

UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA

Faculté de technologie

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Energétique

**MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE 2D DES SOUDURES PAR LE
PROCEDE TIG DES TOLES METALLIQUES PAR LA METHODE DES
VOLUMES FINIS**

par :

Moustafa ZAIDOUR

Devant le jury :

Mr. B. Boumedene	Professeur, USD Blida	Président
Mr. D.Semmar	Maitre de conférence A, USD Blida	Examineur
Mr. M. Zergoug	Directeur de recherche, CSC Chéraga	Examineur
Mr. Y. Benkheda	Professeur, USD Blida	Rapporteur

Blida, Mars 2013

الملخص

إن عملية اللحام TIG تستخدم قوس كهربائي بين القطب من التنغستين والقطب المراد تلحيمها. القطب والمنطقة المنصهرة محمية ضد التلوث البيئي بواسطة جو من الأرجون الخامل.

في الجزء الأول من هذا العمل، دراسة نظرية وعددية ثنائية الأبعاد لانتقال الحرارة أثناء عملية لحام TIG بدون إضافة المعدن لصفائح الصلب المقاوم للصدأ مع تطبيق منبع حراري التمويه وزيادة الموصلية الحرارية في المنطقة المنصهرة قد تم إجراءه.

الجزء الثاني من هذا العمل يتعلق بدراسة نظرية وعددية من الحمل الحراري في بركة اللحام، وتفسير لهذه الظاهرة مع تفاصيل عن القوى المشتركة.

حل هذه المعادلات يستند على طريقة الحجم المحدودة باستخدام برنامج FORTRAN .

RESUME

Le procédé de soudage TIG met en jeu un arc électrique entre une électrode réfractaire de tungstène et les pièces à souder. L'électrode et la zone fondue sont protégées contre la pollution ambiante par une atmosphère neutre d'argon.

Dans la première partie de ce travail, une étude théorique et numérique bidimensionnelle de la conduction pure lors d'une opération de soudage TIG sans métal d'apport des tôles en acier inoxydable avec une application d'une source de chaleur gaussienne surfacique et une augmentation de la conductivité thermique dans la zone fondue sont faites.

La seconde partie de ce travail concerne l'étude théorique et numérique des mouvements de convection dans le bain de soudure, l'explication du phénomène avec le détail des forces impliquées.

La résolution de ces équations basée sur une approximation par la méthode des volumes finis en utilisant un programme FORTRAN.

ABSTRACT

Gas Tungsten Arc Welding uses an electric arc between the refractory tungsten electrode and the plates to be welded under an argon shielding gas.

In the first part of this work, a theoretical and numerical study of two-dimensional pure conduction during an operation TIG welding without additional metal for stainless steel sheets with an application of a Gaussian heat flux and an increase of the thermal conductivity in the melted zone are made.

The second part of this work relates to the theoretical and numerical study of the movements of convection in a weld pool, the explanation of the phenomenon with the detail of the implied forces.

The solution of these equations is based on the finite volume approximation by using a FORTRAN program.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur B. Boumedene d'avoir présidé le jury et Messieurs D. Semmar et M. Zergoug pour avoir assumé la charge d'examineur de ce mémoire.

Je remercie mon directeur de thèse Monsieur Y. Benkheda pour m'avoir encadré durant mon mémoire.

J'exprime ma gratitude aux personnes qui ont contribué au bon déroulement de mon travail et qui m'ont soutenu.

TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	3
TABLE DES MATIERES	4
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	8
INTRODUCTION	12
1. ETAT DE L'ART	14
1.1. Conséquences d'analyse	14
1.2. Modèles analytiques	14
1.3. Modèles numérique	16
1.4. Rendement d'arc	17
1.5. Pression d'arc	19
1.6. Déformation de la surface du bain liquide	21
1.7. Modélisation de la source de chaleur	21
1.7.1. Source de chaleur ponctuelle	22
1.7.2. Source de chaleur en segments de lignes	22
1.7.3. Source de chaleur Gaussienne	22
1.7.4. Source de chaleur volumique	24
2. PRINCIPE DE SOUDAGE	27
2.1 Historique de soudage	27
2.2 Définitions et présentation du soudage	27
2.2.1 La zone fondue	28
2.2.2 La zone affectée thermiquement	28
2.2.3 La zone de liaison	28
2.2.4 Le métal de base	28
2.3 Procédés de soudage	29
2.4 Le soudage TIG	31
2.4.1 Introduction au soudage TIG	31

2.4.2 Matériel de soudage	31
2.4.2.1 Générateur de courant	32
2.4.2.2 Torche de soudage	32
2.4.2.3 Protection de l'électrode	32
2.4.3 L'arc électrique en soudage	34
2.4.4 polarité électrique	34
2.4.4.1 DCEN	35
2.4.4.2 DCEP	35
2.4.4.3 AC	36
2.5 Le soudage MIG/MAG	36
2.6 Type de transfert du métal	37
2.6.1 Transfert par court-circuit	38
2.6.2 Transfert par pulvérisation axial	38
2.6.3 Transfert globulaire	38
2.7. Les phénomènes physiques impliqués	39
3. MODELISATION MATHEMATIQUE	41
3.1. Introduction	41
3.2. Thermodynamique et transferts thermiques	41
3.3. Les différents modes de transfert de la chaleur	42
3.3.1. Conduction	42
3.3.1.1. Équation générale de la conduction	43
3.3.1.2. Quelques cas de la conductivité	45
3.3.2. Convection	46
3.3.3 Rayonnement	47
3.4. Modélisation mathématique de la conduction thermique	48
3.4.1. Hypothèses principales	48
3.4.2 Équation régissant la chaleur	49
3.4.3. Conditions aux limites et initial thermique	50
3.5. Le changement de phase	51
3.6. La conductivité thermique	54
3.7. Modification de la conductivité thermique	54

3.8. Modélisation mathématique du bain de fusion:	55
3.9. Bilan dans le bain de fusion	56
3.9.1. Pression de l'arc	57
3.9.2. Flottaison	57
3.9.3. Convection thermique de Marangoni	58
3.10. Conditions aux limites dynamiques	60
3.11. Conclusion	62
4. SIMULATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS	63
4.1. Introduction	63
4.2. Méthodes numériques	63
4.2.1. Discrétisation spatiale	63
4.2.2. Discrétisation temporaire	64
4.2.2.1. Schéma explicite	65
4.2.2.2. Schéma de Crank-Nicolson	65
4.2.2.3. Schéma totalement implicite	65
4.3. Notions générales sur la méthode des volumes finis	65
4.4. Distribution des volumes de contrôle	65
4.5. Simulation thermique	66
4.5.1. Discrétisation de l'équation de conduction	66
4.5.2. Discrétisation spatiale du domaine de calcul	68
4.5.3. Intégration de l'équation de conduction	68
4.5.4. Choix d'un profil aux interfaces	69
4.6. Linéarisation du terme source	71
4.7. Les conditions aux limites thermiques	73
4.8. Détermination de la conductivité thermique aux interfaces	80
4.9. Les règles de base	82
4.10. Simulation de l'écoulement dans le bain de fusion	83
4.11. Schémas d'interpolation	84
4.11.1. Schéma aux différences centrées (CDS)	85
4.11.2. Schéma Upwind (UDS)	86

4.11.3. Schéma Hybride (HDS)	87
4.11.4. Schéma a loi de puissance (PLDS)	88
4.12. Traitement du couplage Vitesse-Pression	93
4.13. Détails numériques	98
4.13.1. Maillage régulière avec la région blocked-off	98
4.13.2. Résolution du système d'équations algébriques	99
4.13.3. Algorithme de THOMAS (TDMA)	100
4.13.4. Méthode itérative ligne par ligne	100
4.14. Technique de sous relaxation	101
4.15. Critère de convergence	102
5. RESULTATS ET INTERPRETATION	103
5.1. Introduction	103
5.2. Génération de maillage	103
5.2.1. Introduction	103
5.2.2. Procédure de génération de maillage	103
5.2.3. L'algorithme de génération de maillage	104
5.3. Paramètres choisis pour le calcul	106
5.4. Effet du maillage sur les résultats numériques	106
5.4.1 Effet du maillage sur le profil thermique	108
5.4.2 Effet du maillage sur le cycle thermique	109
5.4.3. Effet du maillage sur la géométrie du bain de fusion	110
5.4.4. Effet du maillage sur le profil de vitesse	111
5.5. Validation du code de calcul	112
5.6. Résultats thermiques	112
5.6.1 Source de chaleur en segment de ligne	112
5.6.2 Source de chaleur Gaussienne	113
5.7. Etude de sensibilité des paramètres de la source de chaleur	115
5.8. Effet de la force Marangoni sur l'écoulement du fluide	117
5.9 Effet du signe de $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ sur le courant fluide	119

CONCLUSION	121
APPENDICE	123
A. Liste des symboles	123
B. Algorithme de Thomas	125
C. Organigramme du programme	128
REFERENCES	131

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 :	Mesure du rendement d'arc dans GTAW : (a) calorimètre ; (b) élévation de température de l'eau de refroidissement en fonction de temps.	18
Figure 1.2 :	(a) Pression d'arc maximum en fonction de l'intensité de soudage pour différents angles d'affûtage (symboles pleins : données expérimentales issues des travaux de Yamauchi et Taka, référence citée par Lin) (b) Comparaison de la distribution de la pression d'arc pour différents gaz de protection.	20
Figure 1.3 :	Pression d'arc et des gouttes au centre de l'arc en fonction de l'intensité.	20
Figure 1.4 :	Différentes formes de sources de chaleur.	23
Figure 1.5 :	Schéma illustrant la source de chaleur volumique.	26
Figure 2.1 :	Cordon de soudage.	28
Figure 2.2 :	Classification des procédés de soudage.	30
Figure 2.3 :	Sources thermiques et densités d'énergies.	30
Figure 2.4 :	Représentation schématique du procédé de soudage TIG	32
Figure 2.5 :	Torche TIG.	33
Figure 2.6 :	Arc électrique en soudage TIG.	34
Figure 2.7 :	Différente polarité en soudage TIG.	35
Figure 2.8 :	Représentation schématique du procédé MIG/MAG.	36
Figure 2.9 :	Représentation schématique des procédés MIG/MAG et TIG.	37
Figure 2.10 :	Modes de transfert du métal.	39
Figure 2.11 :	Phénomènes physiques impliqués et leur couplage.	40
Figure 3.1 :	Volume élémentaire v dans le domaine de calcul V .	43
Figure 3.2 :	Evolution de la source de chaleur en fonction du temps t et x .	49
Figure 3.3 :	Schéma du processus de soudage.	50
Figure 3.4 :	Présentation du demi-plan d'étude et de la source de l'arc.	50
Figure 3.5 :	Évolution de l'enthalpie en fonction de la température.	52
Figure 3.6 :	Deux types de mouvement du fluide dans le bain de fusion : écoulements radiaux centrifuges (gauche) et écoulements radiaux centripètes (droite).	56
Figure 3.7 :	Convection par Flottaison.	58
Figure 3.8 :	Conditions aux limites dynamiques.	62
Figure 4.1 :	Distribution des volumes de contrôle avec maillages décalés.	66
Figure 4.2 :	Maillage 2D.	68
Figure 4.3 :	Volume de contrôle en deux dimensions.	68
Figure 4.4 :	Choix du profil de température.	69
Figure 4.5 :	Demi-volume de contrôle sur la frontière "W".	73
Figure 4.6 :	Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".	74
Figure 4.7 :	Demi-volume de contrôle sur la frontière "South".	75
Figure 4.8 :	Demi-volume de contrôle sur la frontière "N".	76
Figure 4.9 :	Quart de volume de contrôle (le coin W-S).	77

Figure4.10 :	Quart de volume de contrôle (le coin E-S).	78
Figure4.11 :	Quart du volume de contrôle (le coin "N-E").	79
Figure4.12 :	Quart du volume de contrôle (le coin "N-W").	80
Figure4.13:	Sur la détermination de la conductivité thermique.	81
Figure 4.14:	Conductivité thermique à l'interface.	81
Figure 4.15 :	Géométrie d'un volume de contrôle.	84
Figure 4.16 :	Variation du coefficient a_E en fonction du nombre Péclet.	87
Figure 4.17 :	Prédiction de ϕ_p par les différents schémas dans un intervalle des nombres de Peclet.	88
Figure 4.18 :	Volume de contrôle pour la vitesse horizontale u.	90
Figure 4.19 :	Volume de control pour la frontière supérieur de la vitesse u.	91
Figure 4.20 :	Volume de contrôle pour la vitesse verticale v.	92
Figure 4.21:	Volume de contrôle pour la pression.	95
Figure 4.22 :	blocked-off région dans un maillage régulière.	99
Figure 4.23 :	Application de la méthode ligne par ligne.	100
Figure 5.1 :	Illustration du domaine d'étude.	104
Figure 5.2 :	Maillage utilisé pour la simulation numérique.	105
Figure 5.3 :	Influence du maillage sur le profil thermique de la frontière supérieur du plan d'étude.	108
Figure 5.4 :	Influence du maillage sur le profil thermique de la frontière inférieur du plan d'étude.	108
Figure 5.5 :	Effet du maillage sur le cycle thermique.	109
Figure 5.6 :	Influence du maillage sur la géométrie du bain de fusion.	110
Figure 5.7 :	Influence du maillage sur la vitesse horizontale u a la frontière supérieure.	110
Figure 5.8 :	Influence du maillage sur la vitesse verticale v sur le plan de symétrie.	111
Figure 5.9 :	Comparaison.	111
Figure 5.10 :	Contour de température et les isothermes pour une source de chaleur en segment de ligne.	113
Figure 5.11 :	Contour de température et les isothermes pour une source de chaleur Gaussienne.	115
Figure 5.12 :	Influence de la puissance ηUI (a) et du rayon de distribution R_0 (b) sur la géométrie du cordon.	116
Figure 5.13 :	Effet de la vitesse de soudage V sur la Largeur et la profondeur de pénétration du cordon de soudure.	117
Figure 5.14 :	Mouvements du métal fondu sous l'action de la force de Marangoni seule avec $\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -0.47E - 3$.	119
Figure 5.15 :	Mouvements du métal fondu dans le bain de soudure sous l'action de la force de Marangoni $\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -0.47E - 3$.	119
Figure 5.16 :	Mouvements de convection dans le bain de soudure sous l'action de la force de Marangoni $\frac{\partial \gamma}{\partial T} = +0.47E - 3$.	120

Tableau 1.1 : Rendement thermique de différents procédés de soudage	19
Tableau 4.1 : Flux de convection et de diffusion de la vitesse u	90
Tableau 4.2 : Flux de convection et de diffusion de la vitesse v	93
Tableau 5.1 : Paramètres de soudage	106
Tableau 5.2 : Caractéristiques physiques utilisés	106
Tableau 5.3 : Effet du maillage sur les résultats	107

INTRODUCTION

Parmi les procédés d'assemblage, le soudage tient une place de premier choix pour ses multiples applications dans des secteurs industriels aussi nombreux que variés (aéronautique, nucléaire, pétrole, gaz, naval, etc...). La compréhension de ce procédé requiert un investissement à la fois scientifique et technologique. Le développement de la technique est ancien mais la technologie est en constante évolution et ouvre régulièrement de nouveaux champs d'application.

La plupart des soudures réalisées aujourd'hui sont obtenues par fusion et, en particulier, à l'aide d'un arc électrique. Parmi les procédés de soudage à l'arc, on distingue le soudage TIG (Tungsten Inert Gas), très employé en industrie afin de réaliser des cordons d'excellente qualité pour un coût d'investissement et d'utilisation réduit.

L'objectif de ce travail consiste à prédire le champ thermique ainsi que la géométrie du bain de fusion et le mouvement fluide dans ce dernier pendant une opération de soudage TIG (Tungsten Inert Gas).

La prédiction de la zone fondue ZF et la zone affectée thermiquement ZAT jouent un rôle important sur la structure métallique. Dans cette optique, les simulations numériques par la Méthode des Volumes Finis deviennent un outil particulièrement intéressant pour la résolution des problèmes thermique et dynamique d'une opération de soudage. Cependant, la simulation numérique présente des difficultés majeures car les phénomènes mis en jeu sont nombreux et complexes. Généralement, cela nécessite une modélisation du couplage des phénomènes thermiques, métallurgiques et mécaniques dans la zone affectée thermiquement des structures soudées, une modélisation de la source de la chaleur ainsi qu'une modélisation du bain de fusion.

Dans le cadre de ce mémoire, une modélisation thermique et dynamique bidimensionnelle du procédé de soudage TIG a été développée. Ce modèle est capable de prédire la géométrie 2D, largeur et profondeur, du bain de fusion et les

cycles thermiques induits et les vecteurs vitesses dans la zone fondue. L'objectif du projet est de déterminer l'influence des paramètres de soudage sur la géométrie du bain de fusion et les cycles thermiques et d'analyser par la suite l'effet de certaines forces, Marangoni et flottation, entrant en jeu dans le procédé de soudage sur les mouvements du métal liquide dans la géométrie, déjà trouvée par la résolution de l'équation de la conduction de chaleur, du bain de fusion. En effet, en soudage TIG, l'énergie de l'arc est supposée comme une condition limite déposée sur la surface supérieure du plan d'étude, où la déformation de la surface libre du bain liquide a été négligée. Les calculs ont été réalisés à l'aide d'un programme FORTRAN.

Pour accomplir ce travail, nous l'avons divisé en cinq chapitres, nous donnons dans un premier chapitre l'état de l'art sur le procédé de soudage TIG. Une description sur le soudage TIG a été décrite dans le second chapitre en traitant le principe. La description du modèle numérique 2D thermique prenant en compte une source de chaleur Gaussienne mobile, et une description du modèle dynamique qui correspond à une présentation des forces motrice agissent sur le métal liquide dans le bain de fusion seront présentées avec précision dans un troisième chapitre. Par la suite, un chapitre sera consacré à la discrétisation détaillée de l'équation de la conduction de chaleur et les équations de Navier-Stokes, dans le bain de fusion, par la méthode des volumes finis ainsi les méthodes de résolutions des systèmes d'équations algébriques et l'algorithme de couplage vitesse-pression. Le dernier chapitre portera sur la validation du modèle numérique par rapport aux résultats expérimentaux des autres auteurs avec une présentation et discussions des différents résultats thermiques et dynamiques.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART

1.1. Conséquences d'analyse :

Le soudage à l'arc, comme tout procédé de soudage impliquant la fusion des bords à assembler, est assorti d'un grand nombre de conséquences et modifications en raison de forts gradients de température qu'impose toute source de chaleur mobile ou concentrée. Ces modifications, qui sont d'ordre métallurgique et mécanique déterminent les caractéristiques finales du cordon de soudure.

1.2. Modèles analytiques :

Rosenthal 1941 [1] a développé la première solution analytique pour les champs thermiques transitoires des soudures TIG. il a utilisé les hypothèses de simplification suivantes pour tirer des équations analytiques pour l'écoulement de la chaleur pendant la soudure :

1. le régime de transfert de la chaleur est stationnaire,
2. source de chaleur ponctuelle,
3. chaleur latent de fusion négligeable,
4. propriétés thermiques constantes,
5. aucunes pertes de chaleur avec l'environnement,
6. aucune convection dans le bain de fusion de soudure.

Équation 2-D : en raison de la petite épaisseur de la plaque, le transfert thermique dans la direction d'épaisseur est supposé négligeable. Rosenthal [1] a tiré l'équation suivante du transfert de la chaleur bidimensionnel pour les soudures des plaques minces de largeur infinie :

$$\frac{2\pi kg(T - T_0)}{Q} = K_0 \left(\frac{Vr}{2\alpha}\right) \exp\left(\frac{Vx}{2\alpha}\right) \quad (1.1)$$

Où T est la température, T_0 température de la plaque avant soudure [K], k est la conductivité thermique [W/m.K], g est l'épaisseur de la plaque [m], V est la vitesse de déplacement [m/s], $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique où ρ est la densité [Kg/m³] et c_p est la chaleur spécifique [J/kg.K], K_0 fonction de Bessel de deuxième degré et d'ordre deux et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance radiale de l'origine [m].

Équation 3-D : la solution analytique tirée par Rosenthal pour le transfert thermique 3-D dans une plaque semi-infinie pendant le soudage est comme suite :

$$\frac{2\pi(T - T_0)kR}{Q} = \exp\left(\frac{-V(R - x)}{2\alpha}\right) \quad (1.2)$$

Où $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est la distance radiale de l'origine [m].

Ces expressions ont été employées par des chercheurs étudiant le courant de soudure (ou puissance fournie, ηUI), leur résultats sont compatibles aux résultats expérimentaux précédents [2]-[3].

Eagar et Tsai [4] ont modifié la théorie de Rosenthal pour inclure une source de chaleur gaussienne à distribution surfacique bidimensionnelle (2-D), avec un paramètre de distribution constant qui représente le rayon effectif de l'arc, et donnant une solution analytique de la distribution de température dans un solide semi-infini soumis à cette source de chaleur en mouvement. Leur solution était un pas considérable pour la prédiction de la distribution de température dans les régions proches de la source de chaleur.

Jeong et Cho [5] ont introduit une solution analytique pour le champ de température transitoire dans les soudures avec métal d'apport en se basant sur une source gaussienne 2-D avec des paramètres de distribution similaire dans les deux directions x et y .

Bien que les solutions disponibles utilisent une distribution gaussienne de la chaleur pour prédire la température dans les régions immédiates de la source de la chaleur, elles sont encore limitées par défaut le modèle 2-D de source de chaleur qui ne permet pas de définir l'effet de pénétration.

1.3. Modèles numérique:

Pardo et Weckman [6]-[7] développent un modèle 3-D par élément fini de la conduction thermique qui modélise exactement l'interface solide-liquide, avec prendre en considération la chaleur latente de fusion. Dans ce modèle, la zone liquide a été tracée dans un volume défini par la surface d'interface Solide-liquide comme déterminé par l'isotherme de la température de fusion. Ainsi, la géométrie de l'interface a été exactement modélisée. Le dégagement et l'absorption de la chaleur latente de fusion ont été simulés comme flux agissant au-dessus de la surface des éléments situés à l'interface Solide-Liquide. Les effets de la convection dans le bain de fusion de soudure ont été annulés en augmentant artificiellement la conductivité thermique du liquide. Ce modèle a été adapté et plus tard utilisé par Villefuerte et autres, [3] pour étudier les conditions de soudure sur des valeurs locales de R et de G_L le long du bord du bain de soudure.

Plusieurs chercheurs [8] - [9] utilisant les modèles numériques ont prouvé que les mouvements de fluide dans le bain de fusion affectent fortement la géométrie de bain de soudure. Les forces d'entraînement de l'écoulement dans le bain de soudure sont:

- Une force de flottabilité due aux changements température-induits de la densité du liquide,
- Une force électromagnétique (de Lorentz) due à l'interaction du courant d'arc avec son champ magnétique expulse le fluide en bas,
- Force du gradient thermique de la tension superficielle (Marangoni) due aux changements de la tension superficielle, γ , avec la température à travers la surface libre du bain de soudure. Pour beaucoup de métaux, $\frac{\partial\gamma}{\partial T}$ est négatif, alors la force de Marangoni entraîne le fluide vers l'extérieur ; cependant, la présence des éléments tensio-actifs (tels que le soufre en acier inoxydable) peut produire un $\frac{\partial\gamma}{\partial T}$ positif qui cause une inversion d'écoulement vers le centre de la piscine [10].

Goldak [11], fut le premier à introduire une source de chaleur mobile 3-D de type double ellipsoïde. Une formulation en éléments finis à été utilisé pour le calcul du champ de température, mais un modèle 3-D complètement général du processus de soudage à l'arc, incorporant une source de chaleur en mouvement et les détails des circulations (dynamique) du bain de fusion de la soudure, n'est pas disponible actuellement.

Quoique, la modélisation du problème de l'écoulement de chaleur en soudage se heurte principalement à deux types de difficultés :

La première concerne les fortes non-linéarités (dépendance des propriétés physiques et thermiques du matériau avec la température) ;

La seconde difficulté réside dans la manière dont on doit concevoir la source de chaleur sur le plan mathématique (c.à.d. sa géométrie et sa répartition énergétique).

1.4. Rendement d'arc:

La puissance délivrée par le générateur de soudage alimente le Plasma d'arc ainsi que l'électrode de soudage. Une partie de cette énergie est perdue dans l'atmosphère ambiante et le reste est transféré à l'assemblage. Ainsi le rendement est défini dans la littérature comme le rapport de la puissance transférée dans la pièce Q à la puissance nominale Q_n de soudage délivrée par le générateur.

$$\eta = \frac{Q}{Q_n} = \frac{Q}{UI} \quad (1.3)$$

Kou et al [12]-[13] utilisent un calorimètre tubulaire simple pour déterminer le rendement d'arc dans GTAW d'aluminium, comme indiquée la (figure 1.1.a). La température absorbée par l'eau de refroidissement ($T_{out} - T_{in}$) est mesuré par des thermocouples placées a la sortie et l'entrée de l'eau. Le transfert de chaleur à partir de la pièce au calorimètre est comme suit (1.4) :

$$Qt_w = \int_0^{\infty} WC_p(T_{out} - T_{in})dt \approx WC_p \int_0^{\infty} (T_{out} - T_{in})dt \quad (1.4)$$

Où W est le taux d'écoulement de la masse de l'eau, C_p est la chaleur spécifique de l'eau, T_{out} est la température de l'eau de sortie, T_{in} est la température de l'eau d'admission et t le temps, l'intégral de l'équation (1.4) correspond a la surface hachurée dans la (figure 1.1.b).

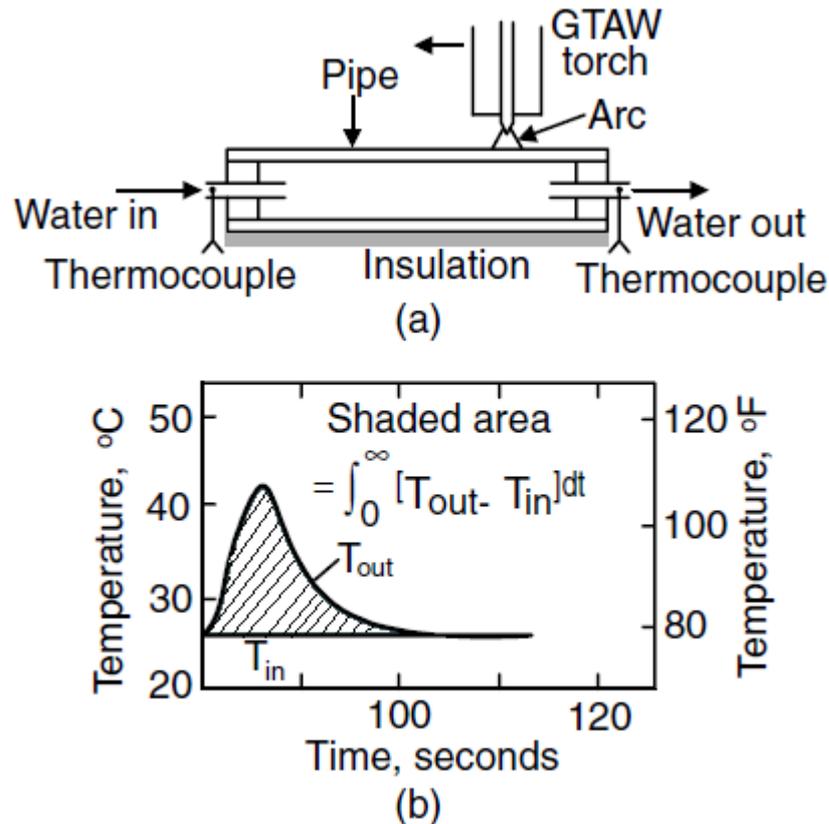


Figure 1.1 mesure du rendement d'arc dans GTAW : (a) calorimètre ; (b) élévation de température de l'eau de refroidissement en fonction de temps. Kou et al [12]- [13].

Les données expérimentales de rendement d'arc sont importantes pour le procédé TIG, elles sont néanmoins très contradictoires, comme l'a souligné M. Brochard [14]. D'après les travaux de Niles, le rendement d'arc en TIG diminue de 60 à 30% quand l'intensité augmente de 125 à 225 A [15].

Dupont et al [16] ont effectué des mesures de rendement d'arc par calorimétrie pour différents procédés d'arc MIG-MAG (GMAW), TIG (GTAW), SAW (Submerged arc welding) et PAW (Plasma Arc Welding) [16], ils estiment que le rendement du procédé ne varie pas de façon significative en fonction du courant de soudage pour chaque procédé. Pour le soudage TIG, il est de

0.67±0.05 et pour le soudage MAG, il est de 0.84±0.04. Il précise que le rendement d'arc est constant pour différentes vitesses de soudage à une intensité de soudage constante et que la longueur d'arc intervient de façon significative dans le rendement du procédé, le **tableau 1** indique des valeurs usuellement admises.

Tableau 1.1 rendement thermique de différents procédés de soudage d'après [17]

	christensen	Rykalin	Tsai
soudage MIG/MAG	0.66-0.70	0.65_0.85	0.80-0.90
soudage TIG	0.22-0.48	0.20-0.75	-
soudage à l'arc submergé SMAW	0.66-0.85	0.65-0.85	0.55-0.90

1.5. Pression d'arc :

On peut citer, néanmoins, pour le cas du procédé TIG les travaux de Lin et Eager qui ont déterminé expérimentalement la pression d'arc [18]. Leurs mesures de pression reposent sur l'utilisation d'une plaque de cuivre refroidie par eau pour éviter la fusion et reliée à un capteur de pression. Ils ont ainsi pu évaluer la distribution de la pression pour différentes intensités allant de 300 à 600 A et pour différents angles d'affûtage de l'électrode (30°, 60° et 90°). Ils ont observé des pressions maximales d'arc variant de 1000 à 5000 Pa quand l'intensité augmente de 300 à 600 A (Figure **1.2.a**). Ils ont aussi étudié l'influence du gaz de protection (argon et hélium) (Figure **1.2.b**). Leurs valeurs de pression ont largement été utilisées par la suite par Wu comme données d'entrée de modèles pour simuler le procédé TIG [19].

Xu utilise une expression de la pression d'arc pour le procédé MIG-MAG en fonction de l'intensité, de la distance entre la pièce à souder et le bout de l'électrode et des angles caractéristiques de la configuration [20]. On retrouve le même ordre de grandeur de pression d'arc que celui donné par Lin et Eager (Figure **1.3**) [18].

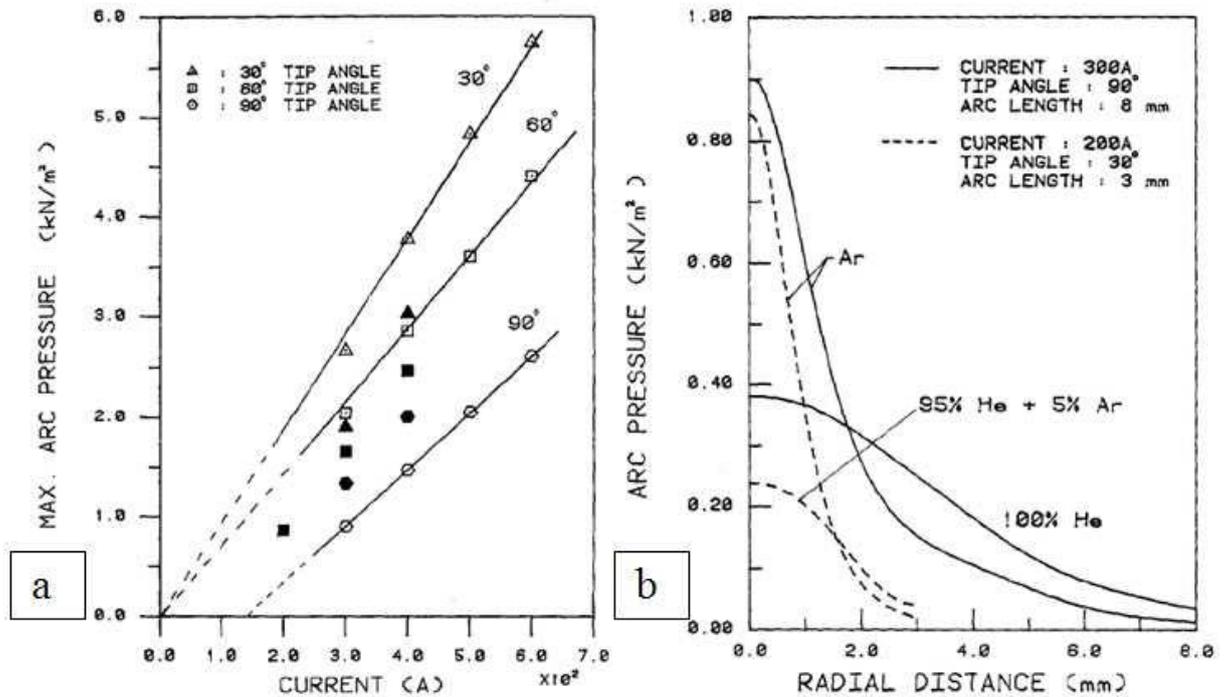


Figure 1.2 : (a) Pression d'arc maximum en fonction de l'intensité de soudage pour différents angles d'affûtage, (b) Comparaison de la distribution de la pression d'arc pour différents gaz de protection [18]

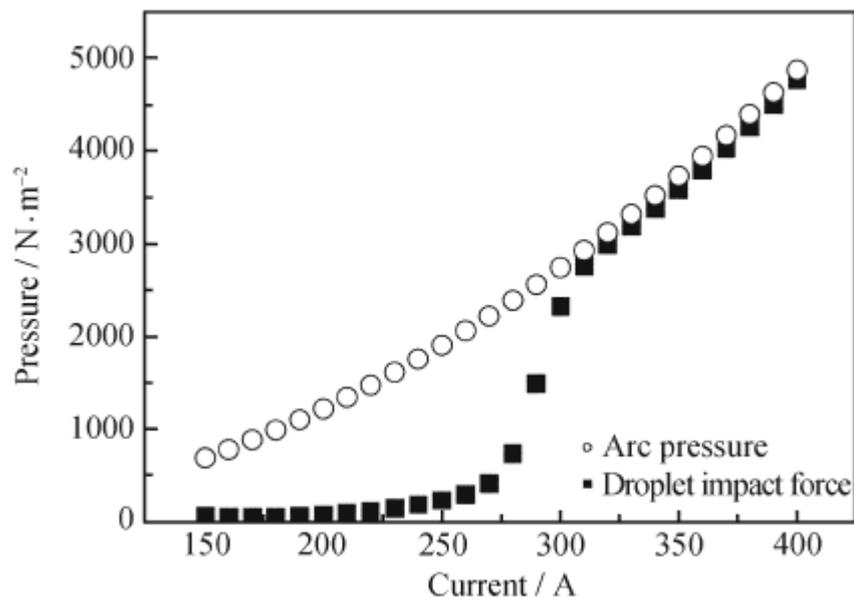


Figure 1.3 : Pression d'arc et des gouttes au centre de l'arc en fonction de l'intensité [20]

1.6. Déformation de la surface du bain liquide :

Lin et Eager ont mis en évidence expérimentalement la déformation de la surface libre apparaissant durant le procédé TIG [21]. Ces mesures sont déduites de photos prises à différents instants pour un arc stationnaire ou non. Ils montrent aussi que la déformation de la surface du bain liquide augmente brutalement dès que l'intensité dépasse 250 A. la déformation de la surface libre peut passer de 1 mm à 4-5 mm pour une variation d'intensité de seulement 20 A. Ils expliquent cette transition brutale par l'apparition d'un vortex au dessus de la surface du bain liquide qui favoriserait le creusement du bain.

1.7. Modélisation de la source de chaleur:

Pour modéliser l'apport de chaleur du procédé de soudage, deux méthodes sont envisageables [22]:

- Imposition de la température au bain de fusion, cette approche est simple d'emploi (la connaissance de la forme de la zone fondue suffit) et permet d'obtenir une corrélation raisonnable entre l'expérience et le model. Cependant, elle sous-estime la quantité d'énergie apportée par le procédé. L'utilisation de cette technique est généralement déconseillée [22] -[23].
- Imposition d'un flux de chaleur, qui peut être volumique ou surfacique. Ce flux est déterminé par la puissance de soudage apportée à l'assemblage, soit la puissance de soudage nominale, multipliée par le rendement du procédé qu'il faut ajuster. La distribution de ce flux est sensiblement liée au procédé de soudage utilisé.

Il convient tout abord de rappeler que l'apport de chaleur est fortement dépendant du procédé de soudage considéré. Dans le cas de soudage a l'arc, (TIG, MAG/MIG, ...), l'énergie provenant de l'arc est déposée essentiellement en surface. L'apport de chaleur résulte des interactions électromagno-thermo-fluides couplées de plasma de couverture. Ce plasma de couverture peut être modélisé comme une source de chaleur surfacique, toutefois, une source de chaleur volumique est plus adaptée lorsqu'on veut englober dans la formulation de l'apport de chaleur la contribution énergétique des phénomènes qui ont lieu dans le bain fondu. Dans ce chapitre nous présentons quelques modélisations classiques

adaptées pour la source de chaleur [24]. Nous écrivons les expressions dans le repère lié à la source.

1.7.1. Source de chaleur ponctuelle:

L'énergie électrique délivrée par l'arc est assimilée à une source de chaleur ponctuelle mobile avec une vitesse constante. cette énergie est définie par [25] :

$$Q = UI\eta \quad (1.5)$$

Où : η : Rendement thermique de l'arc ;

U : Tension de soudage (Volt) ;

I : Intensité de courant de soudage (Ampère).

Bien que, ce modèle puisse prédire la vitesse de refroidissement du métal, le modèle de source ponctuelle ne fournit pas de rendements quantitatifs au sujet de la dimension ou la forme du bain fondu.

1.7.2. Source de chaleur en segments de lignes:

Dans ce modèle, la source de chaleur est composée de segments de lignes, chaque segment correspond à la direction du transfert thermique dans le bain de fusion. Par exemple, le transfert thermique dans la direction de pénétration (profondeur) dû au jet de plasma est approximativement exprimé par un segment de chaleur dans la direction de l'écoulement dans le bain de fusion. Les longueurs des segments de lignes de chaleur sont déterminées en se basant sur les observations expérimentales de la forme géométrique du bain de fusion.

1.7.3. Source de chaleur Gaussienne:

La modélisation de l'apport de chaleur en soudage s'appuie sur des modèles analytiques [24]. Une façon simple de représenter le flux surfacique est de choisir une densité de flux constante $q(x, y) = cste$ sur un disque de rayon

R_0 . dans ce cas, on a $q(x, y) = Q_m = cste = \frac{UI\eta}{2\pi R_0^2}$ où U est la tension, I l'intensité de courant et η le rendement.

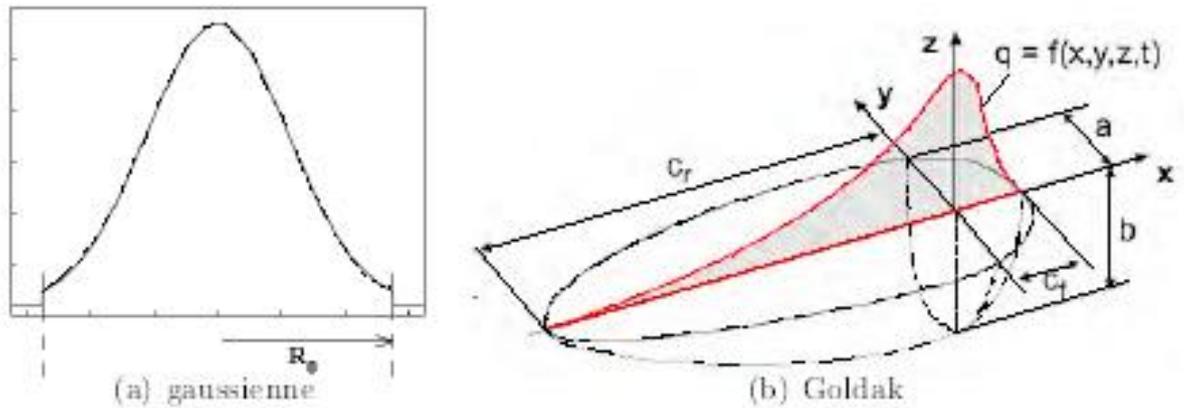


Figure 1.4 : Différentes formes de sources de chaleur.

Des auteurs ont proposé des distributions de type Gaussienne de rayon infini :

$$q(r) = \frac{UI\eta}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (1.6)$$

Où σ est l'écart type de la Gaussienne (m) et r est la distance radiale (m).

L'expression (1.6) concerne une répartition Gaussienne infinie. En pratique, on fixe souvent un rayon limite R_0 de la tache calorifique, tel que ce rayon limite définisse un cercle fini d'existence du flux thermique. Ce rayon est conventionnellement fixé de telle sorte que le flux $q(R_0)$ soit égal à 5% du flux maximal situé au centre de la source. On obtient ainsi, l'expression courante dans la littérature (Figure 1.4.a);

$$q(r) = \frac{3UI\eta}{\pi R_0^2} e^{-3\frac{r^2}{R_0^2}} \quad (1.7)$$

Par la suite, Goldak [24] propose pour le soudage à l'arc avec apport de matière (MIG, MAG et TIG), une source volumique en forme de deux ellipsoïdes (Figure 1.4.b). Celle-ci permet de tenir compte de la différence d'apport de chaleur devant et derrière l'électrode. Cette source est décrite par les relations suivantes:

$$Q_v(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}Qf_i}{abc_i\pi\sqrt{\pi}} e^{-\left(\left(\frac{x_s}{c_i}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_s}{b}\right)^2\right)} \quad (1.8)$$

$$f_f + f_r = 2$$

$$Q = UI\eta$$

Où $i = f$ si $x_s \geq 0$ ou $i = r$ si $x_s \leq 0$ et x_s, y_s, z_s sont les coordonnées du point considéré dans le repère mobile lié à la source de chaleur.

La détermination des paramètres intervenant dans les modèles de source décrits ci-dessus n'est pas aisée et nécessite toujours un recalage sur des données expérimentales (mesures de températures ou relevé de la zone fondue). Lorsque des relevés de la zone fondue (macrographies) sont disponibles, la profondeur de pénétration et la largeur de bain peuvent être utilisées pour fixer les coefficients des modèles source. Cependant, il faut garder à l'esprit la difficulté d'une mesure correcte de la température en raison des forts gradients thermiques engendrés et de la faible étendue de la zone affectée.

1.7.4. Source de chaleur volumique :

Dans le cas du soudage MIG/MAG, les gouttelettes transférées de l'électrode vers le bain de fusion sont fortement surchauffées. Une proportion significative de la chaleur transférée, pendant le procédé, est assurée par les gouttelettes de métal.

La définition d'une source de chaleur volumique, notée Q_v , avec une distribution cylindrique uniforme, (figure 1.5), représentant l'apport d'énergie de la goutte est généralement considérée [26].

La puissance apportée par les gouttes au bain de fusion est donnée par [26]:

$$Q_d = \rho_w \pi r_w^2 v_w c_{p,l} (T_d - T_l) \quad (1.9)$$

Où r_w est le rayon du fil d'apport, v_w la vitesse de dévidage. ρ_w densité du métal d'apport, $c_{p,l}$ est la capacité calorifique du métal liquide, T_d la température des gouttes (température de vaporisation qui limite la température maximale) et T_l la température du liquidus. En supposant que la puissance Q_d est distribuée dans un cylindre de rayon $R_v = f_d r_d$ et de hauteur d , le flux volumique Q_v , est calculé comme suit :

$$Q_v = \frac{Q_d}{\pi f_d^2 r_d^2 d} \quad (1.10)$$

Pour calculer le flux de chaleur volumique Q_v , il est nécessaire de connaître la hauteur d et le rayon des gouttes r_d . La hauteur d de la source est donnée par la relation suivante :

$$d = h_v - x_v + f_d r_d \quad (1.11)$$

Où h_v est la hauteur de la cavité due à l'impact de la goutte (position à laquelle la gouttelette libère sa quantité de chaleur), x_v est la distance parcourue par la base de la cavité entre les arrivées successives de deux gouttelettes (hauteur due au remplissage) et f_d un facteur généralement pris égal à 2 [27]. Les valeurs des variables h_v et x_v sont déterminées comme suit [26] :

$$h_v = \left(-\frac{2\sigma}{R_v \rho g} + \sqrt{\left(\frac{2\sigma}{R_v \rho g}\right)^2 + \frac{R_v v_d^2}{6g}} \right) \quad (1.12)$$

$$x_v = \left(h_v + \frac{2\sigma}{R_v \rho g} \right) \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{g}{h_v f}} \right) \right) \quad (1.13)$$

Où σ est la tension de surface, g la gravité, v_d vitesse des gouttes et f est fréquence de transfert des gouttes.

Rhee [28] et Jones [29] ont constaté que la fréquence de transfert des gouttes f est fortement affectée par la valeur du courant. Par interpolation et lissage des données expérimentales ils proposent l'expression suivante de la fréquence :

$$f = \frac{-243.44}{1 + \exp\left(\frac{I - 291.086}{6.06437}\right) + 323.506 - 0.874I + 0.0025I^2} \quad (1.14)$$

Où I est l'intensité de soudage. Connaissant la fréquence de transfert de goutte, et en supposant que les gouttes sont sphériques, le rayon des gouttes est donné par :

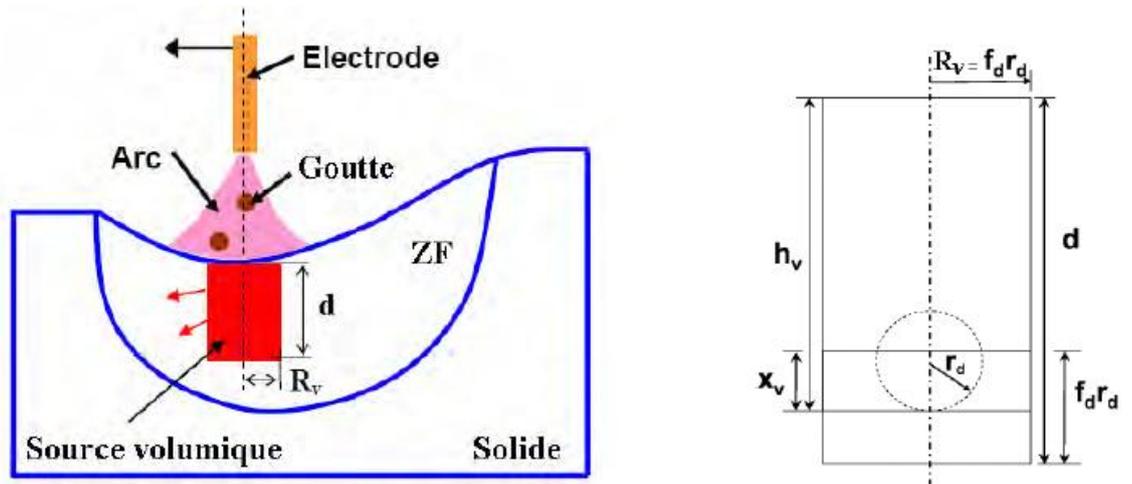


Figure 1.5 : Schéma illustrant la source de chaleur volumique [26].

$$r_d = \sqrt[3]{\frac{3r_w^2 v_w}{4f}} \quad (1.15)$$

On voit que ce modèle permet de définir complètement la source volumique associée à la chute des gouttes à partir des paramètres de soudage et de quelques hypothèses.

CHAPITRE 2

PRINCIPE DE SOUDAGE TIG

2.1. Historique de soudage :

Depuis des milliers d'années le soudage est utilisé à travers le monde. Il faut effectivement reconnaître que dans ces lointaines années, les matériaux, les procédés utilisés et le degré de fiabilité des assemblages soudés étaient très éloignés de nos réalisations actuelles.

L'ère industrielle du soudage débute avec le XIX^{ème} Siècle. La méthode d'assemblage par soudage devient alors de plus en plus utilisée dans les différentes entreprises. Celles-ci ressentent donc le besoin d'intégrer dans leurs équipes des spécialistes du soudage pour les aider dans leurs activités.

On estime aujourd'hui que 70% de la production mondiale de l'acier est destinée à la fabrication des produits soudés. On peut souder aujourd'hui des éléments de 0.01mm jusqu'à 1000mm, on soude presque tous les métaux et alliages utilisés avec des techniques modernes.

2.2. Définitions et présentation du soudage:

Le soudage est une opération d'assemblage où la continuité métallique entre les pièces à assembler est assurée par la fusion globale ou de proche en proche de leurs bords. On obtient ainsi, après solidification, un joint homogène aux caractéristiques plus au moins proche de celle du métal de base, ou un joint hétérogène dans le cas des métaux différents.

Cette opération peut être assimilée à une opération locale d'élaboration métallurgique et à une opération locale de traitement thermique donnant une structure cristalline dépendant à la fois de la composition chimique élaborée et du traitement thermique. Ainsi réalisée, la soudure se décompose en plusieurs zones (figure 2.1):

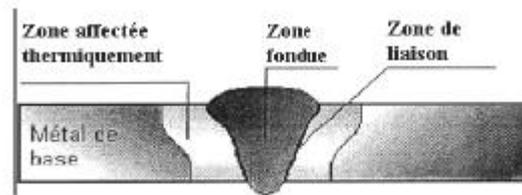


Figure 2.1 : cordon de soudage

2.2.1 La zone fondue (ZF) :

Zone où l'état liquide a été atteint et dans laquelle la composition chimique a été élaborée. La structure métallurgique obtenue après solidification, dépend du cycle de refroidissement. Il est donc possible d'examiner la composition d'une soudure ainsi que les variations de dureté.

2.2.2 La zone affectée thermiquement (ZAT) :

Zone se trouvant en bordure de la zone fondue, de largeur variable, ayant été soumise à l'élévation de température sans être portée à la fusion. Le chauffage, la composition chimique et la vitesse de refroidissement de cette zone génèrent les modifications plus ou moins importantes de la structure métallurgique.

2.2.3 La zone de liaison:

Cette zone, située à la frontière entre la ZF et la ZAT, correspondant à la surface sur laquelle la solidification du métal fondu a commencé.

2.2.4 Le métal de base:

Au-delà de la zone affectée thermiquement, l'élévation de température est insuffisante pour engendrer une quelconque transformation structurale. Cette zone est aussi dite non affectée.

Le soudage revêt également un aspect thermique particulier. On peut noter:

- Les rapides changements de température (élévation de température et refroidissement).

- Le faible temps de maintien de la température maximale.
- La localisation du point chaud entraînant un gradient de température important entre les parties chaudes et les parties froides.

Le cycle thermique résultant est responsable de la structure métallurgique des différentes zones de la soudure. Selon l'analyse chimique du matériau, un cycle rapide peut conduire à une structure fragile ou contraire douce et ductile. Le soudage est donc une opération de la métallurgie très complexe au cours de laquelle il faut prendre compte:

- le métal de base choisi en fonction de la pièce à réaliser pour ses particularités mécanique, chimique,...
- le triplet métal d'apport, métal de base et gaz de soudage, qui contribue à la composition chimique de la zone fondue. Le métal d'apport est choisi en fonction de la qualité et des caractéristiques que la soudure devra présenter.
- L'énergie de soudage qui régit le cycle thermique induisant la structure de la zone fondue et de la zone thermiquement affectée.

2.3 Procédés de soudage:

Il existe de nombreux procédés de soudage dont les principes et la mise en œuvre sont très différents. Pour les uns l'assemblage est obtenu par fusion locale des éléments à assembler, pour d'autre la continuité métallique est obtenue sans fusion par effets purement mécaniques. On peut schématiser sur un organigramme ces procédés en fonction des énergies mises en œuvre comme présenté sur la (Figure **2.2**).

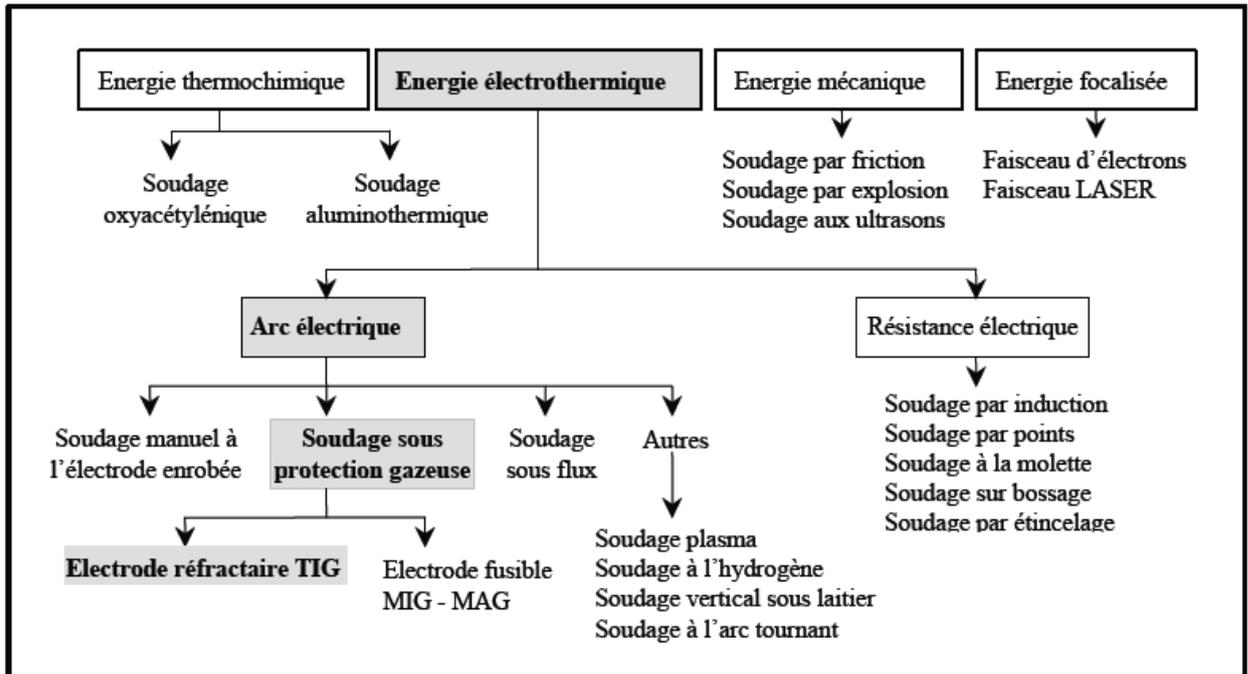


Figure 2.2: Classification des procédés de soudage [30]

La conséquence directe de cette classification est la comparaison des énergies des différentes sources. Notons qu'il est préférable d'utiliser la notion d'énergie spécifique (énergie par unité de surface) pour comparer les différents procédés entre eux (Figure 2.3).

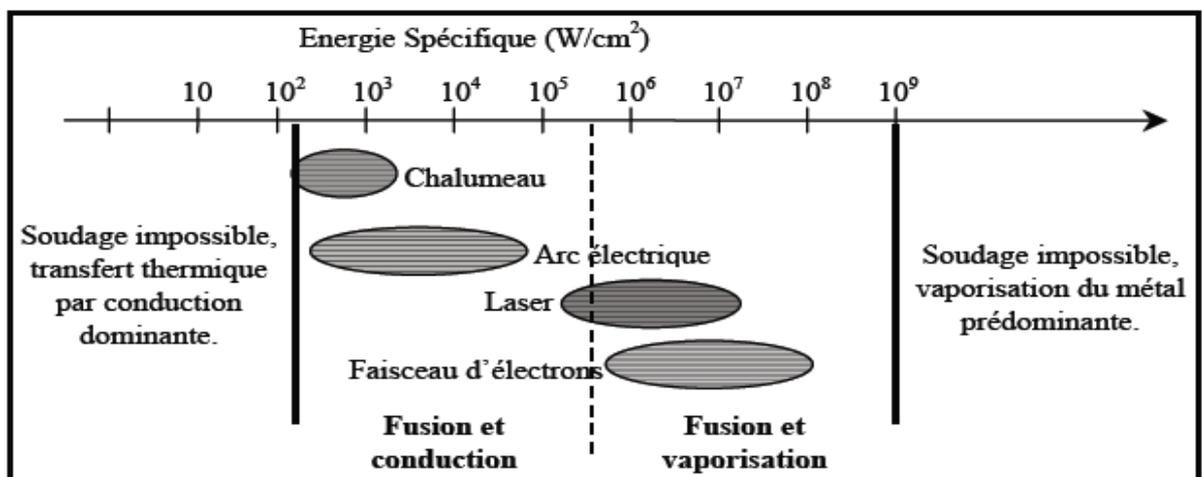


Figure 2.3 : Sources thermiques et densités d'énergies

Il ressort alors que les procédés à l'arc électrique ont des densités d'énergie moyennes et que leur rendement va varier suivant que l'on ait ou non transfert de métal. En effet, ce dernier facteur va nettement conditionner le

rendement d'arc mais surtout le taux de dépôt de métal qui est un des critères de production important dans le choix du procédé pour une réalisation donnée.

2.4 Le soudage TIG :

2.4.1 Introduction au soudage TIG :

Le mot TIG est un acronyme qui signifie "Tungsten Inert Gas". Il définit un procédé de soudage également appelé "Gas Tungsten Arc Welding" (GTAW) en langue anglo-américaine, pour lequel la fusion des bords à assembler est obtenue par la création d'un arc électrique. L'arc électrique est initié à partir d'une électrode réfractaire en tungstène dans un confinement de gaz inerte. L'électrode réfractaire en tungstène peut contenir des éléments d'addition comme le thorium ou l'yttrium qui favorisent l'émission électronique.

La source thermique d'origine électrique fournit suffisamment d'énergie aux pièces pour fondre leur bord. Lors du refroidissement, la liaison se solidifie et assure ainsi une continuité mécanique et métallurgique entre les deux pièces. Éventuellement, un métal d'apport peut être ajouté mais son introduction est totalement indépendante de la source thermique. L'arc et le bain fondu sont protégés de l'atmosphère ambiante par l'utilisation d'un gaz neutre. L'argon est le gaz le plus couramment utilisé mais il peut être parfois mélangé avec de l'hélium ou de l'hydrogène pour améliorer la soudabilité.

La simplicité de ce procédé permet d'obtenir des joints soudés d'excellente qualité pour la plupart des matériaux métalliques.

2.4.2 Matériel de soudage :

Le matériel nécessaire pour réaliser des soudures TIG est généralement constitué d'une source de courant, d'une source de gaz de protection et d'une torche de soudage (Figure 2.4). La flexibilité et la simplicité de cet équipement permettent une utilisation manuelle.

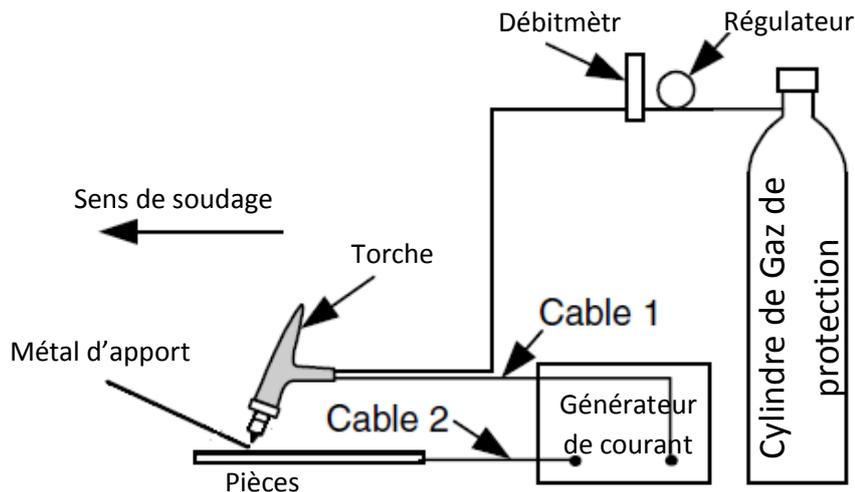


Figure 2.4: Représentation schématique du procédé de soudage TIG

2.4.2.1 Générateur de courant :

La source électrique délivre un courant continu lisse, continu pulsé ou alternatif. La plage d'intensités s'étend de quelques ampères à plus de 400A pour les postes automatisés. La tension de soudage varie de 8 à 30V. Toute l'électronique de commande du cycle de soudage (temporisation avant et après soudage, amorçage haute fréquence, dispositif de stabilisation d'arc, rampe de montée ou d'évanouissement d'arc, fréquence et intensité des pulsations) est intégrée dans la source et le cycle est programmé via un pupitre de commande.

2.4.2.2 Torche de soudage :

L'arc électrique est réalisé en bout de la torche de soudage, cette dernière est composée d'une électrode de tungstène, d'une buse céramique canalisant le flux de gaz neutre et d'une gâchette utilisable en soudage manuel pour commander l'arc. La torche peut être refroidie par un circuit fermé de fluide caloporteur (Figure 2.5).

2.4.2.3 Protection de l'électrode :

Le système de protection gazeuse est incorporé à la torche pour protéger l'arc et le bain. Bien souvent, l'utilisation de traînard de protection, endroit envers, vient garantir l'intégrité métallurgique du matériau au cours de son refroidissement

(notamment dans le cas de matériaux très sensibles à la pollution gazeuse comme le titane ou ses alliages).

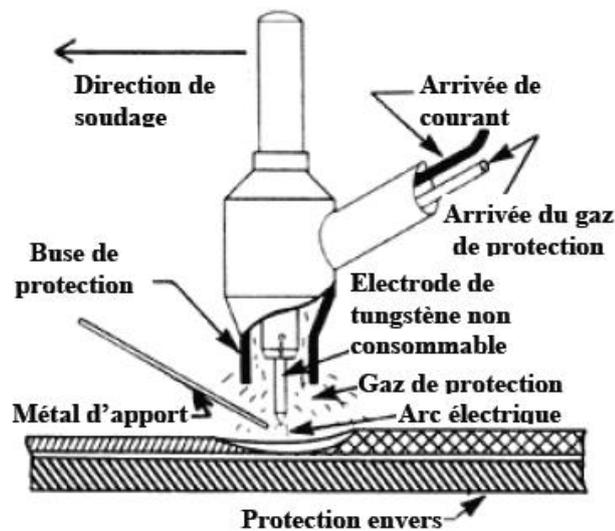


Figure 2.5 : Torche TIG

Ce procédé peut être aisément automatisé ; on trouve alors soit un banc de soudage qui permet d'effectuer des soudures rectilignes ou orbitales avec ou sans système d'amenée de métal d'apport, soit un robot articulé qui permet d'effectuer des trajectoires plus complexes.

Le soudage TIG assure l'intégrité de la zone fondue de part sa protection gazeuse. L'absence de transfert de métal dans l'arc assure un comportement d'arc et de bain très stable qui garantit des qualités de cordons optimales, lisses en endroit et en envers, exempts de défauts tels que les caniveaux, les morsures ou les projections de métal. Il est donc très souvent utilisé pour des matériaux dont le risque de pollution atmosphérique est important comme les alliages de titane, de nickel ou le zirconium, ou bien pour des applications qui requièrent une grande qualité de joint comme dans les industries agroalimentaires, pétrochimiques, nucléaires, aéronautiques et aérospatiales. De plus, pour éviter l'oxydation du métal et des zones thermiquement affectées en cours de refroidissement, on utilise des systèmes de protection du cordon endroit et envers par traînards qui servent à confiner sous atmosphère neutre les zones sensibles. On cherche donc à assurer une intégrité chimique optimale du matériau après soudure.

2.4.3 L'arc électrique en soudage :

Un arc électrique est une décharge électrique à travers un milieu gazeux. Il s'établi entre une électrode négative appelée cathode et une électrode positive appelée anode, les électrons circulant de la cathode vers l'anode. Cette conduction gazeuse établie entre les deux électrodes est accompagnée d'une température et d'une lumière intense (figure 2.6).

Cette source thermique d'origine électrique est à l'origine des procédés de soudage dits "à l'arc". Pour le procédé TIG, le soudage de la plupart des métaux et alliages est réalisé en courant continu et polarité directe (DC-EN) ; c'est à dire que l'électrode en tungstène est négative (cathode) et que les électrons sont bombardés vers les pièces à souder (anode).

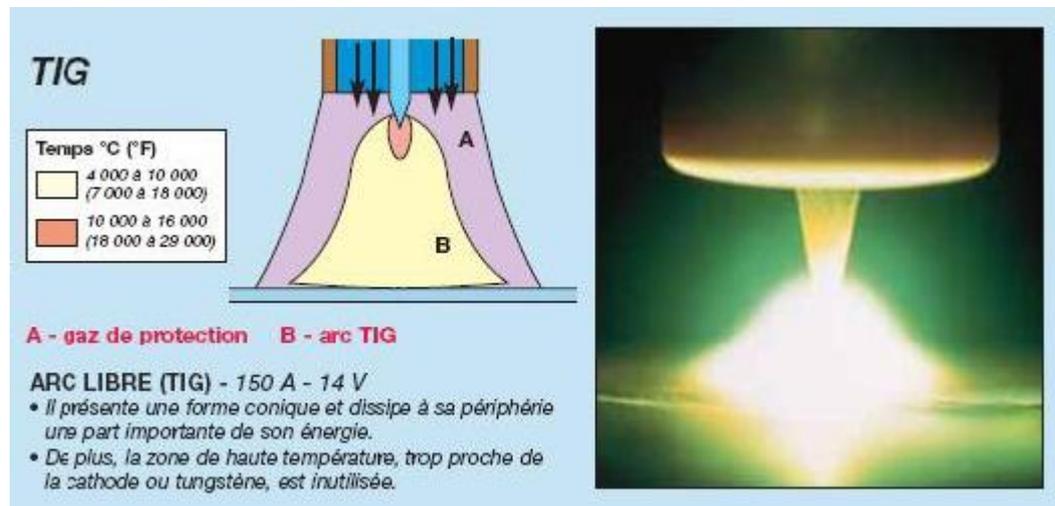


Figure 2.6 : Arc électrique en soudage TIG [31]

2.4.4 Polarité électrique :

Les procédés de soudage à l'arc peuvent être utilisés en courant continu (DC), avec l'électrode négative (EN) ou positive (EP), ou en courant alternatif (AC). Ces différentes configurations présentées sur la (figure 2.7) se traduisent par des différences de morphologies du bain de fusion [32].

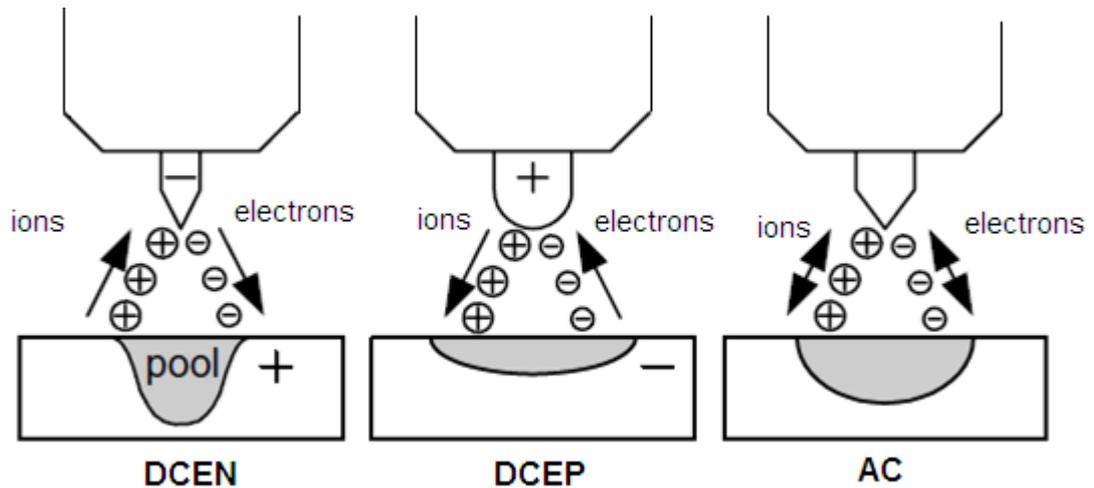


Figure 2.7 : Différente polarité en soudage TIG

2.4.4.1 DCEN :

En courant continu, lorsque l'électrode est connectée à la borne négative (DC-), les électrons sont émis de l'électrode de tungstène vers la pièce de travail de polarité positive. Ces électrons hautement énergétiques rentrent en collision avec la pièce en abandonnant leur énergie cinétique et génèrent un échauffement considérable. Il en résulte une pénétration importante, un cordon de soudure étroit mais aussi un apport de chaleur significatif pouvant induire des contraintes résiduelles et des déformations non désirables. Cependant ce mode est le plus employé pour des procédés comme le TIG où l'électrode est non consommable.

2.4.4.2 DCEP :

Lorsque l'électrode est connectée à la borne positive (DC+) l'effet de l'apport de chaleur des électrons par leur énergie cinétique se concentre sur l'électrode plutôt que sur la pièce de travail. Ceci nécessite un refroidissement plus important des électrodes et cela engendre un cordon moins pénétrant, plus large, et un faible échauffement de la pièce de travail. De plus les ions positifs qui rentrent en collision avec la pièce de travail en provenance de l'électrode positive ont un effet nettoyant sur la surface oxydée. Ce mode de soudage est préconisé pour le soudage de faibles épaisseurs des métaux s'oxydant rapidement comme l'aluminium et le magnésium.

2.4.4.3 AC :

Enfin le courant alternatif peut être utilisé pour alterner les avantages des deux modes cités précédemment durant la moitié des cycles ; la pénétration est assez bonne avec une action de nettoyage des surfaces oxydées.

2.5 Le soudage MIG/MAG:

Découvert au cours de la deuxième guerre mondiale, le développement de ce procédé (nommé aussi Gaz Metal Arc Welding) visait à réduire le coût de soudage des matériaux épais. Il est vite imposé dans l'industrie en raison de son efficacité au regard des soudures importantes au point de devenir le procédé le plus utilisé au monde. Les soudures ont également mis en évidence son efficacité pour souder l'aluminium grâce à son action nettoyante permettant de produire des soudures de qualité. Enfin, comparativement au procédé TIG, déjà employé à l'époque, le procédé GMAW s'est aussi révélé plus rapide, notamment sur les matériaux plus épais. Aujourd'hui, ce procédé de soudage est indispensable dans l'industrie de la fabrication en général.

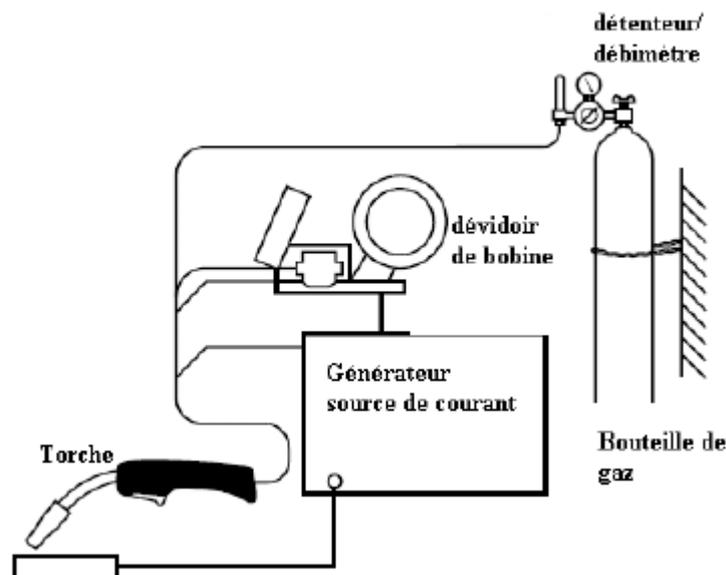


Figure 2.8 : Représentation schématique du procédé MIG/MAG

La fusion est obtenue grâce à un arc électrique s'établissant entre le fil-électrode, continu en fusible, et le métal de base (figure 2.9). Un gaz ou un mélange de gaz provenant d'une source externe (figure 2.8) assure la protection du bain de fusion

contre la contamination atmosphérique durant le soudage. La chaleur que dégage l'arc provoque la fusion de l'extrémité de fil-électrode et du métal de base. Différentes formes de gouttelettes de métal fondu, projetées de fil-électrode vers le bain de fusion où elles se solidifient, produisent la soudure désirée. Le fil-électrode, généralement de petit diamètre, est continuellement amené à l'arc de soudage, par un mécanisme de dévidage, où il fond sous l'effet de la chaleur qui y est générée.

Selon la nature du gaz de protection employé, le procédé GMAW se divise en deux catégories et est désigné par un acronyme spécifique. Ainsi, on distingue :

- Le procédé MAG (Métal Active Gaz) qui utilise un gaz actif. Il peut s'agir de gaz carbonique (CO₂), d'un mélange d'argon et de gaz carbonique (Ar-CO₂) ou d'un mélange d'argon et d'oxygène (Ar-O₂).
- Le procédé MIG (Métal Inerte Gaz) qui emploie un gaz inerte, à savoir de l'argon (Ar), de l'hélium (He) ou un mélange d'argon et d'hélium (Ar-He).

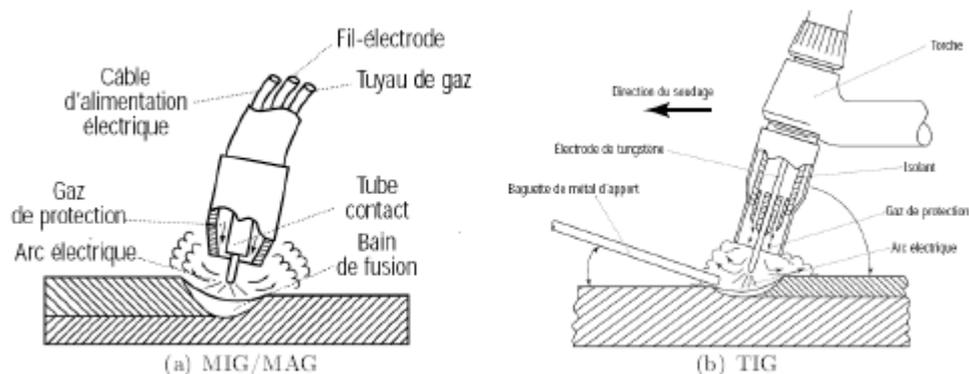


Figure 2.9 : Représentation schématique des procédés MIG/MAG et TIG [33][34]

2.6 Type de transfert du métal:[35]

Le soudage à l'arc de type MIG /MAG étant toujours alimenté en courant continu avec polarité inverse. L'électrode fusible est reliée au pôle positif. Le fil est alors soumis au flux d'électrons, ce qui favorise la fusion. Le choix de la polarité inverse s'explique par une plus grande stabilité de l'arc. En effet, dans le cas d'une polarisation directe, les gouttes de métal sont plus grosses et se détachent moins

facilement, ce qui conduit à l'obtention d'un cordon bombé. Les principaux modes de transferts sont les suivants :

- Le court-circuit (short arc),
- Le globulaire ou grosses gouttes (free fly),
- La pulvérisation axiale (spray arc)

On résume dans ce qui suit les différents modes de transfert de métal :

2.6.1 Transfert par court-circuit :

Ce régime existe avec un arc court, une faible intensité et une tension basse (inférieure à 20 V). Une goutte se forme à l'extrémité du fil, se rapproche de la pièce (figure **2.10.a**). Lorsqu'elle touche cette dernière, elle provoque un court-circuit qui, par effet de pincement électromagnétique (pinch effect), détache la goutte de fil. Le cycle recommence. Le détachement de la goutte génère des projections. La fréquence des courts-circuits est comprise entre 50 et 200 Hz. Ce régime est bien adapté au soudage des tôles minces, en toutes positions.

2.6.2 Transfert par pulvérisation axial :

Ce régime existe avec un arc long, une forte intensité (supérieure à 250 A/mm² de section de fil) et une tension élevée (supérieure à 20 V). Le fil fond alors sous la forme de très fines gouttelettes projetées vers la pièce, sans formation de court-circuit mais avec quelques projections (figure **2.10.c**).

Il s'utilise généralement sur tôles épaisses (supérieure à 6mm) en position à plat.

2.6.3 Transfert globulaire :

Ce régime est obtenu avec des valeurs de tension et intensité intermédiaires entre celles du court-circuit et de la pulvérisation axiale. La formation de grosses gouttes qui se détache de façon erratique et éclatent au contact de la pièce, génère de nombreuses projections (figure **2.10.b**). Ce mode de transfert est intéressant pour sa vitesse de soudage élevée sur des applications peu sensibles aux projections.

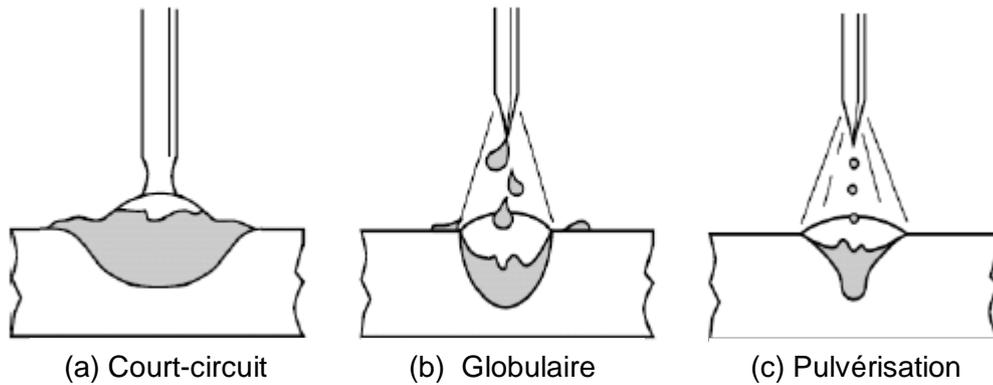


Figure 2.10 : modes de transfert du métal [36]

Alors on dit que les modes de transfert du métal d'apport dans l'arc sont en relation directe avec les paramètres électriques, la nature du fil, sa composition chimique et le gaz de protection.

2.7. Les phénomènes physiques impliqués :

Le soudage des aciers fait intervenir de nombreux phénomènes physiques, de l'ordre de la thermique (chauffage et refroidissement du matériau), de la métallurgie (solidification et transformations de phases du matériau), de la mécanique des fluides (fusion du matériau) et la mécanique des solides (application de contraintes et déformations résiduelles).

Ces différents phénomènes interagissent les uns avec les autres au travers de couplages forts et faibles. Tel qu'indiqué à la (figure **2.11**)

- Couplage thermomécanique :
- Couplage thermométallurgique :
- Couplages Mécanique /Métallurgie :
- Couplages thermohydrauliques :
- Couplages Mécanique des solides/Mécanique des fluides :
- Couplages Mécanique des solides/Métallurgie :

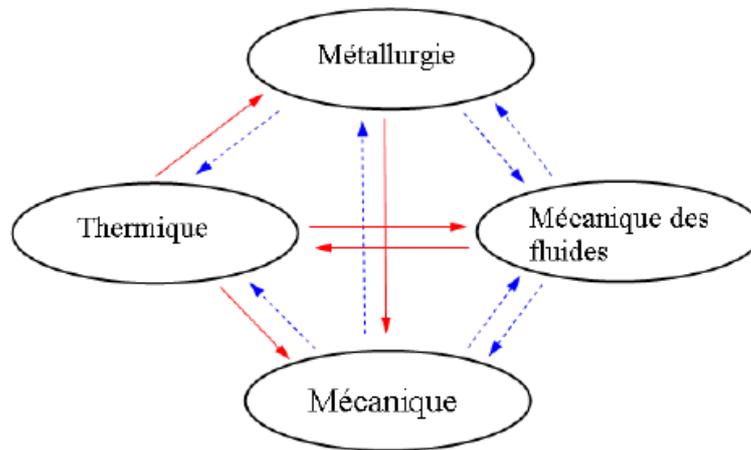


Figure 2.11 : Phénomènes physiques impliqués et leur couplage [37] :

—> couplage fort et - -> couplage faible.

CHAPITRE 3

MODELISATION MATHEMATIQUE

3.1. Introduction:

Ce présent chapitre est consacré à la modélisation mathématique du soudage TIG où nous avons découpé le champ thermique au champ des vitesses.

L'objectif de la résolution du problème thermique est de calculer l'histoire thermique associée au soudage de la structure à assembler. Ce calcul consiste à résoudre l'équation de la chaleur en considérant des conditions aux limites d'apport et de perte de chaleur par convection et rayonnement et une condition initial. L'équation de la chaleur est basée sur la conservation d'énergie décrite par le premier principe de la thermodynamique. Le comportement thermique est le plus souvent modélisé par la loi de Fourier qui exprime le flux de chaleur en fonction du gradient de température.

Il faut noter que ce modèle ne permet pas de prendre en compte le phénomène de convection dans le bain de fusion. Pour ne pas négliger ce phénomène, il est assez répandu d'augmenter artificiellement la conductivité thermique du matériau pour des températures supérieures à la température de fusion.

La modélisation thermique est suivi ensuite par une modélisation du mouvement du fluide dans le bain de fusion qui a été introduite afin de savoir le champ des vitesses du métal fondu dans le bain de fusion.

3.2. Thermodynamique et transfert thermique:

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température. Ceux-ci sont définis par la thermodynamique dans ses principes mêmes :

- Equivalence de la chaleur et du travail comme formes particulières de l'énergie. (premier principe)

- Mesure du déséquilibre thermique relatif de deux systèmes par leur différence de température, la valeur de cette différence caractérisant le sens et l'intensité de l'énergie calorifique transférée. (deuxième principe)

3.3. Les différents modes de transfert de la chaleur :

Il est habituelle, dans cette étude de transfert thermique lors du soudage, de distinguer trois grandes parties se rattachant chacune à un mode de transfert de la chaleur particulier :

- Conduction
- Convection
- Rayonnement

Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé. En effet, comme l'énergie thermique d'un milieu matériel correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine libération de mouvement (molécules, atomes, électrons libres, ...), ceux-ci pourront tout ou partie de leur énergie thermique, c'est-à-dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique :

- Soit par interaction directe avec les particules voisines, ce qui correspond à la conduction,
- Soit par absorption ou émission de radiations électromagnétiques, ce qui correspond au rayonnement.
- Enfin dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on considère également comme un mode de transfert de chaleur appelé convection, les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide à des températures différentes.

3.3.1. Conduction :

Le problème fondamental de la conduction est de trouver la température en tout point du solide et la puissance thermique échangée à travers ses surfaces. En effet, en tout point du Domaine de calcul, solide, s'applique une équation qui traduit le mécanisme local du transfert conductif: c'est l'équation de la chaleur.

3.3.1.1. Équation générale de la conduction [38]:

Considérons un milieu solide de volume V . L'état mécanique physico-chimique de ce milieu est supposé invariable. Soit $\rho \cdot Cp$ sa chaleur volumique, k sa conductivité thermique, et P la puissance générée par unité de volume, due aux sources internes.

Les caractéristiques thermiques $\rho \cdot Cp$ et k peuvent être fonction du point considéré et de la température à ce point. De plus P peut être une fonction du temps.

On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume fini v , de surface s , contenu dans V (figure 3.1) pour trouver le bilan énergétique. Avec les conventions habituelles, on compte positivement les énergies reçues par ce système.

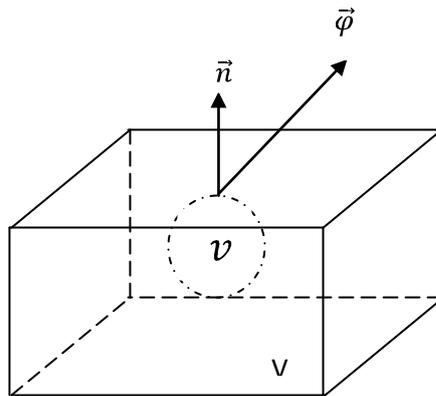


Figure 3.1 : volume élémentaire v dans le domaine de calcul V .

La quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur par unité de temps comprend la puissance échangée sur la surface limite s et la puissance fournie par les sources. La puissance traversant s en chacun de ses points, dans le sens de la normale extérieure \vec{n} , est donnée par :

$$\vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (3.1)$$

Où $\vec{\varphi}$ étant la densité de flux thermique, donnée par la loi de FOURIER:

$$\vec{\varphi} = -k. \overrightarrow{gradT} \quad (3.2)$$

\vec{n} étant la normale extérieur à la surface s , la puissance algébrique reçue par le volume v , travers s dans le sens opposé à \vec{n} , d'où l'expression de la puissance échangée sur la surface limite s :

$$\int_s -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (3.3)$$

La puissance générée par les sources internes est donnée par l'intégrale :

$$\int_v P \cdot dv \quad (3.4)$$

Le solide étant considéré comme indéformable, seul la variation locale de température intervient dans l'expression de la variation instantanée de l'énergie interne, soit :

$$\int_v \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (3.5)$$

L'équation traduisant le premier principe s'écrit alors :

$$\int_s -(\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) \cdot ds + \int_v P \cdot dv = \int_v \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (3.6)$$

La formule d'OSTROGRADSKY permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\int_s \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_v \text{div} \vec{\varphi} \cdot dv \quad (3.7)$$

On obtient alors :

$$\int_V \left[-\operatorname{div} \vec{\varphi} + P - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0 \quad (3.8)$$

v étant un volume arbitraire de V ; on a donc en chaque point de V :

$$\operatorname{div} \vec{\varphi} + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - P = 0 \quad (3.9)$$

On trouve finalement l'équation de la conduction thermique en coordonnées cartésiennes :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S \quad (3.10)$$

3.3.1.2. Quelque cas de la conductivité :

L'équation de la chaleur est généralement de type non linéaire où $k = f(T)$.

Dans le cas de :

- Milieu homogène : k est indépendant de la position.
- Milieu isotrope : k est un scalaire indépendant de la direction.
- Milieu anisotrope : k est un tenseur.

Résumé ;

- Si $k = cst$, l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{S}{k} \quad (3.11)$$

Avec $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$: étant la diffusivité thermique.

- Si la conductivité thermique est une fonction de la température, $k = f(T)$, l'équation régissant la conduction thermique en coordonnées cartésiennes étant :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k(T)}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + k(T) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (3.12)$$

Où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 = (\nabla T)^2$$

Et ;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \Delta T$$

Alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k(T)}{\partial T} (\nabla T)^2 + k(T) \Delta T + S \quad (3.13)$$

- Dans un milieu anisotrope, la conductivité thermique en 2D devient un

tenseur ; $\|\vec{k}\| = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$

Donc l'équation du transfert conductif dans un milieu anisotrope en coordonnées cartésiennes 2D devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \quad (3.14)$$

En générale, pour résoudre ce type d'équation, il nous faut une condition initiale et des conditions aux limites.

3.3.2. Convection [39]:

Un débit ou une circulation de liquide ou de gaz peut transporter avec lui une certaine quantité d'énergie thermique. Ce transport de chaleur porte le nom de CONVECTION thermique. Ce transport de l'énergie par un écoulement est analogue au transport d'autres quantités scalaires (non vectorielles). On retiendra donc que dans la convection, la chaleur se sert du fluide comme véhicule pour se déplacer. Sans entrer dans les détails, notons qu'il existe deux types de transferts convectifs:

➤ La convection forcée dans laquelle l'écoulement du fluide est forcé par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravité pour un liquide, ventilateur pour de l'air).

➤ La convection naturelle: lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il y aura ainsi circulation naturelle du fluide sous l'effet de la chaleur qui, par ailleurs, sera transportée avec lui: on parle de convection naturelle.

En convection on caractérise le flux de chaleur Φ qui est extrait par le fluide de température T_0 d'une paroi de surface S à la température T_p par :

$$\Phi = hS(T_p - T_0) \quad (3.15)$$

Où h est le coefficient d'échange par convection entre la paroi et le fluide.

3.3.3 Rayonnement :

La chaleur du soleil frappe pourtant notre planète alors qu'il n'y a aucun support solide, liquide ou gazeux au delà de l'atmosphère terrestre. Ceci signifie donc que l'énergie thermique peut tout de même traverser le vide. Ce mode de transfert s'appelle le rayonnement. Il correspond à un flux d'ondes électromagnétiques émises par tout corps, quelle que soit sa température.

Comme on l'imagine, le rayonnement électromagnétique est d'autant plus élevé que sa température est grande. Comme pour la conduction, ce sont les interactions entre atomes et molécules qui sont à l'origine de ce rayonnement. Elles peuvent le générer, ce qui diminue leur énergie, ou encore l'absorber, ce qui l'augmente. Le flux de chaleur Φ échangé par rayonnement thermique est :

$$\Phi = \varepsilon\sigma S(T_p^4 - T_0^4) \quad (3.16)$$

Une partie de ce chapitre sera consacré à la modélisation du phénomène de transfert thermique, du plan transversal au plan du soudage, lors d'une opération de soudage (TIG) sans métal d'apport, tel qu'en considérant le cas

d'une étude bidimensionnel instationnaire d'un assemblage de deux plaques métalliques minces de même nature du métal de base (soudage homogène), de l'acier inoxydable 304L.

3.4. Modélisation mathématique du transfert thermique :

Compte tenu de l'importance que revêt l'analyse thermique dans toute étude prévisionnelle du soudage, la répartition de la température en cours de soudage est basée sur la résolution de l'équation fondamentale régissant l'écoulement de la chaleur par conduction dans un solide.

3.4.1. Hypothèses thermiques:

Pour modéliser le processus, il est important de noter et d'évoquer les hypothèses suivantes :

- Le régime est transitoire et bidimensionnelle (O,x,z).
- La direction de soudage s'effectue selon un axe virtuel 'y'.
- Les propriétés thermiques K et ρCp du matériau sont fonction de la température.
- Prendre en considération le changement de phases.
- L'écoulement du bain de fusion est négligeable, alors que la convection du métal fondu dans le bain de fusion est nulle, avec augmentation artificielle de la conductivité thermique dans le bain de fusion.
- Les déperditions calorifiques par convection et rayonnement à travers les frontières de la pièce sont pris en considération.
- La source de chaleur (3.17) utilisée est une source mobile et répartit selon une distribution Gaussienne $S(x, t)$ avec prendre en considération la modélisation de l'approche et l'éloignement (3.19) de celle-ci par rapport au plan d'étude sélectionné.

$$S(x, t) = \frac{3Q}{\pi R_0^2} \exp \left[-\frac{3}{R_0^2} (x^2 + (y_i - y)^2) \right] \quad (3.17)$$

Avec $Q = \eta \cdot U \cdot I$

Où y_i représente la position du plan d'étude (figure 3.3), t est le temps de soudage et V vitesse de soudage, dont ces deux paramètres nous donnent la position de l'électrode y par la forme suivante $y = V \cdot t$.

On peut écrire la source de chaleur $S(x, t)$ de la forme suivante :

$$S(x, t) = \frac{3Q}{\pi R_0^2} Y(t) \exp\left[-\frac{3x^2}{R_0^2}\right] \quad (3.18)$$

Avec ;

$$Y(t) = \exp\left[-\frac{3}{R_0^2}(y_i - y)^2\right] \quad (3.19)$$

Où la fonction $Y(t)$ (3.19) représente l'approche et l'éloignement (figure 3.2) de l'électrode par rapport à la position du plan d'étude y_i sélectionnée.

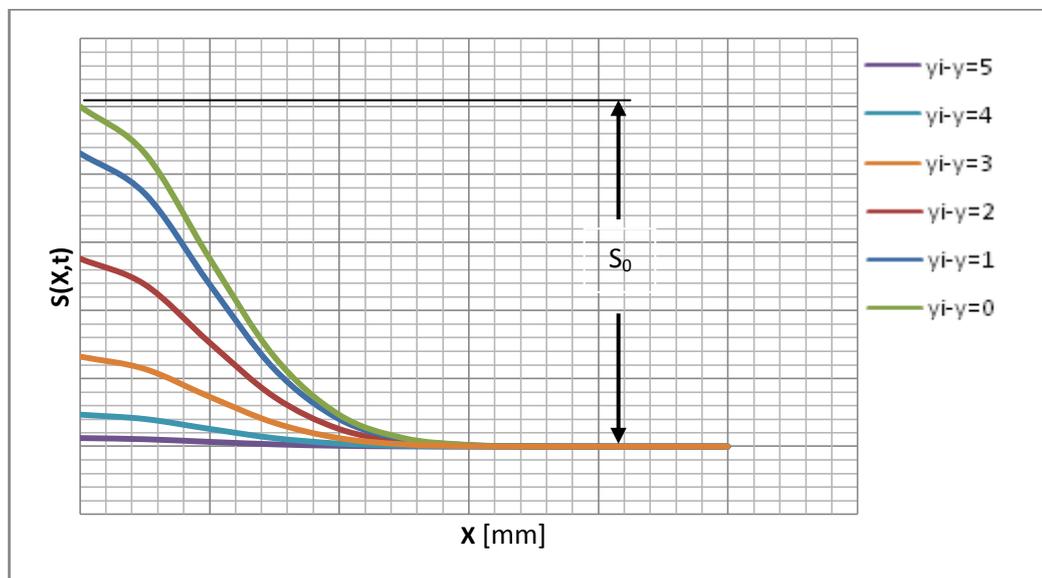


Figure 3.2: Evolution de la source de chaleur en fonction du temps t et x .

3.4.2 Équation régissant la chaleur :

L'équation de conduction thermique instationnaire pour un problème 2D dans les deux plaques métalliques à soudé s'écrit :

$$\rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S(x, t) \quad (3.20)$$

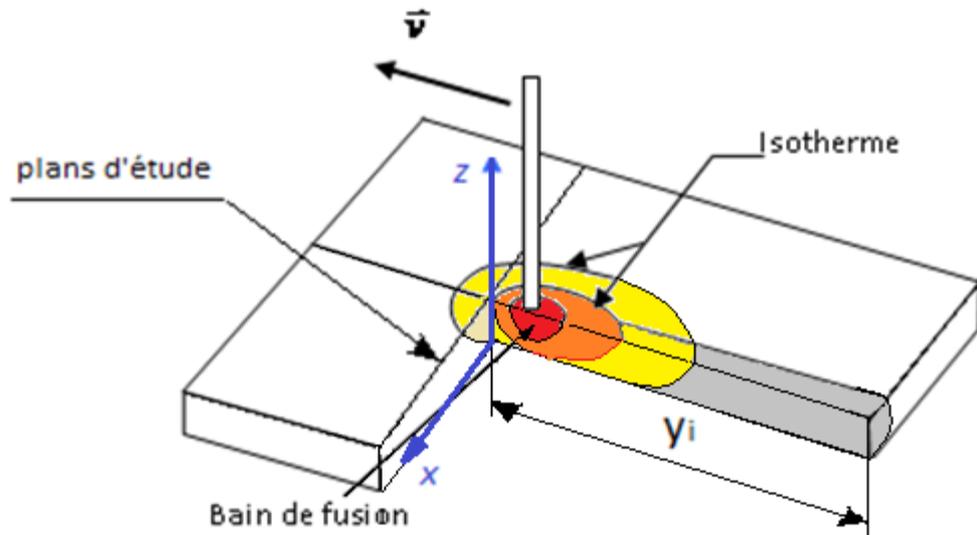


Figure 3.3 : Schéma du processus de soudage

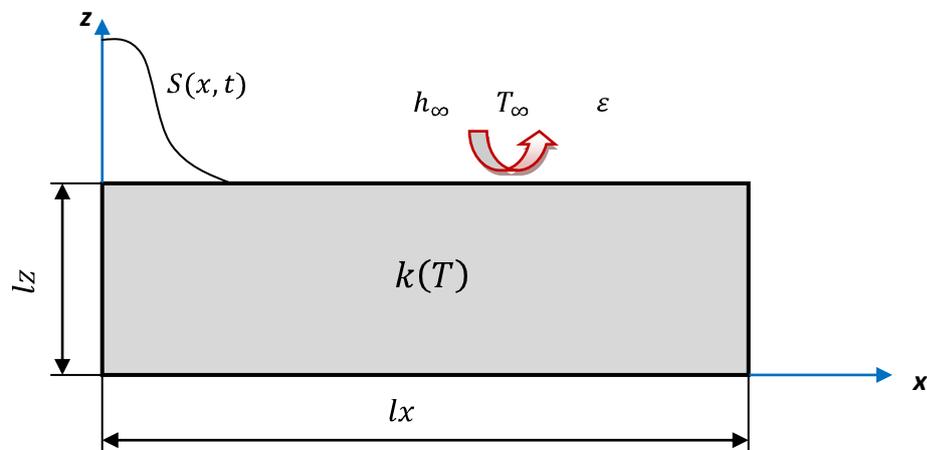


Figure 3.4 : Présentation du demi-plan d'étude et de la source de l'arc.

Suite aux hypothèses notées au-dessus on peut distinguer les conditions aux limites et initiale pour bien poser le problème et avoir une solution unique de l'équation (3.20).

3.4.3. Conditions aux limites et initial thermique:

Les conditions aux limites et initial sont une partie très délicate du problème. Puisqu'on travaille sur un domaine Bidimensionnel, les conditions aux limites seront appliquées aux frontières et sont déterminées à partir des équations

d'échange du flux de chaleur par convection et rayonnement avec le milieu environnant.

Alors, elles se résument comme suit :

- Pour la frontière inférieure, $z = 0$ on a :

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = h_{\infty}(T - T_{\infty}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\infty}^4) \quad (3.21)$$

- la frontière droite, $x = l_x$, on a:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h_{\infty}(T - T_{\infty}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\infty}^4) \quad (3.22)$$

- pour $x = 0$, on utilise la condition de symétrie, donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

- pour la frontière supérieure où la source est appliquée, $z = l_z$, on a :

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{Lz} = S(x, t) - h_{\infty}(T - T_{\infty}) - \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\infty}^4) \quad (3.24)$$

- La température initiale du matériau est supposée égale à la température ambiante

$$T(t = 0) = 300 \text{ K} \quad (3.25)$$

3.5. Le changement de phase :

Lorsque la température de fusion est atteinte, une interface solide/liquide se crée. Cette transformation est caractérisée par une absorption ou une libération d'une certaine quantité d'énergie, qui provient de la modification de l'énergie de liaison inter-atomique entre les phases liquide et solide, Il y a une discontinuité avec le gradient de température dans l'interface de transition de phase, absorbe la

chaleur latente tout en fondant, et libère la chaleur latente tout en solidifiant. Cet échange d'énergie se traduit par une évolution de l'enthalpie du matériau.

Dans le cas des métaux purs, cette évolution se fait à température constante et correspond à une discontinuité de l'enthalpie.

L'équation (3.10) s'exprime alors :

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \nabla T) + S(x, t) \quad (3.26)$$

La fonction enthalpie massique $H(T)$ est introduite (Figure 3.5). Elle inclut la chaleur latente par unité de masse L_f et est définie comme suit :

$$H(T) = \int_{T_0}^T c_p(\tau) d\tau + f_l L_f \quad (3.27)$$

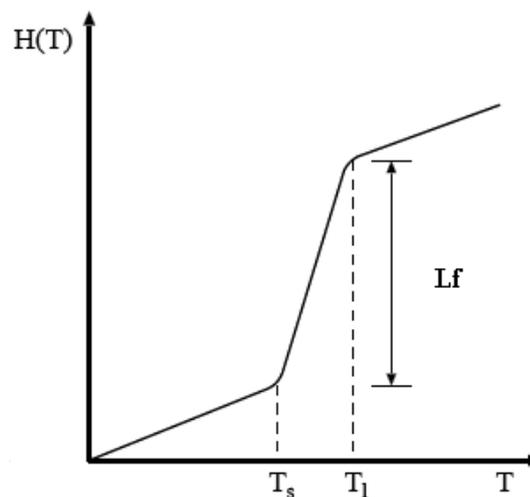


Figure 3.5: évolution de l'enthalpie en fonction de la température.

Et la fraction liquide est donnée comme ci-dessous :

$$f_l = \begin{cases} 1, & T > T_l \\ \frac{T - T_s}{T_l - T_s}, & T_s \leq T \leq T_l \\ 0, & T < T_s \end{cases} \quad (3.28)$$

Avec T_l et T_s sont les températures de liquidus et solidus respectivement, et la chaleur latente existe entre ces deux températures. Où f_l est la fraction du métal fondu ou fraction liquide, assumée pour varier linéairement avec la température dans la zone détremée [40].

La formulation en capacité calorifique équivalente a été adoptée, cette méthode consiste à prendre en compte la chaleur latente directement dans la chaleur spécifique C_p . Ainsi, si le chemin de solidification n'est fonction que de la température, on peut formellement définir une chaleur spécifique équivalente:

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho L_f \frac{\partial f_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \rho C_{p_{eq}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.29)$$

La chaleur spécifique équivalente est ainsi définie [37]:

$$C_{p_{eq}} = C_p + L_f \frac{\partial f_l}{\partial T} \quad (3.30)$$

On trouve à partir de l'équation (3.28) :

$$\frac{\partial f_l}{\partial T} = \begin{cases} 0, & T > T_l \\ \frac{1}{T_l - T_s}, & T_s \leq T \leq T_l \\ 0, & T < T_s \end{cases} \quad (3.31)$$

On remarque, à partir des équations (3.30) et (3.31), que la chaleur latente n'existe que dans l'interface liquide/solide. En 1973 Bonacina [41] a utilisé la méthode de la chaleur spécifique équivalente décrite ci-dessous :

$$C_{p_{eq}} = C_p + D L_f \quad (3.32)$$

Où D une fonction pour laquelle on choisira une impulsion gaussienne normale d'intégrale unité, définie comme ci-dessous:

$$D = \frac{e^{-\frac{(T-T_l)}{\Delta T^2}}}{\sqrt{\pi \Delta T^2}} \text{ avec } \Delta T = T_l - T_s \quad (3.33)$$

La formulation enthalpique permet facilement d'obtenir des solutions numériques, mais elle ne permet pas de rendre compte des mouvements de fluides au sein de la zone fondue.

3.6. La conductivité thermique :

La mécanique des fluides dans le bain de fusion n'est pas envisagée, de façon à réduire les temps de calcul. La conductivité thermique de la phase liquide sera néanmoins augmentée artificiellement pour tenir compte des effets du transfert de chaleur par convection dans le bain de fusion. Cette technique, bien que très approximative, est utilisée couramment dans les modèles purement conductifs. Elle permet, d'une part, d'homogénéiser le champ de température dans le bain liquide et d'autre part, de modifier les formes de bain. Il est ainsi possible d'allonger artificiellement le bain de fusion dans une direction donnée en choisissant une conductivité anisotrope (qui sera plus grande dans la direction choisie). Cette méthode a cependant ses limites, comme l'a souligné Hamide [37]. Il a comparé des modèles thermohydrauliques avec des modèles de conduction pure utilisant ou non une conductivité modifiée pour le cas du soudage.

3.7. Modification de la conductivité thermique :

Comme nous l'avons présenté dans les hypothèses du modèle, nous avons modifié la conductivité thermique de la phase liquide afin de prendre en compte artificiellement les effets de la convection due au mouvement du fluide dans la zone fondue. Cette technique est largement répandue lorsque des modèles purement conductifs sont utilisés, puisqu'elle évite de résoudre le couplage, qui est très exigeant en moyen de calcul, de l'équation de l'énergie avec les équations de Navier-Stokes.

Également de [42], la conductivité thermique dans le bain liquide a été calculée par l'équation suivante :

$$k = (1 - f_l)k_s + (1 + A_{mix})f_l k_L \quad (3.34)$$

Avec f_l fraction liquide définie par l'équation (3.28) ; $(1 - f_l) = f_s$ fraction solide ; k_s conductivité thermique de la phase solide ; k_L conductivité thermique de la phase liquide et A_{mix} est un paramètre décrivant l'effet de la convection liquide

(mouvement liquide dans le bain fondu) sur la conductivité thermique ou on peut dire que A_{mix} représente l'augmentation de la conductivité thermique dans le bain de fusion.

Si le constant A_{mix} est nul, il n'y a aucun transfert de chaleur dans la zone liquide due à la convection, c.-à-d., la phase liquide est stagnante.

Dans notre travail on suppose que la constante A_{mix} est indépendante de f_l ou f_s .

La modification de la conductivité thermique a, par exemple, été utilisée pour la simulation du soudage TIG [37], ou du soudage laser [43]-[44]-[45] ou du soudage MIG-MAG [46]-[47]. Les auteurs introduisent généralement un facteur multiplicatif devant la valeur de la conductivité thermique prise pour la phase liquide qui varie selon les auteurs.

Pour le cas du soudage MIG-MAG, Wahab a utilisé une conductivité isotrope multipliée par 5 à 10 afin de reproduire les mêmes longueurs et profondeurs de cordon observées expérimentalement [46].

Kumar et DebRoy ont choisi une conductivité isotrope multipliée par 12 pour leur modèle tridimensionnel purement thermique pour simuler un cordon de soudure obtenu par procédé MIG-MAG [47]. Ils n'ont cependant pas comparé les longueurs de bain.

3.8. Modélisation mathématique du bain de fusion:

Cette partie est consacrée à l'étude des mouvements dans le bain de fusion qui consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes. Ces mouvements sont animés par des forces d'origines physiques différentes qui conditionnent, selon leur orientation, l'allure mouillante ou pénétrante du joint soude ; les courants sont respectivement centrifuges ou centripètes (Figure 3.6).

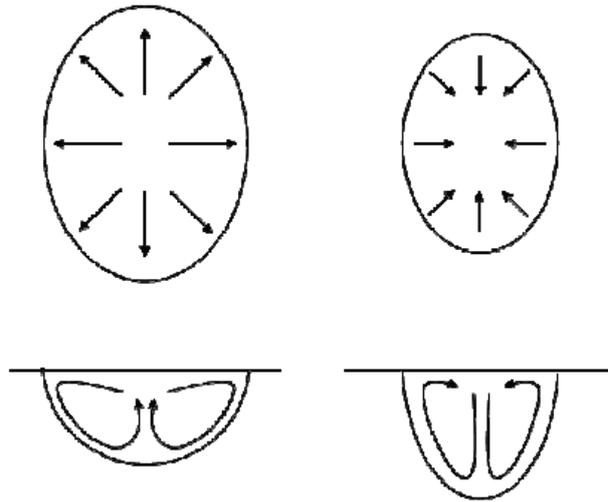


Figure 3.6 : Deux types de mouvement du fluide dans le bain de fusion : Écoulements radiaux centrifuges (gauche) et écoulements radiaux centripètes (droite).

3.9. Bilan dans le bain de fusion :

Le recensement des forces en présence dans le bain de fusion a mis en évidence des actions d'origines physiques très différentes. La formation du bain de fusion est régie par l'équilibre de ces forces dans le bain.

Les mouvements dans le bain de fusion peuvent être décrits par les équations de Navier-stokes. C'est un ensemble d'équations partielles non-linéaires qui décrivent l'écoulement des fluides dans lesquelles toutes les variables sont considérées comme des fonctions continues des coordonnées spatiales et du temps.

Dans notre cas (Figure 3.3) les deux variables indépendantes sont donc les variables d'espace x et z et quatre sont dépendantes ; la pression, la densité, et les deux composantes du vecteur vitesse.

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\nabla P + \rho\vec{F} + \nabla(\mu\nabla\vec{U}) \quad (3.35)$$

Et l'équation de conservation de la masse :

$$\nabla(\rho \cdot u) = 0 \quad (3.36)$$

Avec μ est la viscosité dynamique et \vec{F} est la somme des forces extérieures par unité de masse.

3.9.1. Pression de l'arc :

La pression de l'arc sur le bain de fusion est principalement régie par le flux du gaz plasmagène. Elle dépend fortement de l'intensité de soudage (Equation 3.37). Pour des courants de soudage élevés ($> 200A$), la pression de l'arc engendre une dépression de la surface libre du bain [48]. Cette dépression favorise la formation d'un bain pénétrant en chassant un filme du métal fondu en surface, le liquide en surface joue le rôle d'isolant thermique entre la source thermique et le bain de fusion.

$$P_r = kI^2 \exp(-ar) \quad (3.37)$$

Avec les constantes a et k sont fonction de la longueur d'arc, du diamètre et de la géométrie de l'électrode.

3.9.2. Flottaison [49]:

La force de flottaison est créée par la variation de la densité du fluide dans le bain fondu, cette variation est causée par le gradient de température spatiale dans le bain. A partir de l'approximation de Boussinesq, l'expression des forces de flottabilité \vec{F} est donnée par l'équation :

$$\vec{F} = \rho_0 \vec{g} (1 - \beta(T - T_0)) \quad (3.38)$$

Avec ρ_0 la masse volumique de la référence, g est l'accélération de la pesanteur, β le coefficient de dilatation volumique, T la température du liquide et T_0 la température de référence.

Les variations de la densité provoquent un mouvement du fluide de la zone chaude vers la région froide du bain fondu. Sous l'action de la force de flottabilité les particules fluides se déplacent jusqu'à la surface et vers les bords (Figure 3.7) [49]. Le bain est étendu suivant la longueur, et rétréci suivant la hauteur (profondeur).

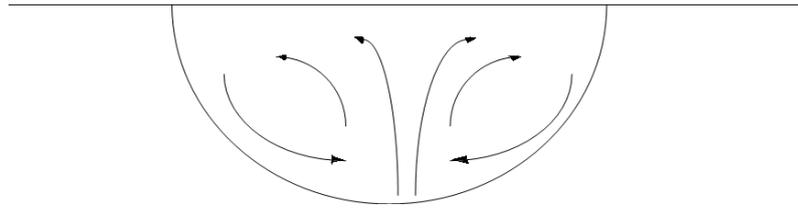


Figure 3.7 : convection par Flottaison.

Cependant, comme il sera montré ultérieurement, l'influence de cette force sur le transfert de chaleur et les courants du fluide dans le bain est négligeable.

3.9.3. Convection thermique de Marangoni [49]-[50]:

La tension superficielle, est une propriété thermodynamique, fonction de la température et de concentration. Elle mesure la force de liaison entre deux atomes sur la surface libre. En général, pour les métaux et les alliages purs la liaison entre deux atomes diminue avec l'augmentation de la température et de ce fait la tension superficielle diminue. En outre, pour les métaux et les alliages purs le coefficient de la tension superficielle est une constante négative de l'ordre de 10^{-4} N/m.K. La présence des éléments tensioactifs, tels que le soufre, l'oxygène, le sélénium, le tellurium, etc., renforce les liens extérieurs avec l'augmentation de la température.

Il en résulte que le coefficient de tension superficielle augmente avec la température. Cependant une température très élevée provoque une rupture des forces de liaison et il en résulte une diminution de la tension superficielle et par conséquent du coefficient de tension superficielle.

Pour la surface libre du bain, la force de la tension superficielle est produite par le gradient de la tension superficielle spatiale, cette force est également appelée la force de Marangoni [49].

A la surface libre du bain fondu l'équilibre des forces donne :

$$\vec{F} = -\frac{\partial \gamma}{\partial T} \overrightarrow{grad}(T) \quad (3.39)$$

L'action, à la surface libre du bain, des forces tangentielles provoque un mouvement convectif de fluide. C'est le moteur principal des mouvements de convection dus aux importants gradients de température présents en soudage.

Comme la tension superficielle est fonction de la température, et de l'activité des éléments tensioactifs (soufre, oxydes) présents à la surface libre du bain fondu, deux types de convection Marangoni se produisent : convection thermique et solutale. Les convections sont régies par l'équation suivante [51]:

$$\tau_{mar} = \mu_l \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial \gamma}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x} \quad (3.40)$$

Où u : est la composante de la vitesse suivant l'axe des x (figure 3.8),

a_i : les activités thermodynamiques des éléments (alliage)

La convection solutale est très peu intense devant la convection thermique ($\frac{\partial \gamma}{\partial a_i} = 0$).

Mais $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ dépend des agents actifs.

$$\gamma = \gamma_m - A(T - T_l) - RT\Gamma_s \ln(1 + k_1 a_s \exp(-\Delta H_0/RT)) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -A - RT\Gamma_s \ln(1 + k a_s) - \frac{k a_s}{(1 + k a_s)} \frac{\Gamma_s \Delta H_0}{T} \quad (3.42)$$

Avec :

$$k = k_1 \exp(-\Delta H_0/RT) \quad (3.43)$$

Sous l'action de la tension superficielle le mouvement du fluide influe directement sur la forme du bain selon le signe du coefficient thermique de tension superficielle $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$.

Ce dernier $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ a pour un métal pur une valeur négative. Dans ce cas le fluide se déplace radialement vers l'extérieur, en donnant une forme large et peu profonde au bain. En présence des traces significatives de soufre (sulfures) ou d'oxygène (oxydes) à la surface du bain (alliage), le coefficient $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ est positif.

L'écoulement du fluide, et la forme de bain fondu sont alors différents du cas précédent. La largeur du bain est plus faible, mais la profondeur est plus élevée que dans le cas où $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ négatif.

On peut alors écrire le bilan dynamique stationnaire dans le bain de fusion en coordonnées cartésiennes 2-D comme suit :

Equation de conservation de masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.44)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction des x :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.45)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction des z :

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho F_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.46)$$

Où : $\rho F_x = 0$ et $\rho F_z = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))g$

3.10. Conditions aux limites dynamiques :

Dans notre étude la tension superficielle appliquée sur le bain de fusion est utilisée comme une condition limite appliquée à la frontière supérieure du bain (figure **3.8**).

- Frontière supérieur :

$$v = 0 \quad (3.47)$$

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \overrightarrow{grad}(T) \quad (3.48)$$

- frontière de symétrie :

$$u = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.50)$$

- frontière inférieur et droite du domaine d'étude :

$$u = 0 \quad (3.51)$$

$$v = 0 \quad (3.52)$$

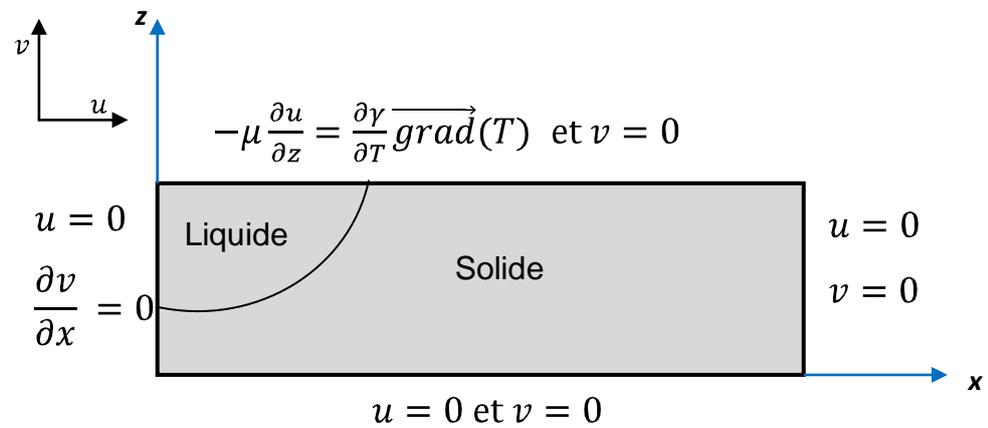


Figure 3.8 : conditions aux limites dynamique.

3.11. Conclusion :

Le chauffage de la pièce à souder, et la création d'un bain de fusion, résultent des phénomènes thermophysiques complexes. L'arc électrique, et surtout le plasma de couverture, transmettent à la surface de la pièce un flux de chaleur intense. Une partie de l'énergie émise est perdue par convection et rayonnement autour de la colonne d'arc.

L'énergie qui pénètre dans la pièce crée un bain de fusion. Dans ce bain de fusion, la chaleur se transmet par conduction, mais également par convection, cette dernière influençant tout particulièrement la forme du front de fusion. En outre, à la frontière liquide-solide, le flux de conduction qui passe de la partie liquide à la partie solide subit en outre une discontinuité, égale à la chaleur latente de changement de phase.

Dans la partie solide, les transferts de chaleur se font par conduction uniquement et sur les bords solides de la pièce, les échanges avec l'environnement sont de types radiatifs et convectifs.

CHAPITRE 4

SIMULATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS

4.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré à la description de la méthode numérique utilisée pour la résolution de l'équation de conduction thermique et des équations de conservation de la quantité de mouvement décrites dans le chapitre précédent. Une étude détaillée de la discrétisation par la méthode des volumes finis ainsi la technique de résolution ligne par ligne des équations algébriques. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour traiter le couplage vitesse pression des équations de la conservation de la quantité de mouvement du métal fondu.

4.2. Méthode numérique :

La résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles par une méthode discrète consiste à la transformer en systèmes d'équations algébriques de dimensions égales au nombre de points discrets. Cette étape est appelée « discrétisation ».

Dans cette étude, on utilise la méthode des volumes finis qui offre un bon compromis entre la souplesse de mise en œuvre, la précision des solutions et la puissance des moyens informatiques utilisés.

4.2.1. Discrétisation spatiale :

Actuellement, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur, de quantité de mouvement, de masse etc., ces trois méthodes de discrétisation les plus connues sont :

- méthodes des différences finies (MDF) ;

- méthodes des éléments finis (MEF) ;
- méthodes des volumes finis (MVF).

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide d'un développement en séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins.

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (généralement des triangles ou des quadrangles). En suite, la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un des éléments.

La méthode des volumes finis qui a été adoptée dans cette étude consiste à exprimer le bilan de la grandeur étudiée (masse, énergie, quantité de mouvement ...) sur un volume de contrôle. Ces volumes de contrôle sont généralement rectangulaires délimités par des lignes parallèles aux axes des coordonnées. Cette méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar [52].

4.2.2. Discrétisation temporelle :

Pour la discrétisation temporelle il y a de nombreuses possibilités, on peut prendre la température à l'instant t_0, T_i^0 , à l'instant t, T_i ou une combinaison linéaire des températures à l'instant t_0 et t , avec $t = t_0 + \Delta t$. La forme générale d'intégration temporelle s'écrit pour T_i :

$$\int_{t_0}^t T_i dt = (fT_i + (1-f)T_i^0)\Delta t, \quad i = P, W, E, S, N \quad (4.1)$$

Où $0 \leq f \leq 1$ est un facteur de pondération.

Pour la discrétisation temporelle il y'a trois schémas:

4.2.2.1. Schéma explicite :

Dans ce schéma f prend la valeur 0, cela signifie que lorsqu'on remplace (4.1) dans l'équation discrétisée, T_p est obtenu explicitement en termes de valeurs T_i^0 ($i = W, E, S, N$). ce schéma est très simple mais conditionnellement stable.

4.2.2.2. Schéma de Crank-Nicolson :

Pour ce schéma la variable f prend la valeur 0.5. On trouve que T_p est fonction de T_i et T_i^0 ($i = W, E, S, N$). Ce schéma nécessite aussi le respect d'un critère de stabilité.

4.2.2.3. Schéma totalement implicite :

Pour garder les coefficients de l'équation discrétisée toujours positifs, on doit donner la valeur 1 au facteur f . Ce schéma est inconditionnellement stable, alors il n'a aucun critère de stabilité à respecter. De plus il a donné des résultats satisfaisant.

4.3. Notions générales sur la méthode des volumes finis :

La résolution d'un problème par la méthode des volumes finis passe par les étapes suivantes :

- Maillage du domaine physique de calcul (distribution des volumes de contrôle)
- Discrétisation des différentes équations régissant le phénomène considéré.
- Choix d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations obtenues après discrétisation.

4.4. Distribution des volumes de contrôle :

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un nombre fini de volumes de contrôle (figure 4.1). Il faut bien distinguer les indices en lettres majuscules qui désignent des grandeurs attachées au point situé au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes. Si nous appelons P le nœud considéré alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés :

East (E), West (W), North (N), et South (S) pour des problèmes bidimensionnels. Les faces du volume de contrôle seront dénommées de la même façon. Dans le but d'assurer une expression correcte du bilan de conservation d'une entité physique quelconque cette méthode utilise un maillage décalé (staggered grid) en fonction de la nature même de l'entité considérée. La pression et la température sont calculées en considérant un volume de contrôle centré autour du point P, donc entre les faces e, w, s, et n (en bidimensionnel). Les vitesses seront estimées dans un volume centré sur la face est entre deux plans passant par les nœuds P et E et limite par les faces sud et nord. Il découle directement de cette localisation que le calcul des flux de masse à travers des interfaces se fera sans aucune interpolation de la vitesse sur ces interfaces.

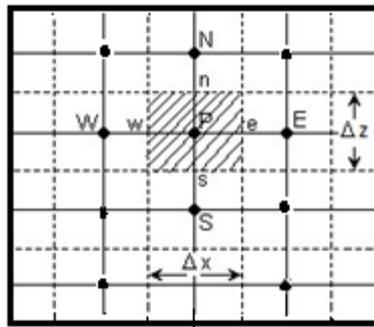


Figure. 4.1: Distribution des volumes de contrôle.

L'avantage de cet arrangement est nettement plus important au niveau de l'équation de continuité, car celle-ci étant intégrée sur le volume de contrôle principal fera apparaître la différence entre deux vitesses adjacentes, éliminant ainsi les problèmes d'interpolation.

D'autre part au niveau de l'équation de la quantité de mouvement, la différence de pression prise en compte sera elle aussi issue de deux nœuds adjacents et sera donc la force motrice naturelle pour la vitesse.

4.5. Simulation thermique :

4.5.1. Discrétisation de l'équation de conduction:

L'équation régissant le problème de la conduction thermique est, l'équation (4.2), de la forme différentielle partielle complexe, ainsi les coefficients k et $\rho C p^{eq}$ sont en fonction de la température, et les conditions aux limites sont de forme non

homogène avec une source de chaleur gaussienne mobile, équation (4.5) , en fonction de la géométrie x et du temps de soudage t , apparait sur la frontière supérieur du plan d'étude, alors il y'a qu'une seul sorte de la résolution qui est la résolution numérique.

Dans l'étude thermique en basant sur la discrétisation par la méthode des volumes finis de l'équation de conduction thermique 2-D du modèle de soudage représentée en détail dans le chapitre précédent, où l'équation régissant le transfert thermique par conduction (4.2) et les conditions aux limites (4.3) et initiale (4.4) s'écrivent comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho C p_{eq} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & \text{pour } x = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} = h_{\infty}(T - T_{\infty}) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) & \text{pour } x = lx \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} = h_{\infty}(T - T_{\infty}) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) & \text{pour } z = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} = h_{\infty}(T - T_{\infty}) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) - S(x, t) & \text{pour } z = lz \end{cases} \quad (4.3)$$

$$T(x, z, t = 0) = 300^{\circ}K \quad (4.4)$$

Pour une source de chaleur gaussienne surfacique le terme $S(x, t)$ est donné par :

$$S(x, t) = \frac{3Q}{\pi R_0^2} \exp \left[-\frac{3}{R_0^2} (x^2 + (y_i - y)^2) \right] \quad (4.5a)$$

Et pour une source de chaleur en segment de ligne le terme $S(x, t)$ est donné par :

$$S(x, t) = \frac{3Q}{\pi R_0^2} \exp \left[-\frac{3}{R_0^2} (y_i - y)^2 \right] \quad (4.5b)$$

$$\text{avec } \begin{cases} y = V \cdot t \\ R_0 = 4,5mm \\ Q = \eta UI \end{cases}$$

Où y est la position de l'électrode, y_i est la position du plan d'étude, V est la vitesse de soudage et t représente le temps de soudage.

4.5.2. Discrétisation spatiale du domaine de calcul :

Le type de maillage utilisé, dans ce cas, est représenté à la (figure 4.2) :

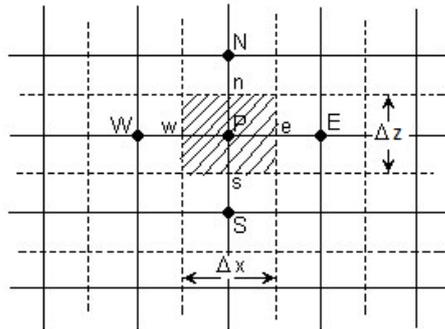


Figure 4.2 : Maillage 2D.

4.5.3. Intégration de l'équation de conduction sur le VC au point P :

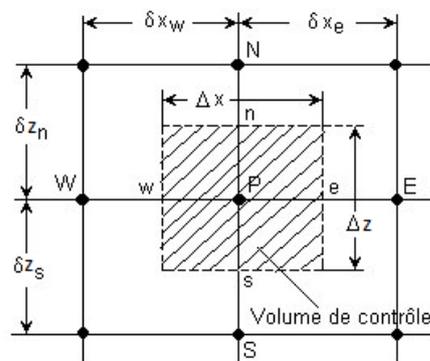


Figure 4.3 : Volume de contrôle en deux dimensions.

L'intégration de l'équation (4.2) sur le volume de contrôle, pour les nœuds situés à l'intérieur du domaine de calcul, schématisé à la (figure 4.3) donne :

$$\int_{t_0}^t \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dz dt + \int_{t_0}^t \int_{VC} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dz dt$$

$$= \int_{VC} \left[\int_{t_0}^t \rho C p_{eq} \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dx dz \quad (4.6)$$

Si la température du nœud P est supposée la même sur le volume de contrôle, la partie droite de l'équation (4.6) peut être écrite ainsi :

$$\int_{VC} \left[\int_{t_0}^t \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dv = \rho C_p \Delta v (T_p - T_p^0) \quad (4.7)$$

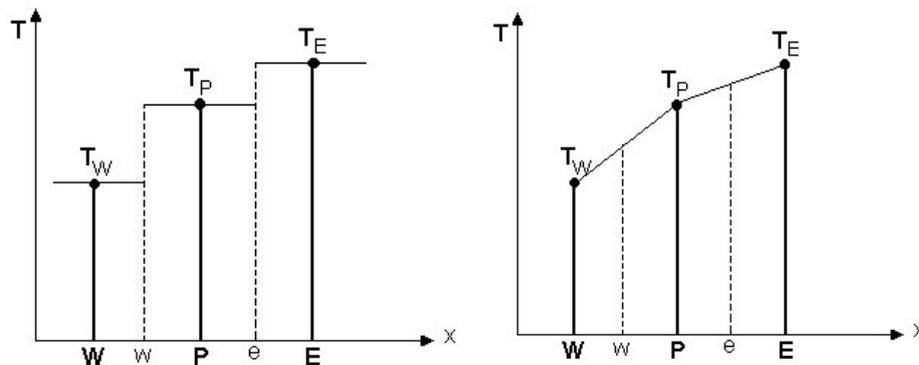
Où T_p^0 est la température à l'instant t_0 et T_p à l'instant t avec $\Delta v = \Delta x \Delta z$ est le volume du VC.

En utilisant un schéma avec des différences centrales pour les termes de conduction de la partie gauche de l'équation (4.6) on obtient après remplacement:

$$\int_{t_0}^t \left[\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w^e \Delta z + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s^n \Delta x \right] dt = \rho C_p \Delta v (T_p - T_p^0) \quad (4.8)$$

4.5.4. Choix d'un profil aux interfaces:

Il y a deux types de profils qu'on peut envisager dans une direction précise, l'un étant le profil constant (figure 4.4.a) et l'autre le profil linéaire (figure 4.4.b).



a) Profil constant.

b) Profil linéaire

Figure 4.4 : Choix du profil de température.

Dans le cas d'un profil constant de température (Figure 4.4.a), sur le volume de contrôle, on a une discontinuité de T aux interfaces w et e du volume de contrôle. De plus, la dérivée dT/dx n'est pas définie et donc ce profil de température ne convient pas.

Dans le cas d'un profil linéaire de température (Figure 4.4.b), entre les nœuds du maillage, la discontinuité de T n'existe plus et les dérivées aux interfaces sont définies :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}; \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}; \quad (4.10)$$

De la même façon suivant la direction z pour les interfaces n et s :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_n = \frac{T_N - T_P}{z_N - z_P} = \frac{T_N - T_P}{\delta z_n}; \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_s = \frac{T_P - T_S}{z_P - z_S} = \frac{T_P - T_S}{\delta z_s}; \quad (4.12)$$

Remplaçons (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12) dans (4.8) on obtient l'équation suivante:

$$\int_{t_0}^t \left(k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta z - k_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \Delta z + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n} \right) \Delta x - k_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta z_s} \right) \Delta x \right) dt = \rho C p_{eq} \Delta v (T_p - T_p^0) \quad (4.13)$$

Pour calculer la partie gauche de l'équation (4.13) il faut connaître la variation de T_P, T_E, T_S, T_N et T_W dans le temps. Dans notre étude en utilisant un schéma totalement implicite, on obtient :

$$k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta z \Delta t - k_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \Delta z \Delta t + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n} \right) \Delta x \Delta t - k_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta z_s} \right) \Delta x \Delta t = \rho C p_{eq} \Delta v (T_p - T_p^0) \quad (4.14)$$

Finalement, après le regroupement des termes de l'équation (4.14), la forme générale de l'équation discrétisée s'écrit ainsi :

$$a_P T_p = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (4.15a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_E = \frac{\Delta z \Delta t}{\delta x_e} k_e \\ a_W = \frac{\Delta z \Delta t}{\delta x_w} k_w \\ a_N = \frac{\Delta x \Delta t}{\delta z_n} k_n \\ a_S = \frac{\Delta x \Delta t}{\delta z_s} k_s \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \Delta v \\ b = a_P^0 T_P^0 \end{cases} \quad (4.15b)$$

L'expression (4.15a) est une équation algébrique qui est en fonction des paramètres physiques des nœuds seulement, sauf la conductivité thermique qui est liée aux interfaces du maillage, alors il faut déterminer cette dernière en fonction des conductivités des nœuds voisines du maillage.

L'équation algébrique trouvée (4.15a) est valable seulement pour un nœud intérieur du domaine de calcul. Pour les nœuds situés sur les frontières (dans le cas des conditions aux limites de type flux imposé, de type convection ou de type Neumann) ou voisins avec la frontière (dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet) les équations discrétisées sont obtenues en tenant compte des conditions aux limites. Les conditions aux limites ont une dépendance non linéaire de la température. Il faut qu'on linéarise en T , pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

4.6. Linéarisation du terme source :

L'équation discrétisée est une équation algébrique linéaire. Pour la résoudre on fait appel aux méthodes de résolution des équations algébriques. Cependant on se heurte dans notre problème au cas non linéaire dus par fois à l'expression du terme source.

On possède alors la linéarisation de ce terme sous la forme :

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p \quad (4.16)$$

En général, il y a plusieurs possibilités de linéarisation du terme source, dans notre cas on va utiliser la méthode de la tangente recommandée par PATANKAR [52]:

La tangente de la source de chaleur, non linéaire en température, en T_p^* est :

$$\left(\frac{dS}{dT}\right)^* = \frac{S - S^*}{T_p - T_p^*} \quad (4.17)$$

Où T_p^* est la température obtenue à l'itération précédente.

Ainsi, le terme source à l'itération courante est :

$$\bar{S} = S^* + \left(\frac{dS}{dT_P}\right)^* (T_P - T_P^*) \quad (4.18)$$

Par analogie avec l'équation (4.16) on trouve :

$$S_c = S^* - \left(\frac{dS}{dT_P}\right)^* T_P^* \quad (4.19a)$$

$$S_p = \left(\frac{dS}{dT_P}\right)^* \quad (4.19b)$$

La source de chaleur provenant du soudage peut être introduite de différentes façons : condition limite externe ou source interne de chaleur. Dans cette étude la source de chaleur du soudage qui n'est pas en fonction de la température est implémentée comme condition à la limite comme suit :

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_P = S(x, t) - h_\infty(T_P - T_\infty) - \varepsilon\sigma(T_P^4 - T_\infty^4)$$

Le terme qui représente le flux de rayonnement rendre les conditions aux limites non linéaire en température ;

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_P = S(x, t) - h_\infty(T_P^* - T_\infty) - \varepsilon\sigma(T_P^{*4} - T_\infty^4) - (h_\infty + 4\varepsilon\sigma T_P^{*3})(T_P - T_P^*)$$

Où T_∞ est la température du milieu environnant, T_P^* est la valeur de T au nœud P à l'itération précédente et T_P la valeur de la température qu'on cherche au nœud P .
Dont on peut distinguer S_c et S_p comme suit :

$$S_c = S(x, t) - h_\infty(T_P^* - T_\infty) - \varepsilon\sigma(T_P^{*4} - T_\infty^4) + (h_\infty + 4\varepsilon\sigma T_P^{*3})T_P^*$$

$$S_c = S(x, t) + h_\infty T_\infty + \varepsilon\sigma(3T_P^{*4} + T_\infty^4)$$

$$S_p = -(h_\infty + 4\varepsilon\sigma T_P^{*3})$$

Donc ;

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_P = S_c + S_p T_P$$

4.7. Les conditions aux limites thermiques:

Pour les nœuds situés sur la frontière "West" ($x = 0$) on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.2) sur le demi-volume de contrôle, présenté à la (figure 4.5) :

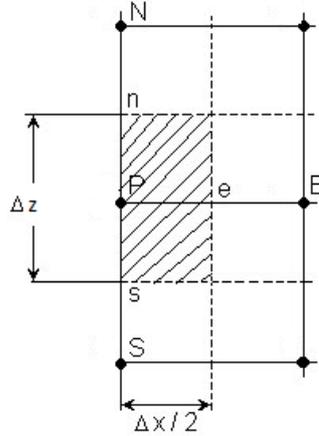


Figure 4.5 : Demi-volume de contrôle sur la frontière "W".

$$\int_{t_0}^t \int_{\frac{1}{2}VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dz dt + \int_{t_0}^t \int_{\frac{1}{2}VC} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dz dt = \int_{\frac{1}{2}VC} \left[\int_{t_0}^t \rho C p_{eq} \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dx dz$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_P^e \Delta z \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_S^n \Delta x \Delta t = \rho C p_{eq} \Delta v (T_p - T_p^0)$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e \Delta z - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_P \Delta z + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n \frac{\Delta x}{2} - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \frac{\Delta x}{2} = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2 \Delta t} (T_p - T_p^0)$$

Où le flux au point P est donné par :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_P = 0 \quad \text{pour } x = 0$$

Remplaçant la valeur du flux au point P par sa valeur et on utilise le profile linéaire (4.9)-(4.12) pour les gradients de la température on trouve :

$$k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta z + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n} \right) \frac{\Delta x}{2} - k_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta z_s} \right) \frac{\Delta x}{2} = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2 \Delta t} (T_p - T_p^0)$$

En regroupant les termes on trouve ainsi la forme de l'équation discrétisée à la frontière $x = 0$:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (4.20a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_E = \frac{\Delta z}{\delta x_e} k_e \\ a_W = 0 \\ a_N = \frac{\Delta x}{2\delta z_n} k_n \\ a_S = \frac{\Delta x}{2\delta z_s} k_s \\ b = a_P^0 T_P^0 \\ a_P = a_E + a_N + a_S + a_P^0 \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} \end{cases} \quad (4.20b)$$

Pour les nœuds situés sur la frontière "East", $x = l_x$, on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.2) sur le demi-volume de contrôle, présenté à la (figure 4.6), où le flux au point P est non linéaire en T .

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_P = h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4) \quad \text{pour } x = l_x$$

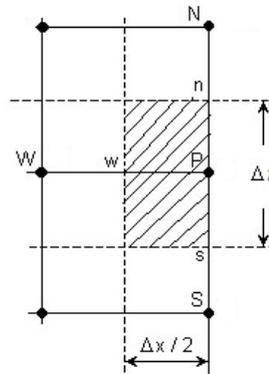


Figure 4.6 : Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w^P \Delta z \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s^n \frac{\Delta x}{2} \Delta t = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2} (T_P - T_P^0)$$

$$\begin{aligned} & -(h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4)) \Delta z - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \Delta z + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n \frac{\Delta x}{2} - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \frac{\Delta x}{2} \\ & = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} (T_P - T_P^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -(h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4)) \Delta z - k_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta z_w} \right) \Delta z + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n} \right) \frac{\Delta x}{2} \\ & - k_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta z_s} \right) \frac{\Delta x}{2} = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} (T_P - T_P^0) \end{aligned}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (4.21a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_W = \frac{\Delta z}{\delta x_w} k_w \\ a_E = 0 \\ a_N = \frac{\Delta x}{2\delta z_n} k_n \\ a_S = \frac{\Delta x}{2\delta z_s} k_s \\ b = a_P^0 T_P^0 + S_c \\ a_P = a_E + a_N + a_S + a_P^0 + S_P \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} \\ S_c = (h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma T_\infty^4) \Delta z \\ S_P = (h_\infty + \varepsilon \sigma T_P^{*3}) \Delta z \end{cases} \quad (4.21b)$$

Pour les nœuds situés sur la frontière "South" ($z = 0$), on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.2) sur le demi-volume de contrôle présenté à la (figure 4.7).

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_P = h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4) \quad \text{pour } z = 0$$

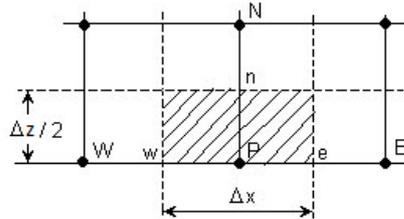


Figure 4.7 : Demi-volume de contrôle sur la frontière "South".

$$\begin{aligned} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \frac{\Delta z}{2} \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_P \Delta x \Delta t &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2} (T_P - T_P^0) \\ k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \frac{\Delta z}{2} - k_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \frac{\Delta z}{2} + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n} \right) \Delta x &+ (h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4)) \Delta x \\ &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} (T_P - T_P^0) \end{aligned}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (4.22a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_W = \frac{\Delta z}{2\delta x_w} k_w \\ a_E = \frac{\Delta z}{2\delta x_e} k_e \\ a_N = \frac{\Delta x}{\delta z_n} k_n \\ a_S = 0 \\ b = a_P^0 T_P^0 + S_c \\ a_P = a_E + a_N + a_S + a_P^0 + S_P \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} \\ S_c = -(h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma T_\infty^4) \Delta x \\ S_P = -(h_\infty + \varepsilon \sigma T_P^{*3}) \Delta x \end{cases} \quad (4.22b)$$

Pour les nœuds situés sur la frontière " North ", ($z = l_z$), on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.2) sur le demi-volume de contrôle présenté à la (figure 4.8).

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_P = S(x, t) - h_\infty (T_P - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4) \quad \text{pour } z = l_z$$

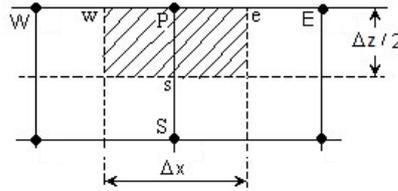


Figure 4.8 : Demi-volume de contrôle sur la frontière "N".

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \frac{\Delta z}{2} \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \Delta x \Delta t = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2} (T_P - T_P^0)$$

$$k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \frac{\Delta z}{2} - k_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \frac{\Delta z}{2} - (h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4) - S(x, t)) \Delta x$$

$$- k_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta z_s} \right) \Delta x = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} (T_P - T_P^0)$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (4.23a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_W = \frac{\Delta z}{2\delta x_w} k_w \\ a_E = \frac{\Delta z}{2\delta x_e} k_e \\ a_S = \frac{\Delta x}{\delta z_s} k_s \\ a_N = 0 \\ b = a_P^0 T_P^0 + S_c \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{2\Delta t} \\ S_c = \left(S(x, t) + h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma (3T_P^{*4} + T_\infty^4) \right) \Delta x \\ a_P = a_E + a_N + a_S + a_P^0 + S_p \\ S_p = -(h_\infty + 4\varepsilon \sigma T_P^{*3}) \Delta x \end{cases} \quad (4.23b)$$

Les nœuds des coins sont traités aussi de façon particulière. Ainsi, pour le nœud $(x = 0, z = 0)$ on intègre l'équation (4.2) sur le quart de volume de contrôle hachuré présenté à la (figure 4.9).

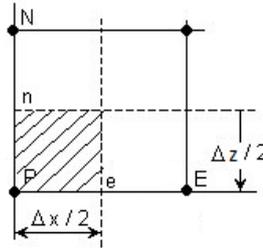


Figure 4.9 : Quart de volume de contrôle (le coin W-S).

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_P^e \frac{\Delta z}{2} \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_P^n \frac{\Delta x}{2} \Delta t = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4} (T_P - T_P^0)$$

$$\begin{aligned} k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \frac{\Delta z}{2} + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n} \right) \frac{\Delta x}{2} + (h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4)) \frac{\Delta x}{2} \\ = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4\Delta t} (T_P - T_P^0) \end{aligned}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (4.24a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_W = 0 \\ a_E = \frac{\Delta z}{2\delta x_e} k_e \\ a_S = 0 \\ a_N = \frac{\Delta x}{2\delta z_n} k_n \\ b = a_P^0 T_P^0 + S_c \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4\Delta t} \\ S_c = -(h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma T_\infty^4) \frac{\Delta x}{2} \\ a_P = a_E + a_N + a_P^0 + S_P \\ S_P = -(h_\infty + \varepsilon \sigma T_P^{*3}) \frac{\Delta x}{2} \end{cases} \quad (4.24b)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le nœud ($x = l_x, z = 0$), on intègre l'équation (4.2) sur le quart de volume de contrôle hachuré (figure 4.10) :

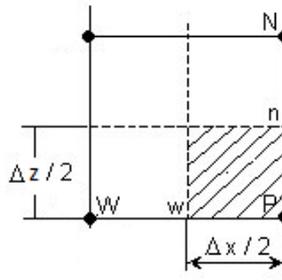


Figure 4.10 : Quart de volume de contrôle (le coin E-S).

$$\begin{aligned} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_W^P \frac{\Delta z}{2} \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right)_P^n \frac{\Delta x}{2} \Delta t &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4} (T_P - T_P^0) \\ -(h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4)) \frac{\Delta z}{2} - k_w \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_w}\right) \frac{\Delta z}{2} + k_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta z_n}\right) \frac{\Delta x}{2} \\ + (h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4)) \frac{\Delta x}{2} &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4\Delta t} (T_P - T_P^0) \end{aligned}$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_N T_N + b \quad (4.25a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_W = \frac{\Delta z}{2\delta x_w} k_w \\ a_N = \frac{\Delta x}{2\delta z_n} k_n \\ b = a_P^0 T_P^0 + S_c \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4\Delta t} \\ S_c = (h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma T_\infty^4) \left(\frac{\Delta z - \Delta x}{2}\right) \\ a_P = a_W + a_N + a_P^0 + S_P \\ S_P = (h_\infty + \varepsilon \sigma T_P^{*3}) \left(\frac{\Delta z - \Delta x}{2}\right) \end{cases} \quad (4.25b)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le nœud $(x = l_x, z = l_z)$, on intègre l'équation (4.2) sur le quart du volume de contrôle hachuré (figure 4.11) :

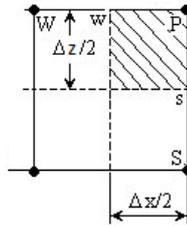


Figure 4.11 : Quart du volume de contrôle (le coin "N-E").

$$\begin{aligned}
 \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_w^P \frac{\Delta z}{2} \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right)_s^P \frac{\Delta x}{2} \Delta t &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4} (T_p - T_p^0) \\
 - (h_\infty (T_p - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_p^4 - T_\infty^4)) \frac{\Delta z}{2} - k_w \left(\frac{T_p - T_w}{\delta x_w}\right) \frac{\Delta z}{2} \\
 - (h_\infty (T_p - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_p^4 - T_\infty^4) + S(x, t)) \frac{\Delta x}{2} - k_s \left(\frac{T_p - T_s}{\delta z_s}\right) \frac{\Delta x}{2} \\
 &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4 \Delta t} (T_p - T_p^0)
 \end{aligned}$$

$$a_p T_p = a_w T_w + a_s T_s + b \quad (4.26a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_w = \frac{\Delta z}{2 \delta x_w} k_w \\ a_s = \frac{\Delta x}{2 \delta z_s} k_s \\ b = a_p^0 T_p^0 + S_c \\ a_p^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4 \Delta t} \\ S_c = (h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma T_\infty^4) \left(\frac{\Delta z + \Delta x}{2}\right) + S(x, t) \frac{\Delta x}{2} \\ a_p = a_w + a_s + a_p^0 + S_p \\ S_p = (h_\infty + \varepsilon \sigma T_p^{*3}) \left(\frac{\Delta z + \Delta x}{2}\right) \end{cases} \quad (4.26b)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le nœud $(x = 0, z = l_z)$ on intègre l'équation (4.2) sur le quart du volume de contrôle hachuré (figure 4.12) :

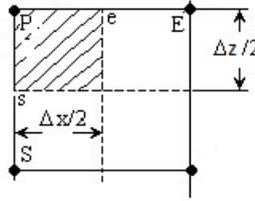


Figure 4.12 : Quart du volume de contrôle (le coin "N-W").

$$\begin{aligned} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_P^e \frac{\Delta z}{2} \Delta t + \left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right)_S^P \frac{\Delta x}{2} \Delta t &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4} (T_p - T_p^0) \\ k_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) \frac{\Delta z}{2} - (h_\infty (T_P - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_P^4 - T_\infty^4) + S(x, t)) \frac{\Delta x}{2} - k_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta z_s}\right) \frac{\Delta x}{2} \\ &= \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4 \Delta t} (T_p - T_p^0) \end{aligned}$$

$$a_P T_p = a_E T_E + a_S T_S + b \quad (4.27a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_E = \frac{\Delta z}{2 \delta x_e} k_e \\ a_S = \frac{\Delta x}{2 \delta z_s} k_s \\ b = a_P^0 T_P^0 + S_c \\ a_P^0 = \rho C p_{eq} \frac{\Delta v}{4 \Delta t} \\ S_c = (h_\infty T_\infty + \varepsilon \sigma T_\infty^4 - S(x, t)) \frac{\Delta x}{2} \\ a_P = a_E + a_S + a_P^0 + S_P \\ S_P = (h_\infty + \varepsilon \sigma T_P^{*3}) \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \end{cases} \quad (4.27b)$$

4.8. Détermination de la conductivité thermique aux interfaces:

En général $k_e \neq k_w$ et $k_n \neq k_s$, la conductivité thermique étant en fonction de la température $k = k(T)$.

La conductivité thermique à l'interface "e" peut être déterminée par l'interpolation linéaire entre les points P et E :

$$k_e = f_e k_P + (1 - f_e) k_E \quad (4.28a)$$

$$f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e} \text{ et } 1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}. \quad (4.28b)$$

Si l'interface " e " (figure 4.13) est située à mi-distance de P et E, alors $f_e = 1/2$ et on obtient :

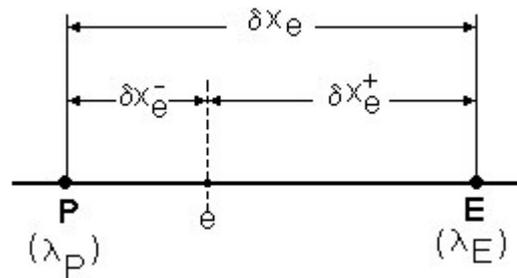


Figure 4.13 : Sur la détermination de la conductivité thermique.

$$k_e = \frac{T_E + T_P}{2} \quad (4.29)$$

Conservation du flux aux interfaces :

Si l'on considère le flux à l'interface " e " (figure 4.14) on peut écrire :

$$q_e = -k_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e = \frac{k_e(T_P - T_E)}{\delta x_e} = \frac{k_P(T_P - T_E)}{\delta x_e^-} = \frac{k_E(T_P - T_E)}{\delta x_e^+} \quad (4.30)$$

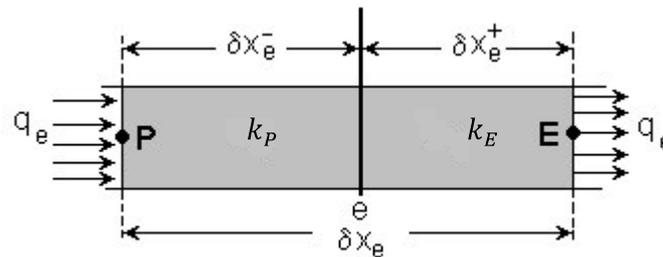


Figure 4.14 : Conductivité thermique à l'interface.

La densité du flux thermique à l'interface peut, également, être écrite ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e^-}{k_P} + \frac{\delta x_e^+}{k_E}} = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e}{k_e}} \quad (4.31)$$

De la relation (4.31) on sort l'expression de la conductivité thermique aux interfaces du volume de contrôle :

$$k_e = \frac{\delta x_e}{\frac{\delta x_e^-}{k_P} + \frac{\delta x_e^+}{k_E}} \quad (4.32)$$

Si l'on tient compte de la définition du coefficient f_e , la relation (4.32) devient :

$$k_e = \frac{1}{\frac{(1-f_e)}{k_p} + \frac{f_e}{k_E}} \quad (4.33)$$

Si l'on considère le cas particulier avec $f_e = \frac{1}{2}$ la conductivité thermique à l'interface e est :

$$k_e = \frac{2k_p k_E}{k_p + k_E} \quad (4.34)$$

Alors on dit que l'équation (4.34) est la moyenne harmonique des conductivités thermiques des nœuds voisins du maillage, et de même façon on peut déterminer les conductivités thermiques aux autres interfaces w, n et s du volume de contrôle.

4.9. Les règles de base:

Pour éviter la divergence du processus il faut respecter les quatre règles de base, pour chaque équation algébrique formant notre system, suivantes :

Règle N°1 : Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle.

Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.

Règle N°2 : Tous les coefficients doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.

Règle N°3 : Pente négative dans le terme source linéarisé. Lors de la linéarisation du terme source la pente S_p doit être négative car sinon on peut avoir $a_p < 0$ avec des $a_{vs} > 0$ (contraire à la règle N°2).

Règle N°4 : Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi :

$$\begin{aligned} a_p &= \sum a_{vs} & \text{si } S &= 0 \\ a_p &\geq \sum a_{vs} & \text{si } S &\neq 0 \end{aligned}$$

4.10. Simulation de l'écoulement dans le bain de fusion :

En désignant la variable dépendante par ϕ , les équations de conservation possèdent une forme commune donnée par la relation (4.35):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + S_\phi \quad (4.35)$$

Où le gradient de pression est inclut dans le terme source S_ϕ .

$$\text{En posant } J_x = \rho u \phi - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \text{ et } J_z = \rho v \phi - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

L'équation (4.35) devienne :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S_\phi \quad (4.36)$$

La discrétisation est faite selon l'équation de transport généralisée (4.36), Alors quelle sera formellement intégrée sur un volume de contrôle illustré a la (figure **4.15**), il suit:

$$\int_{VC} \frac{\partial J_x}{\partial x} dV + \int_{VC} \frac{\partial J_z}{\partial z} dV = \int_{VC} S_\phi dV \quad (4.37a)$$

$$\int_s^n [J_e - J_w] dz + \int_w^e [J_n - J_s] dx = \int_{\Delta V} S_\phi dV \quad (4.37b)$$

$$[J_e - J_w] \Delta z + [J_n - J_s] \Delta x = S_\phi \Delta V \quad (4.37c)$$

Les quantités J_e, J_w, J_n, J_s sont les flux totaux aux interfaces du volume de contrôle VC;

$$J_e = (\rho u)_e \phi_e - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e \quad (4.38a)$$

$$J_w = (\rho u)_w \phi_w - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \quad (4.38b)$$

$$J_n = (\rho v)_n \phi_n - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_n \quad (4.38c)$$

$$J_s = (\rho v)_s \phi_s - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_s \quad (4.38d)$$

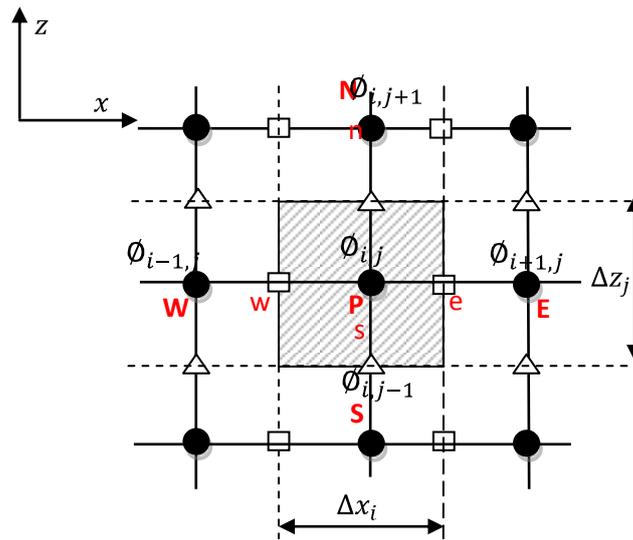


Figure 4.15 : Géométrie d'un volume de contrôle.

De même, intégrons l'équation de continuité :

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dV + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v) dV = 0 \quad (4.39)$$

Après intégration, nous avons :

$$((\rho u)_e - (\rho u)_w) \Delta z + ((\rho v)_n - (\rho v)_s) \Delta x = 0 \quad (4.40)$$

Pour rendre plus compact les équations, nous posons : $F = \rho u \Delta z$ et $D = \rho v / \delta x$

Alors l'équation (4.40) devienne:

$$(F_e - F_w) + (F_n - F_s) = 0 \quad (4.41)$$

Avec : $F_e = (\rho u)_e \Delta z$, $F_w = (\rho u)_w \Delta z$, $F_n = (\rho v)_n \Delta x$ et $F_s = (\rho v)_s \Delta x$

Si nous multiplions l'équation (4.41) par ϕ_P et si nous retranchons à l'équation (4.37c), nous obtenons :

$$[(J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P)] + [(J_n - F_n \phi_P) - (J_s - F_s \phi_P)] = S_\phi \Delta V \quad (4.42)$$

4.11. Schémas d'interpolation :

Nous introduisons maintenant quelques schémas d'interpolation servant à déterminer la valeur de la variable dépendante Φ aux interfaces du volume de

contrôle, Parmi ces schémas, on distingue le schéma aux différences centrées (Central Difference Scheme) qui utilise une procédure d'interpolation linéaire mais qui reste, cependant, limité pour des valeurs de $|P| < 2$, dont, le nombre adimensionnel «P» est le nombre de Peclet, qui est le rapport entre les forces de convection et de diffusion, donné par l'expression suivante :

$$P = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\mu / \Delta x}$$

4.11.1. Schéma aux différences centrées (CDS) :

Afin d'évaluer le flux convectif aux interfaces, un profil linéaire exprimant la variation de Φ entre deux nœuds adjacents est utilisé. Si les interfaces sont au milieu des nœuds principaux, cette approximation s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) & \phi_w &= \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P) \\ \phi_s &= \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P) & \phi_n &= \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \end{aligned}$$

Les flux diffusifs sont évalués en approximant les dérivées par différence centrales, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e &= \mu_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} & \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w &= \mu_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} \\ \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_n &= \mu_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta z_n} & \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_s &= \mu_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta z_s} \end{aligned}$$

Donc le premier terme de l'équation (4.42) s'écrit:

$$\begin{aligned} J_e - F_e \phi_P &= F_e \phi_e - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - F_e \phi_P = \frac{F_e}{2}(\phi_E + \phi_P) - D_e(\phi_E - \phi_P) - F_e \phi_P \\ J_e - F_e \phi_P &= \left(\frac{F_e}{2} - D_e\right)(\phi_E - \phi_P) \end{aligned} \quad (4.42. a)$$

Et de même méthode pour la linéarisation des autres termes de l'équation (4.42), on trouve :

$$J_w - F_w \phi_P = \left(\frac{F_w}{2} + D_w\right)(\phi_W - \phi_P) \quad (4.42. b)$$

$$J_n - F_n \phi_P = \left(\frac{F_n}{2} - D_n \right) (\phi_N - \phi_P) \quad (4.42.c)$$

$$J_s - F_s \phi_P = \left(\frac{F_s}{2} + D_s \right) (\phi_S - \phi_P) \quad (4.42.d)$$

Remplaçons les équations (4.42.a), (4.42.b), (4.42.c) et (4.42.d) dans l'équation (4.42), on obtient :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (4.43a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \\ a_E = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \\ a_W = \left(\frac{F_w}{2} + D_w \right) \\ a_S = \left(\frac{F_s}{2} + D_s \right) \\ a_N = \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) \\ b = S_\phi \Delta V \end{cases} \quad (4.43b)$$

Une autre alternative à ce schéma est la procédure aux différences décentrées (Upwind Scheme).

4.11.2. Schéma Upwind (UDS) :

Le schéma Upwind est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas a convection dominée, leur principe est basé sur l'équation (4.44):

$$\left. \begin{array}{l} \phi_e = \phi_P \text{ si } F_e > 0 \\ \text{ou} \\ \phi_e = \phi_E \text{ si } F_e < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F_e \phi_e = \llbracket F_e, 0 \rrbracket \phi_P - \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \phi_E \quad (4.44)$$

$$\text{Donc : } J_e - F_e \phi_P = \llbracket F_e, 0 \rrbracket \phi_P - \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \phi_E + D_e (\phi_P - \phi_E) - F_e \phi_P$$

$$\text{Alors : } J_e - F_e \phi_P = D_e (\phi_P - \phi_E) - \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \phi_E + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \phi_P$$

Finalement on trouve :

$$J_e - F_e \phi_P = (D_e + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket) (\phi_P - \phi_E) \quad (4.45.a)$$

De même façon, calculons les autres termes :

$$J_w - F_w \phi_P = -\llbracket -F_w, 0 \rrbracket \phi_P + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \phi_W - D_w (\phi_P - \phi_W) - F_w \phi_P$$

$$J_w - F_w \phi_P = (D_w + \llbracket F_w, 0 \rrbracket)(\phi_w - \phi_P) \quad (4.45. b)$$

$$J_n - F_n \phi_P = \llbracket F_n, 0 \rrbracket \phi_P - \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \phi_N - D_n(\phi_N - \phi_P) - F_n \phi_P$$

$$J_n - F_n \phi_P = (D_n + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket)(\phi_P - \phi_N) \quad (4.45. c)$$

$$J_s - F_s \phi_P = \llbracket F_s, 0 \rrbracket \phi_S - \llbracket -F_s, 0 \rrbracket \phi_P - D_s(\phi_P - \phi_S) - F_s \phi_P$$

$$J_s - F_s \phi_P = (\llbracket F_s, 0 \rrbracket + D_s)(\phi_S - \phi_P) \quad (4.45. d)$$

Remplaçons (4.45. a), (4.45. b), (4.45. c) et (4.45. d) dans l'équation (4.42) on trouve :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (4.46a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \\ a_E = (D_e + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket) \\ a_W = (D_w + \llbracket F_w, 0 \rrbracket) \\ a_S = (D_s + \llbracket F_s, 0 \rrbracket) \\ a_N = (D_n + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket) \\ b = S_\phi \Delta V \end{cases} \quad (4.46b)$$

Par conséquent, un certain nombre d'auteurs ont proposé des combinaisons des deux schémas précédents.

4.11.3. Schéma Hybride (HDS) :

Spalding (1972) a développé le schéma hybride (Hybrid Scheme) qui rejoint le schéma aux différences centrées (CDS) pour $|P| < 2$ et le schéma aux différences décentrées (UDS) pour $|P| > 2$ [53].

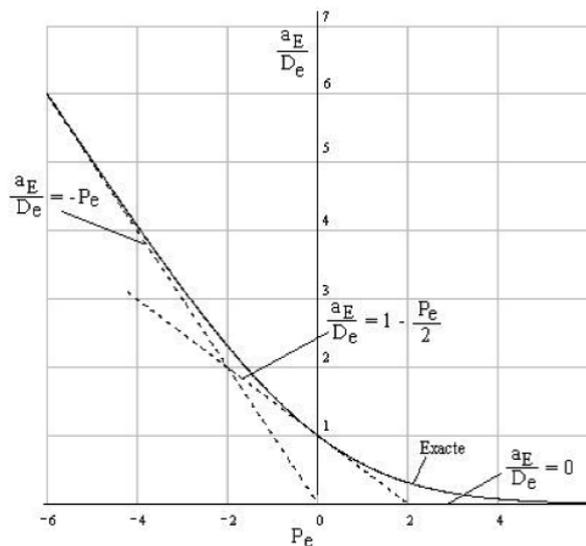


Figure 4.16 : Variation du coefficient a_E en fonction du nombre Péclet

Le schéma hybride peut être représenté par trois droites (Figure 4.16), de telle façon, par exemple, pour a_E on a :

$$\begin{cases} \text{pour } P_e < -2 & a_E/D_e = -P_e \\ \text{pour } -2 \leq P_e \leq 2 & a_E/D_e = 1 - P_e/2 \\ \text{pour } P_e > 2 & a_E/D_e = 0 \end{cases} \quad (4.47a)$$

Où on peut résumer l'expression (4.47a) par ;

$$a_E = D_e \left[\left[-P_e, 1 - P_e/2, 0 \right] \right] \Rightarrow a_E = \left[\left[-F_e, D_e - F_e/2, 0 \right] \right] \quad (4.47b)$$

L'inconvénient majeur du schéma hybride est l'erreur introduite au voisinage de $|P| = 2$, (figure 4.16). Ainsi, un certain nombre de méthodes ont été développées afin de présenter un changement plus graduel et qui sont en bon accord avec la solution exacte d'un problème monodimensionnel.

4.11.4. Schéma à loi de puissance (PLDS) :

Patankar propose le schéma d'approximation de la loi de puissance (Power Law Differencing Scheme) qui s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte (Figure 4.17).

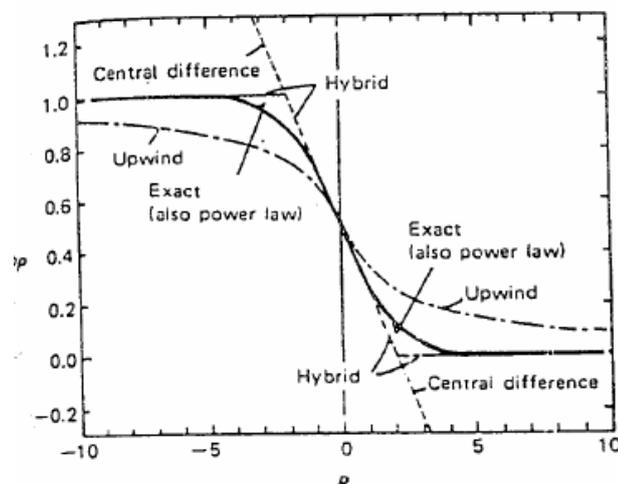


Figure 4.17 : Prédiction de ϕ_p par les différents schémas dans un intervalle des nombres de Peclet.

Ce schéma a été développé à partir du schéma exponentiel exact (Exponential Scheme). Ce dernier n'a pas été utilisé à cause du temps de calcul important nécessaire au calcul des exponentielles [53].

L'expression de a_E pour ce schéma s'écrit:

$$\begin{aligned} \text{pour } P_e < -10, & \quad a_E/D_e = -P_e \\ \text{pour } -10 \leq P_e < 0, & \quad a_E/D_e = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e \\ \text{pour } 0 \leq P_e \leq 10, & \quad a_E/D_e = (1 - 0.1P_e)^5 \\ \text{pour } P_e > 10, & \quad a_E/D_e = 0 \end{aligned}$$

Où on peut écrire a_E comme suite :

$$a_E = D_e \left[\left[0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e} \right)^5 \right] \right] + \llbracket 0, -F_e \rrbracket \quad (4.48)$$

L'équation de discrétisation pour ce schéma s'écrit :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (4.49a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \\ a_E = D_e \llbracket 0, (1 - 0.1|P_e|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_e \rrbracket \\ a_W = D_w \llbracket 0, (1 - 0.1|P_w|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_w \rrbracket \\ a_S = D_s \llbracket 0, (1 - 0.1|P_s|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_s \rrbracket \\ a_N = D_n \llbracket 0, (1 - 0.1|P_n|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_n \rrbracket \\ b = S_\phi \Delta V \end{cases} \quad (4.49b)$$

Le schéma PLDS, la loi de puissance, donne une très bonne approximation de la solution exacte, en plus est le plus recommandé dans la littérature, aussi nous l'adapterons dans notre travail, On note aussi que le temps de calcul pour ce schéma est légèrement plus important que le schéma hybride. Il est important de noter que les termes diffusifs sont toujours discrétisés avec un schéma de différence centrée du second ordre.

Pour la vitesse u ;

L'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée pour la composante de vitesse u pour un maillage décalé vers l'avant (figure 4.18) s'écrit:

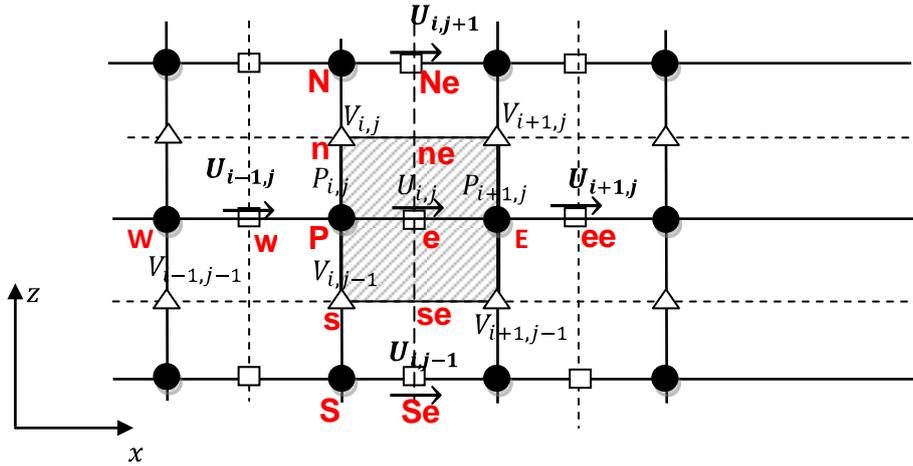


Figure 4.18 : volume de contrôle décalé pour la vitesse horizontale u .

$$a_e^u u_e = a_{ee}^u u_{ee} + a_w^u u_w + a_{Ne}^u u_{Ne} + a_{Se}^u u_{Se} + b^u \quad (4.50a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_e^u = a_{ee}^u + a_w^u + a_{Ne}^u + a_{Se}^u \\ a_{ee}^u = D_E \llbracket 0, (1 - 0.1|P_E|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_E \rrbracket \\ a_w^u = D_P \llbracket 0, (1 - 0.1|P_P|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_P \rrbracket \\ a_{Ne}^u = D_{ne} \llbracket 0, (1 - 0.1|P_{ne}|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_{ne} \rrbracket \\ a_{Se}^u = D_{se} \llbracket 0, (1 - 0.1|P_{se}|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_{se} \rrbracket \\ b^u = (P_P - P_E)\Delta Z \end{cases} \quad (4.50b)$$

Dont; $P_E = F_E/D_E$, $P_P = F_P/D_P$, $P_{ne} = F_{ne}/D_{ne}$ et $P_{se} = F_{se}/D_{se}$:

Tableau 4.1 : flux de convection et de diffusion de la vitesse u ;

$F_E = \rho_E \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}$	$D_E = \frac{\mu_E}{\Delta x_e}$
$F_P = \rho_P \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2}$	$D_P = \frac{\mu_P}{\Delta x_P}$
$F_{ne} = \rho_{ne} \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2}$	$D_n = \frac{\mu_n}{\delta z_n}$
$F_{se} = \rho_{se} \frac{v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2}$	$D_s = \frac{\mu_s}{\delta z_s}$

Conditions aux limites pour la vitesse u :

➤ Pour la frontière supérieure nous avons l'effet de Marangoni :

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{où} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial T} = cte$$

Nous avons ;

$$J_z = \rho v u - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

On intègre J_z dans le volume de control présenté dans la (figure 4.19) on trouve :

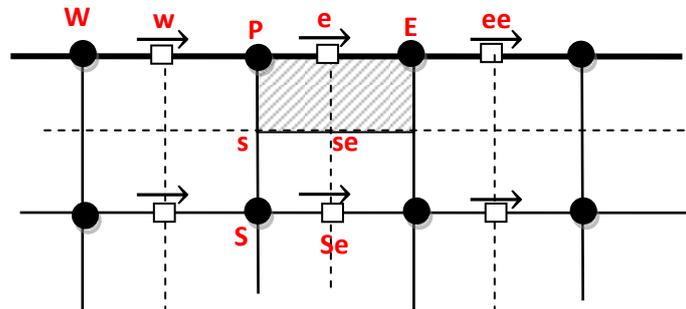


Figure 4.19 volume de control pour la frontière supérieur de la vitesse u.

$$- \int_P^E \int_{se}^e \frac{\partial J_z}{\partial z} dx dz = \int_P^E (J_z)_e dx - \int_P^E (J_z)_{se} dx$$

Avec :

$$(J_z)_e = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \int_P^E (J_z)_e dx = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \int_P^E \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{\partial \gamma}{\partial T} (T_E - T_P)$$

On remarque que $(J_z)_e$ jeu le rôle d'une force motrice et qu'il est indépendant de la vitesse au nœud e, alors on l'introduit dans le terme source b^u .

$$b^u = (P_P - P_E) \Delta z - \frac{\partial \gamma}{\partial T} (T_E - T_P) \quad (4.50c)$$

Alors on remplace $a_{Ne}^u = 0$ et b^u par ça valeur, équation (4.50c), avec les autres coefficients de l'équation (4.50a) reste les mêmes.

➤ Pour la frontière inférieure nous avons $u = 0$:

On pose tous simplement $a_S^u = 0$ et les autres coefficients de l'équation (4.50a) reste les mêmes.

➤ Pour la frontière de symétrie nous avons, à cause d'un maillage décalé vers l'avant, $a_W^u = 0$ avec les autres coefficients de l'équation (4.50a) reste les mêmes.

➤ Pour la frontière Est nous avons $\alpha_{ee}^u = 0$ avec les autres coefficients de l'équation (4.50a) reste les mêmes.

Pour la vitesse v ;

L'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée pour la composante de vitesse v pour un maillage décalé vers l'avant (figure 4.20) s'écrit:

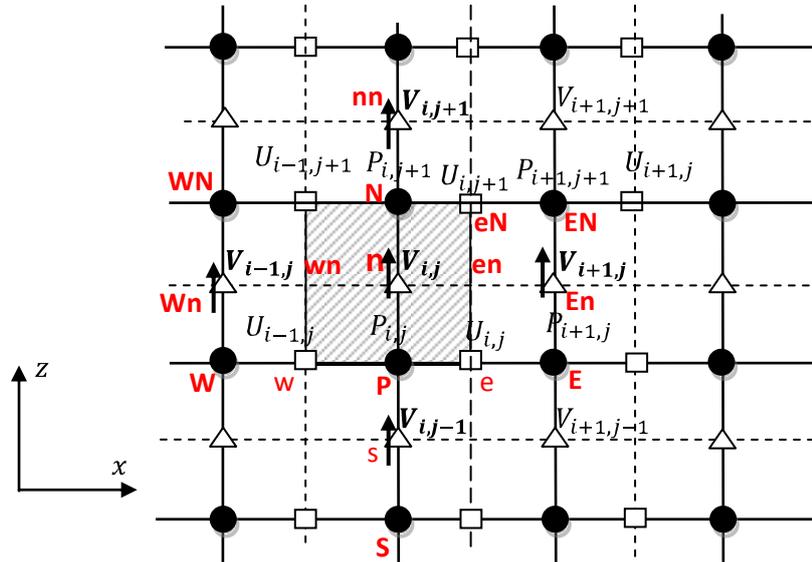


Figure 4.20 : volume de contrôle décalé pour la vitesse verticale v .

$$a_n^v v_n = a_{En}^v v_{En} + a_{Wn}^v v_{Wn} + a_{nn}^v v_{nn} + a_s^v v_s + b^v \quad (4.51a)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_n^v = a_{En}^v + a_{Wn}^v + a_{nn}^v + a_s^v \\ a_{En}^v = D_{en} \llbracket 0, (1 - 0.1|P_{en}|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_{en} \rrbracket \\ a_{Wn}^v = D_{wn} \llbracket 0, (1 - 0.1|P_{wn}|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_{wn} \rrbracket \\ a_s^v = D_p \llbracket 0, (1 - 0.1|P_p|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_p \rrbracket \\ a_{nn}^v = D_N \llbracket 0, (1 - 0.1|P_N|)^5 \rrbracket + \llbracket 0, -F_N \rrbracket \\ b^v = (P_p - P_N)\Delta x + S_v \Delta V \end{cases} \quad (4.51b)$$

Où $S_v \Delta V$ est l'intégration de la force de flottation dans un volume de control (figure 4.20) :

$$S_v \Delta V = \int_{wn}^{en} \int_P^N \rho_0 g (1 - \beta(T - T_0)) dx dz \quad \text{où ; } T = \frac{T_N + T_P}{2}$$

Alors ;

$$S_v \Delta V = \rho_0 g \left(1 - \beta \left(\frac{T_N + T_P}{2} - T_0 \right) \right) \Delta V$$

Donc ;

$$b^v = (P_P - P_N) \Delta x + \rho_0 g \left(1 - \beta \left(\frac{T_N + T_P}{2} - T_0 \right) \right) \Delta V \quad (4.51c)$$

Dont ; $P_{en} = F_{en}/D_{en}$, $P_{wn} = F_{wn}/D_{wn}$, $P_N = F_N/D_N$ et $P_P = F_P/D_P$:

Tableau 4.2 : flux de convection et de diffusion de la vitesse v ;

$F_{en} = \rho_{en} \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2}$	$D_{en} = \frac{\mu_{en}}{\Delta x_e}$
$F_{wn} = \rho_{wn} \frac{u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}}{2}$	$D_{wn} = \frac{\mu_{wn}}{\Delta x_w}$
$F_N = \rho_N \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2}$	$D_N = \frac{\mu_N}{\delta z_n}$
$F_P = \rho_P \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2}$	$D_P = \frac{\mu_P}{\delta z_s}$

4.12. Traitement du couplage Vitesse-Pression :

La résolution des problèmes d'écoulements des fluides incompressible en termes de variables primitives (U,V,P), découle de l'absence des équations explicites qui gouverne la pression. En effet, les équations gouvernantes pour les composantes de vitesse u et v contiennent des gradients de pression qui sont des termes sources indépendant de toutes les variables. Cependant, la pression est explicitée à travers l'équation de continuité. Une méthode indirecte est alors suivie pour obtenir les champs de pression. A partir de la discrétisation de l'équation du mouvement, la pression devient alors un paramètre à ajuster de manière à réaliser la condition de continuité des flux massiques. En effet, le champ de vitesses obtenu par la résolution des équations du mouvement ne vérifie la conservation de la masse que si le champ de pression initial est correct. Pour cela, il existe plusieurs algorithmes, l'algorithme SIMPLE qui, à partir de l'équation de continuité, permet de déterminer le terme de correction de pression et, ainsi, corriger la pression en tout point du domaine. La vitesse est par la suite corrigée. On procède ainsi jusqu'à convergence.

Les équations (4.50a) et (4.51a) représentent la forme discrétisée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour les deux composantes de vitesses respectivement. Les termes sources b^u et b^v font intervenir la pression inconnue. Nous allons donc travailler par itérations successives. Nous supposons pour démarrer que la pression est connue (estimation P^*), b^u et b^v des équations (4.52.a) et (4.52.b) font intervenir la pression estimée P^* , et nous calculons le champ des vitesses. Notons par u^* et v^* le champ de vitesse ainsi obtenu, on aura alors :

$$a_e^u u_e^* = a_{ee}^u u_{ee}^* + a_{ww}^u u_{ww}^* + a_{Ne}^u u_{Ne}^* + a_{se}^u u_{se}^* + b^u \quad (4.52. a)$$

$$a_n^v v_n^* = a_{En}^v v_{En}^* + a_{Wn}^v v_{Wn}^* + a_{nn}^v v_{nn}^* + a_s^v v_s^* + b^v \quad (4.52. b)$$

Or, les vitesses calculées avec une estimation de la pression ne satisfont pas, en général, l'équation de continuité qui doit être respectée à tout moment. Pour satisfaire l'équation de continuité, il est nécessaire d'introduire des corrections des vitesses et pression. Ces corrections sont données par :

$$u = u' + u^* \quad (4.53. a)$$

$$v = v' + v^* \quad (4.53. b)$$

$$P = P' + P^* \quad (4.53. c)$$

Où u' , v' et P' sont les vitesses et pressions initiales (ou à l'itération précédente). u' , v' et P' sont les corrections des deux composantes de la vitesse et de la pression. En remplaçant les équations (4.53.a), (4.53.b) et (4.53.c) dans les équations (4.50) et (4.51) et en faisant une soustraction des équations (4.52.a) et (4.52.b) des nouvelles équations de (4.50) et (4.51) respectivement, les corrections des vitesses u' et v' s'écrivent alors :

$$u_e' = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}}{a_e^u} + \frac{b^u}{a_e^u} \quad (4.54. a)$$

$$v_n' = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb}}{a_n^v} + \frac{b^v}{a_n^v} \quad (4.54. b)$$

L'algorithme de SIMPLE considère que les termes $\frac{\sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}}{a_e^u}$ et $\frac{\sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb}}{a_n^v}$ des équations (4.54.a) et (4.54.b) respectivement sont négligeables. C'est

l'hypothèse la plus importante de cette méthode. L'omission de ce terme serait inacceptable si la solution ne satisfaisait pas l'équation du mouvement et l'équation de continuité, mais la solution donnée par l'algorithme SIMPLE ne contient aucune erreur résultant de l'omission de ce terme. Les vitesses corrigées peuvent s'écrire alors :

$$u_e' = \frac{(P_P' - P_E')\Delta z}{a_e^u} \quad (4.55. a)$$

$$v_n' = \frac{(P_P' - P_N')\Delta x}{a_n^v} \quad (4.55. b)$$

Alors les formules de correction des vitesses (4.53. a) et (4.53. b) s'écrivent aussi :

$$u = u^* + \frac{(P_P' - P_E')\Delta z}{a_e^u} \quad (4.56. a)$$

$$v = v^* + \frac{(P_P' - P_N')\Delta x}{a_n^v} \quad (4.56. b)$$

Pour déterminer la correction de pression P' nécessaire pour le calcul des corrections des vitesses nous utilisons l'équation de continuité discrétisée (4.41), intégrée dans le volume de contrôle (figure 4.21) et remplaçons dans cette équation, les vitesses par leurs valeurs données par les relations (4.56. a) et (4.56. b), nous obtenant l'équation de correction de pression suivante :

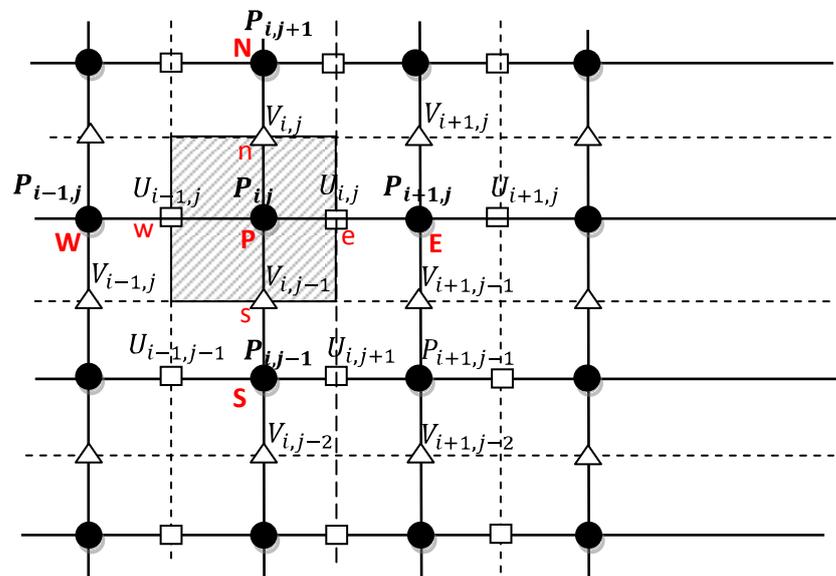


Figure 4.21 : volume de contrôle pour la pression.

$$a_P^P P_P = a_E^P P_E + a_W^P P_W + a_N^P P_N + a_S^P P_S + b^P \quad (4.57a)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E^P = \rho_e d_e \Delta z \\ a_W^P = \rho_w d_w \Delta z \\ a_N^P = \rho_n d_n \Delta x \\ a_S^P = \rho_s d_s \Delta x \\ a_P^P = a_E^P + a_W^P + a_N^P + a_S^P \end{cases} \quad (4.57b)$$

$$b^P = \rho_w u_w^* \Delta z - \rho_e u_e^* \Delta z + \rho_s v_s^* \Delta x - \rho_n v_n^* \Delta x \quad (4.57c)$$

Cette équation permet de déterminer le champ de la correction P' . La correction de pression et des vitesses est maintenant possible et les valeurs déduites sont considérées comme des nouvelles estimations et la procédure est recommencée jusqu'à la convergence. Cette procédure est connue dans la littérature sous le nom de SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation) et est très largement utilisée.

L'algorithme SIMPLE sera donc défini par les étapes suivantes :

- 1- Estimer le champ de pression P^* ;
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement (4.52.a) et (4.52.b) pour obtenir u^* et v^* ;
- 3- Résoudre l'équation en P' , équation (4.57a), et cela en utilisant u^* et v^* pour calculer b^P ;
- 4- Calculer le champ de pression P et le champ des vitesses u et v à partir des équations (4.56.a) et (4.56.b);
- 5- Traiter la pression P comme un nouveau estimé P^* , et revenir à l'étape 2 pour répéter la même procédure jusqu'à la convergence.

Une autre version améliorée de l'algorithme SIMPLE, mise au point par Patankar (1980), est l'algorithme SIMPLER (SIMPLE Revised). Selon cet algorithme l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation de correction de pression comme dans l'algorithme SIMPLE.

L'idée de cet algorithme est d'utiliser l'équation de correction de pression pour corriger seulement les vitesses et de trouver un autre moyen pour obtenir une équation pour la pression.

Equation de pression ;

On peut écrire l'équation de quantité de mouvement (4.50a) sous la forme :

$$u_e = \left(\sum a_{nb}^u u_{nb} + b^u \right) / a_e^u + \frac{\Delta Z}{a_e^u} (P_P - P_E) \quad (4.58)$$

Puis nous définissons une pseudo-vitesse \hat{u}_e par:

$$\hat{u}_e = \left(\sum a_{nb}^u u_{nb} + b^u \right) / a_e^u \quad (4.59a)$$

De même chose pour la pseudo-vitesse \hat{v}_e :

$$\hat{v}_n = \left(\sum a_{nb}^v v_{nb} + b^v \right) / a_n^v \quad (4.59b)$$

Nous pouvons voir que les équations (4.59) ne contiennent que les vitesses des points voisins et pas de pression. Alors l'équation (4.58) se transforme :

$$u_e = \hat{u}_e + \frac{\Delta Z}{a_e^u} (P_P - P_E) \quad (4.60a)$$

De même :

$$u_w = \hat{u}_w + \frac{\Delta Z}{a_w^u} (P_W - P_P) \quad (4.60b)$$

$$v_n = \hat{v}_n + \frac{\Delta x}{a_n^v} (P_P - P_N) \quad (4.60c)$$

$$v_s = \hat{v}_s + \frac{\Delta x}{a_s^v} (P_S - P_P) \quad (4.60d)$$

En remplaçant les vitesses données par les équations (4.60a) – (4.60d) dans l'équation de continuité discrétisée (4.41), on obtient également l'équation de pression discrétisée suivante:

L'algorithme consiste dans la résolution de l'équation de la pression pour obtenir le champ de pression et dans la résolution de l'équation de correction de pression seulement pour corriger les vitesses.

Les étapes qui doivent être parcourues dans l'algorithme **SIMPLER** sont :

1. On commence par l'estimation (choix initial) du champ de vitesses, u^* et v^* , du champ de pression p^* ;

2. Calculer les pseudo-vitesses \hat{u} et \hat{v} , après le calcul des coefficients a_{nb}^u et a_{nb}^v à l'aide des relations (4.59a) et (4.59b);
3. Calculer les coefficients et résoudre l'équation de la pression (4.61) pour obtenir le champ de pression p ;
4. Initialiser le champ de pression initial p^* , avec le nouveau champ de pression obtenu à l'étape 3 ($p^* = p$) et résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement (4.52. a) et (4.52. b) pour obtenir u^* et v^* ;
5. Calculer les coefficients et le terme-source b^p et puis résoudre l'équation de correction de pression (4.57a) pour obtenir la correction de pression p' ;
6. Corriger le champ de vitesses à l'aide des relations (4.56. a) et (4.56. b), mais sans corriger la pression ;
7. Réinitialiser toutes les variables calculées aux étapes 3, 6 ($p^* = p$, $u^* = u$, $v^* = v$) et puis retour à l'étape 2 ;
8. Répéter les étapes 2 à 7 jusqu'à l'obtention de la convergence.

4.13. Détails numériques :

Dans notre étude le champ des vitesses n'existe que dans le bain de fusion qui est limité par un isotherme qui décrit la température de fusion, il est difficile de réaliser un programme qui manipule que les nœuds situés dans le bain de fusion et d'implémenter les conditions aux limites en chaque nœud de la frontière qui limite le bain de fusion. Une technique très simple recommandée par **Patankar** joue sur la valeur de la viscosité dynamique a été utilisée pour simplifier le calcul.

4.13.1. Maillage régulière avec la région blocked-off :[patankar 80]

Dans notre étude un programme FORTRAN est écrit pour un maillage régulière est réalisé pour manipuler un calcul dans un domaine irrégulièrement formé. Ceci est fait en rendant inactif certains volumes de control du maillage régulière de sorte que les volumes de control actifs restants forme le domaine irrégulier (bain de fusion), **figure 4.22**, où la zone hachurée dénote les volumes de control inactifs (solide). Il est évident que la frontière irrégulière, vraie, est rapprochée par une série des marches rectangulaires (escalier).

Une valeur très grande de la viscosité dynamique μ de la zone inactive assure que la valeur prescrite à la frontière (nominale) de la zone règne sur la zone inactive entière. Encore, la solution dans la zone active sera inchangée par ces grandes valeurs de μ . En particulier, les vitesses dans la zone inactive peuvent être placées à zéro par l'utilisation d'une viscosité très grande pour la zone inactive et des vitesses nulles aux frontières nominales.

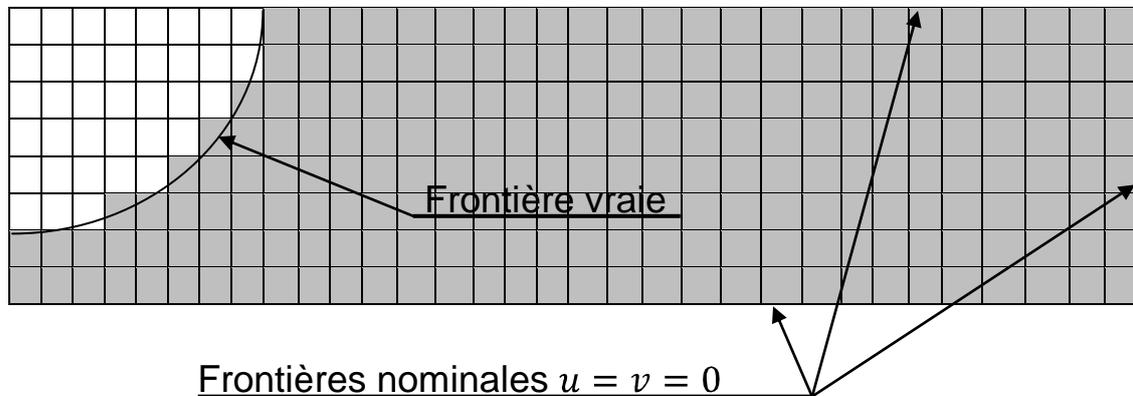


Figure 4.22: blocked-off région dans un maillage régulier.

4.13.2. Résolution du système d'équations algébriques :

Après la discrétisation de toutes les équations, on aboutit à des équations algébriques de la forme générale suivante:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b$$

Elles peuvent s'écrire sous forme de matrices $[A][\phi] = [b]$. La matrice de coefficients $[A]$ comporte cinq éléments différents de zéro, positifs par ligne et à diagonale dominante. Les méthodes de résolution de tels systèmes étant très coûteuses, nous utilisons des méthodes itératives habituelles. Pour résoudre ce système d'équations, on fait appel à des méthodes itératives. Cependant les méthodes itératives ont pour inconvénient de converger lentement. Afin d'améliorer la vitesse de convergence, on utilise une combinaison entre une méthode directe (TDMA : Tri-Diagonal Matrix Algorithm) et une méthode itérative (Gauss-Seidel). Cette combinaison est appelée méthode ligne par ligne. Elle consiste à utiliser une méthode directe (Algorithme de Thomas) dans une direction et la méthode itérative de Gauss-Seidel dans l'autre direction. Les équations discrétisées sont résolues successivement à chaque itération.

4.13.3. Algorithme de Thomas (TDMA) :

Cette méthode est utilisée pour résoudre les matrices tri-diagonales, notons que cet algorithme est extrêmement performant en terme de temps de calcul, permet de ne jamais stocker. La matrice tri-diagonale $[A]$ est remplacée par trois vecteurs uni-colonnes qui correspondent aux trois diagonales non nulles. Remarquons une fois de plus que TDMA ne permet de résoudre que des systèmes linéaires. Puisque dans notre cas où les coefficients de la matrice $[A]$ dépendent de la quantité Φ , il faut alors utiliser une procédure itérative de la forme :

- Estimer la valeur de Φ en tout point de maillage.
- Calculer les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i avec les dernières valeurs estimées.
- Appliquer le TDMA pour résoudre le system.
- Avec les nouvelles valeurs de Φ retourner a l'étape 2 jusqu'à convergence.

4.13.4. Méthode itérative ligne par ligne :

L'algorithme de Thomas peut être appliqué itérativement pour résoudre le système d'équations algébriques dans le cas des problèmes 2D. On combine la méthode directe de l'algorithme de Thomas dans une direction et la méthode itérative de Gauss-Seidel dans l'autre direction. Soit l'exemple du maillage de la (figure 4.23)

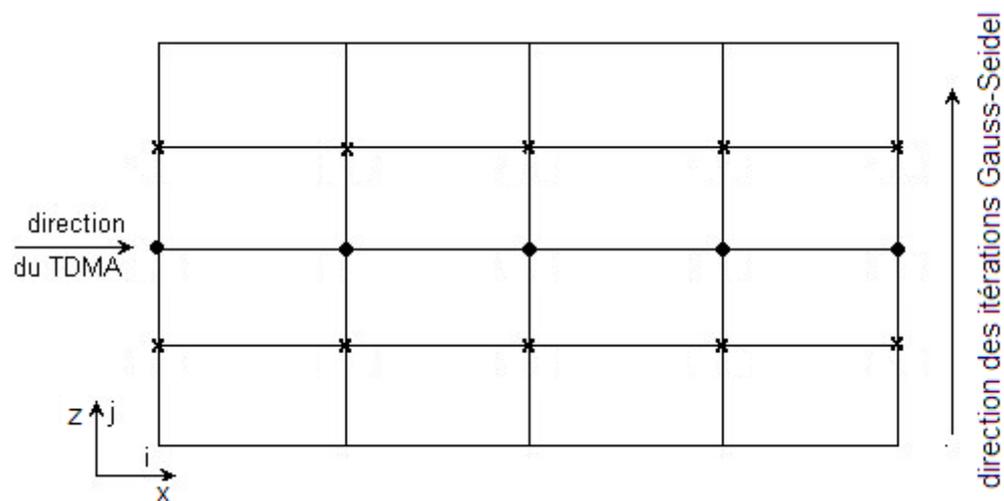


Figure 4.23 : application de la méthode ligne par ligne.

Les résultats supposés connus sont marqués par les croix et nous calculons là où il y'a des points. On remarque que pour chaque point il y'a deux points voisines, inconnus, et deux croix, connus.

Si $1 \leq j \leq M$, on résout M problèmes 1D dans la direction x par le TDMA, en balayant tous les indices de $j \in [1, M]$ jusqu'à la convergence.

4.14. Technique de sous relaxation :

La sous-relaxation est régulièrement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter la divergence du processus itératif. Elle consiste à diminuer la variation de la grandeur physique ϕ d'une itération à une autre par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ .

D'après les hypothèses qui ont mené aux équations (4.55. a) et (4.55. b), les corrections de pression qui en résultent sont un peu trop importantes. Ceci peut mener à une divergence de l'algorithme SIMPLE si l'on ne fait pas une sous relaxation. C'est pourquoi dans notre programme, la pression n'est pas corrigée au moyen de l'équation (4.53. c) mais par:

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (4.58)$$

α_p est le facteur de sous relaxation pour la pression.

Les vitesses u et v seront sous relaxées comme suit ; A gauche de l'équation algébrique (4.49) pour la variable générale $\phi = (u, v)$, la valeur ϕ_p^* de l'itération précédente sera ajoutée et soustraite de la façon suivante:

$$\phi_p = \phi_p^* + \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}}{a_p} + \frac{b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (4.59)$$

Le terme qui se trouve entre parenthèses correspond à la variation de ϕ pour une itération. Celui-ci est sous relaxé par le facteur α_ϕ dans le programme, soit:

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha_\phi \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}}{a_p} + \frac{b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (4.60)$$

Dans ce travail les facteurs de sous relaxation suivants seront utilisés:

$$\alpha_u = \alpha_v = 0.2, \quad \alpha_p = 0.8 \quad \text{et} \quad \alpha_T = 1.2 \quad (4.61)$$

Dans les algorithmes SIMPLE et SIMPLER, il n'est pas nécessaire à chaque fois de résoudre chaque équation jusqu'à la convergence, puisque après la résolution, les valeurs de la fonction obtenues sont corrigées et les matrices de coefficients sont recalculées.

Il faut cependant être sûr que les équations u , v et notamment l'équation de correction de pression en P' , convergent, sinon l'ensemble de l'algorithme divergera après quelques itérations.

Les équations u et v sont plus simples à résoudre, puisque à chaque fois, on peut utiliser comme valeurs évaluées celles qui se trouvent dans les champs après l'itération précédente.

Ceci n'est pas valable pour la correction des pressions; le calcul est à chaque fois démarré avec $P' = 0$, pour tout les nœuds du maillage, à défaut de meilleures valeurs.

4.15. Critère de convergence :

Pour que l'équation discrétisé (4.49) soit correctement résolue pour toutes les variables (u, v, P, T), on doit définir un indicateur de convergence qui permettra de donner l'erreur après chaque itération pour toutes les variables du système.

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence lorsque les itérations ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs des variables dépendantes \emptyset . Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif qui dépend de la nature du problème et des objectifs de calcul.

Ces résidus sont définis par :

$$R_\emptyset = a_p \emptyset_p - \sum_{nb} a_{nb} \emptyset_{nb} - S_\emptyset \quad (4.62)$$

Dans notre cas d'étude, la convergence est assurée lorsque le maximum du résidu de toutes les variables atteint la valeur de 10^{-4} .

CHAPITRE 5

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

5.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous nous intéressons en premier lieu à la génération de maillage et l'influence du maillage sur les résultats, puis nous procédons à la validation de notre programme de calcul en comparant les résultats obtenus avec ceux obtenus par d'autres auteurs, et finalement à la représentation des résultats obtenus et de les interprétés.

5.2. Génération de maillage :

5.2.1. Introduction :

La résolution numérique est effectuée par la méthode des volumes finis puisqu'elle représente bien les bilans de conservation et qui consiste à rendre des équations différentielles partielles en un system des équations algébriques dont chaque équation du system représente un nœud du domaine de calcul. La mise en œuvre effective de la méthode des volumes finis décrite par le chapitre précédent, nécessite l'utilisation des méthodes numériques variées et puissantes pour résoudre le system d'équation algébrique qui en résulte.

Pour l'instant nous n'avons pas localisé les nœuds et leurs volumes de contrôle, nous allons montrer ici deux choix possibles de maillage :

Les surfaces des volumes, interfaces, seront placées au milieu des deux nœuds du maillage.

Les nœuds du maillage seront placés au centre du volume de contrôle.

5.2.2. Procédure de génération de maillage :

Dans notre problème de soudage, on à deux plans d'étude transversaux rectangulaires, à cause de la symétrie on va appliquer la discrétisation sur un seul plan afin de réduire le temps de calcul.

En effet, vu le gradient important de la température au niveau de la zone fondue ZF et la zone affectée thermiquement ZAT d'une part, et le faible gradient de la température dans le reste du plan d'étude d'autre part, il est convenable de diviser le plan d'étude en quatre blocs différents telle que le maillage du premier bloc au alentour du bain de fusion soit très fins (figure 5.3) et l'autre soit gros. Le maillage utilisé dans notre étude (figure 5.2) est un maillage rectangulaire, dont nous avons construit les nœuds de maillage de façon à préciser les coordonnées (x, z) de chaque nœud et puis construire les facettes qui seront placées au milieu de deux nœuds voisins de même direction. La (figure 5.1) représente notre domaine d'étude.

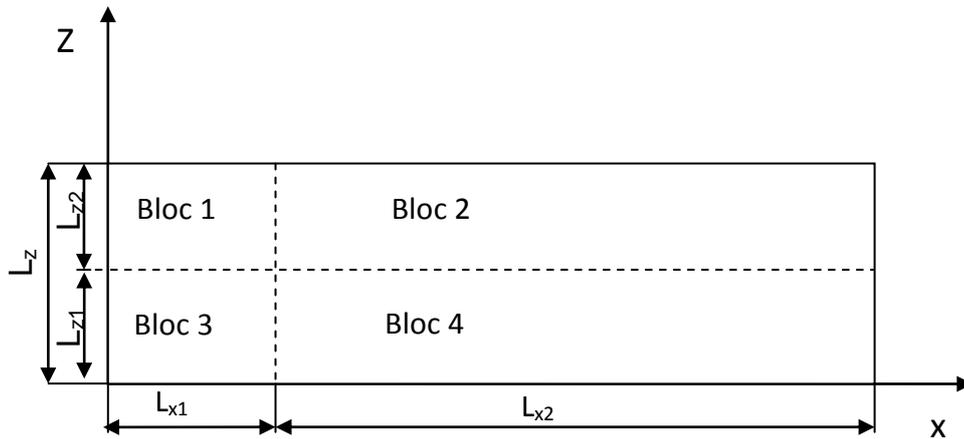


Figure 5.1 : illustration du domaine d'étude.

5.2.3. L'algorithme de génération de maillage :

Le maillage utilisé dans notre étude (figure 5.2) est la solution de l'algorithme suivant :

- Choisir le nombre des nœuds $NVCX_1$ et $NVCX_2$ dans L_{x1} et L_{x2} respectivement suivant la direction des X où la distance L_{x1} doit être grande au rayon de distribution utilisé dans la source de soudage.
- Choisir le nombre des nœuds $NVCZ_1$ et $NVCZ_2$ dans L_{z1} et L_{z2} respectivement suivant la direction des Z.
- Construire les nœuds de maillage où $\delta_{x1} = \frac{L_{x1}}{NVCX_1}$ et $\delta_{x2} = \frac{L_{x2}}{NVCX_2}$ sont les distances entre les nœuds suivant la direction des X et $\delta_{z1} = \frac{L_{z1}}{NVCZ_1}$ et $\delta_{z2} = \frac{L_{z2}}{NVCZ_2}$ sont les distances entre les nœuds suivant la direction des Z.

- Construire les facettes sur les deux axes.

Pour assurer un maillage structuré dans le bloc 1 nous avons pris ;

$L_{x1} = L_{z2}$ et $NVCX_1 = NVCZ_2 = NVC$ avec $L_{x1} = 7\text{mm}$ contient $NVCX_1$ volumes de contrôle, $L_{x2} = 50\text{mm}$ contient $NVCX_2$ volumes de contrôle et $L_{z1} = 2.5\text{mm}$ contient $NVCZ_1$ volumes de contrôle et $L_{z2} = 7\text{mm}$ contient $NVCZ_1$ volumes de contrôle. Alors, la taille totale du maillage auquel nous avons opté est $(NVC + NVCX_2) * (NVCZ_1 * NVC)$ ou $(150 + 50) * (10 * 150)$ volumes de contrôle.

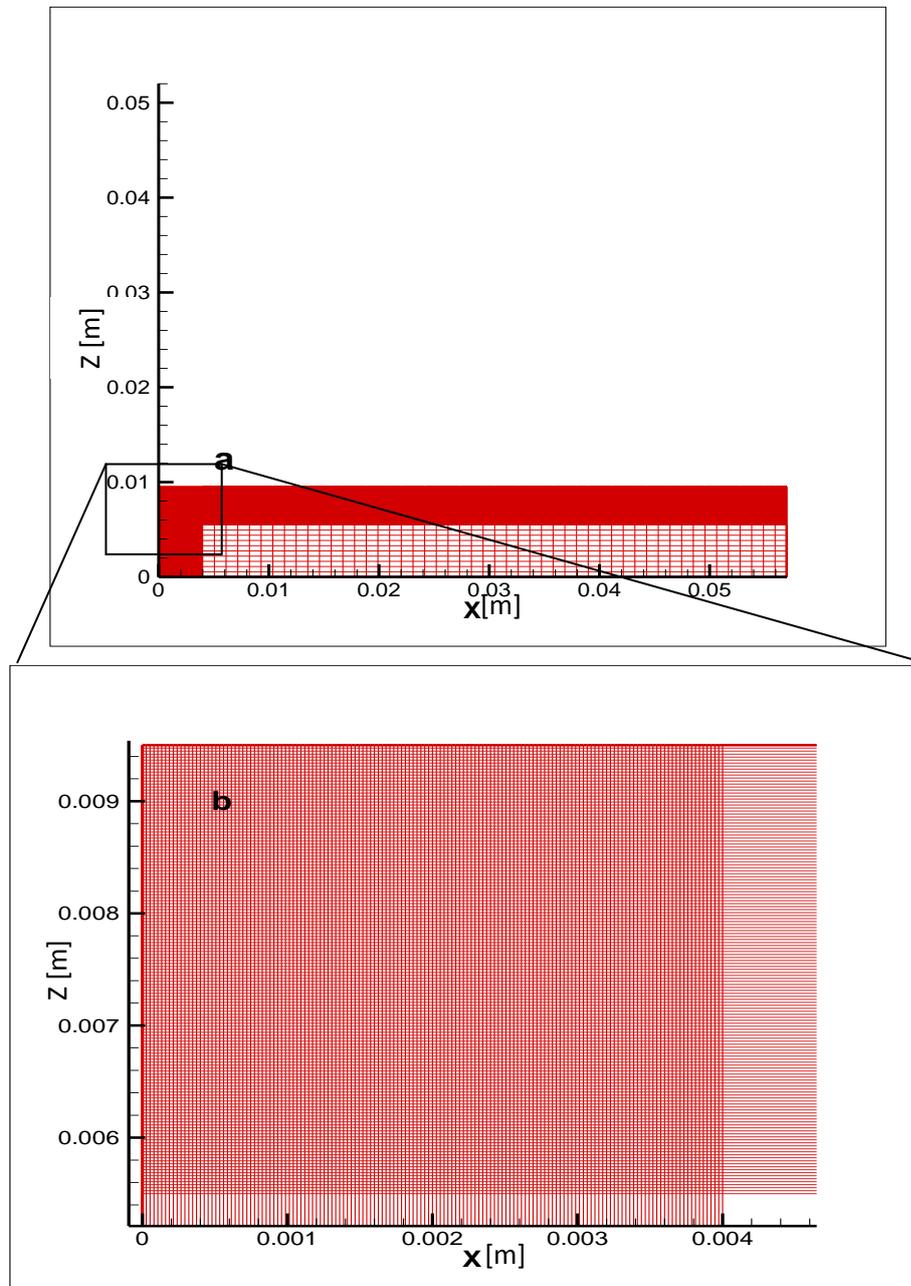


Figure 5.2 : Maillage utilisé pour la simulation numérique.

a) Bloc1+bloc2+bloc3+bloc4

b) bloc 1

5.3. Paramètres choisis pour le calcul :

Les paramètres de soudage utilisés dans le calcul sont :

Tableau 5.1 : paramètres de soudage

paramètre	symbole	unité	valeur
Tension de soudage	U	V	9,6
Intensité de courant	I	A	101
Vitesse de soudage	Us	m/s	1,7e-3
Rendement de l'arc	η	/	0,7

Les paramètres physiques de l'acier inoxydable 304L utilisés dans le calcul sont :

Tableau 5.2 : caractéristiques physiques utilisés

paramètres	symboles	unité	valeur
Densité	ρ	Kg/m ³	7200
Viscosité dynamique de la phase liquide	μ_l	kg/m s	6,7e-3
Viscosité dynamique de la phase solide	μ_s	kg/m s	6,7e+8
Température de liquidus	T_l	K	1785
Température de solidus	T_s	K	1745
Conductivité thermique de la phase solide	k_s	J/m Ks	25,08
Conductivité thermique de la phase liquide	k_l	W/m K	25,08
Coefficient de dilatation thermique	β	k ⁻¹	1,5e-6
Coefficient de tension superficielle	$\frac{\partial \gamma}{\partial T}$	N/m K	-0,47e-3
Chaleur spécifique	Cp	J/kg K	806,74

La conductivité thermique est calculée par l'équation (3.34) en utilisant les valeurs de k_s et k_l présentés dans le tableau précédent (Tableau 5.2) avec le paramètre décrivant l'effet de la convection liquide $A_{mix} = 4$.

5.4. Effet du maillage sur les résultats numériques :

Afin de vérifier la robustesse du modèle numérique proposé, une étude de l'influence du maillage sur l'exactitude de la solution numérique a été examinée avant de passer aux calculs de notre étude. Afin de procéder à cet examen, nous avons pris en compte cinq différents maillages en changeant la valeur de NVC

seulement, $((100+20)*(10+100))$, $((120+20)*(10+120))$, $((130+20)*(10+130))$, $((150+20)*(10+150))$ et $((165+20)*(10+165))$.

Le tableau 5.3 donne les résultats des valeurs maximales de la température T_{max} et des vitesses u_{max} et v_{max} , pour tous les maillages.

$$\left| \frac{T_{max}(NVC = 165) - T_{max}(NVC = 150)}{T_{max}(NVC = 165)} \right|$$

$$= \left| \frac{2043.66803 - 2043.70661}{2043.66803} \right| = 1.88778e - 5 = 0.00188778\%$$

De la même chose pour la vitesse u :

$$\left| \frac{u_{max}(NVC = 165) - u_{max}(NVC = 150)}{u_{max}(NVC = 165)} \right| = 0.049757 = 4.9757\%$$

Et l'erreur pour la vitesse v :

$$\left| \frac{v_{max}(NVC = 165) - v_{max}(NVC = 150)}{v_{max}(NVC = 165)} \right| = 0.027516 = 2.7516\%$$

Tableau 5.3 : Effet du maillage sur les résultats :

	$NVC = 100$	$NVC = 120$	$NVC = 130$	$NVC = 150$	$NVC = 165$
T_{max}	2044.18818	2044.09668	2043.80189	2043.70661	2043.66803
U_{max}	2.50292e-1	2.42195e-1	1.52611e-1	9.30708e-2	9.79443e-2
V_{max}	1.61521e-2	1.38799e-2	7.01416e-3	4.80884e-3	4.68006e-3

Nous avons opté pour les grilles de maillage $((150+20)*(10+150))$, $NVC = 150$, malgré que l'erreur entre le maillage de $NVC = 150$ et le maillage de $NVC = 165$ ne dépasse pas 5%. Les profils de vitesse et de température obtenus par ces grilles sont très proches et vu que le temps d'exécution du programme de calcul pris en utilisant un maillage de $NVC = 165$ est plus grand, notre choix a été définitivement orienté vers le maillage de $NVC = 150$.

La densité de maillage a un impact direct sur le temps de calcul puisque plus le nombre de cellules augmente plus le temps nécessaire à la réalisation d'une itération est important. Cependant, le temps de calcul total après convergence de la solution n'augmente pas forcément avec le nombre de cellules.

En effet, il est possible que le calcul nécessite moins d'itérations avec un maillage plus fin.

5.4.1 Effet du maillage sur le profil thermique :

Les figures (Figure 5.3) et (Figure 5.4) représentent le profil thermique de la frontière supérieure et inférieure du plan d'étude pour différents maillages au temps où la source de chaleur est juste au-dessus du plan d'étude. On remarque que le maillage n'influence pas beaucoup sur le champ thermique à un temps donné.

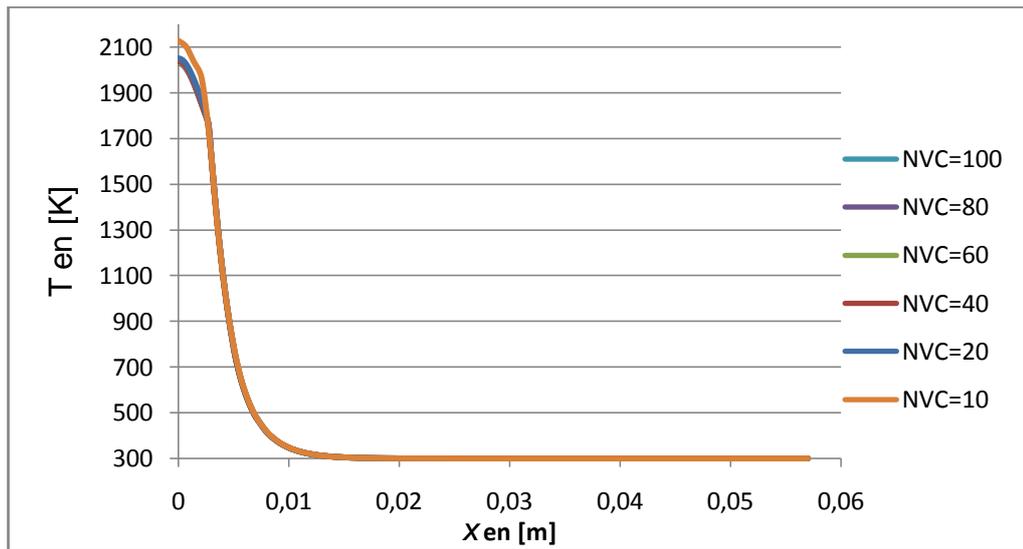


Figure 5.3 : Influence du maillage sur le profil thermique de la frontière supérieur du plan d'étude.

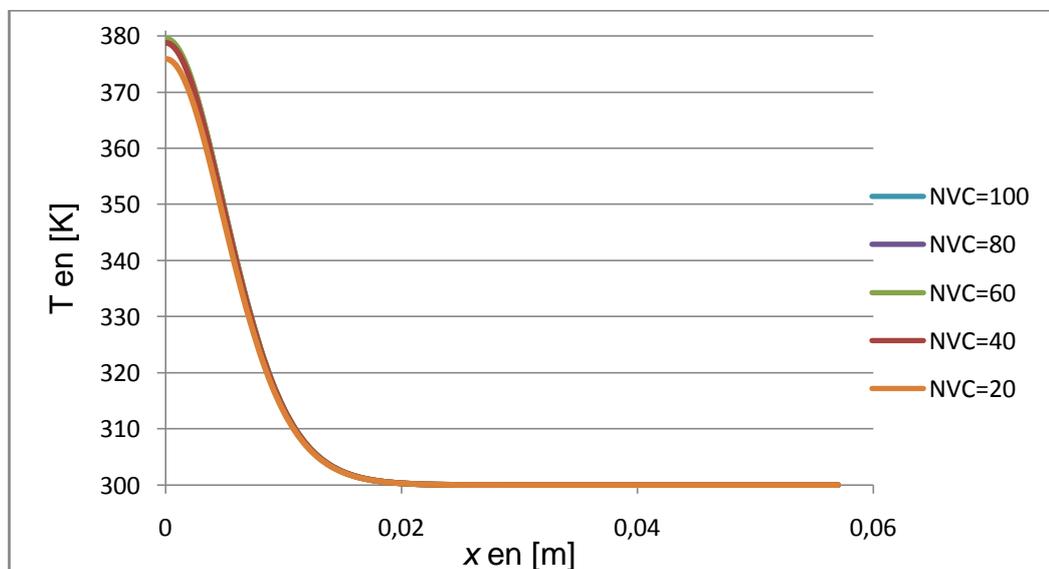


Figure 5.4 : Influence du maillage sur le profil thermique de la frontière inférieur du plan d'étude.

5.4.2 Effet du maillage sur le cycle thermique :

La figure (Figure 5.5) représente le cycle thermique du point ($x=0, z=l_z$) situé sur la frontière supérieure du plan d'étude pour différents maillages. On remarque que le maillage n'influence pas beaucoup sur le cycle thermique, et qu'il existe un petit écart au-delà de 50 secondes du temps de soudage, c'est-à-dire que le maillage n'influence pas sur la géométrie du bain de fusion.

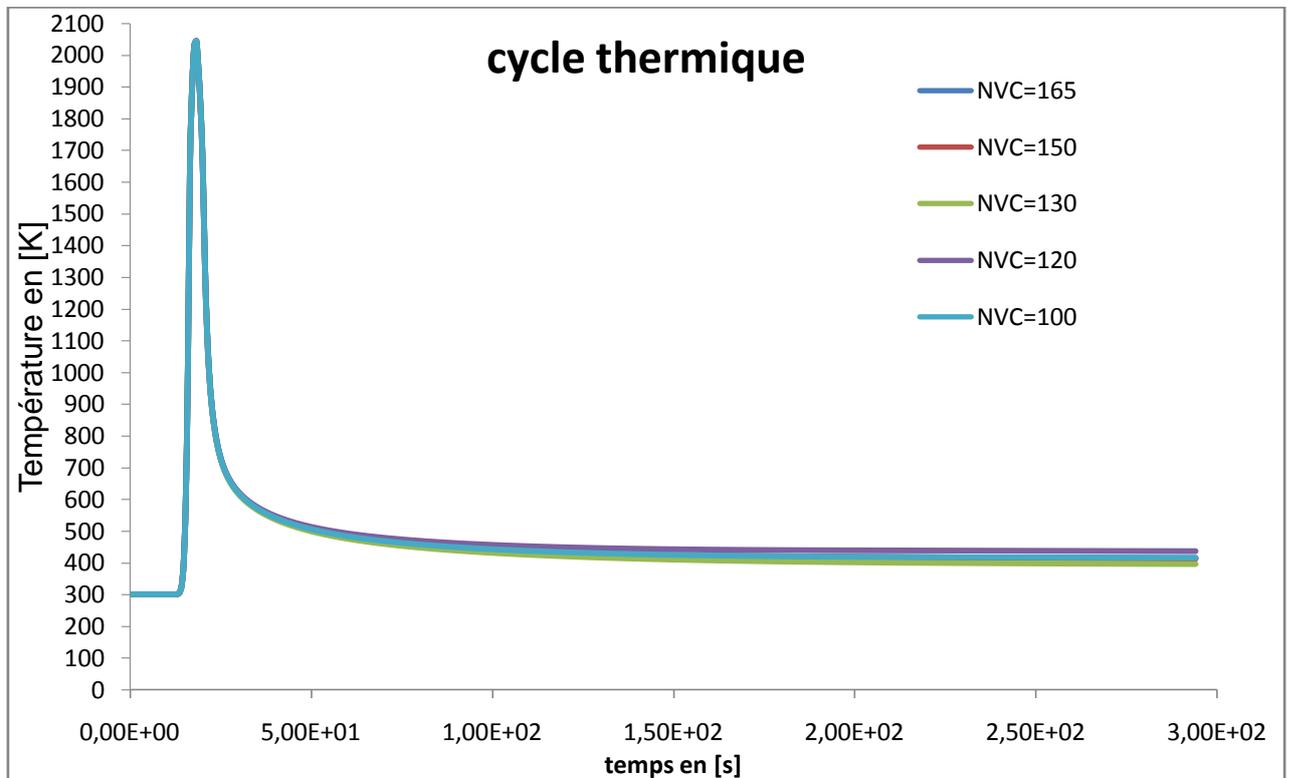


Figure 5.5 : effet du maillage sur le cycle thermique du point ($x=0, z=l_z$).

5.4.3. Effet du maillage sur la géométrie du bain de fusion :

La figure (Figure 5.6) représente la variation de la largeur et de la pénétration du bain de fusion en fonction des différents maillages. On remarque que la géométrie du bain de fusion reste constante au-delà d'un maillage de $NVC = 100$.

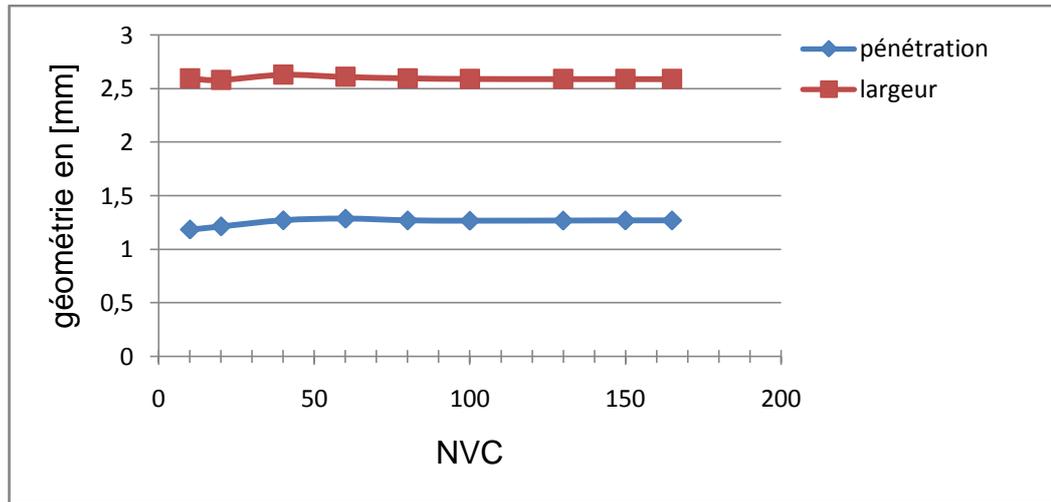


Figure 5.6 : Influence du maillage sur la géométrie du bain de fusion.

5.4.4. Effet du maillage sur le profil de vitesse :

Les figures (Figure 5.7) et (Figure 5.8) représentent le profil de vitesse horizontale u de la frontière supérieure et celle de la vitesse verticale v du plan de symétrie respectivement pour différents maillages au temps où la source de chaleur est juste au-dessus du plan d'étude. On remarque que le maillage influence beaucoup sur le champ des vitesses à un temps donné, alors que le raffinement du maillage est obligatoire.

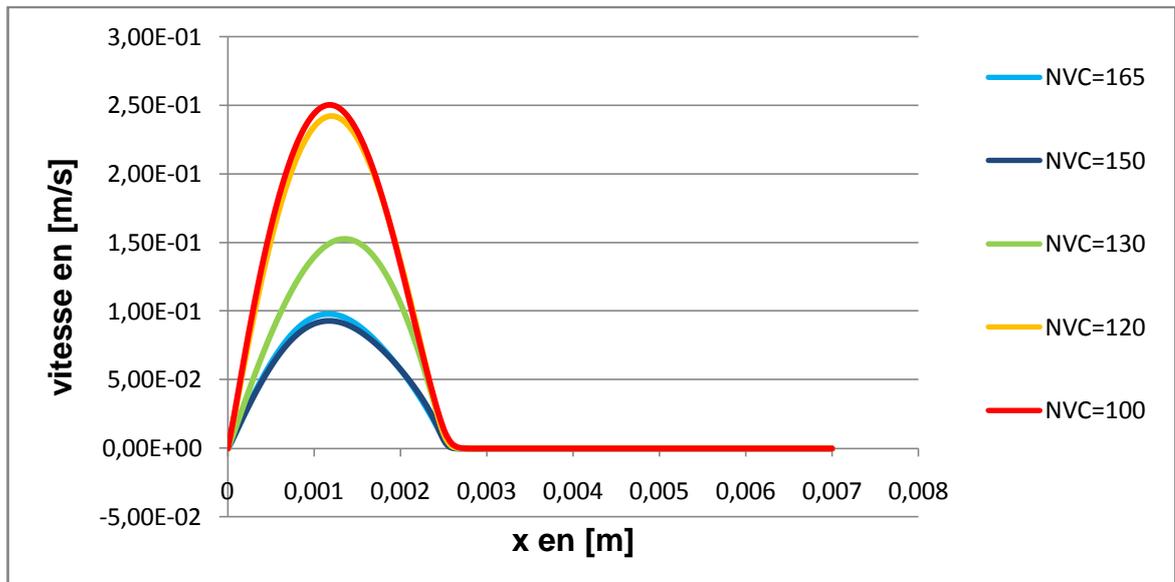


Figure 5.7 : Influence du maillage sur la vitesse horizontale u a la frontière supérieure.

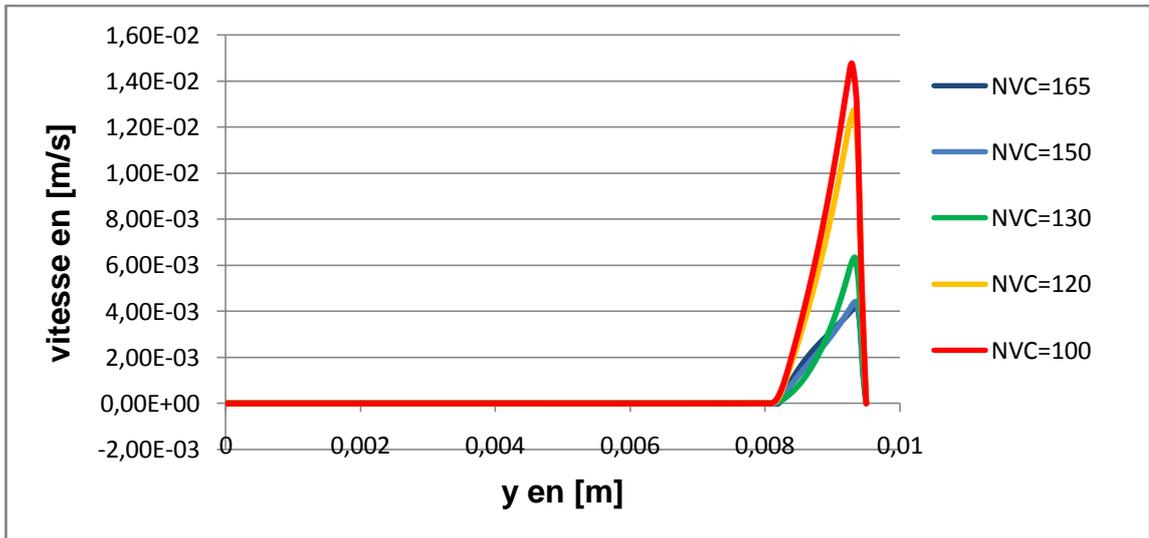


Figure 5.8 : Influence du maillage sur la vitesse verticale v sur le plan de symétrie.

5.5. Validation du code de calcul :

Pour valider notre code de calcul et vérifier l'exactitude numérique de la présente étude, nous avons procédé à diverses comparaisons avec différents résultats disponibles dans la littérature, une seule comparaison entre les résultats numériques obtenus par **Mishra** et al [54] (à droite) et les résultats de notre simulation numérique (à gauche) est présenté (figure 5.9).

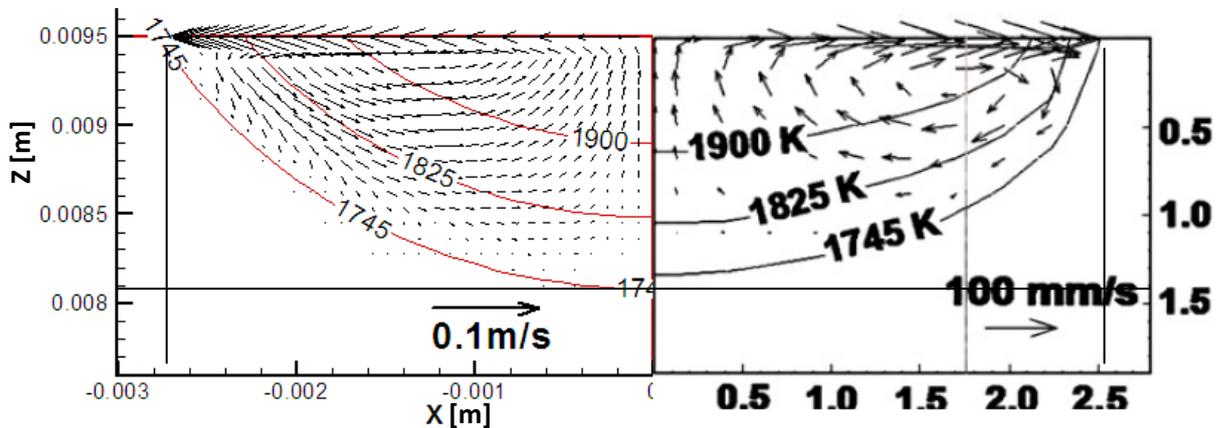


Figure 5.9 : comparaison

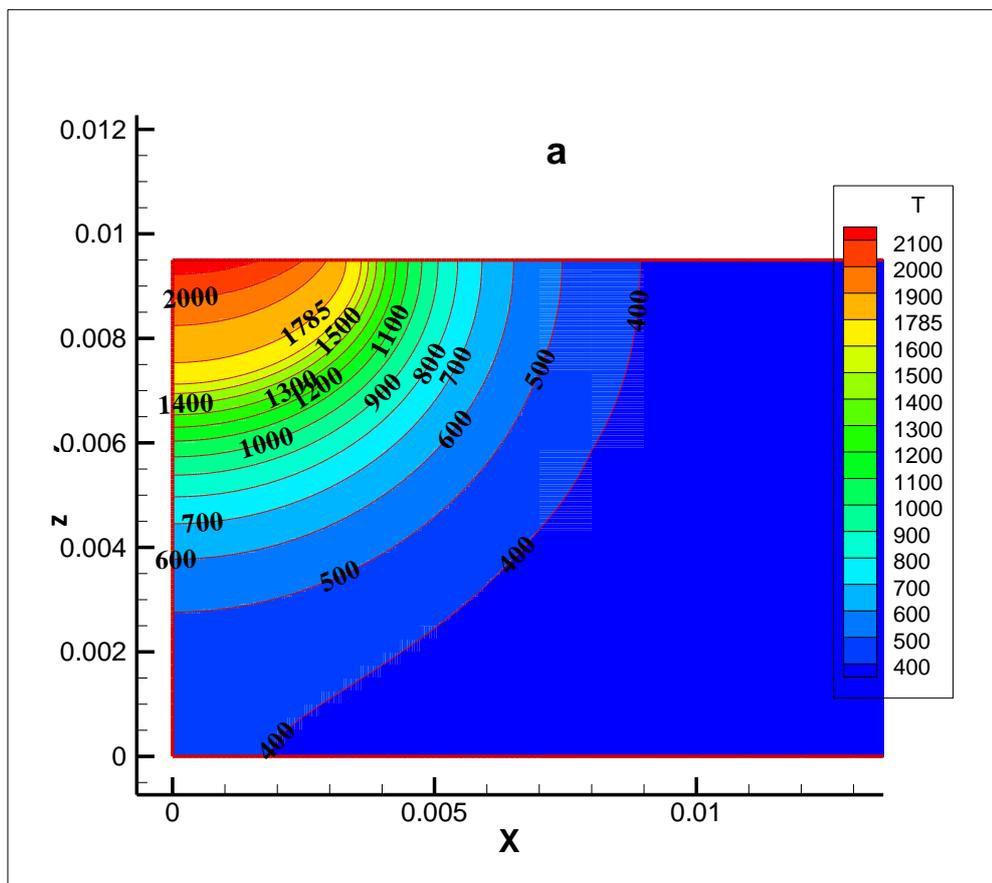
La géométrie du bain de fusion obtenu par **Mishra** est de 2,5 mm de largeur et 1,35mm de pénétration et la notre est de 2,7mm de largeur et 1,4 de pénétration, soit une variation de 7,4% de largeur et 3,57% de pénétration.

On remarque que le sens de l'écoulement dans le bain de fusion est le même en comparant notre résultat avec celle de **Mishra** avec un ordre de grandeur de 10cm/s a la surface supérieur du bain de fusion.

5.6 Résultats thermiques :

Dans ce travail nous avons utilisé deux modèles de source de chaleur en gardant la même forme de la fonction (3.19) qui représente l'approche et l'éloignement de ces sources du plan d'étude, la première est une source de chaleur en segment de ligne et la deuxième est une source de chaleur gaussienne surfacique, et cela pour faire une comparaison entre les deux résultats trouvés.

5.6.1 Source de chaleur en segment de ligne :



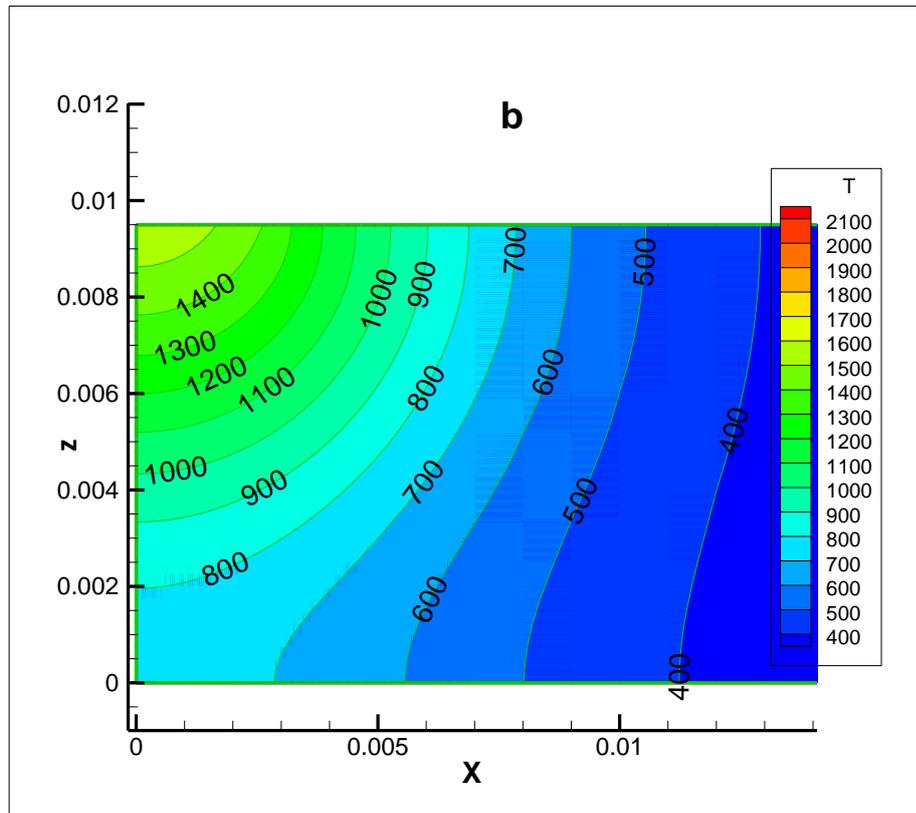


Figure 5.10 : Contour de température et les isothermes pour une source de chaleur en segment de ligne à : a) $t=17.64s$ et b) $t=20.58s$.

La figure 5.10 représente la répartition de température par les isothermes et le contour du champ de température dans le plan d'étude à différents instants.

En effet, on observe que les isothermes sont beaucoup plus dense au temps $t=17.64s$ qu'au temps $t=20.58s$ au passage de la source de chaleur, ce qui traduit la phase de refroidissement et retrace l'éloignement de la source de chaleur. Les étendues de la zone fondue et la zone affectée thermiquement peuvent aussi être déterminées à partir de la répartition de température.

5.6.2 Source de chaleur Gaussienne :

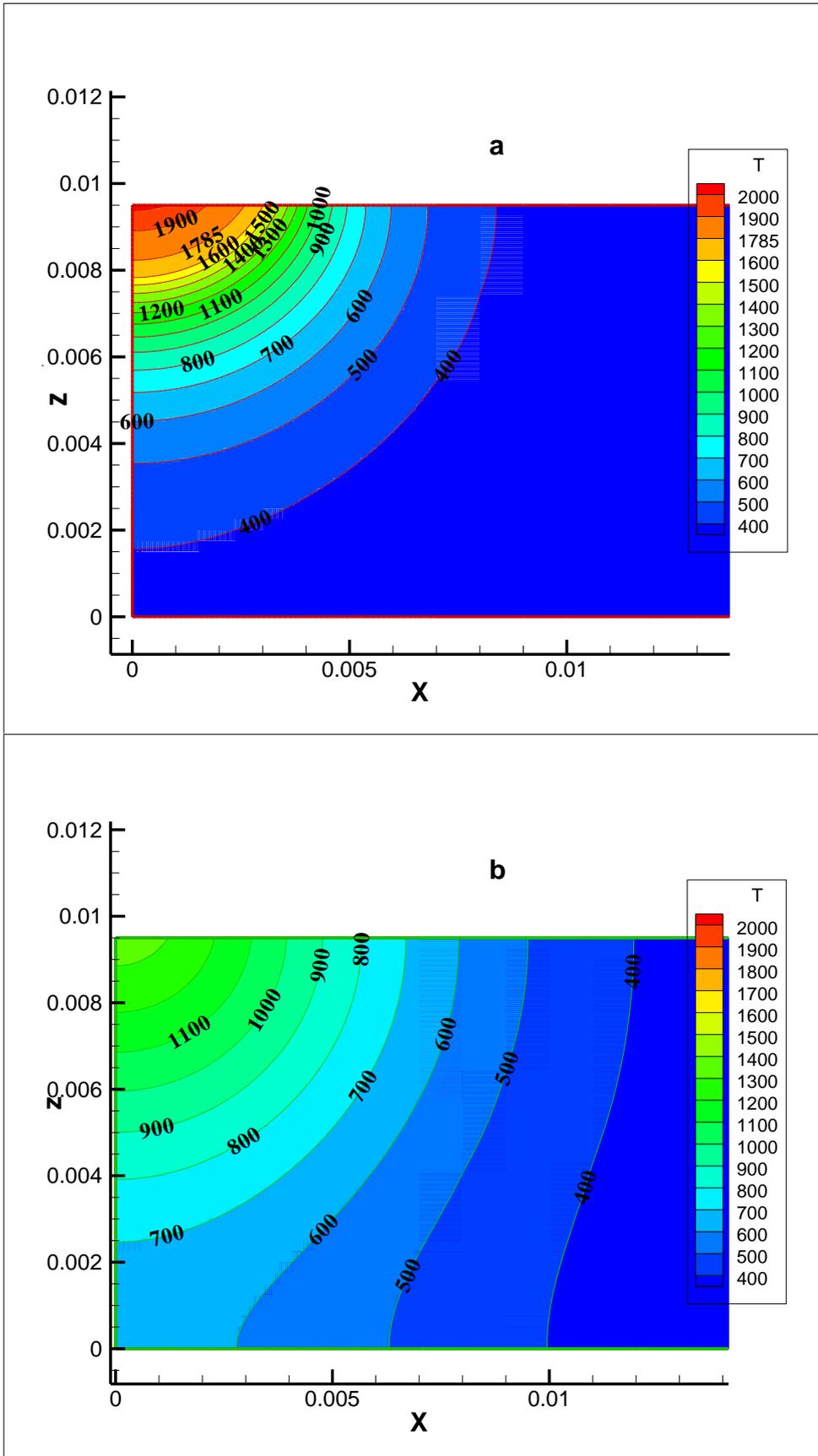


Figure 5.11 : Contour de température et les isothermes pour une source de chaleur Gaussienne à : a) $t=17.64s$ et b) $t=20.58s$.

La température au centre de la source de chaleur est nettement supérieure et atteinte environ 2100 K pour une source de chaleur en segment de ligne, qui est supérieur de 22% de celle de fusion et environ 2034 K pour une source de chaleur Gaussienne, qui est supérieur de 13% de celle de fusion. On remarque aussi que la géométrie du bain de fusion trouvé par une source de chaleur en segment de ligne (figure 5.10.a) est un peu plus grande que celle d'une source de chaleur Gaussienne (figure 5.11.a).

Qualitativement, le champ de température obtenu à partir de cette simulation par une source de chaleur Gaussienne est très consistant avec ceux reportés dans la littérature [54].

5.7. Etude de sensibilité des paramètres de la source de chaleur :

Pour représenter l'apport d'énergie représentatif du procédé TIG, nous avons choisi une source de chaleur surfacique de distribution gaussienne (équation (3.17)). La fonction choisie fait apparaître trois paramètres : le rendement η , le rayon de distribution R_0 et la vitesse de soudage V . Afin de mieux comprendre leurs influences respectives sur la forme des cordons de soudure, une étude de sensibilité de la puissance injectée, du rayon de distribution et de la vitesse de soudage a été réalisée. Nous avons fait varier la puissance de soudage et le rayon de distribution.

La Figure 5.12 montre que la largeur et la pénétration du cordon augmentent quand la puissance augmente. Une variation de 100 W de la puissance réellement injectée entraîne une modification de la géométrie de 0,9 mm sur la largeur et de 0,56 mm sur la pénétration (Figure 5.12a).

La largeur du cordon de soudure diminue quand le rayon de distribution augmente (Figure 5.12b). Une variation de 0,5 mm du rayon de distribution soit 11% entraîne une variation de 0,37 mm de la largeur. La pénétration du cordon de soudure semble diminuer quand le rayon de distribution augmente (Figure 5.12b). Une variation de 0,5 mm du rayon de distribution soit 11 % entraîne une variation de 0,43 mm sur la pénétration du bain de soudure.

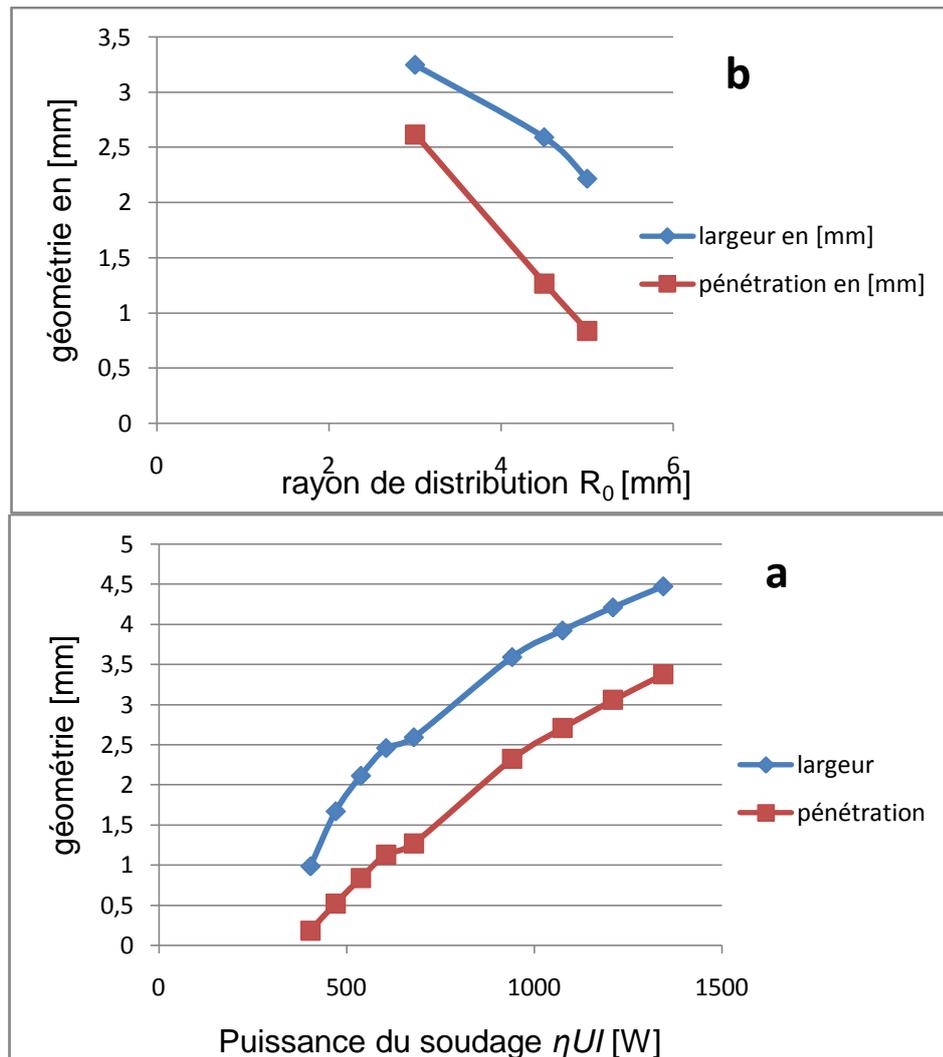


Figure 5.12 : Influence de la puissance ηUI (a) et du rayon de distribution R_0 (b) sur la géométrie du cordon.

Ces données vont permettre de calibrer plus facilement la puissance réellement injectée ηUI et le rayon de distribution R_0 de la source thermique gaussienne. Ces informations donnent une idée sur la sensibilité de ces 2 paramètres.

Plus la vitesse de soudage est importante, plus le cordon est petit. En effet, la largeur et la pénétration du bain de fusion de soudure diminuent quand la vitesse de soudage augmente (Figure 5.13). Pour une puissance de soudage fixe et une vitesse de soudage varie légèrement entre 0,5 et 2,5 mm/s, La largeur se diminue de 4 à 2,14 mm et la pénétration de 3 à 0,84 mm.

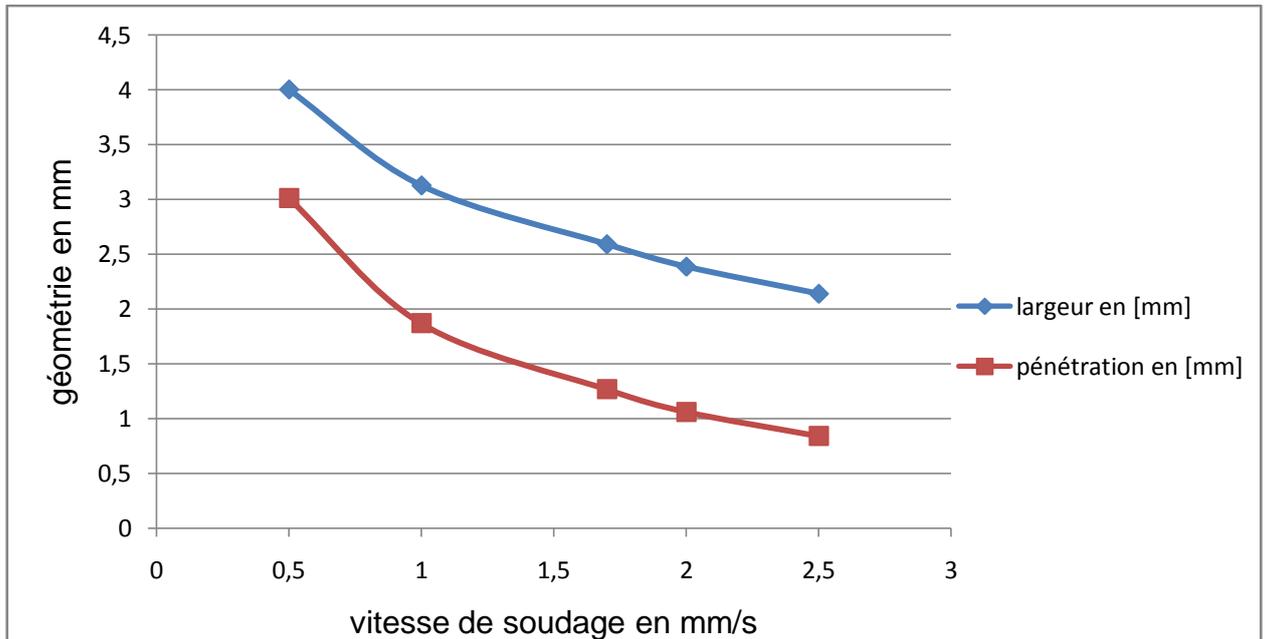


Figure 5.13 : Effet de la vitesse de soudage V sur la Largeur et la profondeur de pénétration du cordon de soudure.

5.8. Effet de la force Marangoni sur l'écoulement du fluide pendant le soudage :

L'écoulement du fluide sous l'action de la force de Marangoni peut être obtenu avec un coefficient $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ non nul. Avec un $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ différent de zéro, il y aura un gradient de tension superficielle spatiale qui peut conduire l'écoulement. L'autre force motrice qui sera présente est la force de la flottabilité qui a été éliminée en mettant la source de la flottabilité égale à zéro. Par conséquent, ce cas, peut être considéré comme le cas où l'écoulement du fluide sera sous l'action de la convection Marangoni seule.

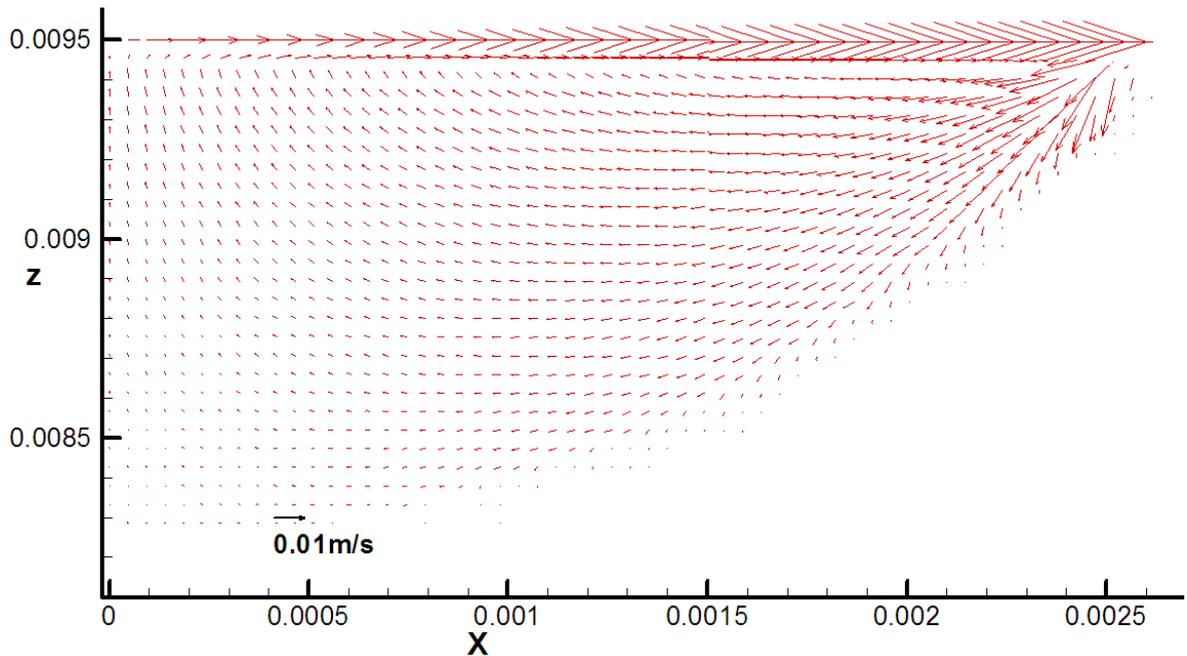


Figure 5.14 : Mouvements du métal fondu sous l'action de la force de Marangoni

$$\text{seule avec } \frac{\partial \gamma}{\partial T} = -0.47E - 3$$

La figure (figure 5.14), montre que l'ordre de la vitesse est 9 cm/s. Ici, les vitesses sur la surface horizontale libre sont importantes parce que ces vitesses sont influencées directement par le gradient de la tension superficielle, aussi connu sous le nom de la convection de Marangoni.

Nous voyons que les vitesses sont dirigées radialement vers l'extérieur. Nous savons que quand la température augmente, la valeur de la tension superficielle diminue. Par conséquent, lorsque nous déplaçons loin de la source de chaleur la tension superficielle augmente et conduit le liquide vers les bords (dehors du centre). Ce type de courant a une grande influence sur le transfert de la chaleur par convection dans le bain de fusion du soudage. Le métal liquide chaud est porté sur la périphérie à partir du centre, rend le bain plus large pour le cas d'une étude de couplage thermo-hydraulique.

Les vitesses sur le plan vertical central du bain sont influencées indirectement par la convection Marangoni, L'ordre de grandeur de la vitesse sur ce plan est approximativement 2mm/s. C'est évident, dans la direction verticale la quantité de mouvement est transférée de la surface libre par un mode visqueux où l'énergie est dissipée pendant le processus.

5.9. Effet du signe de $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ sur le courant fluide :

La force de Marangoni est produite par le gradient de la tension superficielle $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$. Un métal qui contient des traces de soufre ou d'oxygène (oxydes) a un coefficient $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ négatif.

Dans le cas suivant nous avons donné une valeur négative au coefficient $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$.

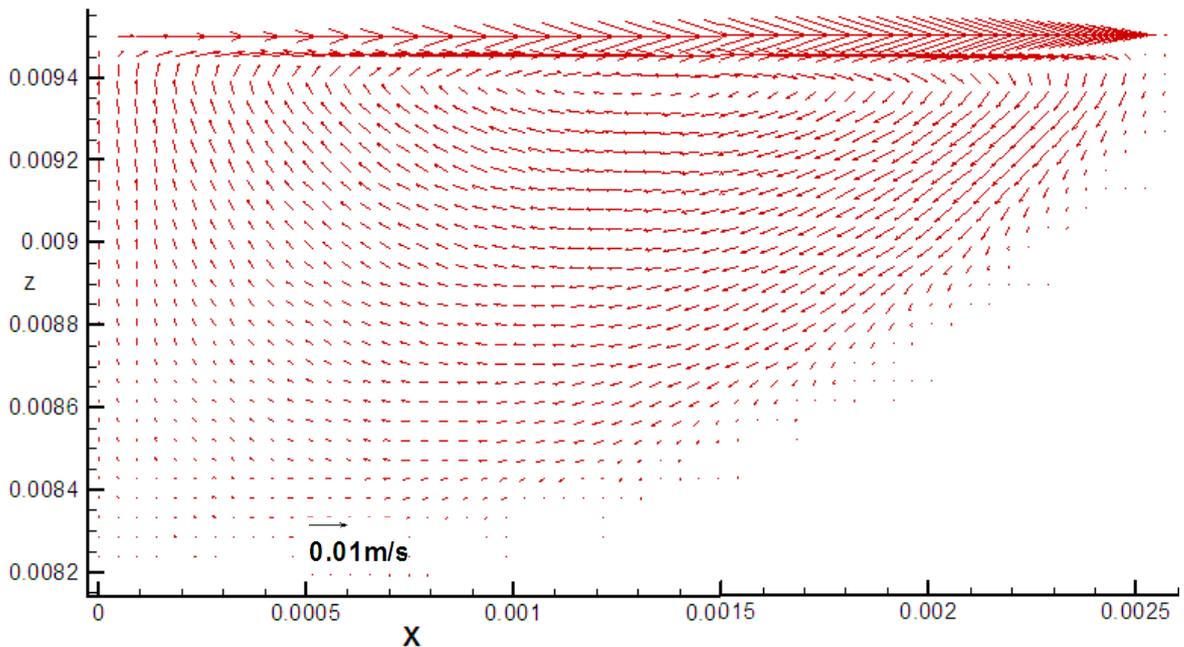


Figure 5.15 : Mouvements du métal fondu dans le bain de soudure avec

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -0.47 \text{ E-3}$$

Dans ce cas l'ordre des vitesses dans la surface libre du bain de fusion est de 10cm/s. De la (figure 5.15), la direction des courants fluides vers l'extérieur est due à la valeur négative du coefficient $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$. Ce courant fluide augmente la largeur du bain de fusion.

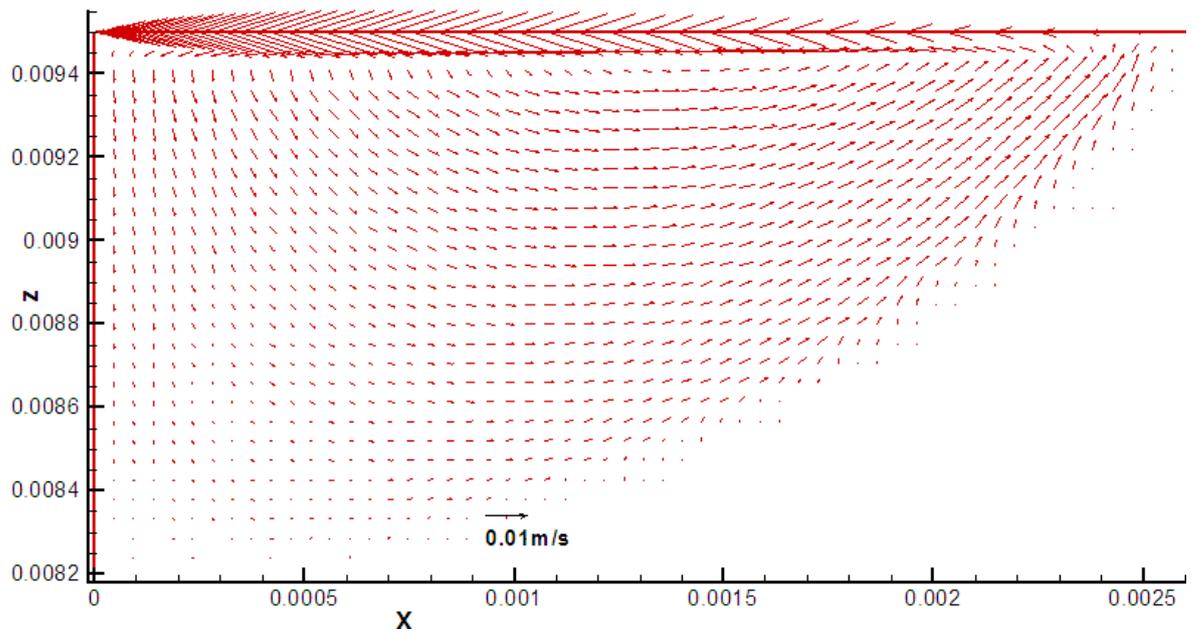


Figure 5.16 : Mouvements de convection dans le bain de soudure avec

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = +0.47E - 3$$

Dans le cas de $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ positif l'ordre de grandeur de la vitesse est le même qu'au cas précédent ($\frac{\partial \gamma}{\partial T}$ négatif). Le courant fluide est dirigé vers l'intérieur et ceci est dû à la valeur positive du coefficient $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$.

La direction du courant résulte de la tension superficielle qui est forte dans le centre du bain et faible près des bords du bain de soudure, ce que cause que le liquide se déplace vers la source de la chaleur et que la tension superficielle diminue, il en résulte que le liquide se tire vers l'intérieur. Ce courant fluide donne au bain une forme étroite et profonde.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est d'optimiser mathématiquement un modèle de source de chaleur et de confronter les résultats numériques, à l'aide d'un programme Fortran, à des résultats expérimentaux des autres auteurs.

La simulation numérique a montré, après validation, son intérêt pour l'interprétation de résultats expérimentaux, en particulier, la possibilité d'obtenir des informations difficilement accessibles en expérimentation. On a pu montrer, par l'étude de transfert thermique par conduction, la relation existant entre les paramètres de soudage et la géométrie du bain de fusion.

Le modèle numérique présenté dans ce mémoire, basé sur la méthode des volumes finis, nous a permis de résoudre le problème de conduction de chaleur lors d'une opération de soudage TIG de deux pièces en acier inoxydable 304L de même épaisseur et de résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement. Tel qu'on a pris en considération les effets suivant :

- Propriétés du matériau dépendant de la température.
- Dissipation de chaleur par convection et radiation.
- Problème de changement de phase en terme de chaleur latente de fusion, avec une augmentation artificielle de la conductivité thermique dans la zone fondue.
- et d'une distribution de chaleur gaussienne surfacique et une autre distribution de chaleur en segment de ligne où l'approche et l'éloignement de la source de chaleur et de la forme gaussienne.
- La force de flottation et l'effet de Marangoni ont été utilisés pour voir le champ des vitesses dans le bain de fusion avec une augmentation artificielle de la viscosité dynamique des nœuds situés hors le bain de fusion.

La résolution des équations décrivant le modèle nous a permis de tirer les résultats et conclusions suivantes :

- Tracer les isothermes et voire le contour de la température dans les deux zones liquide et solide ainsi que l'interface solide/liquide.
- Tracer les vecteurs de vitesse dans le bain de fusion.
- L'étude des différentes forces motrices sur les courants du fluide dans un bain de soudure.
- Conclure que l'ordre de grandeur de la force de flottaison est très petit par rapport du celle de Marangoni. alors, la force de flottaison n'a pas d'effet considérable sur l'écoulement du métal fondu. Par contre la force de Marangoni a un effet considérable sur l'écoulement, le transfert de chaleur convectif dans le bain de fusion et la géométrie du bain de fusion.
- Si la valeur du coefficient de la tension superficielle $(\frac{\partial \gamma}{\partial T})$ est négative, le fluide est tiré vers l'extérieur.
- Lorsque le coefficient de la tension superficielle $(\frac{\partial \gamma}{\partial T})$ aura une valeur positive. Dans ce cas les courants du fluide se dirigent vers l'intérieur.
- La puissance de soudage joue un rôle très important sur la forme du bain.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

a	Diffusivité thermique du matériau	(m ² /s)
C_p	Capacité thermique massique à pression constante	(J/Kg. K)
$C_{p_{eq}}$	Capacité thermique massique à pression constante	(J/Kg. K)
f_l	Fraction volumique du liquide	
F	Vecteur force	(N)
g	Accélération de pesanteur	(m/s ²)
H	Enthalpie	(J/Kg)
h	Coefficient d'échange convectif	(W/m. K)
I	Intensité de courant	(A)
k_l	Conductivité thermique du liquide	(W/mK)
k_s	Conductivité thermique du solide	(W/mK)
L_f	La chaleur latente de fusion	(J/Kg. K)
n	Vecteur normal	
N_{vx1}	Nombre de volume de control suivant x du bloc 1	
N_{vx2}	Nombre de volume de control suivant x du bloc 2	
N_{vz1}	Nombre de volume de control suivant z du bloc 2	
N_{vz1}	nombre de volume de control suivant z du bloc 1	
q	Densité du flux thermique	(W/m ²)
Q	Puissance de soudage	(W)
r	Distance par rapport au centre de la tache calorifique	(m)
R_0	Rayon de distribution de la Gaussienne	(m)
T	Température	(K)
T_l	Température de liquidus	(K)
T_s	Température de solidus	(K)
T_0	Température de référence	(K)
T_∞	Température ambiante	(K)
U	Vecteur vitesse	(m/s)
V	Vitesse de soudage	(m/s)
u, v	Composantes du vecteur vitesse	(m/s)

Lettres grecques

δ_x	Distance entre deux nœuds de maillage suivant x	(m)
δ_z	Distance entre deux nœuds de maillage suivant z	(m)
Δ_x	Distance entre deux interfaces de maillage suivant x	(m)
Δ_z	Distance entre deux interfaces de maillage suivant z	(m)
β	Coefficient de dilatation thermique	(K ⁻¹)
ε	Émissivité du matériau	
γ	Tension superficielle.	(N/m)
η	Rendement	
μ	viscosité dynamique	(Kg/m.s)
ρ	Masse volumique	(kg/m ³)
$\frac{\partial \gamma}{\partial T}$	Coefficient de tension superficielle	(N/m.k)
σ	Constante de Stéfan	(W/m ² .K ⁴)

Indices

E	Nœud Est
e	Interface est
i	Indice suivant x
j	Indice suivant z
l	Phase Liquide
N	Nœud Nord
n	Interface nord
P	Nœud principal
s	Phase Solide
S	Nœud Sud
s	Interface sud
W	Nœud ouest
w	Interface ouest

APPENDICE B

Algorithme de Thomas

Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système algébrique linéaire lorsque la matrice est tridiagonale. C'est notre cas, car les équations discrétisées dans le système linéaire s'écrivent sous la forme tridiagonale :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_1 & & = d_1 \\ -c_2 T_1 + a_2 T_2 - b_2 T_3 & & = d_2 \\ & -c_3 T_2 + a_3 T_3 - b_3 T_4 & = d_3 \\ & & -c_4 T_3 + a_4 T_4 - b_4 T_5 & = d_4 \\ & & & \dots \\ & & -c_n T_{n-1} + a_n T_n - b_n T_{n+1} & = d_n \\ & & & T_{n+1} = d_{n+1} \end{array} \right. \quad (B.1)$$

Dans le système d'équations (B.1) T_1 et T_{n+1} sont des valeurs connues sur les frontières du domaine de calcul. La forme générale pour une seule équation est :

$$-c_i T_{i-1} + a_i T_i - b_i T_{i+1} = d_i \quad (B.2)$$

Le système d'équations (A.1) (sauf la première et la dernière équation) peut être réécrit ainsi :

$$T_2 = \frac{b_2}{a_2} T_3 + \frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2} \quad (B.3.a)$$

$$T_3 = \frac{b_3}{a_3} T_4 + \frac{c_3}{a_3} T_2 + \frac{d_3}{a_3} \quad (B.3.b)$$

$$T_4 = \frac{b_4}{a_4} T_5 + \frac{c_4}{a_4} T_3 + \frac{d_4}{a_4} \quad (B.3.c)$$

.....

$$T_n = \frac{b_n}{a_n} T_{n+1} + \frac{c_n}{a_n} T_{n-1} + \frac{d_n}{a_n}$$

Ces équations peuvent être résolues par élimination en avant et substitution en arrière. Le processus d'élimination en avant commence par la substitution de T_2 dans l'équation (B.3.b) avec l'expression de T_2 de l'équation (B.3.a) et on obtient :

$$T_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3 \frac{b_2}{a_2}} \right) T_4 + \left(\frac{c_3 \left(\frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2} \right) + d_3}{a_3 - c_3 \frac{b_2}{a_2}} \right) \quad (\text{B.4})$$

Si l'on note :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\text{B.5})$$

L'équation (B.4) peut être réécrite ainsi :

$$T_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} \right) T_4 + \left(\frac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2} \right) \quad (\text{B.6})$$

Si l'on note encore :

$$\text{Où ; } P_3 = \frac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} \quad \text{et} \quad Q_3 = \frac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2} \quad (\text{B.7})$$

L'équation (B.6) peut être écrite ainsi :

$$T_3 = P_3 T_4 + Q_3 \quad (\text{B.7})$$

La formule (B.7) peut être utilisée pour éliminer T_3 de l'équation (B.3.c) et la procédure peut être répétée jusqu'à la dernière équation. Celle-ci constitue la procédure d'élimination en avant.

Pour la procédure d'élimination en arrière on utilise la relation de récurrence (B.7) :

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Où ; } P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{B.8.a})$$

La formule (B.8) peut être utilisée également pour les points de frontières 1 et $n + 1$ si on pose les suivantes valeurs pour P et Q :

$$P_1 = 0 \quad \text{et} \quad Q_1 = T_1 \quad (\text{B. 8. b})$$

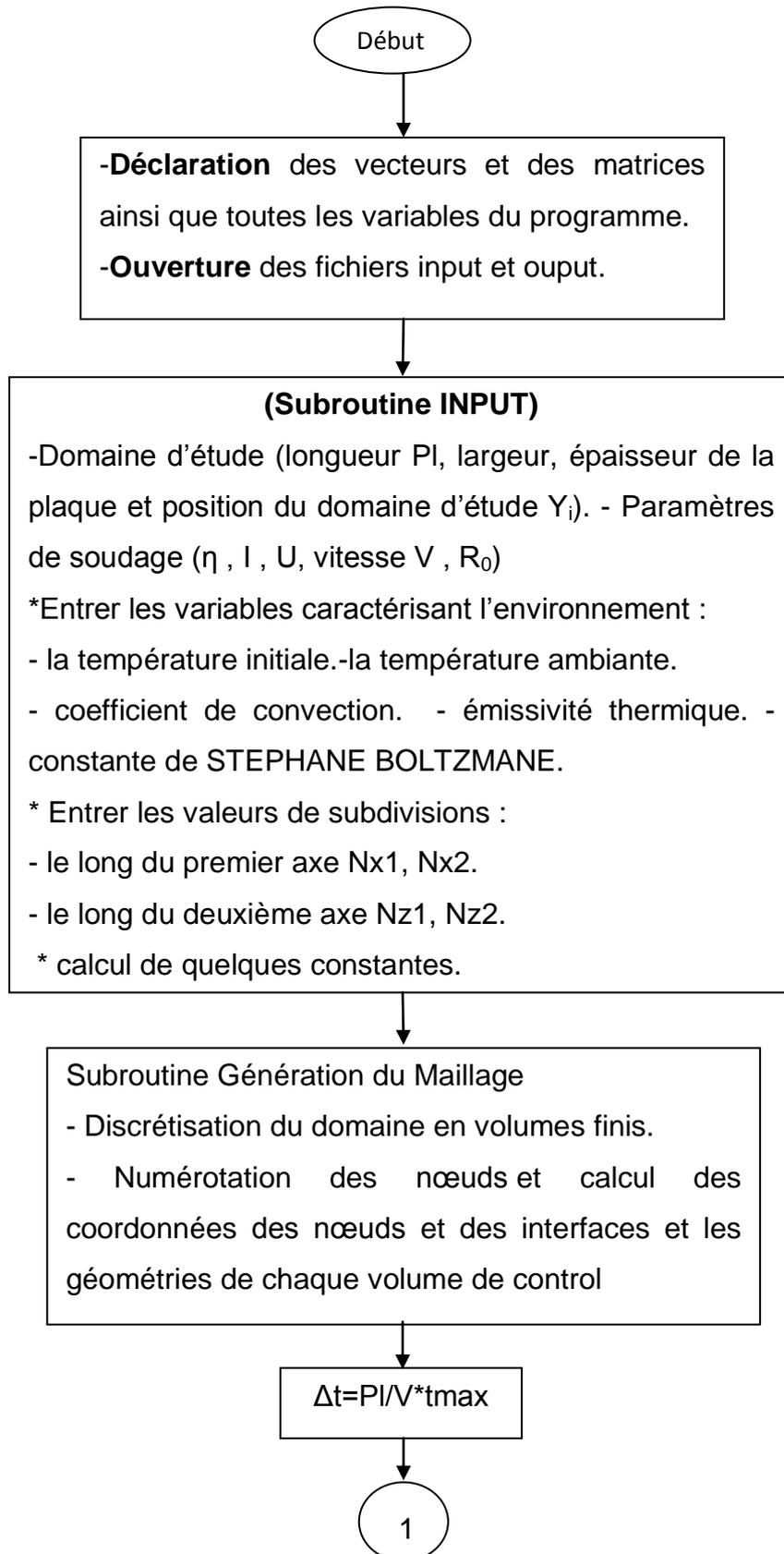
$$P_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = T_{n+1} \quad (\text{B. 8. c})$$

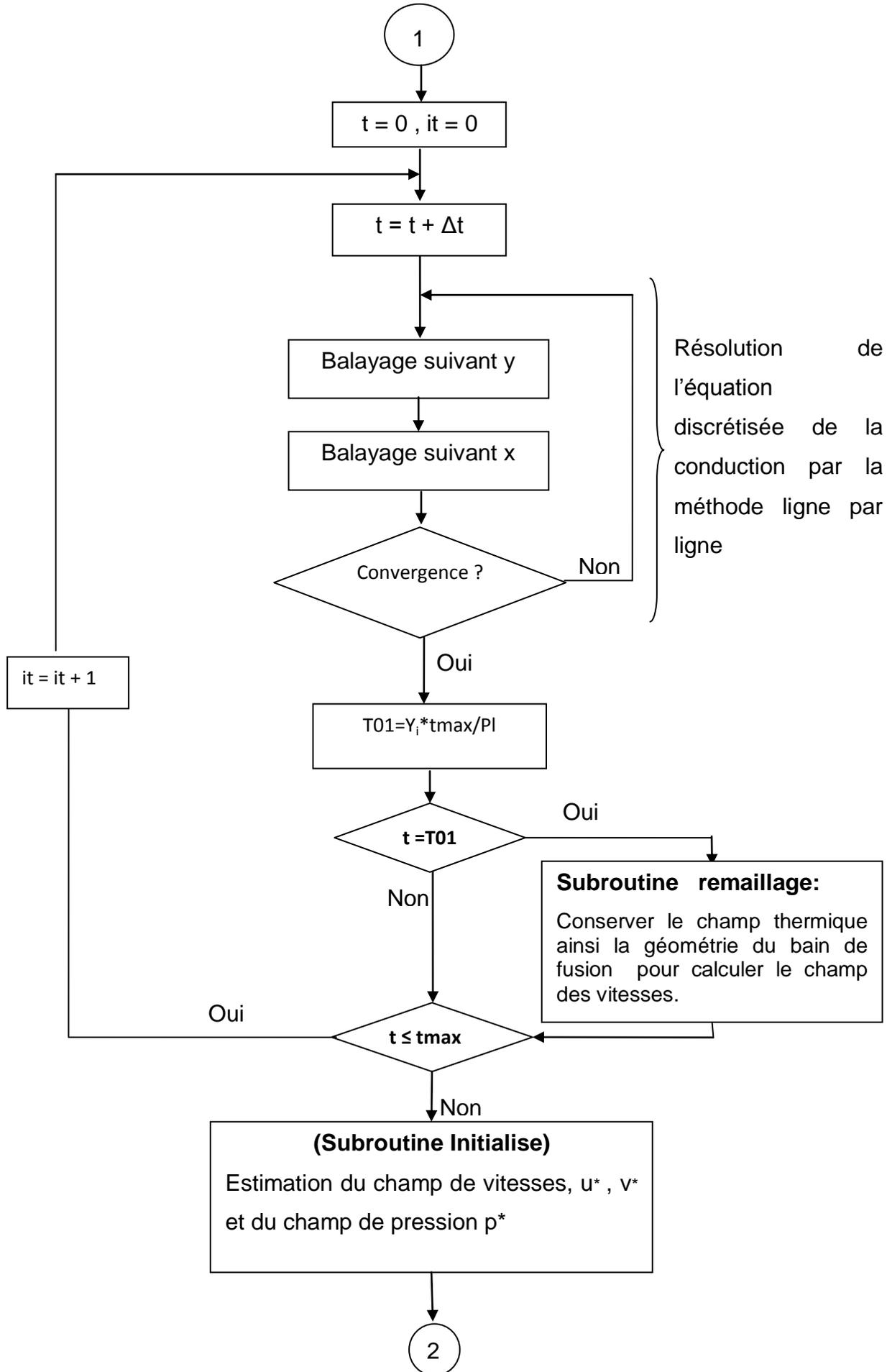
Pour résoudre un système d'équations, celui-ci doit être arrangé sous la forme générale (B.1) et alors les coefficients a_i , b_i , c_i et d_i sont identifiés. Les valeurs des P_i et Q_i sont successivement calculées de $i = 2$ à n en utilisant les formules (B.8.a). Une fois la valeur de T connue dans le point de frontière ($n + 1$) les valeurs de T_i peuvent être calculées dans l'ordre inverse (T_n , T_{n-1} , T_{n-2} , ..., T_2) à l'aide de la formule de récurrence (B.8).

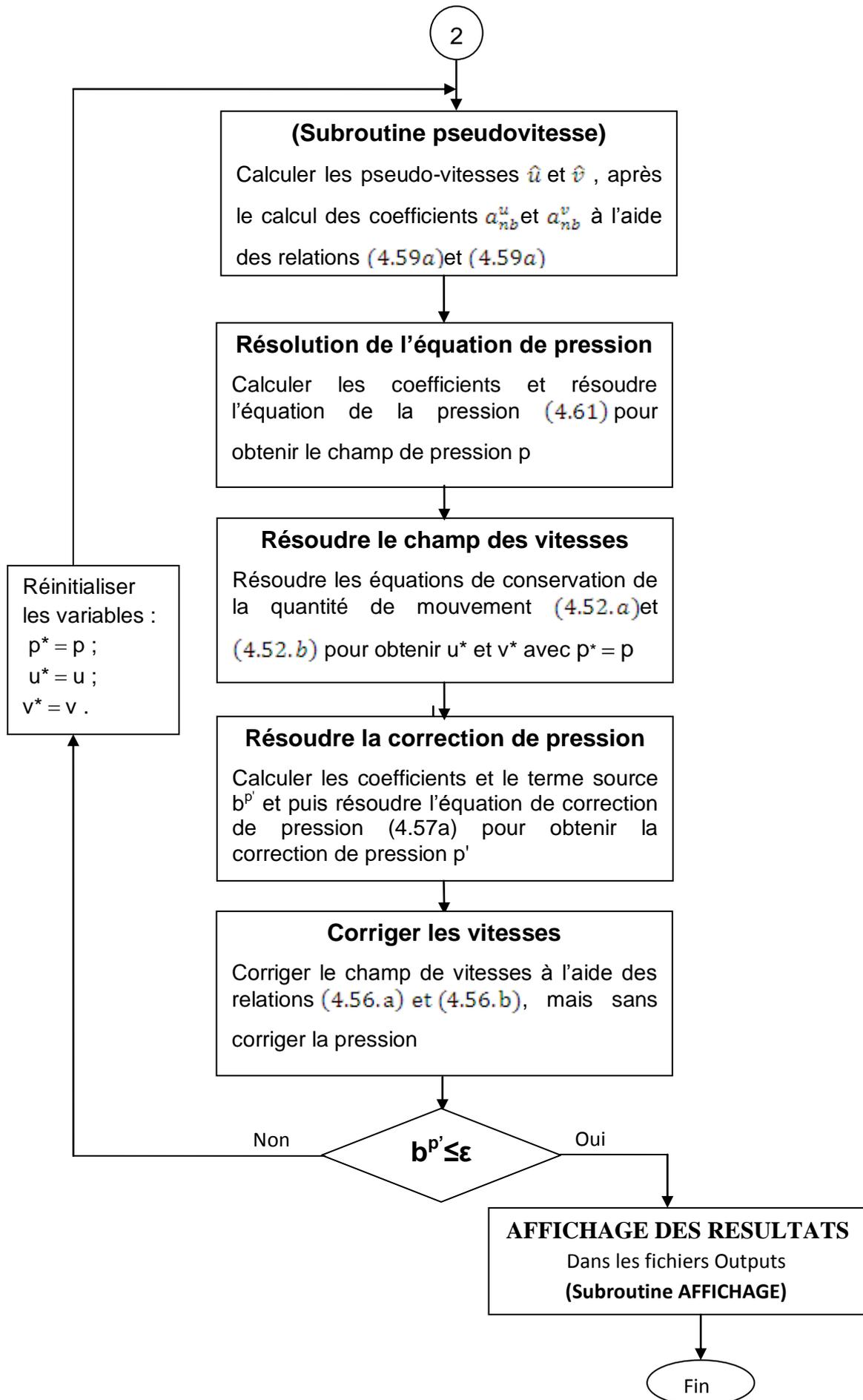
Dans la description de l'algorithme ci-dessus on a supposé que les valeurs de frontière T_1 et T_{n+1} sont connues. Pour prendre en compte une condition à la limite de type Neumann (ou densité de flux imposé), par exemple dans le point $i = 1$, le coefficient $c_2 = 0$ dans la deuxième équation du système (B.1) et le flux imposé passe comme source dans le terme source d_2 .

APPENDICE C

Organigramme du programme







REFERENCES

1. D. Rosenthal, "the theory of moving sources of heat and its application to metal treatments". Transactions of the ASME, November, (1946).
2. M. Kato, F. Matsuda, and T. Senda, "Solidification mode in aluminum weld metal", Transactions of the Japan welding society, Vol. 3, No. 1, (1972).
3. J.C. villeduarte, E. Pardo and H,W,Kerr, "The Effect of Alloy Composition and Welding conditions on columnar-equiaxed transitions in ferritic stainless steel gas tungsten arc welds", metallurgical transactions A, Vol. 21A, No. 7, (1990).
4. Eagar.T.W, and Tsai.N.S.J:"Temperature fields produced by travelling distributed heat sources ": Welding Journal (1983).
5. Jeong.S.K and Cho.H.S.J:"Analytical solution to predict the transient temperature distribution in fillet arc welding ": Welding Journal 76(6), (1997).
6. E. Pardo and D.C. Weckman, " A numerical model of the gas metal arc welding process", modeling of casting and welding processes IV, A.F. Giamei and G.J. Abbaschian, Editors, the minerals, metals and materials society, (1988),187-195.
7. E.pardo and D.C. Weckman, " prediction of weld pool and reinforcement dimensions of GMA Welds using a finite element model", metallurgical transactions B, Vol. 20B, (1989), 937-947.
8. S. Kou and D.K. Sun, " Fluid flow and weld penetration in stationary arc welds", metallurgical transactions A, Vol. 16A, (1985), 203-213.
9. C.S Wu and K.C. Tsao, " Modelling the three-dimensional fluid flow and heat transfer in a moving weld pool", Engineering computing. Vol. 7, (1990), 241-248.
10. S. Kou, "Welding Metallurgy", John Wiley and Sons, New York, NY, (1987).
11. Goldak.J, Chakravarti.A and Bibby.M:"A double ellipsoid finite element model for welding heat sources ": (1985)IIW Doc N°212-603-85.
12. Kou, S., and Le,Y., Metall. Trans.A, 15A: 1165, (1984).

13. Kou, S., and Lu, M. J., "Welding Metallurgy", 1st ed., S.Kou, (1987),Wiley, New York,p. 32; Lu, M. J., Ph.D. Thesis, Department of Materials Science and Engineering, University of Wisconsin, Madison, WI, (1988).
14. M. Brochard, "Modèle couplé cathode-plasma-pièce en vue de la simulation du procédé de soudage à l'arc TIG" PhD thesis, Ecole polytechnique universitaire de Marseille, France, (2009).
15. R.W. Niles, C.E. Jackson, "Weld thermal efficiency of the GTAW process" Welding Journal, (1975) 25-32.
16. J.N. Dupont, A.R. Marder, "Thermal efficiency of arc welding processes" Welding Journal, December (1995), 406-416.
17. Vitooraporn C. " Experimental and analytical study on reduction of residual stresses and distortion during welding in high strength steel". PHD thesis, Massachuset Institute of technology, USA, (1990).
18. M.L. Lin, T.W. Eager, "Pressures produced by gas tungsten arcs" Metallurgical Transactions B 17B (1986) 601-607.
19. C.S. Wu, J.S. Sun, Y.M. Zhang, "Numerical simulation of dynamic development of keyhole in double-sided arc welding" Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 12 (2004) 423– 442.
20. G. Xu, C. Wu, "Numerical analysis of weld pool geometry in globular-transfer gas metal arc welding Front" Mater. Sci. China 1(1) (2007) 24–29.
21. M.L. Lin, T.W. Eagar, "Influence of Surface Depression and Convection on Arc Weld Pool Geometry, in Transport Phenomena in Materials Processing" Presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers (PED), Vol. 10/HTD, 29,New York, 63, (1983).
22. Kerrouault N, "fissuration à chaud en soudage d'un acier inoxydable austénitique" Thèse de doctorat, Ecole centrale de Paris, France, (2001).
23. L.E.Lindgren, "Finite element modeling and simulation of welding" part 1: Increased complexity, Journal of thermal stresses, 24: 141-192,(2001).
24. Goldak J, Chakravarti A, and Bibby M, "A new finite element model for welding heat sources" Metall Trans, 15B: 299-305, (1984).

25. ROSENTHAL.D, "Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting" welding journal (1947), 20 May, pp.220_s to 234_s.
26. Kumar A. and Deb Roy T, "guaranteed fillet weld geometry from heat transfer model and multivariable optimization" Int. J. Heat mass transfer, (47): 5793-5806, (2004).
27. SC.H. Kim, W. Zhang, and T. Deb Roy, "Modeling of temperature field and solidified surface profile during gas metal arc fillet welding" J. Appl. Phys., (94): 2667-2679, 2003.
28. S. Rhee and E. Kannatey-Asibu. "Observation of metal transfer during gas metal arc welding" Weld. J., (71): 381-386, (1992).
29. L.A. Jones, T.W. Eagar, and J.H. Lang. "A dynamic model of drops detaching from a gas metal arc welding electrode" J. Appl. Phys.,(31): 107-123, 1998.
30. CETIM, Mécanosoudage, ISBN 2-85400-146-X, (1989).
31. Abdeljalil NADY, "caractérisation par diffraction des neutrons et rayonnement synchrotron de revêtement épais à base de cobalt obtenu par le procédé plasma à arc transféré".
32. R.W. MESSLER Jr, "Principles of Welding" John Willey & Sons Edi., New York (1999), p 50-55.
33. GRANJON H, "bases métallurgiques du soudage" publication de la soudure autogène, éd, Eyrolles, (1989).
34. R. Cazes, "soudage à l'arc" techniques de l'ingénieur, B7730, (1995).
35. Régis Blondeau. "Procédés et applications industrielles du soudage".
36. R. Cases. Soudage à l'arc. Techniques de l'ingénieur. B 7730. (1995).
37. M. Hamide," Modélisation numérique du soudage à l'arc des aciers" PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, (2008)
38. J. François SACADURA, "Initiation aux transferts thermiques" 4^e tirage (1993).
39. Ph. Marty, COURS DE TRANSFERTS THERMIQUES, 2001-2002.

40. Miettinen, J., and Louhenkilpi, S. "Calculation of thermophysical properties of carbon and low alloyed steels for modeling of solidification processes" *Metallurgical and Materials Transactions* (1994) 25B: 909–916.
41. C. Bonacina, G. Comini, A. Fasano, M. Rimiciero, "Numerical solutions of phase-change problems" *Int. J. Heat Mass Transfer* 16 (1973) 1825-1832]
42. C.S. Wu, W. Zheng, L. Wu, "Modelling the transient behaviour of pulsed current tungsten-inert-gas weld pools" *Modell. simul. Mater. Sci. Eng.* 7 (1999) 15–23.
43. C. Lampa, A.F.H. Kaplan, J. Powell, C. Magnusson, "An analytical thermodynamic model of laser welding" *J. Phys. D: Appl. Phys.* 30 (1997) 1293-1299
44. S. Safdar, F. Qureshi, L. Li, M. Sheikh "Analysis of enhanced thermal conductivity approach for predicting melt pool geometry and temperature distribution for laser melting processes" *Proceeding of the 35th International MATADOR Conference, (2007)*
45. S. Safdar, A.J. Pinkerton, R. Moat, L. Li, L.A. Sheikh, M. Preuss, P.J. Withers "An anisotropic enhanced thermal conductivity approach for modelling laser melt pools" *ICALEO Conference 2007, Orlando, USA Oct 29-Nov 1*
46. M.A. Wahab, M.J. Painter, M.H. Davies "The prediction of the temperature distribution and weld pool geometry in the gas metal arc welding process" *Journal of Materials Processing Technology* 77 (1998) 233–239
47. A. Kumar, T. DebRoy, Guaranteed fillet weld geometry from heat transfer model and multivariable optimization, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 5793–5806
48. Rokhlin, S. et Guu, A. (1993). A study of arc force, pool depression and weld penetration during gas tungsten arc welding. *Welding Journal*, 72, 381,390.

49. Noemi DeHerrera "Computer calculation of fusion zone geometry considering fluid flow and heat transfer during fusion welding" University of Texas at El Paso p9 (2002)
50. Noemi DeHerrera "Computer calculation of fusion zone geometry considering fluid flow and heat transfer during fusion welding" University of Texas at El Paso p9 (2002)
51. G. Ehlen, A. Ludwig and P.R. Saham "Influence of welding power and welding duration on the shape of the weld pool: transient effects" Mathematical modelling of weld phenomena 6 (2002)
52. S. V. Patankar, Spalding, "Numerical heat transfer and fluid flow", Mac graw hill book company, (1989).
53. S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere, Washington DC, (1980).
54. S. Mishra, T.J. Lienert, M.Q. Johnson, T. DebRoy "An experimental and theoretical study of gas tungsten arc welding of stainless steel plates with different sulfur concentrations" (2008).