales nulles de la rotation et de son conjugué, en utilisant le raccourci suivant :

$$q'_v = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 = (1 + \varepsilon V') = q[(1 + \varepsilon V)]q^* = qq^* + \varepsilon q(V)q^* = 1 + \varepsilon(V')$$

Cela implique en comparant les équations:  $V' = q(V)q^*$ ; Un simple produit de quaternions

$$\begin{aligned} & [\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} (1,0,0)] [(0,x,y,z) [\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} (1,0,0)]] \\ & = [-sx, (cx, cy - sz, cz + sy)] [\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} (1,0,0)] \\ & = [-scx+scx, (s^2x,0,0) + (c^2x, c^2y- csz, c^2z+ csy)+(0,-scz - s^2y, scy-s^2z)] \end{aligned}$$

$$V' = [(x', y', z')] = [(x, y \cos \alpha - z \sin \alpha, z \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

Le même résultat sans passer nécessairement par la multiplication des quaternions duaux impliqués dans cette application.

**Remarque Importante :** En termes de *quaternions* les axes et les amplitudes des rotations sont facilement écrites, manipulées et reconnues, il n'existe aucune ambiguïté de choix et on n'a pas besoin de techniques parallèles ou de 'subterfuges' (Antisymétrie, Valeurs Propres, vecteurs Propres, Traces,"etc.....). Avec les quaternions c'est désormais **plus clair, plus net et plus précis**.

#### 4.5.1.2 Translations

Les DQ représentent aussi les translations; définies comme :

$$\hat{q}_T = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \quad (4.60)$$

On remarque bien évidemment que cette transformation rigide est un vecteur par excellence.

Elle correspond au vecteur de translation :

$$\vec{T} = (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k})^t$$

lequel est symboliquement noté  $T$ .

Avec une écriture plus simple et plus compacte :

$$\hat{q}_T = 1 + \varepsilon \frac{T}{2}$$

Son inverse est tout simplement :

$$\hat{q}_T^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{T}{2} \quad (4.61)$$

La translation  $T$  appliquée au vecteur  $\vec{v}$  (en réutilisant l'opérateur ( $\otimes$ )) est donnée par:

$$\hat{q}'_v = \hat{q}_T \otimes \hat{q}_v \otimes \bar{\hat{q}}_T^*$$

En utilisant le résultat (4.56) on a :

$$\bar{\hat{q}}_T^* = \hat{q}_T = 1 + \varepsilon \frac{T}{2} \quad (4.62)$$

Alors

$$\begin{aligned} \hat{q}'_v &= \hat{q}_T \otimes \hat{q}_v \otimes \bar{\hat{q}}_T^* \\ &= \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \right] \otimes [1 + \varepsilon (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})] \otimes \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \right] \\ &= 1 + \varepsilon [(v_x + t_x) \mathbf{i} + (v_y + t_y) \mathbf{j} + (v_z + t_z) \mathbf{k}] \end{aligned}$$

Ce qui correspond au vecteur transformé  $\vec{V}'$  :

$$\vec{V}' = (v_x + t_x) \mathbf{i} + (v_y + t_y) \mathbf{j} + (v_z + t_z) \mathbf{k}$$

#### 4.5.1.3 *Combinaisons (Compositions)*

Les DQ unitaires représentant les transformations rigides peuvent être combinés en un seul DQ unitaire de la même façon que les quaternions :

Il est donc possible que ces deux transformations essentielles puissent être combinées ou composées en prenant en compte les remarques importantes (revoir la remarque c à la fin du paragraphe (4.3)) quant à la successivité des applications : Une rotation  $R$  suivie d'une translation  $T$  ou dans l'ordre inverse (  $T$  ensuite  $R$  ) :

a) Une rotation  $R$  suivie d'une translation  $T$ : La composition d'un DQ unité de rotation:  $\hat{q}_R = q_R$  , suivie d'un DQ unité de translation:

$$\hat{q}_T = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k})$$

nous donnera:

$$\hat{q}_T \otimes \hat{q}_R = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k})\right) \otimes q_R = q_R + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \otimes q_R \quad (4.63)$$

Ou en utilisant une écriture plus compacte :

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon = q_R + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \otimes q_R = R + \varepsilon \frac{TR}{2} \quad (4.64)$$

Son inverse est

$$\left(R + \varepsilon \frac{TR}{2}\right)^{-1} = R^* - \varepsilon \frac{R^*T}{2} \quad (4.65)$$

On peut dès lors généraliser et affirmer que tout DQ unité;  $\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon$  peut être facilement réparti (ou décomposé) suivant ses deux composantes : sa translation et sa rotation ;

La rotation est représentée par sa partie non duale :  $q_R = R$  , et avec un peu de mathématiques des quaternion on peut montrer que la translation  $\hat{q}_T$  peut être représentée par  $2q_\varepsilon \cdot q^*$  .

En effet :

$$\varepsilon q_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \otimes q_R \Rightarrow 2q_\varepsilon \otimes q_R^* = (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) = 2q_\varepsilon \otimes q_R^{-1} \quad \text{propriété}$$

(a)

Exemple a)

Soient une rotation  $R$  d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Ox$  suivie d'une translation ou déplacement  $\vec{t} = (d_x, d_y, d_z)$  appliquées au vecteur  $\hat{q}_v = [1 + \varepsilon(0, l, 0)]$  :

$$\hat{q}_v' = \left(R + \frac{\varepsilon}{2}tR\right) \hat{q}_v \left(\overline{R + \frac{\varepsilon}{2}tR}\right)^* = \hat{q}_1 \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_1^* = (\hat{q}_1 \hat{q}_v) \bar{\hat{q}}_1^* = \hat{q}_1 (\hat{q}_v \bar{\hat{q}}_1^*)$$

Le produit des trois quaternions duaux étant associatif on pourra commencer par celui le plus à gauche ou par celui le plus à droite.

Trouvons d'abord  $\hat{q}_1$  ;

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= TR = \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(0, d_x, d_y, d_z)\right] \left[\left((c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(0)\right)\right] \\ &= \left[\left((c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(0)\right) + \frac{\varepsilon}{2}[(0, d_x, d_y, d_z)(c, s, 0, 0)]\right] = \left(R + \frac{\varepsilon}{2}tR\right) \end{aligned}$$

En appliquant la règle de multiplication des quaternions duaux (4.56) on retrouve le résultat (4.64)

On a ainsi affaire à un produit de quaternions, il faudra alors tout simplement utiliser la règle (4.29).

$$\begin{aligned} &\left[\left((c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(0)\right) + \frac{\varepsilon}{2}[(0, d_x, d_y, d_z)(c, s, 0, 0)]\right] \\ &= \left[(c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, cd_z - sd_y)\right] \\ &= \hat{q}_1 \hat{q}_1 \hat{q}_v = \left[(c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, cd_z - sd_y)\right] [1 + \varepsilon(0, 0, l, 0)] \\ &= \left[(c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, cd_z - sd_y)\right] \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(0, 0, 2l, 0)\right] \\ &= \left[(c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, +2cl, cd_z - sd_y + 2sl)\right] \end{aligned}$$

Pour plus de clarté appelons ce premier produit  $\hat{q}_1 \hat{q}_v = \hat{q}_a$  et le conjugué  $\bar{\hat{q}}_1^*$  par  $\hat{q}_b$  ; Alors en détaillant pour chaque quaternion dual sa partie réelle et sa partie duale et en utilisant les règles de multiplication (4.51) et (4.29) :

$$\hat{q}_a \hat{q}_b = q_{ra} q_{rb} + (q_{ra} q_{db} + q_{da} q_{rb}) \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad q_{ra} &= [c, s, 0, 0] & q_{da} &= [-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, +2cl, cd_z - sd_y + 2sl] \\ q_{rb} &= [c, -s, 0, 0] & q_{db} &= [sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, cd_z - sd_y] \end{aligned}$$

$$\hat{q}_1 \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_1^* = \hat{q}_a \hat{q}_b = \left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, +2cl, cd_z - sd_y + 2sl) \right] \left[ (c, -s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, cd_z - sd_y) \right]$$

$$q_{ra} q_{rb} = (c^2 + s^2, -cs + cs, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0, 0, 0, 0)$$

$$q_{ra} q_{db} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} (cs d_x - sc d_x, c^2 d_x, c^2 d_y + csd_z, c^2 d_z - csd_y) + \frac{\varepsilon}{2} (0, s^2 d_x, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0, 0, -csd_z + s^2 d_y, csd_y + s^2 d_z)$$

$$q_{da} q_{rb} \frac{\varepsilon}{2} = + \frac{\varepsilon}{2} (-cs d_x + sc d_x, c^2 d_x, c^2 d_y + csd_z + 2c^2 l, c^2 d_z - csd_y + 2csl) + \frac{\varepsilon}{2} (0, s^2 d_x, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0, 0, -csd_z + s^2 d_y - 2s^2 l, csd_y + s^2 d_z + csd_y + 2csl)$$

$$[(1, 0, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0, 2d_x, 2d_y + 2c^2 l - 2s^2 l, 2d_z + 2csl + 2csl)] = \hat{q}_v' = \hat{q} = 1 + \varepsilon (0, d_x, d_y + (c^2 - s^2)l, d_z + 2csl)$$

Avec :  $s = \sin \frac{\alpha}{2}$  et  $c = \cos \frac{\alpha}{2}$  et en utilisant les lois trigonométriques d'usage :

$$s^2 + c^2 = 1$$

$$\sin \alpha = 2sc$$

$$\cos \alpha = c^2 - s^2$$

On trouve finalement :

$$\hat{q}_v' = \hat{q} = (1, (0, 0, 0)) + \varepsilon ((0, (x'i + y'j + z'k))) = (1, \varepsilon v')$$

Un vrai vecteur dont la partie duale  $\hat{q}_d$  est donnée par :

$$\hat{q}_d = [0, (x', y', z')] = [0, (d_x, d_y + \cos \alpha l, d_z + \sin \alpha l)] \quad (a)$$

$$\hat{q}_v' = 1 + \varepsilon \begin{pmatrix} d_x \\ d_y + l \cos \theta \\ d_z + l \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{And} \quad v' = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y + l \cos \theta \\ d_z + l \sin \theta \end{pmatrix}$$

En utilisant le calcul matriciel (matrice de transformation  $[M_a]$ ) (méthode classique):

$$[M_a] = TR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & d_y \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[M_a]\vec{v} = \vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & d_y \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y + l \cos \theta \\ d_z + l \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Une translation  $T$  suivie d'une rotation  $R$  :

Si l'ordre est inversé et que la première application est une translation  $T$  :

On aura

$$\hat{q} = R + \varepsilon \frac{RT}{2} \quad (4.66)$$

Son inverse étant :

$$\left(R + \varepsilon \frac{RT}{2}\right)^{-1} = R^* - \varepsilon \frac{TR^*}{2} \quad (4.67)$$

Une deuxième propriété pour définir la translation, dans ce cas il faudra multiplier à gauche, par le conjugué ou l'inverse du quaternion de rotation  $q_R^* = q_R^{-1}$  ;

$$\begin{aligned} \text{propriété (b)} : \varepsilon q_\varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} q_R \otimes (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \\ \Rightarrow 2q_R^* \otimes q_\varepsilon &= (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) = 2q_R^{-1} \otimes q_\varepsilon \end{aligned}$$

Exemple b)

Soient une translation ou déplacement  $\vec{t} = (d_x, d_y, d_z)$  suivie d'une rotation  $R$  d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Ox$  appliquées au vecteur  $\hat{q}_v = [1 + \varepsilon(0, l, 0)]$  :

$$\hat{q}_v' = \left(R + \frac{\varepsilon}{2} Rt\right) \hat{q}_v \left(\overline{R + \frac{\varepsilon}{2} Rt}\right)^* = \hat{q}_2 \hat{q}_v \hat{q}_2^* = (\hat{q}_1 \hat{q}_v) \hat{q}_1^* = \hat{q}_2 (\hat{q}_v \hat{q}_2^*)$$

Trouvons d'abord  $\hat{q}_2$  ;

$$\begin{aligned} \hat{q}_2 &= RT = \left[ \left( (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0) \right) \right] \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} (0, d_x, d_y, d_z) \right] = \\ &= \left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0) + \frac{\varepsilon}{2} \left( (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0) \right) \left( (0, d_x, d_y, d_z) \right) \right] = \left( R + \frac{\varepsilon}{2} Rt \right) \text{ similaire à (4.66)} \\ &= \left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, cd_z + sd_y) \right] = \hat{q}_2 \\ \hat{q}_2 \hat{q}_v &= \left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, cd_z + sd_y) \right] [1 + \varepsilon(0, 0, l, 0)] = \\ &= \left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, cd_z + sd_y) \right] \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} (0, 0, 2l, 0) \right] = \end{aligned}$$

$$\left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, +2cl, cd_z + sd_y + 2sl) \right]$$

$$\hat{q}_v' = \left( R + \frac{\varepsilon}{2} Rt \right) \hat{q}_v \left( R + \frac{\varepsilon}{2} Rt \right)^* =$$

Utilisons la même technique (voir Exemple a) et les définitions (4.51) et (4.29):

$$\hat{q}_a \hat{q}_b = q_{ra} q_{rb} + (q_{ra} q_{db} + q_{da} q_{rb}) \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{On a : } \quad q_{ra} = [c, s, 0, 0] \quad q_{da} = [-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, +2cl, cd_z + sd_y + 2sl]$$

$$q_{rb} = [c, -s, 0, 0] \quad q_{db} = [sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, , cd_z + sd_y]$$

$$\hat{q}_1 \hat{q}_v \hat{q}_1^* = \hat{q}_a \hat{q}_b =$$

$$\left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, +2cl, cd_z + sd_y + 2sl) \right] \left[ (c, -s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, , cd_z + sd_y) \right] =$$

$$q_{ra} q_{rb} = (c^2 + s^2, -cs + cs, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (0, 0, 0, 0) +$$

$$q_{ra} q_{db} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} (cs d_x - sc d_x, c^2 d_x, c^2 d_y - csd_z, c^2 d_z + csd_y) + \frac{\varepsilon}{2} (0, s^2 d_x, 0, 0) +$$

$$\frac{\varepsilon}{2} (0, 0, -csd_z - s^2 d_y, csd_y - s^2 d_z) +$$

$$q_{da} q_{rb} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} (-cs d_x + sc d_x, c^2 d_x, c^2 d_y - csd_z + 2c^2 l, c^2 d_z + csd_y + 2csl) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} (0, s^2 d_x, 0, 0) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} (0, 0, -csd_z - s^2 d_y - 2s^2 l, csd_y - s^2 d_z - csd_y + 2csl) =$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon}{2} (0, 2d_x + 2d_y \cos \theta - 2d_z \sin \theta + 2l \cos \theta, 2d_y \sin \theta + 2d_z \cos \theta + 2l \sin \theta)$$

On trouve finalement en utilisant les lois trigonométriques d'usage :

$$\hat{q}_v' = \hat{q} = (1, (0, 0, 0)) + \varepsilon ((0, (x'i + y'j + z'k))) = (1, \varepsilon v')$$

Un vecteur dont la partie duale  $\hat{q}_d$  est donnée par :

$$\hat{q}_d = [0, (x', y', z')]$$

$$= [0, d_x, d_y \cos \theta - d_z \sin \theta + l \cos \theta, d_y \sin \theta + d_z \cos \theta + l \sin \theta] \quad (\text{b})$$

$$\hat{q}_v' = 1 + \varepsilon \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \cos \theta - d_z \sin \theta + l \cos \theta \\ d_y \sin \theta + d_z \cos \theta + l \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \cos \theta - d_z \sin \theta + l \cos \theta \\ d_y \sin \theta + d_z \cos \theta + l \sin \theta \end{pmatrix}$$

En utilisant le calcul matriciel (matrice de transformation  $[M_b]$ ) (méthode classique):

$$\begin{aligned} [M_b] = RT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & d_y \cos \theta - d_z \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & d_y \sin \theta + d_z \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M_b] \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & d_y \cos \theta - d_z \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & d_y \sin \theta + d_z \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \cos \theta - d_z \sin \theta + l \cos \theta \\ d_y \sin \theta + d_z \cos \theta + l \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarques : Les deux mouvements précédents appliqués à un solide quelconque sont des mouvements hélicoïdaux dont le pas  $p$  sera donné par :  $p = \frac{2\pi}{\theta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})$  (avec  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x = 1$  et  $\mathbf{t}$  = vecteur translation représenté par la dernière colonne de la matrice  $[M_a]$  ou  $[M_b]$ , chacun des deux axes sera déterminé par le système d'équation ( Voir paragraphe ( 4.3 )) :

$$\frac{\theta p}{2\pi} \mathbf{n} + (I - R(\theta, \mathbf{n})) \mathbf{u} = \mathbf{t} \quad (4.25)$$

Si  $d_x = 0$  : Les deux mouvements précédents seront toujours des mouvements hélicoïdaux dont le pas  $p$  sera nul ; ç-à-d deux rotations autour de l'axe Ox dans un plan parallèle au plan Oyz dont il faudra définir les coordonnées des deux différents centres.

## c) Mouvements Plans.

La même rotation  $R$  autour d'un centre  $C$  (un raccourci "short cut" pour: autour d'un axe passant par  $C$  et parallèle à l'axe de la rotation  $R$ ) .Voir figure (4.8)

En appliquant les résultats ou définitions (4.60) et (4.61) on a :

$$\hat{q} = T R T^{-1} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} T\right) R \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} T\right) = R - \frac{\varepsilon}{2} R T + \frac{\varepsilon}{2} T R = R + \frac{\varepsilon}{2} (T R - R T) \quad (4.68)$$

$(-T)$  est le déplacement ou la translation du point  $C$  vers l'origine du repère et  $(T)$  son inverse, (ce qui est équivalent à la technique de conjugaison  $T M T^{-1}$ ).

Cette transformation accepte un inverse :

$$: \quad R^* + \frac{\varepsilon}{2} (R^* T - T R^*) \quad (4.69)$$

Exemple c) Exemple similaire à a) et b);  $C$  un point  $\varepsilon$  plan  $(O, y, z)$ ;  $T = (d_x, d_y, d_z)^t$

On aura donc pour ce troisième quaternion dual  $\hat{q}_3$  qui va représenter la rotation autour de l'axe  $\vec{Cx} \parallel \vec{ox}$  :

$$\hat{q}_3 = R + \frac{\varepsilon}{2} (T R - R T) = (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} [(0, d_x, d_y, d_z)(c, s, 0, 0) - (c, s, 0, 0)(0, d_x, d_y, d_z)]$$

Les quantités  $TR$  et  $RT$  ayant été déjà déterminées pour  $\hat{q}_1$  et  $\hat{q}_2$  ;

$$\hat{q}_3 = \left[ (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} [(-sd_x, cd_x, cd_y + sd_z, cd_z - sd_y) - (-sd_x, cd_x, cd_y - sd_z, cd_z + sd_y)] \right]$$

$$\hat{q}_3 = [(c, s, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, sd_z, -sd_y)]$$

La rotation  $R$  d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Cx$  appliquée au vecteur  $\hat{q}_v =$

$[1 + \varepsilon(0, l, 0)]$  sera donnée par :

$$\hat{q}_v' = \hat{q}_3 \hat{q}_v \hat{q}_3^* =$$

$$[(c, s, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, sd_z, -sd_y)] [1 + \varepsilon(0, l, 0)] [(c, -s, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, sd_z, -sd_y)]$$

$$= [(c, s, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, d_z s + cl, -d_y s + sl)] [(c, -s, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, d_z s, -d_y s)]$$

$$\hat{q}_v' = 1 + \varepsilon(0, 0, l \cos \theta + d_z \sin \theta + 2s^2 d_y, l \sin \theta - d_y \sin \theta + 2s^2 d_z)$$

Et finalement en utilisant les identités trigonométriques usuelles ainsi que cette

dernière :  $2s^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos\theta$

On trouve :

$$\hat{q}_v' = 1 + \varepsilon(0,0, l\cos\theta + d_z\sin\theta + d_y - d_y\cos\theta, l\sin\theta - d_y\sin\theta + d_z - d_z\cos\theta)$$

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ l\cos\theta + d_z\sin\theta + d_y - d_y\cos\theta \\ l\sin\theta - d_y\sin\theta + d_z - d_z\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ce résultat est bien confirmé en utilisant le calcul matriciel classique (Technique de conjugation  $TMT^{-1}$ ): Translater le point  $C$  vers l'origine  $O$ , appliquer la rotation  $M = R$  et enfin redonner au point sa position initiale ;

$$[M_c]\vec{v} = TRT^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ l\cos\theta + d_z\sin\theta + d_y - d_y\cos\theta \\ l\sin\theta - d_y\sin\theta + d_z - d_z\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

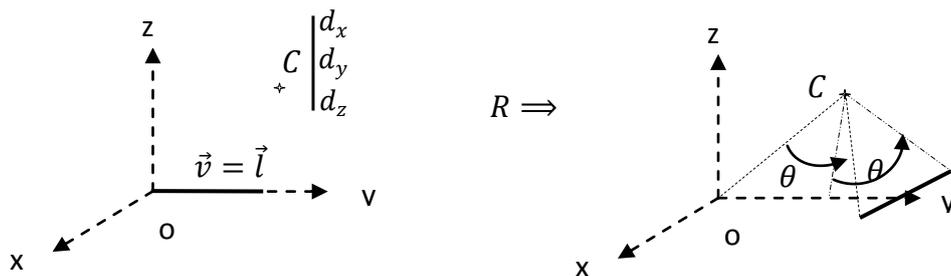


Figure 4.8: Rotation autour du centre  $C$

## 4.5.2 Applications générales : Mouvement Hélicoïdal (Screw Motion)

### 4.5.2.1 Manipulateurs Plans

Reconsidérant le manipulateur plan du chapitre II : (l'exemple (a) :

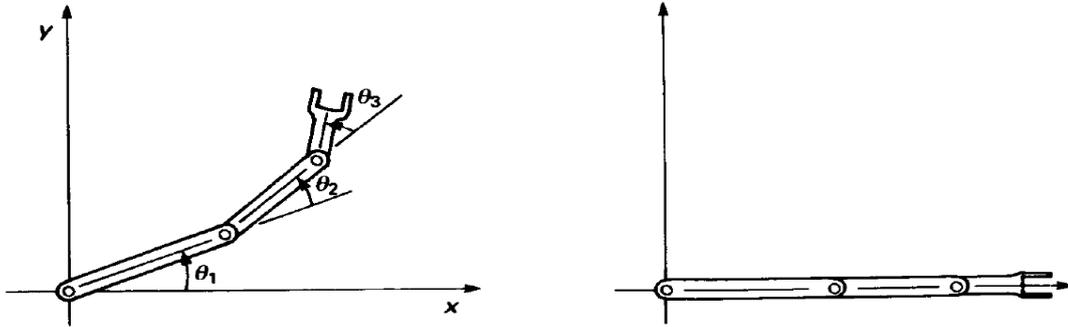


Fig .2.21 : Manipulateur RRR et sa position initiale.

Si l'on veut retrouver l'intégralité des résultats matriciels obtenus pour l'exemple (a) ( D-H ou technique de conjugation (chapitre II)); Le manipulateur devra subir trois rotations successives :

- $\theta_3$  autour de l'axe  $C_{3z}$  ( $C_3$  centre d'articulation) du troisième lien (ou segment),
- $\theta_2$  autour de l'axe  $C_{2z}$  ( $C_2$  centre d'articulation) du deuxième lien,
- $\theta_1$  autour de l'axe  $C_{1z}$  ( $C_1$  confondu avec l'origine O du repère Oxyz (ou l'articulation) du troisième lien).

L'équation 4.39 appliquée aux rotations (quaternions) peut se généraliser aux quaternions duaux :  $q'_v = p_R \otimes (q_R \otimes q_v \otimes q_R^{-1}) \otimes p_R^{-1}$  (4.39)

Application a): Le manipulateur est soumis successivement aux trois rotations autour de l'axe Oz ou de l'un de ces parallèles:

$$\hat{q}'_v = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{q}_3^* \bar{q}_2^* \bar{q}_1^* = \hat{q}_1 (\hat{q}_2 (\hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{q}_3^*) \bar{q}_2^*) \bar{q}_1^*$$

Le vecteur  $\hat{q}_v$  à manipuler est  $\hat{q}_v = 1 + \varepsilon ((a_1 + a_2 + a_3), 0, 0)$

Commençons par le DQ central pour en quelque sorte déployer ces multiplications :  $\hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{q}_3^*$

Pour la rotation d'angle  $\theta_3$  du troisième lien  $a_3$ , autour de l'axe  $C_{3z}$ :

La triple multiplication  $\mathbf{TRT}^{-1} = (\mathbf{T})(\mathbf{R})(-\mathbf{T})$  similaire à la technique de conjugaison ou l'utilisation du raccourci (4.68) nous permet d'écrire le quaternion dual  $\hat{q}_3$  :

$$\hat{q}_3 = R_3 + \frac{\varepsilon}{2} (T_3 R_3 - R_3 T_3)$$

Avec :  $R_3 = (\cos \frac{\theta_3}{2}, \sin \frac{\theta_3}{2} (0,0,1))$  et  $T_3 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} ((a_1 + a_2), 0, 0)$

Pour alléger les écritures, adoptons  $c_3$  et  $s_3$  à la place de  $\cos \frac{\theta_3}{2}$  et  $\sin \frac{\theta_3}{2}$  respectivement :

$$T_3 R_3 = [1 + \frac{\varepsilon}{2} ((a_1 + a_2), 0, 0)] (c_3, 0, 0, s_3) = (c_3, 0, 0, s_3) + \frac{\varepsilon}{2} (c_3(a_1 + a_2), -s_3(a_1 + a_2), 0)$$

$$R_3 T_3 = (c_3, 0, 0, s_3) [1 + \frac{\varepsilon}{2} ((a_1 + a_2), 0, 0)] = (c_3, 0, 0, s_3) + \frac{\varepsilon}{2} (c_3(a_1 + a_2), s_3(a_1 + a_2), 0)$$

$$\text{Alors } \hat{q}_3 = (c_3, 0, 0, s_3) + \varepsilon (0, -s_3(a_1 + a_2), 0)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_3^* &= [(c_3, 0, 0, s_3) + \varepsilon (0, -s_3(a_1 + a_2), 0)] (1 + \varepsilon ((a_1 + a_2 + a_3), 0, 0)) \\ &[(c_3, 0, 0, -s_3) + \varepsilon (0, -s_3(a_1 + a_2), 0)] = \\ &[(c_3, 0, 0, s_3) + \varepsilon (0, -s_3(a_1 + a_2), 0) + \varepsilon (c_3(a_1 + a_2 + a_3), 0, 0) + \varepsilon (0, s_3(a_1 + a_2 + a_3), 0)] \bar{\hat{q}}_3^* = \\ &[(c_3, 0, 0, s_3) + \varepsilon (c_3(a_1 + a_2 + a_3), s_3 a_3, 0)] [(c_3, 0, 0, -s_3) + \varepsilon (0, -s_3(a_1 + a_2), 0)] = \\ &1 + \varepsilon (0, -c_3 s_3(a_1 + a_2), 0) + \varepsilon (s_3^2(a_1 + a_2), 0, 0) + \\ &\varepsilon (c_3^2(a_1 + a_2 + a_3), c_3 s_3 a_3, 0), c_3 s_3 a_3, 0) + \varepsilon (-s_3^2 a_3, c_3 s_3(a_1 + a_2 + a_3), 0) = \\ &1 + \varepsilon (a_1 + a_2 + a_3(c_3^2 - s_3^2), 2 c_3 s_3 a_3, 0) = \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant les fonctions et propriétés trigonométriques d'usage on trouve le vecteur résultat de cette première transformation :

$$1 + \varepsilon (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3, 0)$$

Pour la deuxième rotation d'angle  $\theta_2$  du deuxième lien  $a_2$ , autour de l'axe  $C_2Z$ :

En utilisant la même procédure ou le raccourci (4.68) on peut écrire le quaternion dual  $\hat{q}_2$  :

$$\hat{q}_2 = [(c_2, 0, 0, s_2) + \varepsilon (0, -s_2 a_1, 0)]$$

qui sera appliqué au vecteur résultat précédent:

$$1 + \varepsilon (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3, 0) = 1 + \varepsilon (x, y, 0)$$

On aura;

$$\begin{aligned}
& [(c_2, 0, 0, s_2) + \varepsilon(0, -s_2 a_1, 0)] [1 + \varepsilon(x, y, 0)] [(c_2, 0, 0, -s_2) + \varepsilon(0, -s_2 a_1, 0)] \\
& = \\
& [(c_2, 0, 0, s_2) + \varepsilon(0, -s_2 a_1, 0) + \varepsilon(c_2 x, c_2 y, 0) + \varepsilon(-s_2 y, s_2 x, 0)]. \\
& [(c_2, 0, 0, -s_2) + \varepsilon(0, -s_2 a_1, 0)] = \\
& 1 + \varepsilon(0, -c_2 s_2 a_1, 0) + \varepsilon(s_2^2 a_1, 0, 0) + \varepsilon(c_2^2 x - c_2 s_2 y, -c_2 s_2 a_1 + c_2^2 y + c_2 s_2 x, \\
& 0) + \\
& \varepsilon(s_2^2 a_1 - c_2 s_2 y - s_2^2 x, c_2 s_2 x - s_2^2 y, 0) = \\
& 1 + \varepsilon(2 s_2^2 a_1 - 2 c_2 s_2 y + (c_2^2 - s_2^2)x, -2 c_2 s_2 a_1 + (c_2^2 - s_2^2)y + 2 c_2 s_2 x, 0) = \\
& 1 + \varepsilon((1 - \cos \theta_2) a_1 - \sin \theta_2 y + \cos \theta_2 x, -a_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 y + \sin \theta_2 x, 0) =
\end{aligned}$$

Et enfin en remplaçant x et y par leurs valeurs:

$$\begin{aligned}
(x, y, 0)^t &= (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3, 0)^t \\
1 + \varepsilon &((1 - \cos \theta_2) a_1 - \sin \theta_2 a_3 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3), \\
& -a_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 a_3 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 (a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3), 0) = \\
1 + \varepsilon &(a_1 - \cos \theta_2 a_1 + a_3 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) + \cos \theta_2 a_1 + \cos \theta_2 a_2, \\
& -a_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_2 a_2 + a_3 (\cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_1 \sin \theta_2, 0) = \\
1 + \varepsilon &(a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3), a_2 \sin \theta_2 + a_3 (\sin \theta_2 + \theta_3), 0)
\end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées du vecteur résultat suite à cette transformation seront:

$$(x, y, 0)^t = (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3), a_2 \sin \theta_2 + a_3 (\sin \theta_2 + \theta_3), 0)^t$$

Le dernier mouvement accompli par le manipulateur est une simple rotation autour de l'axe Oz d'amplitude ( $\theta_1$ ) appliquée au vecteur résultat précédent ;

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1 &= (c_1, 0, 0, s_1) [1 + \varepsilon(x, y, 0)] (c_1, 0, 0, -s_1) = \\
& [(c_1, 0, 0, s_1) + \varepsilon(c_1 x, c_1 y, 0) + \varepsilon(-s_1 y, s_1 x, 0)] (c_1, 0, 0, -s_1) = \\
& [(c_1, 0, 0, s_1) + \varepsilon(c_1 x - s_1 y, c_1 y + s_1 x, 0) + \varepsilon(-s_1 y, s_1 x, 0)] (c_1, 0, 0, -s_1) = \\
& 1 + \varepsilon(c_1^2 x - c_1 s_1 y, +c_1^2 y + c_1 s_1 x, 0) + \varepsilon(-c_1 s_1 y - s_1^2 x, c_1 s_1 x - s_1^2 y, 0) = \\
& 1 + \varepsilon[-2 c_1 s_1 y + (c_1^2 - s_1^2)x, (c_1^2 - s_1^2)y + 2 c_1 s_1 x, 0] =
\end{aligned}$$

$$1 + \varepsilon (-\sin \theta_1 y + \cos \theta_1 x, \cos \theta_1 y + \sin \theta_1 x, 0) =$$

Et enfin en remplaçant x et y par leurs valeurs (celles du résultat précédent):

$$(x, y, 0)^t = (a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3), a_2 \sin \theta_2 + a_3 (\sin \theta_2 + \theta_3), 0)^t$$

On trouve le vecteur résultat final après les trois rotations successives:

$$X = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad \text{et}$$

$$Y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$Z = 0$$

Ainsi on retrouve l'intégralité des résultats matriciels obtenus pour l'exemple (a) (par la méthode de D-H ou la technique de conjugaison matricielle (chapitre II)).

Application b): Toujours en utilisant l'équation (4.68), supposons que les rotations des trois liens se font autour de l'axe des x et que leurs mouvements se font dans le plan Oyz;

Le manipulateur est soumis successivement aux trois rotations autour de l'axe Ox ou de l'un de ces parallèles :

$$\hat{q}_v' = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{q}_3^* \bar{q}_2^* \bar{q}_1^* = \hat{q}_1 (\hat{q}_2 (\hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{q}_3^*) \bar{q}_2^*) \bar{q}_1^*$$

Le vecteur  $\hat{q}_v$  à manipuler est  $\hat{q}_v = 1 + \varepsilon (0, (a_1 + a_2 + a_3), 0)$

Commençons par le DQ central :  $\hat{q}_3 \hat{q}_v \bar{q}_3^*$

Pour la rotation d'angle  $\theta_3$  du troisième lien  $a_3$ , autour de l'axe  $C_3x$  l'équation (4.68) procure :

$$[(\cos \frac{\theta_3}{2}, \sin \frac{\theta_3}{2} (1,0,0)) + \varepsilon(0, 0, -\sin \frac{\theta_3}{2} (a_1 + a_2))][1 + \varepsilon(0, a_1 + a_2 + a_3, 0)]$$

$$[(\cos \frac{\theta_3}{2}, -\sin \frac{\theta_3}{2} (1,0,0)) + \varepsilon(0, 0, -\sin \frac{\theta_3}{2} (a_1 + a_2))] =$$

$$[(c_3, s_3, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_3(a_1 + a_2))][1 + \varepsilon(0, a_1 + a_2 + a_3, 0)].$$

$$[(c_3, -s_3, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_3(a_1 + a_2))] =$$

$$[(c_3, s_3, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_3(a_1 + a_2) + \varepsilon(0, c_3(a_1 + a_2 + a_3), 0) + \varepsilon(0, 0, s_3(a_1 + a_2 + a_3))].$$

$$[(c_3, -s_3, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_3(a_1 + a_2))] =$$

$$[(c_3, s_3, 0, 0) + \varepsilon(0, c_3(a_1 + a_2 + a_3), s_3 a_3)] [(c_3, -s_3, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_3(a_1 + a_2))] =$$

$$1 + \varepsilon((0, 0, -c_3 s_3(a_1 + a_2) + \varepsilon(0, s_3^2(a_1 + a_2), 0) + \varepsilon(0, c_3^2(a_1 + a_2 + a_3), c_3 s_3 a_3) +$$

$$\varepsilon(0, -s_3^2 a_3, c_3 s_3(a_1 + a_2 + a_3)))$$

Et finalement en utilisant les opérations trigonométriques usuelles on retrouve la position du manipulateur résultat de cette première manipulation : Ce qui est équivalent au vecteur position :  $(0, a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3, a_3 \sin \theta_3)^T$ . Concernant la deuxième rotation d'angle  $\theta_2$ , du deuxième lien  $a_2$  autour de son axe d'articulation  $C_2 x$  dont la position est  $(0, a_1, 0)^T$  et en utilisant l'équation (4.68) :

$$[(c_2, s_2, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_2 a_1)] [1 + \varepsilon(0, y, z)].$$

$$[(c_2, -s_2, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_2 a_1)] =$$

appliquée au vecteur résultat précédent:  $y = a_1 + a_2 + a_3 \cos \theta_3$ ,  $z = a_3 \sin \theta_3$

on a :

$$[(c_2, s_2, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_2 a_1) + \varepsilon(0, c_2 y, c_2 z) + \varepsilon(0, -s_2 z, s_2 y)] [(c_2, -s_2, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_2 a_1)] = [(c_2, s_2, 0, 0) + \varepsilon(0, c_2 y - s_2 z, c_2 z + s_2 y - s_2 a_1)] [(c_2, -s_2, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, -s_2 a_1)] =$$

$$1 + \varepsilon(0, 0, -c_2 s_2 a_1) + \varepsilon(0, s_2^2 a_1, 0) + \varepsilon(0, c_2^2 y - c_2 s_2 z, c_2^2 z + c_2 s_2 y - c_2 s_2 a_1) + \varepsilon(0, -s_2^2 y - c_2 s_2 z + s_2^2 a_1, c_2 s_2 y - s_2^2 z) =$$

$$1 + \varepsilon(0, 2s_2^2 a_1 + (c_2^2 - s_2^2)y - 2c_2 s_2 z, -2c_2 s_2 y a_1 + 2c_2 s_2 y + (c_2^2 - s_2^2)z)$$

Les identités trigonométriques d'usage nous permettent d'écrire :

$$1 + \varepsilon(0, (1 - \cos \theta_2) a_1 + y \cos \theta_2 - z \sin \theta_2, -a_1 \sin \theta_2 + y \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)$$

Et enfin en remplaçant y et z par leur valeurs on obtient :

$$1 + \varepsilon(0, a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3), a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin (\theta_2 + \theta_3))$$

La nouvelle position du manipulateur après cette deuxième manipulation est déterminée par le vecteur position :

$$(0, a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3), a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin (\theta_2 + \theta_3))$$

Le dernier mouvement accompli par le manipulateur est une simple rotation autour de l'axe Ox d'amplitude ( $\theta_1$ ) appliquée au vecteur résultat précédent ;

$$y = a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3) \text{ et } z = a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin (\theta_2 + \theta_3)$$

$$[(c_1, s_1, 0, 0)][1 + \varepsilon(0, y, z)][(c_1, -s_1, 0, 0)] =$$

$$[(c_1, s_1, 0, 0) + \varepsilon(0, c_1 y - s_1 z, c_1 z + s_1 y)] [(c_1, -s_1, 0, 0)] =$$

$$1 + \varepsilon(0, c_1^2 y - c_1 s_1 z, c_1^2 z + c_1 s_1 y) + \varepsilon(0, -c_1 s_1 z, c_1 s_1 y - s_1^2 z) =$$

$$1 + \varepsilon(0, c_1^2 y - s_1^2 y - 2c_1 s_1 z, c_1^2 z - s_1^2 z + 2c_1 s_1 y) =$$

$$1 + \varepsilon(0, y \cos \theta_1 - z \sin \theta_1, z \cos \theta_1 + y \sin \theta_1) = 1 + \varepsilon(X, Y, Z)$$

Et finalement en remplaçant y et z par leur valeurs, on trouve le quaternion dual représentant la position finale du manipulateur après les trois rotations successives :

$$X = 0$$

$$Y = [a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1 - [a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin (\theta_2 + \theta_3)]$$

$$\sin \theta_1 = a_1 \cos \theta_1 + a_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + a_3 (\cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) - a_3 \sin \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3)) = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$Z = [a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin (\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1 + [a_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos (\theta_2 + \theta_3)]$$

$$\sin \theta_1 = a_1 \sin \theta_1 + a_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) + a_3 (\cos \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3) + \sin \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3)) = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Remarques Importantes:

- Il est simple et trivial d'en déduire, grâce à l'interprétation géométrique des deux premiers cas traités, les résultats pour le troisième cas:

Application a): Rotations autour de l'axe (z), vecteur à manipuler suivant l'axe (x) ce qui induira une conjugaison  $\mathbf{TRT}^{-1}$  suivant l'axe (-y), et le vecteur résultat est suivant les deux axes (x) et (y).

Application b): Rotations autour de l'axe (x), vecteur à manipuler suivant l'axe (y) ce qui induira une conjugaison  $\mathbf{TRT}^{-1}$  suivant l'axe (-z), et le vecteur résultat est suivant les deux axes (y) et (z).

Application c) (ou troisième cas): Rotations autour de l'axe (y), vecteur à manipuler suivant l'axe (z) ce qui induira une conjugaison  $\mathbf{TRT}^{-1}$  suivant l'axe (-x), et le vecteur résultat sera suivant les deux axes (z) et (x).

Ce travail a fait l'objet d'une publication [48] ; Utilisation des DQ pour l'étude cinématique d'un manipulateur et d'un robot PUMA.

Cette même technique pourra être facilement généralisée dans un prochain futur à la publication faite à INTECH; Kinematic Modelling and Simulation of a 2-R Robot Using SolidWorks and Verification by MATLAB/Simulink . [49]

Elle pourra certainement être utilisée pour la majorité des manipulateurs existants sur le marché.

#### 4.5.2.2 : MOUVEMENT HELICOÏDAL

La modélisation du mouvement du corps rigide par la théorie de l'axe hélicoïdal (une combinaison d'une quantité de rotation autour et d'une quantité de translation le long d'un certain axe, d'où l'appellation d'axe hélicoïdal) est utilisée dans différents domaines tel que la vision par ordinateur et la biomécanique (mécanique appliquée à l'étude des systèmes biologiques). L'application de cette théorie dans le domaine de la robotique prend de plus en plus de place. On peut considérer le mouvement d'un segment articulaire comme une série de déplacements finis. Dans ce cas le mouvement est caractérisé par un angle de rotation autour et une quantité de translation le long d'un axe défini dans l'espace par sa position et son orientation. Cet axe est dénommé axe hélicoïdal fini (AHF), à cause de la discrétisation du mouvement en une série de déplacements. Par contre en prenant la continuité du mouvement en considération, ce mouvement sera caractérisé par une vitesse de rotation (vitesse angulaire) autour et une vitesse de translation le long d'un axe défini par sa position et son orientation

instantanées dans l'espace. On parle dans ce cas-ci d'un axe hélicoïdal instantané (AHI).

L'application de la théorie hélicoïdale avec ses deux versions (AHF et AHI) sert à décrire et comprendre les mouvements articulaires, et pour étudier en biomécanique, par exemple, les différentes techniques de positionnement des prothèses. Ainsi il existe plusieurs méthodes pour estimer l'axe hélicoïdal à partir d'un ensemble de points représentant un corps rigide.

Tout déplacement général d'un corps rigide est un mouvement hélicoïdal qui peut être décomposé en un déplacement angulaire de rotation autour et en un déplacement linéaire de translation le long d'un certain axe dans l'espace 3D. Les méthodes diffèrent dans la façon de représenter mathématiquement ces deux déplacements. Ces déplacements seront exprimés par des matrices de rotation et des vecteurs de translation, des matrices homogènes, des quaternions unitaires, des quaternions duaux, ...

Afin de simplifier ce mouvement, on va énumérer cinq types de mouvements hélicoïdaux en commençant par le plus simple, évident, trivial ou le plus familier en donnant pour chaque type des exemples pratiques.

i) Mouvement hélicoïdal élémentaire à travers l'origine O des axes:

Les matrices (4x4) standard ou les mouvements hélicoïdaux élémentaires décrits par des rotations autour, suivies par des translations le long, des axes principaux OZ, OY et OX, sont successivement:

$$[\mathbf{M}(\theta, k, t_z)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{M}(\theta, j, t_y)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$[\mathbf{M}(\theta, i, t_x)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les quaternions duaux qui décrivent ces mêmes mouvements (transformations rigides) correspondants sont successivement: Voir (4.63) et (4.64)

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon = q_R + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \otimes q_R = R + \varepsilon \frac{TR}{2}$$

Concernant l'axe Oz ;

$$\begin{aligned} \hat{q}_z &= [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] + \frac{\varepsilon}{2}(0, 0, t_z) \cdot [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] = \\ &[\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] + \frac{\varepsilon}{2}(-\sin(\frac{\theta}{2})t_z, 0, 0, \cos(\frac{\theta}{2})t_z) \end{aligned}$$

Ou en utilisant une écriture plus simple:

$$(4.70) \left\{ \begin{array}{l} \hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2}(-st_z, 0, 0, ct_z) \\ \text{Pour le mouvement autour de Oy :} \\ \hat{q}_y = (c, 0, s, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-st_y, 0, ct_y, 0) \\ \text{Et pour le mouvement hélicoïdal élémentaire autour et le long de Ox :} \\ \hat{q}_x = (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-st_x, ct_x, 0, 0) \end{array} \right.$$

Choisissons le premier mouvement, et soient une rotation autour de Oz suivie ou précédée d'une translation  $t_z$  (il est vérifié, pour ces trois cas de mouvement que les produits sont commutatifs) appliquées au vecteur  $\vec{v} = (x, y, z)^t$

Le calcul matriciel nous donne:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Application numérique : Soient une rotation autour de Oz d'angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , suivie ou précédée d'une translation  $t_z$  appliquées au vecteur  $\vec{v} = (x, y, z)^t$  :

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

On peut remarquer que le vecteur  $\vec{v}$  et ainsi tout solide rigide (S) subit sous l'action de cette transformation rigide une rotation autour de Oz d'angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , suivie ou précédée d'une translation  $t_z$ ; ou un mouvement hélicoïdal élémentaire autour et le long de Oz ou un 'vissage' autour et le long de Oz, de pas

$$p = \frac{2\pi}{\theta} t_z = 4 t_z$$

Les DQ nous donnent ces mêmes résultats; en effet:

$\hat{q}_v' = \hat{q}_z \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_z^*$  avec :  $\hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, 0, 0, ct_z)$  appliqué à un vecteur quelconque  $\hat{q}_v$ ;

$$\hat{q}_v = [1 + \varepsilon (0, x, y, z)]$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_z \hat{q}_v &= [(c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, 0, 0, ct_z)]. [1 + \varepsilon (0, x, y, z)] \\ &= [(c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, 0, 0, ct_z) + \varepsilon (0, cx, cy, cz) + \\ &\quad \varepsilon (-sz, -sy, sx, cz)] \\ &= [(c, 0, 0, s) + \varepsilon (-\frac{st_z}{2} - sz, cx - sy, cy + sx, \frac{ct_z}{2} + cz)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_v' = \hat{q}_z \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_z^* &= [(c, 0, 0, s) + \varepsilon (-s(\frac{t_z}{2} + z), cx - sy, cy + sx, c(\frac{t_z}{2} + z))] \cdot \\ &\quad [ (c, 0, 0, -s) + \varepsilon (\frac{st_z}{2}, 0, 0, \frac{ct_z}{2}) ] \\ &= 1 + \varepsilon (\frac{cst_z}{2} - \frac{cst_z}{2}, 0, 0, c^2 \frac{t_z}{2} + s^2 \frac{t_z}{2}) + \\ &\quad + \varepsilon (-sc(\frac{t_z}{2} + z) + sc(\frac{t_z}{2} + z), c^2x - csy, c^2y + csx, c^2(\frac{t_z}{2} + z) + s^2(\frac{t_z}{2} + z)) \\ &\quad + \varepsilon (0, -s^2x - csy, csx - s^2y) \\ &= 1 + \varepsilon (0, (c^2 - s^2)x - 2csy, 2csx + (c^2 - s^2)y, \frac{t_z}{2} + (\frac{t_z}{2} + z)) \\ &= 1 + \varepsilon (0, (c^2 - s^2)x - 2csy, 2csx + (c^2 - s^2)y, \frac{t_z}{2} + (\frac{t_z}{2} + z)) = \end{aligned}$$

En utilisant les identités trigonométriques connues:

$$\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}) = \cos(\theta)$$

$$2 \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) = \sin(\theta)$$

On trouve :  $\hat{q}_v' = 1 + \varepsilon(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z + t_z)$

Ou le vecteur:  $v' (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z + t_z)^t$

ii) Mouvement hélicoïdal élémentaire centré:

Les matrices (4x4) standard ou les mouvements hélicoïdaux élémentaires décrits par des rotations autour des axes  $C_1Z$ ,  $C_2Y$  et  $C_3X$ , suivies par un vecteur translation  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$ , sont successivement:

$$[M(\theta, k, \vec{t})] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[M(\theta, j, \vec{t})] = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$[M(\theta, i, \vec{t})] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & t_y \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Choisissons le premier mouvement, et soient une rotation autour de Oz suivie d'une translation  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$  appliquées au vecteur  $\vec{v} = (x, y, z)^t$

$$[M(\theta, k, \vec{t})] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{t} = (0, 0, t_z)^t$ ; Cela implique un mouvement hélicoïdal élémentaire (de type i) établi plus haut autour et le long de Oz ou un 'vissage' autour et le long de Oz, de pas  $p = \frac{2\pi}{\theta} t_z$

La technique de conjugaison  $\mathbf{TMT}^{-1}$  nous permet de définir les coordonnées  $(x, y, z)$  du centre  $C_1$  du mouvement:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & -z + t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 & -z + t_z + z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La conjugaison doit aboutir et être identique à la matrice

$$[M(\theta, k, \vec{t})] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification terme à terme la solution, quelle que soit la valeur de z, se résume à un système de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{cases} -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ t_z \end{cases} = \begin{cases} t_x \\ t_y \\ t_z \end{cases}$$

Dont les solutions sont: 
$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} \frac{(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall z \end{cases}$$

C'est donc un mouvement hélicoïdal élémentaire, autour et le long, de l'axe  $C_1Z$  parallèle à  $OZ$  de pas  $p = \frac{2\pi}{\theta} t_z$  dont le centre  $C_1$  appartiendra au plan  $(OX,OY)$  ; pour la solution particulière  $z = 0$  il aura pour coordonnées :

$$\left( \frac{(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)}, \frac{(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)}, 0 \right)^t$$

On pourra facilement vérifier que cet axe reste inchangé par cette transformation:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_X \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_Y \\ 0 & 0 & 1 & t_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{(1-\cos\theta)t_X - \sin\theta t_Y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{(1-\cos\theta)t_Y + \sin\theta t_X}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall Z \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(1-\cos\theta)t_X - \sin\theta t_Y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{(1-\cos\theta)t_Y + \sin\theta t_X}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall Z + t_Z \\ 1 \end{cases}$$

Cela peut être généralisé aux deux autres mouvements restants  $[M(\theta, j, \vec{t})]$  et  $[M(\theta, i, \vec{t})]$

Application numérique : Soient une rotation autour de Oz d'amplitude  $\theta = \pi$ , suivie d'une translation  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$  appliquées au centre de rotation du mouvement  $C_1$  donné par le vecteur:

$$\vec{v} = \left(\frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, z\right)^t.$$

L'abscisse et l'ordonnée de cet axe resteront inchangées par la transformation, quant à sa dernière coordonnée z elle aura la liberté de translater la quantité  $t_z$  le long de l'axe de rotation  $C_{1z}$  illustrant un exemple de mouvement hélicoïdal centré ;

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & t_X \\ 0 & -1 & 0 & t_Y \\ 0 & 0 & 1 & t_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t_x}{2} \\ \frac{t_y}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_x}{2} \\ \frac{t_y}{2} \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ce qu'il faut remarquer : Ce mouvement hélicoïdal d'axe  $C_{1z}$  aura un pas  $p = 2t_z$  ; Les deux translations  $t_x$  et  $t_y$  ne servent qu'à dévier ou à déplacer l'axe initial Oz vers son nouvel emplacement  $C_{1z}$  parallèle à Oz, décrit plus haut, tout en permettant une liberté de translation  $t_z$  le long de cet axe.

On peut vérifier ces résultats en utilisant les quaternions duaux:

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon = q_R + \frac{\varepsilon}{2}(t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \otimes q_R = R + \varepsilon \frac{TR}{2}$$

Autour de l'axe Oz ;

$$\begin{aligned}\hat{q}_z &= [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] + \frac{\varepsilon}{2}(t_x, t_y, t_z) \cdot [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] \\ &= [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] + \frac{\varepsilon}{2}(-\sin(\frac{\theta}{2})t_z, \cos(\frac{\theta}{2})t_x, \cos(\frac{\theta}{2})t_y, \cos(\frac{\theta}{2})t_z) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}(0, \sin(\frac{\theta}{2})t_y, -\sin(\frac{\theta}{2})t_x, 0) =\end{aligned}$$

Ou en utilisant une écriture plus simple:

$$(4.71) \left\{ \begin{array}{l} \hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2}(-st_z, ct_x + st_y, ct_y - st_x, ct_z) \\ \quad \text{Autour de l'axe Ox;} \\ \hat{q}_x = (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-st_x, ct_x, ct_y + st_z, ct_z - st_y) \\ \quad \text{Et autour de l'axe Oy} \\ \hat{q}_y = (c, 0, s, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(-st_y, ct_x - st_z, ct_y, ct_z + st_x) \end{array} \right.$$

Concernant notre application numérique  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ ;

La transformation va s'écrire :

$$\hat{q}_z = (0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2}(-t_z, t_y, -t_x, 0)$$

Elle va s'appliquer au vecteur  $\hat{q}_v$ , représentant le centre de rotation du mouvement considéré tel que :

$$\begin{aligned}\hat{q}_v &= [1 + \varepsilon(0, \frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, z)] \\ \hat{q}_z \hat{q}_v &= [(0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2}(-t_z, t_y, -t_x, 0)] \cdot [1 + \varepsilon(0, \frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, z)] \\ &= (0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2}(-t_z, t_y, -t_x, 0) + \varepsilon(-z, -\frac{t_y}{2}, \frac{t_x}{2}, 0) = (0, 0, 0, 1) \\ &\quad + \varepsilon(-\frac{t_z}{2} - z, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

On aura finalement le résultat:

$$\begin{aligned}\hat{q}_v' &= \hat{q}_z \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_z^* = [(0, 0, 0, 1) + \varepsilon(-\frac{t_z}{2} - z, 0, 0, 0)] \cdot [(0, 0, 0, -1) + \varepsilon(\frac{t_z}{2}, \frac{t_y}{2}, \\ &\quad -\frac{t_x}{2}, 0)] = 1 + \varepsilon(0, 0, 0, \frac{t_z}{2}) + \varepsilon(0, \frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, 0) + \varepsilon(0, 0, 0, \frac{t_z}{2} + z) + \varepsilon(0, 0, 0, \\ &\quad 0) = 1 + \varepsilon(0, \frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, t_z + z)\end{aligned}$$

Conforme au résultat matriciel (déterminé plus haut).

**NOTE IMPORTANTE:**

Les deux écritures; matricielle et quaternion dual, ont été et seront simultanément utilisées dans toutes les applications et exemples étudiés, pour ainsi permettre une comparaison entre les écritures et les résultats obtenus pour chaque cas de figure.

A ce niveau on pourrait rétorquer que nos DQ ne nous permettent que de vérifier et donc confirmer les résultats donnés par les classiques (4x4) matrices et surtout ceux concernant la nouvelle position (l'emplacement) de l'axe de rotation ou l'axe du mouvement hélicoïdal.

Serions-nous, alors, toujours tributaires (ou peut être condamnés à l'être ) du calcul matriciel et en particulier de la technique de conjugaison ?

Il n'en sera nullement question !

Les quaternions duaux possèdent deux écritures donc deux lectures complémentaires et simultanées: La première est la description de type « **produit** » et est donc celle utilisée depuis le début.

En effet une transformation générale, de type vis, peut être aussi décrite avec les angles duaux et les vecteurs duaux est avoir donc la forme suivante (type « **dual** »). Voir Appendice C pour plus de détails :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\hat{\theta}}{2}, \sin \frac{\hat{\theta}}{2} \cdot \hat{w} \right\} = \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\} \quad (4.72)$$

Elle est définie par l'angle dual  $\hat{\theta}$  et le vecteur dual  $\hat{w}$ , la rotation étant présentée par l'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  de module 1, et la translation  $d$  suivant le même vecteur  $\mathbf{n}$ .

Le vecteur  $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$  donne le moment du vecteur  $\mathbf{n}$  par rapport à l'origine du repère  $(O, x, y, z)$ ; il est nommé *le moment de l'axe  $\mathbf{n}$* , avec :

$$\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d,$$

$d$  étant l'amplitude de la translation le long du vecteur dual  $\hat{w} = \mathbf{n} + \varepsilon \cdot \mathbf{m}$  et  $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{n}$  le vecteur qui définit  $\mathbf{n}$  selon les coordonnées de Plücker,  $\mathbf{p}$  étant le vecteur qui donne la position de  $\mathbf{n}$  à l'aide du vecteur  $\mathbf{OO}_1$  (voir Figure 4.9). Les paramètres de la transformation, l'angle  $\theta$ , l'axe de la rotation  $\mathbf{n}$ , l'amplitude de la translation  $d$  et le moment  $\mathbf{m}$  sont les quatre caractéristiques de la transformation.

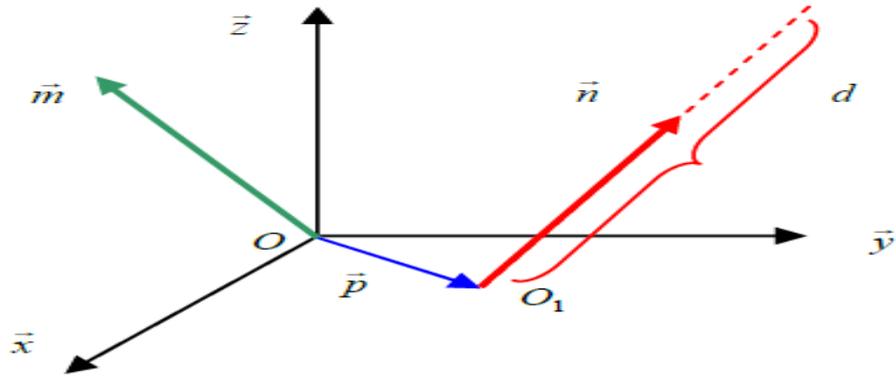


Figure 4.9: Mouvement hélicoïdal

Notons que cette forme ressemble à celle utilisée pour les quaternions simples mais en utilisant l'angle dual et le vecteur dual unitaire.

Mouvement hélicoïdal de type i):

$$(4.70) \begin{cases} \text{Autour de Oz ; } \hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\epsilon}{2} (-st_z, 0, 0, ct_z) \\ \text{Autour de Oy ; } \hat{q}_y = (c, 0, s, 0) + \frac{\epsilon}{2} (-st_y, 0, ct_y, 0) \\ \text{Autour de Ox ; } \hat{q}_x = (c, s, 0, 0) + \frac{\epsilon}{2} (-st_x, ct_x, 0, 0) \end{cases}$$

Ces trois mouvements (standard) de base, en utilisant l'équation (4.72), s'écriront tous de la même façon :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\hat{\theta}}{2}, \sin \frac{\hat{\theta}}{2} \cdot \hat{w} \right\} = \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \epsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\}$$

Toutes les translations  $t_i$  se font le long des mêmes axes  $\mathbf{n}_i = \mathbf{1}$  ; elles auront la forme  $d$  le long du vecteur dual  $\hat{w} = \mathbf{1} + \cdot \mathbf{0}$ , passant par O donc de moment  $\mathbf{m}$  nul ;

$$\left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{1} \right\} + \epsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{0} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{1} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\} \quad (4.72i)$$

Mouvement hélicoïdal de type ii):

$$(4.71) \begin{cases} \text{Autour de l'axe Oz ; } \hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, ct_x + st_y, ct_y - st_x, ct_z) \\ \text{Autour de l'axe Ox ; } \hat{q}_x = (c, s, 0, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_x, ct_x, ct_y + st_z, ct_z - st_y) \\ \text{autour de l'axe Oy ; } \hat{q}_y = (c, 0, s, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_y, ct_x - st_z, ct_y, ct_z + st_x) \end{cases}$$

Ces trois mouvements (standard) de base, et en utilisant l'équation (4.71), s'écriront tous de la même manière :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \hat{w} \right\} = \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\}$$

Comme pour les mouvements de type i) on reconnaît successivement les translations de type  $d$  qui se font le long des axes de rotation ;

$$\mathbf{n}_z = \mathbf{1}, \mathbf{n}_x = \mathbf{1}, \text{ et } \mathbf{n}_y = \mathbf{1},$$

$$\left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{1} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\} \quad (4.72ii)$$

Le vecteur  $\mathbf{m}$  va complètement déterminer les coordonnées du point  $O_1$ , origine du nouvel emplacement de l'axe hélicoïdal ( de rotation) :

$$\text{Autour de l'axe Oz ; } \hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, ct_x + st_y, ct_y - st_x, ct_z)$$

$$\mathbf{m} = \begin{cases} \frac{\cos \frac{\theta}{2} t_x + \sin \frac{\theta}{2} t_y}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ \frac{\cos \frac{\theta}{2} t_y - \sin \frac{\theta}{2} t_x}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ 0 \\ 1 \end{cases} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ce qui implique : } X = \frac{\sin \frac{\theta}{2} t_x - \cos \frac{\theta}{2} t_y}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad Y = \frac{\cos \frac{\theta}{2} t_x + \sin \frac{\theta}{2} t_y}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } Z = Z \text{ ou}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin \frac{\theta}{2} t_x - \cos \frac{\theta}{2} t_y}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ \frac{\cos \frac{\theta}{2} t_x + \sin \frac{\theta}{2} t_y}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ Z \\ 1 \end{cases}$$

Résultat similaire au vecteur défini par la technique de conjugaison  $\mathbf{TMT}^{-1}$  dont les coordonnées  $(x, y, z)$  du centre  $C_1$  du mouvement établies précédemment sont:

$$\begin{cases} \frac{(1 - \cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1 - \cos\theta)} \\ \frac{(1 - \cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1 - \cos\theta)} \\ z \\ 1 \end{cases}$$

Concernant notre application numérique  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$  ;

La transformation va s'écrire :

$$\hat{q}_z = (0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2} (-t_z, t_y, -t_x, 0)$$

Et donc les coordonnées de  $O_1$  (appelé  $C_1$  ultérieurement) sont données par le vecteur:  $\vec{v} = (\frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, z)^t$  qui devra rester inchangé par la transformation, comme confirmé par le calcul matriciel et le quaternion dual < produit>.

Poursuivons notre visite en compagnie du Théorème de Chasles:

iii) Mouvement hélicoïdal élémentaire centré : L'ordre des mouvements est inversé. Les matrices (4x4) standard ou les mouvements hélicoïdaux élémentaires décrits par des translations  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$  suivies par des rotations autour des axes  $C_1Z$ ,  $C_2Y$  et  $C_3X$ , sont successivement:

$$\begin{aligned} [M(\vec{t}, \theta, k)] &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \cos\theta - t_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x \sin\theta + t_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M(\vec{t}, \theta, j)] &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & t_x \cos\theta + t_z \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & -t_x \sin\theta + t_z \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } [\mathbf{M}(\vec{t}, \theta, i)] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & t_y \cos\theta - t_z \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & t_y \sin\theta + t_z \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est très utile et important de noter que ces trois mouvements de translations suivies de rotation sont équivalents aux mêmes trois mouvements de rotation suivies des trois translations indiquées par la troisième colonne de ces (4x4) matrices.

On constate que seules les translations parallèles aux axes de rotation concernés sont maintenues intactes.

Cela nous renvoie naturellement vers le cas déjà étudié précédemment (ii). En utilisant la même procédure:

Choisissons le premier mouvement, et soient une translation  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$  suivie d'une rotation autour de Oz appliquées au vecteur  $\vec{v} = (x, y, z)^t$ :

$$[\mathbf{M}(\vec{t}, \theta, k)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \cos\theta - t_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x \sin\theta + t_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{t} = (0, 0, t_z)^t$ ; Cela implique de la même façon un mouvement hélicoïdal élémentaire (de type i) établi plus haut) autour et le long de Oz ou un 'vissage' autour et le long de Oz, de pas  $p = \frac{2\pi}{\theta} t_z$

La technique de conjugaison  $\mathbf{TM}^{-1}$  va nous permettre de définir les coordonnées  $(x, y, z)$  du nouveau centre  $C_1$  du mouvement:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & -z + t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 & -z + t_z + z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La conjugaison doit aboutir et être identique à la matrice:

$$[M(\vec{t}, \theta, k)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification terme à terme la solution, quelle que soit la valeur de z, se résume comme précédemment, à un système de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{cases} -x\cos\theta + y\sin\theta + x \\ -x\sin\theta - y\cos\theta + y \\ t_z \end{cases} = \begin{cases} t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ t_z \end{cases}$$

Dont les solutions sont: 
$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} \frac{-(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{-(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall z \end{cases}$$

C'est donc un mouvement hélicoïdal élémentaire, autour et le long, de l'axe  $C_1Z$  parallèle à  $OZ$  de pas  $p = \frac{2\pi}{\theta} t_z$  dont le centre  $C_1$  appartiendra au plan  $(OX,OY)$  ; pour la solution particulière  $z = 0$  il aura pour coordonnées :

$$\left( \frac{-(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)}, \frac{-(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)}, 0 \right)^t$$

On pourra facilement vérifier que cet axe reste inchangé par cette transformation:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \cos\theta - t_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x \sin\theta + t_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{-(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{-(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cela pourra être généralisé aux deux autres mouvements restants  $[M(\vec{t}, \theta, j)]$  et  $[M(\vec{t}, \theta, i)]$

Application numérique : Si l'ordre des mouvements est inversé, soient une translation  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$  suivie d'une rotation autour de  $Oz$  d'amplitude  $\theta = \pi$ , appliquées au centre de rotation du mouvement  $C_1$  donné par le vecteur:

$$\vec{v} = \left( -\frac{t_x}{2}, -\frac{t_y}{2}, z \right)^t:$$

L'abscisse et l'ordonnée de cet axe resteront inchangées par la transformation, quant à sa dernière coordonnée  $z$  elle aura la liberté de translater la quantité  $t_z$  le long de l'axe de rotation  $C_1z$ , ceci illustrant un exemple de mouvement hélicoïdal centré ;

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x \cos\theta - t_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x \sin\theta + t_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{t_x}{2} \\ -\frac{t_y}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & -1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{t_x}{2} \\ -\frac{t_y}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t_x}{2} \\ -\frac{t_y}{2} \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut remarquer : Ce mouvement hélicoïdal d'axe  $C_{1z}$  aura un pas  $p = 2t_z$  ; Les deux translations  $t_x$  et  $t_y$  ne servent, comme constaté dans l'exemple précédent, qu'à dévier, déplacer ou 'shifter' l'axe initial  $Oz$  vers son nouvel emplacement  $C_{1z}$ , décrit plus haut, parallèlement à  $Oz$  tout en permettant une liberté de translation  $t_z$  le long de cet axe.

On peut vérifier ces résultants en utilisant les quaternions duaux:

Le mouvement est une translation suivie d'une rotation donné par:

$$\hat{q} = R + \varepsilon \frac{RT}{2} \quad (4.66)$$

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon = q_R + \frac{\varepsilon}{2} q_R \otimes (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) = R + \varepsilon \frac{RT}{2}$$

Concernant l'axe  $Oz$  ;

$$\begin{aligned} \hat{q}_z &= [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] + \frac{\varepsilon}{2} [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] \cdot (t_x, t_y, t_z) \\ &= [\cos(\frac{\theta}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\theta}{2})] + \frac{\varepsilon}{2} (-\sin(\frac{\theta}{2}) t_z, \cos(\frac{\theta}{2}) t_x, \cos(\frac{\theta}{2}) t_y, \cos(\frac{\theta}{2}) t_z) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} (0, -\sin(\frac{\theta}{2}) t_y, \sin(\frac{\theta}{2}) t_x, 0) = \end{aligned}$$

Ou en utilisant une écriture plus simple:

$$\hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, ct_x - st_y, ct_y + st_x, ct_z) \quad (4.73)$$

Ce DQ de type < produit > est un DQ de type < dual > de la forme :

$$\left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{1} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{1} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\} \quad (4.72iii)$$

Comme pour les mouvements de type i) ou type ii) on reconnaît la translation de type  $d = t_z$  qui se fait le long de l'axe de rotation ;  $\mathbf{n}_z = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{n}_x = \mathbf{0}$ , et  $\mathbf{n}_y = \mathbf{0}$ , Le vecteur  $\mathbf{m}$  va complètement déterminer les coordonnées du point  $O_1$ , origine du nouvel emplacement de l'axe hélicoïdal (de rotation) :

Autour de l'axe  $Oz$  ;  $\hat{q}_z = (c, 0, 0, s) + \frac{\varepsilon}{2} (-st_z, ct_x - st_y, ct_y + st_x, ct_z)$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \frac{\theta}{2} t_x - \sin \frac{\theta}{2} t_y}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ \frac{\cos \frac{\theta}{2} t_y + \sin \frac{\theta}{2} t_x}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique :  $X = \frac{-\sin\frac{\theta}{2}t_x - \cos\frac{\theta}{2}t_y}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ ,  $Y = \frac{\cos\frac{\theta}{2}t_x - \sin\frac{\theta}{2}t_y}{2\sin\frac{\theta}{2}}$  et  $Z = Z$  ou :

$$\begin{cases} X = \frac{-\sin\frac{\theta}{2}t_x - \cos\frac{\theta}{2}t_y}{2s} \\ Y = \frac{\cos\frac{\theta}{2}t_x - \sin\frac{\theta}{2}t_y}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ Z \\ 1 \end{cases}$$

Résultat similaire au vecteur défini par la technique de conjugation  $\mathbf{TMT}^{-1}$  dont les coordonnées  $(x, y, z)$  du centre  $C_1$  du mouvement, établies précédemment sont:

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} \frac{-(1-\cos\theta)t_x - \sin\theta t_y}{2(1-\cos\theta)} \\ \frac{-(1-\cos\theta)t_y + \sin\theta t_x}{2(1-\cos\theta)} \\ \forall z \end{cases}$$

Concernant notre application numérique  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$  ;

Et donc les coordonnées de  $O_1$ (appelé  $C_1$  ultérieurement) sont données par le vecteur:  $\vec{v}' = (-\frac{t_x}{2}, -\frac{t_y}{2}, z)^t$ : qui devra rester inchangé par la transformation, comme confirmé par le calcul matriciel et le quaternion dual de type < dual > Ce résultat pourra être confirmé une troisième fois en considérant le quaternion de type < produit >:

La transformation est :

$$\hat{q}_z = (0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2} (-t_z, t_y, -t_x, 0)$$

Elle va s'appliquer au vecteur  $\hat{q}_v$ , qui représente le centre de rotation qui devra rester inchangé par la transformation, tel que :

$$\hat{q}_v = [1 + \varepsilon (0, -\frac{t_x}{2}, -\frac{t_y}{2}, z)]$$

$$\hat{q}_z \hat{q}_v = [(0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2} (-t_z, -t_y, t_x, 0)] \cdot [1 + \varepsilon (0, -\frac{t_x}{2}, -\frac{t_y}{2}, z)]$$

$$= (0, 0, 0, 1) + \frac{\varepsilon}{2} (-t_z, -t_y, t_x, 0) + \varepsilon (-z, \frac{t_y}{2}, -\frac{t_x}{2}, 0)$$

$$= (0, 0, 0, 1) + \varepsilon (-\frac{t_z}{2} - z, 0, 0, 0)$$

On aura finalement le résultat:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_v' &= \hat{q}_z \hat{q}_v \bar{\hat{q}}_z^* \\
&= [(0, 0, 0, 1) + \varepsilon (-\frac{t_z}{2} - z, 0, 0, 0)].[(0, 0, 0, -1) + \varepsilon (\frac{t_z}{2}, -\frac{t_y}{2}, \frac{t_x}{2}, 0)] \\
&= 1 + \varepsilon (0, 0, 0, \frac{t_z}{2}) + \varepsilon (0, -\frac{t_x}{2}, -\frac{t_y}{2}, 0) + \varepsilon (0, 0, 0, \frac{t_z}{2} + z) + \varepsilon (0, 0, 0, 0) \\
&= 1 + \varepsilon (0, -\frac{t_x}{2}, -\frac{t_y}{2}, t_z + z)
\end{aligned}$$

Ce qui confirme le résultat matriciel  $\vec{v}'$  (déterminé plus haut).

iv) Translations pures et rotations pures:

Si les amplitudes des rotations sont nulles, le mouvement est une translation pure  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)^t$  ou un mouvement hélicoïdal de pas  $p$  infini et où le concept d'axe est insignifiant.

Ce mouvement ou transformation rigide s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \hat{q}_T = 1 + \frac{\varepsilon}{2} (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \quad (4.74)$$

Et donc sous sa forme quaternion dual type < dual > :

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \hat{\mathbf{w}} \right\} = \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\} \\
&= \{1\} + \varepsilon \cdot \left\{ 0, \left\{ \mathbf{0} \cdot 0 + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cdot 1 \right\} \right\} \quad (4.72iv)
\end{aligned}$$

Avec  $\theta = 0$  et le vecteur translation  $\mathbf{t} = \mathbf{d}$  qui passe par l'origine des axes  $O$ , donc de moment  $\mathbf{m}$  nul.

Si, par contre les translations sont nulles, le mouvement est une rotation pure d'amplitude  $\theta$ , autour d'un axe  $\vec{\mathbf{n}}$  passant par l'origine. Il faudra alors déterminer les quantités  $\theta$  et  $\vec{\mathbf{n}}$ .

Ce mouvement ou transformation rigide sera décrit par:

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$

ou par le quaternion  $q_R = [\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} (n_x, n_y, n_z)]$

Cette matrice  $[R]$  (3x3) pourra aussi facilement s'écrire sous sa forme axe-angle (3.4) déterminée auparavant. Il faudra s'assurer de la condition  $\det [R] = 1$  ou  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  ou  $\vec{n}$  unitaire. Ce sera un mouvement hélicoïdal constitué d'une rotation pure (translation nulle) autour d'un axe  $\vec{n}$  passant par l'origine, donc de pas nul:  $p = \frac{\theta}{2\pi} t = 0$

iv) Mouvement hélicoïdal général

Ce cinquième et dernier mouvement hélicoïdal (4.75) ou transformation rigide qui englobe d'une manière ou d'une autre les quatre précédents premiers cas, qui n'en sont que des cas particuliers, est donné par la matrice  $[M]$  (4x4) suivante:

$$[M] = \begin{pmatrix} R(\theta, \mathbf{n}) & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & t_x \\ u_y & v_y & w_y & t_y \\ u_z & v_z & w_z & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Il est très important de noter que cette matrice  $[M]$  aurait pu être le résultat du produit de plusieurs matrices  $[M]_i$  et donc d'un certain nombre  $i$  de mouvements hélicoïdaux quelconques appliqués au solide rigide.

Il faudra alors s'atteler à définir l'amplitude  $\theta$  et l'axe  $\mathbf{n}$  de la matrice de rotation  $R(\theta, \mathbf{n})$  ensuite répartir le vecteur translation  $\mathbf{t}$  en ces deux composantes la première  $\mathbf{d}$  parallèlement à l'axe  $\mathbf{n}$ ; celle qui appartiendra à l'axe et donc interviendra en tant que translation pure le long de l'axe de rotation et donc celle qui participera seule au pas de la transformation ainsi que celle restante perpendiculairement à l'axe  $\mathbf{n}$ ; celle qui servira à dévier l'axe et lui donner sa position  $\mathbf{n}'$  terminale: C'est-à-dire, tout simplement, saisir la quantité  $\mathbf{m}$  qui représente le moment du centre  $O_1$  par rapport à l'origine  $O$  des axes et qui apparait dans l'écriture sous sa forme quaternion dual type  $\langle \text{dual} \rangle$  du quaternion dual représentant la matrice  $[M]$ :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\hat{\theta}}{2}, \sin \frac{\hat{\theta}}{2} \cdot \hat{\mathbf{w}} \right\} = \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \right\} \quad (4.72)$$

ou (4.72v)

Pour finalement déterminer intrinsèquement le nouvel emplacement de l'axe :  $\mathbf{n}'$  parallèlement à l'axe  $\mathbf{n}$ . C'est-à-dire calculer les coordonnées X, Y et Z du centre  $C_1$  ou  $O_1$  origine du mouvement hélicoïdal telles que :

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Dès lors, il est très important de noter, qu'avec l'utilisation des quaternions duaux, il conviendra puisse qu'il sera possible, de choisir et donc de prescrire complètement toutes les caractéristiques de la transformation rigide ou du mouvement hélicoïdal désiré ou voulu de la manière suivante:

- 1- Choisir l'amplitude  $\theta$  ainsi que l'axe  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^t$  ce qui implique choisir  $\left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \right\}$ ,
- 2- Permettre un pas,  $p$ , et ainsi une translation correspondante  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)^t$  (parallèlement à l'axe  $\mathbf{n}$ ) et enfin,
- 3- Connaissant la position ou les coordonnées X, Y et Z du centre  $C_1$  ou  $O_1$  origine du mouvement hélicoïdal donc le moment  $\mathbf{m}$  tel que :  $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)^t = \mathbf{OO}_1 \times \mathbf{n}$

Il est certainement beaucoup moins évident de prescrire un tel et même mouvement en termes de matrices (4x4). Néanmoins il sera possible d'utiliser les techniques de conversion existantes. Concernant la génération de mouvements les quaternions duaux seront certainement beaucoup plus adaptés car une fois connus les modèles d'un robot manipulateur, ceux-ci peuvent être utilisés pour déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal, afin de réaliser une tâche précise donnée. Selon la nature de la tâche à effectuer on distinguera des problèmes dits point-à-point et des problèmes dits à trajectoire ou mouvement imposé. Dans le premier cas le mouvement du robot s'effectuera d'une configuration (point) à une autre, la trajectoire entre les deux étant libre. Dans le second cas, la trajectoire ou le mouvement du robot seront imposés, soit dans l'espace des configurations, par exemple pour éviter des obstacles, soit dans l'espace opérationnel, par exemple pour que l'organe terminal se déplace en ligne

droite. Il existe donc plusieurs problèmes très différents de génération de mouvements pour un robot manipulateur, selon que la tâche impose l'un ou l'autre de ces scénarios.

Reconsidérons l'application numérique de l'exemple 4.3.1 b) ; Figure (4.6) : Nous en avons déterminé les caractéristiques  $(\mathbf{n}, p, \mathbf{u})$  relatifs à la transformation  $[\mathbf{T}]$ ; (4x4) homogène suivante:

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dont la partie rotation  $[\mathbf{R}]$ ; (3x3) est :

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \det [\mathbf{R}] = 1 ;$$

$$\text{d'axe } \vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{0} \end{pmatrix}; \text{ d'amplitude } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ suivie par une translation } \mathbf{t} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{cases} \text{ de module}$$

$|\mathbf{t}| = \frac{1}{3}$  et donc de pas  $p = 4$  unités.

Exprimons le quaternion de rotation conforme et identique à cette matrice de rotation:

$$\text{L'angle } \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{12}, \text{ et } q_R = [\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} (n_x, n_y, n_z)]$$

$$R = q = (\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, 0);$$

$$\text{Avec } n_x^2 + n_y^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \text{ ou } \vec{\mathbf{n}} \text{ unitaire (similaire à } \det [\mathbf{R}] = 1 \text{)}$$

\*On peut remarquer que seulement trois termes décrivent la rotation: L'amplitude ainsi que l'axe de rotation sont clairement explicites et reconnaissables; tandis que l'écriture matricielle de cette même transformation

requiert trois lignes et trois colonnes ou neuf termes ou chiffres distincts sans aucune signification apparente à l'instar de la première écriture ( $q$ ). Donc faire une comparaison des deux écritures c'est bien sûr et encore une fois comparer l'incomparable.\*

Bien qu'il n'est pas nécessaire de connaître les quantités  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$  on peut les déterminer en utilisant les identités trigonométriques connues :

$$2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = 1 + \cos(\theta)$$

$$\text{et } 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = 1 - \cos(\theta)$$

Ce qui nous donne pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , ou  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{12}$  :

$$\cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \quad \text{et} \quad \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

L'axe  $\vec{n}$  reste inchangé par cette rotation ainsi que n'importe quel vecteur  $\vec{V}$  ayant les composantes suivantes :

$$\vec{V} = \lambda \vec{n} = \begin{pmatrix} V \\ V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

Cela peut être facilement vérifié en utilisant la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V \\ V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ V \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

Ou à l'aide du quaternion:

$$\hat{q}_1 = \left( \cos \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, 0 \right) + \varepsilon (0) = \left( c, \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 0 \right) ;$$

appliqué au vecteur  $\hat{q}_v = [1 + \varepsilon (0, V, V, 0)]$ :

$$\hat{q}_v' = \hat{q}_1 \hat{q}_v \hat{q}_1^*$$

$$= \left( c, \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 0 \right) \cdot [1 + \varepsilon (0, V, V, 0)] \cdot \left( c, -\frac{\sqrt{2}}{2} s, -\frac{\sqrt{2}}{2} s, 0 \right)$$

$$= \left[ \left( c, \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 0 \right) + \varepsilon (-\sqrt{2} sV, cV, cV, 0) \right] \cdot \left( c, -\frac{\sqrt{2}}{2} s, -\frac{\sqrt{2}}{2} s, 0 \right)$$

$$= 1 + \varepsilon (-\sqrt{2} scV + \sqrt{2} scV, Vc^2 + Vs^2, Vc^2 + Vs^2, 0) = [1 + \varepsilon (0, V, V, 0)] = \hat{q}_v$$

Le vecteur restera effectivement inchangé par le quaternion de rotation  $\hat{q}_1 = q$ .

Exemple Numérique ( mouvement hélicoïdal )

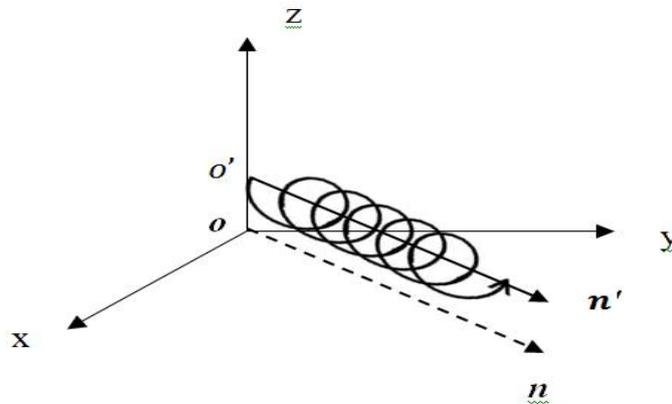


Figure (4.6): Exemple Numérique ( mouvement hélicoïdal )

Et enfin on peut facilement déterminer les quaternions duaux de type <produit> et celui de type <dual> qui vont représenter cette transformation rigide [T] ou cette matrice (4x4) donnée ou ce mouvement hélicoïdal et le comparer avec les résultats de l'analyse matricielle :

C'est un mouvement hélicoïdal général (une rotation R suivie d'une translation T ; de type v):

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon = q_R + \frac{\varepsilon}{2} (t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}) \otimes q_R = R + \varepsilon \frac{TR}{2}$$

Dont la partie rotation déterminée auparavant est

$$R = q = \left( \cos \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, 0 \right)$$

$$\hat{q} = q + \varepsilon q_\varepsilon$$

$$= \left( \cos \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, 0 \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left( 0, -\frac{1}{6\sqrt{2}}, \frac{5}{6\sqrt{2}}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left( \cos \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, 0 \right)$$

A l'aide des règles de multiplication des quaternions :

$$\hat{q} = \left( \cos \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}, 0 \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left( -\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{12}, -\frac{1}{6\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{12}, \frac{5}{6\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{12}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

Ou avec une écriture plus simple :

$$\hat{q} = (c, \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-\frac{s}{3}, -\frac{c}{6\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) s, \frac{5c}{6\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) s, \frac{(2-\sqrt{3})}{2} c - \frac{s}{2})$$

Le vecteur translation donné par la matrice peut s'écrire :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Il s'avère que seule sa partie parallèle à l'axe de rotation va participer à la création du pas de ce mouvement hélicoïdal tandis que sa partie perpendiculaire va servir au déplacement de ce même axe vers son emplacement final car :

$$\vec{n} \cdot \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

La partie parallèle à l'axe de rotation est le vecteur :  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$  de module  $d = \frac{1}{3}$

Et la perpendiculaire en est :  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Ce qui donne:

$$\hat{q} = (c, \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 0) + \frac{\varepsilon}{2} (-\frac{s}{3}, c(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) s, c(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) s, \frac{(2-\sqrt{3})}{2} c - \frac{s}{2}) =$$

$$(c, \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 0) + \varepsilon (-\frac{s}{6}, (\frac{c}{6\sqrt{2}} - \frac{c}{4\sqrt{2}}) - \frac{\sqrt{2}}{8} (2 - \sqrt{3}) s, (\frac{c}{6\sqrt{2}} + \frac{c}{4\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{2}}{8} (2 - \sqrt{3}) s, \frac{(2-\sqrt{3})}{4} c - \frac{s}{4})$$

L'écriture générale est  $\hat{q} = \{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \cdot \mathbf{n} \} + \varepsilon \cdot \{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \{ \mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} \} \}$

Une simple comparaison (par analogie) entre les deux écritures nous permet de déduire :

- L'axe de rotation  $\mathbf{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^t$  ; la translation  $d = \frac{1}{3}$  ;
- la quantité ou le vecteur ;  $\frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} (c, c, 0)^t$  ;

- et enfin le vecteur :  $\mathbf{m} \sin \frac{\theta}{2} = \left( -\frac{c}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8} (2 - \sqrt{3}) \right) \mathbf{s}, \frac{c}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8} (2 - \sqrt{3}) \mathbf{s},$   
 $\frac{(2-\sqrt{3})}{4} \mathbf{c} - \frac{\mathbf{s}}{4} \mathbf{t}$

On aura donc le vecteur moment

$$\mathbf{m} = \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{c}{s} - \frac{\sqrt{2}}{8} (2 - \sqrt{3}) \right), \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{c}{s} + \frac{\sqrt{2}}{8} (2 - \sqrt{3}), \frac{c}{s} \frac{(2-\sqrt{3})}{4} - \frac{1}{4} \mathbf{t}$$

En remplaçant c et s ou  $\cos \left( \frac{\pi}{12} \right)$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{12} \right)$  par leurs valeurs:  $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$  et  $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

On remarque que  $\frac{c}{s} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$

Alors  $\mathbf{m} = \left( -\frac{(2+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} - \frac{(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}, \frac{(2+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} + \frac{(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}, \frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4} - \frac{1}{4} \right) \mathbf{t} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \mathbf{t}$

Cela va permettre de désigner complètement et sans aucune équivoque ou ambiguïté, les coordonnées de n'importe quel point appartenant au nouvel emplacement de l'axe de rotation  $\mathbf{n}'$ :

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ce qui implique :  $X = Y$  et  $Z = 1$  ; dont la solution particulière  $X = Y = 0$  et  $Z = 1$  représente les coordonnées du point  $O_1$  : Résultat identique à celui déterminé par l'analyse matricielle.

### 4.5.3 Conversions

Le Quaternion dual correspondant à la matrice  $[M]$  (Equation (4.75)) décrivant une transformation générale (Type produit) de la manière la plus détaillée possible, en utilisant le terme de déplacement ( $\mathbf{d}$ ) au lieu du terme de translation  $T$  et en appliquant les définitions (4.29) et (4.51) est :

$$\begin{aligned} &= (\cos (\theta / 2), \sin (\theta / 2) (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})) + \\ &\frac{\varepsilon}{2} (0, d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) (\cos (\theta / 2), \sin (\theta / 2) (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})) \\ &= (\cos (\theta / 2), \sin (\theta / 2) (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})) + \\ &\varepsilon \left( -d_x / 2 \sin (\theta / 2) n_x - d_y / 2 \sin (\theta / 2) n_y - d_z / 2 \sin (\theta / 2) n_z \right), 0, 0, 0 \end{aligned}$$

La quantité scalaire;

$$(4.76) \left\{ \begin{array}{l} +\varepsilon \left( 0, \frac{d_x}{2} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{d_y}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) n_z - \frac{d_z}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) n_y \right) : \text{La composante suivant l'axe Ox} \\ +\varepsilon \left( 0, \frac{d_y}{2} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{d_z}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) n_x - \frac{d_x}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) n_z \right) : \text{La composante suivant l'axe Oy} \\ +\varepsilon \left( 0, \frac{d_z}{2} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{d_x}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) n_y - \frac{d_y}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) n_x \right) : \text{La composante suivant l'axe Oz} \end{array} \right.$$

En utilisant une écriture plus compacte :  $\mathbf{d} = \frac{1}{2} (0, d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})^t$

L'équation (4.76) sera donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right), \mathbf{n} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) + \frac{\varepsilon}{2} (\mathbf{d}) \cdot \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right), \mathbf{n} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = \hat{q} = q_R + \varepsilon \frac{dR}{2} \\ &= \hat{T}_G = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\psi}{2} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\left( \frac{d \cdot \mathbf{n}}{2} \right) \cdot \sin \frac{\psi}{2}, \left\{ \frac{d \times \mathbf{n}}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} + \frac{d}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right\} \right\} \quad (4.76) \end{aligned}$$

Il est ainsi facile de résumer une dernière fois le mouvement hélicoïdal et de vérifier le résultat (4.76) obtenu :

Étant donné le mouvement d'un solide dans l'espace 3D représenté par la matrice de transformation (4x4) homogène  $[T] = [R, \mathbf{d}]$ , où  $[R]$  et  $\mathbf{d}$  sont la rotation et la translation respectivement ; on peut construire le quaternion dual qui lui correspond de la façon suivante :

En premier lieu extraire l'axe  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  en utilisant la formule de Cayley et l'angle de rotation  $\theta$  de la matrice (3x3) de rotation  $[R]$  donnée. [50]

Ainsi la partie quaternion réel (ou de rotation)  $q$  sera définie comme :

$$q = (\cos \theta/2, n_x \sin \theta/2, n_y \sin \theta/2, n_z \sin \theta/2) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

La partie quaternion dual  $q_0 = (q_5, q_6, q_7, q_8)$  pourra se construire de la façon suivante :

$$q_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_1 & q_4 & -q_3 \\ -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_3 & -q_2 & q_1 \end{pmatrix} \mathbf{d}$$

Cela nous donne en considérant :  $\mathbf{d} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} q_5 &= \frac{1}{2} (-n_x \sin \theta/2 d_x - n_y \sin \theta/2 d_y - n_z \sin \theta/2 d_z) \\ &= -\frac{d \cdot \mathbf{n}}{2} \sin \theta/2 = -\frac{d}{2} \sin \theta/2 \end{aligned}$$

$$q_6 = \frac{1}{2} (\cos \theta/2 d_x + n_z \sin \theta/2 d_y - n_y \sin \theta/2 d_z)$$

$$q_7 = \frac{1}{2} (-n_z \sin \theta/2 d_x + \cos \theta/2 d_y + n_x \sin \theta/2 d_z)$$

$$q_8 = \frac{1}{2} (n_y \sin \theta/2 d_x - n_x \sin \theta/2 d_y + \cos \theta/2 d_z)$$

Résultats équivalents à ceux de l'équation (4.76).

Il est aisé de vérifier les conditions d'unité (4.58) de ce dual quaternion :

$$q \cdot q = 1$$

$$q \cdot q_0 = 0$$

Le chemin inverse est aussi possible ;

Étant donné un dual quaternion  $\hat{q}$  devant satisfaire les deux bien connues et essentielles contraintes, la matrice (4 × 4) de transformation homogène  $[T(q)] = [R(q), d(q)]$  correspondante peut être écrite et définie comme:

$$[R(\hat{q})] = \begin{bmatrix} q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 + q_1^2 & 2(q_2q_3 - q_4q_1) & 2(q_2q_4 + q_3q_1) \\ 2(q_2q_3 + q_4q_1) & -q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 + q_1^2 & 2(q_3q_4 - q_2q_1) \\ 2(q_2q_4 - q_3q_1) & 2(q_3q_4 + q_2q_1) & -q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 + q_1^2 \end{bmatrix}$$

Même matrice que celle déterminée au paragraphe (4.4.2) avec un léger problème de nomenclature : (  $q_1, q_2, q_3, q_4$  ) au lieu de (  $q_0, q_1, q_2, q_3$  )

Avec sa partie déplacement :

$$d(\hat{q}) = 2 \begin{bmatrix} -q_5 & q_8 & -q_7 & q_6 \\ -q_8 & -q_5 & q_6 & q_7 \\ q_7 & -q_6 & -q_5 & q_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

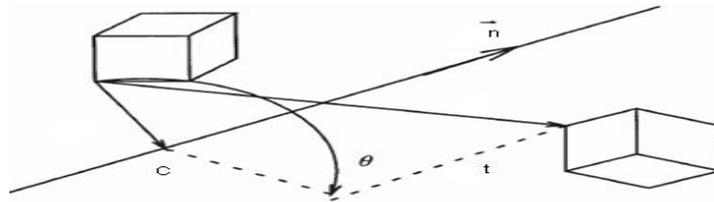
On peut noter que cela puisse ressembler à une pure et simple conversion d'une matrice (4x4) vers et depuis un quaternion dual.

**4.5.4 Quelques illustrations**

i) L'exemple de la figure (4.10) résume et décrit complètement le mouvement hélicoïdal :

Le cube (ou le solide rigide ) doit effectuer le mouvement **simultané** d'une rotation et d'une translation afin de compléter finalement le mouvement de l'un de ses sommets, illustré par le vecteur  $d$  (entre la position initiale et la position finale de l'un des sommets du solide ( cube)) sur la figure, qui est une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{n}$  et une translation  $\mathbf{t}$  parallèle à  $\mathbf{n}$ .

Ce même mouvement peut être décrit par cette même rotation suivie de cette même translation ou vice versa la translation suivie de la rotation.



**Figure 4.10: Mouvement hélicoïdal: "General Screw Motion"**

ii) Ecriture compacte d'un quaternion dual.

La figure (4.11) similaire à la figure (3.2) du chapitre précédent illustre aussi bien le mouvement hélicoïdal avec  $S$  représentant l'axe  $\mathbf{n}$ .

Les transformations homogènes décrites par des matrices (4x4) ou par le quaternion dual unitaire sont :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & [R] & & \mathbf{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulation matricielle

$$\hat{X} = \hat{Q} \hat{x} \hat{Q}^*$$

Formulation dual quaternioniène

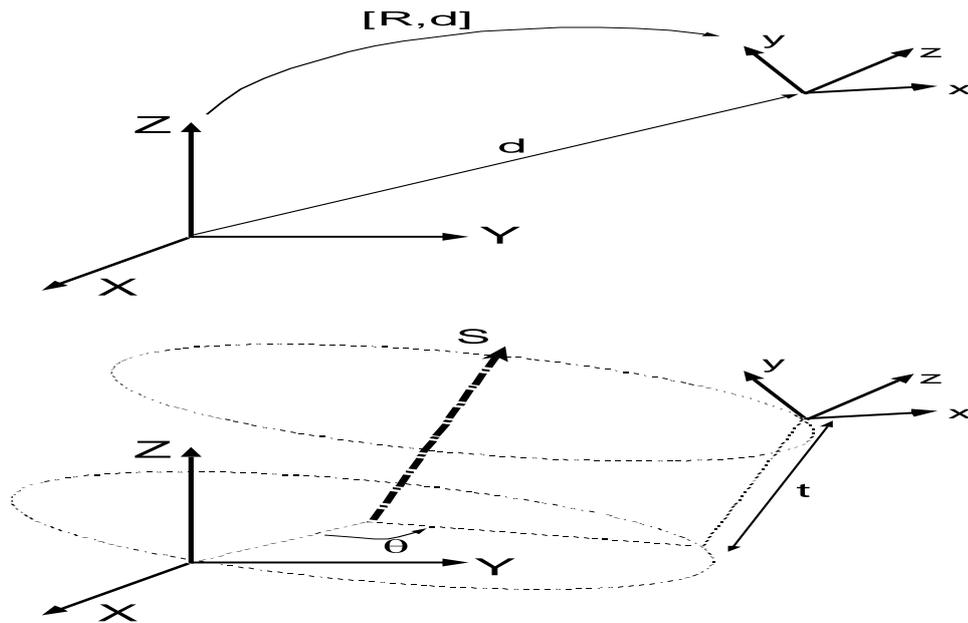


Figure 4.11: Mouvement hélicoïdal ou le théorème de Chasles revisité

La partie scalaire en dernière position après les vecteurs :

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ q_w \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} q_x^0 \\ q_y^0 \\ q_z^0 \\ q_w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} s_x \\ \sin \frac{\theta}{2} s_y \\ \sin \frac{\theta}{2} s_z \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} s_x^0 + \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} s_x \\ \sin \frac{\theta}{2} s_y^0 + \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} s_y \\ \sin \frac{\theta}{2} s_z^0 + \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} s_z \\ -\frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}(\hat{\theta}) = \sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)S + \cos\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)$$

La quantité scalaire est représentée par la dernière ligne après les trois vecteurs.

#### 4.5.5 Matrice Jacobiène dans l'espace des quaternions duaux

Pour un robot manipulateur quelconque ayant n liens, l'expression cinématique qui relie le vecteur vitesse  $X'$  de l'outil final (the end-effector) au vecteur vitesse du lien,  $\theta'$  est donnée par la relation:

$$X' = J(\theta) \theta'$$

Où la matrice Jacobiène  $J(\theta)$  analytique est  $J(\theta) = \frac{dX}{d\theta}$

Dans l'espace des quaternions duaux cette relation devient:  $\hat{q} = J(q)\theta'$

Alors la matrice Jacobiène qui relie le vecteur vitesse angulaire  $\theta'$  et la dérivée par rapport au temps du quaternion dual  $\hat{q}$  sera donnée par :

$$J(q) = \frac{d\hat{q}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{array} = \left( \begin{array}{ccc} \left( \frac{dq_1}{d\theta_1} \quad \dots \quad \frac{dq_1}{d\theta_n} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{dq_8}{d\theta_1} \quad \dots \quad \frac{dq_8}{d\theta_n} \right) \end{array} \right); (8 \times n) \text{ matrice}$$

Où  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$  et  $\mathbf{q}_0 = [q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T$ , avec  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{q}_0$  composantes du quaternion dual  $\hat{q} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}_0$ .

# *CONCLUSION*

## CONCLUSION

---

Les quaternions duaux sont intéressants et importants, car ils ont investi le domaine de l'algèbre. Ils donnent la solution la plus simple et la plus robuste. Ils nous permettent d'unifier la translation et la rotation dans un seul état (unique écriture), plutôt que d'avoir à définir plusieurs vecteurs séparés. Alors que les matrices offrent une alternative comparable aux quaternions duaux, nous estimons qu'elles peuvent être inefficaces, lentes et difficiles en comparaison. En fait, les quaternions duaux nous gratifient d'un compact, non ambiguë, sans singularité, et un calcul minimal de transformée rigide. En outre, les quaternions duaux se sont prouvés être la norme c.-à-d. la forme ou la manière, quant à la représentation la plus efficace et la plus compacte, de la rotation et de la translation.

Les quaternions duaux peuvent facilement prendre la place des matrices dans la hiérarchie, sans frais supplémentaires. En considérant les hiérarchies de transformées rigides qui combinent et comparent les transformations rigides (par exemple, la cinématique inverse (IK) caractères) et les contraintes articulaires), d'autres méthodes telles que les matrices doivent être converties en quaternions pour générer des données fiables de contraste, ce qui peut être fait directement sans aucune conversion en utilisant les quaternions duaux. On n'aura jamais trop insisté sur le fait que les conventions ou paramètres de Denavit et Hartenberg, sous leurs formes : équation (2.4) et figure (2.20), sont et seront toujours donnés par la multiplication de deux simples mouvements hélicoïdaux de premier type et qui pourront être convertis en quaternions duaux.

Ceci ne signifie point l'abandon de ces mêmes conventions ou paramètres ; ils ont été utilisés pour l'étude cinématique directe d'un manipulateur plan et d'un robot Puma au même titre que la technique de conjugaison  $TRT^{-1}$  qui s'est avérée plus efficace et beaucoup plus rapide. Les quaternions duaux en parallèle avec cette technique de conjugaison  $TRT^{-1}$  pourront être facilement généralisés dans l'étude cinématique directe, étant donnée son architecture, d'un robot sériel quelconque.

La contribution de ce travail en est l'explication et la démonstration des quaternions et des quaternions duaux de façon suffisamment détaillée telle que le lecteur puisse commencer à apprécier leurs avantages pratiques dans la résolution de différents problèmes. L'utilisation des hiérarchies basées sur des caractères en tant que méthode de base illustre l'avantage réel des quaternions duaux dans les systèmes à temps critiques (par exemple, jeux).

Cette étude présente les quaternions duaux comme étant une très bonne méthode pour représenter les transformations rigides dans des hiérarchies à caractères complexes avec un grand nombre de degrés de liberté. Nous expliquons comment mettre en œuvre une base de quaternions duaux et leurs combinaisons par multiplication simple sans utiliser le classique et traditionnel calcul matriciel.

L'algèbre duale des quaternions offre l'avantage de représenter à la fois les différents mouvements possibles (rotation, translation, hélicoïdal) et facilite l'écriture des modèles sous une forme simple et plus condensée. Cette algèbre contient l'axe de rotation et la

## CONCLUSION

---

direction de la translation ainsi que les paramètres intrinsèques de ces mouvements. Vu ces avantages, ces outils sont utilisés par la suite, afin de définir un opérateur général correspondant, permettant ainsi de décrire les mobilités des composants d'un ensemble mécanique.

Les quaternions duaux peuvent formuler un problème avec plus de concision, le résoudre plus rapidement en utilisant moins d'étapes, présenter le résultat beaucoup plus clairement que les autres méthodes précitées, être mis en pratique avec moins de lignes de code et être débogué sans effort. En outre, il n'y a pas de perte d'efficacité; les quaternions duaux peuvent être tout aussi efficaces sinon plus efficaces relativement aux méthodes matricielles.

Pour résumer il faudra signaler que toute transformation rigide (matrice  $(4 \times 4)$ ) qui représente un mouvement hélicoïdal gardera 'jalousement' ces 'secrets' à savoir les caractéristiques du mouvement hélicoïdal considéré. On pourra sûrement utiliser les méthodes matricielles classiques pour les définir ; une chose est sûre la simple conversion de la matrice  $(4 \times 4)$  en quaternion dual fournira rapidement les caractéristiques (position de l'axe de rotation dans l'espace 3D, amplitude de la rotation, translation le long de l'axe, pas du mouvement) ,on pourra ainsi finalement visualiser ce mouvement hélicoïdal, c'est à dire en faire une représentation similaire à la figure (4.10) ou (4.11) et enfin apprécier et comprendre la splendeur du *théorème de Chasles* à sa juste valeur.

APPENDICE A

Liste des symboles

$P, Q, O, C, \dots$	points de l'espace
d.d.l / d.o.f	degrés de liberté
m	mobilité
$\vec{p}, \mathbf{v}, \mathbf{V}, \dots$	vecteurs
$A, B, R, T, [A], [B], [R], [T], \dots$	matrices
$L, I, i, \dots$	axes, droites, lignes
$\Theta, \psi, \alpha, \varphi, \dots$	angles, amplitudes
$q_i$	variables articulaires
$x_i, y_i, z_i, \mathbf{n}, u$	axes de rotation
$t, \mathbf{t}, \mathbf{d}, \mathbf{d}, \dots$	Translation, déplacement, glissement
T	trace de matrice
Q, P, $q, \hat{q}, \mathbf{q}, \mathbf{p}$	quaternions
$Q^*$	conjugué de quaternion
$\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon,$	opérateur dual
$\hat{\theta}$	angle dual
<b>S</b>	vecteur direction d'une ligne
<b>S</b> <sup>0</sup>	moment par rapport à l'origine de <b>S</b>
$p$	Le pas du mouvement hélicoïdal
$\otimes$	Opérateur multiplication de quaternions
$\hat{q}, \hat{p}, \hat{q}_v$	quaternions duaux
$\bar{q}^*$	Conjugué de quaternion dual
<b>m</b>	moment

**APPENDICE B**

**Plus de géométrie**

Parfois, on peut être intéressé par le calcul d'un point appartenant à la ligne, compte tenu de ses coordonnées de Plücker.

Cela peut être fait en général, par une vis  $\mathbf{S} = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{w}$ ,

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (1)$$

Nous pouvons voir comment cela fonctionne: prenons l'expression générale d'une vis dans l'équation (4,24), et calculons le produit vectoriel de  $\mathbf{w} = \mathbf{m}\mathbf{c} \times \mathbf{s} + \mathbf{m}\mathbf{k}\mathbf{s}$  par  $\mathbf{v} = \mathbf{m}\mathbf{s}$ ,

$$\mathbf{m}\mathbf{s} \times (\mathbf{m}\mathbf{c} \times \mathbf{s} + \mathbf{m}\mathbf{k}\mathbf{s}) = \mathbf{m}^2\mathbf{s} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{s}) + \mathbf{m}^2\mathbf{k}\mathbf{s} \times \mathbf{s}. \quad (2)$$

Maintenant, nous appliquons l'identité  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  pour obtenir :

$$\mathbf{m}^2\mathbf{s} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{s}) = \mathbf{m}^2(\mathbf{c}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{c})) = \mathbf{m}^2\mathbf{c} \quad (3)$$

Si l'on considère que  $\mathbf{c}$  est le point perpendiculaire à la direction de  $\mathbf{S}$  - rappelons-nous que nous pouvons prendre n'importe quel point sur la ligne. Remarquons également que  $\mathbf{m}^2$  est le produit scalaire de la direction du vecteur dual par lui-même.

Le fait que tout point peut être utilisé pour calculer le moment de la ligne peut être facilement constaté: imaginons que  $\mathbf{c}$  est le point de la ligne perpendiculaire à la direction, et envisageons maintenant le point  $\mathbf{k} = \mathbf{c} + \mathbf{t}\mathbf{s}$  qui présente une composante le long de la direction  $\mathbf{s}$ . Calculons le moment de la ligne en utilisant  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{s} = (\mathbf{c} + \mathbf{t}\mathbf{s}) \times \mathbf{s} = \mathbf{c} \times \mathbf{s} + \mathbf{t}\mathbf{s} \times \mathbf{s} = \mathbf{c} \times \mathbf{s}. \quad (4)$$

La composante le long de la direction ne contribue pas au moment.

De tous les renseignements sur cette section, nous pouvons souligner la façon de définir et de calculer la ligne normale commune, la ligne qui est perpendiculaire à deux lignes données.

Nous pouvons obtenir une vis qui est perpendiculaire aux deux lignes. Afin d'en faire une ligne :

- Décrire la direction sous forme d'un vecteur unitaire,  $\mathbf{n}$ .

- Trouver un point  $p$  de la vis comme indiqué ci-dessus.
- Construire la ligne normale commune  $\mathbf{N} = \mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{p} \times \mathbf{n}$ .

### 1) Mouvement de ligne

Une question qui a trait à nos intérêts est, comment pouvons-nous caractériser le mouvement d'une ligne? Nous devons être capables d'appliquer un déplacement à cette ligne et d'obtenir la ligne déplacée. Une façon est celle d'utiliser une matrice de rotation pour calculer le changement d'orientation de la direction, et d'appliquer séparément le déplacement au point sur la ligne, et assembler les coordonnées de Plücker de la ligne par la suite. Nous pouvons également créer une matrice qui englobe toutes ces opérations.

Soit  $[R]$  la matrice de rotation et  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ , le vecteur translation d'un déplacement spatial.

Nous pouvons ainsi créer la matrice orthogonale duale

$$[\hat{T}] = [R] + \varepsilon [R]^0 = [R] + \varepsilon [D] [R], \quad (5)$$

Avec

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

qui, comme toute matrice antisymétrique, a la propriété  $[D] \mathbf{y} = \mathbf{d} \times \mathbf{y}$ . Nous utilisons des vecteurs duaux et des matrices duales avec la distribution des deux composantes et l'application de la propriété unitaire duale  $\varepsilon^2 = 0$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} + \varepsilon \mathbf{C} \times \mathbf{S} &= ([R] + \varepsilon [R]^0) (\mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{c} \times \mathbf{s}) \\ &= [R]\mathbf{s} + \varepsilon([R] \mathbf{c} + \mathbf{d}) \times [R] \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (7)$$

si nous remarquons que  $[R](\mathbf{c} \times \mathbf{s}) = [R]\mathbf{c} \times [R]\mathbf{s}$  lorsque  $[R]$  est une matrice orthogonale.

### 2) Géométrie des lignes et la Quadrique de Klein

En utilisant les coordonnées de Plücker, une ligne est définie comme son vecteur dual,  $\mathbf{S} = \mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{s}^0$ . Toutefois, les six coordonnées de la ligne ne sont pas quelconques: parce que le premier vecteur est une direction, on peut multiplier par une constante et on obtient la même ligne.

La ligne est donc un objet de l'espace projectif ( $PR^5$ ). En outre, nous avons la condition  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0 = 0$ , ce qui est une équation quadrique. Les vecteurs duaux qui en résultent forment une hypersurface quadrique à quatre dimensions  $PR^5$ , appelée la quadrique de Klein. Dans cette quadrique, nous ignorons le plan bidimensionnel formé par les vecteurs duaux tels que  $\mathbf{s} = \vec{0}$ , qui sont des lignes à l'infini.

En résumé, nous avons la bijection entre les lignes de  $R^3$  et les points à quatre dimensions de la quadrique de Klein moins les points sur un plan à deux dimensions, dans l'espace projectif  $PR^5$ . Parce que la distance et l'angle entre les lignes sont conservés par les transformations rigides, la quadrique de Klein est également préservée par ces transformations rigides.

### 3) L'axe de vissage (Hélicoïdal) d'un déplacement général et le théorème de Chasles

Nous revenons maintenant à la recherche des invariants d'un déplacement général. Nous savons qu'il n'existe pas de points fixes. Nous savons que pour chaque rotation il ya une direction fixe, appelée l'axe de rotation. Existe-il une autre entité qui reste fixe par l'action d'un déplacement général? La réponse est oui, il ya une droite invariante, appelée axe de la vis du déplacement.

Pour trouver cette ligne, appliquons un déplacement général à une ligne, en utilisant la matrice orthogonale duale.

Une ligne fixe  $\mathbf{S} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{c} \times \mathbf{s}$  est telle que :

$$[\hat{T}]\mathbf{S} = \mathbf{S} \quad (8)$$

Nous pouvons voir l'effet de cette transformation sur les parties réelles et duales de la ligne. Pour la partie réelle,

$$[\mathbf{R}]\mathbf{s} = \mathbf{s} \quad (9)$$

et on a vu que cette équation admet toujours un vecteur sous forme de solution, le vecteur  $\mathbf{b}$  définissant l'axe de la rotation, construit à partir de la matrice antisymétrique. Concernant la partie duale,

$$[\mathbf{R}](\mathbf{c} \times \mathbf{s}) + [\mathbf{D}][\mathbf{R}]\mathbf{s} = \mathbf{c} \times \mathbf{s} \quad (10)$$

Si l'on considère  $\mathbf{s} = \mathbf{b} / |\mathbf{b}|$ , l'axe de rotation de l'équation précédente, puis  $[\mathbf{R}]\mathbf{s} = \mathbf{s}$  et nous pouvons recueillir :

$$([\mathbf{R}]\mathbf{c} + \mathbf{d}) \times \mathbf{s} = \mathbf{c} \times \mathbf{s} \quad (11)$$

Le produit vectoriel n'est pas affecté par l'addition d'un composant le long de la direction  $\mathbf{s}$ , de sorte que nous pouvons ajouter une composante  $t\mathbf{s}$  au point transformé pour obtenir l'équation

$$[R] \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{ts} = \mathbf{c} \quad (12)$$

que nous voulons résoudre pour le point  $\mathbf{c}$ . En réarrangeant les termes et en utilisant l'équation de Cayley pour  $[R]$ ,

$$2 [\mathbf{B}] \mathbf{c} = - [\mathbf{I} + \mathbf{B}] (\mathbf{d} + \mathbf{ts}) \quad (13)$$

et en utilisant l'antisymétrie de  $[\mathbf{B}]$ ,

$$2\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{d} - \mathbf{ts} - \mathbf{b} \times \mathbf{d} \quad (14)$$

Pour résoudre pour  $\mathbf{c}$ , on calcule le produit vectoriel avec  $\mathbf{b}$ ,

$$2\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) \quad (15)$$

qui se simplifie en :

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{d}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} (\mathbf{b} - \mathbf{d}) \right) \quad (16)$$

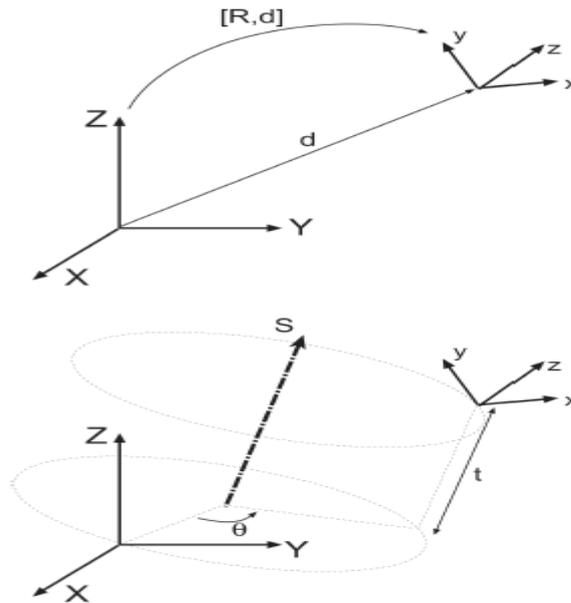
Rappelons que ce point ne sera pas résolu par la transformation comme un point fixe, c'est juste l'un des points se trouvant sur la ligne de telle sorte que le moment de la ligne ne change pas du fait du déplacement. Mais combien ce point particulier (qui est, d'ailleurs, le point perpendiculaire à la direction  $\mathbf{s}$ ) translate-il le long de la ligne?

En général, le vecteur de translation  $\mathbf{d}$  du déplacement ne sera pas perpendiculaire à la direction de l'axe de rotation. La composante perpendiculaire est donnée par l'expression dans la seconde parenthèse dans l'Eq.(16). La composante parallèle à l'axe de rotation est donnée par sa projection et définira la quantité de glissement le long de la ligne. Nous pouvons écrire

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{b}|} \quad (17)$$

Le théorème de Chasles peut être utilisé pour résumer les résultats de cette section.

La figure (4.11) montre une description équivalente d'un déplacement tridimensionnel quelconque :



The screw axis, rotation angle and slide of a displacement

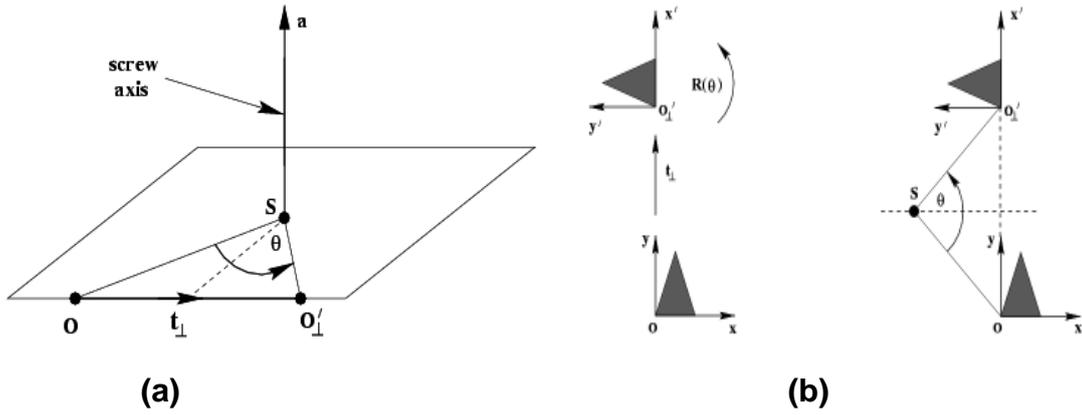
**Figure (4.11):** L'axe de la vis, l'angle de rotation  $\theta$ , et le glissement (coulissement)  $t$  d'un déplacement.

Théorème de Chasles, (env. 1830). Un déplacement général dans l'espace à 3 dimensions est équivalent à un vissage (Hélicoïdal) consistant en une rotation d'angle  $\theta$  autour et une translation  $t$  le long d'un axe (ou d'une ligne  $\mathbf{S} = \mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{s}^0$ ).

La direction  $\mathbf{s}$  et l'angle de rotation  $\theta$  sont calculés à partir de la rotation. Le vecteur moment  $\mathbf{s}^0$  et le glissement sont calculés en utilisant les équations écrites juste au-dessus. Au total, nous avons besoin de définir six paramètres: quatre pour définir la direction et l'emplacement de la ligne, et deux pour définir la rotation et les valeurs du glissement. L'axe de la vis est un moyen très efficace pour représenter un déplacement général.

**4) A) Exemple graphique de mouvement plan (Figures (a) et (b)) :**

Connaissant l'axe de rotation  $\mathbf{a}$  et la translation perpendiculaire à cet axe, le solide de forme triangulaire subit un mouvement hélicoïdal plan (ou de pas  $p = 0$ ) d'amplitude  $= \frac{\pi}{2}$ . Ce mouvement est équivalent à une rotation de même amplitude autour de l'axe  $\mathbf{a}$ .



Figures (a),(b) : *Mouvement plan*

**B) Cas général:** Mouvement hélicoïdal ; Décomposition de la translation  $t$  (Figure (c))

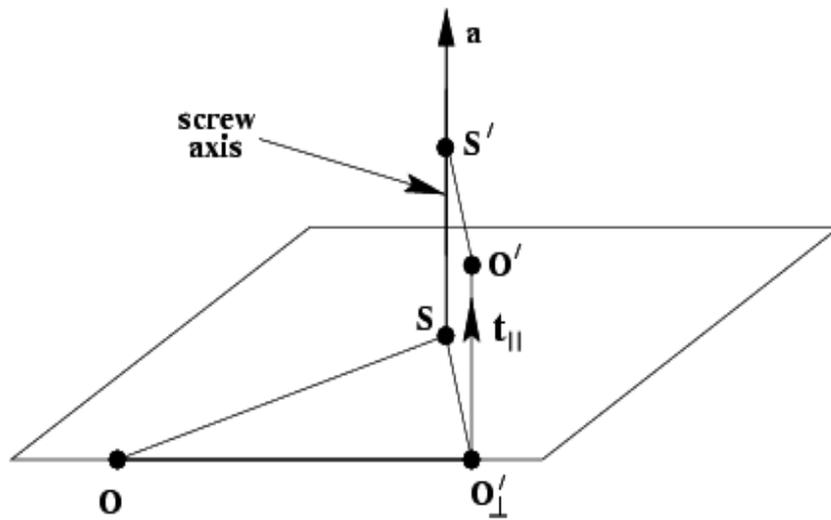


Figure (c) : *Mouvement général*

APPENDICE C

Récapitulatif général

Transformations Homogènes (4x4)/Mouvements Hélicoïdaux / Quaternions Duaux:

Il existe deux formes pour décrire une transformation générale, i.e. un mouvement hélicoïdal, dans l'espace avec les quaternions duaux. Il est important

de mentionner que les deux écritures sont équivalentes mais pas identiques. Par la suite les deux formes sont présentées, chacune étant plus particulièrement adaptée à différentes applications. Une démonstration est détaillée afin de mettre en évidence la correspondance entre les deux formes. Pour des applications en informatique, en visualisation, en mécanique, en robotique et en calibration la première forme (type « **produit** ») est recommandée, celle qui correspond à un produit de quaternions, le modèle présenté par la suite est la deuxième forme désignée : type « **dual** », car il est plus compact, facile à analyser et mieux adapté pour la cinématique.

### A) Transformation générale type « produit »

Avec une écriture un tant soit peu différente mais beaucoup plus adaptée ;

Une transformation générale décrite avec les quaternions duaux est définie par :

$$\hat{U} = \hat{Q}_G \cdot \hat{u} \cdot \hat{Q}_D$$

les deux quaternions duaux ayant la forme :

$$\hat{U} = \{1 + \varepsilon \cdot U\}, \text{ avec :}$$

$$U = \{0, (U_x, U_y, U_z)\} \quad \text{et}$$

$$\hat{u} = \{1 + \varepsilon \cdot u\} \quad \text{avec}$$

$$u = \{0, (u_x, u_y, u_z)\}$$

Notons que les deux quaternions  $\hat{Q}_G$  et  $\hat{Q}_D$  ont des formes différentes lorsque la transformation est particularisée comme indiqué par la suite.

#### A1) Cas particulier d'une rotation pure

Dans le cas particulier d'une rotation pure  $\hat{Q}_G$  et  $\hat{Q}_D$  ont pour expression :

$$\hat{Q}_G = \{Q_R + \varepsilon \cdot 0\} \text{ avec } Q_R = \left\{ \cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \cdot n_x, \sin \frac{\alpha}{2} \cdot n_y, \sin \frac{\alpha}{2} \cdot n_z \right\} \text{ et}$$

$$\hat{Q}_D = \{Q_R^* - \varepsilon \cdot 0\} \text{ avec } Q_R^* = \left\{ \cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2} \cdot n_x, -\sin \frac{\alpha}{2} \cdot n_y, -\sin \frac{\alpha}{2} \cdot n_z \right\}$$

Ainsi, la transformation devient :

$$\hat{U} = \hat{Q}_G \cdot \hat{u} \cdot \hat{Q}_D = \{Q_R + \varepsilon \cdot 0\} \cdot \{1 + \varepsilon \cdot u\} \cdot \{Q_R^* - \varepsilon \cdot 0\} = \{Q_R \cdot Q_R^* + \varepsilon \cdot Q_R \cdot u \cdot Q_R^*\}$$

A partir des propriétés des quaternions, il résulte que :  $Q_R \cdot Q_R^* = 1$  donc :

$$\hat{U} = \{1 + \varepsilon \cdot Q_R \cdot u \cdot Q_R^*\}$$

Dans ce cas, le vecteur  $\vec{U}$  est :  $U = Q_R \cdot u \cdot Q_R^*$ , soit une transformation identique à la rotation déjà présentée à la section 5.4.1.1

### A2) Cas particulier d'une translation pure

Dans le cas particulier d'une translation pure  $\hat{Q}_G$  et  $\hat{Q}_D$  ont pour expression :

$$\hat{Q}_G = \left\{ 1 + \varepsilon \frac{Q_T}{2} \right\} \text{ avec } Q_T = \{0, t_x, t_y, t_z\} \text{ et}$$

$$\hat{Q}_D = \left\{ 1 - \varepsilon \frac{Q_T^*}{2} \right\} \text{ avec } Q_T^* = \{0, -t_x, -t_y, -t_z\}$$

Ainsi, la transformation devient :

$$\hat{U} = \hat{Q}_G \cdot \hat{u} \cdot \hat{Q}_D = \left\{ 1 + \varepsilon \frac{Q_T}{2} \right\} \cdot \{1 + \varepsilon \cdot u\} \cdot \left\{ 1 - \varepsilon \frac{Q_T^*}{2} \right\} = \left\{ 1 + \varepsilon \cdot \left( u + \frac{Q_T}{2} - \frac{Q_T^*}{2} \right) \right\}$$

A partir des propriétés des quaternions, il résulte que :  $Q_T = -Q_T^*$  (revoir propriété 4.73 et section 4.5.1.2 ) donc :

$$\hat{U} = \{1 + \varepsilon \cdot (u + Q_T)\}$$

Dans ce cas, le vecteur  $\vec{U}$  a pour expression :  $U = u + Q_T$

### A3) Mouvement hélicoïdal

Dans le cas de référence, l'axe instantané de rotation est considéré comme passant par l'origine du repère (O, x, y, z) afin de simplifier l'expression des équations. Toutefois, il faut noter que cette rotation peut s'effectuer autour d'une droite passant par un point arbitraire de l'espace, M.

A cette fin, une succession de transformations est nécessaire. Premièrement, il faut traduire le point M en question à l'origine O, puis appliquer le mouvement hélicoïdal autour de l'origine O pour représenter la transformation et enfin traduire cette transformation du point O au point M. (Voir exemple numérique (4.3.2) utilisant des matrices (4x4))

Pour le cas de référence,

$$\hat{Q}_G \text{ et } \hat{Q}_D \text{ sont : } \hat{Q}_G = \left\{ Q_R + \varepsilon \frac{Q_T \cdot Q_R}{2} \right\} \text{ et}$$

$$\hat{Q}_D = \left\{ Q_R^* - \varepsilon \frac{Q_R^* \cdot Q_T^*}{2} \right\}, \text{ où } Q_R \text{ et } Q_T \text{ sont les quaternions déjà définis précédemment, } Q_R^* \text{ et } Q_T^* \text{ étant les quaternions conjugués de } Q_R \text{ et } Q_T \text{ respectivement.}$$

La transformation devient :

$$\widehat{U} = \widehat{Q}_G \cdot \widehat{u} \cdot \widehat{Q}_D = \left\{ Q_R + \varepsilon \frac{Q_T \cdot Q_R}{2} \right\} \cdot \{1 + \varepsilon \cdot u\} \cdot \left\{ Q_R^* - \varepsilon \frac{Q_R^* \cdot Q_T^*}{2} \right\} =$$

$$\left\{ Q_R \cdot Q_R^* + \varepsilon \cdot (Q_R \cdot u \cdot Q_R^* + \frac{Q_T \cdot Q_R \cdot Q_R^*}{2} - \frac{Q_R \cdot Q_R^* \cdot Q_T^*}{2}) \right\}$$

A partir des propriétés des quaternions, il résulte que :  $Q_R \cdot Q_R^* = 1$  et  $Q_T = -Q_T^*$ , donc :

$$\widehat{U} = \{1 + \varepsilon \cdot (Q_R \cdot u \cdot Q_R^* + Q_T)\}$$

Dans ce cas, le vecteur  $\vec{U}$  a pour expression :  $U \square\square Q_R \cdot u \cdot Q_R^* + Q_T$  et exprime le mouvement hélicoïdal.

#### A4) Exemple élémentaire et pratique

Un exemple de mouvement hélicoïdal simple autour de l'axe z, en utilisant les quaternions duaux et les matrices homogènes, est présenté ci-dessous. Ce mouvement est décrit par une rotation d'angle  $\theta$  et une translation d'amplitude  $\Delta$  le long de z :

$$\widehat{U} = \widehat{Q}_G \cdot \widehat{u} \cdot \widehat{Q}_D ,$$

$$\text{Avec : } \widehat{U} = \{1 + \varepsilon \cdot U\}, U = \{0, (U_x, U_y, U_z)\}, \widehat{u} = \{1 + \varepsilon \cdot u\}, u = \{0, (u_x, u_y, u_z)\}$$

$$\widehat{Q}_G = \left\{ Q_R + \varepsilon \frac{Q_T \cdot Q_R}{2} \right\}, Q_R = \left\{ \cos \frac{\alpha}{2}, 0, 0, \sin \frac{\alpha}{2} \right\}, Q_T = \{0, (0, 0, \Delta)\}$$

$$\widehat{Q}_D = \left\{ Q_R^* - \varepsilon \frac{Q_R^* \cdot Q_T^*}{2} \right\}, Q_R^* = \left\{ \cos \frac{\alpha}{2}, 0, 0, -\sin \frac{\alpha}{2} \right\}, Q_T^* = \{0, (0, 0, -\Delta)\}$$

Avec les paramètres énumérés ci-dessus la transformation devient :

$$\widehat{U} = \{1 + \varepsilon \cdot (Q_R \cdot u \cdot Q_R^* + Q_T)\}$$

$$U = (Q_R \cdot u \cdot Q_R^* + Q_T) = (0, \{u_x \cdot \cos\theta - u_y \cdot \sin\theta, u_x \cdot \sin\theta + u_y \cdot \cos\theta, u_z + \Delta\})$$

Le même mouvement hélicoïdal autour de l'axe z décrit sous forme matricielle est de la forme :

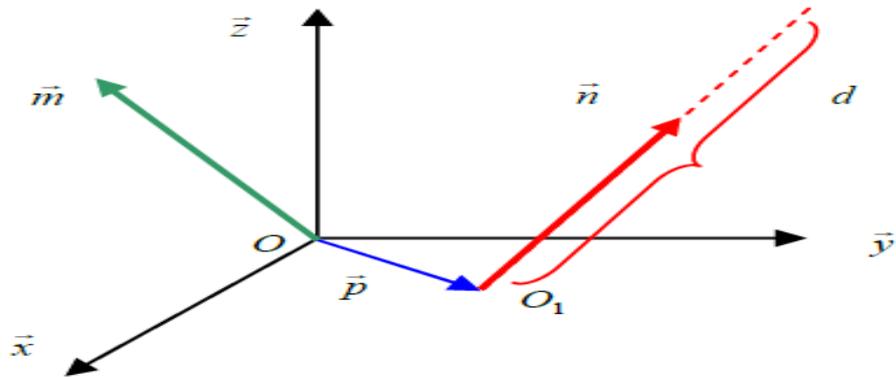
$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cos\theta - u_y \sin\theta \\ u_x \sin\theta + u_y \cos\theta \\ u_z + \Delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

**B) Transformation générale type « dual »**

Une transformation générale, de type vis, décrite avec les angles duaux et les vecteurs duaux est de la forme :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\hat{\psi}}{2}, \sin \frac{\hat{\psi}}{2} \cdot \hat{w} \right\} = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\psi}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \left\{ \mathbf{m} \sin \frac{\psi}{2} + \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\psi}{2} \right\} \right\}$$

Elle est définie par l'angle dual  $\hat{\psi}$  et le vecteur dual  $\hat{w}$ , la rotation étant présentée par l'angle  $\psi$  autour de l'axe  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  de module 1, et la translation  $d$  suivant le même vecteur  $\mathbf{n}$ . Le vecteur  $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$  donne le moment du vecteur  $\mathbf{n}$  par rapport à l'origine du repère  $(O, x, y, z)$ ; il est nommé *le moment de l'axe  $\mathbf{n}$* , avec :  $\hat{\psi} = \psi + \varepsilon d$ ,  $d$  étant l'amplitude de la translation le long du vecteur dual  $\hat{w} = \mathbf{n} + \varepsilon \cdot \mathbf{m}$  et  $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{n}$  le vecteur qui définit  $\mathbf{n}$  selon des coordonnées de Plücker,  $\mathbf{p}$  étant le vecteur qui donne la position de  $\mathbf{n}$  à l'aide du vecteur  $\mathbf{OO}_1$  (voir Figure 4.11). Les paramètres du changement de la transformation, angle  $\psi$ , axe  $\mathbf{n}$  et amplitude de la translation  $d$ , sont les caractéristiques de la transformation.



**Figure 4.9 :** Représentation des paramètres d'une transformation hélicoïdale.

Notons que cette forme ressemble à celle utilisée pour les quaternions simples mais en utilisant l'angle dual et le vecteur dual unitaire. L'interprétation géométrique de ces quantités est liée au mouvement de type vis. L'angle  $\psi$  étant l'angle de rotation autour de  $\mathbf{n}$ , le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  représente la direction de l'axe de rotation. L'élément  $d$  est l'amplitude de translation le long du vecteur  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  étant le moment de l'axe  $\mathbf{n}$ . Le vecteur  $\mathbf{m}$  est une description non ambiguë de la position d'un axe dans l'espace, conformément aux propriétés des coordonnées Plückeriennes définissant des droites dans l'espace.

Cette forme donne une autre utilisation intéressante : considérant que les quaternions classiques peuvent représenter seulement les rotations dont les axes passent par l'origine  $O$  du repère  $(O, x, y, z)$  les quaternions duaux peuvent représenter des rotations autour d'axes arbitraires de l'espace. Il faut néanmoins utiliser la même succession de transformations pour le cas de référence quand le corps admet un axe de rotation qui n'est pas exprimé dans le repère de référence  $(O, x, y, z)$  : translation de l'origine du repère considéré à l'origine  $O$  du repère  $(O, x, y, z)$  puis transformation dans le repère de référence et enfin translation inverse de l'origine  $O$  à l'origine du repère considéré.

### B1) Transformation générale avec un axe passant par l'origine

Dans le cas d'une transformation générale de référence, la rotation est effectuée autour d'un point confondu avec l'origine ( $\hat{w} = \mathbf{n} + \varepsilon \cdot \mathbf{0}$ ). Dans ces conditions, la transformation à la forme suivante :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\hat{\psi}}{2}, \sin \frac{\hat{\psi}}{2} \cdot \hat{w} \right\} = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\psi}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \left\{ \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\psi}{2} \right\} \right\}$$

### B2) Cas particulier d'une rotation pure

Une rotation pure ( $\hat{\psi} = \psi + \varepsilon \cdot \mathbf{0}$ ) qui passe par l'origine ( $\hat{w} = \mathbf{n} + \varepsilon \cdot \mathbf{0}$ ) est décrite par la transformation :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\psi}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \{0\}$$

### B3) Cas particulier d'une translation pure

Une translation pure, ( $\hat{\psi} = 0 + \varepsilon \cdot d$ ), le long d'un axe quelconque ( $\hat{w} = \mathbf{n} + \varepsilon \cdot \mathbf{m}$ ) correspond à la transformation suivante :

$$\hat{T} = \{1, 0\} + \varepsilon \cdot \left\{ 0, \left\{ \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} \right\}$$

### C) Parallèle entre les deux formes d'un quaternion dual décrivant une transformation générale

La correspondance entre les deux écritures est détaillée ci-dessous :

La transformation générale de type « dual » est :

$$\hat{T} = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\psi}{2} \cdot \mathbf{n} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\frac{d}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \left\{ \frac{d}{2} \cdot \mathbf{n} \cos \frac{\psi}{2} \right\} \right\}$$

La transformation générale présentée sous la forme « produit » est :

$$\hat{T}_G = \left\{ T_R + \varepsilon \frac{T_T \cdot T_R}{2} \right\}$$

$$\text{Avec : } T_R = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{n} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \right\} = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\psi}{2} \cdot n_x, \sin \frac{\psi}{2} \cdot n_y, \sin \frac{\psi}{2} \cdot n_z \right\}$$

$$\text{et } T_T = (0, \{d_x, d_y, d_z\}) = (\mathbf{0}, \{\mathbf{d}\})$$

Ainsi, la transformation devient :

$$\hat{T}_G = \left\{ T_R + \varepsilon \frac{T_T \cdot T_R}{2} \right\} = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{n} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ 0, \frac{\mathbf{d}}{2} \right\} \cdot \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{n} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \right\}$$

Ou encore :

$$\hat{T}_G = \left\{ \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{n} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \right\} + \varepsilon \cdot \left\{ -\left(\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{2}\right) \cdot \sin \frac{\psi}{2}, \left\{ \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{n}}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} + \frac{\mathbf{d}}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right\} \right\} \quad (4.76)$$

On peut noter que la forme « produit » décrit une transformation ayant nécessairement un axe de rotation passant par l'origine et donc que les deux écritures sont équivalentes mais pas identiques puisque la forme « duale » est plus générale en incorporant une position d'axe quelconque dans l'espace.

## REFERENCE

---

- [1] 'R. Gorez : Notes du cours d'Introduction à la robotique, 1991'. Technical report, UCL,Louvain-la-Neuve.
- [2] '<http://www.ifr.org>'. Technical report.
- [3] '<http://www.jautomatise.com>'. Technical report.
- [4] ISO, Robots et composants robotiques [ Vocabulaire, ISO 8373, 2012.]
- [5] Pollard Jr., W.L.G., < Spray painting machine >, brevet américain No. 2 213 108, déposé le 29 octobre 1934, accepté le 27 aout 1940.
- [6] Roselund, H.A.,< Means for moving spray guns or other devices through predetermined paths >, brevet américain No. 2 344 108, déposé le 17 aout 1939, accepté le 14 mars 1944.
- [7] Pollard, W.L.V., < Position controlling apparatus >, brevet américain No. 2 286 571, déposé le 22 avril 1935, accepté le 16 juin 1942.
- [8] Devol Jr., G.C., < Programmed article transfer >, brevet américain No. 2 988 237, déposé le 10 décembre 1954, accepté le 13 juin 1961.
- [9] Rosheim, M.E., Robot Evolution { The Development of Anthrobotics, John Wiley & Sons, 1994.
- [10] Westerlund, L., The Extended Arm of Man { A History of the Industrial Robot, Informationsförlaget, 2000.
- [11] Makino, H., Kato, A., et Yamazaki, Y., < Research and commercialization of SCARA robot >,International Journal of the Robotics Society of Japan, Vol. 23, No. 5, pages 61-62, 2007.
- [12] IFR, World of robotics 2012.
- [13] *Modeling, Identification & Control of Robots*, W. Khalil, E. Dombre, Hermes Penton Science 2002, 480 pages
- [14] *Robotique. Aspects fondamentaux*, J.-P. Lallemand, S. Zeghloul, Masson 1994, 312 pages
- [15] *Modélisation et commande des robots*, W. Khalil, G. Leuret, Cours EI3 Automatique de l'ECN 94/95
- [16] *Cours de robotique*, J.-L. Ferrier, DESS ASC
- [17] *Robots. Principes et contrôle*, C. Vibet, Ellipses 1987, 207 pages

## REFERENCE

---

- [18] *Cours de robotique*, J. Gangloff, ENSPS,  
<http://hp2gra.ustrasbg.fr/library/teaching/robotics/>
- [19] *Introduction to Robotics Mechanics and Control, 2th edition*, John J. Craig,  
Addison-Wesley Publishing Company, 1989, 450 pages.
- [20] ] <http://www.inrialpes.fr/bip/Bip-2000/article-long.html>.
- [21] Denavit, J., and Hartenberg, R.S., 1955, "A Kinematic Notation for Lower-pair Mechanisms Based on Matrices", ASME Journal of Applied Mechanics, 22:215-221.
- [22] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The explicit dynamic model and inertial parameters of the Puma 560 arm," in Proc. International Conference of Robotics and Automation, vol. 1, Washington, USA, pp. 510—18, 1986.
- [23] W. Clifford, *Mathematical Papers*. London: Macmillan, 1882
- [24] L. Kavan, S. Collins, J. Žára, and C. O'Sullivan, "Geometric skinning with approximate dual quaternion blending," ACM Transactions on Graphics (TOG), vol. 27, no. 4, p. 105, 2008.
- [25] F. Z. Ivo and H. Ivo, "Spherical skinning with dual quaternions and QTangents," ACM SIGGRAPH 2011 Talks, vol. 27, p. 4503, 2011.
- [26] J. Selig, "Rational interpolation of rigid-body motions," *Advances in the Theory of Control, Signals and Systems with Physical Modeling*, pp. 213–224, 2011
- [27] A. Vasilakis and I. Fudos, "Skeleton-based rigid skinning for character animation," in Proc. of the Fourth International Conference on Computer Graphics Theory and Applications, 2009, no. February, pp. 302–308.
- [28] Y. Kuang, A. Mao, G. Li, and Y. Xiong, "A strategy of real-time animation of clothed body movement," in *Multimedia Technology (ICMT), 2011 International Conference on*, 2011, pp. 4793–4797.
- [29] H. L. Pham, V. Perdereau, B. V. Adorno, and P. Fraise, "Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback," in *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, 2010, pp. 658–663.
- [30] M. Schilling, "Universally manipulable body models — dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs," *Autonomous Robots*, 2011.
- [31] Q. Ge, A. Varshney, J. P. Menon, and C. F. Chang, "Double quaternions for motion interpolation," in *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, 1998.
- [32] Y. Lin, H. Wang, and Y. Chiang, "Estimation of relative orientation using dual quaternion," *System Science and*, no. 2, pp. 413-416, 2010.

## REFERENCE

---

- [33] A. Perez and J. M. McCarthy, "Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems," *Journal of Mechanical Design*, vol. 126, p. 425, 2004.
- [34] W. Alan and W. Mart, *Advanced Animation and Rendering Techniques: Theory and Practice*. Adison-Wesley, 1992
- [35] S. Gilbert, *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [36] G. van den Bergen, "Dual Numbers: Simple Math, Easy C++ Coding, and Lots of Tricks," GDC Europe, 2009. [Online]. Available: [www.gdcvault.com/play/10103/Dual-Numbers-Simple-Math-Easy](http://www.gdcvault.com/play/10103/Dual-Numbers-Simple-Math-Easy)
- [37] R. S. Ball, "The Theory of Screws", Cambridge, U.K., *Cambridge Univ.Press*, 1900
- [38] R.M. Murray, Z. Li, and S.S.Sastry, *A Mathematical Introduction to Robot Manipulation*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
- [38a] Selig, J.M., *Geometrical fundamentals of Robotics*, Springer, second edition, 2004.
- [39] J.M. Selig. *Lie groups and Lie algebras in robotics*. Course report, south bank university, London
- [40] Yang, A.T., and Freudenstein, F., 1964, "Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms", *ASME Journal of Applied Mechanics*, pp.300-308.
- [41] Bottema, O. and Roth, B., 1979, *Theoretical Kinematics*, Dover Publications, New York.
- [42] McCarthy, J. M., 1990, *Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [43] Hamilton, W. R. (1869). *Elements of quaternions*, Vol., I & II, New York Chelsea Salamin, E. (1979). *Application of quaternions to computation with rotations*. Tech., AI Lab, Stanford Univ., 1979
- [44] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*. London: , 1886.
- [45] J. McDonald, "Teaching Quaternions is not Complex," *Computer Graphics Forum*, vol. 29, no. 8, pp. 2447-2455, Dec. 2010.
- [46] Hamilton, W. R. 1844. *On quaternions: or a new system of imaginaries in algebra*. *Phil.Mag*.
- [47] K. Shoemake, "Animating rotation with quaternion curves," *ACM SIGGRAPH computer graphics*, 1985.

## REFERENCE

---

- [48] <http://iaesjournal.com/online/index.php/IJRA> Ou:  
[www.iaesjournal.com/online/index.php/IJRA/.../pdf](http://www.iaesjournal.com/online/index.php/IJRA/.../pdf)
- [49] INTECH: International Journal of Advanced Robotic Systems : Kinematic Modelling and Simulation of a 2-R Robot Using SolidWorks and Verification by MATLAB/Simulink