

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**  
Département de mathématiques

# **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Recherche opérationnelle

## **CONTRIBUTION A L'ETUDE DES NOYAUX DANS LES GRAPHS ORIENTES**

Par

**RAMOUL Amina**

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
M. ABBAS	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Maître de Conférences, U. de Blida	Examineur
Z. ZEMIR	Chargée de Cours, U. de Blida	Invitée
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Rapporteur

Blida, 30 Juin 2008

## ملخص

ينصب اهتمامنا في هذا البحث أساسا على مفهوم النواة في الرسوم البيانية الموجهة .

في البداية، نقدم برهانا آخرًا لنظرية ب. دوتشي باستخدام طريقتين: طريقة إعادة التوجيه و طريقة بناء النواة، ثم نثبت صحة مخمنة ب. دوتشي في حالة خاصة: حيث الرسم البياني المقرون بالرسم البياني الموجه الجزئي و المشكل من الأضلاع المتناظرة يكون فيها قابلا للمقارنة.

في الخطوة الموالية نعتمد مفهوم النواة عن طريق المسارات أحادية اللون في الرسم البياني الموجه  $m$ -ملون، ثم نقترح إثباتا بسيطا لنظرية شان مينقاف و خوارزمية متعددة الحدود لإيجاد هذا النواة في دورة  $m$ -ملونة.

في الأخير ندرس مفهوم  $(l, k)$ -النواة في الرسوم البيانية الموجهة حيث نبدي بعض الملاحظات عليه. علما أن هذا المفهوم أكثر شمولية من مفهوم النواة في الرسوم البيانية الموجهة.

## RESUME

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à la notion du noyau dans les graphes orientés.

Dans un premier temps, nous donnons une autre démonstration du théorème de P.Duchet au moyen de deux méthodes: une méthode de réorientation et une méthode constructive de noyaux, et nous affirmons la conjecture de P.Duchet dans le cas où le graphe associé au graphe orienté partiel formé seulement par les arcs symétriques est de comparabilité.

Dans un second temps, nous considérons le concept de noyau par chemins monochromatiques dans un graphe orienté  $m$ -coloré, et nous proposons une preuve simple au théorème de Shen Minggang et un algorithme polynomial pour la recherche de ce noyau dans un tournoi  $m$ -coloré.

Enfin, nous étudions la notion de  $(k,l)$ -noyau dans les graphes orientés et nous donnons quelques observations. Notons que ce concept est plus général que celui de noyau dans les graphes orientés.

## ABSTRACT

In this thesis, we are interested principally on the notion of kernel in directed graphs (digraphs).

At the beginning, we give another proof of P. Duchet's theorem by using reorientation and constructive methods. We also show that of P. Duchet's conjecture is valid for directed graphs  $D$  where the underlying undirected spanning subgraph deduced from the spanning subdigraph of  $D$  with only symmetric arcs is a comparability graph.

Secondly, we consider the concept of kernel by monochromatic paths in  $m$ -coloured digraphs. We propose a simple proof of the Shen Minggang's theorem and we give a polynomial algorithm to determine a kernel by monochromatic paths in  $m$ -coloured tournaments.

Finally, we study the concept of  $(k,l)$ -kernel in directed graph and we give some observations. Note that this notion is more general than the kernel in directed graphs.

## REMECIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais exprimer à Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida, mes vifs remerciements et ma profonde reconnaissance d'avoir accepté d'être rapporteur ainsi que pour sa disponibilité, ses orientations et ses conseils constants qu'il a pu émettre à la fois sur le fond et sur la forme de ce travail.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Farouk Hannane**, Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier: Monsieur **Moncef Abbas**, Professeur à l'USTHB d'Alger, Monsieur **Mustapha Chellali**, Maître de conférences à l'université Saad Dahlab de Blida et Madame **Zoham Zemir**, Chargée de cours à l'université Saad Dahlab de Blida, dont les précieuses remarques m'ont aidé à accomplir ce travail et dont la participation à ce jury m'honore.

Je saisis aussi cette opportunité pour exprimer mes remerciements et ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin et dont le soutien m'a été précieux durant la préparation de ce mémoire.

Enfin et profitant de cette occasion, je voudrais exprimer mes remerciements et ma sympathie à ma famille pour le soutien qu'elle m'a pu apporter ainsi que pour ses encouragements permanents.

## TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

Liste des illustrations graphiques

INTRODUCTION	08
1. GENERALITES SUR LES GRAPHERS	11
1.1 Introduction	11
1.2 Définitions et notations	11
1.2.1 Graphe orienté, sommet et arc	11
1.2.2 Sous-graphe, graphe partiel	12
1.2.3 Chemins, Circuits	13
1.2.4 Types de graphes, arêtes, chaînes, cycles	13
1.2.5 Distance, écartement, centre, rayon	14
1.2.6 Connexité, forte connexité	15
1.2.7 Mise en ordre d'un graphe sans circuit	15
1.2.8 Ensemble stable, ensemble absorbant	16
1.3 Complexité Algorithmique	16
2. NOYAUX DANS LES GRAPHERS ORIENTES	19
2.1 Introduction	19
2.2 Définitions	19
2.3 Propriétés du noyau	23
2.3.1 Noyaux et fonctions de Grundy	23
2.4 Méthodes de démonstration d'existence du noyau	25
2.4.1 La première méthode	25
2.4.2 La deuxième méthode	26
2.4.3 La troisième méthode	26
2.5 Quelques sous-classes des digraphes noyau-parfaits	27
2.6 Etude algorithmique de la recherche de noyau dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits	29

2.7 Autre preuve du théorème de P. Duchet	29
2.7.1 Méthode de réorientation	30
2.7.2 Méthode constructive	32
3. NOYAU PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES DANS UN DIGRAPHE M-COLORE	36
3.1 Introduction	36
3.2 Définitions	36
3.3 Quelques résultats	39
3.4 Représentation matricielle d'un digraphe m-coloré	44
3.5 Recherche des chemins monochromatiques	44
3.6 Fermeture par chemins monochromatiques	46
3.7 Détermination du noyau par chemins monochromatiques	47
4. (K,L)-NOYAU DANS LES GRAPHE ORIENTE UNE GENERALISATION DE LA NOTION DE NOYAU	50
4.1 Introduction	50
4.2 Définitions	50
4.3 Résultats principaux	51
4.3.1 Généralisation des théorèmes connus sur le noyau	51
4.3.2 Question	53
4.3.3 Existence de (k,l)-noyau dans $P_m$ et $C_m$	54
4.3.4 (k, l)-noyau dans les produits généralisés	54
4.5 (k, l)-noyau d'une orientation de join généralisé	58
4.3.6 k-noyau dans une orientation du graphe adjoint d'un graphe	60
4.4 Quelques observations	62
CONCLUSION	64
REFERENCES	65

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Graphe orienté D	12
Figure 2.1	Graphe orienté sans noyau	20
Figure 2.2	Graphe orienté avec deux noyaux $\{a,c\}$ et $\{b,d\}$	20
Figure 2.3	Graphe orienté avec un unique noyau $\{c\}$	20
Figure 2.4	La représentation graphique du problème	22
Figure 2.5	Un digraphe avec deux fonctions de Grundy	24
Figure 2.6	Un graphe orienté qui n'admet pas une fonction de Grundy	24
Figure 2.7	Un digraphe possédant un noyau mais n'admettant pas de fonction de Grundy	25
Figure 2.8	Un digraphe vérifiant les conditions de la conjecture de P. Duchet mais ne possède pas une réorientation sans 3-circuit.	31
Figure 3.1	Un digraphe 3-coloré	37
Figure 3.2	Le digraphe $C_3$	37
Figure 3.3	La fermeture par chemins monochromatiques	38
Figure 3.4	Le chemin monochromatique de $x_3$ à $x_1$	41
Figure 3.5	Le digraphe $G_5$	41
Figure 3.6	Le tournoi $G_6$	42
Figure 3.7	Un tournoi $G_4$	43
Figure 3.8	Le tournoi T	44
Figure 4.1	Un digraphe D	51
Figure 4.2	Un digraphe sans circuits impairs	53

## INTRODUCTION

*La recherche opérationnelle* est une discipline dont le but est de fournir des méthodes de résolutions pour un type précis de problèmes, ces méthodes sont basées sur des concepts et outils mathématiques.

La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie des jeux, les files d'attente, ...etc sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

Le mot «*graphe*» est introduit par l'Anglais J. J. Sylvester en 1822, et en 1936 que paraît le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D. König. Un graphe est donné classiquement par la définition d'un couple d'ensembles  $(V, U)$  où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $U$  est une relation binaire portant sur  $V$ , les éléments de  $U$  sont appelés les arcs (respectivement les arêtes) dans le cas où le graphe est orienté (respectivement non orienté).

*La théorie des graphes* est apparue d'abord comme une curiosité mathématique avec le problème des ponts de Königsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) qui est arrosée par la rivière de Pregel, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du XXe siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski, de Cayley et plus récemment, de Berge, d'Erdős et de Harary.

*La théorie des graphes* n'est pas seulement un outil puissant de modélisation et de résolution de problèmes concrets, mais c'est un moyen efficace utilisé dans d'autres domaines tels que la recherche opérationnelle, l'algèbre et la topologie et elle connaît un développement important au sein de disciplines diverses telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie(génome), les sciences sociales (modélisation des relations),...etc.

Ce développement est lié à la grande facilité de modéliser une situation concrète par un graphe.

*La théorie des graphes* offre aussi un intérêt pédagogique certain. En effet, les concepts sont souvent simples et de véritables problèmes de recherche peuvent être posés sous forme de «jeux mathématiques» dont la formulation ludique peut recouvrir de grandes difficultés.

Parmi les concepts étudiés en théorie des graphes, celui du *noyau* qui a été introduit pour la première fois, en 1944 par Von Neumann et O. Morgenstern, comme une solution d'un jeu coopératif à  $n$  joueurs, pour le graphe orienté dont les sommets représentent les résultats possibles des décisions et les arcs les préférences efficaces. En effet, ils ont démontré qu'un graphe orienté sans circuits admet un noyau.

*Le noyau* est un sous ensemble de sommets stable (ses sommets sont non adjacents deux à deux) et absorbant (tout sommet hors de ce sous ensemble est l'origine d'au moins un arc ayant son extrémité terminale dans le noyau).

Le fait qu'un graphe orienté ne possède pas toujours un noyau a amené beaucoup d'auteurs à s'intéresser à l'existence de noyaux dans un graphe orienté donné. Plusieurs travaux ont été réalisés notamment par C. Berge, M. Blidia, P. Duchet, H. Jacob, H. Meyniel, F. Maffray, V. Neumann Laura et H. Galeana Sánchez.

Les problèmes importants sur les noyaux sont du type, structure des graphes orientés qui admettent un noyau, opérations sur les graphes orientés noyaux-parfaits, algorithmes efficaces pour trouver un noyau et détermination d'orientation dans un graphe non orienté au départ pour qu'il admette un noyau.

Ce mémoire comporte quatre chapitres qui sont développés comme suit:

Nous introduisons dans le premier chapitre les définitions de base ainsi que les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. A la fin du chapitre, nous parlons de la complexité algorithmique et nous laissons les notions caractéristiques de chaque chapitre à définir dans le chapitre lui même.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du concept de noyau dans les graphes orientés. Après une étude théorique et algorithmique, nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de P. Duchet (Un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique et tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait) basée sur deux méthodes: la méthode de réorientation et la méthode constructive, et nous validons sa conjecture (Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait) dans le cas où le graphe associé au graphe orienté partiel formé seulement par les arcs symétriques est de comparabilité.

Notre contribution dans le troisième chapitre porte sur la notion du noyau par chemins monochromatiques dans un graphe orienté  $m$ -coloré. Ainsi, nous donnons une autre preuve simple au théorème de Shen Minggang (Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout 3-circuit est quasi-monochromatique et tout tournoi d'ordre 3 transitif est quasi-monochromatique alors  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques) et nous fournissons un algorithme polynomial pour la recherche d'un tel noyau dans un tournoi  $m$ -coloré.

Dans le quatrième chapitre nous nous intéressons à une notion plus générale que celle du noyau, c'est le  $(k, l)$ -noyau dans les graphes orientés. Ce concept permet de généraliser beaucoup de résultats établis dans le cas des noyaux au cas des  $(k, l)$ -noyaux. Après une étude approfondie de ce concept, nous fournissons des observations et certains résultats partiels.

Enfin, nous terminons par une conclusion situant d'une part notre contribution et d'autre part les différents axes de recherches futures dans le domaine des noyaux dans les graphes orientés.

## CHAPITRE 1

# GÉNÉRALITE SUR LES GRAPHERS

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre on introduit les définitions ainsi que les notations usuelles du domaine de la théorie des graphes. Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, on reporte le lecteur au livre de C. Berge [1].

### 1.2 Définitions et notations

#### 1.2.1 Graphe orienté, sommet et arc

Un *graphe orienté*  $D$  est donné par la définition d'un couple d'ensembles  $(V, U)$  où  $V$  est un ensemble fini non vide et  $U$  est une relation binaire portant sur  $V$ .

$D$  se note  $D = (V, U)$ .

Les éléments de  $V$  sont les *sommets*. Le cardinal de  $V$  est appelé l'*ordre* de  $D$ , noté  $n$ .

Les éléments de  $U$  sont les *arcs*. Le cardinal de  $U$  est noté  $m$ .

Pour un arc  $u = (x, y)$ , le sommet  $x$  est son *origine* ou son *extrémité initiale*, et le sommet  $y$  son *extrémité terminale*. Un arc de la forme  $u = (x, x)$  est appelé une *boucle*.

Si dans un graphe orienté le nombre d'arcs qui vont d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$  ne peut jamais excéder  $p$ , on dira qu'on a un  *$p$ -graphe*.

Soit un sommet  $x \in V$ .

On note  $\Gamma^-(x) = \{y \in V / (y, x) \in U\}$

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V / (x, y) \in U\}$$

On dit que  $x$  est *successeur* (respectivement *prédécesseur*) de  $y$  si  $x \in \Gamma^+(y)$  ( respectivement  $x \in \Gamma^-(y)$ ).

L'ensemble des *voisins* de (ou des sommets *adjacents* à)  $x$  se note  $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

Si  $\Gamma(x) = \emptyset$  (ensemble vide),  $x$  est un sommet *isolé*.

Pour  $A \subset V$ , on pose  $\Gamma^+(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma^+(a)$ ;  $\Gamma^-(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma^-(a)$  et  $\Gamma(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma(a)$

Graphiquement; on peut représenter un graphe orienté par un schéma constitué par un ensemble (supposé fini) de points qui représentent les sommets, et par un ensemble de flèches reliant chacune une paire de sommets et qui représentent les arcs. Un exemple d'un graphe orienté  $D$  d'ordre 6 est donné par la figure 1.1 ; avec  $D = (V, U)$ ;  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  et  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ .

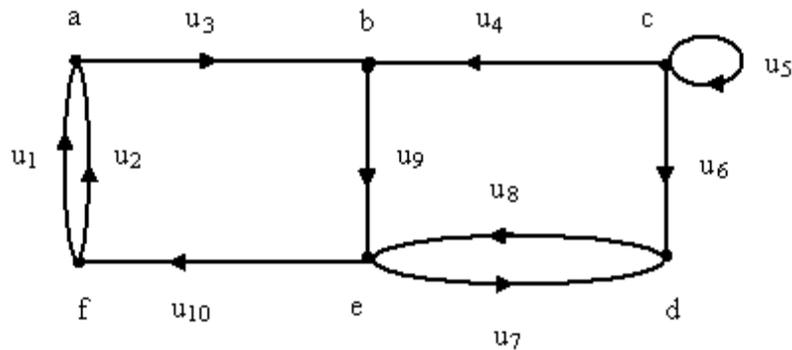


Figure 1.1 Graphe orienté  $D$

### 1.1.2 Sous-graphe, graphe partiel

Soit  $D = (V, U)$  un graphe orienté avec  $V$  l'ensemble des sommets et  $U$  l'ensemble des arcs.

Le *sous-graphe* de  $D$  engendré par  $A \subseteq V$  est le graphe orienté  $D[A]$  qui a pour ensemble de sommets l'ensemble  $A$  et dont les arcs sont ceux de  $U$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ .

Le *graphe partiel* de  $D$  défini par  $W \subseteq U$  est le graphe orienté  $(V, W)$ .

Le *sous-graphe partiel* de  $D$  est un sous-graphe du graphe partiel de  $D$ .

### 1.2.3 Chemins, Circuits

Un *chemin élémentaire* d'un graphe orienté  $D = (V, U)$  est une suite de sommets distincts  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$  telle que  $(x_i, x_{i+1}) \in U$  pour  $0 \leq i \leq p - 1$ .

Un *circuit* d'un graphe orienté  $D = (V, U)$  est une suite  $(x_0, x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$  telle que  $x_0 = x_{p+1}$  et tous les  $x_i$  par ailleurs différents avec  $(x_i, x_{i+1}) \in U$   $0 \leq i \leq p - 1$ .

Une *corde* d'un circuit  $C = (x_0, x_1, \dots, x_p, x_0)$  est un arc  $(x_i, x_j)$  dont les extrémités n'appartiennent pas au même arc du circuit  $C$ .

Une corde  $(x_i, x_j)$  d'un circuit est *courte* si  $j = i + 2$ .

Un *pôle* est un sommet du circuit qui est extrémité terminale d'une corde.

Deux *pôles consécutifs* sont deux extrémités terminales de la forme  $x_i, x_{i+1}$  de deux cordes dans un circuits.

Si  $C(a, b)$  représente un chemin de  $a$  à  $b$  ;  $C(a, b) \& C(b, c)$  est le chemin de  $a$  à  $c$  obtenu par concaténation des deux chemins  $C(a, b)$  et  $C(b, c)$  avec  $C(a, b) \cap C(b, c) = \{b\}$ .

Si  $c$  est sur le chemin élémentaire  $C(a, b)$ , alors  $C(a, b) \setminus C(c, b)$  est un chemin élémentaire de  $a$  à  $c$ , (i.e. le chemin de  $a$  à  $b$  auquel on enlève le chemin  $C(c, b)$ ).

Un chemin  $C(x_0, x_p)$  d'un graphe orienté  $D = (V, U)$  est *minimal* si  $(x_i, x_j) \notin U$  pour tout  $i, j$  tel que  $1 \leq i + 1 < j \leq p$ .

La *parité* d'un chemin est la parité du nombre d'arcs de ce chemin.

### 1.2.4 Types de graphes, arêtes, chaînes, cycles

Un arc  $u = (x, y) \in U$  est dit *symétrique* si  $u^{-1} = (y, x) \in U$ .

Un 1-graphe orienté  $D = (V, U)$  est symétrique si tous ses arcs sont symétriques.

Dans un graphe orienté symétrique, tous les sommets sont reliés dans les deux directions. On pourra donc considérer au lieu d'un arc  $(x, y)$ , une arête  $[x, y]$  qui existe si  $x$  et  $y$  sont adjacents.

La famille des arêtes se note  $E$  et le graphe considéré sans orientation est noté  $G = (V, E)$ .

Un graphe  $G = (V, E)$  sera appelé un graphe *simple* s'il vérifie les deux conditions suivantes:

- $G = (V, E)$  n'a pas de boucles ,
- Dans  $G = (V, E)$ , entre deux sommets quelconques, au plus une arête les relie.

De façon analogue au cas de graphe orienté, on définit les notions de *chaîne élémentaire*, *cycle*.

Un 1-graphe orienté  $D = (V, U)$  est *antisymétrique* si  $(x, y) \in U \implies (y, x) \notin U$  ( $\forall x \in V, \forall y \in V$ ).

Un 1-graphe orienté  $D = (V, U)$  est *transitif* si  $(x, y) \in U, (y, z) \in U \implies (x, z) \in U$  ( $\forall x \in V, \forall y \in V, \forall z \in V$ ).

Un 1-graphe orienté *complet* est un graphe  $D = (V, U)$  tel que  $(x, y) \notin U \implies (y, x) \in U$ .

*Une clique* est un graphe orienté symétrique complet.

*Un tournoi* est un graphe orienté antisymétrique complet.

### 1.2.5 Distance, écartement, centre, rayon

Considérons un graphe orienté connexe  $D = (V, U)$  et deux sommets  $x$  et  $y$  de ce graphe.

On appelle *distance* entre  $x$  et  $y$ , notée  $d(x, y)$ , la longueur d'un plus court chemin de  $x$  à  $y$ . Si le chemin entre  $x$  et  $y$  n'existe pas, on prendra  $d(x, y) = +\infty$ .

Soit  $A \subset V$ , et  $x_0$  un sommet de  $V$ .

On définit  $d(x_0, A) = \min_{y \in A} d(x_0, y)$ .

L'*écartement* d'un sommet  $x_0$  est le nombre  $e(x_0) = \max_{\substack{y \in V \\ y \neq x_0}} d(x_0, y)$ .

L'*anti-écartement* d'un sommet  $x_0$  est le nombre  $e^*(x_0) = \max_{\substack{y \in V \\ y \neq x_0}} d(y, x_0)$ .

Un *centre* (respectivement *anticeutre*) est un sommet d'écartement (respectivement anti-écartement) minimum.

Le *rayon*  $\rho(D)$  (respectivement l'*antirayon*  $\rho^*(D)$ ) de  $D$  est l'écartement (respectivement l'anti-écartement) d'un centre (respectivement anticeutre) de  $D$ .

### 1.2.6 Connexité, forte connexité

Un graphe  $G = (V, E)$  est *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts  $x$  et  $y$  ; il existe une chaîne joignant  $x$  et  $y$ .

La relation " $x = y$  ou  $x \neq y$  et il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$  " est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences de cette relation sont *les composantes connexes* de  $G$ .

Un graphe orienté  $D = (V, U)$  est *fortement connexe* si  $(\forall x \in V), (\forall y \in V) d(x, y) < +\infty$  et  $d(y, x) < +\infty$  i.e. pour toute paire de sommets  $x, y$ , ils existent un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$ .

La relation  $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow "x = y$  ou  $x \neq y$  et il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x"$  est une relation d'équivalence. les classes d'équivalence de cette relation sont les composantes fortement connexes de  $D$ , qui forment une partition de  $V$  en sous-graphes *fortement connexes*.

On appelle graphe *réduit*  $D_r$  le quotient du graphe orienté  $D$  par la relation de forte connexité  $D_r = D / \mathfrak{R}$ ; les sommets de  $D_r$  sont donc les composantes fortement connexes et deux composantes fortement connexes  $C_i$  et  $C_j$  sont reliées par un arc de  $C_i$  vers  $C_j$  si et seulement s'il existe au moins un arc d'extrémité initiale d'un sommet de  $C_i$  et d'extrémité terminale d'un sommet de  $C_j$ . Le graphe  $D_r$  est sans circuit.

Une composante fortement connexe  $C$  est dite *terminale* si  $\Gamma^+(C) \subset C$ .

### 1.2.7 Mise en ordre d'un graphe sans circuit

Soit un graphe orienté  $D = (V, U)$  sans circuit.

Ordonner un graphe orienté revient à disposer dans un certain ordre ses sommets, tel que les arcs soient dans le même sens. On définit pour cela les différents niveaux des sommets du graphe. Alors *la mise en ordre* d'un graphe orienté sans circuit est la détermination des niveaux  $N_0, N_1, \dots, N_k$  qui forment une partition de  $V$ .

On construit les sous-ensembles  $N_0, N_1, \dots, N_k$  par le procédé suivant:

$$N_0 = \{x \in V \mid \Gamma^-(x) = \emptyset\}$$

$$N_1 = \{x \in V - N_0 / \Gamma^-(x) \subset N_0\}$$

.

.

.

$$N_k = \left\{ x \in V - \bigcup_{i=1}^{k-1} N_i / \Gamma^-(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} N_i \right\}$$

Ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les sommets i.e  $N_k \neq \emptyset$  et  $N_{k+1} = \emptyset$ .

$(x_i, x_j)$  est un arc avec  $x_i \in N_i$  et  $x_j \in N_j$  si et seulement si  $i < j$ .

### 1.2.8 Ensemble stable, ensemble absorbant

Soit  $D = (V, U)$  un 1-graphe orienté sans boucles.

Un *stable* dans  $D$  est un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$  tel que  $\Gamma^-(S) \cap S = \emptyset$ , autrement dit; les sommets de  $S$  sont deux à deux non adjacents.

Un *absorbant* dans  $D$  est un sous-ensemble de sommets  $A \subseteq V$  tel que  $\Gamma^-(A) \cup A = V$ , autrement dit; tout sommet  $x$  qui n'est pas dans  $A$ , possède au moins un successeur dans  $A$ .

### 1.3 Complexité Algorithmique

Les problèmes des graphes se rattachent à la grande classe des problèmes d'optimisation combinatoire.

Un problème d'optimisation combinatoire est un problème qui consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble de solutions réalisables souvent très élevés.

Quand on rencontre un problème d'optimisation combinatoire, on aimerait bien savoir s'il existe un algorithme efficace pour le résoudre.

Un *algorithme* de résolution d'un problème ( $P$ ) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires (la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles, ... etc.), transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème ( $P$ ) en une chaîne de caractères représentant ses résultats.

Pour évaluer et classer les divers algorithmes disponibles pour un problème, il nous faut une mesure de performance, ceci est obtenu par la notion de complexité algorithmique, qui constitue un paramètre important pour mesurer l'efficacité de l'algorithme.

La complexité algorithmique consiste à évaluer le nombre d'opérations caractéristiques de l'algorithme dans le pire des cas. Ce nombre d'opérations élémentaires est exprimé à l'aide de la taille des données ( i.e. en fonction du nombre des bits nécessaire pour coder les données en machine).

En introduisant, (en 1965) la notion d'algorithme efficace ou polynomial, dans l'étude des couplages, J. Edmonds utilise la définition de la classe  $\mathcal{P}$  des problèmes dits "faciles" ou polynomiaux; et c'est Cook puis Karp qui ont défini la classe des problèmes dits "difficiles" noté  $\mathcal{NP}$  et les problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets.

Un problème est dit *polynomial* si le nombre  $f(n)$  d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille  $n$ , est borné par un polynôme en  $n$  i.e. si  $f(n) \leq cn^k$ , où  $c$  et  $k$  sont des constantes, on dira que  $f(n)$  est  $O(n^k)$ , ou encore qu'un tel algorithme a une complexité  $O(n^k)$ .

Un problème est dit appartenir à la "classe  $\mathcal{P}$ " s'il existe un algorithme polynomial qui le résout.

A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance ou de décision.

Un problème de décision est une classe d'énoncés auxquels on doit répondre par oui ou non. En d'autres termes chaque énoncé est une instance du problème dont la solution n'appartient qu'à l'ensemble  $\{0, 1\}$ .

Un algorithme non déterministe est un algorithme qui comporte des instructions de choix, si le "bon" choix est effectué, le temps de calcul est polynomial, par contre, si on énumère tous les choix possibles, l'algorithme non déterministe se transforme en un algorithme déterministe nécessitant un temps de calcul exponentiel.

Un problème de décision est dit appartenir à la "classe  $\mathcal{NP}$ " (problèmes non déterministes polynomiaux) s'il peut être résolu en un temps polynomial par un algorithme non déterministe (c'est-à-dire, on peut vérifier en un temps polynomial, qu'une solution proposée ou devinée permet d'affirmer la réponse "oui").

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$ . Mais la classe  $\mathcal{NP}$  contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. Cependant, la conjecture proposée par Cook;  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  reste sans preuve.

On dit qu'un problème  $(P_1)$  se réduit en temps polynomial à un problème  $(P_2)$ , s'il existe un algorithme pour  $(P_1)$  qui fait appel à un algorithme de résolution de  $(P_2)$  et si cet algorithme de résolution de  $(P_1)$  est polynomial lorsque la résolution de  $(P_2)$  est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe  $\mathcal{NP}$  est dit  $\mathcal{NP}$ -complet, si tout problème de la classe  $\mathcal{NP}$  peut être réduit en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe  $\mathcal{NP}$ .

Les problèmes  $\mathcal{NP}$ -durs sont les problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est  $\mathcal{NP}$ -complet est  $\mathcal{NP}$ -dur.

## CHAPITRE 2

# NOYAUX DANS LES GRAPHEES ORIENTES

### 2.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre nous donnons la définition et les théorèmes d'existence de noyaux dans les graphes orientés et dans la deuxième partie, nous exposons une nouvelle démonstration du théorème de P. Duchet.

### 2.2 Définitions

A partir du concept de "*Solution*" d'un jeu à  $n$  joueurs dû à J. Von Neumann et O. Morgenstern; C. Berge a introduit la notion de *noyau* et l'a reliée à la fonction de *Grundy*.

Un *noyau* dans  $D$  est un sous-ensemble de sommets  $N \subseteq V$  qui est un stable et un absorbant dans  $D$ .

$D$  est *noyau-parfait* si seulement si tout sous-graphe orienté de  $D$  (y compris  $D$ ) possède un noyau.

$\emptyset$  n'est pas un noyau

Dans un graphe orienté, le noyau n'existe pas toujours et s'il existe alors il n'est pas nécessairement unique.

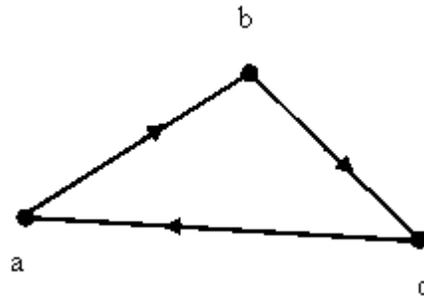


Figure 2.1 Graphe orienté sans noyau

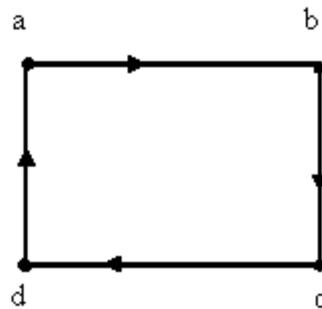


Figure 2.2 Graphe orienté avec deux noyaux  $\{a, c\}$  et  $\{b, d\}$

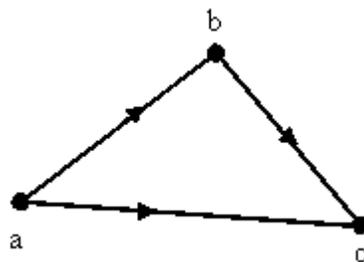


Figure 2.3 Graphe orienté avec un unique noyau  $\{c\}$

L'intérêt du concept de *noyau* ne réside pas seulement dans son application à la théorie des jeux, mais aussi à la logique et même aux problèmes de décision; afin d'illustrer ces applications, nous citons quelques exemples.

**Notation 2.1.** *On appellera un digraphe un graphe orienté, emprunté au mot anglais "directed graph".*

**Exemple 2.2.** *Théorie des jeux [1]*

Supposons que  $n$  joueurs, que l'on désignera par  $(1), (2), \dots, (n)$  peuvent se concerter pour choisir une situation  $x$  dans un ensemble  $X$ ; si le joueur  $(i)$  préfère la situation  $a$  à la situation  $b$ , on écrira  $a \succeq^i b$ ; et  $\succeq^i$  est un préordre total. Les préférences individuelles  $\succeq^i$  peuvent ne pas être compatibles; et par conséquent il est nécessaire d'introduire la notion du préférence efficace  $\succ$ . La situation  $a$  est dite préférée efficacement à  $b$ , s'il existe un ensemble de joueurs qui préfèrent  $a$  à  $b$  et qui sont capables s'ils le veulent de faire prévaloir leur point de vue; si en outre  $b \succ c$  il existera un ensemble de joueurs qui fera prévaloir  $b$  à  $c$ , mais comme ce n'est pas nécessairement le même, on peut ne pas avoir  $a \succ c$ , et la relation  $\succ$  n'est pas nécessairement transitive.

Considérons le digraphe  $D = (V, U)$  où  $\Gamma^+(x)$  désigne l'ensemble des situations préférées efficacement à  $x$ . Soit  $N$  un *noyau* du digraphe  $D$  (s'il existe). Von Neumann et Morgenstern ont proposé de limiter le jeu aux éléments de  $N$ . Comme  $N$  est stable; alors toute situation de  $N$  ne peut pas être préférée efficacement à une autre situation de  $N$  et comme  $N$  est absorbant, alors à toute situation  $x \notin N$ , on peut préférer efficacement une situation de  $N$  ce qui écarterait immédiatement la situation  $x$ .

**Exemple 2.3.** *Base d'axiome d'une théorie [1]*

Considérons une théorie c'est-à-dire un ensemble de propositions  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , que l'on peut représenter par des points. Traçons l'arc  $(p_i, p_j)$  si l'on peut déduire logiquement la proposition  $p_i$  de la proposition  $p_j$  (ou :  $p_j \implies p_i$ ); on obtient un graphe orienté transitif  $D = (V, U)$ , car:

$$(p_i, p_j) \in U, (p_j, p_k) \in U \implies (p_i, p_k) \in U.$$

On se propose de déterminer une base de proposition dite "axiomes" parmi toutes les propositions, avec les deux propriétés suivantes:

- (1) toute proposition de la théorie peut se déduire d'un axiome de la base;
- (2) aucun axiome de la base ne peut se déduire d'un autre axiome.

Le problème consiste donc à construire un noyau du digraphe  $D$ .

**Exemple 2.4.** *Problème de décisions [2]*

Cet exemple est concret.

Un gouvernement ayant décidé de répartir trois milliards de Francs en vue de diminuer la mortalité sur les routes, on propose cinq initiatives: augmentation du nombre de gendarmes, construction d'autoroutes, mise en place des signaux lumineux à tous les carrefours, récompenses aux meilleurs conducteurs et la gratuité des transports publics. Il charge un groupe de recueillir les préférences du public et ce groupe parvient à établir le digraphe suivant où les cinq sommets représentent les cinq initiatives dans l'ordre repris ci-dessus où un arc  $(x_i, x_j)$  existe s'il est certain que la population préfère l'initiative  $x_j$  à l'initiative  $x_i$ .

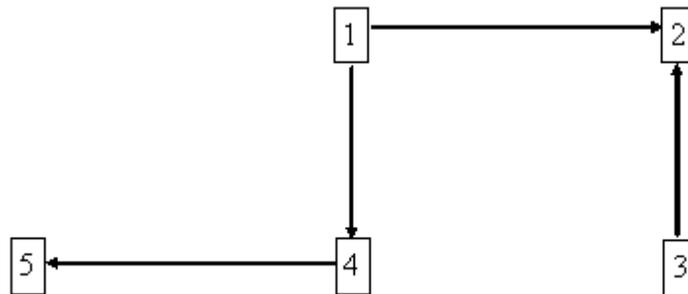


Figure 2.4 La représentation graphique du problème

L'ensemble qui contient les sommets 2, 5, constitue le noyau dans le digraphe, c'est l'ensemble qui ne contient pas les mauvaises actions, ce qui justifie l'omission des initiatives 1, 3, 4. Le décideur peut consacrer un budget de 1.5 milliards de Francs à chacune des initiatives 2 et 5 (si bien sûr, il n'arrive pas à trancher entre les deux initiatives).

## 2.3 Propriétés du noyau

**Proposition 2.5.** [1] Si  $N$  est un noyau d'un digraphe  $D$ , alors  $N$  est un stable maximal et un absorbant minimal (par rapport à l'inclusion).

Preuve. Considérons  $N$  un noyau du digraphe  $D = (V, U)$ .

1) Supposons que  $N$  n'est pas un stable maximal c'est-à-dire  $\exists x \in V - N$  tel que  $x$  n'est pas relié à aucun sommet de  $N$ , donc il n'est pas absorbé par  $N$ , contradiction avec la définition de  $N$ .

2) Supposons que  $N$  n'est pas un absorbant minimal c'est-à-dire  $\exists x \in N$  tel que  $N - \{x\}$  est un absorbant, donc  $x$  est absorbé par un sommet de  $N - \{x\}$  d'où  $N \cap \Gamma^-(N) \neq \emptyset$ . Contradiction avec la stabilité de  $N$ .  $\square$

A partir de la constatation qu'un noyau dans un digraphe n'existe pas toujours, une question se pose d'une manière naturelle: " Quelles sont les propriétés structurelles d'un digraphe qui impliquent l'existence d'un *noyau* ?".

Le théorème suivant qui est dû à Berge, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous ensemble de sommets dans un digraphe soit un *noyau*.

**Théorème 2.6.** [1]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $N \subset V(D)$  soit un *noyau* d'un digraphe  $D = (V, U)$  est que sa fonction caractéristique  $\varphi_N(x)$  vérifie

$$\forall x \in V; \varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) \text{ avec } \varphi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{si } x \notin N \end{cases}$$

Si  $\Gamma^+(x) = \emptyset$ , on posera par convention  $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$ .

### 2.3.1 Noyaux et fonctions de Grundy

Le concept de *fonction de Grundy* a été introduit par P. M. Grundy; en 1939, pour des digraphes sans circuits, puis étendu en 1956, par C. Berge et M. P. Schützenberger aux digraphes quelconques.

Considérons un 1-graphe orienté, sans boucles  $D = (V, U)$ .

Par définition, une fonction  $g : V \rightarrow \mathbb{N}$  est dite une fonction de Grundy, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- (1)  $g(x) = k > 0$ , entraîne que, pour tout  $j < k$  il existe un  $y \in \Gamma^+(x)$  avec  $g(y) = j$ .
- (2)  $g(x) = k$ ; entraîne que tout  $y \in \Gamma(x)$  vérifie  $g(y) \neq k$ .

Une fonction de *Grundy* n'existe pas toujours.

Un digraphe peut admettre plusieurs fonctions de *Grundy*.

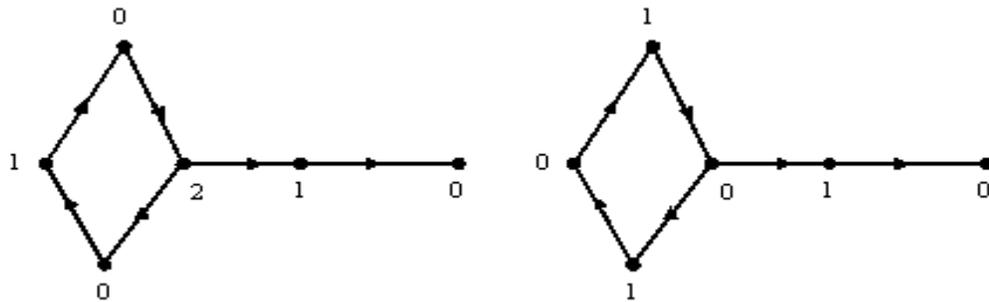


Figure 2.5 Un digraphe avec deux fonctions de Grundy [1]

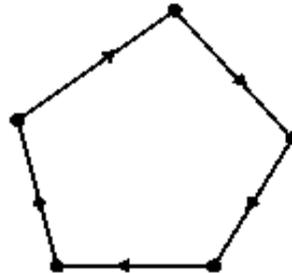


Figure 2.6 Un graphe orienté qui n'admet pas une fonction de Grundy

**Proposition 2.7.** [1] *Si un digraphe  $D$  admet une fonction de Grundy  $g$ , alors  $D$  a un noyau. En effet, l'ensemble  $S = \{x \in V / g(x) = 0\}$  est un noyau de  $D$ , puisque l'on a simultanément:*

- (1)  $x \in S \implies g(x) = 0 \implies \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) > 0 \implies \Gamma^+(x) \cap S = \emptyset$ .

$$(2) x \notin S \implies g(x) > 0 \implies \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) = 0 \implies \Gamma^+(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie, on peut vérifier que le digraphe de la figure 2.7 admet  $\{d\}$  comme *noyau*, mais il n'admet pas de fonction de *Grundy*.

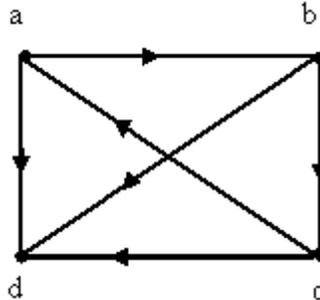


Figure 2.7 Un digraphe possédant un noyau  
mais n'admettant pas de fonction de Grundy [1]

**Théorème 2.8.** [1] *Si  $D$  est un graphe orienté noyau-parfait alors  $D$  admet une fonction de Grundy.*

**Corollaire 2.9.** *Un digraphe symétrique admet une fonction de Grundy.*

*Un digraphe transitif admet une fonction de Grundy.*

*Un digraphe sans circuits de longueur impaire admet une fonction de Grundy.*

## 2.4 Méthodes de démonstration d'existence du noyau

Pour montrer qu'un digraphe est noyau-parfait on peut utiliser trois moyens:

### 2.4.1 La première méthode

Elle consiste en se donnant des conditions d'existence d'arcs symétriques sur les circuits, à se ramener aux théorèmes connus de Von Neumann (tout digraphe sans circuits est

noyau-parfait) et de Richardson (tout digraphe sans circuits impairs est noyau-parfait), en réorientant une partie de l'ensemble des arcs du digraphe.

Une réorientation  $D'$  d'un digraphe  $D$  est une orientation induite du digraphe  $D$  dont certains arcs symétriques deviennent des arcs antisymétriques. Si le digraphe  $D'$  admet un noyau noté  $N$ , alors ce dernier est un noyau du digraphe  $D$ .

Cette méthode a été élaborée par P. Duchet en montrant le Théorème 2.16 que nous utilisons dans ce mémoire comme un outil dans la nouvelle démonstration du Théorème 2.22.

### 2.4.2 La deuxième méthode

Cette méthode permet, lorsque le digraphe  $D$  satisfait à certaines conditions, en supposant que tout sous-digraphe est noyau-parfait de construire un noyau du digraphe  $D$  au moyen d'une certaine procédure.

Des méthodes constructives différentes ont été utilisées par plusieurs auteurs P. Duchet, H. Meyniel, H. Jacob et M. Blidia. On a utilisé une parmi ces méthodes dans notre démonstration du Théorème 2.22.

### 2.4.3 La troisième méthode

L'idée de cette méthode est de se servir de compositions nouvelles de digraphes noyaux-parfaits. Elle permet de construire un digraphe noyau-parfait à partir d'autres digraphes noyaux-parfaits. C'est ainsi que H. Jacob [3] et H. Meyniel [4] ont montré que le joint de deux digraphes noyaux-parfait est noyau-parfait.

**Définition 2.10.** *On appelle joint de deux digraphe  $D_1 = (V_1, U_1)$  et  $D_2 = (V_2, U_2)$  et on note  $D_1JD_2$  le digraphe  $D = (V, U)$  dont l'ensemble des sommet est  $V = V_1 \cup V_2$  et dont la restriction à  $V_1$  ou  $V_2$  est identique à  $D_1$  ou  $D_2$  respectivement avec les conditions supplémentaires:*

- (1) *Si  $x \in V_1, y \in V_2, (x, y)$  ou  $(y, x) \in U$*
- (2) *Tout 3 – circuit empruntant des sommets de  $V_1$  et  $V_2$  admet deux cordes*

## 2.5 Quelques sous classes des digraphes noyau-parfaits

Citons dans ce paragraphe quelques sous-classes de digraphes noyau-parfaits.

Une propriété  $P$  d'un digraphe  $D$  est dite *héréditaire* si tous les sous-digraphes d'un digraphe ayant la propriété  $P$  ont cette propriété. Donc pour montrer qu'un digraphe  $D$  possédant une propriété héréditaire  $P$ , est noyau parfait, il suffit de montrer que  $D$  admet un *noyau*.

**Théorème 2.11.** [1] *Si  $D = (V, U)$  est un digraphe transitif; tout ensemble absorbant minimal est de cardinalité  $\beta(D)$  (ie: nombre minimum de sommets de  $D$  qui absorbent tous les sommets) ; en outre, un ensemble  $N \subseteq V$  est un noyau si et seulement si c'est un ensemble absorbant minimal.*

**Corollaire 2.12.** *Un digraphe transitif possède un noyau ; et tous ses noyaux ont la même cardinalité.*

**Théorème 2.13.** [1] *Si  $D = (V, U)$  est un digraphe symétrique; alors  $D$  admet un noyau; en outre,  $N \subseteq V$  est un noyau si et seulement si c'est un ensemble stable maximal.*

**Théorème 2.14.** [5] *Un digraphe sans circuits admet un noyau; en outre, ce noyau est unique.*

Idée sur la preuve: La preuve se fait par induction sur le nombre des sommets. Soit un digraphe  $D = (V, U)$  d'ordre  $n$ , sans circuit. Comme le digraphe  $D$  est sans circuit, donc il admet une mise en ordre de ses sommets c'est-à-dire il existe une partition de  $V$  en  $R_0, R_1, \dots, R_k$  où  $R_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ) est stable. On montre que le digraphe  $D$  admet un noyau par induction sur le nombre de sommets.  $D[V - (R_k \cup \Gamma^-(R_k))]$  est un sous digraphe d'ordre  $< n$ , sans circuit donc il admet par induction un noyau qu'on notera  $N'$ . Maintenant il est clair que  $(N' \cup R_k)$  est un noyau (stable et absorbant) du digraphe  $D$ .  $R_k$  est obligatoirement dans le noyau. Le noyau est unique car on l'a trouvé d'une

façon unique:  $R_k$  est dans tout noyau  $N$  de  $D$  d'où  $\Gamma^-(R_k)$  n'est contenu dans aucun noyau. Maintenant si  $N''$  est un deuxième noyau de  $D$  alors  $N'' \setminus R_k$  est un noyau de  $D \setminus (R_k \cup \Gamma^-(R_k))$  contradiction avec l'induction.

**Théorème 2.15.** [6] *Un digraphe sans circuits impairs est noyau-parfait; (le noyau n'est pas nécessairement unique).*

Idée sur la preuve: La preuve se fait par induction sur le nombre des sommets. Soit  $D = (V, U)$  un digraphe sans circuit impair. Considérons le digraphe condensé ou réduit du digraphe  $D$ . Toute composante fortement connexe admet un noyau. On considère les composantes fortement connexes terminales  $C_i$  et leurs noyaux  $N_i$  ;  $i = 1, \dots, k$  (on montre facilement que chaque composante fortement connexe est bipartie (Un graphe  $G$  est dit biparti si l'ensemble de ses sommets admet une partition en deux stables)). Le sous digraphe engendré par  $V - \left\{ \bigcup_{i=1}^k (C_i \cup \Gamma^-(N_i)) \right\}$  admet un noyau (par hypothèse d'induction) qu'on notera  $N'$ . Le sous ensemble  $N' \cup \left( \bigcup_{i=1}^k N_i \right)$  est un noyau du digraphe  $D$ .

**Théorème 2.16.** [7] *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques est noyau-parfait.*

**Théorème 2.17.** [7] *Un digraphe tel que tout circuit a au moins un arc symétrique est noyau-parfait.*

**Théorème 2.18.** [8] *Un digraphe tel que tout circuit impair  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$  a deux cordes de la forme  $(v_i, v_{i+2})$  et  $(v_{i+1}, v_{i+3})$  est noyau-parfait.*

**Théorème 2.19.** [9] *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux pôles consécutifs est noyau-parfait.*

**Définition 2.20.** *Un digraphe est de parité si et seulement si pour tout couple de sommets distincts, les chemins minimaux reliant ce couple de sommets ont la même parité.*

**Théorème 2.21.** [10] *Un digraphe de parité est noyau-parfait.*

## 2.6 Etude algorithmique de la recherche de noyau dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits

Le problème de recherche d'un noyau dans un digraphe est en général un problème  $\mathcal{NP}$ -complet.

Néanmoins, des algorithmes polynomiaux ont été proposés pour résoudre ce problème dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits.

En effet, en utilisant les algorithmes polynomiaux fournis dans [11], on peut déterminer un noyau dans un digraphe  $D = (V, U)$  s'il est sans circuit en  $O(|V|^2)$ , et en  $O(|U| \cdot |V|^2)$  si  $D$  est sans circuit impair.

D'autre part, pour les graphes munis d'une orientation, des algorithmes polynomiaux ont été établis pour la recherche de noyau dans certaines de ces classes de graphes.

Un algorithme en au plus  $(|V|^4 + |V|)$  opérations, pour un graphe  $G = (V, E)$  triangulé (tout cycle de longueur  $> 3$  admet une corde) muni d'une orientation normale (toute clique possède un puits) est donné dans [11].

Trois autres algorithmes polynomiaux sont élaborés dans [12].

Le premier nécessite  $O(|V|^2 \cdot |E|)$  opérations pour un graphe de comparabilité  $G = (V, E)$  (ses arêtes peuvent être orientés transitivement et sans circuits) relativement à M-orientation (tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques). Le deuxième détermine un noyau dans un graphe de permutation  $G = (V, E)$  (si  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  il existe une permutation  $P$  des entiers  $1, 2, \dots, n$  telle que  $v_i$  est adjacent à  $v_j$  dans  $G$  si et seulement si  $\frac{P(i)-P(j)}{i-j} < 0$ ) muni d'une orientation normale, en temps polynomial  $O(|V|^2 \cdot |E|)$ . Le troisième qui est de complexité  $O(|V| \cdot |E|)$  permet de déterminer un noyau dans un graphe  $G = (V, E)$  sans  $P_4$  ( $G$  ne possède pas un sous-graphe avec 4 sommets  $a, b, c, d$  et les arêtes  $ab, bc$  et  $cd$ ) muni d'une orientation normale.

## 2.7 Autre preuve du théorème de P. Duchet [13]

Dans [14]; P. Duchet a posé la conjecture suivante : " Soit  $D$  un digraphe tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes; alors  $D$  est *noyau parfait*". Puis il a affirmé

cette conjecture dans le cas où tout 3-circuit est symétrique, en donnant le théorème suivant:

**Théorème 2.22.** [14] *Un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique et tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait.*

Nous allons donner une autre preuve de ce résultat en utilisant la méthode de réorientation et une méthode constructive de noyau.

### 2.7.1 Méthode de réorientation

**Lemme 2.23.** *Si  $D$  est un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique alors il existe une réorientation  $D'$  du digraphe  $D$  sans 3-circuits.*

Preuve. Pour obtenir le digraphe  $D'$  à partir de  $D$ ; nous choisissons un ordre total des sommets de  $D = (V, U)$ ;  $|V| = n$ ; par exemple  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Nous supprimons tous les arcs de la forme  $(x_i, x_j)$  ou  $j > i$  et  $(x_i, x_j)$  est un arc symétrique. Le digraphe obtenu est bien une réorientation  $D'$  sans 3-circuits.  $\square$

**Théorème 2.24.** *Soit  $D$  un digraphe tel que tout 3-circuit est symétrique; et tout circuit impair de  $D$  possède deux cordes courtes; alors il existe une réorientation  $D'$  de  $D$ , tel que  $D'$  est un digraphe antisymétrique et tout circuit impair possède deux cordes courtes.*

Preuve. D'après le lemme 2.23;  $D'$  est un digraphe antisymétrique et sans 3-circuits, obtenu à partir de  $D$ . Prouvons que  $D'$  vérifie les conditions de ce théorème. Supposons qu'au contraire,  $D'$  contient un circuit impair  $C$  n'ayant pas deux cordes courtes, comme ce circuit est aussi un circuit de  $D$ ; alors il possède deux cordes courtes dans  $D$ . Soit  $(x_i, x_{i+2})$  une corde courte de  $C$  dans  $D$ , telle que  $(x_i, x_{i+2})$  n'est pas dans  $D'$ . Donc  $(x_i, x_{i+2})$  est un arc symétrique dans  $D$  et  $(x_{i+2}, x_i)$  doit être un arc dans  $D'$ . Maintenant  $(x_i, x_{i+1})$  et  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  avec  $(x_{i+2}, x_i)$  forment un 3-circuit dans  $D'$ , contradiction avec le fait que  $D'$  est sans 3-circuits.  $\square$

**Remarque 2.25.** *Si  $D$  est un digraphe tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes (la conjecture), alors  $D$  ne possède pas forcément une réorientation sans 3-circuit (voir figure 2.8).*

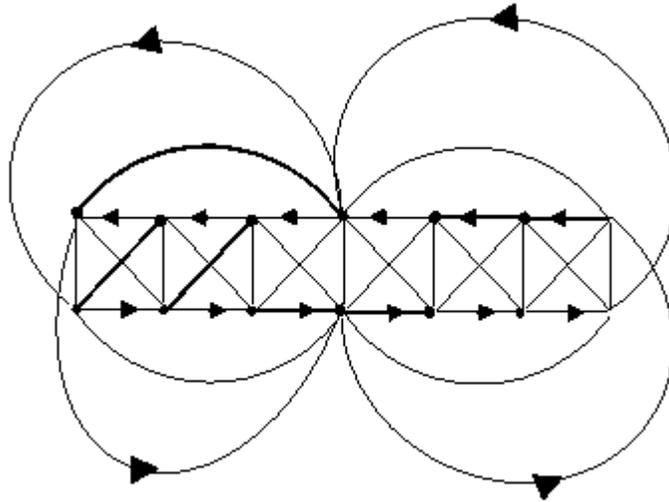


Figure 2.8 Un digraphe vérifiant les conditions de la conjecture de P. Duchet mais ne possède pas une réorientation sans 3-circuit

L'orientation de l'arc symétrique du milieu dans une direction force tous les autres arcs symétriques d'être orientés dans une direction. On crée, donc un 3-circuit pour chaque réorientation de ce digraphe.

D'après le lemme suivant, on doit montrer que le digraphe obtenu par une réorientation du digraphe qui vérifie les conditions du théorème, est *noyau-parfait*. Pour cela nous utiliserons une méthode constructive

**Lemme 2.26.** [7] *Pour qu'un graphe orienté  $D$  admette un noyau, il faut et il suffit qu'une réorientation des arcs symétriques de  $D$  produise un digraphe avec noyau.*

### 2.7.2 Méthode constructive

**Remarque 2.27.** *Un digraphe antisymétrique tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes est nécessairement sans 3-circuits.*

**Théorème 2.28.** *Un digraphe  $D$  antisymétrique tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait.*

Preuve. Il est clair que les conditions données dans les hypothèses du théorème sont héréditaires pour les sous-digraphes, donc il suffit de montrer que  $D$  admet un noyau. Pour cela, on procède par induction sur le nombre de sommets de  $D$ .

Le théorème est vrai pour le digraphe ayant moins de quatre sommets.

Soit  $D$  un digraphe d'ordre  $n \geq 4$ , vérifiant les hypothèses du théorème, et supposons que le résultat est vrai pour tous les digraphes d'ordre  $n'$  plus petit que  $n$ . Soit  $V$  l'ensemble des sommets de  $D$ , et  $x \in V$ . Comme  $D - x$  ( i.e.  $D[V - \{x\}]$  ) est le sous-digraphe engendré par  $V - \{x\}$  d'ordre  $n' < n$ , donc il possède un noyau  $N$ . Si  $x$  n'a pas de voisins dans  $N$  ou  $x$  a un successeur dans  $N$ , alors  $N \cup \{x\}$  ou  $N$  est un noyau de  $D$  respectivement. Nous supposons que  $x$  n'a pas de successeurs dans  $N$ , mais il a au moins un prédécesseur dans  $N$ . Nous construisons deux suites  $N_0, N_1, \dots, N_k$  et  $B_0, B_1, \dots, B_k$  de parties de  $N$  et  $V - N$  respectivement par le procédé suivant:

$$B_0 = \Gamma^+(x)$$

$$N_0 = \Gamma^+(B_0) \cap N$$

$$B_1 = \Gamma^+(N_0) \cap (V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x)))$$

$$N_1 = \Gamma^+(B_1) \cap (N - N_0)$$

$$B_2 = \Gamma^+(N_1) \cap (V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup B_0 \cup \Gamma^-(N_0)))$$

.

.

.

$$B_i = \Gamma^+(N_{i-1}) \cap (V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup (\bigcup_{j=0}^{i-2} B_j \cup \Gamma^-(N_j))))$$

$$N_i = \Gamma^+(B_i) \cap (N - \bigcup_{j=0}^{i-1} N_j)$$

et soit  $k$  le plus petit entier tel que  $B_{k+1} = \emptyset$

On va montrer que  $N'' = \{x\} \cup (\bigcup_{i=0}^k N_i) \cup N'$  est un noyau de  $D$ , où  $N'$  est un noyau de sous-digraphe  $D[V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup (\bigcup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))))]$  qui existe car  $D[V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup (\bigcup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))))]$  est d'ordre inférieur strictement à celui de  $D$  et donc il possède un noyau par hypothèse d'induction. Pour cela, nous montrons les propriétés suivantes:

(1)  $B_0$  est non vide.

Car sinon, on considère un noyau  $N'$  du sous-digraphe  $D[V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x))]$ , qui existe, par hypothèse d'induction, comme ce dernier sous-digraphe est d'ordre strictement inférieur à celui de  $D$ , et  $N'' = \{x\} \cup N'$  serait un noyau de  $D$ .

(2)  $N''$  est un ensemble absorbant.

Puisque, par construction, un sommet de  $V$  ou bien il est dans  $\{x\} \cup (\bigcup_{i=0}^k N_i) \cup N'$ , ou bien il est absorbé par  $x$  s'il est dans  $\Gamma^-(x)$  ou bien par  $\bigcup_{i=0}^k N_i$  s'il est dans  $\Gamma^-(N_i)$   $i = 0, 1, \dots, k$ ; ou bien par  $N'$  s'il est dans  $V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup (\bigcup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))))$ .

(3)  $N'$  et  $\bigcup_{i=0}^k N_i$  sont des ensembles stables.

Par définition de  $N'$  et  $N$ .

(4)  $x$  n'est relié à aucun sommet de  $N'$ .

Car les sommets adjacents à  $x$  sont  $\Gamma^-(x)$  et  $B_0$  qui ne sont pas contenus dans  $D[V - (\{x\} \cup \Gamma^-(x) \cup (\bigcup_{i=0}^k (N_i \cup \Gamma^-(N_i))))]$  par construction.

(5) Aucun sommet de  $N'$  n'est relié aux sommets de  $N_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Puisque, par construction, un sommet relié à  $N_i$ , appartient forcément à  $\bigcup_{i=0}^k \Gamma^-(N_i)$ .

Il reste à montrer que  $x$  n'est relié à aucun des sommets de  $N_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Nous montrons par induction sur  $i$  que  $x$  ne peut être relié aux sommets de  $N_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Pour  $i = 0$ ,  $x$  ne peut pas être adjacent à  $x'_0 \in N_0$ , sinon on obtient un 3-circuit, contradiction avec la remarque 2.27.

Supposons que  $x$  n'est relié à aucun des sommets de  $N_i$ ;  $0 \leq i \leq p$ , et montrons que  $x$  n'est relié à aucun des sommets de  $N_{p+1}$ . Supposons, qu'au contraire,  $x$  est relié à  $x'_{p+1} \in N_{p+1}$  c-à-d l'arc  $(x'_{p+1}, x)$  existe, et d'après la construction, il existe un chemin élémentaire de  $x$  à  $x'_{p+1}$  empruntant alternativement les sommets de  $B_i$  et les sommets de

$N_i$ . Soit  $C(x, x'_{p+1}) = (x, b_0, x'_0, b_1, x'_1, \dots, b_p, x'_p, b_{p+1}, x'_{p+1})$  ce chemin. Vu les hypothèses du théorème 2.28, le circuit impair  $C(x, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, x)$  contient deux cordes courtes. On remarque que les cordes courtes possibles sont  $(x'_{p+1}, b_0)$  et  $(b_i, b_{i+1})$  où  $i \in \{0, \dots, p\}$ , et il n'existe pas des arcs de la forme suivante:

$$(x'_i, b_j) \quad j > i + 1 \text{ (même avec } x'_i = x) \text{ par définition de } B_{i+1} \quad (2.1)$$

$$(b_j, x'_i) \quad i > j \text{ par définition } N_i \quad (2.2)$$

Montrons que l'arc  $(x'_{p+1}, b_0)$  ne peut pas exister.

Supposons qu'au contraire  $(x'_{p+1}, b_0)$  existe, on considère un chemin élémentaire minimal  $C'(b_0, x'_{p+1})$  de  $b_0$  à  $x'_{p+1}$  induit par les sommets de  $C(x, x'_{p+1})$ , alors on a ou bien  $C_1 = (x, b_0) \& C'(b_0, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, x)$  ou bien  $C_2 = C'(b_0, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, b_0)$  est un circuit impair ayant au plus une corde courte,  $(x'_{p+1}, b_0)$  dans le cas de  $C_1$  et  $(x'_{p+1}, b'_1)$  dans le cas de  $C_2$ , avec  $(b_0, b'_1)$  est un arc de  $C'(b_0, x'_{p+1})$  ceci d'après la minimalité de  $C'(b_0, x'_{p+1})$  et les formules (2.1) et (2.2), d'où la contradiction. Donc  $(x'_{p+1}, b_0)$  ne peut exister. Ainsi les seules cordes courtes possibles sont  $(b_i, b_{i+1})$  où  $i \in \{0, \dots, p\}$ .

Montrons maintenant qu'aucune corde  $(b_i, b_{i+1})$   $i = 0, \dots, p$  ne peut exister.

Supposons qu'au contraire une telle corde existe. Parmi les cordes  $(b_i, b_{i+1})$  avec  $i \in \{0, \dots, p\}$  on prend celle qui a l'indice  $i$  le plus petit et on considère un chemin élémentaire minimal  $C'(x, b_i)$  induit par les sommets de  $C(x, b_i)$  et un chemin minimal  $C'(b_{i+1}, x'_{p+1})$  induit par les sommets de  $C(b_{i+1}, x'_{p+1})$ .

Il est clair qu'on a:

$$\text{ou bien } C_1 = C'(x, b_i) \& (b_i, b_{i+1}) \& C'(b_{i+1}, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, x)$$

ou bien  $C_2 = C'(x, b_i) \& C(b_i, b_{i+1}) \& C'(b_{i+1}, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, x)$  (le chemin  $C(b_i, b_{i+1})$  est de la forme  $(b_i, x'_i, b_{i+1})$ ) est un circuit impair.

Dans le premier cas, si  $C_1$  est un circuit impair, alors les seules cordes courtes possibles sont de la forme  $(b'_{i-1}, b_{i+1})$  et  $(b_i, b'_{i+2})$ , avec  $(b'_{i-1}, b_i)$  et  $(b_{i+1}, b'_{i+2})$  sont des arcs de  $C_1$ . On considère le circuit  $C'_1 = C'(x, b'_{i-1}) \& C(b'_{i-1}, b_i) \& (b_i, b'_{i+2}) \& C'(b'_{i+2}, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, x)$ , il est facile de voir qu'il est impair et il doit contenir deux cordes courtes, vu la minimalité des chemins élémentaires pris et les formules (2.1), (2.2), une de ces deux cordes courtes doit

être de la forme  $(b_j, b_{j+1})$  avec  $b_j$  et  $b_{j+1}$  des sommets du chemin  $C(b'_{i-1}, b_i)$ , contradiction avec le choix de l'indice  $i$ .

Dans le deuxième cas, si  $C_2$  est un circuit impair, la seule corde courte possible est  $(b_i, b_{i+1})$  d'après les formules (2.1), (2.2) et la minimalité des chemins élémentaires qu'on a pris.

Donc le circuit impair  $C(x, x'_{p+1}) \& (x'_{p+1}, x)$  n'admet aucune corde courte, contradiction.

D'où l'arc  $(x'_{p+1}, x)$  ne peut exister.

**Définition 2.29.** *Un graphe simple est de comparabilité si ses arêtes peuvent être orientés transitivement sans circuits.*

□

**Théorème 2.30.** *Si  $D$  est un digraphe tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes et si le graphe non orienté associé au digraphe partiel  $SY(D)$  est un graphe de comparabilité, alors  $D$  est noyau-parfait.*

Preuve. On considère le digraphe partiel  $D'$  obtenu à partir de  $D$ , en prenant les arcs de  $ASY(D)$  et une orientation transitive de graphe non orienté associé au digraphe partiel  $SY(D)$ , qui est un graphe de comparabilité. Alors  $D'$  est un digraphe antisymétrique sans 3-circuits et tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes.  $D'$  est sans 3-circuit, sinon on obtient une contradiction avec l'orientation transitive du graphe non orienté associé au digraphe partiel  $SY(D)$  ou bien avec le fait que tout circuit impair possède deux cordes courtes.  $D'$  est tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes, sinon par un raisonnement similaire utilisé dans la preuve du lemme 2.23, on aura un 3-circuit dans  $D'$ , contradiction. En appliquant le théorème 2.28 au graphe  $D'$ , on en déduit le résultat. □

## CHAPITRE 3

# NOYAU PAR CHEMINS MONOCHROMATIQUES DANS UN DIGRAPHE $m$ -COLORÉ.

### 3.1 Introduction

Au début de ce chapitre, on définit cette notion et on cite quelques résultats principaux en donnant une autre preuve du théorème de Shen Minggang, ensuite on propose un algorithme de la recherche de ce concept.

### 3.2 Définitions

Un digraphe  $D = (V, U)$  est dit  $m$ -coloré si ses arcs sont colorés avec  $m$  couleurs.

Un chemin dans un digraphe  $m$ -coloré est dit *monochromatique* si ses arcs ont la même couleur.

Un circuit dans un digraphe  $m$ -coloré est dit *quasi-monochromatique* si tous ses arcs, à l'exception d'au plus un, ont la même couleur.

*Un tournoi* est un digraphe complet antisymétrique.

On note par  $C_3$  un circuit de longueur trois dont les arcs sont colorés avec trois couleurs distinctes.

$T_3$  est un tournoi transitif d'ordre trois, dont les arcs sont colorés avec trois couleurs distinctes.

*Un noyau par chemins monochromatiques* dans un digraphe  $m$ -coloré  $D = (V, U)$  est un sous-ensemble  $N \subseteq V$  qui satisfait aux deux conditions suivantes:

- 1)  $\forall x, y \in N$ , il n'existe pas dans  $D$  un chemin monochromatique reliant  $x$  et  $y$ .

2)  $\forall x \in V \setminus N$ , il existe dans  $D$  un chemin monochromatique de  $x$  vers un sommet de  $N$ .

**Exemple 3.1.** *Le digraphe de la figure 3.1 est un digraphe d'ordre 5, 3-coloré et il admet  $\{x_2, x_4\}$  comme noyau par chemins monochromatiques, alors que le digraphe de la figure 3.2 qui est un circuit de longueur 3 dont les arcs sont colorés avec 3 couleurs, n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.*

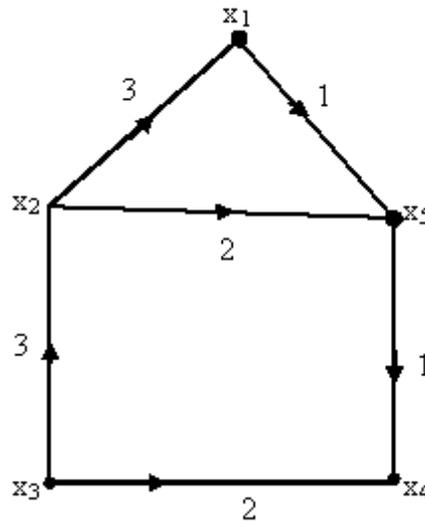


Figure 3.1 Un digraphe 3-coloré

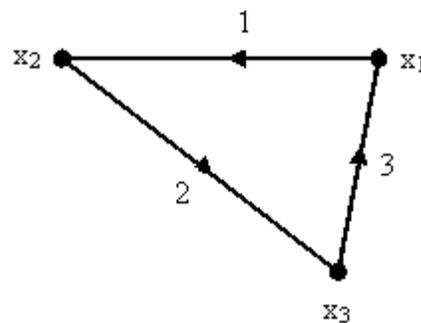


Figure 3.2 Le digraphe  $C_3$

La notion de noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré est plus générale que celle du noyau dans un digraphe; en effet si les arcs d'un digraphe  $D$

sont colorés distinctement alors le noyau par chemins monochromatiques est exactement le noyau dans  $D$ .

On appelle *fermeture par chemins monochromatiques* d'un digraphe  $m$ -coloré  $D = (V, U)$ , le digraphe  $m$ -coloré noté  $\mathcal{C}(D)$  où l'ensemble des sommets  $V(\mathcal{C}(D)) = V$  et l'ensemble des arcs

$$U(\mathcal{C}(D)) = U \cup \bigcup_{i=1}^m \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \text{ coloré avec la couleur } i / \text{ il existe dans } D, \\ \text{un chemin monochromatique de couleur } i \\ \text{reliant les sommets } u \text{ et } v \end{array} \right\}$$

**Exemple 3.2.** la figure suivante montre la fermeture par chemins monochromatiques du digraphe de figure 3.1

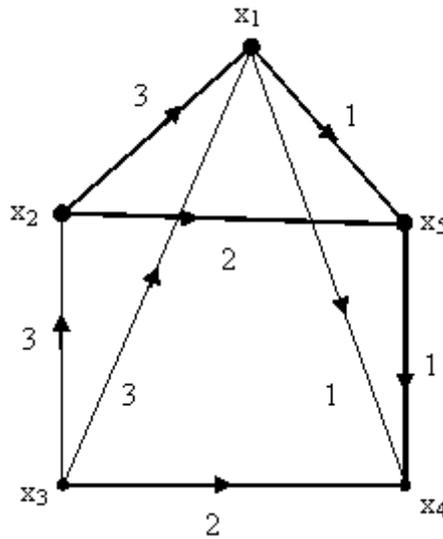


Figure 3.3 La fermeture par chemins monochromatiques

Notons que pour tout digraphe  $D$ ,  $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) \cong \mathcal{C}(D)$ .

Chercher un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $D$   $m$ -coloré revient à chercher un noyau dans la fermeture par chemins monochromatiques de  $D$ ;  $\mathcal{C}(D)$ .

Il est clair que  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques si et seulement si  $\mathcal{C}(D)$  a un noyau.

### 3.3 Quelques résultats

L'existence d'un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré, a été étudiée par plusieurs auteurs suivant les valeurs de  $m$  (nombre de couleurs attribuées aux arcs).

Notons d'abord que pour  $m = 1$ , c'est à dire si un digraphe  $D$  dont les arcs sont colorés avec la même couleur alors la fermeture par chemins monochromatiques  $\mathcal{C}(D)$  est un digraphe transitif qui admet un noyau et donc  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques.

Dans [15], Sands, Sauer et R.Woodrow ont étudié le cas où  $m = 2$  en montrant le théorème suivant:

**Théorème 3.3.** [15] *Tout digraphe 2-coloré a un noyau par chemins monochromatiques.*

En particulier, ils ont prouvé le même résultat si le digraphe est un tournoi.

**Corollaire 3.4.** [15] *Soit  $T$  un tournoi dont les arcs sont colorés avec 2 couleurs alors il existe un sommet  $v$  de  $T$  tel que pour tout sommet  $x$  autre que  $v$  de  $T$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  vers  $v$  ( $\{v\}$  est un noyau par chemins monochromatiques de  $T$ ).*

Dans le même article, Sands, Sauer et Woodrow ont posé le problème suivant : "Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique ( $T$  ne contient pas  $C_3$ ); est-il vrai que  $T$  contient un sommet  $v$  tel que pour tout sommet  $x$  de  $T$  autre que  $v$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  à  $v$  ?

Shen Minggang a montré dans [16] l'existence d'un noyau par chemins monochromatiques dans un tournoi  $m$ -coloré; en ajoutant des conditions sur le tournoi.

**Théorème 3.5.** [16] *Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique et tout tournoi transitif d'ordre 3 est quasi-monochromatique ( $T$  ne contient pas  $C_3$  et  $T_3$ ) alors  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques*

Nous donnons une autre preuve à ce théorème qui est différente à celle donnée par Shen Minggang dans [16], en utilisant le théorème 2.17.

Preuve. Il suffit de montrer que le digraphe  $\mathcal{C}(T)$  (la fermeture par chemins monochromatiques) est tel que tout circuit possède un arc symétrique donc  $\mathcal{C}(T)$  est noyau-parfait, d'où  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques. On peut supposer que  $T$  est fortement connexe sinon par induction on a ce qu'il faut. Comme  $T$  est fortement connexe, alors il existe tous les circuits de longueur  $k$  de  $k = 3$  jusqu'à  $n$ ; ces circuits sont aussi dans  $\mathcal{C}(T)$ . Montrons que tout circuit de  $\mathcal{C}(T)$  admet un arc symétrique. Pour le circuit de longueur 3 ceci est vrai car il est quasi-monochromatique. Supposons que tout circuit de longueur  $k \leq n - 1$  admet un arc symétrique et montrons que ça reste vrai pour un circuit de longueur  $n$ . Soit  $C_n$  un circuit de longueur  $n$  de  $\mathcal{C}(T)$ , ce circuit est un circuit de  $T$ . Il existe deux arcs consécutifs de  $C_n$  ayant deux couleurs différentes sinon tous les arcs de  $C_n$  seront de même couleur et donc  $C_n$  a au moins un arc symétrique par la fermeture par chemins monochromatiques. Soient  $(x_1, x_2)$  et  $(x_2, x_3)$  deux arcs ayant deux couleurs distinctes. Sans perte de généralité, on suppose que la couleur de  $(x_1, x_2)$  est 1 et la couleur de  $(x_2, x_3)$  est 2. Si  $(x_3, x_1)$  existe alors  $(x_1, x_2, x_3, x_1)$  est un circuit de longueur 3 donc il admet un arc symétrique qui est  $(x_1, x_2)$  ou bien  $(x_2, x_3)$  d'où  $C_n$  admet un arc symétrique. Sinon  $(x_1, x_3)$  existe. Alors  $(x_1, x_3, x_4, \dots, x_1)$  est un circuit de longueur  $n - 1$  donc il admet un arc symétrique qui est forcément  $(x_1, x_3)$  sinon c'est fini. Donc il existe un chemin monochromatique de  $x_3$  vers  $x_1$  de couleur  $b$ . Il est facile de voir que  $b \neq 1$  et  $b \neq 2$ , sinon on aura un chemin monochromatique de couleur 1 de  $x_3$  vers  $x_2$  donc  $(x_2, x_3)$  est un arc symétrique, ou bien un chemin monochromatique de couleur 2 de  $x_2$  vers  $x_1$  donc  $(x_1, x_2)$  est un arc symétrique, dans les deux cas  $C_n$  possède un arc symétrique. Alors on peut supposer que  $b = 3$ . Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$  un plus court chemin monochromatique reliant  $x_3$  à  $x_1$  de couleur 3; avec  $u_1 = x_3$  et  $u_t = x_1$  (voir la figure 3.4).

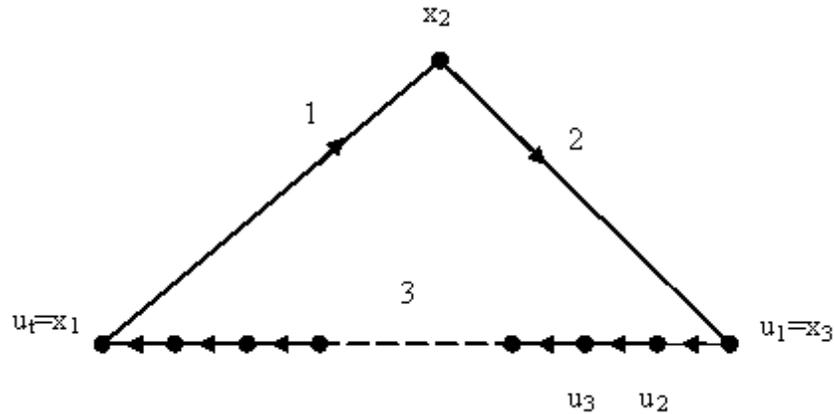


Figure 3.4 Le chemin monochromatique de  $x_3$  à  $x_1$

Considérons la couleur de l'arête entre  $x_2$  et  $u_i$  pour  $1 < i < t$ . Elle ne peut pas être 3, sinon on aura l'arc  $(x_1, x_2)$  ou  $(x_2, x_3)$  est un arc symétrique. Il est facile de voir que les arêtes  $[x_2, u_i]$  et  $[x_2, u_{i+1}]$  sont colorées avec deux couleurs différentes. Alors  $x_2 u_i u_{i+1}$  est un triangle avec trois couleurs différentes, contradiction. Donc ce qu'on a supposé est faux. Alors  $C_n$  possède un arc symétrique.  $\square$

Shen Minggang a montré aussi que cette situation est la meilleur possible pour  $m \geq 5$ , en effet il a exhibé pour  $m \geq 5$  un tournoi  $m$ -coloré  $T$  tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique et  $T$  n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.

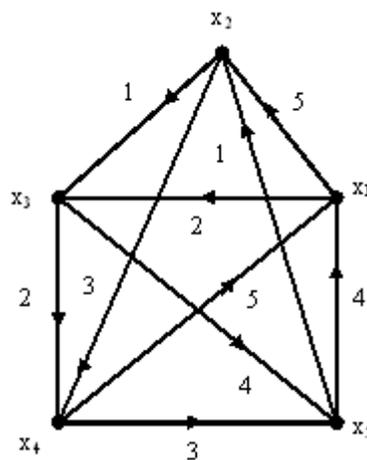


Figure 3.5 Le digraphe  $G_5$

Le digraphe  $G_5$  (figure 3.5) est un digraphe 5-coloré tel que tout circuit de longueur

3 est quasi-monochromatique, mais pourtant il n'a pas de noyau par chemins monochromatiques; ce digraphe est le contre exemple donné par Shen Minggang dans [16].

Pour  $m = 4$  (Si  $T$  est un tournoi 4-coloré qui ne contient pas  $C_3$  alors  $T$  a un noyau par chemins monochromatiques) ce problème a été résolu par H.Galeana-Sánchez et R.Rojas-Monroy [17] en fournissant le contre exemple suivant:

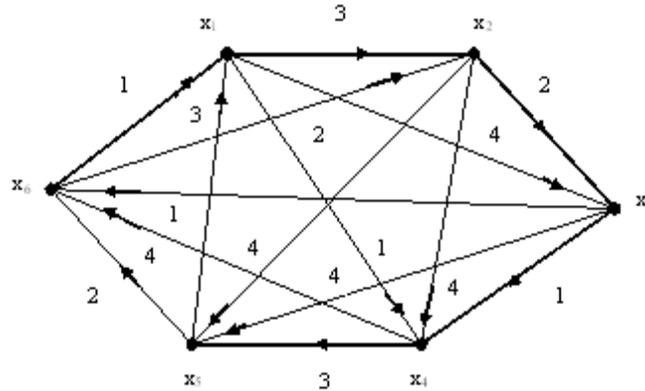


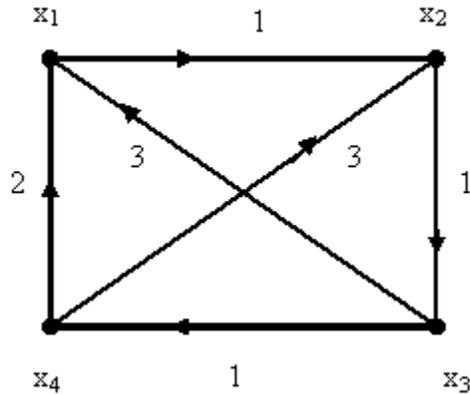
Figure 3.6 Le tournoi  $G_6$

Le tournoi  $G_6$  dans la figure 3.6 est un tournoi 4-coloré d'ordre 6, ne contient pas  $C_3$  et il ne contient pas aussi un sommet  $v$  tel que pour tout sommet  $x$  de  $G_6$  autre que  $v$ , il existe un chemin monochromatique de  $x$  à  $v$ .

Donc la question de Sands, Sauer et Woodrow reste ouverte dans le cas où  $m = 3$ .

H.Galeana-Sánchez a donné des conditions suffisantes pour qu'un tournoi  $m$ -coloré admette un noyau par chemins monochromatiques.

**Théorème 3.6.** [18] *Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors  $\mathcal{C}(T)$  est noyau-parfait et donc  $T$  admet un noyau par chemins monochromatiques.*

Figure 3.7 Un tournoi  $G_4$ 

Le tournoi  $G_4$  de la Figure 3.7 est un tournoi d'ordre 4 vérifiant les conditions du théorème 3.6, il contient un  $T_3$  et il admet  $\{x_4\}$  comme un noyau par chemins monochromatiques.

**Théorème 3.7.** [18] *Soit  $T$  un tournoi  $m$ -coloré tel que tout 3-circuit est monochromatique alors  $\mathcal{C}(T)$  est noyau-parfait.*

Dans [19], H.Galeana-Sánchez a montré le même résultat du théorème 3.6 pour un tournoi  $m$ -coloré en lui supprimant un arc.

**Théorème 3.8.** [19] *Soit  $D$  un digraphe  $m$ -coloré obtenu à partir de la suppression d'un arc d'un certain tournoi  $T_n$  (ie:  $D \cong T_n - (x, y)$ ). Si tout circuit contenu dans  $D$  de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors  $D$  a un noyau par chemins monochromatiques.*

Vu la définition du noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré nous allons proposer un algorithme polynomial qui détermine le noyau par chemins monochromatiques dans un tournoi  $m$ -coloré.

### 3.4 Représentation matricielle d'un digraphe m-coloré

Soit un digraphe  $m$ -coloré  $D = (V, U)$  contenant  $n$  sommets.

Soit  $A$  la matrice associée au digraphe  $D$ . Chaque ligne et chaque colonne correspond à un sommet du digraphe. Ainsi chaque élément de la matrice indique la relation qui existe entre deux sommets.

$$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \{k\} & \text{si } (x_i, x_j) \in U \text{ et } (x_i, x_j) \text{ est coloré avec la couleur } k \\ \emptyset & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Soit un tournoi  $T = (V, U)$  d'ordre 4; 3-coloré.

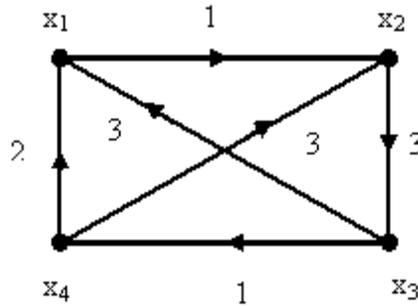


Figure 3.8 Le tournoi  $T$

La matrice associée à  $T$  est la suivante:

$$A = \begin{pmatrix} \emptyset & \{1\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{3\} & \emptyset \\ \{3\} & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{2\} & \{3\} & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

### 3.5 Recherche des chemins monochromatiques

La recherche de chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré  $D = (V, U)$  s'effectue à partir de la matrice  $A$  associée au digraphe  $D$ . Pour rechercher les chemins monochromatiques de longueur  $p$ , on utilise le produit matriciel tel qu'il est défini en algèbre linéaire et on calcule  $A^p$ ; en effet:

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \times A & A^2 &= \left( a_{ij}^{(2)} \right) & 1 \leq i \leq n; & 1 \leq j \leq n \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
A^p &= A^{p-1} \times A & A^p &= \left( a_{ij}^{(p)} \right) & 1 \leq i \leq n; & 1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

$k \in a_{ij}^{(p)}$  alors il existe au moins un chemin monochromatique de longueur  $p$  dont les arcs sont colorés avec la couleur  $k$  reliant le sommet  $x_i$  au sommet  $x_j$ .

**Remarque 3.9.** *Les opérations sont logiques:  $(\cdot) \implies$  arcs adjacents colorés avec la même couleur (ET logique),  $(+) \implies$  chemins monochromatiques en parallèle (OU logique).*

Voici le corps d'un algorithme qui calcule le produit de deux matrices définies comme ci-dessus.

```

pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
  pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
     $c_{ij} \leftarrow \emptyset$ 
    pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
       $c_{ij} \leftarrow c_{ij} \cup (a_{ik} \cap b_{kj})$ 
    fin pour
  fin pour
fin pour
fin;

```

**Exemple 3.10.** *on cherche les chemins monochromatiques de longueur 2 du tournoi  $T$  (voir figure 3.8)*

$$A^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{3\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{3\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

donc il y a au moins deux chemins monochromatiques: un relie  $x_2$  à  $x_1$  coloré avec la couleur 3 et l'autre reliant  $x_4$  à  $x_3$  dont la couleur est 3.

### 3.6 Fermeture par chemins monochromatiques

Soit  $D = (V, U)$  un digraphe  $m$ -coloré d'ordre  $n$ . La matrice de la fermeture par chemins monochromatiques du digraphe  $D$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ ; notée  $F$  définie comme suit:

$$F = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n. \quad A \text{ est la matrice associée au digraphe } D.$$

$$F = (f_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n.$$

$f_{ij}$  indique l'existence des chemins monochromatiques de longueur  $\leq n$  dans le digraphe  $D$  de sommet  $x_i$  vers le sommet  $x_j$ .

Si  $f_{ij} = \emptyset$  alors il n'existe aucun chemin monochromatique de sommet  $x_i$  vers le sommet  $x_j$  dans le digraphe  $D$ .

Voici le corps d'un algorithme qui calcule la somme de deux matrices définies comme ci-dessus.

```

pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
    pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
         $s_{ij} \leftarrow a_{ij} \cup b_{ij}$ 
    fin pour
fin pour
fin;
```

**Exemple 3.11.** *La matrice de la fermeture par chemins monochromatiques du tournoi  $T$  (voir la figure 3.8) est:*

$$F = \begin{pmatrix} \emptyset & \{1\} & \emptyset & \emptyset \\ \{3\} & \emptyset & \{3\} & \emptyset \\ \{3\} & \emptyset & \emptyset & \{1\} \\ \{2, 3\} & \{3\} & \{3\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

### 3.7 Détermination du noyau par chemins monochromatiques

Le noyau par chemins monochromatiques (s'il existe) dans un tournoi  $m$ -coloré est constitué d'un seul sommet, car un tournoi est un digraphe complet et antisymétrique.

Si la matrice de la fermeture par chemins monochromatiques d'un tournoi  $m$ -coloré contient une colonne  $C_i$  dont tous les éléments à l'exception de la diagonale sont différents de  $\emptyset$ , alors le sommet  $x_i$  qui correspond à cette colonne devait être le noyau par chemins monochromatiques de ce tournoi, en effet pour tout sommet  $x_j$  autre que  $x_i$  il existe un chemin monochromatique de ce sommet vers  $x_i$ .

**Exemple 3.12.** *Pour le même tournoi  $T$  (voir la figure 3.8), à partir de sa matrice de la fermeture par chemins monochromatiques  $F$ , le sous-ensemble  $N = \{x_1\}$  est son noyau par chemins monochromatiques.*

On donne ici notre algorithme principal, permettant de déterminer le noyau (s'il existe) dans un tournoi (d'ordre  $n$ )  $m$ -coloré.

On définit d'abord une fonction produit de matrices.

fonction produit( $A, B$  : matrice  $n \times n$ ) : matrice  $n \times n$

variable  $i, j, k$  : entier,  $C$  : matrice  $n \times n$

début

  pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire

    pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire

$c_{ij} \leftarrow \emptyset$

      pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire

```

         $c_{ij} \leftarrow c_{ij} \cup (a_{ik} \cap b_{kj})$ 
    fin pour
  fin pour
  fin pour
fin;
```

Définissons aussi une fonction somme de matrices.

fonction somme( $A, B$  : matrice  $n \times n$ ) : matrice  $n \times n$

variable  $i, j$  : entier,  $S$  : matrice  $n \times n$

```

début
  pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
    pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
       $s_{ij} \leftarrow a_{ij} \cup b_{ij}$ 
    fin pour
  fin pour
fin;
```

Algorithme principal

variable  $i, j, n$  : entier,  $A, B, T$  : matrice  $n \times n$ , Stop : booléen

```

début
   $B \leftarrow A$ 
   $T \leftarrow A$ 
  pour  $i \leftarrow 1$  à  $n - 1$  faire
    début
       $B \leftarrow \text{produit}(B, A);$ 
       $T \leftarrow \text{somme}(T, B);$ 
    fin
  fin pour
  pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
    début
```

```

    Stop ← Faux;
    i ← 1;
    tant que (i ≤ n) et (Stop = Faux) faire
        début
            si tij = ∅ alors
                si (i < j) alors Stop ← Vrai;
            i ← i + 1;
        fin tant que;
    fin pour;
    si Stop = Faux alors
        écrire(" le noyau est x ", j)
    sinon alors
        écrire(" le noyau n'existe pas ")
    fin.

```

La complexité:

$m$  est le nombre de couleurs attribuées aux arcs d'un tournoi d'ordre  $n$ , dont le nombre des arcs est  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Le calcul de la fermeture par chemins monochromatiques nécessite :

(1)  $(n - 1)$  multiplications de matrices

On effectue  $m^2(n - 1)n^3$  opérations (test) concernant  $\cap$  et  $m^2(n - 1)n^3$  opérations concernant  $\cup$ .

(2)  $(n - 1)$  additions des matrices

On effectue  $m^2(n - 1)n^2$  opérations concernant  $\cup$ .

Comme  $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$  donc le nombre d'opérations  $\simeq O(n^8)$ .

## CHAPITRE 4

# (K,L)-NOYAU DANS LES GRAPHES ORIENTÉS UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DU NOYAU

### 4.1 Introduction

Nous donnons dans ce chapitre une étude théorique d'une notion plus générale que la notion du noyau dans les digraphes et nous citons nos remarques sur ce concept.

### 4.2 Définitions

Le concept de  $(k, l)$ -noyau dans les graphes orientés, avec  $k \geq 2$  et  $l \geq 1$  a été introduit par Kwaśnik [20, 21].

Soit  $D = (V, U)$  un digraphe où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $U$  est l'ensemble des arcs. Le digraphe  $D$  est supposé sans boucles et arcs multiples.

On désigne par  $d_D(x, y)$  la longueur du plus court chemin de  $x$  à  $y$  dans  $D$ ;  $\forall x, y \in V$ . Si aucun chemin n'existe, on prend  $d_D(x, y) = +\infty$ .

Soient  $k, l$  deux nombres naturels tels que  $k \geq 2$  et  $l \geq 1$ . Un ensemble  $J \subseteq V$  est dit un  $(k, l)$ -noyau de digraphe  $D$  si

- (1)  $\forall x, x' \in J; x \neq x'$  on a  $d_D(x, x') \geq k$ .
- (2)  $\forall y \in (V - J); \exists x \in J$  tel que  $d_D(y, x) \leq l$ .

Un  $k$ -noyau est un  $(k, k - 1)$ -noyau.

Pour  $k = 2$  et  $l = 1$ , un  $(k, l)$ -noyau est un noyau dans le sens de Berge [1].

Pour  $k = 2$  et  $l = 2$  un  $(k, l)$ -noyau est dit un quasi-noyau (Par définition un sous ensemble de sommets noté  $J$  est dit un quasi-noyau s'il vérifie les deux conditions suivantes

- 1)  $J$  est un stable ie: pour tout  $x \in J$  on a  $\Gamma(x) \cap J = \emptyset$ .
- 2) pour tout  $x \notin J$  on a ou bien  $\Gamma(x) \cap J \neq \emptyset$  ou  $\Gamma(\Gamma(x)) \cap J \neq \emptyset$ .

Un digraphe tel que tout sous digraphe admet un  $(k, l)$ -noyau ( $k \geq 2, l \geq 1$ ) est dit un  $(k, l)$ -noyau-parfait.

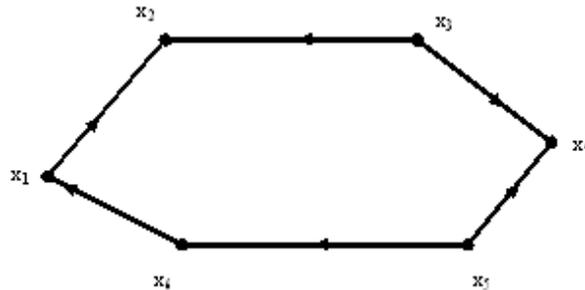


Figure 4.1 Un digraphe  $D$

Le digraphe  $D$  de la figure 4.1 admet le sous-ensemble  $\{x_2, x_4, x_6\}$  comme un  $(2, 1)$ -noyau (c'est-à-dire un noyau) et  $\{x_2, x_4\}$  un  $(3, 2)$ -noyau.

### 4.3 Résultats principaux

#### 4.3.1 Généralisation des théorèmes connus sur le noyau

**Théorème 4.1.** [22] *Tout digraphe a un  $(k, 2k - 2)$ -noyau. (c'est une généralisation de la notion de quasi-noyau)*

Preuve. On procède par induction sur le nombre des sommets. Pour un digraphe  $D$  avec  $|V(D)| = 1$  c'est évident. Supposons que si  $D'$  est un digraphe avec  $|V(D')| < n$ , alors  $D'$  a un  $(k, 2k - 2)$ -noyau, et soit  $D$  un digraphe avec  $|V(D)| = n$ . Soit  $x_0 \in V(D)$  et  $D^* = D[V(D) \setminus \{x \in V(D) \mid d_D(x, x_0) \leq k - 1\}]$ . Il est clair que  $|V(D^*)| < n$ , et donc  $D^*$  a un  $(k, 2k - 2)$ -noyau, noté  $S^*$ . Considérons les deux possibilités suivantes:

s'il existe un chemin dans  $D$  de longueur inférieure ou égale à  $k - 1$ , alors  $S^*$  est un  $(k, 2k - 2)$ -noyau de  $D$ .

S'il n'existe pas un chemin dans  $D$  de  $x_0$  vers un certain sommet de  $S^*$  de longueur inférieure ou égale à  $k - 1$ , alors  $S^* \cup \{x_0\}$  est un  $(k, 2k - 2)$ -noyau de  $D$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.** [22] *Tout digraphe a un  $(k, l)$ -noyau pour  $l \geq 2k - 2$ .*

Puisque un  $(k, l)$ -noyau d'un digraphe  $D$  est aussi un  $(k, l')$ -noyau pour tout  $l' \geq l$ .

**Corollaire 4.3.** [22] *Tout digraphe possède un quasi-noyau.*

La preuve est une conséquence directe du théorème 4.1 en prenant  $k = 2$ .

**Définition 4.4.** *Soit  $D = (V, U)$  un digraphe. On appelle puissance  $p$ -ième de  $D$  le digraphe, noté  $D^p$ , défini de la façon suivante:  $D^p$  a le même ensemble de sommets que  $D$ . Deux sommets  $x$  et  $y$  sont liés par un arc  $(x, y)$  dans  $D^p$  s'il existe dans  $D$  un chemin de  $x$  à  $y$  de longueur  $\leq p$ .*

**Théorème 4.5.** [23] *Si  $J$  est un  $(k, l)$ -noyau d'un digraphe  $D$ , pour  $k \geq 3$  et  $l \leq k - 1$ , alors  $J$  est un  $(2, 1)$ -noyau de  $D^{k-1}$  c'est-à-dire un noyau.*

**Théorème 4.6.** [23]  *$J$  est un  $(k, k - 1)$ -noyau d'un digraphe  $D$  si et seulement si  $J$  est un  $(2, 2 - i)$ -noyau de  $D^{k-1}$ , pour  $k \geq 3$  et  $i = 0, 1$ .*

**Théorème 4.7.** [24] *Un digraphe sans circuits a un  $(k, k - 1)$ -noyau, pour  $k \geq 2$ .*

Preuve. Pour  $k = 2$ , un  $(2, 1)$ -noyau est un noyau du digraphe d'après le théorème 2.14. Soit  $k \geq 3$  et supposons qu'un digraphe  $D$  satisfait les conditions de ce théorème. Considérons le digraphe  $D^{k-1}$ . A partir de la définition de digraphe  $D^{k-1}$  ce dernier n'a pas de circuits, en appliquant le théorème 2.14  $D^{k-1}$  possède un noyau. En utilisant le théorème 4.6, on a un noyau de  $D^{k-1}$  est simultanément un  $(k, k - 1)$ -noyau du digraphe  $D$ . □

Le Théorème suivant est une généralisation du théorème 2.16

**Théorème 4.8.** [25] *Soit un digraphe  $D$  tel que  $ASY(D)$  est fortement connexe. En plus, on suppose que pour tout circuit  $C$  de longueur  $\neq 0 \pmod{k}$  ou bien (a) ou bien (b) est satisfait*

- (a) *Tout arc de  $C$  est un arc symétrique de  $D$*
- (b)  *$C$  a au moins  $k$  arcs symétriques*

*Alors le digraphe  $D$  a un  $(k, k - 1)$ -noyau.*

**Théorème 4.9.** [25] Soit un digraphe  $D$  fortement connexe tel que tout circuit de  $D$  est de longueur  $\equiv 0 \pmod{k}$ ,  $k \geq 2$  alors  $D$  a un  $k$ -noyau.

**Théorème 4.10.** [24] Si un digraphe  $D$  fortement connexe a au plus un circuit  $C$  de longueur  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  de la forme  $C = x_1, \dots, x_{nk+r}, x_1$ ,  $n \geq 1, k \geq 2, 0 < r < k$  ayant  $r+1$  cordes de type  $(x_i, x_{i+r+1}), (x_{i+1}, x_{i+r+2}), \dots, (x_{i+r}, x_{i+2r+1})$ , pour un  $i$  fixé  $1 \leq i \leq nk+r$ , alors le digraphe  $D$  a un  $(k, k-1)$ -noyau.

**Remarque 4.11.** Pour  $k = 2$ , on obtient le théorème 2.18

#### 4.3.2 Question

Est-il vrai qu'un digraphe sans circuits impairs admet un  $k$ -noyau ( $k \geq 2$ )?

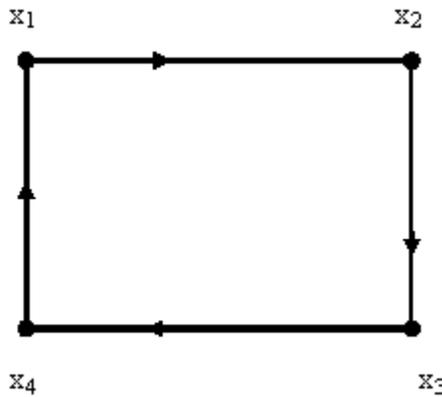


Figure 4.2 Un digraphe sans circuits impairs

La figure 4.2 montre qu'un digraphe sans circuits impairs peut ne pas posséder un  $k$ -noyau. ( $k \geq 2$ ) En effet, le digraphe de la figure 4.2 n'admet pas un  $k$ -noyau pour  $k = 3$ .

### 4.3.3 Existence de $(k,l)$ -noyau dans $P_m$ et $C_m$

On désigne par  $P_m$  un chemin dont l'ensemble des sommets est  $V(P_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  et l'ensemble des arcs est  $A(P_m) = \{x_i x_{i+1} : i = 1, \dots, m-1\}$  pour  $m \geq 2$ ; et on désigne par  $C_m$  un circuit tel que l'ensemble des sommets  $V(C_m) = V(P_m)$  et l'ensemble des arcs  $A(C_m) = A(P_m) \cup \{x_m x_1\}$ , pour  $m \geq 3$ .

**Théorème 4.12.** [26] *Soit  $P_m$  d'ordre  $m = nk + r$ ,  $n \geq 1$  et  $r$  est un entier. Alors  $P_m$  a un  $(k, l)$ -noyau si et seulement si  $k \leq l + 1$ .*

Preuve. Soit  $k \leq l + 1$ .  $J = \{x_r, x_{r+k}, \dots, x_{r+(n-1)k}, x_{r+nk=m}\}$  est  $(k, l)$ -noyau de  $P_m$ . En effet,  $J$  est  $k$ -stable et pour tout  $x \in V(P_m) \setminus J$ , on a  $d_{P_m}(x, J) \leq k - 1 \leq l$ . Supposons qu'au contraire  $P_m$  a un  $(k, l)$ -noyau, noté  $J$  mais  $k > l + 1$ . Alors pour tout couple de sommets consécutifs  $x_i, x_j \in J$ ,  $d_{P_m}(x_i, x_j) \geq k > l + 1$ . Par ailleurs,  $d_{P_m}(x_{i+1}, J) = d_{P_m}(x_{i+1}, x_j) \geq k - 1 > l$  et cela signifie que  $x_{i+1}$  n'est pas  $l$ -dominé par  $J$ . Contradiction avec  $J$  est un  $(k, l)$ -noyau de  $P_m$ .

**Théorème 4.13.** [26] *Soit  $C_m$  avec  $m = nk + r$ ,  $n \geq 1$  et  $r$  est un entier. Alors  $C_m$  a un  $(k, l)$ -noyau si et seulement si  $k \leq l + 1$  et  $r \leq n(l - k + 1)$ .*

□

### 4.3.4 $(k, l)$ -noyau dans les produits généralisés

Définitions: Soit  $X$  un digraphe tel que l'ensemble des sommets  $V(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ ; les digraphes

$$D_1, D_2, \dots, D_s$$

sont de même ordre avec l'ensemble des sommets

$$V(D_i) = V = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, i = 1, 2, \dots, s.$$

Le produit cartésien généralisé de digraphe  $X$  et la séquence des digraphes

$$D_1, D_2, \dots, D_s$$

est le digraphe  $X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)$  tel que l'ensemble des sommets

$$V(X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)) = V(X) \times V$$

et l'ensemble des arcs

$$A(X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)) = \left\{ \begin{array}{l} [(x_i, y_p), (x_j, y_q)]; [y_p, y_q] \in A(D_i) \text{ et } x_i = x_j \\ \text{ou } [x_i, x_j] \in A(X) \text{ et } y_p = y_q \end{array} \right\}$$

Posons  $D_i = D$ , pour  $i = 1, 2, \dots, s$  on obtient le produit cartésien de  $X$  et  $D$  qui est noté par  $X \times D$ .

Le produit lexicographique généralisé de digraphe  $X$  et la séquence des digraphes  $D_1, D_2, \dots, D_s$  est le digraphe  $X [D_1, D_2, \dots, D_s]$  tel que l'ensemble des sommets

$$V(X [D_1, D_2, \dots, D_s]) = V(X) \times V$$

et l'ensemble des arcs

$$A(X [D_1, D_2, \dots, D_s]) = \left\{ \begin{array}{l} [(x_i, y_p), (x_j, y_q)]; x_i = x_j \text{ et } [y_p, y_q] \in A(D_i) \\ \text{ou } [x_i, x_j] \in A(X) \end{array} \right\}$$

Posons  $D_i = D$ , pour  $i = 1, 2, \dots, s$  on obtient le produit lexicographique de  $X$  et  $D$  qui est désigné par  $X [D]$ .

Soit  $A \subset V(X)$ ,  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ , pour  $1 \leq t \leq s$ ,  $B_i \subset V(D_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  le produit cartésien de l'ensemble  $A$  et la séquence des ensembles  $B_1, B_2, \dots, B_s$  est défini par  $A \otimes (B_1, B_2, \dots, B_s) = \bigcup_{j=1}^t \{x_j\} \times B_j$ .

**Théorème 4.14.** *Si  $X, D_1, D_2, \dots, D_s$  sont fortement connexes alors  $X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)$  et  $X [D_1, D_2, \dots, D_s]$  sont fortement connexes.*

En utilisant les lemmes suivants Andrzej Włoch et Iwona Włoch ont démontré leurs résultats concernant ces deux produits généralisés.

**Lemme 4.15.** [27] Soient  $(x_i, y_p), (x_j, y_q)$  deux sommets distincts de

$$V(X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)).$$

Alors

$$\alpha \leq d_{X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) \leq \beta$$

où

$$\alpha = \begin{cases} d_X(x_i, x_j) & \text{pour } i \neq j \text{ et } p = q \\ d_X(x_i, x_j) + 1 & \text{pour } i \neq j \text{ et } p \neq q \\ \min\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_0}(y_p, y_q) + 2\} & \text{pour } i = j \text{ et } p \neq q \end{cases}$$

$$\beta = d_X(x_i, x_j) + \min\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_j}(y_p, y_q)\}$$

où  $D_0$  désigne le digraphe défini comme suit  $V(D_0) = V = \{y_1, \dots, y_n\}$  et  $[y_p, y_q] \in A(D_0)$  si et seulement s'il existe  $1 \leq i \leq s$  tel que  $[y_p, y_q] \in A(D_i)$ .

**Lemme 4.16.** [27] Soient  $(x_i, y_p), (x_j, y_q)$  deux sommets différents de

$$V(X [D_1, D_2, \dots, D_s]).$$

Alors

$$d_{X[D_1, D_2, \dots, D_s]}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) = \begin{cases} d_X(x_i, x_j) & \text{pour } i \neq j \\ \min\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_X(x_i)\} & \text{pour } i = j \end{cases}$$

où  $d_X(x_i)$  désigne le plus court circuit, qui contient un sommet  $x_i$ .

Pour le produit lexicographique des graphes on a le lemme suivant.

**Lemme 4.17.** [27] Soient  $(x_i, y_p), (x_j, y_q)$  deux sommets différents de

$$V(X [G_1, G_2, \dots, G_s]).$$

Alors

$$d_{X[G_1, G_2, \dots, G_s]}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) = \begin{cases} d_X(x_i, x_j) & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{pour } i = j \text{ et } d_{G_i}(y_p, y_q) = 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 4.18.** [27] Si  $J_i$  est un  $(k_i, l_i)$ -noyau de digraphe  $D_i$ , pour  $k_i \geq 2, l_i \geq 1, i = 1, \dots, s$  et  $J_0$  est un  $(k_0, l_0)$ -noyau de digraphe  $X$ , pour  $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$ , alors l'ensemble  $J = J_0 \otimes (J_1, \dots, J_s)$  est un  $(k, l)$ -noyau de digraphe  $X \times (D_1, D_2, \dots, D_s)$ , où

$$k = \begin{cases} \min\{k_0, \min\{k_i; \text{il existe } x_i \in J_0\}\} & \text{si pour tout } x_i \in J_0 \text{ vérifie } |J_i| = 1 \\ \min\{k_0, t + 2, \min\{k_i; \text{il existe } x_i \in J_0\}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour

$$t = \min\{d_{D_0}(y_p, y_q); y_p \neq y_q \text{ et } y_p, y_q \in J_i, \text{ où } x_i \in J_0\}$$

et

$$l = l_0 + \max\{l_i; \text{il existe } x_i \in J_0\}$$

Si  $D_i = D$ , pour  $i = 1, \dots, s$ , alors on a le résultat de Kwaśnik [28]

**Théorème 4.19.** [28] Si le sous-ensemble  $J_1 \subset V(D)$  est un  $(k_1, l_1)$ -noyau de  $D$  et  $J_2 \subset V(X)$  est un  $(k_2, l_2)$ -noyau de  $X$ , pour  $k_i \geq 2, l_i \geq 1, i = 1, 2$  alors l'ensemble  $J = J_1 \times J_2$  est un  $(k, l)$ -noyau de digraphe  $X \times D$ , où  $k = \min\{k_1, k_2\}, l = l_1 + l_2$ .

**Théorème 4.20.** [27] Si  $J_i$  est un  $(k_i, l_i)$ -noyau de digraphe  $D_i$ , pour  $k_i \geq 2, l_i \geq 1, i = 1, \dots, s$  et  $J_0$  est un  $(k_0, l_0)$ -noyau de digraphe  $X$ , pour  $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$ , alors l'ensemble  $J = J_0 \otimes (J_1, \dots, J_s)$  est un  $(k, l)$ -noyau de digraphe  $X [D_1, \dots, D_s]$ , où

$$k = \min\{k_0, d_X(J_0), \min\{k_i; \text{il existe } x_i \in J_0\}\}$$

$$l = \max\{l_0, \max\{l_i; \text{il existe } x_i \in J_0\}\}$$

où

$$d_X(J_0) = \min\{d_X(x_i); \text{il existe } x_i \in J_0\}$$

Si  $D_i = D$ , pour  $i = 1, \dots, s$ , on obtient le résultat de Kwaśnik [28]

**Théorème 4.21.** [28] Si le sous-ensemble  $J_1 \subset V(D)$  est un  $(k_1, l_1)$ -noyau de  $D$  et  $J_2 \subset V(X)$  est un  $(k_2, l_2)$ -noyau de  $X$ , pour  $k_i \geq 2, l_i \geq 1, i = 1, 2$  alors l'ensemble  $J = J_1 \times J_2$  est un  $(k, l)$ -noyau de digraphe  $X[D]$ , où

$$k = \min\{k_1, k_2, d_X(J_2)\}, \quad l = \max\{l_1, l_2\} \quad \text{et} \quad d_X(J_2) = \min\{d_X(y); y \in J_2\}$$

Maintenant, considérons les graphes et leurs produit lexicographique généralisé.

**Théorème 4.22.** [28] Si un graphe  $G$  a un  $(k, l)$ -noyau noté  $J$  et  $|J| \geq 2, k \geq 2, l \geq 1$ , alors  $l \geq (k - 1)/2$ .

**Théorème 4.23.** [27] Si  $J_i$  est un  $(k_i, l_i)$ -noyau de graphe  $G_i$  et  $J_0$  est un  $(k_0, l_0)$ -noyau de digraphe  $X$ , pour  $k_i \geq 2, k_0 \geq 2, l_i \geq 1, l_0 \geq 1, i = 1, \dots, s$ , alors l'ensemble  $J = J_0 \otimes (J_1, \dots, J_s)$  est un  $(k, l)$ -noyau de  $X[G_1, \dots, G_s]$ , où

$$k = \begin{cases} \min\{k_0, \min\{k_i, \text{il existe } x_i \in J_0\}\} & \text{si pour tout } x_i \in J_0 \text{ vérifie } |J_i| = 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$l = \begin{cases} 2 & \text{si } l_0 = 1 \text{ et il existe } x_i \in J_0 \text{ tel que } l_i \neq 1 \\ l_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

#### 4.3.5 $(k, l)$ -noyau d'une orientation de join généralisé

Définition: Soient  $G_0, G_1, \dots, G_p; p \geq 1$  désignent  $(p + 1)$  graphes (pas nécessairement avec la même cardinalité de l'ensemble des sommets).

Le joint généralisé des graphes  $G_0, G_1, \dots, G_p$  est un graphe  $J(G_0, \dots, G_p)$  obtenu en ajoutant une nouvelle arête  $[x, y]$  pour tout  $x \in V(G_0), y \in V(G_i) i = 1, \dots, p$  à l'union disjointe des graphes  $G_0, G_1, \dots, G_p$ . Pour  $p = 1$  on a le joint des deux graphes  $G_0 \circ G_1$ .

**Proposition 4.24.** [29] Tout sous-graphe induit d'un joint généralisé est aussi un joint généralisé ou un sous-graphe induit de l'union disjointe de certaines composantes de joint généralisé.

Soient  $G_0, G_1, \dots, G_p$  des graphes et  $k \geq 2$ . On dit qu'une orientation  $D$  de joint généralisé  $J(G_0, \dots, G_p)$  a une propriété  $\alpha$  par rapport à  $G_i$ , pour un entier fixé  $1 \leq i \leq p$ , si pour tout circuit de longueur  $3 \leq m \leq k + 1$  dans  $D$  contenant au moins un sommet de  $V(G_0)$  et de  $V(G_i)$ , a au moins  $m - 1$  arcs symétriques.

**Proposition 4.25.** [29] Soient  $G_0, G_1, \dots, G_p$  des graphes et  $D$  une orientation de joint généralisé  $J(G_0, \dots, G_p)$  ayant la propriété  $\alpha$  par rapport à  $G_i$  pour un entier fixé  $1 \leq i \leq p$ . Soit  $S$  un sous-ensemble de  $D[V(G_0)]$  qui est un  $(k - 1)$ -dominant et  $x \in V(G_i)$  un sommet tel que  $d_D(x, S) \geq 2$ . Alors il existe un arc  $(y, x)$  pour tout  $y \in V(G_0)$ .

**Proposition 4.26.** [29] Soient  $G_0, G_1, \dots, G_p$  des graphes et  $D$  une orientation de joint généralisé  $J(G_0, \dots, G_p)$  ayant la propriété  $\alpha$  par rapport à  $G_i$  pour un entier fixé  $1 \leq i \leq p$ . Soit  $x \in D[V(G_i)]$ ,  $y \in D[V(G_j)]$  avec  $1 \leq j \leq p$  et pour tout  $w \in D[V(G_0)]$   $(w, x) \in A(D)$ . Si  $d_D(x, y) \leq k - 1$ , alors  $d_D(y, x) \leq k - 1$  ou pour tout  $w \in D[V(G_0)]$   $(w, y) \in ASY(D)$ .

En utilisant les trois propositions précédentes, Magdalena Kucharska a donné une condition suffisante pour qu'une orientation d'un joint généralisé des graphes soit  $(k, k - 1)$ -noyau-parfait, dans le théorème suivant.

**Théorème 4.27.** [29] Soient  $D_0, D_1, \dots, D_p$ ,  $p + 1$  digraphes  $(k, k - 1)$ -noyau-parfait et soient  $G_0, G_1, \dots, G_p$  des graphes. Soit  $D$  une orientation de joint généralisé  $J(G_0, \dots, G_p)$  telle que pour tout  $0 \leq i \leq p$  on a  $D[V(D_i)] = D_i$ . Si l'orientation  $D$  a la propriété  $\alpha$  par rapport à tout  $1 \leq i \leq p$  et  $D[V(D_i)]$  est isomorphe à  $D_i$ , alors  $D$  est  $(k, k - 1)$ -noyau-parfait.

Pour  $p = 1$  et  $k = 2$  on obtient le résultat annoncé dans [30] en considérant le joint de deux graphes et le noyau.

**Théorème 4.28.** [30] Soient  $D_1, D_2$  deux digraphes noyau-parfaits et soient  $G_1, G_2$  deux graphes. Soit  $D$  une orientation de joint  $J(G_1, G_2)$  telle que  $D[V(D_1)] = D_1$ ,  $D[V(D_2)] = D_2$ , et tout circuit dans  $D$  de longueur trois tel que  $V(C) \cap V(D_1) \neq \emptyset$  et  $V(C) \cap V(D_2) \neq \emptyset$  a au moins deux arcs symétriques. Alors  $D$  est noyau-parfait.

### 4.3.6 $k$ -noyau dans une orientation du graphe adjoint d'un graphe

Soit  $G$  un graphe,  $V(G)$  et  $E(G)$  désignent les ensemble des sommets et des arêtes respectivement.

L'adjoint  $L(G)$  de  $G$  est par définition un 1-graphe tel que  $V(L(G)) = E(G)$ ; pour  $a, b \in E(G)$ ,  $a$  est adjacent à  $b$  dans  $L(G)$  si et seulement s'ils ont une extrémité commune.

**Lemme 4.29.** [31] Soit  $G$  un graphe,  $L(G)$  son adjoint et  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  un cycle de  $L(G)$ . Si  $[i, j] \in E(L(G)) - E(C)$  avec  $j \notin \{i-2, i+2\}$ , alors au moins une des conditions suivantes est vérifiée:

- $$(a) \{[s-1, s+1], [s, t]\} \subseteq E(L(G)); \text{ avec } \begin{array}{l} (s = i \text{ et } t \in \{j-1, j+1\}) \\ \text{ou} \\ (s = j \text{ et } t \in \{i-1, i+1\}) \end{array}$$
- $$(b) \{[i-1, i+1], [j-1, j+1]\} \subseteq E(L(G))$$
- $$(c) L(G) [\{s-1, s, t, t+1\}] \cong K_4 \quad \text{avec } s \in \{i, i+1\}, t \in \{j-1, j\}$$

**Lemme 4.30.** [31] Soit  $G$  un graphe,  $L(G)$  son adjoint et  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  un cycle dans  $L(G)$ . S'il existe  $i, 0 \leq i \leq n-1$  tel que  $\{[i-1, i+1], [i, i+2]\} \subseteq E(L(G))$ , alors

$$\{[i-1, i+2], [i, i+3], [i+1, i+3], [i-2, i], [i-2, i+1]\} \cap E(L(G)) \neq \emptyset.$$

On dit qu'un graphe  $H$  satisfait la propriété  $C^*$  si et seulement si pour tout cycle  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

(1) Si  $[i, j] \in E(H) - E(C)$  avec  $j \notin \{i-2, i+2\}$ , alors au moins une des conditions suivantes est vérifiée:

- $$(1.a) \{[s-1, s+1], [s, t]\} \subseteq E(H) \text{ avec; } (s = i \text{ et } t \in \{j-1, j+1\}) \text{ ou } (s = j \text{ et } t \in \{i-1, i+1\})$$
- $$(1.b) \{[i-1, i+1], [j-1, j+1]\} \subseteq E(H)$$
- $$(1.c) L(G) [\{s-1, s, t, t+1\}] \cong K_4 \text{ avec } s \in \{i, i+1\}, t \in \{j-1, j\}$$

(2) S'il existe  $i, 0 \leq i \leq n-1$  tel que  $\{[i-1, i+1], [i, i+2]\} \subseteq E(H)$ , alors

$$\{[i-1, i+2], [i, i+3], [i+1, i+3], [i-2, i], [i-2, i+1]\} \cap E(H) \neq \emptyset.$$

**Lemme 4.31.** [31] Soit  $H$  un graphe satisfaisant la propriété  $C^*$ , et  $D$  une orientation de  $H$  telle que tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques. Si tout circuit de  $D$ ,  $\vec{C} = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  avec la longueur de  $\vec{C}$   $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{k}$  a une corde  $(i, j)$  telle que au moins une de deux propriétés suivantes est vérifiée:

(i)  $j \notin \{i-2, i+2\}$  ou

(ii) Si  $j \in \{i-2, i+2\}$  alors il existe une autre corde de  $\vec{C}$ ;  $(r, s)$  avec  $(r, s) \neq (j, i)$ ,

alors tout circuit de  $D$ ,  $\vec{C}$  avec  $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{k}$  a deux arcs symétriques, ( $k \geq 3$ ).

**Lemme 4.32.** [31] Soit  $H$  un graphe satisfaisant la propriété  $C^*$  et  $D$  une orientation de  $H$  telle que tout circuit de longueur trois est symétrique. Si tout circuit de  $D$  dont la longueur est  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  a deux cordes, alors tout circuit de  $D$  dont la longueur est  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  a deux arcs symétriques, ( $k \geq 3$ ).

**Lemme 4.33.** [31] Soit  $G$  un graphe,  $L(G)$  son adjoint et  $D$  une orientation de  $L(G)$  telle que tout circuit de longueur trois est symétrique. Si tout circuit de  $D$  dont la longueur est  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  a deux cordes, alors tout circuit de  $D$  dont la longueur est  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  a deux arcs symétriques, ( $k \geq 3$ )

**Théorème 4.34.** [32] Soit  $D$  un digraphe tel que  $ASY(D)$  est fortement connexe. Si tout circuit de longueur  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  a au moins deux arcs symétriques alors  $D$  a un  $k$ -noyau, ( $k \geq 2$ ).

**Théorème 4.35.** [31] Soit  $G$  un graphe,  $L(G)$  son adjoint et  $D$  une orientation de  $L(G)$  telle que  $ASY(D)$  est fortement connexe et tout circuit de longueur trois a deux arcs symétriques. Si tout circuit de  $D$ ,  $\vec{C} = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  avec la longueur de  $\vec{C}$  ;  $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{k}$  a une corde  $(i, j)$  telle que au moins une de deux propriétés suivantes est vérifiée:

(i)  $j \notin \{i-2, i+2\}$  ou

(ii) Si  $j \in \{i-2, i+2\}$  alors il existe une autre corde de  $\vec{C}$ ;  $(r, s)$  avec  $(r, s) \neq (j, i)$ ,

alors  $D$  a un  $k$ -noyau, ( $k \geq 3$ ).

Preuve. D'après les lemmes 4.29 et 4.30 on a  $L(G)$  vérifie la propriété  $C^*$ ; en appliquant le lemme 4.31 et le théorème 4.34 on en déduit le résultat.

**Théorème 4.36.** [31] Soit  $G$  un graphe,  $L(G)$  son adjoint et  $D$  une orientation de  $L(G)$  telle que  $ASY(D)$  est fortement connexe et tout circuit de longueur trois est symétrique. Si tout circuit de  $D$  dont la longueur est  $\neq 0 \pmod{k}$  a deux cordes, alors  $D$  a un  $k$ -noyau, ( $k \geq 3$ ).

□

Preuve. On applique le lemme 4.32 et le théorème 4.34 (comme  $L(G)$  satisfait à la propriété  $C^*$ ).

□

#### 4.4 Quelques observations

A partir de la définition du  $(k, l)$ -noyau dans les graphes orientés et la propriété de digraphe fortement connexe, on va citer quelques remarques sur le  $(k, l)$ -noyau dans un tel digraphe.

**Remarque 4.37.** Soit un digraphe  $D = (V, U)$  fortement connexe où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $U$  est l'ensemble des arcs.  $\rho^*$  représente l'antirayon de  $D$  ( $\rho^* = \min_{y \in V} \max_{x \neq y} d_D(x, y)$ ). Soit  $y_0$  un anticentre de  $D$  ( $\rho^* = \max_{x \neq y_0} d_D(x, y_0)$ ).

Donc  $\forall x \in V, d_D(x, y_0) \leq \rho^*, \rho^* \geq 1$ . Alors  $\{y_0\}$  représente un  $(k, \rho^*)$ -noyau dans le digraphe  $D$  avec  $k \geq 2$ .

**Remarque 4.38.** Soit un digraphe  $D = (V, U)$  fortement connexe où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $U$  est l'ensemble des arcs. Si un sous-digraphe de  $D$  engendré par un sous-ensemble  $A \subset V$ , admet un  $(k_0, l_0)$ -noyau noté  $J$  avec  $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$ . Alors le digraphe  $D$  admet  $J$  comme un  $(k, l)$ -noyau avec  $k = k_0 \geq 2$  et  $l = \max(l_0, \max_{x \in V-A} d_D(x, J))$ . En effet,  $\forall x, x' \in J, x \neq x', d_D(x, x') \geq k_0$ .

$\forall y \in V - J$ , on a ou bien  $y \in A - J$  ou bien  $y \in V - A$  comme  $J \subset A$

Si  $y \in A - J, \exists x \in J$  tel que  $d_D(y, x) \leq l_0$  comme  $J$  est un  $(k_0, l_0)$ -noyau de  $D[A]$

Si  $y \in V - A$  il existe dans  $D$  un chemin de  $y$  vers  $x, \forall x \in J$  puisque  $D$  est fortement

connexe ( $d_D(y, J) < +\infty$ )  $d_D(y, x) \leq \max_{y \in V-A} d_D(y, J) \forall x \in J$ .

d'où  $d_D(y, x) \leq \max(l_0, \max_{y \in V-A} d_D(y, J)) = l$

**Remarque 4.39.** (A) Dans un digraphe  $D = (V, U)$  fortement connexe, antisymétrique et sans 3-circuits, il existe au moins deux sommets  $x_0, y_0$  tels que  $d_D(x_0, y_0) \geq 2$  et  $d_D(y_0, x_0) \geq 2$  car si on raisonne par l'absurde on aura:  $\forall x, y \in V \ x \neq y \ d_D(x, y) < 2$  ou  $d_D(y, x) < 2$  c'est à dire  $d_D(x, y) = 1$  ou  $d_D(y, x) = 1$ . Discutons les cas :

(A.1) Soient  $x, y \in V$  tels que  $d_D(x, y) = 1$  et  $d_D(y, x) = 1$  alors l'arc  $(x, y)$  est un arc symétrique contradiction car  $D$  est antisymétrique.

(A.2) Soient  $x, y \in V$  tels que  $d_D(x, y) = 1$  et  $d_D(y, x) \succ 1$  si on prend  $d_D(y, x) = 2$  on aura un 3-circuit contradiction car  $D$  est supposé sans 3-circuits. Si on suppose que  $d_D(y, x) \succ 2$  c'est à dire  $d_D(y, x) \geq 3$ . Posons  $d_D(y, x) = 3$  donc il existe un chemin de  $y$  vers  $x$  de longueur 3. Soit  $C = (y, z, t, x)$  ce chemin avec  $z, t \in V$ . Maintenant considérons les deux sommets  $z$  et  $x$ . On a  $d_D(z, x) \geq 2$  car sinon on aura un circuit de longueur 3 qui est  $(z, x, y, z)$  contradiction avec les hypothèses et  $d_D(x, z) \geq 2$  car sinon on aura un circuit de longueur 3 qui est  $(x, z, t, x)$ , contradiction avec les hypothèses. Soient  $x, y \in V$  tels que  $d_D(y, x) = 1$  et  $d_D(x, y) \succ 1$  on procède de la même façon de cas précédent en remplaçant  $x$  par  $y$  et  $y$  par  $x$ , d'où il existe dans  $D$  au moins deux sommets  $x, y \in V$  tels que  $d_D(x, y) \geq 2$  et  $d_D(y, x) \geq 2$ .

(B) Soit  $D = (V, U)$  un digraphe fortement connexe, antisymétrique et sans 3-circuits. Soient deux entiers  $k, l$  avec  $k \geq 2, l \geq 1$ . Alors il existe deux sommets  $x, y$  constituent un  $(k, l)$ -noyau dans  $D$ . En effet comme le digraphe  $D$  vérifie les conditions de (A) alors il existe  $x, y \in V$  tel que  $d_D(x, y) \geq 2$  et  $d_D(y, x) \geq 2$ . Soient deux entiers  $k_1, k_2$ . Posons  $J = \{x, y\}$ ,  $k_1 = d_D(x, y)$  et  $k_2 = d_D(y, x)$  il est clair que  $k_1 \geq 2$  et  $k_2 \geq 2$  on prend  $k = \min(k_1, k_2) \geq 2$  alors  $\forall x, x' \in J, x \neq x' \ d_D(x, x') \geq k$ . D'autre part:  $\forall z \in V - J$  il existe un chemin de  $z$  à  $x$  et de  $z$  à  $y$  car le digraphe  $D$  est fortement connexe. On a  $d_D(z, J) = \min_{x' \in J} d_D(z, x')$ . Posons  $l = \max_{z \in V - J} d_D(z, J) \ l \geq 1$ . Donc  $\forall z \in V - J, \exists x \in J$  tel que  $d_D(z, x) \leq l$ . d'où les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$(1) \forall x, x' \in J; x \neq x' \ d_D(x, x') \geq k \text{ avec } k \geq 2.$$

$$(2) \forall z \in V - J; \exists x \in J \text{ tel que } d_D(z, x) \leq l \text{ avec } l \geq 1$$

ce qui implique que  $J = \{x, y\}$  est bien un  $(k, l)$ -noyau dans  $D$ .

## CONCLUSION

Les travaux de recherche entamés dans ce mémoire comportent trois volets.

Le premier volet concerne les noyaux dans les graphes orientés. Nous nous sommes intéressés à la conjecture de P. Duchet. On a validé cette dernière dans le cas où le graphe non orienté associé au digraphe formé seulement des arcs symétriques est de comparabilité et nous avons donné une nouvelle démonstration à son théorème.

Le deuxième volet est consacré à l'étude du concept de noyaux par chemins monochromatiques dans un digraphe  $m$ -coloré. Nous avons donné une autre preuve du théorème de Shen Minggang et on a fourni un algorithme polynomial pour la recherche d'un tel noyau dans un tournoi  $m$ -coloré.

Le troisième volet comporte la notion de  $(k, l)$ -noyau dans les digraphes qui est une généralisation de la notion du noyau. A partir d'une étude théorique profonde, nous avons donné des observations et des notes sur ce concept.

Beaucoup de problèmes restent ouverts dans ce domaine et ils peuvent être étudiés ultérieurement tels que la conjecture de P. Duchet, la conjecture de Sands, Sauer et Woodrow, la détermination des algorithmes polynomiaux pour la recherche du noyau dans les digraphes et pourquoi pas la recherche du  $(k, l)$ -noyau dans les digraphes.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge. "Graphs et hypergraphes", 2ème ed. Dunod, Paris, 1973.
- [2] F. Drosbeke; M.Hllin; CL.Lefevre, "Les graphes par exemple", Ellipses(87)
- [3] H. Jacob, "Etude théorique du noyau d'un graphe", Thèse de 3ème cycle, Paris VI, 1979.
- [4] H. Meyniel, "Contribution à l'étude de quelques problèmes en théorie des graphes (circuit hamiltonien, coloration, noyaux)", Thèse Doctorat d'état ès-Science, Université de Paris VI, 1982.
- [5] J. V. Neumann; O. Morgenstern, "Theory of games and economic behaviour", Princeton University Press, Princeton 1944.
- [6] M. Richardson, "Solutions of irréfléxive relation", Ann.Math, 58, pp. 573-580, 1953.
- [7] P. Duchet, "Représentations: Noyaux en théorie des graphes et hypergraphes", Thèse d'état, Université de Paris VI, 1979.
- [8] P. Duchet; H. Meyniel, "Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyau dans les graphes orientés", Discr. Math. 43, 1983, pp. 21-27.
- [9] H. Galeana Sánchez; V. Neumann-Lara, "On kernel and semi-kernels of digraphs", Discr. Math, 48, 1984, pp. 67-76.
- [10] M. Blidia, "Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes", Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1984.
- [11] Z. Zémir, "Recherche de noyaux dans les graphes orientés et graphes munis d'une orientation, étude algorithmique", Thèse de Magistère, Université de Blida, 1996.
- [12] M. Abbas; Y. Saoula, "Polynomial algorithms for kernels in comparability, permutation and  $P_4$ -free graphs", A Quarterly Journal of Operations Research, 40R 3, 2005, pp. 217-225.

- [13] M. Blidia; A. Ramoul, "A note on Duchet's conjecture", accepté à AKCE International of Graphs and Combinatorics, 2008.
- [14] P. Duchet, "A sufficient condition for a graph to be kernel perfect", Journal of Graph Theory, 11, 1987, pp. 81-85.
- [15] B. Sands; N. Sauer; R. Woodrow, "On Monochromatic Paths in Edge-Coloured Digraphs", Journal of Combinatorial Theory, Series B 33, 1982, pp. 271-275.
- [16] Shen Minggang, "On Monochromatic Paths in  $m$ -Coloured Tournaments", Journal of Combinatorial Theory, Series B 45, 1986, pp. 108-111.
- [17] H. Galeana Sánchez, R. Rojas-Monroy, "Note A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments", Discr Math. 282, 2004, pp. 275-276.
- [18] H. Galeana Sánchez, "On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments", Discr Math. 156, 1996, pp. 103-112.
- [19] H. Galeana Sánchez, "Kernels in edge-coloured digraphs", Discr Math. 184, 1998, pp. 87-99.
- [20] M. Kwaśnik, "The generalisation of Richardson theorem", Discussiones Math, VI, 1981, pp. 11-14.
- [21] M. Kwaśnik, "On  $(k, l)$ -kernels of exclusive disjunction, cartesian sum and normal product of two directed graphs", Discussiones Math, V, 1982, pp. 29-34.
- [22] H. Galeana Sánchez, Xueliang Li, "Semikernels and  $(k, l)$ -kernels in digraphs", Discr Math. 11, 1998, pp. 340-346.
- [23] M. Kwaśnik; A. Włoch; I. Włoch, "Some remarks about  $(k, l)$ -kernels in directed and undirected graphs", Discr Math. 13, 1993, pp. 29-37.
- [24] D. Bród; A. Włoch; I. Włoch, "On the existence of  $(k, k - 1)$ -kernels in directed graphs", Journal of Mathematics and Applications, 28, 2006, pp. 7-12.

- [25] H. Galeana Sánchez, "Note on the existence of  $(k, l)$ -kernels in digraphs", *Discr Math.* 85, 1990, pp. 99-102.
- [26] M. Kucharska; M. Kwaśnik, "On  $(k, l)$ -kernels of special superdigraphs of  $P_m$  et  $C_m$ " *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 211, 2001, pp. 95-109.
- [27] A. Włoch;, I. Włoch, "On  $(k, l)$ -kernels in generalized products", *Discr Math.* 164, 1997, pp. 295-301.
- [28] M. Kwaśnik, " $(k, l)$ -kernels in graphs and in their products", Ph.D. Dissertation, Technical University of Wrocław, Wrocław, 1980.
- [29] M. Kucharska, "On  $(k, l)$ -kernls of orientations of special graphs", *Ars Combinataria*, 60, 2001.
- [30] M. Blidia; P. Duchet; H. Jacob; F. Maffray; H. Meyniel, "Some operations preserving the existence of kernels", *Discr Math.* 205, 1999, pp. 211-216.
- [31] H. Galeana Sánchez, " $k$ -kernels in Orientations of the Line Graph", *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 31, 2007, pp.1511-1525.
- [32] H. Galeana Sánchez, "On the existence of kernels and  $h$ -kernels in directed graphs", *Discr Math.* 110, 1992, pp. 251-255.