

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك
Département d'Électronique



Mémoire de Projet de Fin d'Études

présenté par

Bourahla Meriem

&

Bachenine Hadjer

pour l'obtention du diplôme master en Electronique option Traitement d'Information et
Système Electronique

Thème

FILTRAGE PARTICULAIRE APPLICATION A LA DEMODULATION DE PHASE

Proposé par : Mr.Guessoum Abderrezak

Année Universitaire 2012-2013

Remerciements

Tout d'abord nous tenons à remercier Dieu Clément et Miséricordieux de nous avoir donné la force et la volonté d'achever ce travail.

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire **TSI** (Traitement du **S**ignal et d'**I**magerie) de l'université Saad Dahleb Blida. Sous la direction de Monsieur **G**uessoum Abderrezak Professeur d'Enseignement Supérieur à l'USDB. Qu'il trouve ici l'expression de nos sincères reconnaissances pour ses précieuses directives, sa très grande disponibilité, ses fructueux conseils, son suivi constant, ses qualités humaines. On ne vous remerciera jamais assez Monsieur !!

Nos remerciements s'adressent également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger notre travail.

Nous adressons aussi nos remerciements à nos familles ainsi que tous ceux qui ont contribué à notre formation.

Enfin nous voudrions adresser nos vifs remerciements à tous nos enseignants du Département d'Electronique qui ont contribué à notre formation.

Une Pensée va à Notre regretté professeur «Mr. Belkacemi » Paix à son Ame.

Résumé: Le filtre de Kalman étendu (EKF) et le filtre à particules (PF) sont deux outils largement utilisés pour résoudre les problèmes d'estimation Etat non-linéaires.

L'EKF est une approche sous-optimale, qui met en œuvre un filtre de Kalman pour un système dynamique qui résulte de la linéarisation de la dynamique de filtre non-linéaire original autour des estimations de l'état précédent. Mais elle a été définie sur l'hypothèse que les deux, le processus et le capteur bruits, sont de distribution gaussienne. Le filtre à particules est un schéma plus général et ne nécessite pas que les bruits soient gaussiens, car les probabilités a posteriori sont représentés par un jeu d'échantillons pondérés sélectionnés de manière aléatoire. Ce travail a pour but de comparer l'utilisation du filtre à particules et l'EKF pour un problème d'estimation d'un signal de communication modulé en phase avec un bruit gaussien.

Mots clés : Kalman étendu, Filtre à particule, estimation, bayes, Monte carlo

Abstract: The Extended Kalman Filter (EKF) and the Particle Filter (PF) are two widely used tools for solving non-linear state estimation problems.

The EKF is a sub-optimal approach, which implements a Kalman filter for a system dynamics that result from the linearization of the original non-linear filter dynamics around the previous state estimates. But it has been defined on the assumption that both, the process and sensor noises, are Gaussian distributed. The particle filter is a more generalized scheme and does not require either of the noises to be Gaussian, as the posterior probabilities are represented by a set of randomly chosen weighted samples. This work aims to compare the use of the particle filter and the EKF for estimation problem, that is, estimating communication signal modulated in phase by Gaussian noise.

Keywords : extended Kalman filter, particle filter, estimation, bayes, Monte carlo

Listes des acronymes et abréviations

Vecteur / matrice :

x_k	Vecteur d'état.
\hat{x}_k	Estimation de l'état.
w_k	Vecteur bruit d'état (bruit blanc gaussienne).
Q_k	Matrice de covariance de bruit de l'état.
y_k	Vecteur de mesure.
v_k	Vecteur bruit de mesure (bruit blanc gaussienne).
R_k	Matrice de covariance de bruit de mesure.
x_k^i	Vecteur d'état de la particule i à l'itération k .
N	Nombre de particules.
ω_k^i	Poids normalisé de la particule i à l'itération k .

Probabilité :

$E[x]$	Espérance de la loi de x
$var[x]$	$E[(x - E(x))^2]$ Variance de la loi de x
$cov[x]$	$E[(x - E[x])(x - E[x])^*]$ covariance de la loi de x
$p(x)$	Densité de la loi de la variable x i .e. $p(X \in x) = \int_x x p(x) dx$
$q(x)$	Densité d'importance (proposal distribution)

Abréviation :

PF	filtre à particule (particule filtre)
EKF	filtre de Kalman étendu (Extended Kalman filtre)
SIR	échantillonnage importante (Sampling important Resampling)
PDF	la densité de probabilité

Table des matières

Introduction générale	1
➤ Chapitre I : ESTIMATION	3
1.0- Estimation	3
1.1-Introduction	3
1.2-Etat Estimation problème	3
1.3-Statistiques bayésienne et estimation bayésienne	6
1.3.1 - Statistiques bayésienne	6
1.3.2 - Estimation bayésienne réursive	8
➤ Chapitre II : Filtre Kalman	10
2.0- Filtre du Kalman	10
2.1 –Introduction	10
2.2-Dérivation du filtre de Kalman	11
2.2.1- Formulation de problème	11
2.2.2- Expression de la matrice de covariance	14
2.2.3- Expression du gain du filtre de Kalman	16
2.2.4- Initialisation du filtre du Kalman	18
2.2.5- Notion d'innovation	19
2.3- Mise en œuvre du filtre du Kalman	19
2.3.1- Prédiction	19
2.3.2- Estimation	20
2.4- Linéarisation des problèmes non linéaires	21
2.4.1- Le Filtre de Kalman Linéarisé	22
➤ Chapitre III : Filtre de Kalman étendu	26
3.0- Filtre de Kalman étendu	26
3.1- Introduction	26
3.2- Développement du filtre de Kalman étendu	26
3.2.1- Définition du problème	27

3.2.2- Développement du Filtre	27
3.2.3- Résumé	34
3.3- Quelques aspects du filtre de Kalman étendu	37
3.4- Propriétés du filtre de Kalman étendu	38
3.5 Conclusion	39
➤ Chapitre III : Filtre à particule	40
4.0- Filtre à particule	40
4.1- Introduction	40
4.2- Estimation Bayésienne séquentielle	40
4.2.1- Prédiction	41
4.2.2- Mise à jour	42
4.3- Méthodes de Monte-Carlo	43
4.4- Principe du filtrage particulaire	44
4.4.1- choix de la densité d'importance	45
4.4.2- Analyse de l'erreur particulaire	47
4.4.3- Ré-échantillonnage	51
4.4.4- Illustration du fonctionnement	54
➤ Chapitre VI : Simulation et résultats	56
5.1- Introduction	56
5.2- Algorithmes des filtres appliqués	56
5.2.1-Méthode du filtre de Kalman étendu	56
5.2.2-Méthode du filtrage particulaire	57
5.3- Application	59
5.3.1- Model système	59
5.3.1-Erreur de variation pour différente valeur d'amplitude	59
5.3.2- Estimation du PF pour différentes valeurs de N ...	62
5.3.3- Erreur de variance pour différents valeurs d'initialisation	64
➤ CONCLUSION	67

Liste des figures

Figure 1.1. Prévission et mise à jour des mesures pour le filtre bayésien.....	6
Figure 2.1 Modèle d'observation	12
Figure 2.2 Un cycle pour l'estimation de l'état d'un système linéaire.....	21
Figure 2.3 Trajectoire nominale et réelle pour un filtre linéarisé de Kalman	23
Figure 3.1 Structure de suivi du filtre de kalman étendu	35
Figure 3.2 Formulaire de contrôle théorique du filtre de Kalman étendu.....	36
Figure 3.3 Extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaire.....	37
Figure 4.1 Figure à gauche-incohérence entre la fonction de vraisemblance et la densité prédite, Figure à droite-cohérence entre la fonction de vraisemblance et la densité prédite	49
Figure 4.2 Représentation schématique de ré-échantillonnage systématique	53
Figure 4.3 étapes du filtrage particulaire pour un système de dimension	55
Figure 5.1 Alg. : Filtre de Kalman étendu pour le système non linéaire	57
Figure 5.2 Alg : Filtre à particule pour le système non linéaire	58
Figure 5.3 Erreur de variance pour différents amplitudes appliqué a l'EKF	60
Figure 5.4 Erreur de variance pour différents amplitudes appliqué au PF	61
Figure 5.5 Erreur de variance pour différents nombre de particules N	62
Figure 5.6 Densité de probabilité pour différent nombre de particules	64
Figure 5.7 Erreur de variance de l'EKF et le PF pour une initialisation $X_0= 0$	65
Figure 5.8 Erreur de variance de l'EKF et le PF pour une initialisation $X_0= 1$	65
Figure 5.9 Erreur de variance de l'EKF et le PF pour une initialisation $X_0= 2$	66

Introduction générale

Les problèmes d'estimation d'Etat, également désignés comme des problèmes inverses non stationnaires [28], sont d'un grand intérêt dans innombrables applications pratiques. Dans ces types de problèmes, les données mesurées disponibles sont utilisées conjointement avec la connaissance a priori sur les phénomènes physiques et les appareils de mesure, de manière à produire séquentiellement des estimations des variables dynamiques désirées. Ceci est réalisé de telle manière que l'erreur est minimisée statistiquement [29]. Par exemple, la position d'un aéronef peut être estimée grâce à l'intégration dans le temps des composantes de vitesse depuis le départ. Cependant, elle peut aussi être mesurée avec un système GPS et d'un altimètre.

Les Problèmes d'estimation de l'Etat traitent de la combinaison de la prédiction du modèle (intégration des composantes de vitesse qui contiennent des erreurs dues aux mesures de vitesse) et le GPS et mesures altimétriques qui sont aussi incertains, en vue d'obtenir des estimations plus précises des variables du système (avons la position).

Les problèmes d'estimation d'état sont résolus avec des filtres dits bayésiens [28,29]. Dans l'approche bayésienne statistique, on tente d'utiliser toutes les informations disponibles afin de réduire le montant de l'incertitude inhérente à un problème d'inférence ou de prise de décision. Comme de nouvelles informations sont obtenues, ces dernières sont combinées avec l'information précédente pour former la base des méthodes statistiques. Le mécanisme formel utilisé pour combiner les nouvelles informations avec les informations déjà disponibles est connu comme le théorème de Bayes [28,30].

La méthode de filtrage bayésien la plus connue est le filtre de Kalman. Toutefois, l'application du filtre de Kalman est limitée à des modèles linéaires avec des bruits gaussiens.

Des extensions du filtre de Kalman ont été développées dans le passé pour les cas les moins restrictives en utilisant des techniques de linéarisation. De même, les méthodes de Monte Carlo ont été développées afin de représenter la densité a posteriori en termes d'échantillons aléatoires et les poids associés.

Ces méthodes de Monte Carlo, généralement désignées comme les filtres à particules, entre autres désignations trouvés dans la littérature, ne nécessitent pas les hypothèses restrictives du filtre de Kalman. Par conséquent, les filtres à particules peuvent être appliqués à des modèles non-linéaires avec des erreurs non gaussiennes. Dans ce mémoire, nous présentons le filtre de Kalman et le ré-échantillonnage importance (SIR) algorithme d'échantillonnage du filtre à particules. Nous développerons un système d'estimation de ces deux filtres en faisant la comparaison pour un système démodulé en phase en présence d'un bruit Gaussien.

Chapitre 1 Estimation

1.0 Estimation

1.1 Introduction

L'estimation est le problème de la détermination de la valeur d'une quantité inconnue d'une ou plusieurs observations. Le problème d'estimation se pose chaque fois que nous utilisons un «capteur» pour obtenir des mesures qui se rapportent à une quantité d'intérêt. Il peut s'agir, par exemple, de la détermination de l'emplacement d'un avion sur la base de mesures radar de distance, il peut être la concentration d'un produit chimique particulier dans une installation de traitement sur la base de mesures chimiques. Le problème d'estimation est central pour relier le monde réel comme observé par un capteur pour les décisions que nous prenons sur la façon de contrôler ou d'influencer notre environnement.

La théorie d'estimation c'est toutes les techniques permettant d'estimer un ensemble de paramètres inconnus X à partir d'un ensemble d'observations Y contenant l'information sur X [23].

1.2 Problème d'estimation d'état :

Afin de définir le problème d'estimation d'état, nous considérons un modèle pour l'évolution du vecteur x sous la forme

$$x_k = f_k(x_{k-1}, w_{k-1}) \dots\dots\dots(1.1.a)$$

Où l'indice $k = 1, 2, \dots$, désigne un instant de temps t_k dans un problème dynamique. Le vecteur $x \in R^{n_x}$ est appelé le vecteur d'état et contient les variables à estimer dynamiquement. Ce vecteur progresse selon le modèle d'évolution de l'état donné par

l'équation (1.1.a), où f est, dans le cas général, une fonction non linéaire des variables d'état x et du vecteur de bruit d'état $w \in R^{n_w}$

Considérez également que les mesures $y_k \in R^{n_y}$ sont disponibles à t_k , $k = 1, 2, \dots$. Les mesures sont associées à des variables d'état x , éventuellement non linéaire, la fonction h , est sous la forme :

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \dots\dots\dots(1.1.b)$$

Où $v \in R^{n_w}$ est le bruit de mesure. L'équation (1.1.b) est considérée comme le modèle d'observation (mesure).

Le problème de l'estimation de l'état vise à obtenir des informations sur x_k basé sur le modèle d'évolution de l'état (1.1.a) et sur les mesures $y_{1:k} = \{y_i, i = 1, \dots, k\}$ proposée par le modèle d'observation (1.1.b) [1 -2]

Le modèle évolution-observation donnée par les équations (1.a,b) sont basés sur les hypothèses suivantes [1,4]

(i) La séquence x_k pour $k = 1, 2, \dots$, est un processus de Markov, qui est

$$p(x_k | x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = p(x_k | x_{k-1}) \dots\dots\dots(1.2.a)$$

(ii) La séquence de y_k pour $k = 1, 2, \dots$, est un processus de Markov par rapport à l'historique de x_k , qui est,

$$p(y_k | x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = p(y_k | x_{k-1}) \dots\dots\dots(1.2.b)$$

(iii) la séquence x_k dépend des observations passées uniquement à travers sa propre histoire, c'est-à-dire

$$p(x_k | x_{k-1}, y_{1:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}) \dots\dots\dots(1.2.c)$$

En outre, pour le modèle évolution-observation donnée par les équations (1.a, b) il est supposé que pour $i \neq j$ les vecteurs de bruit v_i et v_j , ainsi que w_i et w_j , sont mutuellement indépendants et aussi indépendants des états initiales x_0 . Les vecteurs v_j , et w_j , sont également indépendants pour tout i et j [1].

Différents problèmes peuvent être considérés dans le modèle d'évolution-observation ci-dessus, à savoir [1]:

- (i) Le problème de la prédiction, soucieux de la détermination de $p(x_k|y_{1:k-1})$
- (ii) Le problème de filtrage, soucieux de la détermination de $p(x_k|y_{1:k})$;
- (iii) Le problème de lissage décalage-fixe, soucieux de la détermination de $p(x_k|y_{1:k+p})$, où $p \geq 1$ est le décalage fixe;
- (iv) Tout le problème de lissage de domaine, concernés par la détermination de $p(x_k|y_{1:k})$, où $y_{1:k} = \{y_i, i = 1, \dots, k\}$ est la séquence complète de mesures.

Le présent mémoire ne traite que du problème de filtrage. En supposant que $p(x_0|y_0) = p(x_0)$ est disponible, la densité de probabilité a posteriori $p(x_k|y_{1:k})$ est alors obtenue avec des filtres bayésiens en deux étapes : prévision et mise à jour, comme illustré dans la figure 1.1.

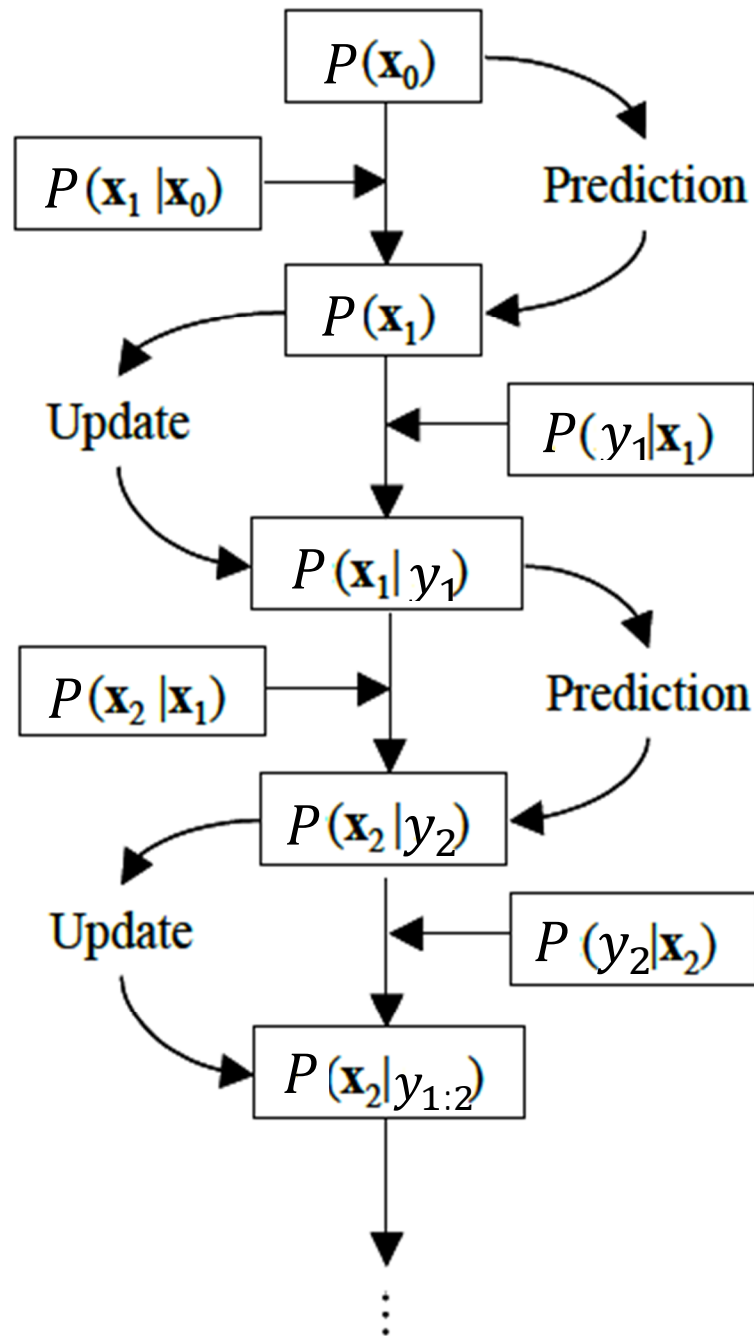


Figure 1.1. Prévision et mise à jour des mesures pour le filtre bayésien [1]

1.3 Statistiques Bayésiennes et estimation bayésienne

1.3.1. Statistiques Bayésiennes

La théorie bayésienne [6] est une branche de la théorie mathématique des probabilités qui permet de modéliser l'incertitude sur le monde et les résultats qui nous intéressent en intégrant connaissances préalables et données d'observation.

L'analyse bayésienne, l'interprétation de la probabilité comme la mesure conditionnelle de l'incertitude, sont des méthodes populaires pour résoudre les problèmes inverses. Avant de nous lancer dans l'inférence bayésienne et l'estimation bayésienne, nous présentons d'abord quelques statistiques fondamentales bayésiennes.

Définition : (Statistiques bayésiennes suffisantes) Soit $p(x|y)$ représentent la densité de probabilité de x conditionnés sur des mesures y . la statistique, $\Psi(x)$, est dit être "suffisante" si la distribution de x conditionnellement à Ψ ne dépend pas de y . En d'autres termes, $p(x|y) = p(x|y')$ pour tous deux ensembles y et y' t.q. $\Psi(y) = \Psi(y')$.

La statistique suffisante $\Psi(x)$ contient l'ensemble des informations portées par x sur y . Le théorème de Rao-Blackwell dit que quand un estimateur est évalué sous un espace convexe, la procédure optimale ne dépend que des statistiques suffisantes. Principe d'exhaustivité et le Principe de vraisemblance sont deux principes axiomatiques dans l'inférence bayésienne [6]

Il existe trois types de problèmes insolubles inhérents liés à la statistique bayésienne [5]:

- **Normalisation:** Étant donné $p(x)$ préalable et la probabilité $p(y|x)$, la partie postérieure $p(x|y)$ est obtenu par le produit préalable et la probabilité divisée par un facteur de normalisation, comme

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_x p(y|x)p(x)dx} \dots\dots\dots(1.3)$$

- **Marginalisation:** Compte tenu de la conjointe a posteriori (x, z) , la marginale a posteriori est

$$p(x|y) = \int_z p(x, z|y) dz, \dots\dots\dots(1.4)$$

- **Attente:** Compte tenu du pdf conditionnelle, certaines statistiques moyennes d'intérêts peuvent être calculées

$$\mathbb{E}_{p(x|y)}[f(x)] = \int_{\mathcal{X}} f(x) p(x|y) dx. \dots\dots\dots(1.5)$$

Dans l'inférence bayésienne [9], toutes les incertitudes (y compris les États, les paramètres qui sont soit variant dans le temps ou lois a priori fixes mais inconnues) sont traitées comme des variables aléatoires. La déduction (l'inférence) est effectuée dans le cadre bayésien donnant toutes les informations disponibles. Et l'objectif de l'inférence bayésienne est d'utiliser les lois a priori et les connaissances de cause à effet, quantitativement et qualitativement, pour déduire la probabilité conditionnelle, compte tenu des observations finis. Il ya généralement trois niveaux de raisonnement probabiliste dans l'analyse bayésienne (soi-disant analyse bayésienne hiérarchique):

- (i) en commençant par le choix du modèle, compte tenu des données et des lois a priori assumées;
- (ii) l'estimation des paramètres pour ajuster les données compte tenu du modèle et des lois a priori ;
- (iii) la mise à jour des paramètres préalable.

L'optimisation et l'intégration sont deux problèmes numériques fondamentaux qui se posent dans l'inférence statistique. [7], [8].

1.3.2 Estimation bayésienne réursive

Dans ce qui suit, nous présentons un calcul détaillé de l'estimation bayésienne récursif, ce qui sous-tend le principe de filtrage bayésien séquentiel. Deux hypothèses sont utilisées pour calculer le filtre bayésien récursif:

- (i) Les États suivent un premier processus d'ordre Markovien

$$p(x_n | x_{0:n-1}) = p(x_n | x_{n-1}); \dots\dots\dots(1.6)$$

- (ii) les observations sont indépendantes des états donnés.

Pour simplifier la notation, on note \mathcal{Y}_n comme un ensemble d'observations $y_{0:n} := \{y_0, \dots, y_n\}$; soit $p(x_n | y_n)$ dénotent le pdf conditionnelle de x_n . De la règle de Bayes nous avons

$$\begin{aligned}
 p(x_n | \mathcal{Y}_n) &= \frac{p(\mathcal{Y}_n | x_n) p(x_n)}{p(\mathcal{Y}_n)} \\
 &= \frac{p(y_n, \mathcal{Y}_{n-1} | x_n) p(x_n)}{p(y_n, \mathcal{Y}_{n-1})} \\
 &= \frac{p(y_n | \mathcal{Y}_{n-1}, x_n) p(\mathcal{Y}_{n-1} | x_n) p(x_n)}{p(y_n | \mathcal{Y}_{n-1}) p(\mathcal{Y}_{n-1})} \\
 &= \frac{p(y_n | \mathcal{Y}_{n-1}, x_n) p(x_n | \mathcal{Y}_{n-1}) p(\mathcal{Y}_{n-1}) p(x_n)}{p(y_n | \mathcal{Y}_{n-1}) p(\mathcal{Y}_{n-1}) p(x_n)} \\
 &= \frac{p(y_n | x_n) p(x_n | \mathcal{Y}_{n-1})}{p(y_n | \mathcal{Y}_{n-1})} \dots\dots\dots(1.7)
 \end{aligned}$$

Comme est montré en (1.7), la densité a posteriori $p(x_n | \mathcal{Y}_n)$ est décrite par trois termes:

- préalable : $p(x_n | \mathcal{Y}_{n-1})$, définit la connaissance du modèle

$$p(x_n | \mathcal{Y}_{n-1}) = \int p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | \mathcal{Y}_{n-1}) dx_{n-1} \dots\dots\dots(1.8)$$

Ou $p(x_n | x_{n-1})$ est la densité de transition de l'état.

- vraisemblance: la probabilité $p(\mathcal{Y}_n | x_n)$ détermine pour l'essentiel le modèle de bruit de mesure dans l'équation (1.1.b).

- Preuve: Le dénominateur implique une intégrale

$$p(y_n | \mathcal{Y}_{n-1}) = \int p(y_n | x_n) p(x_n | \mathcal{Y}_{n-1}) dx_n \dots\dots\dots(1.9)$$

Le calcul ou le rapprochement de ces trois termes sont les essences du filtrage bayésien et d'inférence.

Chapitre 2 Filtre Kalman

2.0 Filtre de Kalman :

2.1 Introduction :

Le filtre de Kalman représente une extension de la théorie de Wiener applicable aux signaux non stationnaires sous leur forme temporelle en présence des conditions initiales et d'entrées déterministes. Il résout le problème de filtrage linéaire et se présente sous la forme d'un ensemble d'équations récurrentes plus faciles à résoudre sur calculateur numérique, ce qui explique le succès remarquable de l'approche proposée par Kalman. Sa réalisation fournit non seulement l'estimée optimale, mais aussi la variance de l'erreur de l'estimation. C'est un observateur donnant la prédiction ou l'estimation du vecteur d'état. Lorsque les variances des bruits sont connues, c'est le meilleur observateur linéaire, de plus, si les bruits sont blancs gaussiens, linéaires ou non, c'est lui dont la variance de l'erreur d'estimation est la plus faible [10].

Le filtre de Kalman s'applique au système dynamique linéaire, continu ou discret, où le bruit de mesure est blanc.

L'estimation de Kalman et ses nombreuses dérivées ont été développées avec succès dans le monde de l'aérospatial à de nombreux problèmes, comme la poursuite radar, l'estimation de trajectoires d'orbites...

Après la parution des publications fondamentales de Kalman et Bucy pour la théorie de filtrage linéaire, un nombre très important de travaux fut consacré à ce problème, chaque auteur décrivant son algorithme en exploitant des méthodes comme les moindres carrées, le maximum de vraisemblance et d'autres méthodes statistiques classiques. Cependant, ces méthodes statistiques laissent dans l'ombre la structure probabiliste du problème de filtrage, structure qui est fondamentale [11].

2.2 Dérivation du filtre de Kalman :

2.2.1 Formulation du problème :

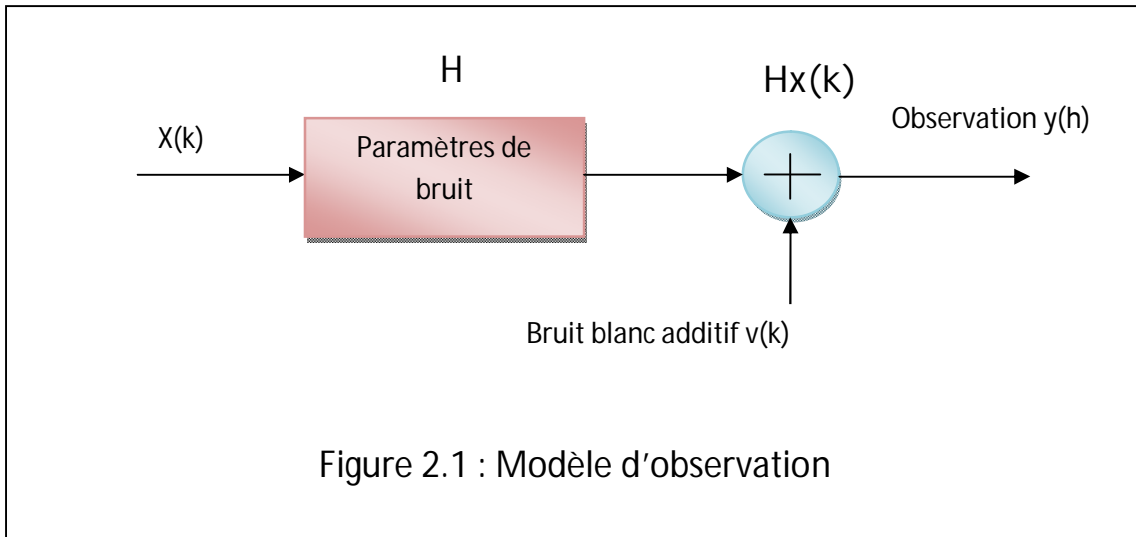
Le filtre de Kalman est caractérisé par les mesures qui sont générés par un système dynamique qui est présenté par un certain modèle [12]. Mathématiquement le filtre de Kalman peut être formulé par deux équations :

L'équation d'état, qui présente l'évolution d'état d'un objet durant le temps et l'équation de mesure, qui relie les mesures à cet état.

Nous considérons un système dynamique linéaire et discret, l'équation d'état est donnée par :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \dots \dots \dots (2.1)$$

- x_k est le vecteur d'état qui incluse les quantités à estimer, comme la position, la vitesse et l'accélération.
- F_k est la matrice de transition. Elle décrit l'évolution dans le temps du vecteur d'état, en absence de l'entrée de contrôle et du bruit.
- u_k est l'entrée de contrôle ou le processus générateur, elle est supposée être connue.
- G_k est une matrice qui décrit comment l'entrée à l'instant k , contribue au vecteur d'état à l'instant $k+1$.
- w_k est le bruit de processus supposé indépendant, blanc et de moyenne nulle.



$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \dots \dots \dots (2.2)$$

Où

- \mathbf{H}_k est la matrice de mesure.
- \mathbf{v}_k est le bruit de mesure supposé indépendant de \mathbf{w}_k , blanc et de moyenne nulle.

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0} \dots \dots \dots (2.3)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0} \dots \dots \dots (2.4)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_l^T] = \mathbf{0}; \quad \forall k, l \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = \mathbf{Q}_k \delta(k, l) \dots \dots \dots (2.6)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] = \mathbf{R}_k \delta(k, l) \dots \dots \dots (2.7)$$

et

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{0} \quad \forall k \dots \dots \dots (2.8)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{0} \quad \forall k \dots \dots \dots (2.9)$$

Q_k et R_k étant respectivement les matrices de covariance du bruit de processus et du bruit de mesure.

Le problème consiste à estimer le vecteur d'état \mathbf{x}_k compte tenu des informations disponibles à l'instant n , postérieur, antérieur, ou identique à l'instant k .

On peut considérer les cas suivants: [13]

- $k=n$: il s'agit dans ce cas de déterminer une estimée de l'état, compte tenu de toutes les mesures disponibles à l'instant considéré n . c'est le cas du filtrage.
- $k < n$: en utilisant les mesures disponibles jusqu'à l'instant n , on essaye d'estimer l'état à un instant k antérieur à n . on fait alors un lissage ou une interpolation.
- $k > n$: il s'agit dans ce cas d'estimer la valeur du vecteur d'état à un instant k dans le futur. c'est ce qu'on appelle la prédiction ou l'extrapolation.

Nous noterons pour ces différents cas, l'estimée par: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/n}$, c'est à dire l'estimée à l'instant $k+1$ compte tenu des informations disponibles à l'instant n .

L'estimée optimal au critère de l'erreur quadratique moyenne minimale est donnée par l'espérance mathématique conditionnelle notée comme suit: [14]

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/n} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \dots \dots \dots (2.10)$$

L'évolution du vecteur d'état estimée $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/n}$, est caractérisée par la matrice de transition F_k . En effet en substituant l'équation (2.1) dans (2.10), on obtient:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] = \mathbf{F}_k \mathbf{E}[\mathbf{x}_k/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] + \mathbf{G}_k \mathbf{E}(\mathbf{u}_{k+1}/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) + \mathbf{E}[\mathbf{v}_{k+1}/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] \dots \dots \dots (2.11)$$

Soit encore :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k \dots \dots \dots (2.12)$$

Étant donné que :

$$\mathbf{E} \left[\begin{matrix} \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{y}(1) \end{matrix}, \dots, \mathbf{y}_k \right] = \mathbf{0} \dots \dots \dots (2.13)$$

l'objectif est d'avoir une estimation réursive du vecteur d'état qui, à partir d'une estimation à l'instant k, nous fournisse une nouvelle estimation à l'instant k+1, en utilisant la mesure à cet instant. On adoptera une estimation linéaire de la forme:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}] \dots \dots \dots (2.14)$$

La relation (2.14) exprime le fait que la nouvelle estimée du vecteur d'état à l'instant k+1, est une mise à jour de l'estimée à l'instant k. cette mise à jour tient compte de l'écart entre la mesure effective et la mesure prédite.

Nous devons donc déterminer le poids \mathbf{K}_{k+1} à accorder à cette mise à jour de sorte que l'erreur au sens des moindres carrés, entre le vecteur d'état et son estimée, soit minimale. Le paramètre \mathbf{K}_{k+1} est appelé gain du filtre de Kalman.

L'erreur d'estimation est définie par:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1} \dots \dots \dots (2.15)$$

Il s'agit donc de minimiser la quantité:

$$\mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1})^T] = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] \dots \dots (2.16)$$

$\mathbf{P}_{k+1/k+1}$ est appelée matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Le filtre de Kalman est donc un filtre à minimum de variance. C'est par abus de langage que l'on parle de minimiser cette quantité matricielle. Nous y reviendrons dans le prochain paragraphe.

2.2.2 Expression de la matrice de covariance : $\mathbf{P}_{k+1/k+1}$ [13]

Nous allons, à partir des équations d'état et de la relation linéaire de l'estimation exprimer la matrice de covariance $\mathbf{P}_{k+1/k+1}$ en fonction du gain \mathbf{K}_{k+1} .

Reprenons les relations (2.1) et (2.12).

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k$$

En les soustrayant, il vient:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \left[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k} \right] + \mathbf{w}_k \dots \dots \dots (2.17)$$

D'après la relation (2.16) définissant $\mathbf{P}_{k+1/k+1}$, on a:

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})^T] \dots \dots \dots (2.18)$$

D'où, en prenant les espérances mathématiques des deux membres de l'équation (2.17)

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \mathbf{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k})^T] \mathbf{F}_k^T + \mathbf{E}[(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T)] \dots \dots \dots (2.19)$$

Cette relation peut se simplifier en tenant compte de la relation (2.6) et du fait que:

$$\mathbf{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})^T] = \mathbf{P}_{k/k} \dots \dots \dots (2.20)$$

Il vient alors:

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \dots \dots \dots (2.21)$$

Nous devons à ce stade du calcul exprimer $\mathbf{P}_{k+1/k+1}$ en fonction de $\mathbf{P}_{k+1/k}$.

Pour ce faire, reprenons l'expression (2.15) de l'erreur $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ et remplaçons l'estimée $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}$ par son expression donnée par la relation (2.14), on obtient:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}) - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \dots \dots \dots (2.22) \end{aligned}$$

$$\text{Ou } \mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}^T] \dots \dots \dots (2.23)$$

Si on substitue l'expression (2.22) dans la relation (2.23), il vient en tenant compte de la relation que: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k+1} = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}) (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})^T] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})^T \\ & + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{E}[\mathbf{v}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T] \mathbf{K}_{k+1}^T \dots \dots \dots (2.24) \end{aligned}$$

Soit encore:

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \dots \dots (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k+1} = & \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T + \\ & \mathbf{K}_{k+1} \left[\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \right] \mathbf{K}_{k+1}^T \dots \dots \dots (2.26) \end{aligned}$$

2.2.3 Expression du gain du filtre de Kalman: [13]

Nous devons chercher l'expression du gain \mathbf{K}_{k+1} qui minimise le critère

$$\mathbf{J} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}^T \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}] \dots \dots \dots (2.27)$$

Notons au passage que nous avons:

$$\text{Trace } \mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}^T \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}] = \mathbf{J} \dots \dots \dots (2.28)$$

La relation (2.26) est une forme quadratique en \mathbf{K}_{k+1} . Nous obtiendrons la valeur du gain optimal en résolvant l'équation suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{K}(\mathbf{k})} = \mathbf{0}$$

L'optimisation de ce problème peut être faite de différentes manières. L'une de ces manières se base sur les formules du calcul différentiel des matrices. En utilisant les relations suivantes:

$$\frac{\partial(\text{Trace}(AB))}{\partial A} = B^T \quad (\mathbf{AB} \text{ doit être carré}) \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\frac{\partial(\text{Trace}(ACA^T))}{\partial A} = 2AC \quad (\mathbf{C} \text{ doit être symétrique}) \dots\dots\dots (2.30)$$

On obtient

$$\frac{\partial(\text{Trace } \mathbf{P}_{k+1/k+1})}{\partial \mathbf{K}_{k+1}} = -2(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k})^T + 2\mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}) \dots\dots\dots (2.31)$$

Soit encore :

$$-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (2.32)$$

D'où

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \dots\dots\dots (2.33)$$

Et

$$\mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \dots\dots\dots (2.34)$$

Dans le cas continu, cette équation prend la forme d'une équation différentielle de Ricatti.

C'est pour cette raison, et par analogie que la relation (2.34) est appelée équation de Ricatti discrète.

Elle peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{P}_{k+1/k} \dots\dots\dots (2.35)$$

La matrice $\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k}$ est définie positive ou à la rigueur définie semi-positive.

Nous pouvons en outre écrire l'équation récurrente de mise à jour de l'estimation comme suit:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k[\text{terme de correction}] \dots \dots \dots (2.36)$$

Il apparaît ainsi que:

1. Pour \mathbf{R}_{k+1} constant, si \mathbf{P}_{k+1} faible, le gain sera faible. Ainsi, on fera davantage confiance à l'estimation obtenue à partir du modèle. Si par contre \mathbf{P}_{k+1} est élevé, ce qui traduit notre faible confiance dans le modèle K sera élevé et la contribution du terme de correction pondéré par le gain, sera plus forte. On se basera donc davantage sur les mesures pour la mise à jour.
2. Pour \mathbf{P}_{k+1} constant, si \mathbf{R}_{k+1} est faible, nous aurons des mesures faiblement bruitées. La valeur élevée du gain donnera plus de poids aux mesures. Si \mathbf{R}_{k+1} est élevé, le gain sera faible et le poids du deuxième terme sera plus faible.

2.2.4 Initialisation du filtre de Kalman: [15]

Pour pouvoir utiliser l'ensemble des équations récurrentes constituant le filtre de Kalman, on doit choisir les conditions initiales: $\hat{\mathbf{x}}_{0/0}$ et $\mathbf{P}_{0/0}$. On peut prendre:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0/0} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0] \dots \dots \dots (2.37)$$

$$\mathbf{P}_{0/0} = \mathbf{P}_0 = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0/0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0/0})^T] \dots \dots \dots (2.38)$$

Le choix des valeurs initiales est délicat. En effet, un mauvais choix de \mathbf{x}_0 , c'est à dire, à la limite une valeur arbitraire n'est pas catastrophique en ce sens que l'algorithme excité par les mesures apportera les corrections nécessaires. Par contre le traitement des mesures n'améliore pas la covariance de l'erreur au fur et à mesure de son traitement.

2.2.5 Notion d'innovation: [14]

Reprenons l'équation (2.14) de l'estimation récursive:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}]$$

\mathbf{y}_{k+1} représente la mesure effective et $\mathbf{H}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ la prédiction de la mesure. Si cette prédiction est parfaite, la correction apportée par la quantité sera nulle.

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} \dots \dots \dots (2.39)$$

On appelle $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ l'innovation. On peut montrer que si le filtre est optimal, le processus $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ est un bruit blanc de valeur moyenne nulle, c'est à dire qu'il ne contient plus d'informations pouvant enrichir la mise à jour de l'état. Ainsi, en testant la « blancheur » de l'innovation on peut apprécier le degré d'optimalité et donc les performances du filtre.

2.3 Mise en œuvre du filtre de Kalman [13]

On peut résumer l'ensemble des équations récurrentes constituant le filtre de Kalman dans les étapes suivantes :

2.3.1 Prédiction:

1. A partir du vecteur d'état à l'instant antérieur, la prédiction du vecteur d'état est effectuée selon:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k \dots \dots \dots (2.40)$$

2. Calcul de la matrice de covariance correspondant à l'état prédit:

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \dots \dots \dots (2.41)$$

2.3.2 Estimation:

1. Mise à jour du vecteur d'état:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \dots \dots \dots (2.42)$$

Où $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ est l'innovation définie en (2.39) et \mathbf{K}_{k+1} est le gain de Kalman donnée par:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \dots \dots \dots (2.43)$$

$\mathbf{S}(k + 1)$ est appelée matrice de covariance de l'innovation. Elle est donnée par:

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \dots \dots \dots (2.44)$$

2. Mise à jour de la matrice de covariance de l'état estimé

La matrice de covariance correspondant à (2.42) est calculée selon:

$$\mathbf{P}_{k+1/k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \dots \dots \dots (2.45)$$

On peut résumer l'algorithme de filtre de Kalman dans le cycle suivant en cinq étapes de base qui sont:

- Extrapoler la position et la vitesse de la cible.
- Extrapoler les erreurs d'estimation
- Calculer le gain du filtre.
- Mettre à jour l'estimation de vecteur d'état.
- Mettre à jour l'estimation pour les nouvelles données (mesure).

Le schéma de la figure 2.2 résume un cycle de calcul de l'état estimé d'un système linéaire par le filtre de Kalman.

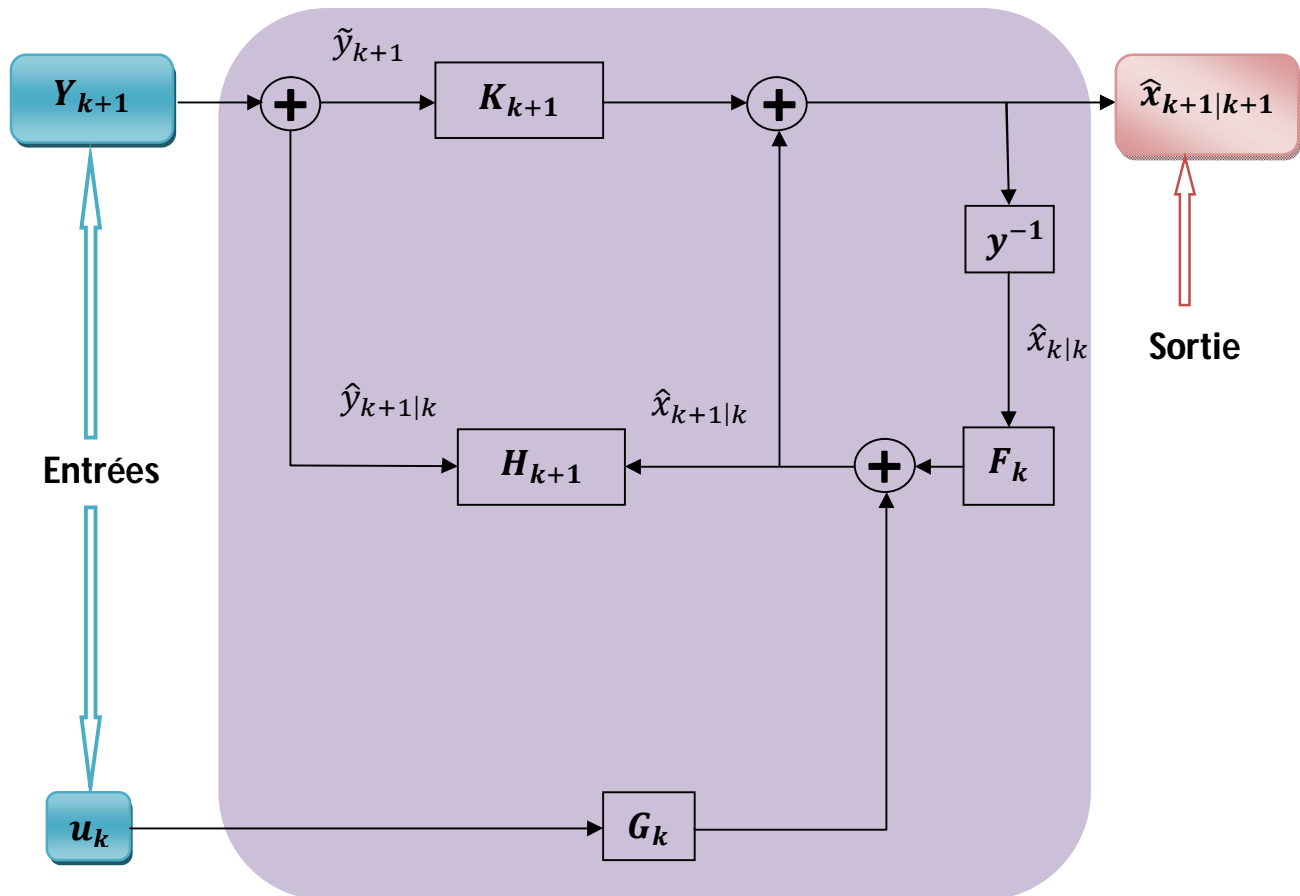


Figure 2.2 : Un cycle pour l'estimation de l'état d'un système linéaire (filtre de Kalman)

2.4 Linéarisation des problèmes non linéaires :

La formulation du filtre présentée plus tôt est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux sont non-linéaires. Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, et puis d'appliquer le filtre standard de Kalman pour obtenir l'état du système. Un certain nombre de méthodes ont été développées dans cette direction; ici nous discuterons deux de telles approches.

Quand la linéarisation se fait autour d'une certaine trajectoire nominale dans l'espace d'état qui ne dépend pas des données de mesure, le filtre résultant s'appelle le Filtre Linéarisé de Kalman [16]. La linéarisation autour d'une trajectoire (estimée) qui est continuellement mise à jour avec les estimations d'état résultant des mesures

s'appelle le Filtre de Kalman Etendu [17]. Dans les deux cas, la linéarisation est faite en utilisant la série de Taylor.

Nous examinerons maintenant ces approches en détail.

2.4.1 Le Filtre de Kalman Linéarisé : [16]

Dans le filtre linéarisé de Kalman, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu

Considérez un modèle non-linéaire d'un système défini comme suit :

Modèle du processus:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \dots \dots \dots (2.46)$$

Modèle de mesure:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \dots \dots \dots (2.47)$$

Là où, f et h sont des fonctions non-linéaires connues, u_k est la fonction (le vecteur) de commande et w_k et v_k sont des processus de type bruit blanc non corrélés. La non-linéarité peut résider soit dans le modèle du processus soit dans le modèle de mesure soit dans les deux fonctions.

Supposez qu'une trajectoire approximative x_k^{nom} (figure. 2.3) puisse être déterminée par un quelconque moyen; celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle) x_k peut être écrite en termes de x_k^{nom} et d'erreur δx_k comme suit:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^{nom} + \delta \mathbf{x}_k \dots \dots \dots (2.48)$$

Les équations, (2.46) et (2.47) deviennent alors :

$$x_k^{nom} + \delta x_k = f(x_{k-1}^{nom} + \delta x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \dots \dots \dots (2.49)$$

$$z_k = h(x_k^{nom} + \delta x_k) + v_k \dots \dots \dots (2.50)$$

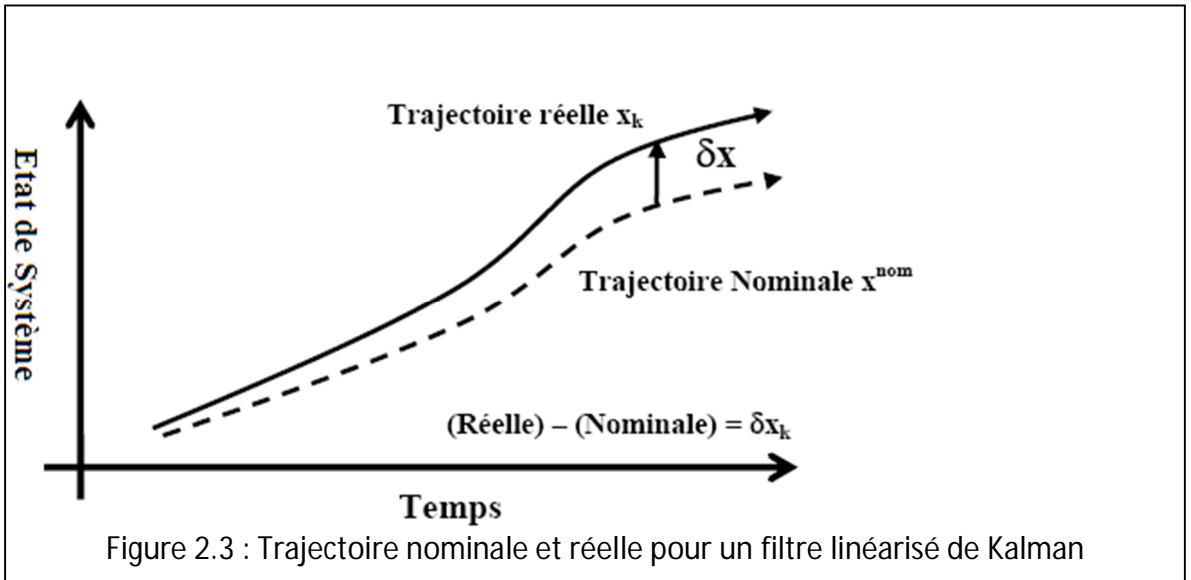


Figure 2.3 : Trajectoire nominale et réelle pour un filtre linéarisé de Kalman

Par l'application de l'expansion de série de Taylor dans l'équation (2.49) et en supposant que δx_k est petit, nous allons réaliser une expansion de f autour de x_k^{nom} en ne gardant que le terme de premier ordre :

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k = \left(f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + \text{terme d'ordres élevés} \right) + w_{k-1} \dots \dots \dots (2.51)$$

$$f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) = x_k^{nom}$$

$$\Rightarrow \delta x_k \approx F_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1} \text{ (La dynamique linéarisée)} \dots \dots \dots (2.52)$$

Où

$$F_{k-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_{k-1}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=x^{nom}} \dots \dots \dots (2.53)$$

et $w_k \sim N(0, Q_k)$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

Maintenant, la mesure peut être également linéarisé en utilisant l'expansion de la série de Taylor, en linéarisant h à x_k^{nom} et négligeant les termes d'ordres supérieurs.

$$y_k = \left(h(x_k^{nom}) + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}} \cdot \delta x_k + \text{terme d'ordres élevés} \right) + v_k \dots \dots (2.54)$$

$$\delta y_k \approx y_k - h(x_k^{nom})$$

$$\Rightarrow \delta y_k \approx H_k \delta x_k + v_k (\text{Équation de mesure linéarisée}) \dots \dots \dots (2.55)$$

Où

$$H_k = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x=x_k^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=x_k^{nom}} \dots \dots \dots (2.56)$$

$$v_k \sim N(0, R_k)$$

Les équations (2.52) et (2.55) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. Il est clair que ce modèle de système linéarisé peut être utilisé pour mettre en application un filtre linéarisé de Kalman parce que la relation de la dynamique d'erreur et la relation associée de mesure des erreurs sont devenues linéaires. Ici, nous estimons seulement la valeur d'incrément « l'erreur », ainsi les valeurs réelles de l'état seront l'incrément estimé plus la valeur nominale à l'instant même. Aussi F et H sont obtenus en évaluant les matrices de dérivées partielles (les Jacobiennes de f et h) le long de la trajectoire nominale. La position nominale (ou le vecteur d'état) peut changer avec chaque étape du processus récursif, ainsi les termes de H et de F peuvent être variables avec le temps et doivent être recalculés avec chaque étape récursive.

Le problème dans la linéarisation autour de la trajectoire nominale est que la déviation de la trajectoire réelle de la trajectoire nominale tend à augmenter avec le temps. À mesure que la déviation augmente, les poids des termes d'ordres supérieurs dans l'expansion de la série de Taylor de la trajectoire augmentent.

La déviation de la trajectoire de référence est le vecteur d'état et les mesures dans le modèle linéaire sont les vraies mesures moins celles qui ont été prédites par la trajectoire nominale en l'absence du bruit.

Ce type de filtre est difficile d'utilisation pour des missions prolongées parce qu'après une certaine durée, la trajectoire de référence peut diverger en un point où l'hypothèse linéaire n'est plus valide à travers la variation du vecteur d'état.

Enfin, le filtrage linéarisé a l'avantage de permettre généralement une exécution en temps réel, cependant, il est moins robuste vis-à-vis des approximations non-linéaires des erreurs que le filtrage étendu. Un remède simple et efficace pour le problème de la déviation réside dans le remplacement de la trajectoire nominale par la trajectoire estimée, ce qui ramène au filtre de Kalman étendu.

Chapitre 3 Filtre Kalman Etendu

3.0 Filtre de Kalman étendu

3.1 Introduction

L'une des hypothèses de base du filtre de Kalman est qu'il est conçu pour évaluer les états d'un système linéaire à partir de mesures qui sont une fonction linéaire des états. Malheureusement, dans beaucoup de situations où nous voudrions utiliser un filtre de Kalman, nous avons un modèle de système non-linéaire et / ou une équation de mesure non linéaire. Plus précisément, le modèle du système est une fonction non-linéaire des états et / ou les mesures sont des fonctions non linéaires des Etats. Habituellement, les non-linéarités ne s'étendent pas aux perturbations du réseau et du bruit de mesure [17].

En raison de l'attractivité du filtre de Kalman, les concepteurs ont mis au point un ensemble mathématiques à fin d'étendre la théorie du filtre de Kalman à des situations où le modèle du système et / ou du modèle de mesure sont des fonctions non-linéaires de l'Etat. Le filtre de Kalman qui en résulte est appelé le filtre de Kalman étendu.

Comme nous le verrons, le filtre de Kalman étendu utilise le modèle de système non-linéaire pour le calcul de l'estimation de l'état prédit, $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$, Et le modèle de mesure non-linéaire pour former la mesure prédite, $\hat{\mathbf{y}}(k+1|k)$. L'état lissé prend alors la forme du filtre de Kalman.

3.2 Développement du filtre de Kalman étendu

3.2.1 Définition du problème [18]

Nous nous intéressons à la conception d'un filtre de Kalman pour un système défini par l'équation d'état

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{G}(k)\mathbf{w}(k) \dots\dots\dots(3-1)$$

et l'équation de mesure

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1)) + \mathbf{v}(k+1) \dots\dots\dots(3-2)$$

Dans les équations (3-1) et (3-2) $\mathbf{w}(k)$ et $\mathbf{v}(k+1)$ sont des bruit blanc aléatoires, décorrélés de moyenne nulle. Ils sont également corrélés avec l'état initial, $\mathbf{x}(0)$. $\mathbf{G}(k)$ est une matrice connue et $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$ et $\mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1))$ des vecteurs connus, et fonctions non linéaires de l'état.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(k)) \\ f_2(\mathbf{x}(k)) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \\ f_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3-3)$$

et

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1)) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}(k+1)) \\ h_2(\mathbf{x}(k+1)) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}(k+1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1(k+1), x_2(k+1), \dots, x_n(k+1)) \\ h_2(x_1(k+1), x_2(k+1), \dots, x_n(k+1)) \\ \vdots \\ h_m(x_1(k+1), x_2(k+1), \dots, x_n(k+1)) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3-4)$$

3.2.2 Développement du Filtre [18]

Nous commençons par la séparation de $\mathbf{x}(k)$ et $\mathbf{y}(k+1)$ en deux parties :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0(k) + \delta\mathbf{x}(k) \dots\dots\dots(3-5)$$

et

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}_0(k+1) + \delta\mathbf{y}(k+1) \dots\dots\dots(3-6)$$

$\mathbf{x}_0(k)$ et $\mathbf{y}_0(k+1)$ sont appelés les valeurs *nominales* de $\mathbf{x}(k)$ et $\mathbf{y}(k+1)$, Respectivement, tandis que $\delta\mathbf{x}(k)$ et $\delta\mathbf{y}(k+1)$ sont appelés *perturbations*.

Ensuite, nous développons $f(\mathbf{x}(k))$ et $h(\mathbf{x}(k))$ en une série de Taylor sur $\mathbf{x}_0(k)$ et $\mathbf{x}_0(k+1)$ comme

$$f(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}(k))\Big|_{\mathbf{x}_0(k)} + \frac{\partial f(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)}\Big|_{\mathbf{x}_0(k)} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0(k)] + \text{H.O.T.} \dots\dots\dots (3-7)$$

et

$$h(\mathbf{x}(k)) = h(\mathbf{x}(k))\Big|_{\mathbf{x}_0(k)} + \frac{\partial h(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)}\Big|_{\mathbf{x}_0(k)} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0(k)] + \text{H.O.T.} \dots\dots\dots (3-8)$$

Nous abandonnons ensuite les termes (HOT), en admettant que $\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0(k) = \delta\mathbf{x}(k)$ on aura :

$$f(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}_0(k)) + \mathbf{F}(k) \delta\mathbf{x}(k) \dots\dots\dots (3-9)$$

et

$$h(\mathbf{x}(k)) = h(\mathbf{x}_0(k)) + \mathbf{H}(k) \delta\mathbf{x}(k) \dots\dots\dots (3-10)$$

Dans les équations (3-9) et (3-10), $\mathbf{F}(k)$ et $\mathbf{H}(k)$ sont définis par

$$\mathbf{F}(k) = \frac{\partial f(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)}\Big|_{\mathbf{x}_0(k)} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-11)$$

et

$$\mathbf{H}(k) = \frac{\partial h(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)}\Big|_{\mathbf{x}_0(k)} = \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial x_1 & \partial h_1 / \partial x_2 & \dots & \partial h_1 / \partial x_n \\ \partial h_2 / \partial x_1 & \partial h_2 / \partial x_2 & \dots & \partial h_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial h_m / \partial x_1 & \partial h_m / \partial x_2 & \dots & \partial h_m / \partial x_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-12)$$

où la notation $\partial g_i / \partial x_j$ est interprété comme

$$\left. \frac{\partial g_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))}{\partial x_j(k)} \right|_{\substack{x_1(k)=x_{10}(k) \\ \vdots \\ x_n(k)=x_{n0}(k)}} \dots\dots\dots(3-13)$$

Nous voulons ouvrir une parenthèse pour discuter de la notation que nous avons utilisé [19]. Une des idées fausses associées aux équations (3-5) et (3-6) est que nous avons une certaine connaissance de l'état nominal et de mesure, $x_0(k)$ et $y_0(k+1)$, et peut donc assurer que les perturbations, $\delta x(k)$ et $\delta y(k+1)$, sont petit. Ceci, à son tour, nous permet d'affirmer que le H.O.T des développements en série de Taylor de $f(x(k))$ et $h(x(k+1))$ sont petits et peuvent donc être ignorés. En fait, nous n'avons pas connaissance des états nominaux ou des mesures (si nous le faisons, nous n'aurions pas besoin de construire un filtre de Kalman!). Nous introduisons la notation comme un outil mathématique qui facilite notre dérivation. Nous *supposons* provisoirement que nous connaissons l'état nominal et de mesure et qu'ils sont proches de l'état et de la mesure réelle. Cela nous permet d'affirmer que les perturbations sont petites et donc que le premier ordre d'approximations des développements en série de Taylor sont valables. Nous ne pouvons pas déterminer la validité de notre hypothèse au préalable. Pour cette raison nous ne pouvons pas toujours être sûr que le filtre de Kalman étendu que nous avons conçu va bien travailler.

Revenons à notre développement, nous utilisons les équations (3-5), (3-6), (3-9) et (3-10) pour réécrire le système et les équations de mesure :

$$x_0(k+1) + \delta x(k+1) = f(x_0(k)) + F(k)\delta x(k) + G(k)w(k) \dots\dots\dots(3-14)$$

et

$$y_0(k+1) + \delta y(k+1) = h(x_0(k+1)) + H(k+1)\delta x(k+1) + v(k+1) \dots\dots\dots (3-15)$$

Nous avons ensuite séparer l'équation (3-14) et (3-15) en deux ensembles d'équations. Les *équations* nominaux et les équations de perturbation. Les équations nominaux sont :

$$\mathbf{x}_0(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(k)) \dots\dots\dots (3-16)$$

et

$$\mathbf{y}_0(k+1) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0(k+1)) \dots\dots\dots (3-17)$$

et les équations de perturbation sont

$$\delta \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k) \delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \dots\dots\dots (3-18)$$

et

$$\delta \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{H}(k+1) \delta \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \dots\dots\dots (3-19)$$

Pour l'instant nous fixons les équations nominales de côté et nous construisons un filtre de Kalman pour le modèle de perturbation. Cela se traduit par les équations

$$\delta \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{F}(k) \delta \hat{\mathbf{x}}(k) \dots\dots\dots (3-20)$$

$$\delta \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{H}(k+1) \delta \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \dots\dots\dots (3-21)$$

$$\delta \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \delta \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1) [\delta \mathbf{y}(k+1) - \delta \hat{\mathbf{y}}(k+1|k)] \dots\dots\dots (3-22)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{H}^T(k+1) [\mathbf{H}(k+1) \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1} \dots\dots (3-23)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{G}^T(k) \dots\dots\dots (3-24)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1) \mathbf{H}(k+1)] \mathbf{P}(k+1|k) \dots\dots\dots (3-25)$$

Avec les équations (3-20) à (3-25) nous avons un moyen d'estimer la part de la perturbation de l'Etat. Bien que ce soit un résultat intéressant, ce n'est pas ce que nous voulons. Nous voulons $\hat{\mathbf{x}}(k)$, L'estimation de $\mathbf{x}(k)$; Pas $\delta \hat{\mathbf{x}}(k)$, L'estimation de $\delta \mathbf{x}(k)$.

Prenons $\hat{\mathbf{x}}(k)$. Sur la base de nos résultats précédents, nous pouvons écrire $\hat{\mathbf{x}}(k)$ comme

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}_0(k) + \delta \hat{\mathbf{x}}(k) \dots\dots\dots (3-26)$$

Dans cette équation $\mathbf{x}_0(k)$ est l'état nominal discuté plus tôt et $\delta\hat{\mathbf{x}}(k)$ est l'estimation de que nous venons de dérivés. Équation (3-26) montre que pour former une estimation de l'état, nous ajoutons une estimation de l'état perturbé à l'état nominal (nous ignorons bien le fait que nous ne connaissons pas vraiment l'état nominal).

Si l'on considère l'erreur quadratique moyenne entre $\mathbf{x}(k)$ et $\hat{\mathbf{x}}(k)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} e_x^2 &= E \left\{ \left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \right]^T \left[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \right] \right\} \\ &= E \left\{ \left[\delta\mathbf{x}(k) - \delta\hat{\mathbf{x}}(k) \right]^T \left[\delta\mathbf{x}(k) - \delta\hat{\mathbf{x}}(k) \right] \right\} = e_{\delta x}^2 \dots\dots\dots (3-27) \end{aligned}$$

Rappelons que les résultats du filtre de Kalman en $\delta\hat{\mathbf{x}}(k)$ qui minimise $e_{\delta x}^2$. Etant donné que $e_x^2 = e_{\delta x}^2$, nous avons tendance à sauter à la conclusion que nous avons également réduit e_x^2 . Ce n'est pas une conclusion tout à fait exacte. Nous pouvons dire que nous avons minimisé e_x^2 sous la contrainte que $\hat{\mathbf{x}}(k)$ est donnée par l'équation

(3-26) et $\delta\hat{\mathbf{x}}(k)$ est défini par l'équation (3-20) par (3-25). Si nous devions lever ces contraintes, nous pourrions imaginer trouver un $\hat{\mathbf{x}}(k)$ de telle sorte que $e_{x\min}^2 < e_{\delta x\min}^2$. Cependant, nous n'avons pas de moyen général de trouver $\hat{\mathbf{x}}(k)$ qui minimise vraiment e_x^2 . Par conséquent, faute de mieux, nous allons adopter l'équation (3-26). Comme indiqué précédemment, la qualité de cette décision ne peut être testée qu'en construisant le filtre de Kalman étendu et de le tester [20].

Si nous combinons l'équation 3-26 avec nos résultats antérieurs, nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}_0(k+1) + \delta\hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(k)) + \mathbf{F}(k)\delta\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k+1) \left[\delta\mathbf{y}(k+1) - \delta\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \right] \dots\dots\dots (3-28) \end{aligned}$$

et si nous développons dans une série de Taylor nous obtenons

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(k)) + \mathbf{F}(k) \left[\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}_0(k) \right] + \text{H.O.T.} \dots\dots\dots (3-29)$$

Après suppression des termes d'ordre supérieur (HOT) et reconnaissant $\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}_0(k)$ comme $\delta\hat{\mathbf{x}}(k)$ nous obtenons

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(k)) + \mathbf{F}(k)\delta\hat{\mathbf{x}}(k) \dots\dots\dots(3-30)$$

On remplace 3-30 dans l'équation 3-28 pour obtenir

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{K}(k+1)[\delta\mathbf{y}(k+1) - \delta\hat{\mathbf{y}}(k+1|k)] \dots\dots\dots(3-31)$$

Nous passons ensuite notre attention sur le dernier terme de l'équation (3-31). Si nous utilisons l'équation (3-6) on pourra écrire la mesure prédite comme

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{y}_0(k+1) + \delta\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \dots\dots\dots(3-32)$$

nous pouvons réécrire le dernier terme

$$\delta\mathbf{y}(k+1) - \delta\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \dots\dots\dots(3-33)$$

et l'équation d'estimation d'état comme

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k)] \dots\dots\dots(3-34)$$

Nous notons que nous avons manipulé l'équation d'estimation d'état dans la forme que nous voulons. Autrement dit, nous avons une équation pour l'estimation d'état à la phase $k+1$ en termes de l'estimation de l'état à l'étape k , La mesure à la phase $k+1$ et la mesure prédite à la phase $k+1$. Nous devons maintenant effectuer quelques manipulations plus mathématiques pour compléter notre formulation du filtre de Kalman étendu [18].

Nous commençons par examiner la fonction $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k))$. Si nous voulions prédire la valeur de $\mathbf{x}(k+1)$ sachant seulement $\hat{\mathbf{x}}(k)$ nous devrions utiliser l'équation d'état d'origine de l'équation (3-1). Cependant, cette équation contient la perturbation du système $\mathbf{w}(k)$, que nous ne connaissons pas. Notre meilleur choix pour son remplacement serait $E\{\mathbf{w}(k)\}$, Ce qui est égal à zéro. Ainsi, on se retrouve avec l'équation

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) \dots\dots\dots(3-35)$$

pour l'état prédit, à l'étape $k + 1$ compte tenu de l'estimation de l'état à l'étape k .

Nous pouvons caractériser l'erreur entre l'état prédit et réelle

$$\Delta \mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{F}(k) [\delta \mathbf{x}(k) - \delta \hat{\mathbf{x}}(k)] + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \dots \dots \dots (3-36)$$

Avec cela, nous pouvons écrire la covariance $\Delta \mathbf{x}(k+1|k)$ comme

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{G}^T(k) \dots \dots \dots (3-37)$$

Nous examinons ensuite la mesure prédite, $\hat{\mathbf{y}}(k+1|k)$. Nous pouvons rapporter la mesure prévue à l'état prédit par le modèle de mesure de l'équation (3-2). Cependant, nous ne connaissons pas $\mathbf{v}(k+1)$. nous allons utiliser $E\{\mathbf{v}(k+1)\} = 0$. Ainsi, nous obtenons

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) \dots \dots \dots (3-38)$$

Le dernier sujet que nous devons prendre en considération concerne les matrices $\mathbf{F}(k)$ et $\mathbf{H}(k+1)$. Rappelons que ces matrices sont donnés par

$$\mathbf{F}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\mathbf{x}_0(k)} \dots \dots \dots (3-39)$$

et

$$\mathbf{H}(k+1) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1))}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \right|_{\mathbf{x}_0(k+1)} \dots \dots \dots (3-40)$$

Pour calculer $\mathbf{F}(k)$ et $\mathbf{H}(k+1)$ nous avons besoin de $\mathbf{x}_0(k)$ et $\mathbf{x}_0(k+1)$, que nous ne connaissons pas. Au lieu de cela, nous utilisons $\hat{\mathbf{x}}(k)$ au lieu de $\mathbf{x}_0(k)$ et au lieu de $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$. Nous pouvons offrir aucune justification pour ces substitutions sauf pour dire qu'ils sont les seuls dont nous disposons.

3.2.3 Résumé [21]

Nous résumons maintenant les résultats de cette section dans la présentation suivante du filtre de Kalman étendu. Compte tenu des modèles d'état et de mesure des équations (3-1) et (3-2), ainsi que les propriétés de $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}(k+1)$ et $\mathbf{x}(0)$ indiquées précédemment, un filtre de Kalman étendu pouvant être utilisés pour estimer l'état du système est donnée par les équations

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k)] \dots\dots\dots(3-41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) \dots\dots\dots(3-42)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) \dots\dots\dots(3-43)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1)[\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1} \dots\dots\dots(3-44)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{G}^T(k) \dots\dots\dots(3-45)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)]\mathbf{P}(k+1|k) \dots\dots\dots(3-46)$$

$$\mathbf{F}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k)} \text{ et } \dots\dots\dots(3-47)$$

$$\mathbf{H}(k+1) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1))}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)} \dots\dots\dots(3-49)$$

Les équations (3-41) à (3-49) constituent la forme de suivi du filtre de Kalman étendu. La forme théorique de commande du filtre de Kalman étendu est définie par les équations

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k))] \dots\dots\dots(3-50)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{H}^T(k)[\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1} \dots\dots\dots(3-51)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{F}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{G}^T(k) \dots\dots\dots(3-52)$$

$$\mathbf{F}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k)} \text{ et } \dots\dots\dots(3-53)$$

$$\mathbf{H}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k)} \dots\dots\dots(3-54)$$

La dérivation de la forme théorique de commande du filtre de Kalman étendu est laissée au lecteur. Schémas de principe du suivi et de contrôle des formes de la théorie du filtre de Kalman étendu sont contenus dans les figures (3-1) et (3-2).

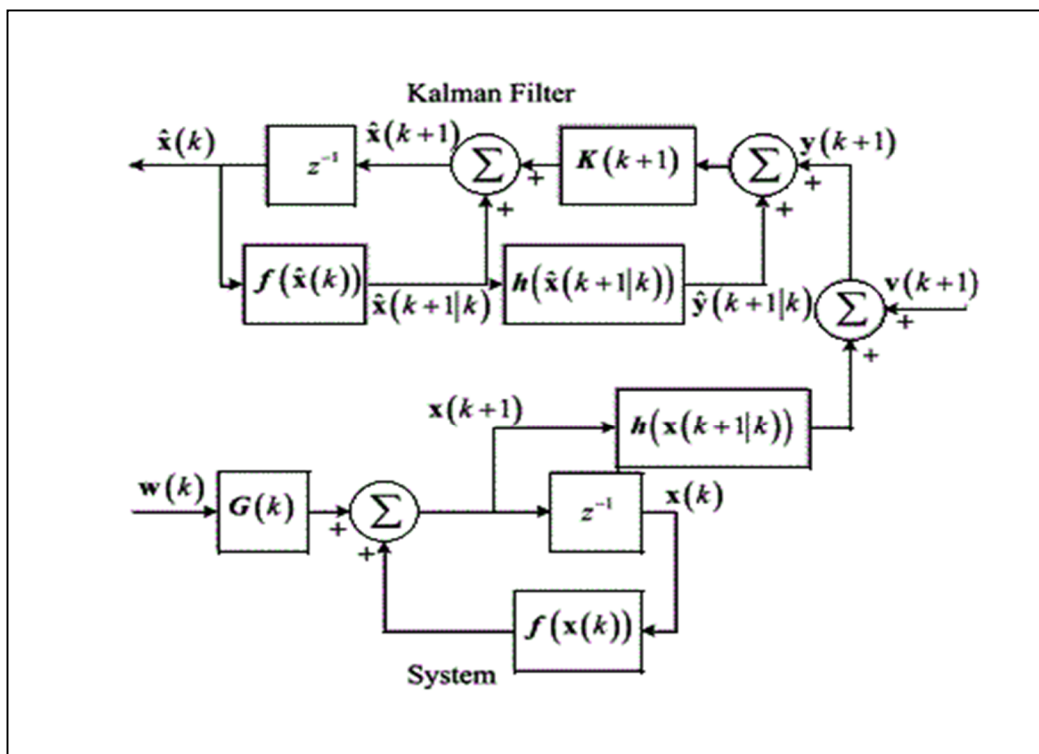


FIGURE 3.1 structure de suivi du filtre de Kalman étendu [21]

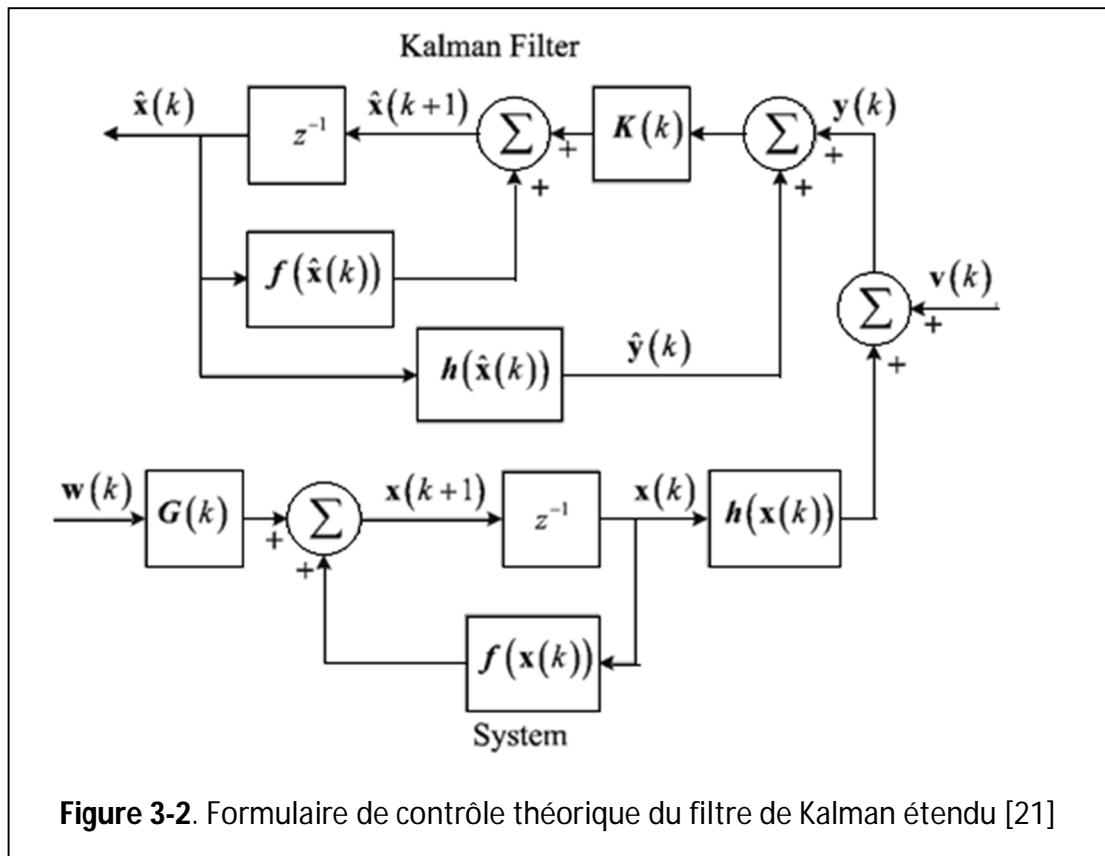


Figure 3-2. Formulaire de contrôle théorique du filtre de Kalman étendu [21]

L'avantage du EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes. Néanmoins, le filtre linéarisé et le filtre étendu de Kalman sont utilisés dans des applications différentes, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients. La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure $h(x^-)$, et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de la trajectoire corrigée (filtre étendu) ou de la trajectoire nominale (filtre linéarisé). Lorsque $h(x^-)$ est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielles, le filtre est alors un filtre de Kalman linéarisé ordinaire. Si $h(x^-)$ est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de Kalman étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables.

Figure (3.3) montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire [22].

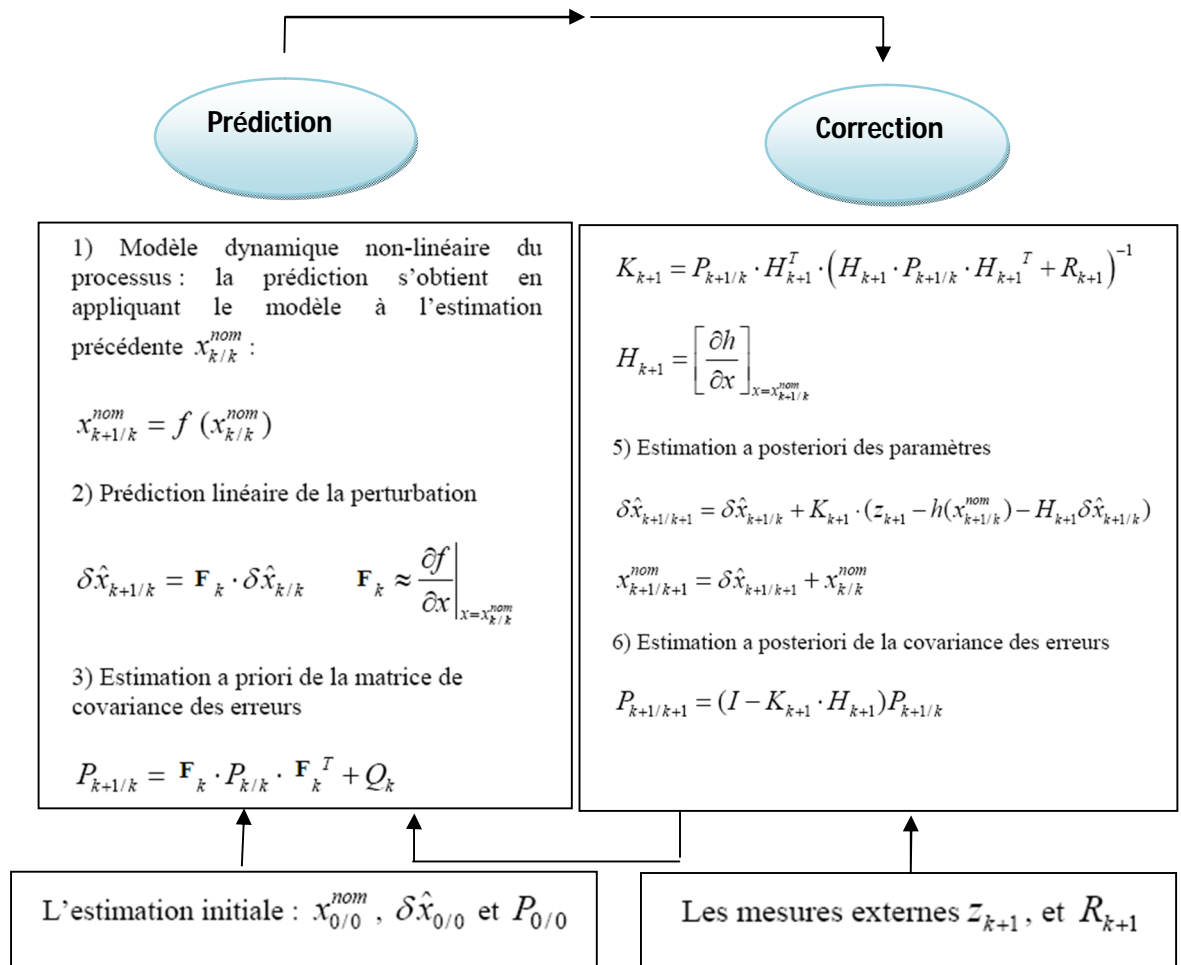


Figure 3.3 : Extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaire

3.3 Quelques aspects du filtre de Kalman étendu [24] :

Le filtre de Kalman étendu est probablement le filtre le plus largement répandu pour un système non linéaire. Cependant, il présente certains inconvénients et défauts :

1. Une opération centrale et essentielle effectuée dans l'EKF est la propagation d'une variable gaussienne (GRV) par la dynamique du système. Dans l'EKF, la distribution d'état est approximée par un GRV, qui est alors propagé analytiquement par une linéarisation du premier ordre du système non linéaire. Les termes négligés dans la linéarisation peuvent être relativement grands ce qui peut présenter de grandes erreurs

2. dans l'estimation de la moyenne et de la covariance a posteriori du GRV transformé.

Ceci peut mener à une performance sub-optimale et parfois à la divergence du filtre.

3. Le coût calculatoire de l'EKF est intensif par rapport au filtrage linéarisé de Kalman. Puisque la linéarisation est faite autour des estimations obtenues à partir du filtre, nous ne pouvons pas calculer le paramètre de filtre à l'avance, ce qui augmente la charge de calcul en temps réel.

4. La dérivation des matrices Jacobiennes n'est pas triviale dans la plupart des applications et introduisent souvent ensuite des difficultés d'implémentation significatives.

3.4 Propriétés du filtre de Kalman étendu :

Nous prenons maintenant le temps de discuter les propriétés du filtre de Kalman étendu. Nous commençons par noter que le filtre de Kalman étendu est intuitivement séduisant. Il a la structure de base du filtre de Kalman normale mais intègre également les fonctions non linéaires du système et des modèles de mesure. Comme il tient compte de ces fonctions non linéaires, le filtre de Kalman étendu est un filtre non linéaire. Autrement dit, l'équation de prédiction de l'Etat et les équations de mesure prédites sont non-linéaire. De ce fait l'équation d'estimation d'état est aussi une fonction non linéaire de l'estimation de l'état précédent [24].

Bien que pas aussi évident, les éléments de $F(k)$ et $H(k)$ sont également des fonctions non-linéaires des estimations de l'état. Cela signifie que le gain de Kalman et matrices de covariance sont également des fonctions non-linéaires de l'estimation d'état.

Les différentes étapes sont intuitivement séduisantes, comme le sont les équations qui en résultent, ne sont pas toujours mathématiquement rigoureux. Par exemple, nous n'avons pas de justification rigoureuse mathématique (ou physique)

pour ignorer les termes d'ordre supérieur dans les différents développements en série de Taylor . Pour cette raison, nous devons prendre soin de la mise en œuvre des filtres de Kalman étendu. Il est fort possible que nous pourrions concevoir un filtre de Kalman étendu instable. Dans d'autres cas, le filtre de Kalman étendu peut être stable mais faire un mauvais travail d'estimation des états du système. Après avoir fait ces déclarations, nous constatons également que les concepteurs ont très bien réussi à construire des filtres de Kalman étendu qui fonctionnent très bien. Ils sont stables, elles produisent des estimations de l'état précises, leurs matrices de covariance sont représentatives des erreurs réelles entre l'estimation et états réels, et ils ont une bonne réponse transitoire. Toutefois, cela ne se fait pas par l'application aveugle des équations du filtre de Kalman étendus. Il résulte de sélection très minutieuse du système et des modèles de mesure et de réglage du filtre via la matrice.

3.5 Conclusion :

Le chapitre I et II a été consacré à la présentation du filtre de Kalman. Au début on a présenté le filtre de Kalman dans le cadre linéaire, et après on a expliqué deux méthodes utilisé pour la linéarisation des problèmes non linéaire.

Il faut noter que L'estimateur le plus largement répandu pour les systèmes non linéaires est probablement le filtre de Kalman étendu (EKF).

Chapitre 4 Filtre à Particule

4.0 Filtre à particule

4.1 Introduction :

Le filtre particulaire connaît actuellement un fort développement dans de nombreux domaines dont les sciences de l'ingénieur et les sciences techniques de l'information et de la communication tel que la localisation, la robotique, le traitement du signal audio ou encore la communication numérique.

Le filtrage particulaire ou méthode de Monte Carlo séquentielle [31] est une technique très efficace pour estimer séquentiellement l'état caché d'un système dynamique non linéaire. Le calcul de cette estimation dépend de la densité de probabilité a posteriori de l'état caché sachant les observations.

Cependant, dans le cas d'un système dynamique non linéaire cette densité ne peut pas être déterminée analytiquement. Il faut utiliser des approximations numériques. Le filtrage particulaire approxime la densité a posteriori avec des échantillons pondérés, appelés particules, qui évoluent dans le temps selon les lois dynamiques du système considéré. Cette évolution permet l'estimation séquentielle de l'état caché.

On peut présenter le filtrage particulaire classique de 2 façons différentes[32].

4.2 Estimation bayésienne séquentielle [31-32]:

Soit un modèle d'observation donné par l'équation de mesure $y_k = h_k(x_k, y_k)$ et un modèle d'évolution donné par $x_k = f_k(x_{k-1}, u_{k-1})$. La fonction h_k est appelée fonction d'observation et la fonction f_k fonction d'évolution. Nous nous plaçons dans un cadre bayésien où l'objectif est de calculer la loi a posteriori $p(x_k | y_k)$ [5] (GPS)

On peut ensuite en déduire des estimations ponctuelles de x_k

L'algorithme permettant d'estimer le vecteur d'état x_k récursivement opère en deux étapes : une étape de prédiction où l'on prédit la valeur de x_k à partir de x_{k-1} et de f_k , et une étape de correction où l'on ajuste la valeur de x_k à partir de l'observation y_k reçue à l'instant k

4.2.1 Prédiction :

On connaît $p(x_k / x_{k-1})$ donnée par le modèle d'évolution et $p(x_{k-1} | y_{1:k-1})$, la loi a posteriori à l'instant $k-1$, avec $Y_{1:k-1}$ l'ensemble des mesures obtenues jusqu'à l'instant $k-1$. Le but est d'obtenir la densité de probabilité $p(x_k | y_{1:k-1})$.

Considérons $p(x_k, x_{k-1} | y_{1:k-1})$ comme la densité

conjointe (conditionnelle) alors on a :

$$p(x_k | y_{1:k-1}) = \int_{x_{k-1}} p(x_k, x_{k-1} | y_{1:k-1}) dx_{k-1} \dots \dots \dots (4.1)$$

Soit en appliquant la loi de Bayes :

$$p(x_k | y_{1:k-1}) = \int_{x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}; y_{1:k-1}) p(x_{k-1} | y_{1:k-1}) dx_{k-1} \dots \dots \dots (4.2)$$

Comme x_{k-1} contient déjà les informations apportées par $y_{1:k-1}$, il vient :

$$p(x_k | x_{k-1}; y_{1:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}) \dots \dots \dots (4.3)$$

D'où

$$p(x_k | y_{1:k-1}) = \int_{x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | y_{1:k-1}) dx_{k-1} \dots \dots \dots (4.4)$$

Si on approche :

$$p(x_{k-1} | y_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k-1}^i \delta(x_{k-1} = x_{k-1}^i) \dots \dots \dots (4.5)$$

On a alors

$$p(x_k | y_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k-1}^i p(x_k | x_{k-1}^i) \dots \dots \dots (4.6)$$

La loi de densité prédite $p(x_k | y_{1:k-1})$ s'approche par

$$p(x_k | y_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^i \delta(x_k = X_{k|k-1}^i) \dots \dots \dots (4.7)$$

Avec $x_k^i /_{k-1}$ qui sont obtenues par des réalisations indépendantes de la loi de transition $p(x_k | x_{k-1}^i)$ et les poids $\omega_k^i /_{k-1}$ ne changent pas $\omega_k^i /_{k-1} = \omega_{k-1}^i$. Les ω_{k-1}^i sont des poids positifs de somme 1, $x_{k-1}^i, \dots, x_{k-1}^N$ sont des vecteurs de R^d appelés « particules »

4.2.2 Mise à jour :

à l'étape de correction, on passe de la loi de densité prédite $p(x_k | y_{1:k-1})$ à la loi de densité conditionnelle $p(x_k | y_{1:k})$ grâce à la vraisemblance $g(y_k - H_k(x_k^i /_{k-1}))$ donnée par le modèle du bruit de mesure.

$$p(x_k | y_{1:k}) = p(x_k | y_{1:k-1} y_k) = \frac{p(x_k, y_k | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} = \frac{p(y_k | x_k, y_{1:k-1}) p(x_k | y_{1:k-1})}{\int_{x_{k-1}} p(x_k | y_k | y_{1:k-1}) dx_k} \dots\dots\dots (4.8)$$

Comme l'intégrale dans le dénominateur de (4.8) est indépendante de x_k , on peut la considérer constante. De plus, $p(y_k | x_k, y_{1:k-1}) = p(y_k | x_k)$ donc on obtient :

$$p(x_k | y_{1:k}) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1})}{cste} \dots\dots\dots (4.9)$$

La loi de densité conditionnelle est alors approchée par une autre distribution de Dirac de support $x_k^i = x_k^i /_{k-1}$

$$p(x_k | y_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x_k = x_k^i) \dots\dots\dots (4.10)$$

Et de poids
$$\omega_k^i = \frac{\omega_k^i /_{k-1} g(y_k - H_k(x_k^i /_{k-1}))}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j /_{k-1} g(y_k - H_k(x_k^j /_{k-1}))} \dots\dots\dots (4.11)$$

4.3 Méthodes de Monte-Carlo :

Il est généralement impossible de calculer les intégrales des formules de Chapman-Kolmogorov. On ne peut donc pas appliquer directement les équations définies dans le paragraphe 4.2.1. On utilise ainsi les méthodes de Monte-Carlo [33] qui ont pour but d'approcher des lois par des lois discrètes dont les points support sont obtenus par simulation.

Pour cela, on approche la loi p par une loi discrète \tilde{p} :

$$p(x) = \tilde{p}(x) = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \delta(x - x^i) \dots \dots \dots (4.12)$$

Où les échantillons x_i sont générés selon la loi p et où N_s est le nombre d'échantillons générés.

L'approximation discrète $\tilde{p}(x)$ tend presque sûrement vers la loi $p(x)$ cible lorsque $N_s \rightarrow +\infty$ et en particulier, on a :

$$E[x] = \int_{\Omega_p} xp(x) dx \approx \int_{\Omega_p} x \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \delta(x - x^i) dx = \frac{1}{N_s} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} x^i \dots \dots \dots (4.13)$$

En pratique, il est souvent impossible de simuler les x^i directement selon $p(x)$. Une alternative est d'effectuer un échantillonnage d'importance : on simule selon une loi $q(x)$ plus simple à générer telle que le support de q contienne celui de p , et on prend :

$$p(x) \approx \sum_{i=1}^{N_s} \omega^i \delta(x - x^i) \dots \dots \dots (4.14)$$

Ou $\omega^i \propto \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)}$ Avec $\pi(x) \propto p(x)$

Et on normalise les ω^i pour s'assurer que l'approximation $\tilde{p}(x)$ obtenue est bien une loi de probabilité.

On a de même :

$$E_p[x] = \int_{\Omega_p} xp(x) dx = \int_{\Omega_p} xq(x) \frac{p(x)}{q(x)} dx = E_q[x \frac{p(x)}{q(x)}] \approx \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \omega^i x^i \dots \dots \dots (4.15)$$

4.4 Principe du filtrage particulaire :

Le filtrage particulaire est une méthode de Monte-Carlo séquentielle.

On estime la loi a posteriori $p(X_{0:t} | Y_{1:t})$ en utilisant une loi de proposition

$$q(X_{0:t} | Y_{1:t}) \quad \text{et en prenant le poids} \quad \omega_k \propto \frac{p(x_{0:k} | y_{1:k})}{q(x_{0:k} | y_{1:k})}$$

Le principe du filtrage particulaire est de simuler N_s particules (ou trajectoires)

$x_{0:k}^i = (x_0^i; x_1^i, \dots, x_k^i)$ pour $i = 1 \dots N_s$: Ces particules sont générées de manière séquentielle : on suppose à l'instant $k-1$ générés les points $(x_0^i; x_1^i, \dots, x_{k-1}^i) = x_{0:k-1}^i$

À l'instant k , la loi de proposition peut donc se décomposer ainsi :

$$\begin{aligned} q(x_{0:k}^i | y_{1:k}) &= q(x_k^i | x_{0:k-1}^i; y_{1:k})q(x_{0:k-1}^i | y_{1:k}) \\ &= q(x_k^i | x_{k-1}^i; y_k)q(x_{0:k-1}^i | y_{1:k-1}) \dots \dots \dots (4.16) \end{aligned}$$

car x_k^i ne dépend que de x_{k-1}^i et y_k , et $x_{0:k-1}^i$ ne dépend pas de y_k .

On remarque que le terme $q(x_{0:k-1}^i | y_{1:k-1})$ fait référence au calcul effectué à l'étape $k-1$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} p(x_{0:k}^i | y_{1:k}) &= \frac{p(x_{0:k}^i y_k | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(y_k x_{0:k}^i | y_{1:k-1})p(x_{0:k}^i y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(y_k | x_k^i)p(x_{0:k-1}^i; x_k^i | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(x_k | x_k^i)}{p(y_k | y_{1:k-1})} p(x_k^i | x_{0:k-1}^i; y_{1:k-1})p(x_{0:k-1}^i | y_{1:k-1}) \\ &= \frac{p(y_k | x_k^i)}{p(Y_t | Y_{1:t-1})} p(x_k^i | x_{0:k-1}^i)p(x_{0:k-1}^i | y_{1:k-1}) \dots \dots (4.17) \end{aligned}$$

Ainsi, lors du calcul du poids des particules $X_{0:1}^i$:

$$\begin{aligned}\omega_t^i &\propto \frac{p(x_{0:k}^i \ y_{1:k})}{q(x_{0:k}^i \ y_{1:k})} \\ &\propto \frac{p(y_k \ x_k^i)}{p(y_k \ y_{1:k-1})} * \frac{p(x_k^i \ x_{0:k-1}^i)}{q(x_k^i \ x_{k-1}^i \ y_k)} * \frac{p(x_{0:k-1}^i \ y_{1:k-1})}{q(x_{0:k-1}^i \ y_{1:k-1})}\end{aligned}$$

En remarquant que le terme $p(y_k \ y_{1:k-1})$ est indépendant de x_k^i on peut l'inclure dans le coefficient de proportionnalité [34]. De plus, x_k^i ne dépend que de x_{k-1}^i dans $p(x_k^i \ x_{0:k-1}^i)$. On obtient finalement :

$$\omega_k^i \propto \frac{p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{k-1}^i \ y_k)} * \omega_{k-1}^i \dots\dots\dots(4.18)$$

Si g désigne la densité de la loi du bruit de mesure, alors

$$p(y_k | x_k) = g(y_k - H_k(x_{k|k-1})) \text{ donnée par le modèle du bruit de mesure.}$$

Et on a

$$\omega_t^i \propto \frac{g(y_k - H_k(x_{k|k-1})) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{k-1}^i \ y_k)} * \omega_{k-1}^i \dots\dots\dots(4.19)$$

Les poids admettent donc une expression récursive.

L'estimée de l'état \hat{x} est alors égale à

$$\hat{x}_k \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i x_k^i$$

et la matrice de covariance est estimée par

$$p_k \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i (x_k^i - \hat{x}_k)(x_k^i - \hat{x}_k)^T \dots\dots\dots(4.20)$$

4.4.1 Choix de la densité d'importance :[35]

Le choix de la loi de densité d'importance $q(x_k | x_{0:k-1} ; y_k)$ conditionne le bon fonctionnement de l'algorithme particulaire. En effet, la méthode d'échantillonnage pondérée repose sur la génération d'échantillons de particules à partir de la densité d'importance, qui va permettre d'évaluer les poids d'importance. Elle doit être choisie

de préférence à minimiser la variance de ces poids et doit satisfaire les conditions suivantes :

- le support de la densité d'importance doit recouvrir le support de la loi de densité conditionnelle.
- la densité d'importance doit tenir compte de l'observation récente.

Pour des raisons de coût de calcul, il n'est pas possible en général de construire une telle fonctions d'importance. Cependant, on peut prendre la densité d'importance $q(x_k | x_{0:k-1} ; y_k)$ égale à une loi de densité Gaussienne $\phi(\hat{x}_k | P_k)$, tel que la moyenne \hat{x}_k et la matrice de covariance P_k sont calculées par les équations de Kalman en linéarisant les équations d'état et de mesure autour de $X_{k/k-1}$ et de X_{k-1} respectivement. Un autre choix très courant est de prendre la densité a priori

$q(x_k | x_{0:k-1} ; y_{1:k}) = p(x_k | x_{k-1})$, la récente observation n'est pas prise en compte équation (2.13).

Ce choix facilite l'implémentation de l'algorithme.

Malheureusement, la fonction d'importance optimale dépend de la densité recherchée:

Supposons que l'on génère un échantillon (x_1, \dots, x_N) qui suit une loi $q(\cdot)$ quelconque ne s'annulant pas sur le support de p . On a

$$E_p[f(X)] = \int f(x)p(x) dx = \int f(x)q(x) \frac{p(x)}{q(x)} dx = E_q[f(x) \frac{p(x)}{q(x)}]$$

Où f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

On associe à chaque particule X^i le poids ω^i (ici les poids ω^i sont aléatoires et non normalisés) défini par,

$$\omega^i = \frac{1}{N} \frac{p(X^i)}{q(X^i)} \dots\dots\dots(4.21)$$

L'estimateur de μ

$$\overline{\mu^N} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(X^i)}{q(X^i)} f(X^i) = \sum_{i=1}^N \omega^i f(X^i) \rightarrow E_p \left[f(X) \frac{p(X)}{q(X)} \right] = \mu \dots\dots\dots(4.22)$$

à pour variance,

$$\begin{aligned} var_p\{\overline{\mu^N}\} &= \frac{1}{N} \left[\int f^2(X) \frac{p^2(X)}{q(X)} dX - \left(\int f(x)p(x) dx \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[\int f^2(x) \frac{p^2(x)}{q(x)} dx - \mu^2 \right] \dots\dots\dots(4.23) \end{aligned}$$

On montre que cette variance est minimale pour :

$$q(x) = \frac{|f(x)|p(x)}{\int |f(x)|p(x)} \dots\dots\dots(4.24)$$

Cette variance est nulle si f(:) est positive.

4.4.2 Analyse de l'erreur particulière : [36]

Cohérence entre la densité prédite et la vraisemblance :

Dans le but de comprendre certains problèmes de divergence rencontrés dans le filtre particulière, nous allons calculer une approximation de l'erreur locale du filtre particulière. On montre que cette erreur dépend fortement du degré de cohérence entre la densité prédite et la vraisemblance.

La densité conditionnelle s'écrit,

$$p_k(x) \approx \frac{1}{c} p(y_k | x_k) \sum_{i=1}^N \omega_{k-1}^i p_{k-1}(x) \dots\dots\dots(4.25)$$

avec c est un facteur de normalisation qui vaut,

$$c = \int p(y_k | x_k) \sum_{i=1}^N \omega_{k-1}^i p_{k-1}(x) dx \dots\dots\dots(4.26)$$

Par commodité, on pose $\omega_{k-1}^i = \frac{1}{N}$ et $q(x) = p_{k-1}(x)$ la loi de densité prédite à partir de laquelle, on génère l'échantillon de particules prédites,

$$(x^1 \dots \dots \dots x^N) \sim q(x)$$

Si on note la vraisemblance $g(x) = p(y_k | x_k)$ et la densité conditionnelle

$p(x) = p_k(x)$, on écrit

$$p(x) = \frac{g(x)}{\int g(x)q(x)dx} q(x) = r(x)q(x) \dots\dots\dots(4.27)$$

L'objectif est d'estimer $p(x)$ au sens faible, ce qui veut dire estimer le paramètre μ suivant :

$$\mu = E_p[\theta(x)] = \int \theta(x)p(x)dx \dots\dots\dots(4.28)$$

avec $\theta(:)$ une fonction continue bornée.

On estime μ par :

$$\bar{\mu}^N = \frac{\sum_{i=1}^N \theta(x^i) g(x^i)}{\sum_{i=1}^N g(x^i)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mu \dots\dots\dots(4.29)$$

En faisant un développement limité (Delta méthode) [40], on obtient une approximation de la variance de $\bar{\mu}^N$

$$var\{\bar{\mu}^N\} = \frac{1}{N} var_p\{\theta(x)\} \left(1 + var_q(r(x)) + O\left(1/N^{3/2}\right) \right) \dots\dots\dots(4.30)$$

On peut considérer le terme $var_p\{\theta(x)\}$ comme une donnée, on a alors

$$var\{\bar{\mu}^N\} \propto \frac{1}{N} (1 + var_q(r(x))) = \frac{1}{N} \frac{\int g^2(x) q(x) dx}{[\int g(x) q(x) dx]^2} = \frac{1}{N} R_{SIR} \dots\dots\dots(4.31)$$

Afin de poursuivre les calculs de $var\{\bar{\mu}^N\}$, nous posons les hypothèses suivantes :

- ❖ (H1) la densité à priori q est gaussienne.
- ❖ (H2) la dimension de l'état et de la mesure sont égales à 1.
- ❖ (H3) le bruit de mesure est gaussien.

L'hypothèse (H2) n'est pas restrictive, les calculs se mènent de la même façon dans le cas multidimensionnel. On a alors :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} (y - H(x))^2\right] = \phi\left(y - \frac{H(x)}{\sigma_1^2}\right) \dots\dots\dots(4.32)$$

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} (x - \bar{x})^2\right] = \phi\left(x - \frac{\bar{x}}{\sigma_1^2}\right) \dots\dots\dots(4.33)$$

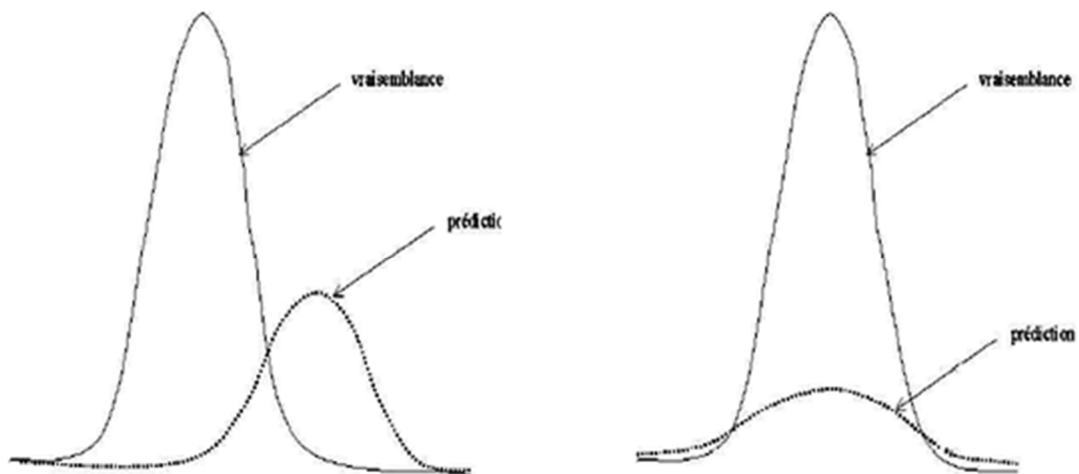


FIGURE 4.1 : figure à gauche-incohérence entre la fonction de vraisemblance et la densité prédite, figure à droite-cohérence entre la fonction de vraisemblance et la densité prédite

Théorème 1 [37]: Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), la variance de $\bar{\mu}^N$ est approchée par

$$\text{var} \{ \bar{\mu}^N \} \simeq \frac{1}{N} \frac{(\sigma_1^2 H'(\xi_A)^2 \sigma_2^2)}{(\sigma_1^2 H'(\xi_A)^2 \sigma_2^2)^{1/2}} \exp \left[C (y - H(\bar{x}))^2 \right] \dots\dots\dots (4.34)$$

Ou $H'(x) = dH(x)|dx$ est le gradient de la fonction $H(x)$ et $H(\bar{x})$ est la mesure prédite de la moyenne a priori et :

$$C = \frac{\sigma_2^2 H'(\xi_A)^2}{(\sigma_2^2 + H'(\xi_A)^2 \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + 2H'(\xi_A)^2 \sigma_2^2)} \dots\dots\dots (4.35)$$

Interprétation [38]:

- la variance tend vers l'infini si l'écart-type du bruit de mesure σ_1 tend vers 0.
- la variance croit exponentiellement lorsque la mesure prédite s'éloigne de la mesure.
- si le gradient $H'(x)$ tend vers 0 (la mesure ne dépend pas de l'état), la variance est égale à la variance de la densité prédite. En revanche, si $H'(x)$ augmente la variance de l'erreur augmente.

Ces résultats nous montrent l'importance de la cohérence entre la densité prédite a priori et la vraisemblance. La variance de l'estimation particulière augmente de façon exponentielle en fonction de cette incohérence. A chaque pas de calcul, le filtre effectue cette erreur Monte Carlo locale. Il existe des théorèmes de convergence de l'erreur globale (obtenue en accumulant les erreurs locales) du filtre particulier [45]. Le théorème ci-dessous en est une version élémentaire :

Théorème 2 [37]:

$$\sup_{\|f\|} \mathbb{E} [\langle p_k - \hat{p}_k, f \rangle] \leq 2 \frac{\bar{\gamma}_k}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots(4.36)$$

Où f est une fonction test continue bornée et l'espérance est prise par rapport aux particules ($\hat{p}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(x_k = x_k^i)$ est une mesure discrète aléatoire),

$$\bar{\gamma}_k = \prod_{i=1}^k \gamma_i ; \quad \gamma_i = \frac{\sup_x (g(y_i - H_i(x)))}{\int g(y_i - H_i(x)) p_{i|i-1}(x) dx} \dots\dots\dots(4.37)$$

Ce théorème montre que pour un horizon de temps donnée, l'erreur d'approximation du filtre particulier tend vers 0 à la vitesse $1/\sqrt{N}$. Cependant la constante $\bar{\gamma}_k$ tend vers l'infini quand le nombre de mesures croît ($k \rightarrow \infty$). En effet, l'inégalité,

$$\begin{aligned} \int g(y_i - H_i(x)) p_{i|i-1}(x) dx &\leq \sup_x [g(y_i - H_i(x))] \int p_{i|i-1}(x) dx \\ &= \sup_x [g(y_i - H_i(x))] \dots\dots\dots(4.38) \end{aligned}$$

montre que $\bar{\gamma}_k > 1$ et donc $\bar{\gamma}_k$ se comporte comme a^k avec $a > 1$. $\bar{\gamma}_k$ croît vers l'infini à la vitesse exponentielle. $\bar{\gamma}_k$ sera d'autant plus mauvais que la cohérence entre la densité prédite et la vraisemblance $\langle g_i; p_{i|i-1} \rangle$ sera faible. On le voit, il y a pas de convergence uniforme du filtre particulier dans le temps. Pour s'assurer le contrôle de l'erreur au cours du temps, il faut un nombre de particules qui tend vers l'infini. Heureusement, cette borne est pessimiste : elle a été obtenue en cumulant les erreurs locales maximales. En pratique, le filtre particulier fonctionne avec un nombre constant de particules.

4.4.3 Ré-échantillonnage : [39]

Le ré-échantillonnage est nécessaire dans l'algorithme SIS, chaque fois qu'une dégénérescence significative est observée. L'étape de ré-échantillonnage consiste à redistribuer les particules de manière à multiplier les particules lourdes pour remplacer les particules de poids faibles. Le ré-échantillonnage rend l'estimation plus pertinente ; cela est dû au fait qu'après redistribution, il existe plus de particules pour décrire la région pertinente de l'espace d'état. Cette étape est une fonction de la forme

$$\left\{ x_k^{(i)} ; \omega_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \rightarrow \left\{ x_k^{(i^*)} ; 1/N_p \right\}_{i=1}^{N_p} \dots\dots\dots(4.39)$$

Le nouvel ensemble d'échantillons est généré par N_p tirages indépendants selon l'approximation discrète de la densité $p(x_k|y_{1:k})$ donnée par :

$$p(x_k|y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_p} \omega_k^i \delta(x_k - x_k^i) \dots\dots\dots(4.40)$$

De sorte que l'on a

$$p_r(x_k^{(i^*)} - x_k^i) = \omega_k^i$$

Puisque l'échantillonnage se fait (dans un sens approximatif) selon la vraie densité a posteriori, les poids d'importance ré-échantillonnés sont uniformes, comme la relation (4.39) le montre. Ainsi, le ré-échantillonnage empêche la dégénérescence de l'algorithme SIS en construisant une nouvelle mesure aléatoire dont les points de support ont $1/N_p$ comme poids.

Il existe différentes méthodes pour implémenter l'opération du ré-échantillonnage en respectant la relation 4.26. Définissons la variable aléatoire discrète N_k^i correspondant au nombre des fois que x_k^i est sélectionné pendant le ré-échantillonnage.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{N_p} N_k^i = N_p$

On sait que $\{N_k^{(i)}\}$ obéit à une loi de probabilité multinomiale. En tant que tel, le ré-échantillonnage direct de la fonction de pondération $\{\omega_k^{(i)}\}$ va donner $E\{N_k^{(i)} | \omega_k^{(i)}\} = N_p \omega_k^i$ et $var\{N_k^{(i)} | \omega_k^{(i)}\} = N_p \omega_k^i (1 - \omega_k^i)$ pour chaque i .

Cependant, il est préférable d'utiliser un ré-échantillonnage réduisant les variances $\{N_k^{(i)} \mid \omega_k^{(i)}\}$. Cela réduit, à son tour, la chance de la dégénérescence résultant de la sélection des états à poids négligeables.

Une implémentation directe du ré-échantillonnage consisterait à générer N_p variables aléatoires i.i.d. selon une loi uniforme, les trier dans un ordre croissant et les comparer à la somme cumulée des poids normalisés. Le meilleur algorithme de tri a une complexité de l'ordre $O(N_p \log N_p)$ et constitue une limitation majeure dans les applications pratiques. Cet algorithme connu sous le nom de "ré-échantillonnage systématique". Il est simple à implémenter, a une complexité de l'ordre de $O(N_p)$ et minimise la variance de MC. Le pseudocode du ré-échantillonnage systématique. On note $\{c_k^i\}_{i=1}^{N_p}$ la fonction cumulative de la densité discrète (fcd) correspondant aux poids normalisés, $c_k^i = \sum_{j=1}^i \omega_k^j$

L'algorithme systématique consiste à générer des valeurs u_i dans l'intervalle $[0; 1]$ et à choisir $i^* = \min_j \{j : c_k^j \geq u_i\}$. Il est important de remarquer que le seul élément aléatoire dans l'algorithme du ré-échantillonnage systématique est la génération de u_1 : les autres points de sélection $\{u_i\}_{i=2}^{N_p}$ sont liés à u_1 de façon déterministe.

Bien que le ré-échantillonnage atténue les effets de la dégénérescence, il introduit plusieurs nouveaux problèmes : premièrement, d'un point de vue pratique, le ré-échantillonnage limite la capacité de paralléliser l'algorithme SIS parce que tous les poids $\omega_k^{(i^*)}$ doivent être combinés.

Deuxièmement, d'un point de vue théorique, les échantillons $x_k^{(i^*)}$ ne seront pas statistiquement indépendants après le ré-échantillonnage. Troisièmement, les particules à poids élevés sont statistiquement sélectionnées plusieurs fois. Cela conduit à une perte de la diversité parmi les particules puisque la distribution obtenue contiendra de nombreux points répétés. Ce problème, connu comme l'appauvrissement d'échantillonnage, est sévère dans le cas d'un faible bruit de processus.

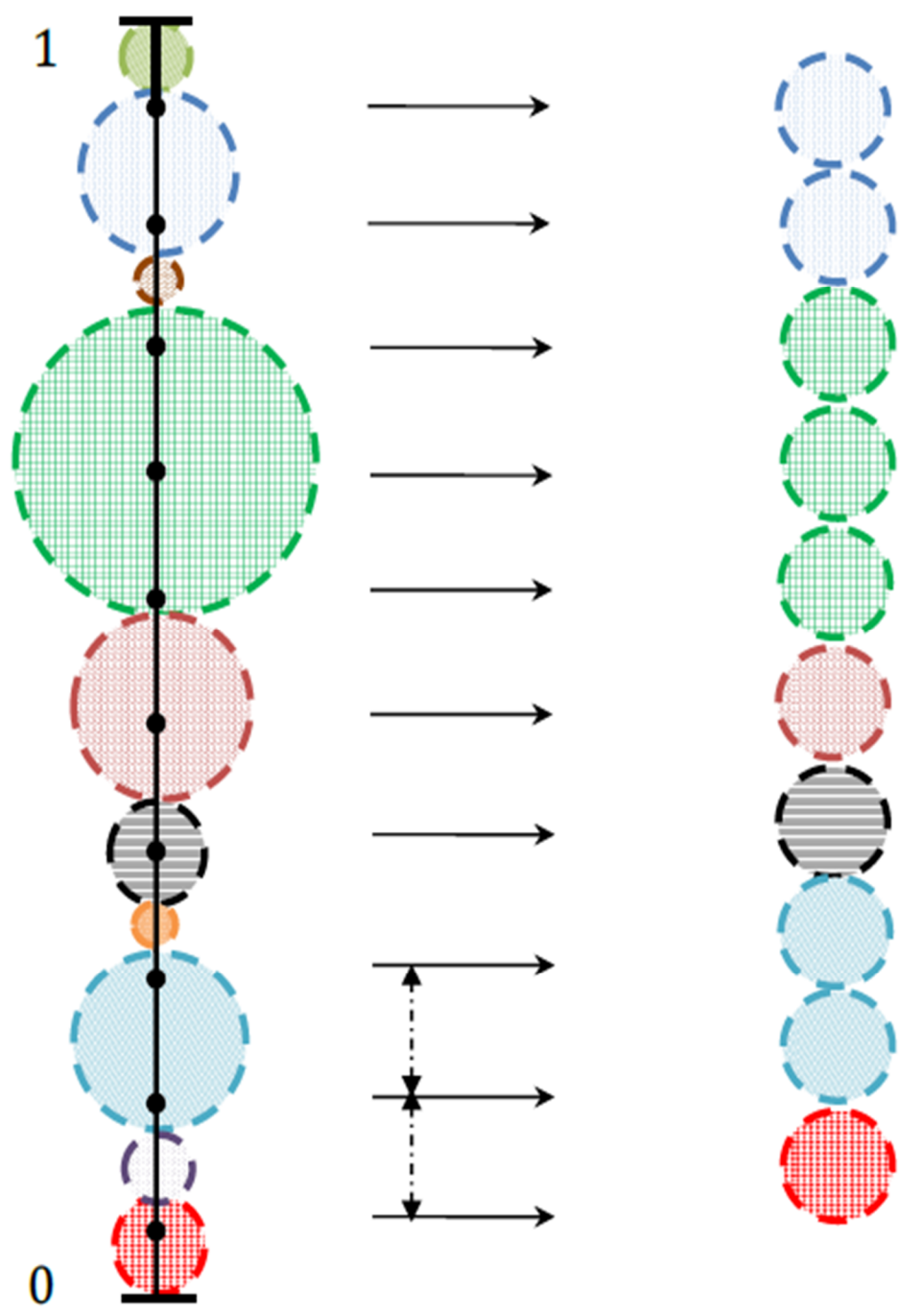


Figure 4.2 : Représentation schématique du ré-échantillonnage systématique [39]

L'Algorithme du ré échantillonnage se présente comme [32]:

$$\left[\{ x_k^{(j*)}, \omega_k^{(j*)}, i^j \}_{i=1}^{N_p} \right] = \text{REECHANTILLONAGE} \left[\{ x_{k-1}^{(i*)}, \omega_{k-1}^{(i*)} \}_{i=1}^{N_p} \right]$$

- Initialiser la fdc : $c_k^1 = \omega_k^1$
- POUR $i = 2: N_p$
 Construire la fdc : $c_k^i = c_k^{i-1} + \omega_k^i$
- FIN POUR
- Commencer du bas de la fdc $i = 1$
- Générer un point de départ : $\mu_1 \sim U[0, N_p^{-1}]$
- POUR $j = 1: N_p$
 - Se déplacer le long de fdc : $\mu_j = \mu_1 + N_p^{-1}(j - 1)$
 - TANT QUE $\mu_j \geq c_k^{(i)}$
 - $i = i + 1$
 - FIN TANT QUE
 - Assigner un échantillon : $x_k^{(j)} = x_k^{(i)}$
 - Assigner un échantillon : $\omega_k^{(j)} = N_p^{-1}$
 - Assigner le parent : $i^j = i$
 - FIN POUR

4.4.4 Illustration du fonctionnement : [37]

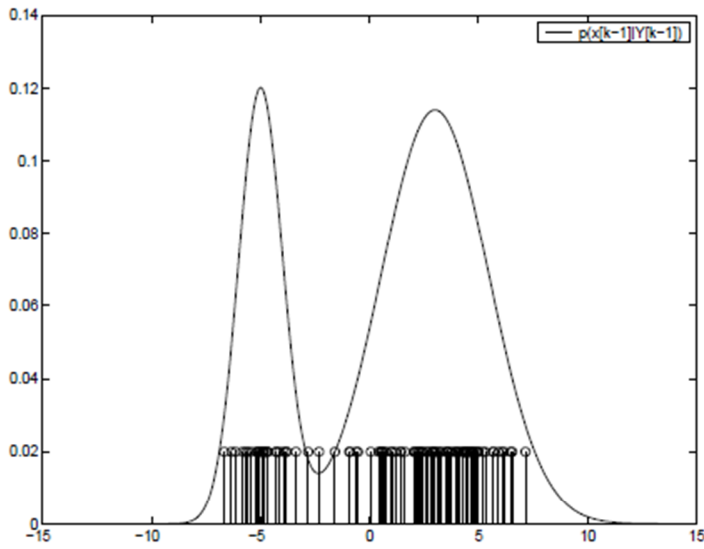
La figure 4.3 présente graphiquement les étapes du filtrage pour un problème de dimension 1 et pour une *proposal distribution* $q(x_k | X_{k-1}, Y_k) = p(x_k | x_{k-1})$.

(a) La densité de probabilité à l'instant $k-1$ est représentée par un ensemble de particules distribuées selon $p(x_{k-1} | Y_{k-1})$.

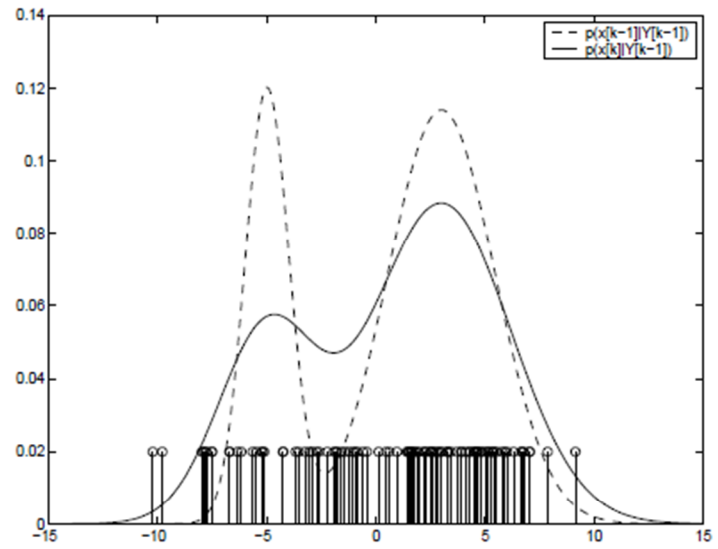
(b) Les particules sont échantillonnées selon $p(x_k | x_{k-1})$. Le nuage de particules se disperse.

(c) Les poids sont mis à jour en fonction de la vraisemblance des particules. Ici, la vraisemblance (courbe en pointillés) a été choisie non gaussienne. Les particules sont alors représentatives de la densité a posteriori $p(x_k | Y_k)$.

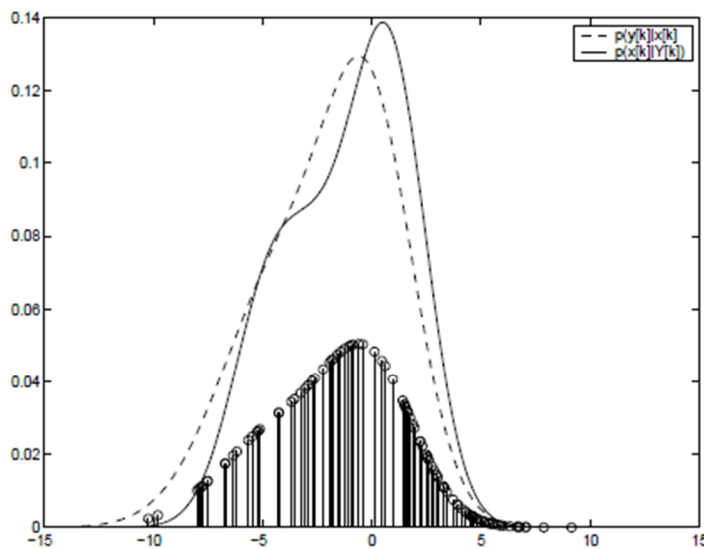
(d) Les particules sont ré échantillonnées. On note que les particules de faible poids (sur les bords de la distribution) ont été éliminées.



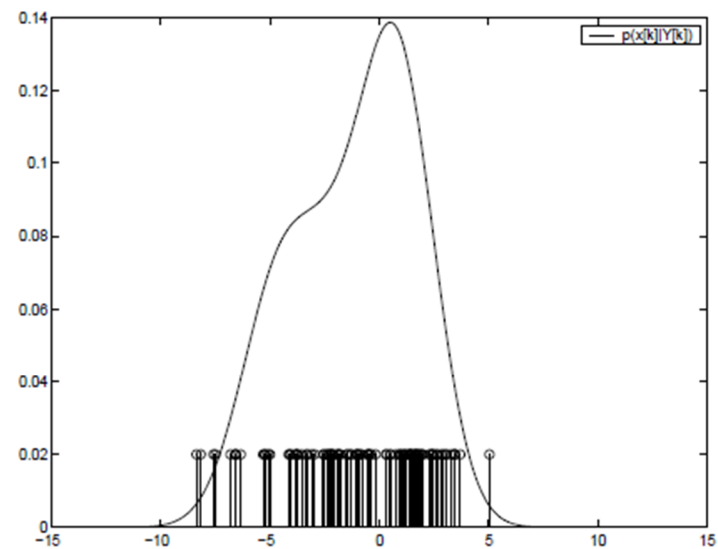
(a) Distribution initiale des particules



(b) Échantillonnage selon $p(x_k|x_{k-1})$



(c) Correction des poids



(d) Rééchantillonnage

FIGURE 4.3 : étapes du filtrage particulaire pour un système de dimension 1

Chapitre 5 Simulation et résultats

5.1 Introduction :

Le suivi de phase est un problème important dans les communications numériques cohérentes. Etant donné que l'estimation conjointe de la phase et des données est généralement insoluble, un certain nombre d'algorithmes optimaux ont été proposées en utilisant un estimateur de phase suivi d'un détecteur de données.

Le filtre Kalman étendu est une solution appropriée pour ce genre de problème mais à condition que le bruit soit Gaussien.

Le filtrage particulaire (PF) [25] représente l'approche la plus efficace pour l'estimation séquentielle de l'état caché d'un modèle dynamique non linéaire. Au cours de ces dernières années, PF a été largement appliquée à la communication numérique (estimation de canal, le suivi, la synchronisation, ...) [26] [27]

On propose une application qui met en pratique les deux filtres, EKF et le PF, pour l'estimation de phase, ainsi qu'une comparaison des deux filtres.

5.2 Algorithmes des filtres appliqués

5.2.1 Méthode du filtre de Kalman étendu (EKF)

Afin de prendre en compte les non linéarités associées à la dynamique et aux mesures, à chaque pas de temps on va mettre à jour les matrices de dynamique.

Phase d'initialisation, Les variances des différentes matrices ne dépendent que des capteurs, de la connaissance de la dynamique et de l'erreur initiale, elles sont fixées par le problème.

Phase de prédiction, mise à jour par intégration de la dynamique non linéaire de l'état et grâce au linéarisé de la matrice de covariance de l'erreur

Phase d'estimation, mise à jour par recalage en utilisant le linéarisé de la matrice de mesures de l'état et de la matrice de covariance de l'erreur

Le filtre de Kalman étendu permet donc de linéarisé localement des systèmes non linéaire. Ceci assure donc la convergence locale de l'erreur,

```

% initialisation
 $\hat{X}_0 \leftarrow \bar{X}_0$ 
 $R_0 \leftarrow Q_0$ 

% itérations
pour  $k = 1, 2, 3 \dots$  faire

    % prédiction
     $F_{k-1} \leftarrow \nabla f(\hat{X}_{k-1})$ 
     $\hat{X}_k^- \leftarrow f(\hat{X}_{k-1})$ 
     $R_k^- \leftarrow F_{k-1} R_{k-1} F_{k-1}^* + G_{k-1} Q_{k-1}^W G_{k-1}^*$ 

    % correction
     $H_k \leftarrow \nabla h(\hat{X}_k^-)$ 
     $K_k \leftarrow R_k^- H_k^* [H_k R_k^- H_k^* + Q_k^V]^{-1}$  % gain
     $\hat{X}_k \leftarrow \hat{X}_k^- + K_k [Y_k - h(\hat{X}_k^-)]$ 
     $R_k \leftarrow [I - K_k H_k] R_k^-$ 

fin pour

```

FIGURE 5.1 : Alg. : Filtre de Kalman étendu pour le système non linéaire

5.2.1 Méthode du filtre du filtrage particulaire (S.I.R)

La première partie du filtre consiste uniquement à déterminer à chaque instant un nombre fini de paramètres. Ces paramètres sont les différentes particules qui sont générées à partir d'une loi de probabilité. Le nombre de particules étant choisi par l'utilisateur. Cette étape est l'étape de prédiction. Une fois les particules générées on se dirige vers l'étape de correction qui consiste à affecter un poids à chaque particule en utilisant l'observation à l'instant courant. Le problème de cette version du filtre est qu'en quelques itérations tous les poids de chaque particules sont quasi-nuls sauf une. Or idéalement les poids doivent tous rester proche de $1/N$ (avec N le nombre de particules) ainsi les particules sont d'égaux importance.

Afin de savoir si les particules ont un poids quasi nul, nous ré échantillonnent à chaque instant ou après un nombre prédéfini d'itérations. L'idée du ré échantillonnage des particules est de défavoriser les particules de poids très petit au profit des particules importantes. On favorise ces dernières en les dupliquant au détriment des autres. Il existe plusieurs algorithmes de rééchantillonnage certains étant plus lent que d'autres.

(1) l'initialisation :

On tire les particules $x_{0|0}^1, \dots, x_{0|0}^N$ selon une loi Gaussienne connue a priori de moyenne le vecteur d'état initial et de matrice de covariance $P_{0|0}$.

(2) l'étape de prédiction :

Chaque particule x_{k-1}^i est propagée selon l'équation d'évolution du système : $x_{k|k-1}^i = F_k(x_{k-1}^i) + W_k^i$, où les W_k^i sont un échantillon (iid) du bruit de dynamique.

(3) l'étape de correction :

à l'instant k, les poids de chaque particule $\omega_{k|k-1}^i$ sont réactualisés en ω_k^i via la formule :

$$\omega_k^i = \frac{\omega_{k|k-1}^i g(y_k - H_k(x_{k|k-1}^i))}{\sum_{j=1}^N \omega_{k|k-1}^j g(y_k - H_k(x_{k|k-1}^j))}$$

(4) l'étape du ré-échantillonnage :

Si le test du ré-échantillonnage est positif, on fait un tirage multinomial des particules $x_{k|k-1}^1, \dots, x_{k|k-1}^N$ selon leurs poids $\omega_{k|k-1}^1, \dots, \omega_{k|k-1}^N$. Les poids ω_k^i sont alors réinitialisés à $1/N$.

L'estimée de l'état est donnée par $\hat{x}_k \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i x_k^i$ qui est la moyenne du nuage de particule.

La matrice de covariance de l'état est estimée $P_k \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i (x_k^i - \hat{x}_k)(x_k^i - \hat{x}_k)^T$

Figure 5.2 : Alg : filtre à particule pour le système non linéaire

5.3 Application :

L'ensemble des simulations ont été exécuté sous SCILAB.

5.3.1 Modèle du système : [43]

Nous considérons l'estimation d'un signal modulé observés dans le bruit. Les modèles de messages et d'observation sont supposées être

$$x(k + 1) = .8x(k) + v(k)$$

$$y(k) = A \cos(\omega_0 k + 0.5y(k)) + w(k)$$

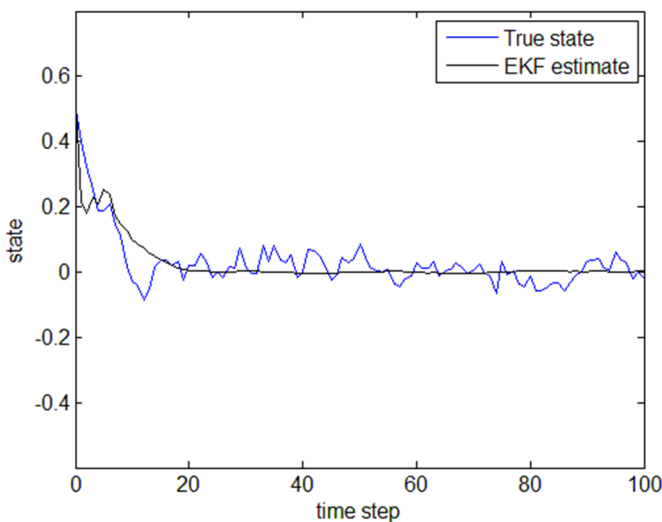
5.3.2 Erreur de variance pour différents valeurs d'Amplitude :

On fixe le nombre d'échantillons à $N = 70$, ainsi que l'initialisation à $x_0 = 0.5$

A. Filtre de Kalman étendu :

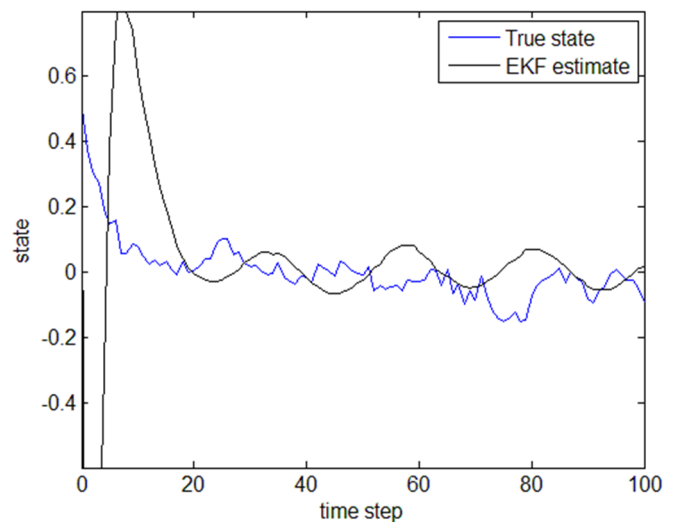
A=1

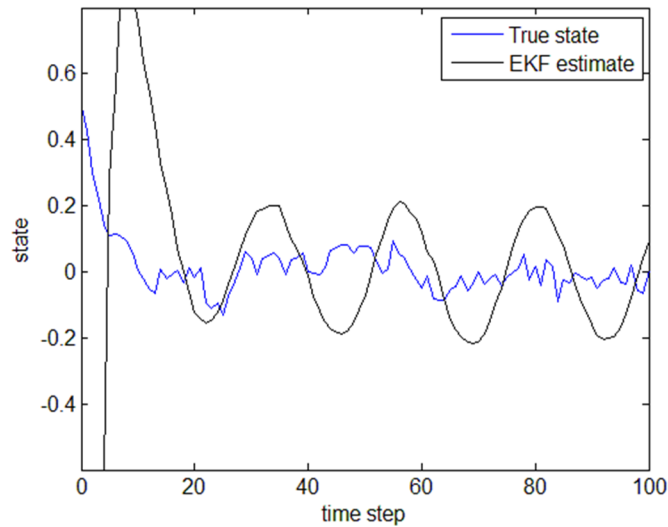
Kalman filter RMS error = 0.062385



A=5:

Kalman filter RMS error = 0.4228





A=10:

Kalman filter RMS error = 0.87227

Figure 5.3 : erreur de variance pour différents amplitudes appliqué a l'EKF

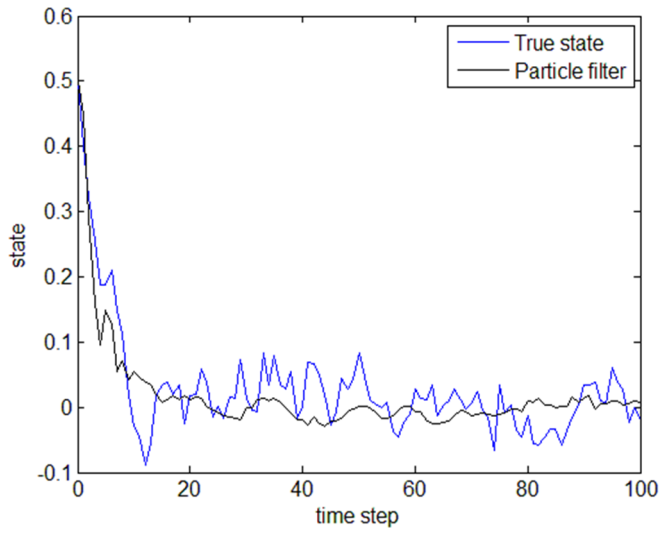
Le système a été simulé sur SCILLAB et l'erreur quadratique moyenne est obtenue en faisant la moyenne des résultats, nous avons calculé l'erreur de variance pour différents valeurs de A. Cette quantité est généralement mentionnée comme la variance de l'erreur réelle. La variance de l'erreur réelle est une mesure de la façon dont l'estimateur s'exécute avec les données réelles. Ceci est particulièrement important dans les modèles non-linéaires puisque l'algorithme est seulement approximativement optimal, et la variance de l'erreur théorique peut être faussement petite. Les courbes de la figure (5.3) montrent que l'erreur de la variance réelle augmente si A augmente ce qui indique que la performance de l'estimateur est préférable dans le cas des valeurs faible de A.

A. Filtre à particule (PF)

Ici pour le filtrage particulaire figure (5.4), on remarque que l'erreur dans les différentes valeurs de A sont pratiquement les même, une légère différence dû a l'exécution de la fonction Rand sur Matlab.

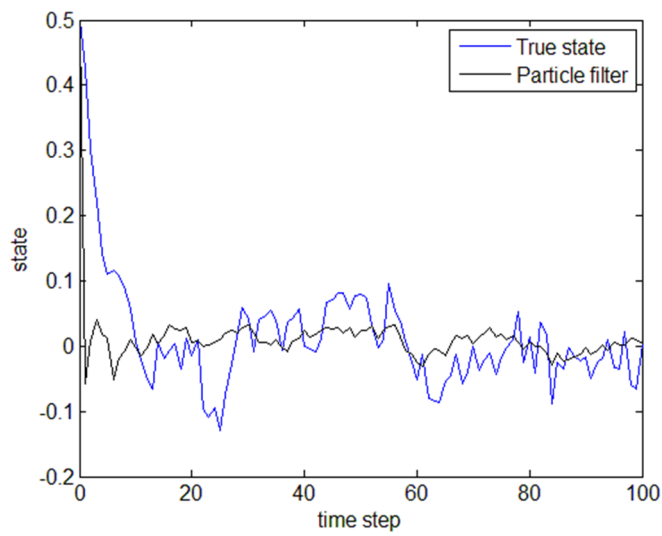
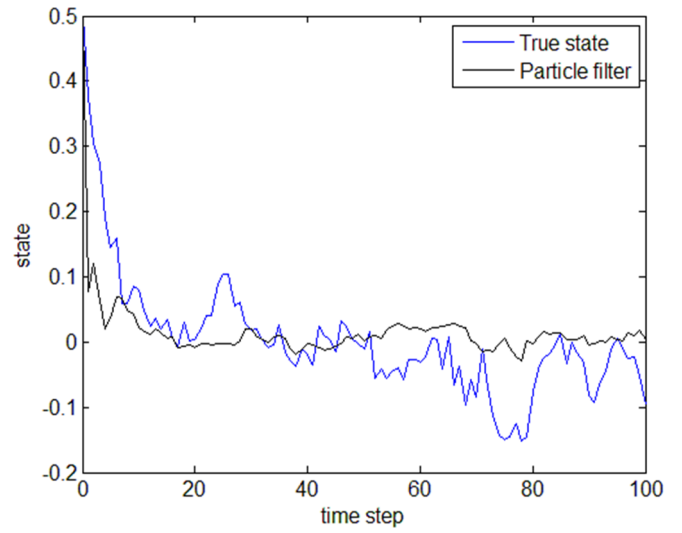
A=1

Particle filter RMS error = 0.059138



A=5

Particle filter RMS error = 0.046351



A=10

Particle filter RMS error = 0.068434

Regularized particle filter RMS error = 0.070864

Figure 5.4 erreur de variance pour différents amplitudes appliqué a l'EKF

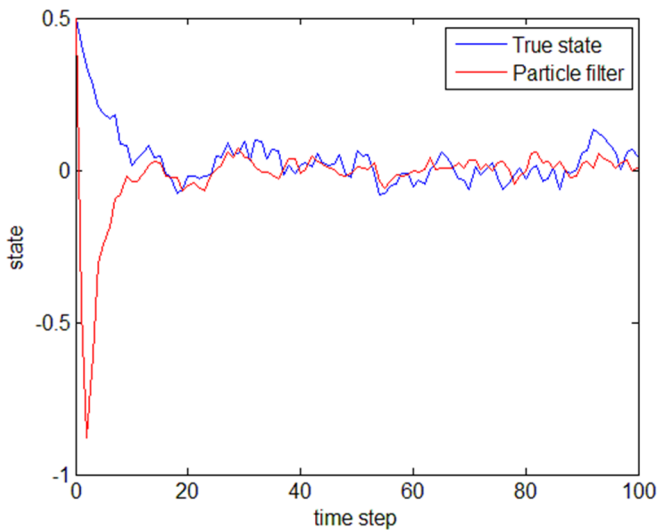
5.3.3 Estimation du PF pour différents valeurs de N:

On va changer le nombre de particules en fixant l'amplitude à $A=5$ et $x_0 = 0.5$.

A. Erreur de variance :

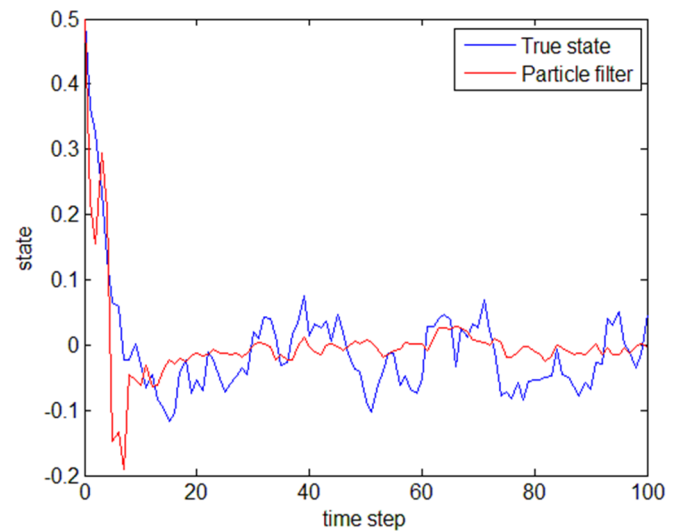
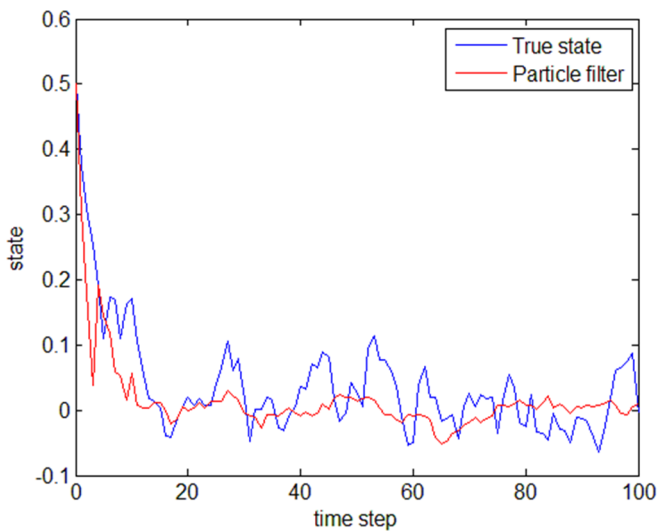
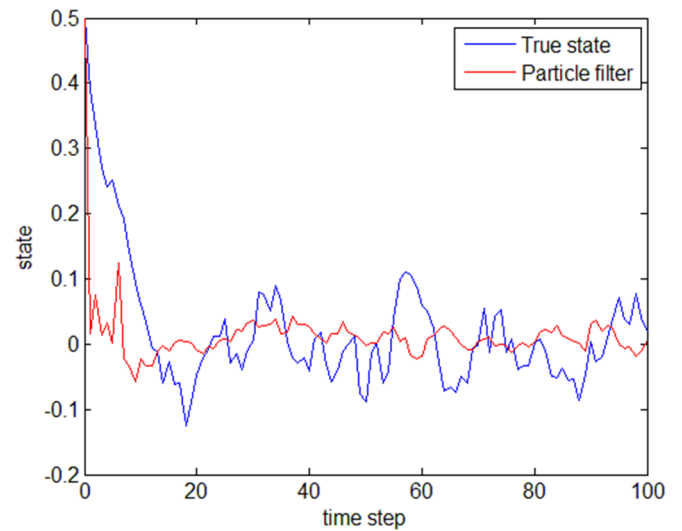
Pour N=5

Particle filter RMS error = 0.098689



N=40:

Particle filter RMS error = 0.063566



Pour N=70:

Particle filter RMS error = 0.057773

Pour N=100

Particle filter RMS error = 0.057752

Figure 5.5 erreur de variance pour différents nombre de particules N

D'après les résultats obtenus figure (5.5) des graphes représentant le suivie de l'erreur du système estimé par rapport au système réel, on déduit que le changement du nombre de particules influe sur l'erreur. En effet, l'augmentation du nombre des particules réduit l'erreur quadratique moyenne, mais arrivée à un certain seuil, l'erreur a tendance a augmenter (quand le nombre de particules est petit, la distribution des particule n'est pas uniforme sur tout le système, quand c'est le contraire, c'est-à-dire, le nombre des particules est plus grand, l'erreur augmente. On sais que la bonne estimation est donné par les particule avec poids fort, donc en augmentant le nombre des particules, les poids diminue ce qui donne une mauvaise estimation donc une erreur grande).

B. Densité de probabilité (PDF) :

Les meilleures particules (avec des poids) fournissent une bonne estimation selon les mesures acquises. Parfois, un petit ensemble de particules divergent, puisque certains endroits différents fournissent des observations similaires.

La Redistribution et la régularisation permettent de maintenir le nuage de particules ni trop dispersé, ni trop regroupé autour des particules de fort poids. Cependant, ces deux opérations perturbent le filtre (il devient sous-optimal). Une solution consiste alors à choisir judicieusement la *densité d'importance (proposal distribution)* pour que ces particules soient distribuées uniformément.

Le nombre de particule influence la précision. Plus la dimensionnalité de l'état est grande, plus *le nombre de particule* doit être grand. Figure (5.6)

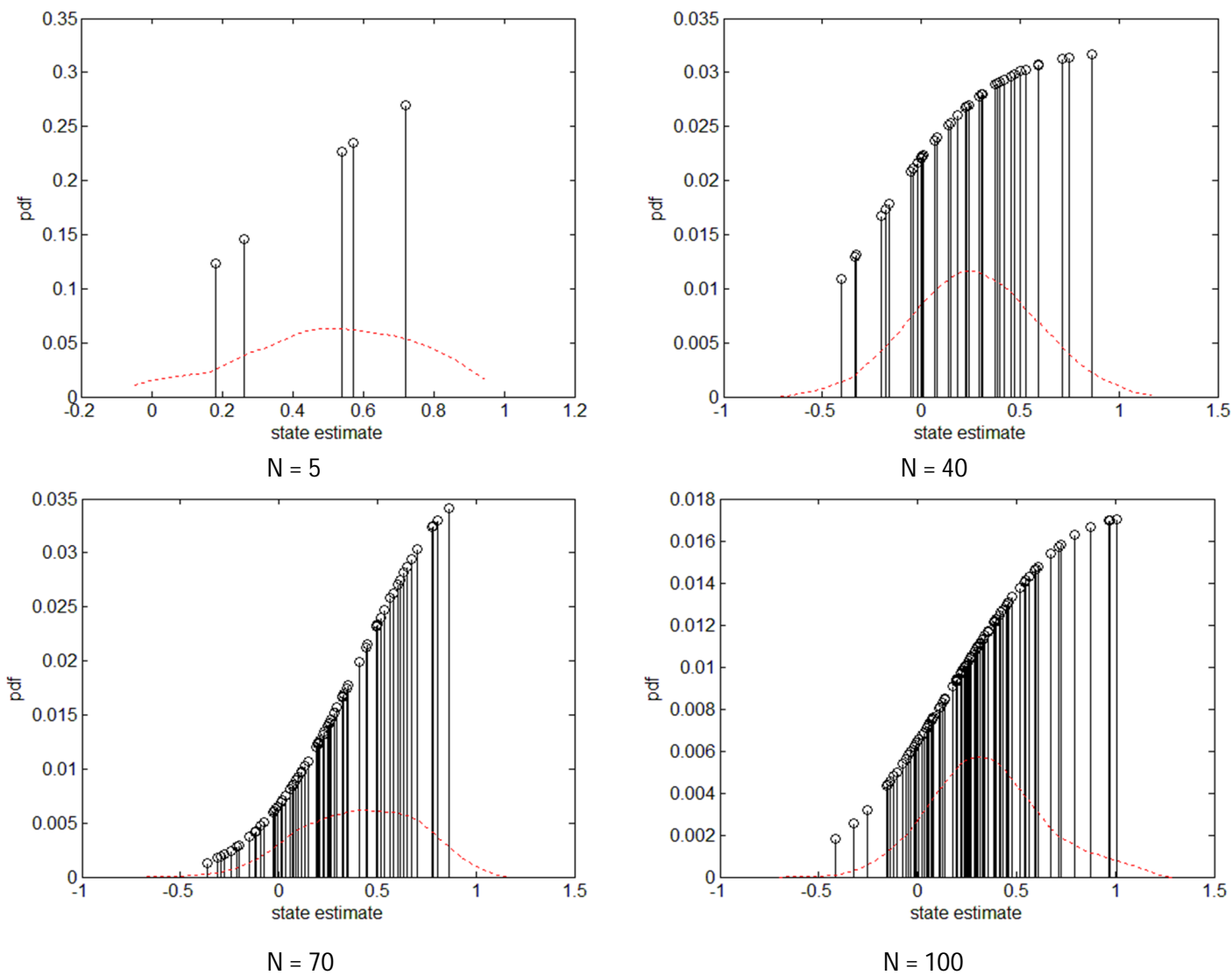
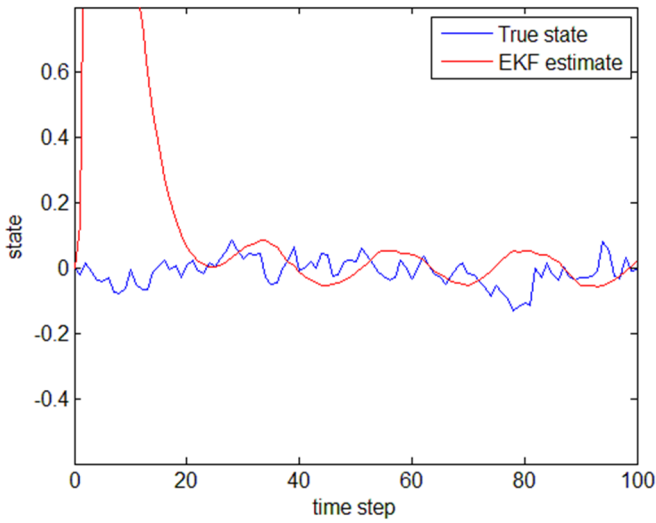


Figure 5.6 : densité de probabilité pour différent nombre de particules

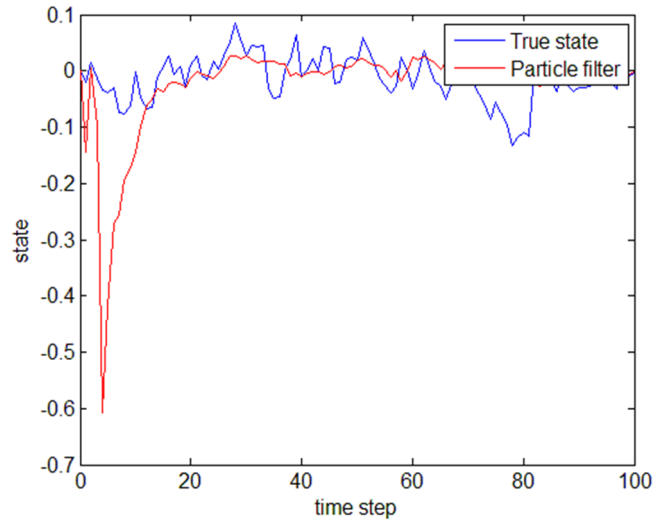
5.3.4 Erreur de variance pour différents valeurs d'initialisation :

Modification de l'initialisation X en fixant $N=70$

A. Initialisation de $X = 0$:



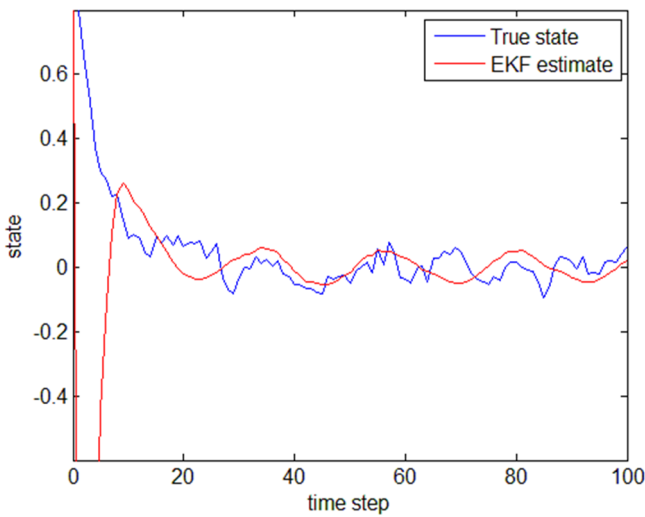
Kalman filter RMS error = 1.0972



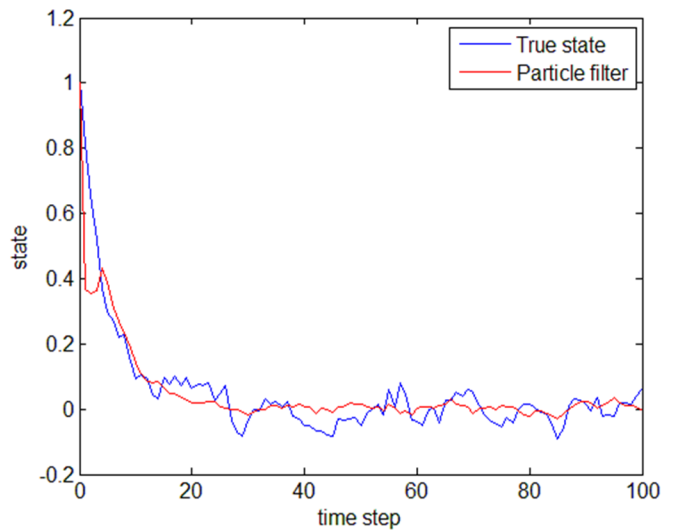
Particle filter RMS error = 0.063988

Figure 5.7 : erreur de variance de l'EKF et le PF pour une initialisation $X_0=0$

B. Pour l'Initialisation de $X = 1$:



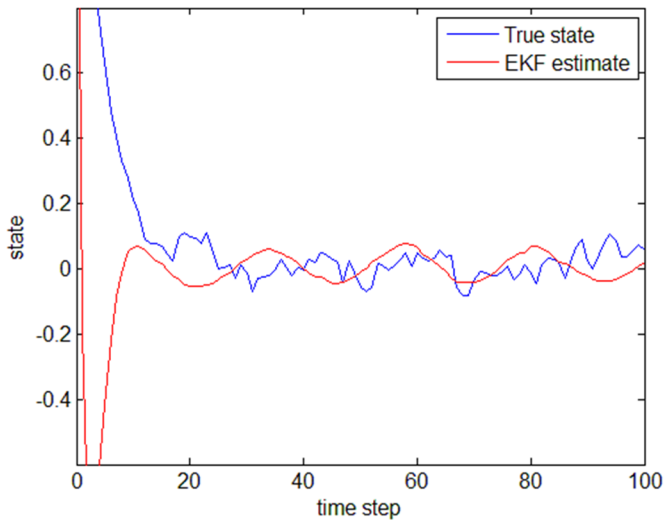
Kalman filter RMS error = 0.67022



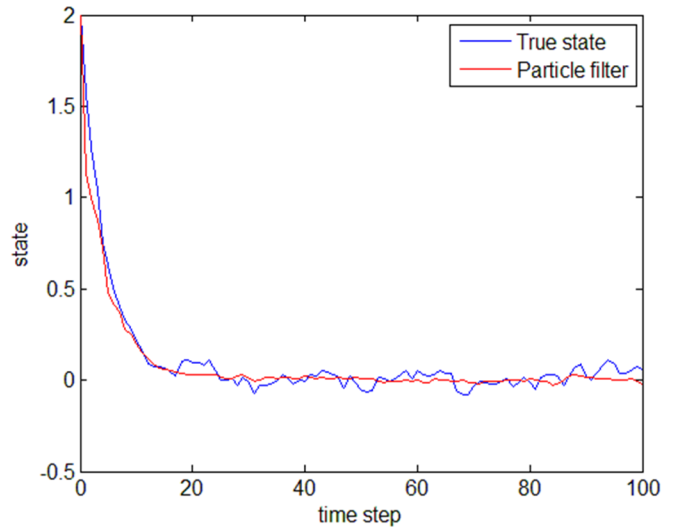
Particle filter RMS error = 0.056713

Figure 5.8 : erreur de variance de l'EKF et le PF pour une initialisation $X_0= 1$

C. Pour l'Initialisation de $X = 2$:



Kalman filter RMS error = 0.67525



Particle filter RMS error = 0.2569

Figure 5.9 : erreur de variance de l'EKF et le PF pour une initialisation $X_0=2$

Initialisation du filtre à particule

En général les particules x_i sont tout d'abord initialisées en fonction de l'information dont on dispose a priori sur le vecteur d'état, c'est-à-dire qu'elles sont tirées selon la loi a priori $p(x_0)$ et leurs poids ω_0^i sont égaux à $1/N$ (où N est le nombre de particules)

Initialisation Kalman

Au temps $k = 0$, nous n'avons aucune mesure disponible. La première mesure arrive au temps $k = 1$. x_0 est une variable aléatoire, il paraît logique en l'absence de mesure de l'estimer par son espérance. Nous avons donc :

$$\hat{x}_0 = E[x_0]$$

Le principe du filtre de Kalman est de minimiser la covariance de l'erreur. Nous avons pour cela besoin de la calculer. Elle vaut :

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

Notez que si vous connaissez parfaitement l'état de départ du système, $\hat{x}_0 = x_0$ et donc P_0 est nulle.

Dans le cas totalement opposé (notre cas) où l'on ne connaît absolument pas l'état du système, P_0 est de norme infinie, ce qui rend les calculs numériques impossible.

Une solution c'est de prendre plusieurs valeurs initiales et de faire la moyenne des résultats

Ici la valeur Initiale où l'erreur de variance est la plus faible pour les deux filtres est $x_0 = 1$

Bibliographie

- [1] Kaipio, J. and Somersalo, E., 2004, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Applied Mathematical Sciences 160, Springer-Verlag.
- [2] Maybeck, P., 1979, *Stochastic models, estimation and control*, Academic Press, New York.
- [3] Winkler, R., 2003, *An Introduction to Bayesian Inference and Decision*, Probabilistic Publishing, Gainesville.
- [4] Kaipio, J., Duncan S., Seppanen, A., Somersalo, E., Voutilainen, A., 2005, *State Estimation for Process Imaging*, Chapter in *Handbook of Process Imaging for Automatic Control*, editors: David Scott and Hugh McCann, CRC Press.
- [5] G. A. Ackerson and K. S. Fu, "On state estimation in switching environments," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 15, pp. 10–17, 1970.
- [6] J. M. Bernardo and A. F. M. Smith, *Bayesian Theory*, 2nd ed., New York: Wiley, 1998.
- [7] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 16, pp. 117–128, 1971.
- [8] C. Berzuini, N. G. Best, W. Gilks, and C. Larizza, "Dynamic conditional independent models and Markov chain Monte Carlo methods," *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 92, pp. 1403–1412, 1997.
- [9] ———, "Random sampling approach to state estimation in switching environments," *Automatica*, vol. 13, pp. 429–434, 1977.
- [10] Kalman, R., 1960, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, *ASME J. Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35-45.
- [11] Sorenson, H., 1970, *Least-squares estimation: from Gauss to Kalman*, *IEEE Spectrum*, vol. 7, pp. 63-68.
- [12] M. Bellanger « *Analyse des Signaux et Filtrage Numérique Adaptif* », Collection technique et Scientifique des télécommunications, Masson, 1989, Paris.

- [13] CLAUDE A. BOZZO « Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite » Tomell : « Théorie de l'estimation. Propriétés des estimations en temps discret et application » Editions Lavoisier, 1983, Paris.
- [14] Mohinder S. Grewal, Lawrence R. Weill, and Angus P. Andrews, « Kalman Filtering: Theory & Practice (Using MATLAB) », 2ed edition, Wiley & Sons, 2001.
- [15] D. Alazard « Introduction au filtre de Kalman ». http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/Pdf/cours_Kalman.pdf
- [16] Robert G. Brown, Patrick Y.C. Hwang, « Introduction to Random Signals & Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises and Solutions », 3rd edition, John Wiley & Sons, November 1997.
- [17] Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, Pg. 35-45, March 1960.
- [18] Kalman, R. E. and Bucy, R. S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, Pg. 95-108, March 1961.
- [19] Kailath, T., "An Innovations Approach to Least-Squares Estimation Part I: Linear Filtering in Additive White Noise", IEEE Transactions on Automatic Control, Pg. 646-654, Vol. AC-13, No. 6, December 1968.
- [20] Kailath, T. and Frost, P., "An Innovations Approach to Least-Squares Estimation Part II: Linear Smoothing in Additive White Noise", IEEE Transactions on Automatic Control, Pg. 655-660, Vol. AC-13, No. 6, December 1968.
- [21] Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes: Third Edition, McGraw-Hill, 1991.
- [22] Siouris, G. M., An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory, John Wiley & Sons, 1996.
- [23] Estimation et filtrage optimal, G. Iuliana BARAIuliana.bara@lsiitcnrs.unistra.fr Telecom Physique Strasbourg Master IRIV, parcours AR
- [24] Brown, R. G. and Hwang, P. Y. C., Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises and Solutions, John Wiley & Sons, 1997.
- [25] A. Doucet, J. F. G. de Freitas and N. J. Gordon Eds., Sequential Monte Carlo methods in practice. New York: Springer-Verlag, 2001.

- [26] P.M. Djuric, J.M. Kotecha, J. Zhang, Y. Huang, T. Ghirmai, M. F. Bugallo and J.Miguez, " Applications of particle filtering to selected problems in communications IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 20, pp. 19–38, Sept. 2003.
- [27] J. Dauwels, H. A. Loeliger, "Phase estimation by message passing", IEEE Proc. Int. Conf. on Communications, Vol. 1, pp. 20–24, 2004.
- [28] Kaipio, J. and Somersalo, E., 2004, Statistical and Computational Inverse Problems, Applied Mathematical Sciences 160, Springer-Verlag.
- [29] Maybeck, P., 1979, Stochastic models, estimation and control, Academic Press, New York.
- [30] Winkler, R., 2003, An Introduction to Bayesian Inference and Decision, Probabilistic Publishing, Gainesville.
- [31] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. IEEE Transactions on Signal Processing, 50 :174–88, February 2002.
- [32] K. Dahia. Nouvelles méthodes en filtrage particulaire - Application au recalage de navigation inertielle par recalage altimétrique. PhD thesis, ONERA / Université Joseph Fourier, France, 2005.
- [33] J.-I. De La Rosa de Vargas. Estimation de la densité de probabilité d'une mesure dans un cadre non-linéaire, non-gaussien. PhD thesis, SUPELEC, Services des Mesures, 2002.
- [34] A. Doucet and C. Andrieu. Particle filtering for partially observed Gaussian state space models. Technical Report CUED/FINFENG/TR393, Departement of Engineering, University of Cambridge, 2000.
- [35] A. Doucet, S.J. Godsill, and C. Andrieu. On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering. Statistics and Computing, 10(3) :197–208, 2000.
- [36] Arnaud Doucet, Nando De Freitas, Kevin Murphy, and Stuart Russel. Rao-Blackwellised particle filtering for dynamic Bayesian networks. In Proceedings of the Sixteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, pages 176–183, 2000.
- [37] J.H. Kotecha and P.M. Djuric. Gaussian particle filtering. In Proceedings of Workshop on Statistical Signal Processing, pages 429–432. IEEE, August 2001.
- [38] J.H. Kotecha and P.M. Djuric. Gaussian particle filtering. IEEE Transaction on Signal Processing, 51(10) :2592–2601, October 2003.

[39] H. Niederreiter. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. SIAM, 1992.

[40] M.D.Srinath and P.Q.Rajasekaran, "An Introduction to Statistical Signal Processing With Application", A Wiley-Interscience Publication, Teledyne Brown Engineering-Huntsville, Alabama, pp. 260-262, 1979.