

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

**En physique**

**Spécialité physique théorique**

**ETUDE D'UN Puits DE POTENTIEL CARRE COMPLEXE AVEC MASSE  
DEPENDANTE DE LA POSITION**

**Présenté par :**

Saidani Samira

**Soutenu devant le jury composé de :**

Mr. S. Boukraa	professeur	U. S. D. Blida	Président
Mr. R. Khelifi	M. C. A.	U. S. D. Blida	examineur
Mr. S. A. Yahiaoui	M. C. B.	U. S. D. Blida	examineur
Mr. M. Bentaiba	professeur.	U. S. D. Blida	rapporteur

Blida 2012

## Remerciements

Avant de vous présenter mon travail de thèse, je me dois de saisir l'occasion qui m'est présentée pour remercier les personnes sans qui ce travail n'aurait pas été possible

En premier lieu, j'exprime ma profonde gratitude à monsieur Mustapha Bentaïba maître de conférences à l'université de Blida mon directeur de thèse. Ses quelques lignes sont insuffisantes pour exprimer ma reconnaissance pour ses conseils, ses remarques et surtout ses critiques.

Je remercie également monsieur S. Boukraa professeur à l'université de Blida, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie vivement monsieur R.Khelifi maître de conférence à l'université de Blida d'avoir bien voulu juger ce travail.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à monsieur S.A.Yahiaoui pour son aide et son encouragement durant ce parcours et d'avoir accepté de juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à toute l'équipe du laboratoire de physique théorique et interactions rayonnement-matière.

Mes plus grands remerciements vont aux membres de ma famille. Mes parents que j'aimerais remercier de m'avoir aidé pour aller vers l'avant, sans oublier mes frères et sœurs.

Je ne saurais bien sûr oublier mes nombreux amis et collègues pour l'aide morale qu'ils m'ont apporté. En fin merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## ملخص

احيط نموذج الكتلة المتغيرة بدلالة اباهتمام كبير في السنوات الأخيرة بعد اعمال فون روس التي تصف بعض الظواهر الفيزيائية مثل حركة الإلكترونات والثقوب في أشباه النواقل.

من جهة أخرى خصص الكثير من الاهتمام لدراسة الخصائص الفيزيائية للهاملتونات غير الهرميتية في الفيزياء النظرية. وهناك فئة كبيرة من الهاملتونات التي تحقق التناظر PT والتي ينتج عنها طيف طاقي حقيقي وموجب

بدافع من البحوث التي أجريت مؤخرا حول هذا الموضوع، المقصود هذه المذكرة اثبات أن نظرية التناظر PT محققة من اجل كمون مربع مع تغير الكتلة بدلالة الموضع. قورنت النتائج المحصل عليها مع التي وجدت من اجل كتل ثابتة.

## RESUME

Le modèle de la masse dépendante de la position à fait l'objet d'un intérêt considérable ces dernières années suite aux travaux de Von Roos qui permet de décrire certains phénomènes physiques tels que le mouvement des électrons et des trous dans les semi-conducteurs.

D'autre part une grande attention a été consacrée à étudier les propriétés des Hamiltoniens non-hermétiques en physique théorique. Une large classe d'hamiltoniens PT-symétriques et non-hermitique produit un spectre d'énergie réel et positif.

Motivé par les récents travaux de recherche sur ce sujet, ce mémoire a pour but de démontrer que la théorie de la PT-symétrie est vérifiée pour le potentiel carré PT-symétrique. Les résultats trouvés sont comparés avec ceux dont la masse est constante.

## ABSTRACT

The model of position dependent mass is subject to a considerable interest in recent years following the work of Von Roos that describes some physical phenomena such as the movement of electrons and holes in semiconductors.

On the other hand a lot of attention has been devoted to studying the properties of Hamiltonians non-hermetic theoretical physics. A large class of PT-symmetric Hamiltonian non-Hermitian and produces a spectrum of real and positive energy.

Motivated by recent research on this topic, this memory is intended to demonstrate that the theory of PT-symmetry holds for the PT-symmetric square potential. The results are compared with those whose mass is constant.

I.Introduction générale .....	1
1. formalisme de la mécanique quantique non-hermitique PT-Symetrique .....	5
1.1 Introduction .....	5
1.2 Les opérateurs : $C$ , $P$ et $T$ .....	6
1.3 La brisure de symetrie.....	7
1.3.1 Introduction .....	7
1.3.2 Brisure spontanée de symétrie.....	7
1.4 La PT- symétrie .....	8
1.4.1 Introduction .....	8
1.4.2 La réalité du spectre d'un hamiltonien PT-symétrique.....	8
1.4.3 Fonctions propres et espace de Hilbert .....	11
1.4.4 Construction de l'opérateur $C$ .....	13
1.4.5 La PT-symétrie en mécanique quantique .....	14
1.4.6 Les observables PT-Symétriques en mécanique quantique .....	14
1.5 La pseudo-hermiticité .....	15
1.5.1 Introduction.....	15
1.5.2 Définition et propriété de la pseudo-hermiticité .....	15
1.5.3 L'origine de la pseudo-hermiticité.....	16
1.5.4 Réalité du spectre d'un hamiltonien pseudo-hermitique .....	17
<b>2. La masse dépendante de la position.....</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction .....	18
2.2 Action de la PCT sur l'équation de Schrödinger .....	19
2.3 Application de la (PCT) sur le potentiel de Rosen-Morse.....	22
2.3.1 Résolution de l'équation de Schrödinger pour le Potentiel de Rosen-Morse avec une masse constante : .....	23
2.3.2 Résolution de l'équation de Schrödinger pour le Potentiel de Rosen-Morse avec masse dépendante de la position .....	28
<b>3. Etude d'un puits de potentiel complexe PT-Symétrique .....</b>	<b>32</b>
3.1 Introduction .....	32
3.2 Conditions aux limites pour le potentiel, et masse variable .....	33

3.3 Conditions aux limites pour les points discontinus de la fonction de masse et du potentiel .....	33
3.4 Les conditions aux limites dans le cas ou la masse discontinue .....	35
3.5 Étude du puits de potentiel carré avec masse variable dans le régime PT symétrique .....	37
3.6 Violation de la PT-symétrie dans l'étude du puits de potentiel carré avec masse variable .....	41
4. CONCLUSION .....	45
REFERENCES .....	47

## INTRODUCTION GENERALE

La mécanique quantique se révèle être une des très grandes aventures intellectuelles de l'histoire de l'humanité. Elle est incontournable : toute la physique est quantique, en partant de l'étude des particules élémentaires à celle de l'astrophysique et le phénomène du Big Bang, les semi-conducteurs et la chimie. Cette théorie est subtile et l'on n'arrive toujours pas à l'expliquer sans le recours au langage mathématique. C'est une chance de posséder les bagages techniques nécessaires pour la comprendre, même si l'on ne s'en sert qu'au travers de ses applications. La mécanique quantique a permis notamment d'élucider le mystère de la structure de l'atome, et plus globalement elle s'avère être le cadre général de description du comportement des particules élémentaires, jusqu'à constituer le socle de la physique moderne.

En physique, la particule dans une boîte (ou puits de potentiel carré) est une représentation simple d'un système relevant de la mécanique quantique. On étudie une particule confinée dans une région finie de l'espace grâce à des murs de potentiel infini aux bords de cette région. L'intérêt de ces potentiels est qu'ils peuvent se former de manière « naturelle » dans certains matériaux artificiels, comme les semi-conducteurs [1] ou molécules inorganiques qu'on peut considérer comme des puits quantiques[2.3]. Cependant, dans la très grande majorité des cas, ils sont obtenus par une structuration volontaire et très précise des matériaux utilisés à l'échelle nanométrique.

Dans ces dernières décennies, une nouvelle branche de la théorie quantique a vu le jour. Elle concerne spécialement les potentiels qui sont invariants par la réflexion de l'espace et l'inversement du temps, appelée : mécanique quantique PT-symétrique.

Un hamiltonien non-hermétique est dit PT-symétrique s'il satisfait la relation  $H = H^{PT} = (PT)H(PT)$  où P et T sont respectivement les opérateurs de parité et d'inversion du temps définis comme suit :

$$PxP = -x, PpP = -p, \tag{I.1}$$

$$TxT = x, TpT = -p, Ti\mathbf{1}T = -i\mathbf{1} \tag{I.2}$$

où :  $i = \sqrt{-1}$ ,  $x, p, 1$  sont respectivement les opérateurs position, impulsion et identité qui agissent dans l'espace de Hilbert.



La PT-symétrie a ouvert la voie à de nombreux travaux de recherche sur ce genre d'hamiltoniens, initié principalement par les travaux de Bender et Boettcher[4-6] ces derniers ont étudié des Hamiltoniens de la forme  $H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon$  ( $\epsilon$  est un réel)

La tentative de construire une théorie quantique fiable à partir de tels hamiltoniens se heurte à la non positivité du produit scalaire  $PT$ . Cependant, pour un système dont la symétrie est non-brisée, il suffit de lui correspondre une symétrie décrite par l'opérateur  $C$ , analogue à la conjugaison de charge dans la théorie quantique des champs. Cet opérateur nous permet de construire via le produit  $CPT$  un nouveau produit définit positif et pour lequel les normes des états sont positives et l'évolution temporelle est unitaire.

L'avantage et l'intérêt de ce type de potentiels est que les Hamiltoniens associés pourraient avoir des spectres réels sans qu'ils soient hermétiques. Si les fonctions propres correspondantes sont aussi invariantes par la réflexion de l'espace-temps [1- 10], Il se trouve que la double propriété d'invariance par rapport à la réflexion de l'espace-temps pour un Hamiltonien et ses fonctions propres, est essentielle pour que cet Hamiltonien décrive la dynamique d'un système physique.

Remplacer la condition mathématique d'herméticité par la condition physique de symétrie  $PT$  peut être placée dans un contexte mathématique plus général connu sous le nom de pseudo-herméticité. Un opérateur linéaire  $A$  est pseudo-hermétique s'il existe un opérateur hermitien  $\eta$  de telle sorte que

$$A^\dagger = \eta A \eta^{-1} \quad (I.3)$$

L'opérateur  $\eta$  est souvent appelé un opérateur d'entrelacement. La condition en (I.3) de toute évidence se réduit à l'hermiticité ordinaire lorsque l'opérateur d'entrelacement  $\eta$  est l'identité.

Le concept de pseudo-herméticité a été introduit en 1940 par Dirac et Pauli, et plus tard discuté par Lee, Wick, et Sudarshan, qui tentaient de résoudre les problèmes qui se posent dans la quantification électrodynamique et d'autres théories quantiques des champs dans lesquels les états ayant des normes négatives apparaissent comme une conséquence de la renormalisation [7-11].

Depuis l'émergence de la nouvelle théorie quantique PT-symétrique, un grand intérêt a été donné à la résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension pour les potentiels PT-symétriques avec des particules de masse constante ou variable dans

l'espace. Dans le cas de masse constante, il existe un nombre non négligeable de problèmes qui ont été résolus exactement. Cependant, en admettant que la masse est variable dans l'espace c'est-à-dire  $M(x) = m_0 m(x)$  et en faisant un choix judicieux pour  $m(x)$ , on peut augmenter d'une manière considérable le nombre de problèmes exactement solvable. Ce qu'il lui a donné un intérêt considérable ces dernières années [12-17]. L'approche de la théorie quantique pour le problème des puits quantiques exige que la fonction d'onde  $\psi$  doit satisfaire l'équation de Schrödinger  $H\psi = E\psi$  où  $E$  est la valeur propre de l'énergie et la masse à la forme citée plus haut. Tout les hamiltoniens à masse effective de la théorie quantique sont des cas particuliers de l'Hamiltonien introduit par A.de Souza Dutra et C.A.S. Almeida[13].

Le modèle de Von Roos [14,16] est l'un des cas particulier de l'hamiltonien de A.de Souza Dutra et qui prétend décrire certains phénomènes physiques tels que le mouvement des électrons et des trous dans les semi-conducteurs est un modèle souvent utilisé dans l'étude d'hamiltoniens avec masse variable.

Dans ce mémoire on s'intéresse particulièrement à l'étude d'un puits de potentiel complexe PT-Symétrique avec masse dépendante de la position tout en utilisant le modèle de Von Roos[14]. Pour cela on a partagé ce travail en trois chapitres qui s'articulent essentiellement sur les approches citées plus haut, dans le cadre de la mécanique quantique PT-symétrique :

Dans le chapitre 1, on trouvera un aperçu général sur la nouvelle théorie quantique PT-symétrique, où sont présentés les fondements et bases de cette théorie tout en insistant sur les points qui nous intéressent dans l'exposé de notre travail.

Le chapitre 2 est consacré à une brève présentation du concept de la masse dépendante de la position avec la démarche à suivre pour passer des équations de Schrödinger avec masse constante à l'équation de Schrödinger avec masse dépendante de la position.

Le chapitre 3 est réservé à l'application de l'équation de Schrödinger avec masse dépendante de la position, suivant le modèle de Von Roos dans lequel la particule fermionique est supposée de masse variable dans l'espace et interagissant avec un potentiel non hermétique mais PT-symétrique.

Ce travail est finalisé par une conclusion générale et des perspectives dans ce domaine.

## Chapitre 1

### LA PT-SYMETRIE

#### 1.1. Introduction

La notion de symétrie a beaucoup évolué ses dernières années. D'abord reconnue comme propriété des systèmes physiques, elle a ensuite été utilisée comme méthode théorique de généralisation de nouvelles solutions des équations qui gouvernent l'évolution de ces mêmes systèmes (d'où l'introduction du concept du groupe de Lie) et enfin depuis la deuxième moitié du XX<sup>ème</sup> siècle la notion de symétrie a pris une importance encore plus fondamentale puisque depuis cette époque, une théorie quantique est toujours définie principalement par la symétrie qui la sous-tend

En effet, c'est dans le cadre quantique que le principe de symétrie est le plus efficace. Wigner et Weyl [17] ont été parmi les premiers à reconnaître l'importance primordiale des groupes de symétrie dans la physique quantique et les premiers à réfléchir à la signification de ceux-ci. En général, si  $G$  est un groupe de symétrie d'une théorie décrivant un système physique (c'est-à-dire, les équations fondamentales de la théorie sont invariantes par les transformations de  $G$ ), cela signifie que les états du système se transforment en d'autres états selon certaines « représentation » du groupe  $G$ . En d'autres termes, les transformations du groupe sont mathématiquement représentées dans l'espace des états par des opérations reliant les états les uns aux autres. En mécanique quantique, ces opérations sont généralement dues aux opérateurs agissant sur l'espace des états qui correspondent aux observables physiques. Tout état d'un système physique peut être décrit comme une superposition d'états de systèmes élémentaires. La mécanique quantique offre ainsi un cadre particulièrement propice à l'application des principes de symétrie.

En 1998 Bender et Boettcher [4,5] ont proposé une étude qui a abouti à une nouvelle formulation de la mécanique quantique, dite mécanique quantique PT-symétrique non hermétique ( $H \neq H^\dagger$ ), car les hamiltoniens engendrés sont non-hermétiques mais avec des spectres d'énergies réels. L'apparition de la PT-symétrie quantique a engendré un débat entre la mécanique quantique et la mécanique quantique PT-symétrique pour définir la généralité de l'une sur l'autre. L'article de Bender et Boettcher sur la question, stipule

que la condition de la PT-symétrie est plus faible que l'hermiticité, et que la PT-symétrie peut être considérée comme une extension complexe de la théorie hermitique connue.

En 2002, Bender et al ont défini une norme positive de la mécanique quantique PT-symétrique en utilisant l'opérateur  $C$  [4,5]. L'idée de la généralité de la PT-symétrie a été reprise, dans un article nommé « extension complexe de la mécanique quantique » [7]. Dans la même année Mostafazadeh[18] fait remarquer que les hamiltoniens pseudo-hermitiques sont une extension de la PT-symétrie avec un spectre réel.

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu sur le développement de cette nouvelle théorie et de faire ressortir les principaux résultats auxquels on est arrivé dans les recherches [8-16]. Nous nous limiterons toutefois au cas unidimensionnel, dont les résultats seront utilisés dans les chapitres qui vont suivre.

## 1.2 Les opérateurs $C$ , $P$ et $T$

Mathématiquement la symétrie  $P$  consiste à remplacer chacune des coordonnées spatiales par son opposé, parfois, appelée inversion de l'espace, parité ou encore transformation miroir. Le rôle de cette transformation dans une équation physique est de renverser le signe des coordonnées spatiales de l'espace. Quand à l'opérateur inversion du temps désigné par l'opérateur  $T$ , il effectue un changement sur la coordonnée de temps  $t \rightarrow -t$ . Par l'action de cet opérateur sur l'espace des états, la coordonnée de position reste inchangée, et l'impulsion est renversée.

En raison des propriétés spécifiques de la description quantique, la symétrie de réflexion spatiale ou parité ( $P$ ) et le renversement du temps ( $T$ ), ont été redécouverts dans le contexte quantique et ont pris une nouvelle signification. La parité a été introduite dans la physique quantique en 1927 par Wigner [19] qui a expliqué pour la première fois, d'importants résultats spectroscopiques sur la base d'un groupe de traitement théorique de permutations de rotations et de symétries de réflexion. L'invariance du renversement du temps dans le cadre quantique, est apparue dans un document de Wigner, publié en 1932 [20]. A ces travaux, une nouvelle symétrie particule-antiparticule, ou conjugaison de charge ( $C$ ), a été introduite en 1931 par Dirac en étudiant les singularités quantifiées dans les champs électromagnétique. Les symétries discrètes  $C$ ,  $P$  et  $T$  sont alors reliées par ce qu'on appelle le théorème  $CPT$ , démontré en 1952 par Lüders, qui stipule que la combinaison de  $C$ ,  $P$  et  $T$  est une symétrie générale des lois physiques.

### 1.3. La brisure de symétrie

#### 13.1. Introduction.

L'étude de la brisure de symétrie remonte à Pierre Curie [24]. Selon lui, la rupture d'une certaine symétrie n'implique pas nécessairement qu'il n'existe pas de symétrie, mais plutôt que la situation dans laquelle cette symétrie est brisée, est caractérisée par une symétrie inférieure à la situation où cette symétrie n'est pas brisée. En théorie des groupes, cela signifie que le groupe de symétrie initiale est brisée au niveau de l'un de ses sous-groupes. Il est donc possible de décrire cette brisure en termes de relations entre les groupes de transformation. La brisure de symétrie a été expressément étudiée en physique à l'égard des objets et des phénomènes physiques. Le cas de brisure spontanée de symétrie est le plus intéressant d'un point de vue physique [21].

#### 1.3.2 Brisure spontanée de symétrie

Le concept de la brisure spontanée de symétrie est apparu dans la théorie de Heisenberg en 1928 dans laquelle, il considère le ferromagnétisme comme une infinité de dipôles magnétiques de spin  $\frac{1}{2}$ , avec une interaction spin-spin entre les plus proches voisins, qui ont tendance à s'aligner. Au dessous de la température critique  $T_C$  de Curie, les états ferromagnétiques ont tous les spins alignés dans une direction particulière (une aimantation apparaît dans cette direction). Ce qui se passe, c'est que : en dessous de  $T_C$ , il existe un ensemble d'états infiniment dégénérés, dans lesquels les spins sont tous alignés dans une direction donnée ; un ensemble complet d'états quantiques peut alors être construit. Ce concept a été transféré à la théorie des champs quantiques au début des années soixante, grâce aux œuvres de Sheldon Glashow qui a expliqué en premier lieu, comment introduire et formaliser l'idée de la brisure spontanée de symétrie en physique des particules sur la base d'une analogie avec la rupture de la symétrie de jauge (l'électromagnétisme), dans la théorie de la supraconductivité exposée en 1957 par J. Bardeen, LN Cooper et JR Schrieffer (ce qu'on appelle la théorie BCS). L'application de la brisure spontanée de symétrie à la physique des particules a conduit à de profondes

conséquences physiques et a joué un rôle fondamental dans l'édification du modèle actuel des particules élémentaires.

## 1.4 la PT-symétrie

### 1.4.1 Introduction

En mécanique quantique l'opérateur Hamiltonien  $H$  joue un rôle fondamental : Il spécifie d'une part le spectre des niveaux d'énergie, et d'autre part l'évolution temporelle du système étudié. Afin d'assurer la réalité du premier et l'unicité de la seconde, la mécanique quantique s'est construite sur l'axiome selon lequel l'Hamiltonien est hermitique par rapport à l'espace de Hilbert, comme toute observable physique de la théorie. Depuis un peu plus d'une décennie, de nouvelles idées commencent à émerger dans la littérature et qui vont dans le sens d'une extension du domaine de validité de la mécanique quantique.

En 1998, Bender et al [4] ont proposé pour la première fois une famille d'Hamiltoniens stationnaires à une dimension de la forme :

$$H = p^2 + x^2(ix)^\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ réel}). \quad (1.1)$$

Le spectre d'énergie de ce type d'Hamiltonien est réel et positif pour  $\varepsilon \geq 0$ , tandis qu'il bascule dans le plan complexe pour  $\varepsilon < 0$ . Il est clair que l'Hamiltonien (1.1), qui se réduit à celui d'un oscillateur harmonique dans le cas particulier où  $\varepsilon = 0$  n'est pas nécessairement hermitique pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$ . Les auteurs avaient attribué la réalité des valeurs propres à son invariance par rapport aux opérations simultanées de réflexion de l'espace, et de l'inversion du temps. Cette double invariance est alors baptisée PT-symétrie, où  $P$  et  $T$  désignent respectivement les opérateurs de réflexion de l'espace et de l'inversion du temps. En termes mathématiques, cette invariance signifie que  $H$  se transforme en lui-même par l'action du produit  $PT$  s'écrit sous la forme:

$$(PT)H(PT) = H. \quad (1.2)$$

Un peu plus tard, il s'est avéré que la condition d'invariance d'un Hamiltonien non hermitique par rapport à la réflexion de l'espace-temps, n'est pas suffisante pour la réalité de son spectre [4,5]. En effet, les valeurs propres réelles correspondent aux fonctions propres qui sont elles aussi invariantes par rapport à cette double réflexion de l'espace-temps, PT-symétrique. Par contre, aux fonctions propres non PT-symétriques, il fait correspondre des valeurs propres complexes. A la suite de ces résultats, un intense travail

de recherche a mobilisé une partie de la communauté physicienne motivée par l'évidence grandissante qui s'est peu à peu imposée par la pertinence phénoménologique des Hamiltoniens  $PT$ -symétriques. De tels Hamiltoniens apparaissent en physique statistique, en biologie des populations [23], ou encore en physique de l'état solide (notamment dans l'étude des transitions de délocalisation comme celle des lignes de flux dans les supraconducteurs de type II)[24]. On les rencontre également dans le domaine de la théorie quantique des champs et des théories dites super symétriques [25].

#### 1.4.2 La réalité des valeurs propres d'un hamiltonien $PT$ -symétrique

La réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien  $PT$ -symétrique est une conséquence de la non-brisure de la symétrie  $PT$ , qui signifie que les fonctions propres de  $H$  sont aussi fonctions propres de  $PT$ . En fait, même si  $H$  et  $PT$  commutent, on ne peut pas affirmer qu'ils possèdent les mêmes fonctions propres, comme c'est le cas en mécanique quantique. La raison est que le produit  $PT$ , n'est pas un opérateur linéaire mais anti-linéaire, ce qui ne garantit pas l'existence d'un ensemble de fonctions propres communes. Ainsi, pour construire une théorie à partir des Hamiltoniens  $PT$ -symétriques, on exige de plus que la symétrie ne doit pas être brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas évidente car il n'existe aucun moyen pour affirmer à priori que pour de tels Hamiltoniens  $PT$ -symétrique, la symétrie est brisée ou non. Il faut tout d'abord déterminer ses fonctions propres pour en tirer une conclusion. Avec cette condition supplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien  $PT$ -Symétrique.

Soit  $\{\psi_n(x)\}$  l'ensemble des fonctions propres communes à  $H$  et  $PT$  avec  $n = 1, 2, \dots$

L'équation aux valeurs propres s'écrit alors :

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad (1.3)$$

et

$$PT\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x) \quad (1.4)$$

Notons d'abord que les valeurs propres de l'opérateur  $PT$  sont de la forme  $Exp\{i\varphi\}$  ( $\varphi$  réel). En effet, si  $\psi$  est une fonction propre de  $PT$  qui correspond à la valeur propre  $\lambda$ , alors :



$$PT\psi = \lambda\psi \quad (1.5)$$

Or, si  $(PT)^2 = 1$ , alors en faisant agir l'opérateur  $PT$  à gauche de l'équation (1.4), on obtient la relation :

$$(PT)^2\psi = PT\lambda(PT)^2\psi \quad (1.6)$$

D'où :

$$(PT)^2\psi = PT\lambda(PT)(PT)\psi, \quad (1.7)$$

et vu l'anti-linéarité de  $T$  on a au final :

$$\psi = \lambda^* \lambda \psi = |\lambda|^2 \psi \quad (1.8)$$

ainsi

$$\lambda^2 = 1. \quad (1.9)$$

On peut redéfinir  $\psi$  par  $\text{Exp}\left\{\frac{i\varphi}{2}\right\}$ , sans perte de généralité, ce qui permet de normaliser à 1 sa valeur propre et (1.5) devient :

$$PT\psi = \psi, \quad (1.10)$$

En considérant un état propre  $\psi$  de  $H$ , de valeur propre à priori complexe  $E$ , il est aussi un état propre de  $PT$ , et en multipliant l'équation aux valeurs propres  $H\psi = E\psi$  à gauche par  $PT$  et vu que  $[H, PT] = 0$  on obtient finalement  $E\psi = E^*\psi$ , sachant aussi que  $\lambda$  n'est pas nul on obtient  $E = E^*$ .

Si on considère l'hamiltonien (1.1) cette conclusion est en général fausse. On voit dans la figure (fig.1) pour  $\varepsilon < 0$ , quelques valeurs du spectre ont disparu car elles sont complexes, d'autre part, pour  $\varepsilon \geq 0$  la conclusion est vraie et toutes les valeurs propres sont en effet réelles.

On est alors amené maintenant à la conclusion que : si  $H$  commute toujours avec  $PT$ , alors les fonctions propres de  $H$  ne sont pas toutes fonctions de  $PT$ . A ces dernières correspondent des énergies complexes ; ainsi, il y a en  $\varepsilon = 0$  une brisure spontanée de

symétrie qui peut s'interpréter comme une transition de phases. On bascule dans ce cas, d'une phase de symétrie non brisée avec un spectre d'énergie purement réel ( $\varepsilon \geq 0$ ), à une phase de symétrie spontanément brisée avec un spectre en partie réel et en partie complexe ( $\varepsilon < 0$ ).

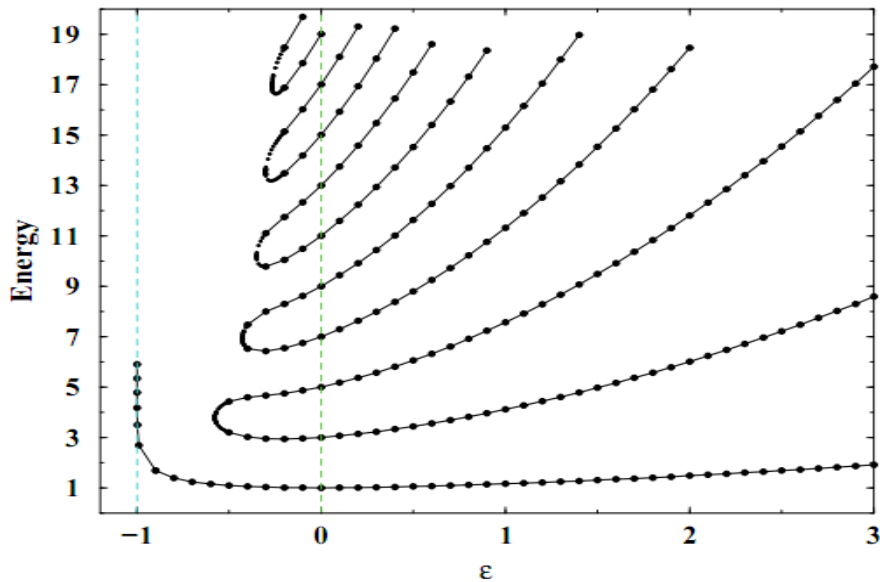


Fig.1 : Niveaux d'énergie de l'hamiltonien ayant la forme  $H = p^2 + x^2(ix)^\varepsilon$  en fonction du paramètre réel  $\varepsilon$  [4].

#### 1.4.3 Fonctions propres et espace de Hilbert

La question qui se pose maintenant est de savoir si les Hamiltoniens possédant une  $PT$ -symétrie non brisée peuvent décrire la dynamique de systèmes physiques réels.

Autrement dit, il faut savoir si les fonctions propres de tels Hamiltoniens peuvent engendrer des espaces de Hilbert munis de produits scalaires conduisant à des normes positives. En plus, il faut aussi garantir que l'évolution des états propres dans le temps demeure unitaire.

Bien entendu, ces deux exigences sont satisfaites dans la théorie quantique usuelle avec des Hamiltoniens hermitiques. La première permet d'interpréter la norme d'un état comme étant une probabilité, qui doit être défini positive, alors que la deuxième condition garantie l'indépendance de cette probabilité par rapport au temps.

Les fonctions propres engendrent donc un espace vectoriel de Hilbert. Le produit scalaire de deux fonctions quelconques  $\psi(x)$  et  $\varphi(x)$ , dans le nouvel espace de Hilbert, est défini comme suit :

$$(\psi, \varphi)_{PT} = \int_{\Gamma} dx [PT\psi(x)]\varphi(x) \quad (1.11)$$

Ou encore

$$(\psi, \varphi)_{PT} = \int_{\Gamma} dx [\psi^*(-x)]\varphi(x) \quad (1.12)$$

où  $\Gamma$  est un certain contour dans le plan complexe, appartenant à un domaine contenant l'axe réel.

L'avantage de ce produit scalaire est que la norme  $\langle\psi|\psi\rangle$  est indépendante de la phase globale de  $\psi(x)$ , et qui est conservée dans le temps. L'indépendance est voulue car dans la théorie de la mécanique quantique, l'objectif est de construire un espace pour représenter les états. En ce qui concerne les produits scalaires propres  $\phi_n(x)$  et  $\phi_m(x)$  de  $H$ , il a été vérifié numériquement qu'il vérifie aussi la relation d'orthonormalisation suivante:

$$\langle\phi_n(x)|\phi_m(x)\rangle = (-1)^n \delta_{mn} \quad (1.13)$$

On voit ainsi apparaître l'inconvénient majeur de ce produit scalaire: sa non-positivité avec laquelle apparaît une alternance du signe de la norme des fonctions propres : la moitié d'entre elles ont une norme positive et les autres une norme négative. Ceci lève une objection majeure à l'interprétation de la norme d'un état en termes de probabilité. Cependant le fait qu'il y ait un nombre égale de fonctions propres de norme positive à celles dont la norme est négative traduit une symétrie de l'Hamiltonien  $H$  [4,5]. Les fonctions propres d'un Hamiltonien PT-symétrique vérifient (1.13) et la relation suivante

$$\sum_n (-1)^n \phi_n^*(x)\phi_n(y) = \delta(x - y), (x, y \text{ réels}) \quad (1.14)$$

qui ressemblent aux relations d'orthonormalisation et de fermeture. Dans la suite, nous appelons ces dernières relations, pseudo-relation d'orthonormalisation et pseudo relation de fermeture.

#### 1.4.4. Construction de l'opérateur $C$

Bien que l'existence de l'opérateur  $C$  peut être prouvée facilement, sa détermination explicite n'est pas une chose facile dans le cadre général. En effet, jusqu'à présent il n'existe que des tentatives pour déterminer l'opérateur  $C$  au premier ordre par rapport à un paramètre de perturbation. Ici, nous allons suivre brièvement la méthode originale de Bender[4] pour prouver l'existence de l'opérateur  $C$ . Les détails peuvent être suivis dans les travaux de Bender [4-7].

Le but est alors de trouver un opérateur  $C$ , représentant une nouvelle symétrie, qui doit commuter simultanément avec  $H$  et  $PT$  et telles que les nouvelles fonctions propres communes à  $H$  et  $CPT$  ne présentent pas les anomalies citées plus haut.

Si les  $|\psi_n\rangle$  sont les kets associés aux fonctions propres  $\psi_n(x)$ , l'opérateur  $C$  doit donc se transformer en un nouveau ket  $||\psi_n\rangle$  dont la norme  $PT$  est positive. Ce nouveau vecteur doit satisfaire la relation suivante :

$$||\psi_n\rangle = C|\psi_n\rangle \quad (1.15.a)$$

qui peut s'écrire:

$$||\psi_n\rangle = (-1)^n |\psi_n\rangle \quad (1.15.b)$$

De cette manière, la pseudo relation d'orthonormalisation et la pseudo relation de fermeture vont conduire aux relations d'orthonormalisation et de fermeture usuelles. En utilisant la pseudo relation de fermeture (1.13), on peut représenter l'opérateur  $C$  sous la forme suivante :

$$C = (-1)^n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (1.16)$$

qui s'écrit dans la représentation position comme suit :

$$C(x, y) = \sum_n (-1)^n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (1.17)$$

Ainsi, cet opérateur est bien défini en fonction des états propres  $PT$ -symétriques de l'hamiltonien, autrement dit,  $C$  est une fonction de  $H$ .

En effet, en utilisant la pseudo relation de fermeture (1.17), on peut représenter  $H$  sous la forme :

$$H = \sum_n (-1)^n E_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (1.18)$$

Ainsi

$$[H, C] = 0 \quad (1.19)$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$C^2 = 1 \quad (1.20)$$

Pour terminer, signalons que puisque  $C$  est une fonction de  $H$ , il est aussi un opérateur spécifique qui dépend particulièrement du système étudié, contrairement, aux opérateurs  $P$  et  $T$ . Cette contrainte conduit à conclure que même si l'opérateur  $C$  résout l'anomalie de la non positivité de la norme, la théorie quantique qu'il peut engendrer ne peut être globale mais spécifique pour chaque Hamiltonien PT-symétrique.

#### 1.4.5. La PT-symétrie en mécanique quantique

Le fait que les valeurs propres de plusieurs Hamiltoniens PT-symétrique sont réelles, a emmené les chercheurs à se demander si des Hamiltoniens tels que ceux définis en (1.1) définissent une théorie physique de la mécanique quantique ou si la positivité du spectre est simplement une propriété mathématique d'une certaine classe complexe de valeurs propres? La réponse définitive à cette question a été trouvée [5-6] pour des Hamiltoniens non-Hermétiques avec une symétrie non-brisée, un opérateur  $C$  linéaire qui commute avec  $H$  et  $PT$  peut être construit, cet opérateur est noté  $C$  car ses propriétés sont similaires à ceux de l'opérateur de conjugaison de charge  $C$ , ce qui nous emmène à introduire un produit scalaire associé à la conjugaison  $CPT$  pour lequel les normes des états quantiques sont définies positives. Par conséquent, nous allons étendre l'Hamiltonien et ses états propres au domaine complexe de sorte que les valeurs propres soient réelles [4].

#### 1.4.6 Les observables PT-Symétriques en mécanique quantique

Comment pouvons-nous représenter une observable en mécanique quantique PT-symétrique? Rappelons que dans la mécanique quantique ordinaire l'état d'un opérateur linéaire  $A$  est une observable si  $A = A^\dagger$ . Cette condition garantit que la valeur attendue de  $A$  dans un état est réelle. En mécanique quantique PT-symétrique, au temps  $t = 0$ , l'opérateur  $A$  doit obéir à la condition  $A^T = CPTACPT$ , où  $A^T$  est le transposé de  $A$ .

Si cette condition tient à  $t = 0$ , alors elle continue à tenir pour tout  $t$  parce que nous avons supposé que  $H$  est symétrique ( $H = H^T$ ). Cette condition garantit également que la valeur

attendue de  $A$  est réelle. Même l'opérateur  $C$  satisfait à cette exigence, c'est donc une observable. Toutefois, les  $x$  et  $p$  ne sont pas des observables. En effet, la valeur de  $x$  dans l'état fondamental est un nombre imaginaire. Ainsi, il n'y a pas d'opérateurs de position dans le domaine de la mécanique quantique PT-symétrique. En ce sens, la mécanique quantique PT-symétrique est similaire à la mécanique quantique des champs de fermions. Dans de tels champs, le domaine des fermions est complexe et n'a pas de limite classique. On ne peut pas mesurer la position d'un électron, on ne peut que mesurer son énergie.

## 1.5 La pseudo-hermiticité

### 1.5.1.Introduction

La pseudo-hermiticité a vu le jour dans les années quarante grâce à Dirac et Pauli [26-27] puis mise en valeur par Lee et Sudarshan [29] dans la quantification en électrodynamique quantique et dans la théorie quantique des champs.

En 2002 Mostafazadeh a publié trois articles [9] dans lesquels il a présenté une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, dans laquelle les hamiltoniens sont pseudo-hermitiques. Le but de ce nouveau cadre de pseudo-hermiticité est de trouver les relations mathématiques avec la notion de PT-symétrie déjà introduite auparavant.

### 1.5.2. Définition et propriétés de la pseudo-hermiticité

Par définition un opérateur linéaire  $H: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  qui agit sur l'espace de Hilbert est dit pseudo-hermitique, s'il existe un opérateur linéaire, hermitique et inversible

$\eta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  tel que :

$$H = \eta^{-1}H^\dagger\eta \quad (1.21)$$

Une autre notion a été introduite par Mostafazadeh dite  $\eta$  – produit scalaire [6] dénotée par  $\ll, \gg_\eta$  et définie par :

$$\ll \psi_1, \psi_2 \gg_\eta := \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle, \quad \forall |\psi_1 \rangle, |\psi_2 \rangle \in \mathcal{H}, \quad (1.22)$$

ce dernier est invariant sous la translation du temps généré par l'hamiltonien  $H$  si et seulement si  $H$  est  $\eta$ -pseudo hermitique.

### 1.5.3. L'origine de la pseudo-hermécité

Tout hamiltonien pseudo-hermitique a un hamiltonien hermitique équivalent et les deux ont le même spectre d'énergie c'est-à-dire qu'ils sont iso-spectraux. A partir d'un hamiltonien hermitique  $h$ , on peut définir un hamiltonien pseudo hermitique équivalent  $H$  selon la relation :

$$h = \rho H \rho^{-1}, \quad (1.23)$$

Sachant que  $\rho$  est un opérateur linéaire, inversible et hermitique.

L'hamiltonien hermitique  $h$  est diagonalisable (symétrique) et préserve le produit scalaire standard :

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (1.24)$$

et les vecteurs propres de  $h$  satisfont les relations suivantes :

$$\langle \varphi_n | h \varphi_m \rangle = \varepsilon_m \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle, \quad (1.25.a)$$

$$\langle h \varphi_n | \varphi_m \rangle = \varepsilon_n \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle. \quad (1.25.b)$$

L'hamiltonien pseudo hermitique  $H$  ne préserve pas le produit scalaire standard mais préserve un nouveau produit scalaire défini par

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle_\eta := \langle \phi_n | \eta \phi_m \rangle \quad (1.26)$$

avec  $\eta = \rho^2$  et les vecteurs propres de  $h$  et  $H$  sont liés par la relation suivante :

$$\phi = \rho^{-1} \varphi \quad (1.27)$$

Sachant que  $\phi$  et  $\varphi$  sont respectivement les valeurs propres de  $H$  et  $h$  respectivement on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \phi_m \rangle_\eta &= \langle \phi_n | \eta \phi_m \rangle \\ &= \langle \rho^{-1} \varphi | \rho \varphi_m \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle \quad (1.28)$$

Donc les deux produits scalaires sont équivalents. D'autre part  $h$  est hermétique alors

$$h = \rho H \rho^{-1} = h^\dagger = \rho^{-1} H^\dagger \rho \quad (1.29)$$

ainsi

$$\rho H \rho^{-1} = \rho^{-1} H^\dagger \rho, \quad (1.30)$$

à partir de cette équation on a

$$H^\dagger = \rho^2 H [\rho^{-1}]^2 = \eta H \eta^{-1} \quad (1.31)$$

Cette relation s'appelle relation de pseudo hermiticité.

#### 1.5.4 Réalité du spectre d'un hamiltonien pseudo hermitique

Si nous utilisons le produit scalaire pseudo hermitique pour déterminer les valeurs propres de  $H$ , on trouve :

$$\langle \psi | H \psi \rangle_\eta = \langle \psi | \eta H \psi \rangle,$$

Sachant que  $|\psi \rangle_\eta = \rho |\psi \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \psi | H \psi \rangle_\eta &= \langle \psi | \rho^2 H \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \rho H \rho^{-1} \psi \rangle \\ &= \langle \psi | h \psi \rangle \\ &= \langle h \psi | \psi \rangle \\ &= \langle \rho H \rho^{-1} \psi | \psi \rangle \\ &= \langle H \psi | \psi \rangle_\eta . \end{aligned} \quad (1.32)$$

Donc  $H$  est hermitique par rapport au produit scalaire  $\langle \psi | \psi \rangle_\eta$ , et les valeurs propres de  $H$  sont réelles.



## Chapitre 2

### La masse dépendante de la position

#### 2.1. Introduction :

La théorie de la masse effective a été principalement développée pour calculer les quantités physiques dans les cristaux et aussi pour traiter les impuretés dans des cristaux parfaits, puis son utilisation s'est étendue au cristaux dont les constituants chimiques changent de région en région ; ces cristaux sont nommés cristaux classés. La nouvelle fonctionnalité qui est apparue dans ces derniers, est que la masse effective qui dépend des propriétés locales cristallines varie avec la position. Ceci donna lieu, dans les années 80, à une discussion étendue concernant l'utilisation du modèle de la masse effective pour d'autres domaines tels que la physique nucléaire [30], les transporteurs et les impuretés dans les cristaux [31], les points quantiques [32] et les liquides quantiques [33].

La masses dépendante de la position (PDM) présente également des déformations dans les relations quantiques de commutation canoniques [33-35]. Elle peuvent également apparaître dans les Hamiltoniens hermitiques ou PT-symétriques [36, 37], dont l'étude a un très grand intérêt. Il convient de souligner qu'en plus de leur dépendance de la position responsable de la non-commutativité, certains cristaux peuvent présenter des caractéristiques (PDM) inhabituelles, comme les discontinuités, les singularités, ou disparaissent à un ou deux points de la fin de l'intervalle. Les principaux points en débats concernent les conditions aux limites caractérisées par les discontinuités dans la fonction de masse  $M$ , tandis que l'on s'en tient à la continuité de la fonction d'onde. La question porte sur le remplacement de la condition de continuité de sa dérivée par une condition impliquant la masse discontinue. Le second point à traiter est de généraliser l'expression courante :

$$H_{cinétique} = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.1)$$

si la masse est une fonction spatiale, le remplacement de  $m$  par  $M(x)$  implique que  $P$  ne commute plus avec  $M(x)$ , et  $H_{cinétique}$  n'est plus hermitique. L'idée est donc d'écrire l'Hamiltonien cinétique sous la forme :

$$H_{cinétique} = P \frac{1}{2M(x)} P . \quad (2.2)$$

quant aux conditions aux limites pour la dérivée première de la fonction d'onde  $\psi$ , elles consistent à imposer la continuité de  $(\frac{1}{M(x)} \frac{d\psi}{dx})$ .

Ce qui veut dire que le problème de l'hermiticité de l'hamiltonien est une partie du problème, si la masse n'est pas constante. Cette nouvelle perspective a aidé à la recherche de potentiels ayant des solutions exactes dans la mécanique quantique. En particulier la mécanique super symétrie quantique et la théorie des groupes.

## 2.2 Action de la transformation canonique ponctuelle sur l'équation de Schrödinger

Dans cette partie on reprend brièvement la méthode de la transformation canonique ponctuelle pour le potentiel à une dimension  $V(y)$ . L'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une masse constante est:

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + V(y) \right) \Phi(y) = E\Phi(y) , \quad (2.3)$$

qui peut s'écrire:

$$-\frac{d^2\Phi}{dy^2} + 2[V(y) - E]\Phi(y) = 0 \quad (2.4)$$

Où dans le système l'unité atomique  $\hbar = 1$  et la masse constante  $M = 1$  sont employées, en utilisant la transformation suivante :

$$y = f(x), \quad (2.5)$$

la fonction d'onde peut donc se réécrire sous la forme:

$$\Phi(y) = g(x)\psi(x) \quad (2.6)$$

On obtient l'équation de Schrödinger suivante :

$$\frac{g(x)}{[f'(x)]^2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[ \frac{2g'(x)}{[f'(x)]^2} - \frac{f''(x)[g(x)]}{[f'(x)]^3} \right] \frac{d\psi(x)}{dx} + A_1\psi = 0 \quad (2.7)$$

Avec

$$A_1 = \left[ \frac{g''(x)}{[f'(x)]^2} - \frac{f''(x)[g'(x)]}{[f'(x)]^3} + 2[V(f(x)) - E]g(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (2.7.1)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.7) par,  $-\frac{1}{2} \frac{[f'(x)]^2}{g(x)}$  on obtient :

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[ -\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} \right] \frac{d\psi(x)}{dx} + \tilde{V}\psi(x) = -[f'(x)]^2 E\psi(x), \quad (2.8)$$

avec

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2} \frac{g''(x)}{g(x)} + \frac{f''(x)[g'(x)]}{f'(x)g(x)} - [f'(x)]^2 V(y). \quad (2.8.1)$$

en tenant compte de l'ordre de symétrie du moment P et la masse, l'équation de Schrödinger pour une masse variable à une dimension s'écrit comme suit :

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\psi'(x)}{m(x)} \right] + \tilde{V}(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.9)$$

Où  $M(x) = m_0 m(x)$  et la fonction de distribution de la masse ponctuelle  $m(x)$  est une fonction réelle sans dimension. On choisit à cet effet  $m_0 = 1$ .

L'équation (2.9) peut alors s'exprimer sous la forme :

$$H\psi(x) = \frac{1}{2} \left[ \vec{P} \frac{1}{M(x)} \vec{P} \right] \psi(x) + \tilde{V}(x)\psi(x) \quad (2.10)$$

dans ce cas l'équation  $H\psi(x) = \tilde{E}\psi(x)$  s'écrit :

$$-\frac{1}{2} \frac{\psi''(x)}{m(x)} + \left[ \frac{m'(x)\psi'(x)}{[m(x)]^2} \right] + \tilde{V}(x)\psi(x) = \tilde{E}\psi(x). \quad (2.11)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.11) par  $m(x)$  on obtient:

$$-\frac{1}{2} \Psi'''(x) + \left[ \frac{m'(x)\Psi'(x)}{2[m(x)]} \right] + m(x)\tilde{V}(x)\Psi(x) = \tilde{E}\Psi(x)m(x) \quad (2.12)$$

Si on compare (2.8) et (2.12) on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m'(x)}{2m(x)} = \left[ -\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} \right] \\ \tilde{V}(x) = -\frac{1}{2} \frac{g''(x)}{g(x)} m(x) + \frac{f''(x)[g'(x)]}{2f'(x)g(x)} - [f'(x)]^2 V(y) \\ \tilde{E}m(x) = [f'(x)]^2 E \end{array} \right. \quad (2.13)$$

La première équation du système (2.13) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} - \left[ \frac{m'(x)}{2[m(x)]} \right] \quad (2.14)$$

En intégrant les deux membres de l'équation (2.14) par rapport à  $x$  on obtient la forme ci-dessous

$$\ln g^2(x) = \ln f'(x) - \ln m(x) \quad (2.15)$$

Ainsi  $g(x)$  s'écrit sous la forme :

$$g(x) = \sqrt{\frac{f'(x)}{m(x)}} \quad (2.16)$$

En remplaçant  $f'(x)$  par  $\sqrt{m(x)}$  dans la relation (2.16) la fonction  $g(x)$  devient :

$$g(x) = m(x)^{-\frac{1}{4}} \quad (2.17)$$

et le calcul de sa dérivée première donne :

$$g'(x) = -\frac{1}{4} \left[ m'(x) m(x)^{-\frac{5}{4}} \right] \quad (2.18)$$

on calcul aussi  $g''(x)$  et  $f''(x)$  :

$$g''(x) = -\frac{1}{4} [m(x)]^{-\frac{5}{4}} \left\{ m''(x) - \frac{5}{4} [m(x)]^2 m^{-1}(x) \right\} \quad (2.19)$$

$$f''(x) = \frac{m'(x)}{2\sqrt{m(x)}} \quad (2.20)$$

Ainsi l'expression de  $\tilde{V}(x)$  exprimée dans (2.13) prend la forme suivante :

$$\tilde{V}(x) = -\frac{1}{2m(x)} \chi + V(y) \quad (2.21)$$

avec

$$\chi = \left[ \frac{-\frac{1}{4}[m(x)]^{-\frac{5}{4}}\{m''(x) - \frac{5}{4}[m(x)]^2 m^{-1}(x)\}}{[m(x)]^{-\frac{1}{4}}} - \frac{\frac{m'(x)}{2\sqrt{m(x)}}\left[-\frac{1}{4}m'(x)[m(x)]^{-\frac{5}{4}}\right]}{\sqrt{m(x)}[m(x)]^{-\frac{1}{4}}} \right] \quad (2.21.1)$$

En simplifiant cette expression on obtient :

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{8m(x)} \left[ \frac{m''(x)}{m(x)} - \frac{7}{4} \frac{[m'(x)]^2}{m(x)^2} \right] + V(y) \quad (2.22)$$

L'expressions du spectre d'énergie est donnée par (2.13) :

$$\tilde{E} = \frac{[f'(x)]^2}{m(x)} \quad (2.23)$$

en remplaçant  $f'(x)$  par sa valeur on trouve :

$$\tilde{E} = E \quad (2.24)$$

Et sachant que  $\Phi(y) = g(x)\psi(x)$  la fonction  $\psi_n(x)$  à la forme :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{g(x)} \Phi(f(x)) = [m(x)]^{\frac{1}{4}} \Phi(f(x)) \quad (2.25)$$

En donnant la fonction de distribution de masse  $m(x)$  et connaissant la solution exacte pour le potentiel de référence  $V(y)$ , on peut trouver  $f(x)$  et construire le potentiel cible  $\tilde{V}(x)$  et résoudre ainsi l'équation de Schrödinger.

### 2.3 Application de la transformation canonique ponctuelle sur le potentiel de Rosen-Morse

Prenant comme exemple d'application le potentiel de Rosen-Morse comme potentiel de référence :

$$V_{RMT} = V_1 \operatorname{sech}_q^2 \alpha y - V_2 \tanh_q \alpha y \quad (2.26)$$

Où  $V_1$  et  $V_2$  sont des paramètres réels.

$$\operatorname{sech}_q(\alpha y) = \frac{e^{\alpha y} - qe^{-\alpha y}}{2}, \quad \tanh_q(\alpha y) = \frac{e^{\alpha y} - qe^{-\alpha y}}{e^{\alpha y} + qe^{-\alpha y}} \quad (2.26.1)$$

Dans l'expression ci-dessus on a employé les fonctions hyperboliques déformées, Où  $q$  est un paramètre réel positif. Très récemment, de Souza et Dutra [20] ont trouvé que la déformation des potentiels hyperboliques peuvent être réduites à des potentiels non-

déformés hyperboliques en utilisant les transformations de translation des coordonnées.

### 2.3.1 Résolution de l'équation de Schrödinger pour le Potentiel de Rosen-Morse avec une masse constante :

Soit la relation :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + [E - V(r)]^2 - [M + S(r)]^2 \right] u(r) = 0 \quad (2.27.a)$$

$$V(r) = -V_1 \operatorname{sech}_q^2 \alpha r - V_2 \tanh_q \alpha r \quad (2.27.b)$$

Dans le cas où  $S(r)=V(r)$  l'équation (2.27.a) donne :

$$\frac{d^2}{dr^2} + [E^2 - 2(E + M)[-V_1 \operatorname{sech}_q^2 \alpha r - V_2 \tanh_q \alpha r] - M^2] u(r) = 0 \quad (2.28)$$

On fait les transformations suivantes :

$$\tilde{V}_1 = 2(E + M)V_1 \quad (2.29.a)$$

$$\tilde{V}_2 = 2(E + M)V_2 \quad (2.29.b)$$

$$z = \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2}, \quad (2.29.c)$$

et l'équation (2.28) s'écrit alors :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + [E^2 + [\tilde{V}_1 \operatorname{sech}_q^2 \alpha r + \tilde{V}_2 \tanh_q \alpha r] - M^2] \right] u(r) = 0 \quad (2.30)$$

avec

$$u(r) = z^{-p} (1-z)^{-\omega} F(z)$$

$$(2.31)$$

On calcule  $\frac{d^2 u}{dr^2}$  :

$$u(r) = z^{-p} (1-z)^{-\omega} F(z)$$

$$(2.32)$$

$$\frac{du}{dr} = -pz^{-p-1}(1-z)^{-\omega} \frac{dz}{dr} F(z) + \omega z^{-p}(1-z)^{-\omega-1} \frac{dz}{dr} F(z) + z^{-p}(1-z)^{-\omega} \frac{dz}{dr} \frac{dF(z)}{dz} \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = z^{-p}(1-z)^{-\omega} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \frac{d^2F(z)}{dz^2} + (B_1 + B_1) \frac{dF(z)}{dz} + cF(z) \quad (2.34)$$

avec

$$c = p(p+1)z^{-p-2}(1-z)^{-\omega} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 - p\omega z^{-p-1}(1-z)^{-\omega-1} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + B_3 + B_4 \quad (2.34.1)$$

$$B_3 = -pz^{-p-1}(1-z)^{-\omega} \frac{d^2z}{dr^2} - p\omega z^{-p-1}(1-z)^{-\omega-1} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \quad (2.34.1.1)$$

$$B_4 = \omega(\omega+1)z^{-p}(1-z)^{-\omega-2} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \omega z^{-p}(1-z)^{-\omega-1} \frac{d^2z}{dr^2} \quad (2.34.1.2)$$

$$B_1 = -pz^{-p-1}(1-z)^{-\omega} \left(\frac{dz}{dr}\right) + \omega z^{-p}(1-z)^{-\omega-1} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 - Y \quad (2.34.2)$$

$$Y = pz^{-p-1}(1-z)^{-\omega} \left(\frac{dz}{dr}\right) \quad (2.34.2.1)$$

$$B_2 = \omega z^{-p}(1-z)^{-\omega-1} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 z^{-p}(1-z)^{-\omega} \frac{d^2z}{dr^2} \quad (2.34.3)$$

Sachant que :

$$z = \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \quad (2.35.a)$$

$$z'' = (-2\alpha \tanh_q \alpha r) z' \quad (2.35.b)$$

$$z(1-z) = \frac{1}{4}(1 - \tanh_q^2 \alpha r) = \frac{1}{2\alpha} z' \quad (2.35.c)$$

La dérivée seconde de  $u(r)$  s'écrit alors

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \left\{ z(1-z) \frac{d^2F(z)}{dz^2} + (-2p + (2p+2\omega)z - \tanh_q \alpha r) \frac{dF(z)}{dz} + \sigma F(z) \right\} \zeta \quad (2.36)$$

avec

$$\zeta = z^{-p-1}(1-z)^{-\omega} \left(\frac{dz}{dr}\right), \quad (2.36.1)$$

$$\sigma = \{p(p+1)z^{-1}(1-z) - 2p\omega + \omega(\omega+1)z(1-z)^{-1} + \xi\}, \quad (2.36.2)$$

$$\xi = \left\{ -p \frac{1}{z} + \omega \frac{1}{1-z} \right\} (-\tanh_q \alpha r). \quad (2.36.3)$$

On remplace (2.35.a) dans la relation (2.36) on obtient :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left\{ z(1-z) \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + (-2p + (2p - 2\omega + 2)z) \frac{dF(z)}{dz} + \chi F(z) \right\} \zeta \quad (2.37)$$

avec

$$\chi = \left\{ \frac{p(p+1)-p}{z(1-z)} - p^2 + 2p\omega + \omega^2 - p - \omega + \frac{-p^2 + \omega^2}{(1-z)} \right\} \quad (2.37.1)$$

Ainsi l'équation (2.30) se réécrit sous la forme :

$$\left\{ z(1-z) \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + (-2p + (2p - 2\omega + 2)z) \frac{dF(z)}{dz} + \chi F(z) \right\} \zeta + \kappa F(z) = 0 \quad (2.38)$$

avec

$$\kappa = \left[ E^2 + [\tilde{V}_1 \operatorname{sech}_q^2 \alpha r + \tilde{V}_2 \tanh_q \alpha r] - M^2 \right] z^{-p} (1-z)^\omega, \quad (2.38.1)$$

et Sachant que :

$$\operatorname{sech}_q^2 \alpha r = \frac{1}{\operatorname{ch}_q^2 \alpha r} = 1 - \tanh_q^2 \alpha r = 4z(1-z) \quad (2.39.1)$$

$$\tanh_q \alpha r = 2z - 1 \quad (2.39.2)$$

L'équation (2.38) peut alors se réécrire sous la forme ci-dessous

$$z(1-z) \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + (-2p + 1 - (-2p - 2\omega + 2)z) \frac{dF(z)}{dz} + \Theta F(z) = 0 \quad (2.40)$$

avec

$$\Theta = \frac{p^2 + \frac{\tilde{E}^2}{4\alpha^2} \frac{\tilde{V}_2}{4\alpha}}{z(1-z)} - \left\{ (p + \omega)^2 - p - \omega + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2} \right\} + \frac{-p^2 + \omega^2 + \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha}}{(1-z)} \quad (2.40.1)$$

$$\text{et} \quad \tilde{E}^2 = E^2 - M^2 \quad (2.40.2)$$

L'équation (2.40) peut être transformée en une équation hypergéométrique de Gauss si et seulement si :

$$-p^2 + \omega^2 + \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha} = 0 \quad (2.41.a)$$



$$p^2 + \frac{\bar{E}^2}{4\alpha^2} - \frac{\bar{V}_2}{4\alpha} = 0 \quad (2.41.b)$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$u(r) = \left(\frac{1+\tanh_q \alpha r}{2}\right)^{-p} \left(\frac{1+\tanh_q \alpha r}{2}\right)^{-\omega-1} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.42)$$

En comparant l'équation (2.42) à l'équation de Gauss on trouve

$$\begin{cases} \gamma = -2p + 1 \\ \alpha + \beta + 1 = -2p - 2\omega + 2 \\ \alpha\beta = (p + \omega)^2 - p - \omega + \frac{\bar{V}_1}{\alpha^2} \end{cases} \quad (2.43)$$

A partir de (2.43) on trouve le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha = -2p - 2\omega + 1 - \beta \\ (-2p - 2\omega + 1)\beta - \beta^2 - (p + \omega)^2 - \frac{\bar{V}_1}{\alpha^2} + p + \omega = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Pour retrouver les valeurs de  $\beta$  on calcule le déterminant  $\Delta$ ,

$$\Delta = (-2p - 2\omega + 1)^2 - 4(p + \omega)^2 - 4p - 4\omega + 4\frac{\bar{V}_1}{\alpha^2} \quad (2.45)$$

qui se réduit à

$$\Delta = \left[2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\bar{V}_1}{\alpha^2}}\right]^2 \quad (2.46)$$

et  $\beta$  s'écrit comme suit

$$\beta = \left(-p - \omega + \frac{1}{2}\right) \pm \left[2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\bar{V}_1}{\alpha^2}}\right]^2$$

On choisit :

$$\beta = \left(-p - \omega + \frac{1}{2}\right) - \left[2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\bar{V}_1}{\alpha^2}}\right]^2 \quad (2.47)$$

La solution  $u(r)$  s'écrit donc :

$$u(r) = \left( \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \right)^{-p} \left( \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \right)^{-\omega-1} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad (2.48)$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = {}_2F_1\left(-p - \omega + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{4\alpha^2}}, -p - \omega + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{4\alpha^2}}, -2p + 1; \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2}\right) \quad (2.48.1)$$

La fonction hypergéométrique (2.48) peut être transformée en une équation polynomiale de degré  $n$  :

$$u(r) = \left( \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \right)^{-p} \left( \frac{1 - \tanh_q \alpha r}{2} \right)^{-\omega} P_n^{2p, 2\omega}(-\tanh_q(\alpha r)) \quad (2.49)$$

En utilisant la condition de quantification :

$$\left(-p - \omega + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}} = -n \quad (2.50)$$

$p + \omega$  s'écrit donc :

$$p + \omega = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}} \quad (2.51)$$

Ainsi  $p$  et  $\omega$  auront la forme :

$$\begin{cases} p = \frac{\frac{\tilde{V}_2}{4\alpha^2} + \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}} \right)^2}{n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}}} \\ \omega = n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}} - p \end{cases} \quad (2.52)$$

En introduisant les équations ci dessus dans les équations (2.41.a) et (2.41.b) on obtient :

$$\Rightarrow \tilde{E}^2 = \frac{\left( \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha} \right)^2}{\left[ n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}} \right]^2} - \alpha^2 \left( n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2}} \right)^2 \quad (2.53)$$

On remplace les relations (2.29.a) et (2.29.b) dans l'équation (2.53) pour avoir

$$E^2 - M^2 = \frac{\frac{(E+M)^2 V_2^2}{\alpha^2}}{\left[ n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8(E+M)V_1}{\alpha^2}} \right]^2} - \alpha^2 \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8(E+M)V_1}{\alpha^2}} \right)^2 \quad (2.54)$$

En faisant le changement de paramètres suivant :  $\eta = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8(E+M)V_1}{\alpha^2}}$

Les paramètres  $p$  et  $\omega$  s'écrivent alors sous la forme:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(E+M)V_2}{\alpha^2} \frac{1}{(\eta)} + (\eta) \right\} \\ \omega = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(E+M)V_2}{\alpha^2} \frac{1}{(\eta)} - (\eta) \right\} \end{cases} \quad (2.55)$$

Les équations (2.53) et (2.49) deviennent:

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{V}_2^2}{4\alpha^2} \frac{1}{\eta^2} - \alpha^2 \eta^2 \quad (2.56)$$

$$u(r) = \left( \cosh_q \alpha r \right)^{\left( \frac{\tilde{V}_2^2}{4\alpha^2} \frac{1}{(\eta)} \right)} \left( q^{-\omega} (\exp(-\alpha r)) \right)^{-\{(\eta)\}} P_n^{2p, 2\omega} (-\tanh_q(\alpha r)) \quad (2.57)$$

Où

$$n=0,1,\dots < \sqrt{1 + \frac{8(E+M)V_1}{\alpha^2}} \quad (2.58)$$

### 2.3.2 Résolution de l'équation de Schrödinger pour le Potentiel de Rosen-Morse avec masse dépendante de la position

Le spectre d'énergie et la fonction d'onde non normalisée correspondante au potentiel de référence de Rosen-Morse [65] sont calculés comme suit :

1-On considère la distribution de masse :  $m(x) = \frac{a^2}{(q+x^2)^2}$

Dans ce cas la fonction  $f(x)$  s'écrit :

$$y = f(x) = \int \sqrt{m(x)} dx = \int \sqrt{\frac{a^2}{q+x^2}} dx = a \ln \left[ x + \sqrt{q+x^2} \right] \quad (2.59)$$

$$\text{Avec : } a = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Puisque } \sinh_q(\alpha y) = \frac{e^{\alpha y} - qe^{-\alpha y}}{2} \quad (2.60)$$

On a :

$$\begin{aligned} \sinh_q(\alpha y) &= \frac{e^{\alpha y} - qe^{-\alpha y}}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha a \ln \left[ x + \sqrt{q+x^2} \right]} - qe^{-\alpha a \ln \left[ x + \sqrt{q+x^2} \right]}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2x^2 + 2x\sqrt{q+x^2}}{x + \sqrt{q+x^2}} \right] = \left[ \frac{x(x + \sqrt{q+x^2})}{x + \sqrt{q+x^2}} \right] \\ &= x \end{aligned} \quad (2.61)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \cosh_q(\alpha y) &= \frac{e^{\alpha y} + qe^{-\alpha y}}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha a \ln \left[ x + \sqrt{q+x^2} \right]} + qe^{-\alpha a \ln \left[ x + \sqrt{q+x^2} \right]}}{2} \\ &= \left[ \frac{\sqrt{x^2+q} \left( \left[ \sqrt{x^2+q} \right] + x \right)}{x + \sqrt{q+x^2}} \right] \\ &= \sqrt{x^2+q} \end{aligned} \quad (2.62)$$

2- on calcule  $\tilde{V}$

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{8m(x)} \left[ \frac{m''(x)}{m(x)} - \frac{7}{4} \frac{[m'(x)]^2}{m(x)^2} \right] + V(y)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8m(x)} \left[ \frac{m''(x)}{m(x)} - \frac{7 [m'(x)]^2}{4 m(x)^2} \right] &= \frac{1}{8 \frac{a^2}{q+x^2}} \left[ -\frac{\{x^2 + 2q\}}{(q+x^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{8a^2} \left[ -\frac{\{x^2 + 2q\}}{(q+x^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= \frac{1}{8m(x)} \left[ \frac{m''(x)}{m(x)} - \frac{7 [m'(x)]^2}{4 m(x)^2} \right] + V(y) \\ &= \frac{1}{8a^2} \left[ -\frac{\{x^2 + 2q\}}{(q+x^2)^2} \right] - \frac{V_1}{q+x^2} - \frac{xV_2}{\sqrt{q+x^2}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

et sachant que

$$m(x) = \frac{a^2}{(b+x^2)^2}$$

$$m'(x) = \frac{-4a^2x}{(b+x^2)^3}$$

$$m''(x) = \frac{-4a^2(b-5x^2)}{(b+x^2)^4}$$

d'où

$$\frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{-4(b-5x^2)}{(b+x^2)^2}$$

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{-4x}{(b+x^2)}$$

On peut maintenant trouver le spectre d'énergie et la fonction d'onde pour le potentiel de Rosen-Morse [50]

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{V}^2}{4\alpha^2} \frac{1}{\eta^2} - \alpha^2 \eta^2 \quad (2.65)$$

On pose :  $\lambda = \frac{1}{\eta}$

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{V}^2}{4} \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} - \alpha^2 \lambda^2$$

$$u(r) = \left( \cosh_q(\alpha f(x)) \right)^{\left( \frac{\tilde{V}^2}{4\alpha^2 \lambda} \right)} \left( q^{-\omega} (\exp(-i\alpha f(x)))^{-\left\{ \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right\}} \right) P_n^{2p, 2\omega}(-\tanh_q(\alpha f(x)))$$

(2.66)

Ainsi on a pu retrouver le spectre d'énergie et la fonction d'onde pour une masse dépendante de la position.

## Chapitre 3

### **Etude d'un puits de potentiel complexe PT-Symétrique** (Avec masse dépendante de la position)

#### 3.1 Introduction

Les hamiltoniens avec masse dépendante de la position (P.D.M) constituent un modèle utile et très intéressant dans l'étude de plusieurs problèmes physiques [30-36]. Cependant, une ambiguïté d'ordonnance est apparue lors de la définition de l'opérateur énergie cinétique sachant que  $p_x = -i\partial_x$  et la masse  $M(x) = m_0 m(x)$

ce travail a pour objectif la résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension dont la particule est soumise à un potentiel PT-symétrique et la masse est une fonction de l'espace. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, il est toujours possible de trouver une masse  $m(x)$  qui, combinée avec le Potentiel PT-symétrique  $V(x)$ , conduit à un potentiel effectif exactement solvable. Cependant, même s'il n'existe, à priori, aucune contrainte sur le potentiel, la masse doit satisfaire certaines contraintes physiques. Entre autres, elle doit être nécessairement toujours positive. Cette contrainte à elle seule nous oblige à fixer la forme de la masse  $m(x)$  au préalable et choisir le potentiel PT-symétrique  $V(x)$  qui convient pour obtenir une solution exacte du problème. On trouve dans la littérature plusieurs travaux récents dans ce sens [39-41] avec des choix variés de la masse et du potentiel. Les fonctions proposées pour la masse  $m(x)$  dépendent d'un seul paramètre libre. En général le travail avec (P.D.M) est appliqué pour le modèle proposé par Von Roos [42] avec la contrainte :

$$\alpha + \beta + \gamma = -1 \quad (3.1)$$

Les valeurs correctes de  $\alpha, \beta, \gamma$  pour un modèle spécifique ont été le sujet d'un long débat, on cite : Gora et D. William pour  $\beta = \gamma = 0$  et  $\alpha = -1$  [43] ; Ben Daniel et Duke pour  $\alpha = \gamma = 0$  et  $\beta = -1$  [44] ; Zhu et Kroemer pour  $\alpha = \gamma = -\frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$  [45] ; Li et Kuhn pour  $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$  et  $\alpha = 0$  [46]. Très récemment Dutra et Almeida [47] ont procédé à un

test de fiabilité sur l'ordre de grandeur de ces paramètres et ont conclu que le choix de Gora et D. William, et celui de Ben Daniel et Duke, sont à écarter car ils engendraient des énergies complexes. Quand aux deux autres choix ils furent classés comme étant de bons exemples. Dans ce chapitre, on va retrouver les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  puis appliquer cet hamiltonien à un potentiel  $PT$  symétrique avec masse dépendante de la position et essayer de prouver que son énergie est réelle.

### 3.2 Conditions aux limites pour un potentiel $PT$ -symétriques avec masse variable :

Il est connu que l'énergie cinétique pour une masse variable s'écrit sous la forme

(2.1) avec :  $m = m(x)$  et  $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ , vu la contrainte (3.1), l'opérateur énergie cinétique

est choisi sous la forme  $T = p \frac{1}{m} p$

### 3.3 Conditions aux limites pour les points discontinus de la fonction de masse et du potentiel :

L'Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H = T(x) + V(x) \quad (3.2)$$

Où  $T(x)$  est l'opérateur défini par :

$$T(x) = \frac{1}{4} (m^\alpha p m^\beta p m^\gamma + m^\gamma p m^\beta p m^\alpha) \quad (3.3)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit alors sous la forme :

$$H\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.4)$$

On remplace (3.2) et (3.3) dans (3.4) pour obtenir:

$$\left[ \frac{1}{4} (m^\alpha p m^\beta p m^\gamma + m^\gamma p m^\beta p m^\alpha) + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x), \quad (3.5)$$

qui s'écrit:

$$\left[ \frac{-1}{2} (m^\alpha \left( \frac{d}{dx} \right) m^\beta \left( \frac{d}{dx} \right) m^\gamma + m^\gamma \left( \frac{d}{dx} \right) m^\beta \left( \frac{d}{dx} \right) m^\alpha) + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (3.6)$$



En calculant chacun des membres de l'équation (3.6), cette dernière aura la forme:

$$\left[-\frac{1}{2}m^\alpha m^\beta m^\gamma \left\{2\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\Theta_1 + \Theta_2) + (V(x) - E)\right\}\right]\psi = 0 \quad (3.7)$$

Avec

$$\Theta_1 = \gamma\beta \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 m^{-1}\psi + \gamma \left(\frac{d^2m}{dx^2}\right) m^{-1}\psi + \left(\gamma(\gamma - 1) \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 m^{-2}\right)\psi + \beta m^{-1} \frac{dm}{dx} \frac{d\psi}{dx} + \epsilon_1 \quad (3.7.1)$$

$$\epsilon_1 = 2\gamma m^{-1} \frac{dm}{dx} \frac{d\psi}{dx} \quad (3.7.1.1)$$

$$\Theta_2 = \left\{ \alpha\beta \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 m^{-1}\psi + \alpha \left(\frac{d^2m}{dx^2}\right) m^{-1}\psi + \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 m^{-2} + \beta m^{-1} \frac{dm}{dx} \frac{d\psi}{dx} + \epsilon_2 \right\} \quad (3.7.2)$$

$$\epsilon_2 = 2\gamma m^{-1} \frac{dm}{dx} \frac{d\psi}{dx} \quad (3.7.2.1)$$

Si on applique la contrainte (3.1) à l'équation (3.7) on obtient :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{m'}{m} \frac{d\psi}{dx} - \frac{1}{2} \left[ v \left(\frac{m''}{m}\right) - \eta \left(\frac{m'}{m}\right)^2 \right] \psi + m(V(x) - E) = 0 \quad (3.8)$$

avec

$$\eta = \gamma(2 + \alpha) + \alpha(2 + \gamma), \quad v = \gamma + \alpha \quad (3.8.1)$$

$$\text{et } m' = \frac{dm}{dx} \quad (3.8.2)$$

Pour éliminer le terme de la dérivée première dans (3.8) et retrouver la forme standard de l'équation de Schrödinger on fait la transformation suivante:

$$\psi(x) = \sqrt{m(x)}\phi(x) \quad (3.9)$$

Par suite (3.8) devient:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \left[ +(\nu + 1) \left(\frac{m''}{2m}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{\eta}{2}\right) \left(\frac{m'}{m}\right)^2 \right] \phi(x) + m(E - V(x))\phi(x) = 0 \quad (3.10)$$

Notre but maintenant est de généraliser les conditions aux limites de la fonction d'onde correspondante pour une distribution de masse qui dépend de la position. On s'intéresse au cas où la masse est discontinue.

### 3.4 Les conditions aux limites dans le cas où la masse est discontinue :

On considère que la distribution de masse  $m(x)$  a une discontinuité au point  $x = a$  de la forme :

$$m(x) = m_1(x)\Theta(-x-a) + m_2(x)\Theta(x-a), \quad (3.11)$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaveside définie par :

Avec

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Les dérivées première et seconde de  $m(x)$  donnent :

$$m(x) = m_1(x)\Theta(-x-a) + m_2(x)\Theta(x-a) \quad (3.12.a)$$

$$m'(x) = m'_1(x)\Theta(-x-a) + m_1(x)\delta(x) + m'_2(x)\Theta(x-a) + m_2(x)\delta(x) \quad (3.12.b)$$

$$m''(x) = m''_1(x)\Theta(-x-a) + m'_1(x)\delta(x) + m'_1(x)\delta(x) + m''_2(x)\Theta(x-a) + m'_2(x)\delta(x) + m'_2(x)\delta(x). \quad (3.12.c)$$

Si on utilise (3.12) dans (3.11) il en résulte une forte discontinuité en  $x = a$  .

Pour éliminer ce problème on choisit :

$$(\nu+1) = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{3}{4} + \frac{\eta}{2} \right) = 0 \quad (3.13)$$

De là on obtient :

$(\nu+1) = 0$  et  $\gamma$  s'écrit sous la forme :

$$\gamma = -\alpha - 1 \quad (3.14.a)$$

Par suite en remplaçant  $\eta$  par sa valeur dans (3.13) on obtient une équation de second ordre en fonction de  $\alpha$  :

$$-\alpha - \alpha^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad (3.14.b)$$

L'équation (3.14.b) est une équation du second degré dont le déterminant est nul, sa racine est donc :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (3.15)$$

La relation (3.14.a) donne :

$$\gamma = -\alpha - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad (3.16)$$

En remplaçant ces valeurs dans (3.1) on retrouve la valeur :  $\beta = 0$ .

Avec de telles valeurs l'opérateur énergie cinétique (3.3) devient:

$$T(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} p^2 \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \quad (3.17)$$

et l'équation (3.10) s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + m(E - V(x))\phi(x) = 0 \quad (3.18)$$

Il est maintenant facile d'avoir les conditions aux limites au point  $x = a$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = m(V(x) - E)\phi(x) \quad (3.19)$$

On intègre les deux membres de (3.19) :

$$\phi'(a-h) - \phi'(a+h) = \int_{a-h}^{a+h} m(V(x) - E)\phi(x) dx \quad (3.20)$$

Dans l'intervalle  $[a-h, a+h]$  pour  $x = a$ ,  $m(x)$  et  $V(x)$  ont une discontinuité finie et  $\phi(x)$  est liée. De plus lorsque  $h \rightarrow 0$ , l'intégrale dans la relation (3.20) tend vers 0, ce qui veut dire que  $\phi(x)$  et  $\phi'(x)$  sont continus en  $x = a$  et de là, en utilisant la transformation (3.9), on arrive à la relation suivante:

$$\frac{\psi(x)}{\sqrt{m(x)}} \Big|_{x=a-0} = \frac{\psi(x)}{\sqrt{m(x)}} \Big|_{x=a+0} \quad (3.21)$$

### 3.5 Étude du puits de potentiel carré avec masse variable dans le régime PT symétrique

Considérons la distribution de masse et le potentiel suivants:

$$m(x) = m_1 \Theta(-x + \alpha) + m_2 \Theta(x + \alpha) \quad (3.22.1)$$

Sachant que :

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.22.2)$$

Avec  $m_1 > m_2$

On considère la forme du potentiel introduite par Znojil [48]

$$V(x) = \begin{cases} iZ & x \in (-1,0) \\ -iZ & x \in (0,1) \end{cases} \quad (3.23)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{dx^2} - k_1^2\psi = 0 \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} - k_2^2\psi = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Avec :

$$k_1 = \sqrt{m_1(-E + iZ)} \quad (3.241)$$

$$k_2 = \sqrt{m_2(-E - iZ)} \quad (3.24.2)$$

La solution de (3.24) s'écrit :

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A_1 \exp\{k_1(x+1)\} + A_2 \exp\{-k_1(x+1)\} \\ \psi_2(x) = B_1 \exp\{k_2x\} + B_2 \exp\{-k_2x\} \end{cases} \quad (3.25)$$

L'ambiguïté dans les coefficients  $A_i, B_i$  sera éliminée par les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\psi_1(-1)}{\sqrt{m(-1)}} = \frac{\psi_2(1)}{\sqrt{m(1)}} \\ \frac{\psi_1(0)}{\sqrt{m(0)}} = \frac{\psi_2(0)}{\sqrt{m(0)}} \\ \left( \frac{\psi_1(-1)}{\sqrt{m(-1)}} \right)' = \left( \frac{\psi_2(1)}{\sqrt{m(1)}} \right)' \\ \left( \frac{\psi_1(0)}{\sqrt{m(0)}} \right)' = \left( \frac{\psi_2(0)}{\sqrt{m(0)}} \right)' \end{cases} \quad (3.26)$$

La relation (3.26) donne :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} A_1 + \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} A_2 - B_1 \exp\{k_2\} - B_2 \exp\{-k_2\} = 0 \\ A_1 \exp\{k_1\} + A_2 \exp\{-k_1\} - B_1 - B_2 \\ k_1 \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} A_1 - k_1 \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} A_2 - B_1 k_2 \exp\{k_2\} + B_2 k_2 \exp\{-k_2\} \\ ik_1 A_1 \exp\{k_1\} - k_1 A_2 \exp\{-k_1\} - k_2 B_1 + k_2 B_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Le système ci-dessus a une solution non-triviale si, son déterminant est nul.

Le calcul du déterminant du système ci-dessus donne :

$$\det = \begin{vmatrix} \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} & -\exp\{k_2\} & -\exp\{-k_2\} \\ \exp\{k_1\} & \exp\{-k_1\} & -1 & -1 \\ k_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} & -k_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} & -k_2 \exp\{k_2\} & k_2 \exp\{-k_2\} \\ k_1 \exp\{k_1\} & -k_1 \exp\{-k_1\} & -k_2 & k_2 \end{vmatrix} = \quad (3.27.1)$$

$$\det = -\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} (k_1 - k_2)^2 [\text{Exp}\{k_2 - k_1\} + \text{Exp}\{-(k_2 - k_1)\}] + \Lambda - 4k_1 k_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) - 1 \quad (3.27.2)$$

$$\Lambda = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} (k_1 + k_2)^2 [\text{Exp}\{-(k_2 + k_1)\} + \text{Exp}\{(k_2 + k_1)\}] \quad (3.27.2.1)$$

Donc pour calculer  $\det = 0$  On divise  $k_1$  et  $k_2$  en ses parties réelles et imaginaires et en utilisant les relations

$$k_1 = \sqrt{m_1}(t + is) \quad (3.28.1)$$

$$k_2 = \sqrt{m_2}(t - is) \quad (3.28.2)$$

En élevant (3.28.1) et (3.28.2) au carré on obtient :

$$k_1^2 = m_1(t^2 - s^2 + 2its) = m_1(-E + iZ) \quad (3.29.1)$$

$$k_2^2 = m_2(t^2 - s^2 - 2its) = m_2(-E - iZ) \quad (3.29.2)$$

Si on compare les deux relations ci-dessus on trouve :

$$E = s^2 - t^2 \quad (3.30.1)$$

$$Z = 2ts \quad (3.30.2)$$

et sachant que :

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)^2 &= k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \\ &= m_1(t^2 - s^2 + 2its) + m_2(t^2 - s^2 - 2its) - 2\sqrt{m_1 m_2}(t^2 + s^2) \\ &= \left[ (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})t + i(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})s \right]^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)^2 &= k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \\ &= m_1(t^2 - s^2 + 2its) + m_2(t^2 - s^2 - 2its) + 2\sqrt{m_1 m_2}(t^2 + s^2) \\ &= (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2 t^2 - (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})^2 s^2 + (m_1 - m_2)2its \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1) &= \sqrt{m_2}(t - is) - \sqrt{m_1}(t + is) \\ &= (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})t - (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})is \\ &= \left[ (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})t + i(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})s \right]^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
(k_2 + k_1) &= \sqrt{m_2}(t - is) + \sqrt{m_1}(t + is) \\
&= (\sqrt{m_2} + \sqrt{m_1})t + (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})is
\end{aligned} \tag{3.34}$$

En remplaçant (3.26), (3.27) et (3.28) dans (3.25) on obtient :

$$-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} \{Y_1^2 [\exp\{\Pi_1\} + \exp\{-\Pi_1\}] + Y_2^2 [\exp\{Y_2\} + \exp\{-Y_2\}]\} - \Xi = 0 \tag{3.35}$$

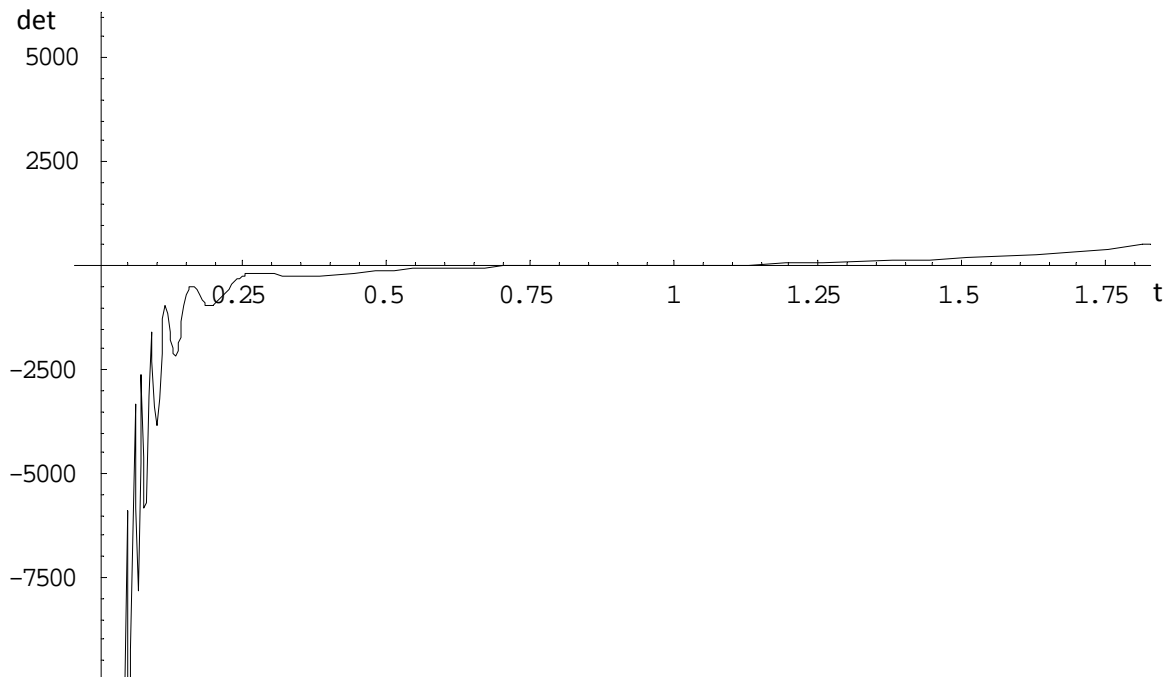
Avec

$$\Pi_1 = (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})t - i(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})\frac{z}{2t} \tag{3.35.1}$$

$$Y_1 = (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})t + i(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})\frac{z}{2t} \tag{3.35.2}$$

$$Y_2 = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})t - i(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})\frac{z}{2t} \tag{3.35.3}$$

$$\Xi = 4\sqrt{m_1 m_2} \left( \left(\frac{z}{2t}\right)^2 + t^2 \right) \left[ \frac{m_1}{m_2} - 1 \right] \tag{3.35.4}$$



Déterminant dans "la représentation t ",  $Z=5$ ,  $m_1 = 2, m_2 = 1$

Pour  $t$  très grand l'équation (3.45) croît exponentiellement et au voisinage de  $t = 0$ , le déterminant présente des oscillations causées par la dominance du dernier terme négatif. Il reste une perturbation positive causée par les deux premiers termes. Pour étudier le spectre pour  $Z$  infinitésimal on réécrit (3.45) dans la représentation "  $s$  "

$$\det = - \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{1}{2}} \{ Y_3^2 [\exp\{\Pi_2\} + \exp\{-\Pi_2\}] + Y_4^2 [\exp\{Y_4\} + \exp\{-Y_4\}] \} - \Xi_1 \quad (3.36)$$

avec

$$\Xi_1 = 4\sqrt{m_1 m_2} \left( \left( \frac{Z}{2s} \right)^2 + s^2 \right) \left[ \frac{m_1}{m_2} - 1 \right] \quad (3.36.1)$$

$$\Pi_2 = (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}) \frac{Z}{2s} - i(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})s \quad (3.36.2)$$

$$Y_3 = (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}) \frac{Z}{2s} + i(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})s \quad (3.36.3)$$

$$Y_4 = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) \frac{Z}{2s} - i(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})s \quad (3.36.4)$$

dans la limite hermitique  $Z \rightarrow 0$  les énergies coïncident avec le spectre d'énergie de l'oscillateur circulaire  $E_n = s^2 = \pi n^2$

### 3.6 Violation de la PT-symétrie dans l'étude du puits de potentiel carré avec masse variable

La rupture spontanée de la PT symétrie au-delà du faible couplage critique  $Z_0^{(crit)}$  ne veut pas dire que la plus basse paire des niveaux d'énergie  $E_0$  et  $E_1$  "fusionnent et disparaissent", ses deux énergies se déplacent plutôt dans le plan complexe.

$$E_0 = E - i\varepsilon \quad E_1 = E + i\varepsilon \quad Z > Z_0^{(crit)} \quad (3.37)$$

Dans ce régime de brisure de symétrie l'équation de Schrödinger s'écrit:

$$\psi'' = \begin{cases} [k_n^1]^2 \psi_n & x > 0 \\ [k_n^2]^2 \psi_n & x < 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Et reste facilement solvable en prenant juste les cas  $n = 0$  et  $n = 1$



$$\begin{aligned}
[k^1_0]^2 &= m_1(-E + i\varepsilon - iZ) = m_1 k^2 = m_1(s - it)^2 \\
[k^1_1]^2 &= m_1(-E - i\varepsilon - iZ) = m_1 \lambda^2 = m_1(p - iq)^2 \\
[k^2_0]^2 &= m_2(-E + i\varepsilon + iZ) = m_2(\lambda^*)^2 \\
[k^2_1]^2 &= m_2(-E - i\varepsilon + iZ) = m_2(k^*)^2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

La solution générale de (4-2) peut alors s'écrire sous la forme hyperbolique :

$$\begin{cases}
\psi_0(x) = K_p \sinh[\sqrt{m_1} k(1-x)] & x > 0 \\
\psi_0(x) = K_n \sinh[\sqrt{m_2} \lambda^*(1+x)] & \begin{matrix} x < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \\
\psi_1(x) = L_p \sinh[\sqrt{m_1} \lambda(1-x)] & x < 0 \\
\psi_1(x) = L_n \sinh[\sqrt{m_2} k^*(1+x)] & x < 0
\end{cases} \tag{3.40}$$

La continuité et la dérivabilité à l'origine donne:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} K_p \sinh[\sqrt{m_1} k] = K_n \sinh[\sqrt{m_2} \lambda^*] \\ L_p \sinh[\sqrt{m_1} \lambda] = L_n \sinh[\sqrt{m_2} k^*] \\ -\sqrt{m_1} k K_p \cosh[\sqrt{m_1} k] = \sqrt{m_2} \lambda^* K_n \cosh[\sqrt{m_2} \lambda^*] \\ -\sqrt{m_1} \lambda L_p \cosh[\sqrt{m_1} \lambda] = \sqrt{m_2} k^* L_n \cosh[\sqrt{m_2} k^*] \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} K_p \sinh[\sqrt{m_1} k] = K_n \sinh[\sqrt{m_2} \lambda^*] \\ -\sqrt{m_1} k K_p \cosh[\sqrt{m_1} k] = \sqrt{m_2} \lambda^* K_n \cosh[\sqrt{m_2} \lambda^*] \\ L_p \sinh[\sqrt{m_1} \lambda] = L_n \sinh[\sqrt{m_2} k^*] \\ -\sqrt{m_1} \lambda L_p \cosh[\sqrt{m_1} \lambda] = \sqrt{m_2} k^* L_n \cosh[\sqrt{m_2} k^*] \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} -\sqrt{m_1} k \coth[\sqrt{m_1} k] = \sqrt{m_2} \lambda^* K_n \cosh[\sqrt{m_2} \lambda^*] \\ -\sqrt{m_1} \lambda \coth[\sqrt{m_1} \lambda] = \sqrt{m_2} k^* L_n \cosh[\sqrt{m_2} k^*] \end{cases} \\
\Rightarrow &\sqrt{m_1} \lambda \coth[\sqrt{m_1} \lambda] + \sqrt{m_2} k^* \coth[\sqrt{m_2} k^*] = 0 \tag{3.41}
\end{aligned}$$

En résumé les parties imaginaires et réelles de  $k$  et  $\lambda$  définissent les parties réelles et imaginaires des énergies. avec :

$$E = t^2 - s^2 = q^2 - p^2, \quad \varepsilon = pq - st$$

Ce qui nous mène à reparamétriser  $s, t, p$  et  $q$ :

$$s = K \sinh \alpha \qquad t = K \cosh \alpha, \qquad p = K \sinh \beta \qquad q = K \cosh \beta$$

(3.42)

La partie imaginaire de l'énergie est:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= pq - st = K^2 \sinh \beta \cosh \beta - K^2 \sinh \alpha \cosh \alpha \\ &= \frac{K^2}{2} (\sinh 2\beta - \sinh 2\alpha) \end{aligned}$$

(3.43)

ayant

$$k^2 = -E + i\varepsilon - iZ$$

(3.44)

et :

$$k^2 = s^2 - t^2 - 2its = -K^2 - iK^2 \sinh 2\alpha$$

(3.45)

L'équation (3.54) donne

$$-K^2 - iK^2 \sinh 2\alpha = -E + i\varepsilon - iZ$$

(3.46)

On remplace  $\varepsilon$  par sa valeur dans (3.45) et on obtient

$$-K^2 - iK^2 \sinh 2\alpha = -E + i \frac{K^2}{2} (\sinh 2\beta - \sinh 2\alpha) - iZ$$

(3.47)

qui s'écrit :

$$i \frac{K^2}{2} (\sinh 2\beta + \sinh 2\alpha) - iZ = 0$$

(3.48)

La valeur de  $K$  est donc

$$K = \sqrt{\frac{2Z}{(\sinh 2\beta + \sinh 2\alpha)}}$$

(3.49)

Notre solution est complètement définie par les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  appartenant au domaine réel  $\mathbb{R}$  et leurs valeurs doivent satisfaire l'équation (3.44). leur déterminant peut être calculé numériquement. Et le fait de retrouver ses valeurs nous emmène à retrouver les valeurs de  $Z_0^{(crit)}$  au-delà desquels la symétrie est brisée, ainsi que l'énergie et les fonctions d'ondes.

A travers cette étude on a pu démontrer que le spectre d'énergie pour le potentiel carré PT-symétrique avec masse dépendante de la position est réel. Comme c'est le cas pour ce même potentiel avec masse constante.

## CONCLUSION

Ce mémoire fait partie d'une suite de recherches concernant des sujets d'actualité ayant pour but d'apporter une contribution à l'étude des potentiels PT-symétriques dans le cadre de l'équation de Schrödinger à une dimension avec une masse dépendante de la position [48-62].

Notre contribution dans ce domaine est la proposition d'un modèle de potentiel unidimensionnel complexe et PT-symétrique pour des systèmes avec des masses variables dans l'espace, où on résout exactement l'équation de Schrödinger pour le modèle de Voon Roos. Dans notre travail, la forme de la masse de la particule qui dépend de la position joue un rôle central dans la construction des potentiels PT-symétriques exactement solvables. En effet, dans le modèle que nous avons proposé, la forme de la masse n'est pas choisie arbitrairement, mais de telle sorte que le potentiel de départ soit PT-symétrique et que le potentiel effectif soit exactement solvable dans l'équation de Schrödinger.

Dans ce modèle, le potentiel PT-symétrique de départ ne dépend pas de la masse puisque le potentiel de référence est complexe. Nous sommes conduits ainsi à un potentiel effectif bien connu qui a déjà été résolu par la méthode analytique faisant appel aux fonctions spéciales. De plus nous avons étudié le spectre d'énergie pour le cas où la symétrie est brisée. Dans ce calcul, les résultats concordent avec le cas où la masse est constante.

Notre objectif dans un futur proche sera de poursuivre ce travail afin de le généraliser à des modèles à deux et trois dimensions de l'espace. On pense qu'il est plus adéquat de considérer des potentiels tridimensionnels ou à défaut bidimensionnels, ou encore d'essayer de trouver une forme de masse qui à la limite nous redonne le potentiel à masse constante. De cette manière, on doit travailler dès le début avec l'équation de Schrödinger à deux ou trois dimensions, et ensuite en déduire les résultats au cas unidimensionnel par une simple limite sur les paramètres libres.

## REFERENCES

- [1] C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. 80(1998)5243 ; M. Znojil, J. Phys. A 36(2003)7639.
- [2] C. M. Bender and S. Boettcher, and V. M. Savage, J. Math. Phys. (N.Y) 41(2000) 6381 ; C. M. Bender and Q Wang, J. Phys. A 34, 3325 (2001).
- [3] C. M. Bender and S. Boettcher, P. N. Meisinger and Q. Wang, Phys. Lett. A 202(2002) 286.
- [4] C. M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones ; Phy. Rev. Lett. 89 (2002) 270401 C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Am. J. Phys. 71(2003) 1905; C. M. Bender and H. F. Jones, Phys. Lett. A 328(2004) 102.
- [5] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett.. 93(2004) 251601; Phys. Rev. D 70(2004) 025001
- [6] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. 43(2002) 2005 ; A. Mostafazadeh, J. Math. Phys., 43, (2002) 2814; A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. 43(2002) 3944; A. Mostafazadeh, J. Phys. A 36(2003)1125.
- [7] A. Mostafazadeh, J. Phys. A 39 (2006) 10171-10188.
- [8] A. Mostafazadeh, Pramana-J. Phys. 73(2009) 269-277.
- [9] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian Quantum Mechanics, arXiv :0810.5643.
- [10] H. Nicolai, J. Phys, A : Math, Gen. 9(1976)1497.
- [11] W. Pauli, Rev. Mod. Phys. 15(1943) 175.
- [12] S. N. Gupta, Phys. Rev. 77(1950)294 and Proc. Phys. Soc. London 63(1950) 681.
- [13] K. Bleuler, Helv. Phys. Act. 23(1950) 567.
- [14] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. 123(1961).2183
- [15] T. D. Lee and G. C. Wick, Nucl. Phys. B 9(1969) 209.
- [16]. BenDaniel, D.J., Duke, C.B.: Phys. Rev. 152(1966) 683
- [17] Dutra et Almeida de Souza Dutra A and Almeida C A S Phys Lett. A 275(2000) 25
- [18]. von Roos, O.: Phys. Rev. B 27(1983)7547

- [19]. Dekar, L., Chetouani, L., Hammann, F.T.: Phys. Rev. A 59(1999)107
- Dekar, L., Chetouani, L., Hammann, F.T.: J. Phys. A Math. Gen. 39(1998)2551
- [20]Wigner, *Symmetries and reflections*, Bloomington, Indiana: Indiana University Press E. P.,( 1967)
- [21]A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity for a Class of Nondiagonalizable Hamiltonians, J. Math. Phys. 43(2002) 6343
- [22] E. P Wigner, “Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen”, *Zeitschrift für Physik*, 43(1927 )624-652”
- [23]Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik
- [24] Curie, P., 1894, “Sur la symétrie dans les phénomènes physiques. Symétrie d' un champ électrique et d'un champ magnétique”, *Journal de Physique*, 3rd series, vol.3, 393-417.
- [25] Jona-Lasinio, G., 2003, “Cross fertilization in theoretical physics”, in K. Brading and E. Castellani (eds.), *Symmetries in Physics:Philosophical Reflections*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 315-320.
- [26]D.J. BenDaniel, C.B. Duke, Phys. Rev. 152 (1966) 683.
- [27] G. Bastard, Phys. Rev. B 24 (1981) 5693.
- [28]G. Lévai, M. Znojil, J. Phys. A 35 (2002) 8793.
- [29] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys.15(1943) 175
- [30] S. N. Gupta, On the Calculation of Self-Energy of Particles, Phys. Rev. 77(1950) 294.
- [31] S. N. Gupta, Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics, Proc. Phys.Soc. Lond 63(1950) 681
- [32] T. D. Lee, G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys. B9(1969)209
- [33] E. C. G. Sudarshan, Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric. I, Phys.Rev.123(1961) 2183.
- [34] P. Ring, P. Schuck (1980) *The Nuclear Many Body Problem* (Springer, New York).
- [35] F. Arias de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, Phys. Rev. B 50 (1994) 4248.
- [36] L. Serra, E. Lipparini, Europhys. Lett. 40 (1997) 667.
- [37]F. Arias de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, Phys. Rev. B 50 (1994) 4248.;C. Quesne, V.M. Tkachuk (2004)
- [38]R. De, R. Dutt, U. Sukhatme, J. Phys. A: Math. Gen. 25 (1992) L843.

- [39] R. Dutt, A. Khare, Y.P. Varshni, *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1995) L107.
- [40] L. Jiang, L.Z. Yi, C.S. Jia, *Phys. Lett. A* 345 (2005) 279;
- [41] C.S. Jia, L.Z. Yi, Y. Sun, *J. Math. Chem.* (2006), doi:10.1007/s10910-006-9206-6;
- [42] L. Jiang, L.Z. Yi, C.S. Jia, *Phys. Lett. A* 345 (2005) 279.
- [43] B. Bagchi, C. Quesne, R. Roychoudhury, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 (2005) L647; B. Roy, P. Roy, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 (2005) 11019;
- [44] O. Mustafa, S.H. Mazharimousavi, *Czech. J. Phys.* 56 (2006) 967.
- [45] C.S. Jia, A. de Souza Dutra, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 (2006) 11877.  
*Physics Letters A* 369 (2007) 274–279
- [46] O Von Roos, *Phys. Rev. B* 27 (1983) 7547
- [47] Gora et D. William Gora T and Williams F *Phys. Rev.* 1770(1969) 1179
- [48] Ben Daniel et Duke D.J Ben Daniel and C.B Duke *Phys. Rev.* 152(1966) 683
- [49] Zhu et Kroemer Zhu Q-G and Kroemer H. *Phys. Rev B* 27 (1983) 3519
- [50] Li et Kuhn Li T and Kuhn K.J. *Phys. Rev B* 47 (1993) 12760,
- [51] Almeida C A S *Phys Lett. A* 275(2000) 25
- [52] M. Bentaiba, L. Chetouani, T.F. Hammann, *Z. Naturforsch. A* 47 (1992) 1013;
- [53] M. Bentaiba, L. Chetouani, T.F. Hammann, *Phys. Lett. A* 198 (1994) 433;
- [54] Kh. Nouicer, L. Chetouani, *Acta Phys. Slovaca* 49 (1999) 309;
- [55] L. Chetouani, A. Chouchaoui, T.F. Hammann, *Phys. Lett. A* 204 (1995) 79.
- [56] M. Bentaiba, L. Chetouani, A. Mazouz, *Phys. Lett. A* 295 (2002) 13.
- [57] [12] C.M. Bender, J. Brod, A. Refig, M. Reuter, quant-ph/0402026.
- [58] C.M. Bender, G.V. Dunne, *J. Math. Phys.* 40 (1999) 4616.
- [59] M. Znojil, *Phys. Lett. A* 285 (2001) 7