

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Option : Recherche opérationnelle
Intitulé : Modélisation mathématiques pour l'aide à la décision

DOMINATION ET IRREDONDANCE DANS LES GRAPHERS ORIENTES

Par

OULDRABAH Lyes

Devant le jury composé de :

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Promoteur
F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
M. ABBAS	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Maître de Conférences, U. de Blida	Examineur

Blida, 13 Juillet 2010

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'étude des paramètres de domination dans les graphes orientés.

Dans un premier temps, nous donnons deux nouvelles bornes supérieures pour le nombre de domination $\gamma(D)$, une condition nécessaire pour que la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$ soit vraie et nous montrons que cette borne est atteinte pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement. Ensuite on caractérise les chaînes, les cycles et les arbres orientés pour lesquels la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$ est atteinte (où $\beta_1(D)$ est la cardinalité d'un couplage maximum dans le graphe orienté D).

On donne ensuite une nouvelle borne inférieure pour le nombre de domination $\gamma(D)$ à savoir $s(D) \leq \gamma(D)$ (où $s(D)$ est le nombre de sommets supports dans D) puis on caractérise les graphes orientés pour lesquels la borne inférieure de $s(D) \leq \gamma(D)$ est atteinte, aussi la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Dans un second temps, on donne une nouvelle borne inférieure pour le nombre d'irrédondance inférieur à savoir $ir(D) \geq s(D)$. Ensuite nous donnons les valeurs exactes de $ir(D)$ pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement, puis la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Enfin, nous donnons une nouvelle borne supérieure pour le nombre d'irrédondance supérieur à savoir $IR(D) \leq n(D) - 1$. Ensuite nous caractérisons les graphes orientés pour lesquels $IR(D) = n(D) - 1$, et nous donnons des conditions nécessaires pour que les bornes des deux inégalités $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$ soient vraies et nous montrons que ces bornes sont atteintes.

Nous terminons ce mémoire en donnant quelques perspectives et travaux futurs dans ce domaine de recherche.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested principally on the study of the domination parameters in directed graphs.

First, we give two new upper bounds for the domination number $\gamma(D)$ and necessary condition for which the upper bound of $\gamma(D) \leq n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$ is true, and we show that this bound is reached for paths and circuits asymmetrically oriented. Then we characterize chains, cycles and trees oriented which the upper bound $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$ is achieved (where $\beta_1(D)$ is the cardinality of a maximum matching in directed graph D).

We give a new lower bound for the domination number $\gamma(D)$ where $s(D) \leq \gamma(D)$. We characterize the directed graphs for which the lower bound $s(D) \leq \gamma(D)$ is reached (where $s(D)$ is the number of supports vertices in directed graph D) and we give a characterization of directed graphs such that $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

In a second step, we give a new lower bound for the irredundance number $ir(D)$ where $ir(D) \geq s(D)$. We give exact value of $ir(D)$ for directed paths and asymmetrically oriented for $ir(D)$, and we give a characterization of directed graphs such that $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Finally, we give a new upper bound for the number of the upper irredundance $IR(D)$ where $IR(D) \leq n(D) - 1$. Then we characterize the digraphs such that $IR(D) = n(D) - 1$, also we give a necessary condition for digraphs such that the bounds on the two inequalities $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$ is true, and we show that these bounds are achieved.

We finish this thesis by giving some perspectives and future works in this area of research.

ملخص

في هذا البحث، نهتم أساسا بدراسة وسائط السيطرة في الرسوم البيانية الموجهة.

في البداية ، نقدم قيمتين حديثتين جديتين عظمتين لعدد السيطرة $\gamma(D)$ و شرط لازم الذي من أجله تكون القيمة الحدية العليا $\gamma(D) \leq n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$ محققة، و أن المساواة محققة للسلاسل و الدوائر الموجهة ضد التناظرية، ثم نحدد خاصية السلاسل و الدوائر و كذا الأشجار الموجهة التي من أجلها $\gamma(D) = n(D) - \beta_1(D)$ (حيث $\beta_1(D)$ هو أصلي الانقسام الثنائي الأقصى في الرسم البياني الموجه D).

بعد ذلك، نعطي قيمة حدية جديدة دنيا لعدد السيطرة $\gamma(D)$ حيث $s(D) \leq \gamma(D)$ $s(D)$ هو عدد الرؤوس الداعمة في D ثم نقدم خاصية الرسوم البيانية الموجهة التي يبلغ من أجلها عدد السيطرة $\gamma(D)$ القيمة الحدية الدنيا $s(D)$ و نقدم كذلك خاصية الرسوم البيانية الموجهة التي من أجلها $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

في الخطوة الموالية ، نقدم قيمة حدية دنيا جديدة لعدد الاختصار الأصغر $ir(D)$ حيث $ir(D) \geq s(D)$ ، كذلك نقدم قيمة حدية جديدة عليا لعدد الاختصار الأكبر $IR(D)$ حيث $IR(D) \leq n(D) - 1$. ثم نعطي قيم مضبوطة للعدد $ir(D)$ بالنسبة للسلاسل و الدوائر الموجهة ضد التناظرية، ثم نعطي خاصية الرسوم البيانية الموجهة حيث $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

في الأخير، نحدد خاصية الرسوم البيانية الموجهة التي من أجلها يكون $IR(D) = n(D) - 1$ و نعطي أيضا الشروط اللازمة التي من أجلها القيم الحدية للمتراجحتين $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$ تكون محققة و نبين أيضا أن المساواة في كلتا المتراجحتين محققة في بعض الرسوم البيانية الموجهة.

ننهي هذا العمل بإعطاء بعض الاستشرافات و الأعمال المستقبلية في هذا الميدان للبحث.

REMECIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais exprimer à Monsieur **Mostafa Blidia** 'Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida', mes vifs remerciements et ma profonde reconnaissance d'avoir accepté d'être rapporteur ainsi que pour sa disponibilité, ses orientations et ses conseils constants qu'il a pu émettre à la fois sur le fond et sur la forme de ce travail.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Farouk Hannane**, 'Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida', pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier: Monsieur **Moncef Abbas**, 'Professeur à l'USTHB d'Alger', Monsieur **Mustapha Chellali**, 'Maître de conférences à l'université Saad Dahlab de Blida', dont les précieuses remarques m'ont aidé à accomplir ce travail et dont la participation à ce jury m'honore.

Je saisis aussi cette opportunité pour exprimer mes remerciements et ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin et dont le soutien m'a été précieux durant la préparation de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION	11
1. GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHERS	14
1.1 Introduction	14
1.2 Définitions et notations	14
1.2.1 Graphe non orienté	14
1.2.2 Graphe simple, graphe multiple et sous graphe	14
1.2.3 Voisinage, degré d'un sommet, sommet support, sommet pendant	16
1.2.4 Graphe partiel et sous graphe	16
1.2.5 Graphe complet et clique	17
1.2.6 Chaînes et cycles	17
1.2.7 Distance, l'excentricité, diamètre, centre	18
1.2.8 La connexité, le graphe connexe	18
1.2.9 Arbre, étoile, double étoile	19
1.2.10 Couronne d'un graphe	20
1.3 Définitions et notations utilisées dans la domination orientée	21
1.3.1 Digraphe, sommet, arc	21
1.3.2 L'ensemble de prédécesseurs, successeurs et voisinage d'un sommet	22

1.3.3	Sommet adjacent, arc adjacent	24
1.3.4	Graphe non orienté associé à un graphe orienté (underline graph)	24
1.3.5	Chaîne orientée, cycle orienté, chemins, circuits	25
1.3.6	Distance, arbre orienté enraciné, sommet parent, sommet pendant	28
1.3.7	Graphe orienté fortement connexe	28
1.3.8	Tournoi	28
2. FORMULE DE GALLAI-TYPE POUR QUELQUES PARAMETRES DE DOMINATION ORIENTÉE		29
2.1	Introduction	29
2.2	Aperçu sur la domination dans les graphes orientés	29
2.3	Définitions et notations de quelques invariants d'un digraphe	29
2.3.1	Ensemble des sommets pendants, sommets supports	31
2.3.2	Ensemble stable, $i(D)$ -ensemble	32
2.3.3	Ensemble absorbant, noyau	32
2.3.4	Ensemble dominant, $\gamma(D)$ -ensemble	33
2.3.5	Ensemble irrédondant, $ir(D)$ -ensemble	33
2.3.6	Couplage	34
2.4	Minimalité des ensembles dominants	35
2.5	Formule de Gallai-type pour quelques invariants dans les graphes orientés	37
3. LA DOMINATION DANS LES GRAPHEs ORIENTÉS		43
3.1	Introduction	43
3.2	Observations	43
3.3	Nouvelles bornes supérieures pour $\gamma(D)$	44
3.3.1	Première borne pour $\gamma(D)$	45
3.3.2	Deuxième borne pour $\gamma(D)$	46
3.3.3	Troisième borne pour $\gamma(D)$	49

3.4	Caractérisation de quelques digraphes pour lesquels $\gamma(D)=n(D)-\beta_l(D)$	50
3.4.1	Caractérisation des chaînes orientées	50
3.4.2	Caractérisation des cycles orientés	58
3.4.3	Caractérisation des arbres orientés	61
3.6	Nouvelles bornes inférieures pour $\gamma(D)$	75
3.7	Caractérisation des digraphes pour lesquels $s(D)=\gamma(D)$	75
4.	L'IRRÉDONDANCE DANS LES GRAPHEs ORIENTÉS	77
4.1	Introduction	77
4.2	Observations	73
4.3	Une nouvelle borne inférieure pour $ir(D)$	79
4.4	Étude de quelques digraphes pour lesquels $ir(D)=n(D)-\beta_l(D)$	81
4.4.1	Chemins orientés antisymétriquement	81
4.4.2	Circuits	84
4.4.3	Arbres orientés	85
4.5	Nouvelles bornes supérieures pour $IR(D)$	88
4.6	Valeur exacte pour $IR(D)$ dans les chemins orientés antisymétriquement	91
	CONCLUSION	96
	REFERENCES	98

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Graphe G , Graphe partiel et sous graphe partiel de G .	16
Figure 1.2	Graphe G , sous graphe induit $G[A]$	16
Figure 1.3	Graphe complet, Graphe biparti $K_{2,3}$	17
Figure 1.4	Chaîne P_5 , cycle C_5	18
Figure 1.5	Arbre	19
Figure 1.6	Etoile	19
Figure 1.7	Subdivision d'une étoile	20
Figure 1.8	Double étoile $S_{3,2}$	20
Figure 1.9	La couronne d'un C_6	20
Figure 1.10	Boucle; arc multiple; symétrique; asymétrique	21
Figure 1.11	Le digraphe $D=(V,A)$ sans boucles ni d'arcs multiples	22
Figure 1.12	$I(7)=\{6,8,9\}$ et $O(7)=\{8\}$	23
Figure 1.13	$I(S)=\{2,5,6,8,9\}$ et $O(S)=\{1,2,5,7,8\}$	23
Figure 1.14	Le graphe orienté D et son associé le graphe non orienté G	25
Figure 1.15	La chaîne orientée \vec{P}_9	25
Figure 1.16	Chemin \vec{P}_6	26
Figure 1.17	Le chemin orienté anti symétriquement $\vec{\vec{P}}_6$	26
Figure 1.18	Le cycle orienté \vec{C}_9	27
Figure 1.19	Le circuit \vec{C}_6	27
Figure 1.20	Le circuit orienté anti symétriquement $\vec{\vec{C}}_3$	27
Figure 1.21	Tournoi T_4	28

Figure 2.1	$i(D)=2$ et $\gamma(D)=3$	32
Figure 2.2	$\gamma(D)=4$ et $\Gamma(D)=5$	33
Figure 2.3	$ir(D)=3$ et $IR(D)=4$	34
Figure 2.4	$\beta_1(G) = \beta_1(D)=3$	34
Figure 2.5	$\gamma_0(D)=6$ et $\gamma_i(D)=4$	41
Figure 2.6	$\gamma_i(D)=8$	41
Figure 3.1	Ensemble Z_M de sommets non saturés par le couplage M .	45
Figure 3.2	$\gamma(D) + \beta_1(D) = n(D)$	45
Figure 3.3	$\gamma(D)=3$	47
Figure 3.4	$\gamma(D) = n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$	49
Figure 3.5	Etoile orientée (Obstruction)	51
Figure 3.6	La chaîne orientée $\overrightarrow{K[x_i, x_j]}$	51
Figure 3.7	Arbre orienté $\overrightarrow{Sp, q}$	63
Figure 3.8	$\overrightarrow{P_2^1(x, y)}$ et $\overrightarrow{P_2^2(x, y)}$	64
Figure 3.9	Le graphe orienté $\overrightarrow{H_k(z)}$	64
Figure 3.10	Opération Φ_1	65
Figure 3.11	Opération Φ_2	65
Figure 3.12	Opération Φ_3	66
Figure 3.13	Opération Φ_4	66
Figure 3.14	Opération Φ_5	67
Figure 4.1	Circuit $\overrightarrow{C_6}$	77
Figure 4.2	La couronne orientée $\overrightarrow{C_6 \circ K_1}$	78

Figure 4.3	$\gamma(T)=p+2$ et $ir(T)=2$	80
Figure 4.4	$s(D)=2$; $ir(D)=\gamma(D)=\gamma_t(D)=4$ et $\gamma_o(D)=6$	80
Figure 4.5	Contre exemple	85
Figure 4.6	Étoile orientée $\vec{K}_{1,3}$	86
Figure 4.7	$ir(D)=n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$	87
Figure 4.8	Digraphe $\vec{H}(p,q,0)$	89
Figure 4.9	Digraphe $\vec{H}(p,q,k)$	89
Figure 4.10	Digraphe $\vec{H}(p,0,0)$	90
Figure 4.11	$ir(D)=\beta_1(D)=IR(D)=6$ (les arcs éventuellement symétriques)	94
Figure 4.12	$ir(D)=IR(D)=3$ et $\beta_1(D)=2$ (l'arc xy est asymétrique)	95
Figure 4.13	$ir(D)=2$, $IR(D)=5$ et $\beta_1(D)=3$ (l'arc xy est asymétrique)	95
Figure 4.14	$ir(D)=\beta_1(D)=1$, $IR(D)=3$ (les arcs éventuellement symétriques)	95

INTRODUCTION.

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au *XVIIIe* siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg. En effet les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ. La marche du cavalier sur l'échiquier ou problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représenté par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) noté par V représentant des individus, des objets, des situations, etc.,... et qui sont reliés par des flèches (arcs) et dans ce cas on parle d'un graphe orienté (ou digraphe) noté par $D = (V, A)$ (où A représente l'ensemble des arcs de D) ou bien par des lignes (arêtes) et dans ce cas on parle d'un graphe non orienté noté par $G = (V, E)$ (où E représente l'ensemble des arêtes de G) symbolisant les relations existant entre eux.

Parmi les problèmes les plus étudiés en théorie des graphes, les problèmes de domination dans les graphes orientés et non orientés sont les plus cités. Par conséquent nous nous sommes intéressés à la domination dans les graphes orientés.

L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensembles S ait au moins un voisin dans S . Ce concept peut s'étendre aux graphes orientés comme suit:

On peut imposer une condition extérieure au sous ensemble S . Par exemple chaque sommet extérieur de S possède au moins un sommet prédécesseur dans S (domination), et dans ce cas on définit le nombre de domination dans les graphes orientés comme étant la cardinalité minimum d'un dominant dans un graphe orienté D et l'on note par $\gamma(D)$. Et la cardinalité maximum d'un dominant minimal de D est notée par $\Gamma(D)$.

On peut imposer simultanément des conditions extérieures et intérieures au sous ensemble S . Par exemple chaque sommet extérieur de S possède au moins un sommet successeur dans S avec S est stable (noyau). Chaque sommet extérieur de S possède au moins un sommet prédécesseur dans S , et le sous graphe induit par S est connexe (domination connexe), dans le cas où S sans sommet isolé (domination totale) et dans le cas où le sous graphe engendré par le sous ensemble S ait un couplage parfait (domination couplée).

On peut imposer une condition intérieure au sous ensemble S . Par exemple l'ensemble S est stable (domination stable).

On peut imposer sur un sous ensemble S de V d'un graphe orienté D , une condition intérieure par exemple chaque sommet x de S admet un sommet successeur privé relatif à S (on dit qu'un sommet y est un sommet successeur privé de x relatif à S si $I[y] \cap S = \{x\}$ où $I[y]$ est l'ensemble des prédécesseurs du sommet y) (irrédondance), et dans ce cas on définit le nombre d'irrédondance dans les graphes orientés comme étant la cardinalité minimum d'un irrédondant maximal dans un graphe orienté D et l'on note par $ir(D)$. Et la cardinalité maximum d'un irrédondant de D est notée par $IR(D)$.

Dans ce mémoire, quatre chapitres fondamentaux sont développés et nous nous intéressons principalement à l'étude de la domination et l'irrédondance dans les graphes orientés.

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le thème étudié et nous donnons la formule de Gallai-type et quelques principaux résultats existants.

Dans le troisième chapitre, nous donnons deux nouvelles bornes supérieures pour le nombre de domination $\gamma(D)$, et une conditions nécessaire pour que la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \delta_+(D) - \Delta_+(D)$ soit vraie et nous montrons que cette borne est atteinte pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement, ensuite on caractérise les chaînes, les cycles et les arbres orientés pour lesquels la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$ est atteinte (où $\beta_1(D)$ est la cardinalité d'un couplage maximum dans le graphe orienté D). On donne ensuite une nouvelle borne inférieure pour le nombre de domination $\gamma(D)$ à savoir $s(D) \leq \gamma(D)$ (où $s(D)$ est le nombre de sommets supports dans D) puis on caractérise les graphes orientés pour lesquels la borne inférieure de $s(D) \leq \gamma(D)$ est atteinte, aussi la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Dans le quatrième chapitre, on donne une nouvelle borne inférieure pour le nombre d'irrédondance inférieur à savoir $ir(D) \geq s(D)$. Ensuite nous donnons les valeurs exactes de $ir(D)$ pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement, puis la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Enfin, nous donnons une nouvelle borne supérieure pour le nombre d'irrédondance supérieur à savoir $IR(D) \leq n(D) - 1$. Puis nous caractérisons les graphes orientés pour lesquels $IR(D) = n(D) - 1$, et nous donnons des conditions nécessaires pour que les bornes des deux inégalités $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$ soient vraies et nous montrons que ces bornes sont atteintes.

Nous terminons ce mémoire en donnant une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHERS

1.1 Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre les définitions de base et les notations usuelles dans la théorie des graphes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de C. Berge [1], et de T W Haynes S.T Hedetniemi et P J Slater [8].

1.2 Définitions et notations utilisées dans les graphes non orientés

1.2.1 Graphe non orienté

Un graphe non orienté G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et E est l'ensemble des paires de sommets appelées arêtes. Le cardinal de V , appelé ordre de G , est noté n . Le cardinal de E appelé taille de G est noté m . Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres : u, v, x, y, a, b, \dots et les arêtes sont notées uv, xy, ab, \dots . Deux sommets u et v sont adjacents ou voisins s'ils sont reliés par une arête. Un non voisin u d'un sommet v dans un graphe G est un sommet non adjacent à v . Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. Une arête e sera dite incidente à un sommet v , si v est l'une de ses extrémités, dans ce cas v sera dit incident à e .

1.2.2 Graphe simple et graphe multiple et sous graphe

Un graphe simple est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête (sans arêtes multiples) et toute arête de G a ses extrémités distinctes (sans boucle).

Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis. Au vu de cette définition, il est naturel de représenter graphiquement un graphe où les points du graphique représentent les sommets du graphe et les lignes entre deux points représentent les arêtes.

1.2.3 Voisinage, degré d'un sommet, sommet support, sommet pendant

Pour un sommet v de V et un sous ensemble $S \subseteq V(G)$, on définit:

Le voisinage ouvert de v par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$. Le voisinage fermé de v par l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Le voisinage de v dans S par l'ensemble $N_S(v) = \{u \in S : uv \in E(G)\}$. Le voisinage ouvert de S par l'ensemble $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé de S par $N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v]$.

Le degré de v , noté par $d_G(v)$ (aussi par $d(v)$) est le nombre de sommets adjacents à v , i.e. $|N_G(v)|$. Le degré minimum d'un sommet est noté par $\delta(G)$ et le degré maximum est noté par $\Delta(G)$.

Un sommet de degré 0 est dit sommet isolé, un sommet de degré 1 est dit sommet pendant et le sommet adjacent au sommet pendant est dit sommet support.

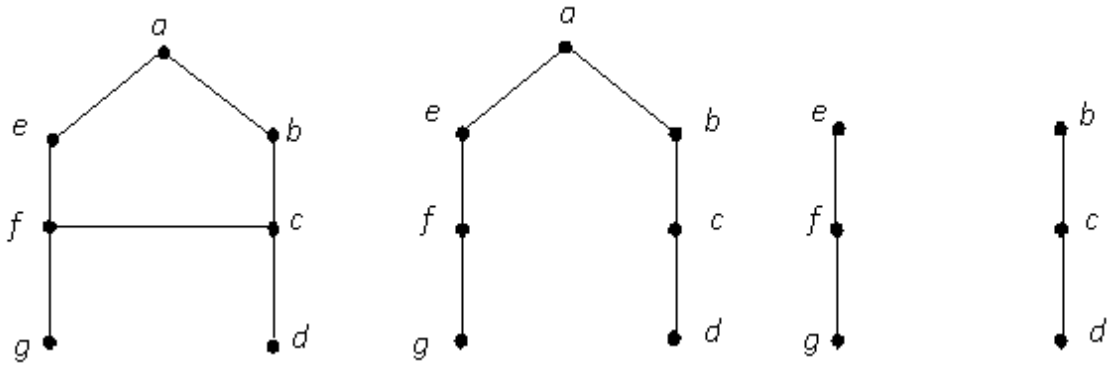
Le théorème suivant est un des résultats les plus célèbres de la théorie des graphes qui relie la somme des degrés des sommets et la taille pour tout graphe.

Théorème 1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, avec $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Alors on a :*

$$\sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2m.$$

1.2.4 Graphe partiel et sous graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un graphe H est appelé sous-graphe partiel de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et il est appelé graphe partiel du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$, (Voir Figure 1.1).

Figure. 1.1 : Graphe G Graphe partiel de G Sous graphe partiel de G

Pour un sous ensemble de sommets non vide $A \subseteq V$ du graphe G :

Le sous graphe $H = (A, E_A)$ induit par A dans G , noté par $\langle A \rangle_G$ ou $G[A]$ où l'ensemble d'arêtes $E_A = \{uv \in E(G) : u, v \in A\}$. Voir le sous graphe induit par le sous ensemble $A = \{b, c, d, e, f, g\}$ dans la Figure 1.2.

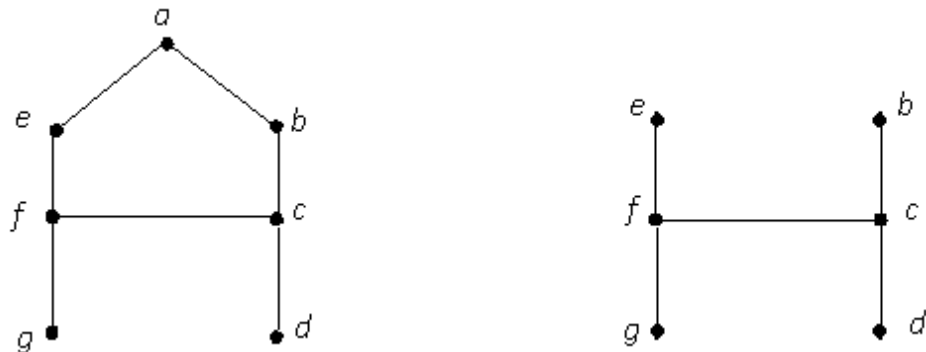


Figure 1.2 :

Graphe G Sous graphe induit $G[A]$, où $A = \{b, c, d, e, f, g\}$

1.2.5 Graphe complet, clique et biparti

Un graphe simple dont tous les sommets ont le même degré k est un graphe k -régulier. Un graphe complet d'ordre n est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Un graphe complet G est un graphe $(n - 1)$ -régulier.

Une clique d'ordre p notée par K_p dans un graphe $G = (V, E)$, est un sous ensemble de V de p sommets deux à deux adjacents.

Un graphe biparti noté par $K_{p,q}$, est un graphe dont l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles, sachant qu'aucune arête de G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Comme illustration, le graphe complet et le graphe biparti $K_{2,3}$ d'ordre $n = |V| = 5$ sont représentés par la Figure 1.3.

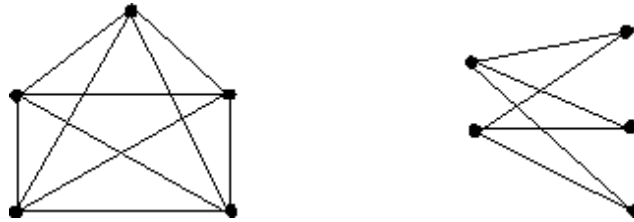


Figure 1.3 : Graphe complet

Graphe biparti $K_{2,3}$

1.2.6 Chaînes et cycles

Une chaîne C d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence fini $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ de sommets distincts telle que pour chaque $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, $x_i x_{i+1}$ soit une arête de G .

Les sommets x_1 et x_k sont appelés les extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire. L'entier $k - 1$ représente la longueur de C (nombre de ses arêtes). Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets et noté par P_n est une chaîne élémentaire sans cordes.

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. La Figure 1.4, représente la chaîne P_5 et le cycle C_5 .



Figure 1.4 :

Chaîne P_5 Cycle C_5

1.2.7 Distance, excentricité, diamètre, centre

La distance entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (V, E)$ notée $d(x, y)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant x et y . L'excentricité d'un sommet x dans un graphe G est $exc(x) = \max\{d(x, y), y \in V\}$. Le diamètre de G noté $diam(G)$ est égal à $\max\{exc(x), x \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé centre.

1.2.8 Connexité, graphe connexe

On définit la connexité d'un graphe, par la relation entre deux sommets de la manière suivante:

Deux sommets x et y ont une relation de connexité \iff il existe une chaîne reliant x et y ou bien $x = y$. La relation " $x = y$ ou il existe une chaîne reliant x et y dans le cas où $x \neq y$ " est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences de cette relation sont les composantes connexes de G .

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si tous ses sommets ont deux à deux la relation de connexité, autrement dit: Un graphe est connexe \iff il possède une seule composante connexe.

Par exemple le graphe G représenté dans la figure 1.1 est connexe, par contre le sous graphe partiel de G n'est pas connexe, car il contient deux composantes connexes C_1 et C_2 formées par les ensembles $\{b, c, d\}$ et $\{e, f, g\}$ respectivement.

1.2.9 Arbre, étoile, double étoile

L'une des structures les plus simples d'un graphe connexe est connue sous le nom d'arbre, qui est un graphe connexe et sans cycles. Une forêt est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Dans un arbre T , tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support et une arête adjacente à un sommet pendant est appelée arête pendante. Un exemple d'un arbre d'ordre 17 est représenté dans la Figure 1.5 a 8 sommets pendants et 7 sommets supports.

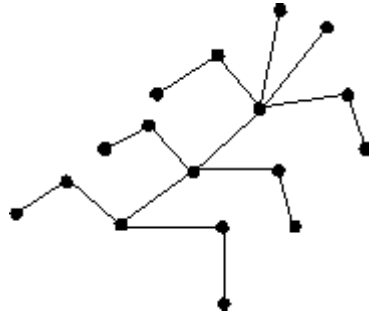


Figure 1.5: Arbre

Une étoile d'ordre $n + 1$, est un graphe biparti complet $K_{1,n}$. On peut considérer une étoile comme étant un arbre T d'ordre $n \geq 2$ possède un centre c ayant une excentricité minimum dans T est égale à $exc(c) = d(c, y) = 1, \forall y \in V \setminus \{c\}$ et une étoile subdivisée comme étant un arbre obtenu à partir d'une étoile où chaque arête est subdivisée une seule fois. Un exemple d'une étoile et la subdivision d'une étoile sont montrés dans la Figure 1.6 et Figure 1.7 respectivement.

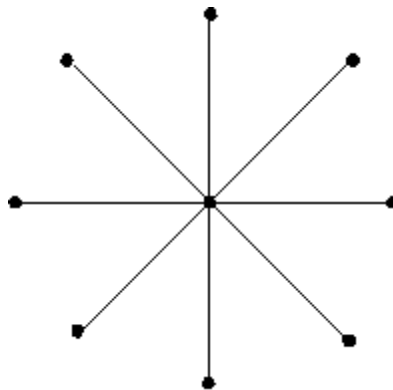


Figure 1.6: Etoile

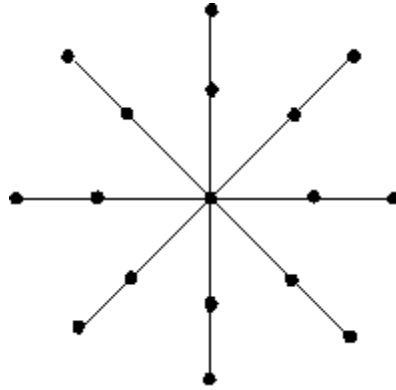


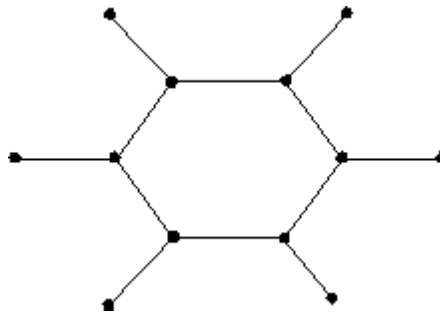
Figure 1.7: Subdivision d'une étoile

Un arbre T est une double étoile s'il contient deux sommets qui ne sont pas pendants. Une double étoile avec p sommets pendants attachés à l'un des sommets supports et q sommets pendants à l'autre est noté par $S_{p,q}$ (Voir Figure 1.8).

Figure 1.8: Double étoile $S_{3,2}$

1.2.10 Couronne d'un graphe

Soit G un graphe d'ordre n . La couronne de G notée par GoK_1 est obtenu à partir de G en joignant un sommet pendant à chacun de ses sommets. Pour le cycle C_6 , sa couronne est représentée par le graphe de la Figure 1.9.

Figure 1.9 : La couronne d'un C_6

1.3 Définitions et notations utilisées dans les graphes orientés

1.3.1 Digraphe, sommet, arc

Un digraphe (ou graphe orienté) D est la donnée de deux ensembles (finis) V et A non vides, V (noté aussi par $V(D)$) est dit ensemble des sommets et A (noté aussi par $A(D)$) est dit ensemble des arcs de D (ou arêtes orientées). Le cardinal de $V(D)$ est appelé l'ordre de D , noté n (ou $n(D)$). Le cardinal de $A(D)$ est noté m (ou $m(D)$). Si on écrit $\vec{xy} \in A(D)$ (ou $(x, y) \in A(D)$), ceci signifie que l'arc est orienté de x vers y . Pour un arc $u = \vec{xy}$, le sommet x est son origine ou son extrémité initiale et le sommet y son extrémité terminale.

Un arc de la forme $u = \vec{xx}$ est appelé une boucle. Un arc $\vec{xy} \in A(D)$ est dit symétrique si l'arc \vec{yx} existe aussi dans D i.e. $\vec{yx} \in A(D)$ (on dit aussi que l'arc \vec{xy} ou (x, y) est inversible et son inverse est l'arc \vec{yx} ou (y, x)). Un arc $(x, y) \in A(D)$ est dit anti symétrique (ou asymétrique) si son inverse (y, x) n'existe pas dans D , i.e. $(y, x) \notin A(D)$. Deux arcs a_1 et a_2 sont dit adjacents s'ils ont au moins une extrémité en commun.

Un digraphe $D = (V, A)$ est symétrique si tous ses arcs sont symétriques. Un digraphe $D = (V, A)$ est antisymétrique si $(x, y) \in A(D) \implies (y, x) \notin A(D) (\forall x, y \in V(D))$. Un digraphe $D = (V, A)$ est transitif si $(x, y) \in A(D)$ et $(y, z) \in A(D) \implies (x, z) \in A(D) (\forall x, y, z \in V(D))$.

Exemple 1.2. Le digraphe représenté par la Figure 1.10 contient une boucle $\vec{x_0x_0}$ (ou $(0, 0)$), un arc multiple, c'est l'arc $\vec{x_0x_1}$ (ou $(0, 1)$), un arc symétrique $\vec{x_1x_2}$ (ou $(1, 2)$), un arc asymétrique, c'est l'arc $\vec{x_2x_3}$ (ou $(2, 3)$) et une autre représentative d'un arc symétrique c'est l'arc symétrique $\vec{x_3x_4}$ (ou $(3, 4)$).

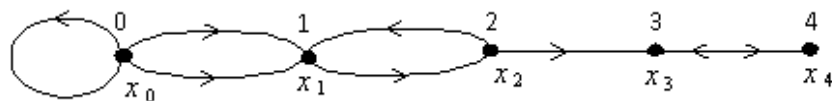


Figure 1.10 : Boucle; arc multiple; symétrique; asymétrique; symétrique

Les digraphes $D = (V, A)$ considérés dans ce mémoire ne contiennent pas de boucles ni d'arcs multiples (mais les arcs symétriques sont autorisés).

Exemple 1.3. *Le digraphe $D = (V, A)$ représenté par la Figure 1.11 ne contient pas de boucles ni d'arcs multiples. L'ensemble de sommets de D est $V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ordre de D est $n = |V(D)| = 9$. Le cardinal de $A(D)$ est $m = |A(D)| = 16$ (chaque arc symétrique représente deux arcs). Le digraphe D ni symétrique ni transitif, en effet, on a par exemple l'arc $(1, 2) \in A(D)$ est asymétrique et de plus les deux arcs $(3, 4) \in A(D)$ et $(4, 5) \in A(D)$, mais l'arc $(3, 5) \notin A(D)$.*

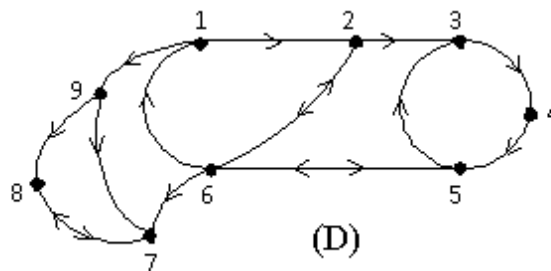


Figure 1.11 : Le digraphe $D = (V, A)$ sans boucles ni d'arcs multiples où

$$V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

1.3.2 L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet

Soit $a = (x, y) \in A$; $x, y \in V(D)$. Le sommet y est appelé sommet successeur de x et le sommet x est appelé sommet prédécesseur de y . On appelle voisinage intérieur du sommet x l'ensemble $I(x) = \{y : (x, y) \in A\}$ des prédécesseurs du sommet x . De même $I[x] = I(x) \cup \{x\}$ et si $S \subseteq V$ alors $I(S) = \bigcup_{s \in S} I(s)$ et $I[S] = \bigcup_{s \in S} I[s]$. Le nombre d'arcs incidents à x vers l'intérieur (ou le demi-degré intérieur) du sommet x est donné par $id(x) = d^-(x) = |I(x)|$. Le maximum du demi degré-intérieur d'un sommet dans D est noté par $\Delta_-(D) = \max \{d^-(x), x \in V\}$. Le minimum du demi degré-intérieur d'un sommet dans D est noté par $\delta_-(D) = \min \{d^-(x), x \in V\}$.

On appelle voisinage extérieur du sommet x l'ensemble $O(x) = \{y : (x, y) \in A\}$ des successeurs du sommet x . De même $O[x] = O(x) \cup \{x\}$ et si $S \subseteq V$ alors $O(S) = \bigcup_{s \in S} O(s)$

et $O[S] = \bigcup_{s \in S} O[s]$. Le nombre d'arcs incidents à x vers l'extérieur (ou le demi-degré extérieur) du sommet x est donné par $od(x) = d^+(x) = |O(x)|$. Le maximum du demi degré-extérieur d'un sommet dans D est noté par $\Delta_+(D) = \max \{d^+(x), x \in V\}$. Le minimum du demi degré-extérieur d'un sommet dans D est noté par $\delta_+(D) = \min \{d^+(x), x \in V\}$. On désigne par $N(x) = O(x) \cup I(x)$ l'ensemble des voisins de x et le degré de x est $d(x) = |N(x)| = d^+(x) + d^-(x)$. De même on a $N[x] = N(x) \cup \{x\}$.

Exemple 1.4. *Considérons le digraphe correspondant à la Figure 1.11: On a pour x_7 l'ensemble de ses prédécesseurs (resp. successeurs est $I(7) = \{6, 8, 9\}$ (resp. $O(7) = \{8\}$). (Voir Figure 1.12).*

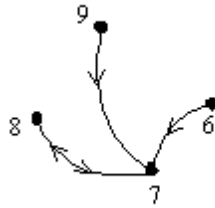


Figure 1.12 : $I(7) = \{6, 8, 9\}$ et $O(7) = \{8\}$.

Exemple 1.5. *De même, si on prend par exemple l'ensemble $S = \{6, 7\}$ dans le digraphe correspondant à la Figure 1.11, alors l'ensemble $I(S) = \{2, 5, 6, 8, 9\}$ et $O(S) = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ (Voir Figure 1.13).*

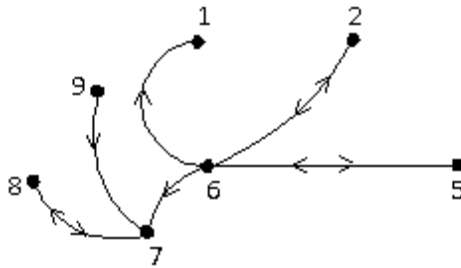


Figure 1.13 : $I(S) = \{2, 5, 6, 8, 9\}$ et $O(S) = \{1, 2, 5, 7, 8\}$.

Exemple 1.6. Le tableau suivant détermine les demis degrés-intérieurs et extérieurs des sommets du digraphe représenté dans la figure 1.11.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	\sum	$\delta_-(D)$	$\Delta_-(D)$	$\delta_+(D)$	$\Delta_+(D)$
$d^+(x)$	2	2	1	1	2	4	1	1	2	16	/	/	1	4
$d^-(x)$	1	2	2	1	2	2	3	2	1	16	1	3	/	/
$d(x)$	3	4	3	2	4	6	4	3	3	32				

On voit bien que $\sum_{x \in V(D)} d_D^+(x) = \sum_{x \in V(D)} d_D^-(x) = 16$ et que $\sum_{x \in V(D)} d_D(x) = 2m = 32$ (où m est le nombre d'arcs dans le digraphe D).

1.3.3 Sommet adjacent, arc incident

Deux sommets x et y sont dit adjacents (ou voisins) s'il existe un arc a tel que $a = (x, y)$ (ou $a = \overrightarrow{xy}$). Soit $a = (x, y)$ un arc d'un digraphe D . a est incident à x vers l'extérieur et incident à y vers l'intérieur. Un graphe non orienté G peut être considéré comme étant un digraphe D où toute arête de G est remplacée par une paire d'arcs symétriques (la notion de graphe orienté est plus générale que la notion de graphe non orienté).

1.3.4 Graphe non orienté associé à un graphe orienté (underline graph)

Le graphe non orienté G associé à un graphe orienté D est le graphe obtenu à partir de D en supprimant l'orientation de ses arcs, et une arête reliant deux sommets x et y existe dans G si les deux sommets x et y sont adjacents dans D . Un sommet est pendant (resp. support) dans D s'il est pendant (resp. support) dans le graphe G associé à D .

Exemple 1.7. Dans la Figure 1.14, on a le graphe orienté D et son associé le graphe non orienté G .

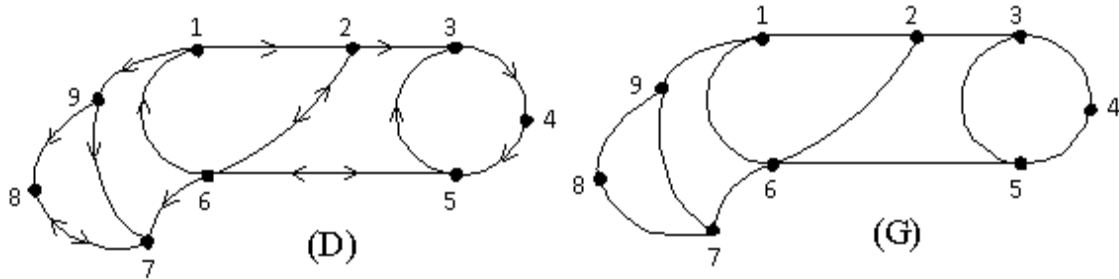


Figure 1.14 : Le digraphe D et son associé le graphe non orienté G .

1.3.6 Chaîne orientée, cycle orienté, chemin, circuit

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et soit G le graphe associé au digraphe D . Une chaîne orientée d'ordre n noté par \vec{P}_n d'un digraphe $D = (V, A)$, est une chaîne P_n dans le graphe G associé à D où les arêtes de \vec{P}_n sont orientées arbitrairement.

Exemple 1.8. Dans la Figure 1.15 on a la chaîne orientée d'ordre 9 où $V(\vec{P}_9) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

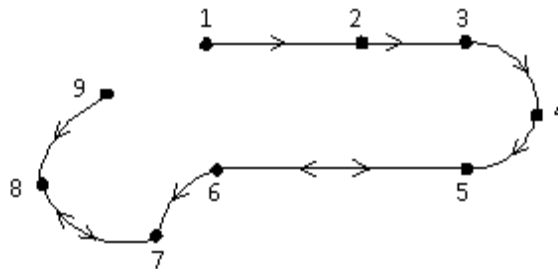


Figure 1.15 : La chaîne orientée \vec{P}_9 où $V(\vec{P}_9) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Un chemin d'un digraphe $D = (V, A)$ est une chaîne orientée dont ses arcs sont tous orientés dans le même sens (éventuellement peuvent être symétriques).

Exemple 1.9. Dans l'exemple précédent la chaîne orientée \vec{P}_9 n'est pas un chemin car l'arc $(8,9) \notin A(D)$. Un chemin relie 1 et 6 est représenté par la Figure 1.16.

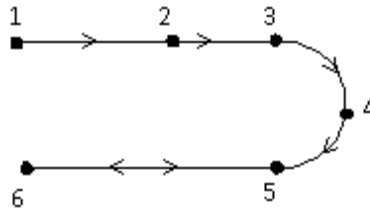


Figure 1.16 : Chemin \vec{P}_6 où $V(\vec{P}_n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un chemin orienté anti symétriquement noté par \vec{P}_n d'un digraphe $D = (V, A)$, est un chemin dont ses arcs sont tous orientés antisymétriquement.

Exemple 1.10. Le chemin représenté par la figure 1.16 n'est pas un chemin orienté anti symétriquement car il existe un arc symétrique c'est l'arc $(5,6)$. Un chemin orienté anti symétriquement est représenté par la Figure 1.17 relie le sommet 6 avec le sommet 5.

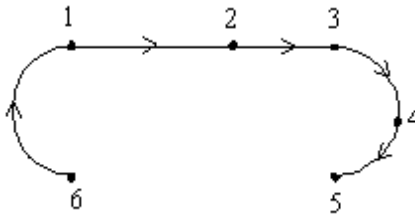


Figure 1.17 : Le chemin orienté anti symétriquement \vec{P}_6 .

Un cycle orienté d'ordre n noté par \vec{C}_n est un cycle C_n dans le graphe G associé à D où les arêtes de \vec{C}_n sont orientées arbitrairement (ou une chaîne orientée fermée).

Exemple 1.11. La Figure 1.18 représente le cycle orienté \vec{C}_9 d'ordre 9.

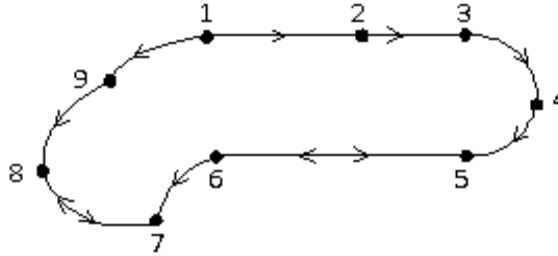


Figure 1.18 : Le cycle orienté \vec{C}_9 où $V(\vec{C}_9) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Un circuit d'ordre n c'est un chemin d'ordre n fermé

Exemple 1.12. Dans l'exemple précédent le cycle orienté \vec{C}_9 n'est pas un circuit car l'arc $(8, 9) \notin A(D)$. Un circuit d'ordre 6 est représenté par la Figure 1.19.

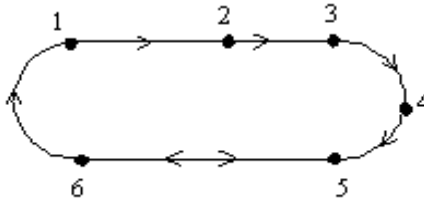


Figure 1.19 : Le circuit \vec{C}_6 où $V(\vec{C}_6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un circuit orienté anti symétriquement noté par \vec{C}_n d'un digraphe $D = (V, A)$, est un circuit dont ses arcs sont tous orientés anti symétriquement.

Exemple 1.13. Le circuit représenté par la Figure 1.19 n'est pas un circuit orientés anti symétriquement car il existe un arc symétrique c'est l'arc $(5, 6)$. Un circuit orienté anti symétriquement d'ordre 3 est représenté par la figure 1.20.

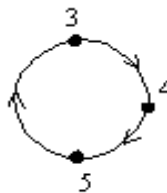


Figure 1.20 : Le circuit orienté antisymétriquement \vec{C}_3 , où $V(\vec{C}_3) = \{3, 4, 5\}$.

1.3.7 Distance, arbre orienté enraciné, sommet racine, sommet parent, sommet fils

Considérons un graphe orienté $D = (V, A)$ et deux sommets x et y de ce graphe. On appelle distance entre x et y , notée $d(x, y)$, la longueur d'un plus court chemin de x vers y . Si aucun chemin n'existe, on prendra $d(x, y) = +\infty$.

Soit \vec{T} un arbre orienté (son graphe associé est un arbre $T = (V, E)$ non orienté). Un arbre orienté \vec{T} enraciné peut être vu comme une arborescence admettant un sommet r à partir duquel il existe un chemin à tout autre sommet de \vec{T} . Le sommet r est unique et il est appelé racine. Pour un sommet u d'un arbre enraciné, le parent $p(u)$ de u est l'unique sommet tel qu'il existe un arc de $p(u)$ vers u , le *fils* de u est un sommet v tel que $p(v) = u$ et un descendant de u est un sommet v pour lequel il existe un chemin de u à v dans \vec{T} enraciné. On note $D[u] = \{v \in V; \text{ tel que } v \text{ est un descendant de } u\}$. Un sous arbre maximal enraciné en w noté par \vec{T}_w est le sous arbre de \vec{T} induit par $D[w]$.

1.3.8 Graphe orienté fortement connexe

Un graphe orienté $D = (V, A)$ est fortement connexe si $(\forall x \in V), (\forall y \in V) d(x, y) < +\infty$ et $d(y, x) < +\infty$ c.-à-d. pour toute paire de sommets x, y , ils existent un chemin de x à y et un chemin de y à x .

1.3.9 Tournoi

Un tournoi d'ordre n est un graphe complet d'ordre n orienté anti symétriquement. Un exemple d'un tournoi d'ordre 4 noté par T_4 est représenté dans la Figure 1.21.

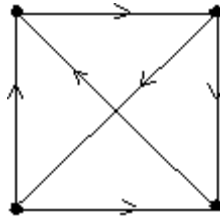


Figure 1.21 : Tournoi T_4

CHAPITRE 2

FORMULE DE GALLAI-TYPE POUR QUELQUES PARAMÈTRES DE DOMINATIONS ORIENTÉS

2.1 Introduction

Dans l'étude des paramètres de domination, souvent les chercheurs s'intéressent en premier lieu à déterminer leurs valeurs d'une façon exacte, grâce à des relations directes en fonction des données (l'ordre, degré maximum ...) ou bien à la détermination des algorithmes polynomiaux. Cependant pour un graphe orienté quelconque, la détermination de la plupart de ces paramètres est un problème *NP*-complet. Donc, en l'absence des valeurs exactes pour ces paramètres, on est contraint de chercher des bornes supérieures et inférieures simples à vérifier (c'est à dire qu'elles soient en fonction de l'ordre d'un graphe G , son degré maximum, degré minimum, la taille maximale d'un coulage dans G , etc. ...), et évidemment, la borne qui sera atteinte sera acceptable et souvent il est difficile de l'améliorer. Pour plus de détails sur la domination dans les graphes, le lecteur peut se référer aux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [8, 9].

2.2 Aperçu sur la domination dans les graphes non orientés

Commençons par donner la définition des ensembles minimaux (minimums) et maximaux (maximums).

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit qu'un sous-ensemble X de V est minimal (resp. maximal) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous ensemble $Y \subseteq X$ (resp. $Y \supseteq X$) tel que le sous graphe induit $G[Y]$ vérifie la propriété P .

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (resp. maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous-ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A , c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

Nous donnons maintenant la définition de quelques types de dominations dans les graphes non orientés.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets S de V est un dominant si tout sommet de $V \setminus S$ est adjacent à au moins un sommet de S ; autrement dit, pour tout $x \in V \setminus S$; $N(x) \cap S \neq \emptyset$ ou $N(S) \cup S = V$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G appelé nombre de domination est noté par $\gamma(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G appelé nombre de domination supérieur est noté par $\Gamma(G)$.

Pour les graphes non orientés, plus de 80 modèles de domination sont donnés dans le Survey de Haynes, Hedetniemi et Slater [8, 9]. Citons quelques types de domination dans les graphes non orientés:

En 1980 E.J. Cockayne, S.T.Hedetniemi and D.J. Miller [5] ont introduit le concept de domination totale dans les graphes non orientés. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés. Un ensemble dominant S de V est dit dominant total de G si le sous graphe induit $G[S]$ n'a pas de sommets isolés, ou bien chaque sommet de V est adjacent à au moins un sommet de S . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G appelé nombre de domination totale est noté par $\gamma_t(G)$.

Waliker et Sampathkumear [15] ont introduit le concept de domination connexe dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un ensemble dominant S de V est dit dominant connexe de G si le sous graphe induit $G[S]$ est connexe. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G appelé nombre de domination connexe est noté par $\gamma_c(G)$.

La domination dans les graphes orientés n'a pas été étudiée intensivement comme dans les graphes sans orientation. Quelques résultats connus sur la domination orientée donnés par J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone [7], peuvent être trouvés aussi dans l'ouvrage de T.W. Haynes 1998 [8, 9], mais la plupart de ces résultats sont consacrés à l'étude du concept d'un noyau et la domination dans les tournois.

2.3 Définitions et notations de quelques invariants d'un digraphe

Deux digraphes sont dits isomorphes s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux digraphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs sommets correspondants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre digraphe.

Si deux digraphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de digraphes, en d'autres termes un invariant est une propriété stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un digraphe.

Voici les définitions de quelques invariants d'un digraphe $D = (V, A)$ utilisées dans ce mémoire.

2.3.1 Ensemble des sommets pendants, sommets supports

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $G = (V, E)$ le graphe non orienté associé à D . L'ensemble $L(D) = L(G) = \{x \in V : x \text{ sommet pendent}\}$ (resp. $S(D) = S(G) = \{x \in V : x \text{ sommet support}\}$) est l'ensemble des sommets pendants (resp. sommets supports) de G . Et les cardinaux (paramètres) suivants: $n(D) = n(G) = |V|$ le nombre de sommets du graphe G ; $l(D) = l(G)$ le nombre de sommets pendants; $s(D) = s(G)$ le nombre de sommets supports sont appelés les invariants de D correspondants aux ensemble $V(D)$, $L(D)$ et $S(D)$ respectivement.

2.3.2 Ensemble stable, $i(D)$ -ensemble

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. Un stable est un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ tel que $N(S) \cap S = \emptyset$, autrement dit les sommets de S sont non adjacents deux à deux ou pour tout x, y de S ; $x \notin N(y) = I(y) \cup O(y)$. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal de D noté $i(D)$ (resp. $\beta(D)$) est appelé le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité). Un ensemble stable maximal de D de cardinalité minimum (resp. maximum) est appelé un $i(D)$ -ensemble (resp. $\beta(D)$ -ensemble).

2.3.3 Ensemble absorbant, noyau

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. Un absorbant est un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ tel que $I(S) \cup S = V$, autrement dit, tout sommet x extérieur de S , possède au moins un successeur dans S . Un noyau est un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ qui est stable et absorbant (i.e. $I(S) \cap S = \emptyset$ et $I(S) \cup S = V$) (il peut ne pas exister dans un digraphe D et il n'ya pas unicité de noyau lorsqu'il existe).

Exemple 2.1. Pour le digraphe D représenté dans la Figure 2.1, l'ensemble $S_1 = \{2, 5\}$ est un $i(D)$ -ensemble et absorbant, donc il forme un noyau de D de plus il est l'unique noyau de D , (par exemple on a l'ensemble $S_2 = \{1, 3, 6\}$ est un $\beta(D)$ -ensemble mais n'est pas un noyau).

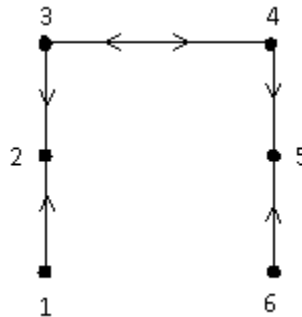


Figure 2.1: $i(D) = 2$ et $\beta(D) = 3$, $S_1 = \{2, 5\}$ est le noyau de D .

2.3.4 Ensemble dominant, $\gamma(D)$ -ensemble

Un sous ensemble $S \subseteq V$ d'un digraphe D est un ensemble dominant de D si tout sommet de $V \setminus S$, est un successeur à au moins un sommet de S , autrement dit, pour tout $x \in S$; $I[x] \cap S \neq \emptyset$ ou $O(S) \cup S = V$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de D appelé nombre de domination est noté par $\gamma(D)$ et le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de D appelé nombre de domination supérieur est noté par $\Gamma(D)$. Un ensemble dominant (resp. dominant minimal) de D de cardinalité minimum (resp. maximum) est appelé un $\gamma(D)$ -ensemble (resp. $\Gamma(D)$ -ensemble).

Exemple 2.2. L'ensemble $S_1 = \{2, 3, 6, 8\}$ (resp. $S_2 = \{1, 4, 6, 7, 8\}$) est un $\gamma(D)$ - ensemble, avec $\gamma(D) = 4$ (resp. $\Gamma(D)$ - ensemble, avec $\Gamma(D) = 5$) (Voir Figure 2.2).

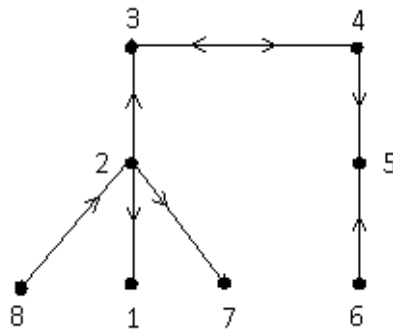


Figure 2.2: $\gamma(D) = 4$ et $\Gamma(D) = 5$

2.3.5 Ensemble irrédondant, $ir(D)$ -ensemble

Un sous ensemble $S \subseteq V$ d'un digraphe D est un ensemble irrédondant de D si , pour tout $x \in S$, $|O[x] \setminus O[S \setminus x]| \geq 1$. L'ensemble $O[x] \setminus O[S \setminus \{x\}] \neq \emptyset$ est appelé le voisinage privé de x relatif à S et il noté par $pn(x, S) = \{y \in V; I[y] \cap S = \{x\}\}$. Si x est un sommet de S vérifiant $I(x) \cap S = \emptyset$, alors $x \in pn(x, S)$ et dans ce cas x est dit sommet privé de lui même ou privé interne. Si x est un sommet de S vérifiant $I(x) \cap S \neq \emptyset$ et $O[x] \setminus O[S \setminus \{x\}] \neq \emptyset$, alors $pn(x, S) = pne(x, S) = \{y \in V \setminus S; I(y) \cap S = \{x\}\}$ est l'ensemble des sommets privés externes.

Donc on peut définir aussi l'ensemble irrédondant comme suit: Un sous -ensemble de sommets S de V est dit irrédondant si pour tout sommet x de S l'ensemble $pn(x, S) \neq \emptyset$, où

$$pn(x, S) = \begin{cases} pne(x, S) \cup \{x\} & \text{si } x \text{ privé interne} \\ pne(x, S) & \text{sinon} \end{cases}$$

La cardinalité minimum d'un irrédondant maximal est noté par $ir(D)$. La cardinalité maximum d'un irrédondant maximal se note par $IR(D)$. Un ensemble irrédondant maximal (resp. ensemble irrédondant) de D de cardinalité minimum (resp. maximum) est appelé un $ir(D)$ -ensemble (resp. $IR(D)$ -ensemble). Par exemple l'ensemble $S_1 = \{2, 4, 6\}$ (resp. $S_2 = \{1, 4, 5, 6\}$) est un $ir(D)$ -ensemble (resp. $IR(D)$ -ensemble) pour le digraphe représenté dans la figure 2.3.

2.3.6 Couplage

Un ensemble E_0 d'arêtes de G associé à un graphe orienté D deux à deux non adjacentes est appelé un couplage de G . Un couplage de cardinalité maximum est appelé couplage maximum et le nombre d'arêtes dans un couplage maximum de G est noté par $\beta_1(G) = \beta_1(D)$. Le couplage est dit parfait si $\beta_1(D) = \frac{n}{2}$.

Exemple 2.3. *Les arêtes indépendantes représentées dans la Figure 2.4 correspondant à la Figure 2.3 forment un couplage maximum de G et le nombre de ses arêtes $\beta_1(G) = \beta_1(D) = 3$, ce couplage est parfait.*

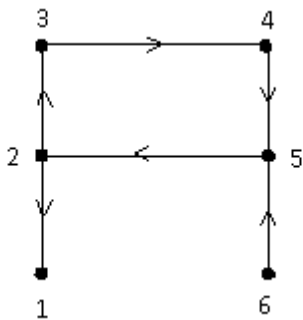


Figure 2.3 : $ir(D) = 3$ et $IR(D) = 4$

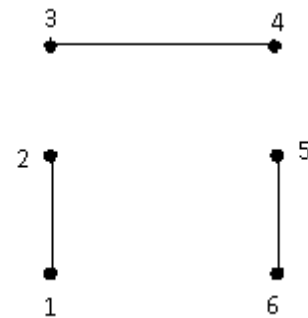


Figure 2.4 : $\beta_1(G) = \beta_1(D) = 3$

2.4 Minimalité des ensembles dominants

Nous nous intéresserons dans cette section à la minimalité des ensembles dominants. L'étude de la minimalité se résume à chercher des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un ensemble dominant soit minimal dans un graphe orienté quelconque D . Le premier résultat sur la minimalité des ensembles dominants pour les graphes non orientés est dû à Ore [11] en 1962.

Théorème 2.4. [11] *Un ensemble dominant S d'un graphe $G = (V, E)$ est minimal si et seulement si pour tout sommet $x \in S$ l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. x est un sommet isolé dans le sous graphe induit par S ;
2. il existe un sommet $y \in V \setminus S$ tel que $N(y) \cap S = \{x\}$.

Pour la minimalité des ensembles dominants concernant les graphes orientés, nous avons établi le résultat suivant:

Théorème 2.5. (Blidia & Ouldrabah) *Un ensemble dominant S d'un graphe orienté $D = (V, A)$ est minimal si et seulement si pour tout sommet $x \in S$ l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- 1) $I(x) \cap S = \emptyset$;
- 2) $O(x) \setminus O(S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Preuve. Supposons que S est minimal. Alors pour tout sommet $x \in S$, l'ensemble $S \setminus \{x\}$ n'est pas un ensemble dominant de D . Ceci implique qu'il existe un sommet $y \in (V \setminus S) \cup \{x\}$ qui n'est pas dominé par $S \setminus \{x\}$. Maintenant si $y = x$, alors $I(x) \cap S = \emptyset$, la condition (1) est vérifiée. Si $y \in V \setminus S$ et comme y est dominé par S , alors $y \in O(x) \setminus O(S \setminus \{x\})$ ce qui entraîne que la condition (2) est vérifiée, (c.-à-d. que y est un sommet privé externe de x).

Inversement, supposons que S est un ensemble dominant de D et que tout sommet de S satisfait à l'une des deux conditions du théorème. On va montrer que l'ensemble S est un dominant minimal. Supposons que S n'est pas minimal, alors il existe un sommet $x \in S$ tel que $S \setminus \{x\}$ est un dominant. Ceci implique que $I(x) \cap S \neq \emptyset$, alors la condition (1) n'est pas vérifiée pour x , contradiction. D'autre par comme $S \setminus \{x\}$ est un dominant donc tout sommet de $O(x) \cap (V \setminus S)$ possède au moins un prédécesseur dans $S \setminus \{x\}$ et donc la condition (2) n'est pas vérifiée pour x , contradiction. Ceci confirme la preuve. \square

Corollaire 2.6. *D'après le Théorème 2.5 et la définition d'un ensemble irrédondant, un ensemble dominant S est un dominant minimal si et seulement si S est un ensemble dominant et irrédondant.*

La proposition suivante montre que tout ensemble dominant minimal est un ensemble irrédondant maximal, et donc $ir(D) \leq \gamma(D)$.

Proposition 2.7. *Tout ensemble dominant minimal dans un digraphe D est un ensemble irrédondant maximal de D .*

Preuve. D'après la proposition précédente on a tout ensemble S dominant minimal est un irrédondant. Il suffit de montrer que S est un irrédondant maximal. Supposons que S n'est pas maximal, donc il existe un sommet $x \in V \setminus S$ tel que $S \cup \{x\}$ est un irrédondant. Et par définition on a donc $pn(x, S \cup \{x\}) \neq \emptyset$, ceci implique qu'il existe au moins un sommet y qui est privé de x relatif à $S \cup \{x\}$. Par conséquent S ne contient aucun sommet qui est adjacent à y , contradiction avec le fait que S est un ensemble dominant. Par conséquent S est un irrédondant maximal et dans ce cas on peut écrire $ir(D) \leq \gamma(D)$. \square

2.5 Formule de Gallai-type pour quelques invariants dans les graphes orientés

Pour un paramètre de domination $\mu(D) \in \{\gamma(D), \gamma_t(D), ir(D), IR(D), \Gamma(D), \dots\}$ et une fonction des données $F(n, \psi(D))$ où $\psi(D) \in \{\Delta(D), \delta(D), \beta(D), \beta_1(D), s(D), \dots\}$ on cherche à déterminer des relations de type $\mu(D) \leq F(n, \psi(D))$ ou $\mu(D) \geq F(n, \psi(D))$. Ensuite on cherche des classes de graphes pour lesquelles ces bornes sont atteintes, i.e. une formule en fonction des données de la forme $\mu(D) = F(n, \psi(D))$. Parmi ces formules on s'intéresse à la formule $\mu(D) = F(n, \psi(D)) = n - \psi(D)$ ou bien $\mu(D) + \psi(D) = n$, appelée formule de Gallai-type (Voir [10]).

Nous citons dans cette section quelques bornes et formules de Gallai-type pour quelques invariants (paramètres de domination) dans les graphes orientés.

Théorème 2.8. [9] *Pour tout digraphe D avec n sommets, on a :*

$$\frac{n(D)}{1 + \Delta_+(D)} \leq \gamma(D) \leq n(D) - \Delta_+(D).$$

En 1994, Changwoo Lee a établi dans la classe de digraphes fortement connexes une borne supérieure pour le nombre de domination orienté $\gamma(D)$, ce résultat est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.9. [4] *Pour un digraphe D fortement connexe avec n sommets, on a :*

$$\gamma(D) \leq \left\lceil \frac{n(D)}{2} \right\rceil.$$

En 2002, Merz et Stewart [10], ont établi des bornes supérieures pour le paramètre $\mu(D)$, à savoir $\mu(D) + \psi(D) \leq n$, où $\mu(D) \in \{i(D), ir(D), \gamma(D), IR(D), \Gamma(D)\}$ et $\psi(D) \in \{\Delta_+(D), \delta_+(D), \Delta_-(D), \delta_-(D)\}$, ils ont donné aussi les classes des graphes orientés pour lesquelles la formule de Gallai-type $\mu(G) + \psi(G) = n$ soit vérifié. Ces résultats sont donnés par les théorèmes suivants:

Théorème 2.10. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $i(D) + \Delta_+(D) \leq n$.*

Théorème 2.11. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $\gamma(D) + \Delta_+(D) \leq n$.*

Théorème 2.12. [10] *Soit D un digraphe de n sommets avec $\Delta_+(D) = 1$. Alors $\gamma(D) + \Delta_+(D) = n$ si et seulement si pour tout sommet x de V tel que $od(x) = 1$, $V \setminus O[x]$ est un ensemble stable.*

Comme $ir(D) \leq \gamma(D)$ pour n'importe quel digraphe on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.13. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $ir(D) + \Delta_+(D) \leq n$.*

Théorème 2.14. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $IR(D) + \delta_+(D) \leq n$.*

Comme $\Gamma(D) \leq IR(D)$ on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.15. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $\Gamma(D) + \delta_+(D) \leq n$.*

Théorème 2.16. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $IR(D) + \delta_-(D) \leq n$.*

Corollaire 2.17. [10] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors : $\Gamma(D) + \delta_-(D) \leq n$.*

En 2004, S.M.Hedetniemi, K.B.Red and A.A.Mcrac [14] ont étudié la domination et l'irrédondance dans les tournois, on cite quelques résultats:

Proposition 2.18. [14] *Soit T un tournoi dont $\gamma(T) = k \geq 2$. Alors tout sommet $v \in V(T)$, satisfait $\gamma(T[I(v)]) = k - 1$.*

Proposition 2.19. [14] *Soit T un plus petit tournoi avec $\gamma(T) = k \geq 2$. Alors tout sommet $v \in V(T)$, si S est un ensemble dominant minimum pour $T[I(v)]$ (c.-à-d. S est un $\gamma(T[I(v)])$ -ensemble), alors*

- 1°/ Au moins un sommet $w \in O(v)$ domine tous les sommets de S (sinon, S domine T);
- 2°/ N'existe pas un sous ensemble $S' \subseteq I(v)$ avec $|S'| < k - 2$ domine tous les sommets de $V(T) \setminus O(v) \setminus S$ (sinon, $\{v\} \cup \{w\} \cup S'$ domine T).

Théorème 2.20. [14] *Pour tout tournoi avec au moins 19 sommets, on a: $\gamma(T) \leq 3$.*

Proposition 2.21. [14] *Soit T un tournoi. Alors $ir(T) = 1$ si et seulement si T contient une composante fortement connexe qui consiste en un seul sommet.*

Proposition 2.22. [14] *Soit k un entier positif, il existe un tournoi T dont $ir(T) = 1 < \gamma(T) = k$.*

Proposition 2.23. [14] *Pour tout tournoi T d'ordre n , on a: $\Gamma(D) \leq IR(T) \leq \lceil n/2 \rceil$.*

Dans le même article les auteurs ont posé des problèmes ouverts sur ce domaine de la recherche. En citons quelque uns:

- 1°/ Peut-on calculer la valeur $\gamma(T)$ en temps polynomial pour n'importe quel tournoi ?
- 2°/ Caractérisation des tournois tels que $ir(D) = 2$.
- 3°/ Quel est l'ordre minimum d'un tournoi T pour lequel $\gamma(T) = 5$?

En 2006, J. Albertson, A. Harris, L. Langley, et S. Merz, [3] ont publié leur premier article sur la domination orientée. Ils ont caractérisé les arbres orientés T satisfaisant $\gamma(T) + \Delta_+(T) = n$.

En 2007, S. Arumugam, K. Jacob, and L. Volkman, [13] ont publié un article sur la domination orientée. Dans cet article ils ont défini et étudié pour la première fois la domination totale, la domination ouverte, et la domination connexe et leurs paramètres de domination orientée ($\gamma_t(D)$, $\gamma_0(D)$ et $\gamma_c(D)$ resp.) puis ils ont caractérisé les graphes orientés satisfaisant $\gamma_t(D) = n$, $\gamma_0(D) = n$, et ont donné les bornes suivantes $\gamma_t(D) + \Delta_+(D) \leq n$, $\gamma_0(D) \geq \frac{n}{\Delta_+}$, $\gamma_t(D) \geq \frac{2n}{(2\Delta_+ + 1)}$, et $\gamma_c(D) \leq 2\beta_1(D) - 1$.

Définition 2.24. [13] Soit $D = (V, A)$ un digraphe dont $id(v) > 0$, pour tout sommet v de V . Un sous ensemble S de V est appelé un ensemble dominant ouvert de D (open dominating set) si pour chaque sommet $v \in V$ il existe $u \in S$ tel que $(u, v) \in A$ (c.-à-d. $\forall v \in V; I(v) \cap S \neq \emptyset$). Le cardinal minimum d'un ensemble dominant ouvert de D est appelé nombre de domination et noté par $\gamma_0(D)$.

Définition 2.25. [13] Soit $D = (V, A)$ un digraphe dont $id(v) + od(v) > 0; \forall v \in V$. Un sous ensemble S de V est appelé un ensemble dominant total de D si S est un ensemble dominant de D et le sous graphe induit $D[S]$ n'a pas des sommets isolés. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de D est appelé nombre de domination totale et noté par $\gamma_t(D)$.

Remarque 2.26. [13] Si $D = (V, A)$ est un digraphe connexe d'ordre n , contient au moins un ensemble dominant ouvert, alors $\gamma_t(D) \leq \gamma_0(D)$. Cette inégalité peut être stricte. Pour le digraphe représenté dans la Figure 2.5, on a l'ensemble $S_t = \{2, 3, 4, 7\}$ est un $\gamma_t(D)$ -ensemble avec $\gamma_t(D) = 4$ et l'ensemble $S_0 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est un $\gamma_0(D)$ -ensemble avec $\gamma_0(D) = 6$.

Remarque 2.27. [13] Si S est un ensemble dominant ouvert d'un graphe D , alors $D[S]$ contient un circuit.

Théorème 2.28. [13] Si $D = (V, A)$ est un digraphe connexe d'ordre n , avec $\delta_-(D) > 0$, alors $\gamma_0(D) = n$ si et seulement si D est un circuit.

Théorème 2.29. [13] Soit $D = (V, A)$ un digraphe connexe d'ordre $n \geq 3$, Alors $\gamma_t(D) = n$ si et seulement s'il existe un sous graphe induit $D_1 = (V_1, A_1)$ tel que tout sommet v dans $V \setminus V_1$ a pour degré intérieur égale à zéro ($id(v) = 0$) et pour chaque sommet u de V_1 , il existe au moins un sommet v de $V \setminus V_1$ tel que $(v, u) \in A(D)$ et $od(v) = 1$.

Exemple 2.30. [13] Dans la Figure 2.6 le digraphe $D = (V, A)$ où $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est connexe et le sous digraphe $D_1 = (V_1, A_1)$ où $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, satisfait les conditions du Théorème 2.29 $\gamma_t(D) = 8$.

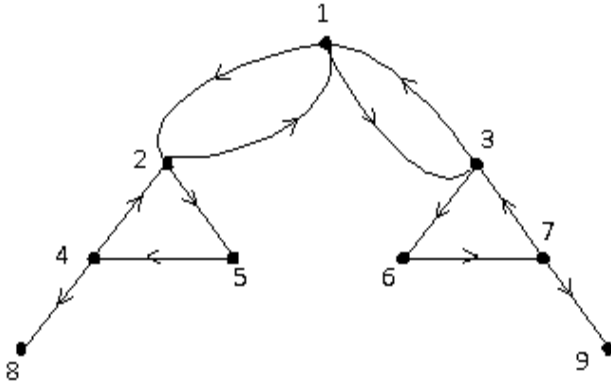


Figure 2.5: $\gamma_0(D) = 6$ et $\gamma_t(D) = 4$

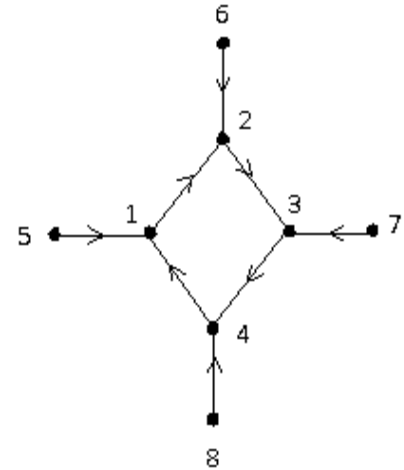


Figure 2.6 : $\gamma_t(D) = 8$

Théorème 2.31. [13] Soit $D = (V, A)$ un digraphe avec $id(v) > 0$; pour tout $v \in V$. Alors $\gamma_t(D) + \Delta_+(D) \leq n + 1$.

Théorème 2.32. [13] Soit $D = (V, A)$ un digraphe connexe d'ordre n avec $\delta_-(D) > 0$. Si $\Delta_+(D) \leq n - 2$, alors $\gamma_t(D) + \Delta_+(D) \leq n$.

Définition 2.33. [13] Soit $D = (V, A)$ un digraphe tel que son graphe associé G est connexe. Un sous ensemble S de V est appelé un ensemble dominant connexe de D si S est ensemble dominant de D et le sous graphe induit $D[S]$ est connexe. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de D est appelé nombre de domination connexe et noté par $\gamma_c(D)$.

Remarque 2.34. [13] Observons que $\gamma(D) \leq \gamma_c(D)$ et cette inégalité peut être stricte. Pour le digraphe D donné par la figure 2.1, $\gamma(D) = 4$ et $\gamma_c(D) = 5$, l'ensemble $S = \{2, 3, 4, 7\}$ (resp. $S_c = \{1, 2, 3, 4, 7\}$) est un $\gamma(D)$ -ensemble (resp. $\gamma_c(D)$ -ensemble) de D .

Théorème 2.35. [13] Pour tout graphe connexe G , il existe une orientation D telle que $\gamma_c(D) \leq 2\beta_1(G) - 1$.

Dans [13] les auteurs ont posé les problèmes ouverts suivants:

1°/ Caractérisation des digraphes pour lesquels $\gamma_t(D) = \gamma_0(D)$.

2°/ Caractérisation des digraphes pour lesquels $\gamma_t(D) = n - \Delta_+(D) + 1$.

2°/ Caractérisation des digraphes pour lesquels $\gamma_t(D) = \frac{2n}{(2\Delta_+ + 1)}$.

3°/ Caractérisation des digraphes pour lesquels $\gamma_0(D) = \frac{n}{\Delta_+}$.

CHAPITRE 3

LA DOMINATION DANS LES GRAPHEs ORIENTÉS

3.1 Introduction

Nous donnons dans ce chapitre des nouvelles bornes supérieures pour le nombre de domination $\gamma(D)$, ensuite on caractérise les chaînes, les cycles et les arbres orientés pour lesquels la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$ est atteinte. On donne ensuite une nouvelle borne inférieure pour le nombre de domination $\gamma(D)$ à savoir $s(D) \leq \gamma(D)$. puis on caractérise les graphes orientés pour lesquels la borne inférieure de $s(D) \leq \gamma(D)$ est atteinte, aussi la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

3.2 Observations

Rappelons d'abord quelques résultats et notations nécessaires pour la suite.

Théorème 3.1. [9] *Tout digraphe D avec n sommets, satisfait:* $\frac{n(D)}{1 + \Delta_+(D)} \leq \gamma(D) \leq n(D) - \Delta_+(D)$.

Théorème 3.2. [4] *Pour un digraphe D fortement connexe avec n sommets, on a :* $\gamma(D) \leq \left\lceil \frac{n(D)}{2} \right\rceil$

Théorème 3.3. [12] *Soit G un graphe. Alors on a:*

1. $\beta_1(G) \leq \frac{n(G)}{2}$,
2. $\beta(G) + \beta_1(G) \leq n(G)$.

Notation 3.4. On note par \vec{C}_n (resp. \vec{P}_n) le cycle à n sommets orienté anti symétriquement et avec les arcs orientés tous dans le même sens (resp. la chaîne à n sommets orientée anti symétriquement et avec les arcs orientés tous dans le même sens). Ainsi par \vec{P}_n , \vec{C}_n et \vec{T} la chaîne orientée, le cycle orienté et l'arbre orienté respectivement.

Observation 3.5. Pour toute chaîne orientée \vec{P}_n , on a : $\gamma(\vec{P}_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ et $\beta_1(\vec{P}_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Observation 3.6. Pour tout chemin orienté anti symétriquement \vec{P}_n on a :
 $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n$.

Observation 3.7. Pour tout cycle orienté \vec{C}_n , on a : $\gamma(\vec{C}_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ et $\beta_1(\vec{C}_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Observation 3.8. Pour tout circuit orienté anti symétriquement \vec{C}_n on a :
 $\gamma(\vec{C}_n) + \beta_1(\vec{C}_n) = n$.

Observation 3.9. Soient D_1, D_2, \dots, D_p , ($p \geq 2$) des graphes orientés disjoints deux à deux et $\mu \in \{\gamma, \beta_1, ir\}$. Alors on a :

$$\mu(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_p) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + \dots + \mu(D_p).$$

Définition 3.10. Soit S_p la classe des chaînes orientées \vec{P}_n d'ordre n telle que tout sommet de la chaîne vérifie $od(x) \leq 1$.

Observation 3.11. Soit \vec{P}_n une chaîne orientée d'ordre n . Si $\vec{P}_n \in S_p$ alors on a :

$$\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n.$$

3.3 Nouvelles bornes supérieures pour $\gamma(D)$

Nous nous intéresserons dans cette section à l'établissement des bornes supérieures pour le nombre de domination $\gamma(D)$ dans un graphe orienté quelconque. La caractérisation concernant les chaînes orientées, les cycles orientés et les arbres orientés sera exposée dans la prochaine section.

3.3.1 Première borne ($\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$)

Théorème 3.12. (Blidia & Ouldrabah) [2] Pour tout digraphe D avec n sommets, on a :

$$\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$$

Preuve. Soit $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_1\}$ un couplage maximum de D et Z_M l'ensemble de sommets qui ne sont pas incidents à des arêtes de M (Voir Figure 3.1). Sans perte de généralité, on peut supposer que x_i est adjacent à y_i dans D , donc $\overrightarrow{x_i y_i}$ est un arc de D . Il est clair que $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{\beta_1}\} \cup Z_M$ est un ensemble dominant de D , donc $\gamma(D) \leq |S| = |\{x_1, x_2, \dots, x_{\beta_1}\}| + |Z_M| = \beta_1 + n - 2\beta_1 = n - \beta_1$ et cette borne est atteinte.

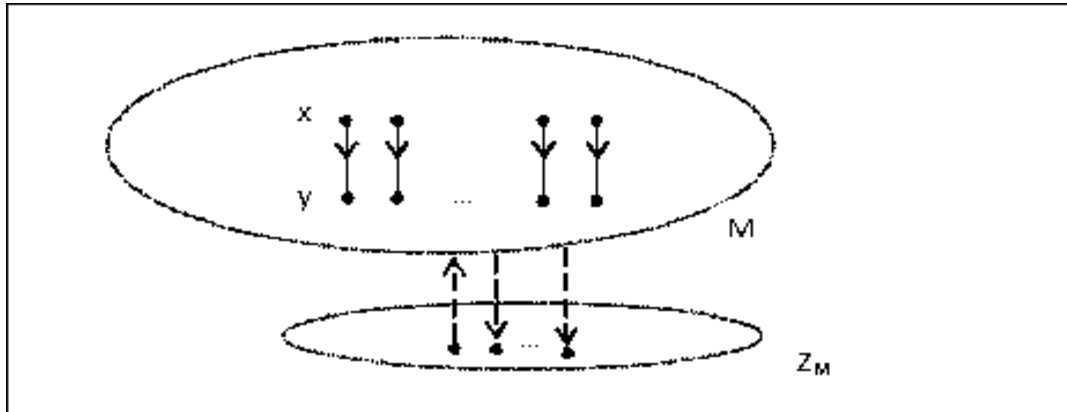


Fig 3.1 : Ensemble Z_M de sommets non saturés par le couplage M .

□

Dans la Figure 3.2: On a $n(D) = 6$, $\beta_1(D) = 3$ et comme l'ensemble $S = \{2, 4, 6\}$ est un $\gamma(D)$ -ensemble avec $\gamma(D) = 3$, donc $\gamma(D) + \beta_1(D) = n(D)$.



Figure 3.2 : $\gamma(D) + \beta_1(D) = n(D)$

3.3.2 Deuxième borne ($\gamma(D) \leq n - d^+(v) - \beta_v(D)$)

Définition 3.13. On définit par $\overline{O}(v) = V(D) \setminus O[v]$ le non-voisinage extérieur d'un sommet v de D et par $\beta_v(D)$ le couplage maximum $C = \{x_i y_i : i = 1 \dots \beta_v\}$ dans le sous digraphe $D[\overline{O}(v)]$ induit par $\overline{O}(v)$, où les arcs $\overrightarrow{x_i y_i} \in A(D)$; $i = 1, \dots, \beta_v$ et Z_M est l'ensemble de tous les sommets non saturés par le couplage C .

Rappelons que le paramètre $\beta_v(D)$, peut être calculé en temps polynômiale pour tout digraphe D .

Proposition 3.14. (Blidia & Ouldrabah) Pour tout digraphe D d'ordre n et pour tout sommet $v \in V$, on a :

$$\gamma(D) \leq n - d^+(v) - \beta_v(D) \quad (3.1)$$

Preuve. Soit v un sommet de D , le sous digraphe engendré par $V(D) \setminus O[v]$ admet un couplage maximum M avec $|M| = \beta_v(D)$. Soit $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_v\}$ et $C = \{\overrightarrow{x_i y_i} \in A(D) : i = 1 \dots \beta_v\}$ l'ensemble des arcs correspondants à M dans $D[V(D) \setminus O[v]]$ et Z_M l'ensemble des sommets qui ne sont pas incidents à des arêtes de M . On a : $Z_M = (V(D) \setminus O[v]) \setminus \{x_i, y_i : i = 1, \dots, \beta_v\}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} |Z_M| &= |(V(D) \setminus O[v])| - |\{x_i, y_i : i = 1, \dots, \beta_v\}| \\ &= n - (d^+(v) + 1) - 2\beta_v(D) \end{aligned}$$

Posons $I_C = \{x_i / \overrightarrow{x_i y_i} \in C\}$, alors l'ensemble $S = \{v\} \cup I_C \cup Z_M$ est un dominant de D , et ceci implique $\gamma(D) \leq |S| = |\{v\} \cup I_C \cup Z_M| = |\{v\}| + |I_C| + |Z_M| = 1 + \beta_v + n - (d^+(v) + 1) - 2\beta_v(D) = n - d^+(v) - \beta_v(D)$. Ce qui donne le résultat suivant: $\gamma(D) \leq n - d^+(v) - \beta_v(D), \forall v \in V(D)$. \square

Définition 3.15. Un sommet w est dit bon si $\max \{d^+(v) + \beta_v(D), v \in V(D)\} = d^+(w) + \beta_w(D)$

On pose $\Delta'_+(D) = \max \{d^+(v) + \beta_v(D), v \in V(D)\}$. L'inégalité (3.1) est aussi vraie pour le paramètre $\Delta'_+(D)$, c'est-à-dire $\gamma(D) \leq n - \Delta'_+(D)$, et cette borne est atteinte.

Exemple 3.16. Le tableau suivant détermine les demis-degrés extérieurs des sommets de V et $\beta_v(D); v \in V$, le couplage maximum $C = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_v\}$ dans le sous digraphe $D[\overline{O}(v)]$ induit par $\overline{O}(v)$ du digraphe représenté dans la Figure 3.3.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d^+(v)$	2	2	1	1	2	4	1	1	2
$\beta_v(D)$	3	3	3	3	2	2	3	3	3
$d^+(v) + \beta_v(D)$	5	5	4	4	4	6	4	4	5
$\Delta'_+(D)$	/	/	/	/	/	6	/	/	/

On voit bien que $\gamma(D) = n - \Delta'_+ = 3$, car l'ensemble $S_1 = \{3, 6, 9\}$ est un $\gamma(D)$ -ensemble avec $\gamma(D) = 3$, donc cette borne est atteinte.

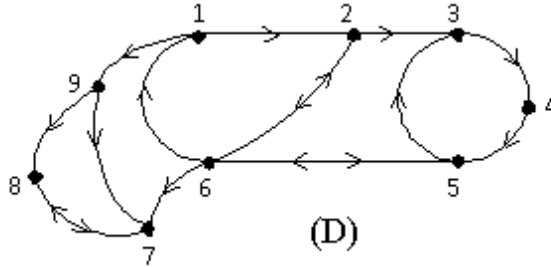


Figure 3.3 : $\gamma(D) = 3$

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la Proposition 3.14

Corollaire 3.17. Tout digraphe D d'ordre n satisfait $\gamma(D) \leq n - \Delta'_+(D)$.

Le paramètre $\Delta'_+(D)$, peut être déterminé en temps polynômiale pour tout digraphe D . La proposition suivante montre que les chemins et les circuits orientés anti symétriquement sont des digraphes où la borne du Corollaire 3.17 est atteinte.

Proposition 3.18. *Tout digraphe $D = \vec{C}_n$ ou \vec{P}_n (c.-à-d. un circuit ou un chemin d'ordre n orienté anti symétriquement) vérifie: $\gamma(D) = n - \Delta'_+$.*

Preuve. Si $D = \vec{C}_n$ alors $\gamma(D) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Comme pour tout sommet v de $V(D)$, v est un sommet bon, $d^+(v) = 1$ et

$$\beta_v(D) = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{si } n \equiv 0 [2] \\ \frac{n-3}{2} & \text{si } n \equiv 1 [2] \end{cases}$$

Donc d'après la Définition 3.15 on a

$$\begin{aligned} \Delta'_+ &= \max \{d^+(v) + \beta_v(D), v \in V(D)\} \\ &= d^+(v) + \beta_v(D) \end{aligned}$$

et il est facile de voir que $\gamma(D) + \Delta'_+(D) = n$.

Si $D = \vec{P}_n$, alors $\gamma(D) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sans perte de généralité on peut indexer les sommets de $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$ et comme D est un chemin orienté anti symétriquement, alors:

$$d^+(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{pour } i = n \end{cases}$$

$$\text{Si } n \equiv 0 [2], \text{ alors } \beta_v(D) = \begin{cases} \frac{n-4}{2} & \text{pour } i = 2, 4, 6, \dots, n-4, n-2 \\ \frac{n-2}{2} & \text{pour } i = 1, 3, 5, \dots, n-1, n \end{cases}$$

et donc $\Delta'_+(D) = \frac{n}{2}$.

$$\text{Si } n \equiv 1 [2], \text{ alors } \beta_v(D) = \begin{cases} \frac{n-3}{2} & \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ \frac{n-1}{2} & \text{pour } i = n \end{cases}$$

et donc $\Delta'_+(D) = \frac{n-1}{2}$. Par suite, dans tous les cas on a : $\gamma(D) + \Delta'_+(D) = n$. \square

3.3.3 Troisième borne ($\gamma(D) \leq n(D) - \delta_+(D) - \Delta_+(D)$)

Proposition 3.19. (*Blidia & Ouldrabah*) Soit D un digraphe de n sommets et soit v un sommet tel que $d^+(v) = \Delta_+(D)$. S'il existe un sommet $u \in V(D) \setminus O[v]$ tel que $O(u) \cap O[v] = \emptyset$, alors:

$$\gamma(D) + \delta_+(D) + \Delta_+(D) \leq n(D)$$

Preuve. Soit v un sommet tel que $d^+(v) = \Delta_+(D)$, et supposons qu'il existe un sommet $u \in V(D) - O[v]$ tel que $O(u) \cap O[v] = \emptyset$, donc $O(u) \subseteq V(D) - O[v]$. Posons $S = V(D) - O[v]$ et soit S' un ensemble dominant de $S - O[u]$. Donc l'ensemble $S' \cup \{u\} \cup \{v\}$ est un ensemble dominant de D . Ceci implique que $\gamma(D) \leq |S' \cup \{u\} \cup \{v\}| = |S'| + 2$ et comme $S' \subseteq S - O[u]$, donc $|S'| \leq |S - O[u]| = |S| - d^+(u) - 1$. Comme $d^+(u) \geq \delta_+(D)$ on a donc:

$$\begin{aligned} |S'| &\leq |S| - d^+(u) - 1 \\ &\leq |V(D) - O[v]| - \delta_+(D) - 1 \\ &= n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D) - 2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\gamma(D) \leq n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$$

et cette borne est atteinte. □

Exemple 3.20. Dans le digraphe représenté par la Figure 3.4, on a $\delta_+(D) = \Delta_+(D) = 1$ et comme l'ensemble $S_1 = \{1, 3, 5\}$ est un $\gamma(D)$ -ensemble avec $\gamma(D) = 3$, donc $\gamma(D) = n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$

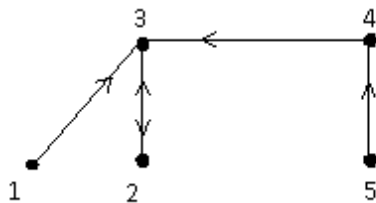


Figure 3.4 : $\gamma(D) = n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$

Proposition 3.21. *Soit \vec{P}_n un chemin orienté anti symétriquement.*

Alors $\gamma(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n) - \Delta_+(\vec{P}_n) - \delta_+(\vec{P}_n)$ si et seulement si $\vec{P}_n = \vec{P}_2$ ou \vec{P}_3 .

Preuve. Soit \vec{P}_n un chemin orienté anti symétriquement tel que $\gamma(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n) - \Delta_+(\vec{P}_n) - \delta_+(\vec{P}_n)$. Comme $\delta_+(\vec{P}_n) = 0$ et $\Delta_+(\vec{P}_n) = 1$, et d'après l'Observation 3.6 $\gamma(\vec{P}_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Maintenant si n est pair alors $\frac{n}{2} = n - 1$, donc $n = 2$ et dans ce cas on a $\vec{P}_n = \vec{P}_2$ et si n est impair alors $\frac{n+1}{2} = n - 1$ donc $n = 3$, et dans ce cas on a $\vec{P}_n = \vec{P}_3$. La condition suffisante est simple à voir. \square

Proposition 3.22. *Soit \vec{C}_n un circuit orienté anti symétriquement.*

Alors $\gamma(\vec{C}_n) = n(\vec{C}_n) - \Delta_+(\vec{C}_n) - \delta_+(\vec{C}_n)$ si et seulement si $\vec{C}_n = \vec{C}_4$ ou \vec{C}_5 .

Preuve. Soit \vec{C}_n un circuit orienté anti symétriquement tel que $\gamma(\vec{C}_n) = n(\vec{C}_n) - \Delta_+(\vec{C}_n) - \delta_+(\vec{C}_n)$. Comme $\delta_+(\vec{C}_n) = 1$ et $\Delta_+(\vec{C}_n) = 1$, et d'après l'Observation 3.8 $\gamma(\vec{C}_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Maintenant si n est pair alors $\frac{n}{2} = n - 2$ donc $n = 4$ et dans ce cas on a $\vec{C}_n = \vec{C}_4$ et si n est impair alors $\frac{n+1}{2} = n - 2$ donc $n = 5$, et dans ce cas on a $\vec{C}_n = \vec{C}_5$. La condition suffisante est simple à voir. \square

Dans la section suivante, on étudie la caractérisation de certaines classes de graphes orientés où l'égalité est atteinte pour la borne supérieure $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$. Rappelons que le nombre $\beta_1(D)$ peut être calculé pour n'importe quel graphe G en temps polynomiale (Voir [6]). D'autre part les bornes peuvent être aussi comptées en temps polynomiale.

3.4 Caractérisation de quelques digraphes pour lesquels $(\gamma(D) = n(D) - \beta_1(D))$

3.4.1 Chaines orientées \vec{P}_n

Nous commençons par donner une condition nécessaire pour toute chaîne orientée \vec{P}_n d'ordre n satisfaisante $\gamma(\vec{P}_n) = n - \beta_1(\vec{P}_n)$.

Définition 3.23. On définit l'étoile orientée $\overrightarrow{K[x_i]}$ de centre x_i (obstruction) par le sous digraphe induit noté par $\overrightarrow{K[x_i]}$ où $V(\overrightarrow{K[x_i]}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ (Voir Figure 3.5).

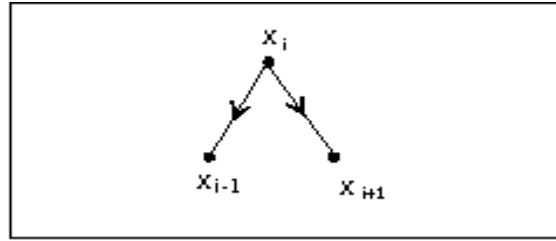


Figure 3.5 : L'étoile orientée $\overrightarrow{K[x_i]}$ (Obstruction)

Notation 3.24. On note par $\overrightarrow{K[x_i, x_j]}$ la chaîne orientée obtenue à partir de $\overrightarrow{K[x_i]}$, de la chaîne orientée reliant x_{i+2} à x_{j-2} , et de $\overrightarrow{K[x_j]}$ en reliant par un arc le sommet x_{i+1} au sommet x_{i+2} et le sommet x_{j-2} au sommet x_{j-1} (Voir Figure 3.6; cette figure sera considérée dans le cas des chaînes orientées et les cycles orientés).

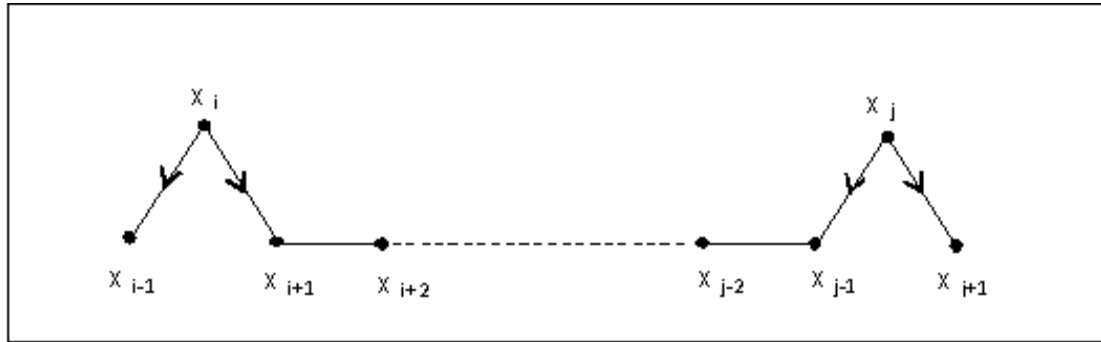


Figure 3.6 : La chaîne orientée $\overrightarrow{K[x_i, x_j]}$.

Lemme 3.25. (Blidia & Ouldrabah) Si $\overrightarrow{P_n}$ est une chaîne orientée telle que $\gamma(\overrightarrow{P_n}) = n - \beta_1(\overrightarrow{P_n})$, alors on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i]}, \text{ pour tout } i \text{ pair } \in \overline{1, n} & \text{si } n \equiv 1 [2] \\ \overrightarrow{P_n} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}, i \text{ pair, } j \text{ impair et } j > i + 1 & \text{si } n \equiv 0 [2] \end{cases}$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{P_n}$ une chaîne orientée d'ordre n vérifiée $\gamma(\overrightarrow{P_n}) = n - \beta_1(\overrightarrow{P_n})$. On distingue deux cas.

Cas 1. $n \equiv 1 [2]$

Dans ce cas $\beta_1(\vec{P}_n) = \frac{n-1}{2}$. Supposons qu'il existe i pair tel que $\vec{P}_n \supseteq \overrightarrow{K[x_i]}$. Partitionnons l'ensemble $V(\vec{P}_n)$ en deux sous ensembles: $V(\vec{P}_n) = A \cup B$, où

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-2}\} \cup \{x_{i+2}, \dots, x_n\};$$

$$B = V(\overrightarrow{K[x_i]}) = \{x, x_i, x_{i+1}\}.$$

On a: $|A| = (i-2) + (n-i-1)$; $|B| = 3$. D'après l'Observation 3.5, $\gamma(\vec{P}_n) \leq \gamma([A]) + \gamma([B]) = \frac{n-1}{2}$. Comme $\beta_1(\vec{P}_n) = \frac{n-1}{2}$, on a: $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \leq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n-1 < n$, contradiction.

Cas 2. $n \equiv 0 [2]$

Supposons qu'ils existent i et j avec $j > i+1$ et $j-i \equiv 1 [2]$ tels que $\vec{P}_n \supseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$. Partitionnons l'ensemble $V(\vec{P}_n)$ en trois sous ensembles:

$$A = \{x, x_2, \dots, x_{i-2}\} \cup \{x_1, \dots, x_n\};$$

$$B = V(\overrightarrow{K[x_i]}) \cup V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x, x_i, x_{i+1}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\};$$

$$C = V(\vec{P}_n) - (A \cup B) = \{x_{i+2}, \dots, x_{j-2}\}.$$

On a: $|A| = (i-j) + n - 3$; $|B| = 6$, et $|C| = (j-i) - 3$. Comme la distance $d(x_i, x_j) \equiv 1 [2]$, i.e. $j-i = 2k+1, k \geq 1$. Alors $|A| = n - 2k - 4$, $|C| = 2k - 2$. D'après l'Observation 3.5, $\gamma([A]) \leq \left\lceil \frac{n-2k-4}{2} \right\rceil = \frac{n-2k-4}{2}$ (car n est pair), $\gamma([C]) \leq \left\lceil \frac{2k-2}{2} \right\rceil = \frac{2k-2}{2}$ et $\gamma([B]) = 2$. On a: $\gamma(\vec{P}_n) \leq \gamma([A]) + \gamma([B]) + \gamma([C]) = \frac{n-2}{2}$ et $\beta_1(\vec{P}_n) = \frac{n}{2}$, (car n est pair). Donc $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \leq \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} = n-1 < n$, contradiction, d'où le résultat. \square

Le résultat suivant est une caractérisation des chaînes orientées \vec{P}_n d'ordre impair telles que $\vec{P}_n \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i]}$; i impair $\in \overline{1, n}$, vérifiant $\gamma(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n) - \beta_1(\vec{P}_n)$.

Lemme 3.26. Soit \overrightarrow{P}_n une chaîne orientée d'ordre impair telle que $\overrightarrow{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$, pour tout i impair $\in \overline{1, n}$. Alors $\overrightarrow{P}_n \in S_p$ si et seulement si $\gamma(\overrightarrow{P}_n) = n(\overrightarrow{P}_n) - \beta_1(\overrightarrow{P}_n)$.

Preuve. D'après l'Observation 3.11, la condition nécessaire est simple à voir. Inversement, d'après le Lemme 3.25 on a : $\overrightarrow{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$ pour tout i pair et comme $\overrightarrow{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$, pour tout i impair, donc $\overrightarrow{P}_n \in S_p$. \square

Nous donnons maintenant une caractérisation des chaînes orientées \overrightarrow{P}_n vérifiant, $\gamma(\overrightarrow{P}_n) = n(\overrightarrow{P}_n) - \beta_1(\overrightarrow{P}_n)$.

Théorème 3.27. (Blidia & Ouldrabah) Une chaîne orientée \overrightarrow{P}_n d'ordre n vérifie $\gamma(\overrightarrow{P}_n) = n(\overrightarrow{P}_n) - \beta_1(\overrightarrow{P}_n)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \overrightarrow{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}, \text{ pour tout } i \in \text{pair} \overline{1, n} & \text{si } n \equiv 1 [2] \\ \overrightarrow{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}, i \text{ pair, } j \text{ impair et } j > i + 1 & \text{si } n \equiv 0 [2] \end{cases}$$

Preuve. La condition nécessaire découle du lemme 3.25. Inversement, on procède par induction sur l'ordre n de la chaîne orientée \overrightarrow{P}_n . On distingue deux cas.

Cas 1. $n \equiv 1 [2]$

Si $n = 3$ alors $\overrightarrow{P}_n \neq \overrightarrow{K[x_i]}$ et donc $\gamma(\overrightarrow{P}_n) = 2$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{P}_n) = 1$, et $n(\overrightarrow{P}_n) = 2$ alors $\gamma(\overrightarrow{P}_n) = n - \beta_1(\overrightarrow{P}_n)$, la propriété est vérifiée pour ce cas. Supposons maintenant que $n \geq 5$ et que toute chaîne orientée d'ordre impair $n' < n$ vérifie $\overrightarrow{P}_{n'} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$, pour tout i pair $\in \overline{1, n'}$, alors $\gamma(\overrightarrow{P}_{n'}) = n' - \beta_1(\overrightarrow{P}_{n'})$. Comme $od(x_i) \leq 2$, pour tout $i \in \overline{1, n}$, on distingue les deux cas suivants.

Cas 1.1. $\forall i \in \overline{1, n} / od(x_i) \leq 1$

Alors $\overrightarrow{P}_n \in S_p$ et d'après l'Observation 3.11, on a $\gamma(\overrightarrow{P}_n) + \beta_1(\overrightarrow{P}_n) = n(\overrightarrow{P}_n)$.

Cas 1.2. $\exists j \in \overline{2, n-1} / od(x_j) = 2$

D'après l'hypothèse $\overrightarrow{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$, pour tout i pair $\in \overline{1, n}$, donc j est impair. On distingue deux cas.

Cas 1.2.1. $\forall i \neq j ; od(x_i) \leq 1$

Soit S un $\gamma(\overrightarrow{P_n})$ -ensemble. Partitionnons l'ensemble $V(\overrightarrow{P_n})$ en trois sous ensembles:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-2}\};$$

$$B = \{x_{j+2}, \dots, x_n\};$$

$$C = V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x, x_j, x_{j+1}\}.$$

On note par $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ (resp. $\overrightarrow{P_{n_B}}[B]$) la chaîne engendrée par A (resp. B). et posons $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{P_n} \setminus \overrightarrow{K[x_j]}$, ($\overrightarrow{H} \neq \emptyset$, car $n \geq 5$). Comme $od(x_j) = 2$, sans perte de généralité on peut supposer que $x_j \in S$, et que $x_{j-1}, x_{j+1} \notin S$. En effet, si $I(x_j) = \emptyset$ alors x_j est forcément dans S . Maintenant si $I(x_j) \neq \emptyset$, supposons que $x_j \notin S$. Dans ce cas il existe au moins un sommet $y \in \{x_{j-1}, x_{j+1}\} \cap S$ tel que $x_j \in O(y)$, et comme $y \in O(x_j)$, donc on peut remplacer y par x_j dans S et S reste un $\gamma(\overrightarrow{P_n})$ -ensemble. Et dans les deux cas si x_{j-1} ou(et) $x_{j+1} \in S$ alors on peut le(s) remplacer par x_{j-2} ou(et) x_{j+2} respectivement (car il(s) est (sont) dominé(s) par x_j). Par conséquent $S' = S - \{x_j\}$ est un dominant de \overrightarrow{H} . Ce que implique que

$$\gamma(\overrightarrow{H}) \leq |\acute{S}| = |S - \{x_j\}| = \gamma(\overrightarrow{P_n}) - 1 \quad (3.2)$$

Maintenant soit S' un $\gamma(\overrightarrow{H})$ -ensemble. Alors $S' \cup \{x_j\}$ est un dominant de $\overrightarrow{P_n}$, donc

$$\gamma(\overrightarrow{P_n}) \leq |S' \cup \{x_j\}| = \gamma(\overrightarrow{H}) + 1 \quad (3.3)$$

D'après (3.2) et (3.3) on obtient $\gamma(\overrightarrow{P_n}) = \gamma(\overrightarrow{H}) + 1$.

Comme n et j sont impairs donc n_A et n_B sont aussi impairs où $n_A = |A| = j - 2$, $n_B = |B| = n - j - 1$, et $\beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A - 1}{2}$ (resp. $\beta_1(\overrightarrow{P_{n_B}}) = \frac{n_B - 1}{2}$). Donc $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ (resp. $\overrightarrow{P_{n_B}}[B]$) est une chaîne orientée d'ordre impair $n_A < n$, vérifiée $\overrightarrow{P_{n_A}} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i]}$, pour tout i pair $\in \overline{1, n_A}$ (resp. $n_B < n$, vérifiée $\overrightarrow{P_{n_B}} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i]}$, pour tout i pair $\in \overline{1, n_A}$). Et par l'hypothèse d'induction, on a $\gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) = n_A - \beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A + 1}{2}$ (resp. $\gamma(\overrightarrow{P_{n_B}}) = n_B - \beta_1(\overrightarrow{P_{n_B}}) = \frac{n_B + 1}{2}$). Et d'après l'Observation 3.9 $\gamma(\overrightarrow{H}) = \gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) + \gamma(\overrightarrow{P_{n_B}})$. Donc $\gamma(\overrightarrow{P_n}) = \frac{n_A + 1}{2} + \frac{n_B + 1}{2} + 1$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{P_n}) = \frac{n - 1}{2}$ alors $\gamma(\overrightarrow{P_n}) + \beta_1(\overrightarrow{P_n}) = n$.

Cas 1.2.2. $\exists k \neq j ; od(x_k) = 2$

D'après l'hypothèse $\vec{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_k]}$, si k est pair. Donc k est impair. Soit S un $\gamma(\vec{P}_n)$ -ensemble. Idem que cas 2.1, on fait la partition suivante

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-2}\};$$

$$B = \{x_{j+2}, \dots, x_n\};$$

$$C = V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}.$$

Similairement au cas précédent, on a $\gamma(\vec{P}_n) = \gamma(\vec{H}) + 1$.

Comme n_A est impair (resp. n_B est impair) et k reste impair dans la chaîne $\vec{P}_{n_A}[A]$ (resp. $\vec{P}_{n_B}[B]$), donc $\vec{P}_{n_A}[A] \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$ pour tout i pair (resp. $\vec{P}_{n_B}[B] \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$ pour tout i pair). Par l'hypothèse d'induction, on a donc $\gamma(\vec{P}_{n_A}) = n_A - \beta_1(\vec{P}_{n_A}) = \frac{n_A + 1}{2}$ (resp. $\gamma(\vec{P}_{n_B}) = n_B - \beta_1(\vec{P}_{n_B}) = \frac{n_B + 1}{2}$). Et d'après l'Observation 3.9 $\gamma(\vec{H}) = \gamma(\vec{P}_{n_A}) + \gamma(\vec{P}_{n_B})$. Donc $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n$.

Cas 2. $n \equiv 0 [2]$

Si $n = 4$ alors $\vec{P}_n \neq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$ et donc $\gamma(\vec{P}_n) = 2$ et comme $\beta_1(\vec{P}_n) = 2$, et $n(\vec{P}_n) = 4$ alors $\gamma(\vec{P}_n) = n - \beta_1(\vec{P}_n)$, la propriété est vérifiée pour ce cas. Supposons maintenant que $n \geq 6$ et que toute chaîne orientée d'ordre pair $n' < n$ vérifie $\vec{P}_{n'} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$, pour tout $i, j \in \overline{1, n}$, i pair j impair et $j > i + 1$, alors $\gamma(\vec{P}_{n'}) = n' - \beta_1(\vec{P}_{n'})$. Comme $od(x_i) \leq 2$, pour tout $i \in \overline{1, n}$, on distingue deux cas.

Cas 2.1. $\forall i \in \overline{1, n} ; od(x_i) \leq 1$

Alors $\vec{P}_n \in S_p$ et d'après l'Observation 3.11, on a $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n)$.

Cas 2.2. $\exists j, \in \overline{1, n}; od(x_j) = 2$

On distingue deux cas.

Cas 2.2.1. $\forall i \neq j; od(x_i) \leq 1$

Soit S un $\gamma(\overrightarrow{P_n})$ -ensemble. Partitionnons l'ensemble $V(\overrightarrow{P_n})$ en trois sous ensembles:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-2}\};$$

$$B = \{x_{j+2}, \dots, x_n\};$$

$$C = V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}.$$

On note par $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ (resp. $\overrightarrow{P_{n_B}}[B]$) la chaîne engendrée par A (resp. B) et on pose $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{P_n} \setminus \overrightarrow{K[x_j]}$, ($\overrightarrow{H} \neq \emptyset$, car $n \geq 6$). Comme $od(x_j) = 2$, et avec un raisonnement analogue au **Cas 1.2.1** on peut supposer que $x_j \in S$, et que $x_{j-1}, x_{j+1} \notin S$. Par conséquent $S' = S - \{x_j\}$ est un dominant de \overrightarrow{H} . Ce que implique que

$$\gamma(\overrightarrow{H}) \leq |S'| = |S - \{x_j\}| = \gamma(\overrightarrow{P_n}) - 1 \quad (3.4)$$

Maintenant soit S' un $\gamma(\overrightarrow{H})$ -ensemble. Alor, $S' \cup \{x_j\}$ est un dominant de $\overrightarrow{P_n}$, donc

$$\gamma(\overrightarrow{P_n}) \leq |S' \cup \{x_j\}| = \gamma(\overrightarrow{H}) + 1 \quad (3.5)$$

D'après (3.4) et (3.5) on obtient $\gamma(\overrightarrow{P_n}) = \gamma(\overrightarrow{H}) + 1$. Comme $od(x_i) \leq 1$ pour tout $i \neq j$ donc $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ et $\overrightarrow{P_{n_B}}[B]$ sont des chaînes de la classe S_p et comme n est pair donc $n_A + n_B = n - 3$ est impair où $n_A = |A| = j - 2$ et $n_B = |B| = n - j - 1$, sans perte de généralité on peut supposer que n_A est pair et n_B est impair, donc $\beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A}{2}$ (resp. $\beta_1(\overrightarrow{P_{n_B}}) = \frac{n_B - 1}{2}$) et d'après le lemme 3.26, on a $\gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A}{2}$ et $\gamma(\overrightarrow{P_{n_B}}) = \frac{n_B + 1}{2}$. Et d'après l'Observation 3.9 $\gamma(\overrightarrow{H}) = \gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) + \gamma(\overrightarrow{P_{n_B}})$. Donc $\gamma(\overrightarrow{P_n}) = \frac{n_A}{2} + \frac{n_B + 1}{2} + 1$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{P_n}) = \frac{n}{2}$ alors $\gamma(\overrightarrow{P_n}) + \beta_1(\overrightarrow{P_n}) = \frac{n_A}{2} + \frac{n_B + 1}{2} + 1 + \frac{n}{2} = n$.

Cas 2.2.2. $\exists k \neq j; od(x_k) = 2$

Soit S un $\gamma(\vec{P}_n)$ -ensemble. Idem que cas. 2.2.1, on fait la partition suivante:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-2}\};$$

$$B = \{x_{j+2}, \dots, x_n\};$$

$$C = V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}.$$

Avec un raisonnement analogue au cas précédent, on aboutit

$$\gamma(\vec{P}_n) = \gamma(\vec{H}) + 1 \quad (3.6)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $k > j$. D'après l'hypothèse $\vec{P}_n \not\subseteq \overrightarrow{K[x_j, x_k]}$ pour j pair, k impair et $k > j + 1$. Donc on a quatre cas possibles: ou bien j et k sont pairs ou impairs ou bien j impair et k pair, ou bien $k = j + 1$. Comme n est pair donc $n_A + n_B = n - 3$ est impair où $n_A = |A| = j - 2$ et $n_B = |B| = n - j - 1$.

D'après l'hypothèse $k > j$, on a pour tout $i \in \overline{1, n_A}$: $od(x_i) \leq 1$, et ceci signifie que $\vec{P}_{n_A}[A]$ est une chaîne de la classe S_p avec $\beta_1(\vec{P}_{n_A}) = \left\lfloor \frac{n_A}{2} \right\rfloor$. Et d'après le lemme 3.26, on a donc $\gamma(\vec{P}_{n_A}) = n_A - \beta_1(\vec{P}_{n_A}) = \left\lceil \frac{n_A}{2} \right\rceil$. Pour la chaîne \vec{P}_{n_B} , comme $k > j$ on distingue deux cas:

Cas a. $k = j + 1$, dans ce cas $x_k \in C$ et donc pour tout $i \in \overline{1, n_B}$: $od(x_i) \leq 1$, et ceci signifie que $\vec{P}_{n_B}[B]$ est aussi une chaîne de la classe S_p avec $\beta_1(\vec{P}_{n_B}) = \left\lfloor \frac{n_B}{2} \right\rfloor$. Et d'après le lemme 3.26, on a donc $\gamma(\vec{P}_{n_B}) = n_B - \beta_1(\vec{P}_{n_B}) = \left\lceil \frac{n_B}{2} \right\rceil$ et d'après l'Observation 3.9 $\gamma(\vec{H}) = \gamma(\vec{P}_{n_A}) + \gamma(\vec{P}_{n_B}) = \left\lceil \frac{n_A}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n_B}{2} \right\rceil = \frac{n_A + n_B + 1}{2}$ (car $n_A + n_B \equiv 1 [2]$). D'après 3.6 on a $\gamma(\vec{P}_n) = \frac{n_A + n_B + 3}{2}$ et comme $\beta_1(\vec{P}_n) = \frac{n}{2}$ donc $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n$.

Cas b. $k > j + 1$, on distingue deux sous cas:

Cas b. 1. $n_B \equiv 1 [2]$, ceci implique que $n_A \equiv 0 [2]$. Et dans ce cas k est impair dans la liste des indices $[1, \dots, k, \dots, n_B]$ correspondante à la chaîne \vec{P}_{n_B} . Par conséquent $\vec{P}_{n_B} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$; pour tout i pair, avec $i \in \overline{1, n_B}$. Et par l'hypothèse du théorème dans le **Cas 1** ($n \equiv 1 [2]$), on a: $\gamma(\vec{P}_{n_B}) = n_B - \beta_1(\vec{P}_{n_B}) = \frac{n_B + 1}{2}$. Et comme $\gamma(\vec{P}_{n_A}) = \left\lceil \frac{n_A}{2} \right\rceil = \frac{n_A}{2}$. Donc $\gamma(\vec{P}_n) = \frac{n_A}{2} + \frac{n_B + 1}{2} + 1$ et comme $\beta_1(\vec{P}_n) = \frac{n}{2}$ alors $\gamma(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = \frac{n_A}{2} + \frac{n_B + 1}{2} + 1 + \frac{n}{2} = n$.

Cas b. 2. $n_B \equiv 0 [2]$, ceci implique que $n_A \equiv 1 [2]$. Et dans ce cas pour tout $i \in \overline{1, n_B}$: $\overrightarrow{P_{n_B}} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i, x_k]}$; i pair, k impair et $k > i + 1$. Et par l'hypothèse d'induction dans le **Cas2** ($n \equiv 0 [2]$), alors $\gamma(\overrightarrow{P_{n_B}}) = n_B - \beta_1(\overrightarrow{P_{n_B}}) = \frac{n_B}{2}$. Et comme $\gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \left\lceil \frac{n_A}{2} \right\rceil = \frac{n_A + 1}{2}$. Donc $\gamma(\overrightarrow{P_n}) + \beta_1(\overrightarrow{P_n}) = n$. \square

3.4.2 Cycles orientés $\overrightarrow{C_n}$

Le résultat suivant est une caractérisation des cycles orientés $\overrightarrow{C_n}$ vérifiant, $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = n - \beta_1(\overrightarrow{C_n})$.

Théorème 3.28. (*Blidia & Ouldrabah*) *Un cycle orienté $\overrightarrow{C_n}$ d'ordre n vérifie $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = n - \beta_1(\overrightarrow{C_n})$ si et seulement si*

$$\begin{cases} \overrightarrow{C_n} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}, \text{ pour tout } i \in \overline{1, n} & \text{si } n \equiv 1 [2] \\ \overrightarrow{C_n} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}, i + j \equiv 1 [2] \text{ et } j > i + 1 & \text{si } n \equiv 0 [2] \end{cases}$$

Preuve. Commençons par la condition nécessaire. On distingue deux cas.

Cas 1. $n \equiv 1 [2]$

Supposons qu'il existe $i \in \overline{1, n}$ tel que $\overrightarrow{C_n} \supseteq \overrightarrow{K[x_i]}$. Partitionnons l'ensemble $V(\overrightarrow{C_n})$ en deux sous ensembles $V(\overrightarrow{P_n}) = A \cup B$, où

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-2}\} \cup \{x_{i+2}, \dots, x_n\};$$

$$B = V(\overrightarrow{K[x_i]}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}.$$

Avec un raisonnement analogue au cas chaîne orientée d'ordre impair, on aboutit: $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) \leq n - 1 < n$, une contradiction.

Inversement comme $\overrightarrow{C_n} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i]}$; pour tout $i \in \overline{1, n}$, donc $\overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{C_n}$. Et d'après l'Observation 3.8, la condition suffisante est simple à vérifier.

Cas 2. $n \equiv 0 [2]$

Établissons la condition nécessaire. On procède par induction sur l'ordre n du cycle orienté $\overrightarrow{C_n}$. Pour $n = 4$, $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) = n$, et il est évident que $V(\overrightarrow{K[x_i, x_j]}) = \emptyset$ pour $i + j \equiv 1 [2]$ et $j > i + 1$. Si $n = 6$, il est simple de vérifier que $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) = n$ si et seulement si $\overrightarrow{C_n} \not\subseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$. Supposons maintenant que $n \geq 8$ et que tout cycle orienté

d'ordre pair $n' < n$ vérifie $\gamma(\overrightarrow{C_{n'}}) = n' - \beta_1(\overrightarrow{C_{n'}})$, alors $\overrightarrow{C_{n'}} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$, $i + j \equiv 1 [2]$ et $j > i + 1$.

Supposons $i + j \equiv 1 [2]$, avec $j > i + 1$ tels que $\overrightarrow{C_n} \supseteq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$. Prenons le cas i pair et j impaire (idem pour le cas i impaire et j paire). Partitionnons l'ensemble $V(\overrightarrow{C_n})$ en deux sous ensembles:

$$\begin{aligned} A &= \{x_1, x_2, \dots, x_{i-2}\} \cup \{x_{j+2}, \dots, x_n\}; \\ B &= V(\overrightarrow{K[x_i, x_j]}) = \{x, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-2}, x, x_j, x_{j+1}\}. \end{aligned}$$

Avec un raisonnement analogue au cas chaîne orientée d'ordre pair, on aboutit:

$$\begin{aligned} \gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) &\leq \gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}[A]) + \gamma(\overrightarrow{P_{n_B}}[B]) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) \\ &< \frac{2n}{2} = n, \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

Inversement si $n = 4$ alors $\overrightarrow{C_n} \neq \overrightarrow{K[x_i, x_j]}$ et donc $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = 2$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{C_n}) = 2$, et $n(\overrightarrow{C_n}) = 4$ alors $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = n - \beta_1(\overrightarrow{C_n})$.

Supposons maintenant que $n \geq 6$. Comme $od(x_i) \leq 2$, pour tout $i \in \overline{1, n}$, on distingue les deux cas suivants.

Cas 2.1. $\forall i \in \overline{1, n}; od(x_i) = 1$

Alors $\overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{C_n}$ et d'après l'Observation 3.8 il est facile de voir que $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) = n(\overrightarrow{C_n})$ (il n'existe pas i tel que $od(x_i) = 0$ sinon il existe $j \neq i$ tel que $od(x_j) = 2$, et ce cas est inclus dans le cas suivant).

Cas 2.2. $\exists j \in \overline{2, n-1}; od(x_j) = 2$

On distingue deux sous cas.

Cas 2.2.1. $\forall i \neq j; od(x_i) \leq 1$

Soit S un $\gamma(\overrightarrow{C_n})$ -ensemble. Partitionnons l'ensemble de sommets de $V(\overrightarrow{C_n})$ en deux sous ensembles: $A = \{x_{j+2}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_{j-2}\}$ et $B = V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$. On note par $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ (ou $\overrightarrow{P_{n_A}}$) la chaîne engendrée par A et posons $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{C_n} \setminus \overrightarrow{K[x_j]} = \overrightarrow{P_{n_A}}[A]$. Comme n est pair donc n_A est impair où $n_A = |A| = n - 3$, et $\beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A - 1}{2}$. Avec

un raisonnement analogue au cas **Cas 2.2.1.** pour les chaînes orientées, on aboutit:

$$\gamma(\overrightarrow{C_n}) = \gamma(\overrightarrow{H}) + 1 \quad (3.7)$$

Comme $od(x_i) \leq 1$ pour tout $i \neq j$ donc $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ est une chaîne orientée d'ordre impair de la classe S_p et d'après l'Observation 3.11, donc $\gamma(\overrightarrow{H}) = \gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A + 1}{2}$. Donc $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = \frac{n_A + 1}{2} + 1$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{C_n}) = \frac{n}{2}$ d'où $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) = n$.

Cas 2.2.2. $\exists k \neq j; od(x_k) = 2$

Soit S un $\gamma(\overrightarrow{C_n})$ -ensemble, on fait la partition suivante

$$A = \{x_{j+2}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_{j-2}\};$$

$$B = V(\overrightarrow{K[x_j]}) = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}.$$

Posons $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{C_n} \setminus \overrightarrow{K[x_j]} = \overrightarrow{P_{n_A}}[A]$. Et de même raisonnement comme le cas précédent, on a

$$\gamma(\overrightarrow{C_n}) = \gamma(\overrightarrow{H}) + 1 \quad (3.8)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $k > j$. D'après l'hypothèse $\overrightarrow{C_n} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_j, x_k]}$, $j + k \equiv 1 [2]$ avec $k > j + 1$. Donc on a trois cas possibles: ou bien j et k sont pairs ou impairs ou bien $k = j + 1$. Comme n est pair donc $n_A = n - 3$ est impair. Pour la chaîne $\overrightarrow{P_{n_A}}$, comme $k > j$ on distingue deux cas:

Cas a. $k = j + 1$, dans ce cas $x_k \in A$ et donc pour tout $i \in \overline{1, n_A}$: $od(x_i) \leq 1$, et ceci signifie que $\overrightarrow{P_{n_A}}[A]$ est aussi une chaîne de la classe S_p avec $\beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \left\lfloor \frac{n_A}{2} \right\rfloor$. Et d'après le lemme 3.26, on a donc $\gamma(\overrightarrow{H}) = \gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) = n_A - \beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \left\lceil \frac{n_A}{2} \right\rceil = \frac{n_A + 1}{2} = \frac{n - 2}{2}$. D'après 3.8 on a $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = \frac{n_A + 3}{2} = \frac{n}{2}$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{C_n}) = \frac{n}{2}$ donc $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) = n$. \square

Preuve. **Cas b.** $k > j + 1$, dans ce cas k est impair dans la liste des indices $[1, \dots, k, \dots, n_A]$ correspondante à la chaîne $\overrightarrow{P_{n_A}}$. Par conséquent $\overrightarrow{P_{n_A}} \not\supseteq \overrightarrow{K[x_i]}$; pour tout i pair, avec $i \in \overline{1, n_A}$. Et d'après le Théorème 3.27 **Cas 1.** ($n \equiv 1 [2]$), on a: $\gamma(\overrightarrow{H}) = \gamma(\overrightarrow{P_{n_A}}) = n_A - \beta_1(\overrightarrow{P_{n_A}}) = \frac{n_A + 1}{2} = \frac{n - 2}{2}$. D'après 3.8 on a $\gamma(\overrightarrow{C_n}) = \frac{n_A + 3}{2} = \frac{n}{2}$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{C_n}) = \frac{n}{2}$ alors $\gamma(\overrightarrow{C_n}) + \beta_1(\overrightarrow{C_n}) = n$. \square

3.4.3 Arbres orientés \vec{T}

Dans cette section, on caractérise les arbres orientés pour lesquels la borne supérieure est atteinte. Nous commençons par donner une condition nécessaire pour les graphes orientés satisfaisant $\gamma(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Lemme 3.29. (Blidia & Ouldrabah) [2] Soit D un graphe non trivial orienté qui vérifie $\gamma(D) = n(D) - \beta_1(D)$, alors tout couplage maximum $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_1\}$ dans le graphe non orienté G associé à D ; où les arcs $\overrightarrow{x_i y_i} \in A(D)$; $i = 1, \dots, \beta_1$ et Z_M l'ensemble de tous les \overline{M} -sommets (l'ensemble des sommets non saturés par le couplage M), satisfait:

1. $\forall z \in Z_M; I(z) \cap \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} = \emptyset$.
2. $\forall e = xy$ une arête de M , si une extrémité z de e vérifiée $I(z) \cap ((\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) \cup Z_M) \neq \emptyset$, alors l'autre extrémité de e vérifiée $I(z') \cap ((\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) \cup Z_M) = \emptyset$.

Preuve. Soit $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_1\}$ un couplage maximum dans le graphe G associé à D dont les arcs correspondants sont $\overrightarrow{x_i y_i}$; $i = 1, \dots, \beta_1$ et Z_M l'ensemble de tous les \overline{M} -sommets de G . Supposons que $\gamma(D) = n(D) - \beta_1(D)$ et supposons que la condition 1 ou 2 n'est pas vraie. Si la condition 1 n'est pas vraie, alors il existe $z \in Z_M$ tel que $I(z) \cap \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \neq \emptyset$. Donc il est clair que l'ensemble $S = \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \cup (Z_M \setminus \{z\})$ est un ensemble dominant de D et

$$\begin{aligned}
 \gamma(D) &\leq |S| = |\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \cup (Z_M \setminus \{z\})| \\
 &= |\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\}| + |Z_M \setminus \{z\}| \\
 &= \beta_1 + (n - 2\beta_1) - 1 \\
 &= n - \beta_1 - 1 < n - \beta_1, \text{ contradiction.}
 \end{aligned}$$

Maintenant supposons que la condition 2 n'est pas vraie. Il existe une arête $e = xy$ du couplage M avec l'arc correspondant \overrightarrow{xy} , qui ne vérifie pas la condition 2. Sans perte de généralité, supposons que $I(y) \cap ((\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) \cup Z_M) \neq \emptyset$ et $I(x) \cap$

$((\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) \cup Z_M) \neq \emptyset$. On considère l'ensemble $S = (\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) \cup Z_M$, il est clair que S est un ensemble dominant de D ,

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &\leq |S| = |(\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) \cup Z_M| \\
&= |\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}| + |Z_M| \\
&= \beta_1 + (n - 2\beta_1) - 1 \\
&= n - \beta_1 - 1 < n - \beta_1, \text{ contradiction.}
\end{aligned}$$

□

Observation 3.30.

1. Soit x un sommet support tel que $I(x) = \emptyset$. Alors tout $\gamma(D)$ -ensemble contient x .
2. Soit x un sommet support de D . Alors tout $\gamma(D)$ -ensemble contient au moins un sommet de $L_x \cup \{x\}$.

Observation 3.31. Soit \vec{T} un arbre orienté.

1. Si \vec{T} est un arbre obtenu à partir d'un arbre \vec{T}' en attachant un sommet à un sommet support de \vec{T}' , alors on a $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}')$.
2. Pour chaque sommet support v d'un arbre non trivial, il existe un couplage maximum M qui contient une arête pendante d'extrémité v .
3. Si \vec{T} est un arbre obtenu à partir d'un arbre \vec{T}' en attachant une extrémité de P_2 à un sommet de \vec{T}' , alors on a $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + 1$.

Définition 3.32. Une étoile orientée notée par $\overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 1$ sans $\overrightarrow{K[x_i]}$ comme sous digraphe, est une étoile de centre x tel que $|O(x) \cap L_x| \leq 1$ (ou $od(x) < 2$).

Observation 3.33. (Blidia & Ouldrabah) [2] Soit \vec{T} un arbre orienté, si $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ alors, pour tout sommet support x de \vec{T} , le sous digraphe induit par $L_x \cup \{x\}$ est une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 1$.

Preuve. Supposons que \vec{T} satisfait $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ et il existe un sommet support x de \vec{T} , tel que le sous digraphe induit par $L_x \cup \{x\}$ est une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 2$, où $|L_x| = p$, telle que $|O(x) \cap L_x| = k \geq 2$. D'après l'Observation 3.31 (2), on considère un couplage maximum M qui contient l'arête pendante avec une extrémité x . Alors pour ce couplage M , la condition 1 du lemme 3.29, n'est pas satisfaite donc on a $\gamma(\vec{T}) < n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$, d'où la contradiction. \square

Définition 3.34. On définit par $\overrightarrow{S_{p,q}}$ l'arbre orienté obtenu à partir de deux étoiles orientées $\overrightarrow{K_{1,p}}$ et $\overrightarrow{K_{1,q}}$ en attachant le centre x de $\overrightarrow{K_{1,p}}$ au centre y de $\overrightarrow{K_{1,q}}$ où l'arête xy est arbitrairement orientée (Voir Figure 3.7).



Figure 3.7: Arbre orienté $\overrightarrow{S_{p,q}}$

Définition 3.35. Étant donné une chaîne $P_2(x, y)$ d'ordre 2, d'extrémités x et y . On définit à partir de $P_2(x, y)$ les deux types de chaînes orientées, $\overrightarrow{P_2^1(x, y)}$ et $\overrightarrow{P_2^2(x, y)}$ comme suit : $\overrightarrow{P_2^1(x, y)}$, est une chaîne d'ordre 2 orientée dans le sens de x vers y , i.e. $\vec{xy} \in A(D)$ (éventuellement l'arc \vec{yx} peut exister). $\overrightarrow{P_2^2(x, y)}$, est une chaîne d'ordre 2 orientée dans le sens unique de y vers x , i.e. $\vec{yx} \in A(D)$ et $\vec{xy} \notin A(D)$ (Voir figure 3.8).

Définition 3.36. On définit par $\overrightarrow{H_k(z)}$ l'arbre orienté obtenu à partir des chaînes orientées de type $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)}$, $i = \overline{1, k}$ ($k \geq 1$) en attachant un sommet z à tout sommet x_i par une arête pour $i = \overline{1, k}$ ($k \geq 1$), où au moins une arête $x_i z$ est orientée de x_i à z , i.e. $\vec{x_i z} \in A(D)$ (possible qu'elle soit symétrique et les autres orientés arbitrairement) (Voir Figure 3.9).



Figure 3.8 : $\overrightarrow{P_2^1(x, y)}$ $\overrightarrow{P_2^2(x, y)}$

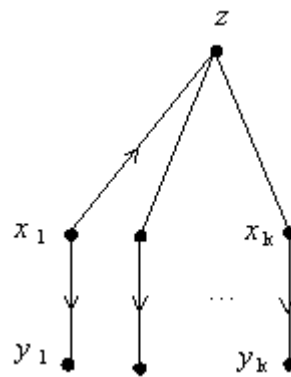
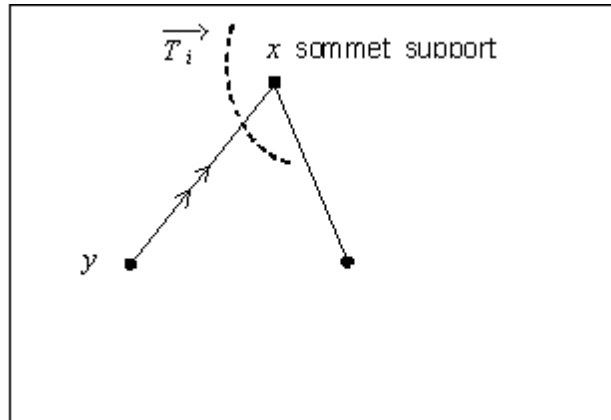


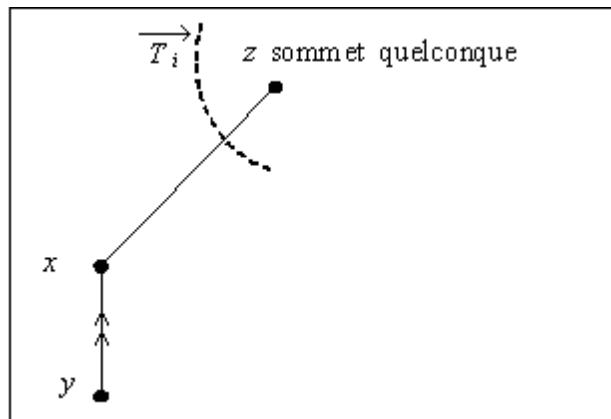
Figure 3.9 : Le graphe orienté $\overrightarrow{H_k(z)}$

Avant de caractériser les arbres orientés vérifiant l'égalité $\gamma(\overrightarrow{T}) = n(\overrightarrow{T}) - \beta_1(\overrightarrow{T})$, nous introduisons la famille notée F des arbres orientés \overrightarrow{T} qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres orientés $\overrightarrow{T}_1, \overrightarrow{T}_2, \dots, \overrightarrow{T}_m$ ($m \geq 1$), où \overrightarrow{T}_1 est une chaîne orientée de type $\overrightarrow{P_2^1(x_i, y_i)}$ ou $\overrightarrow{P_2^2(x, y)}$, $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}_m$ et si $m \geq 2$, \overrightarrow{T}_{i+1} peut être construit récursivement à partir de \overrightarrow{T}_i en appliquant l'une de cinq opérations $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ ou Φ_5 définis ci-dessous:

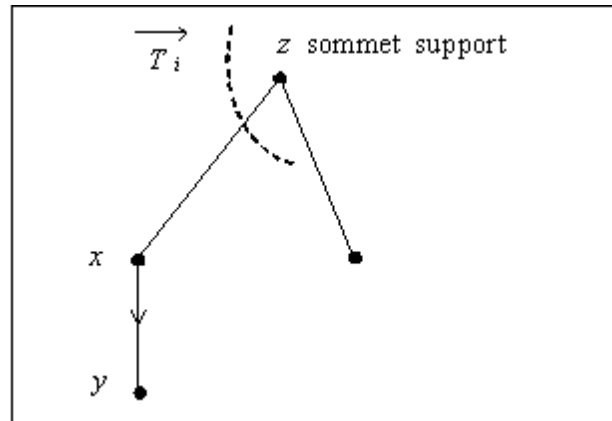
- Opération Φ_1 : On ajoute un sommet y à \vec{T}_i puis on l'attache à un sommet support x de \vec{T}_i par une arête munie d'une orientation unique de y vers x (Voir Figure 3.10).

Figure 3.10 : Opération Φ_1

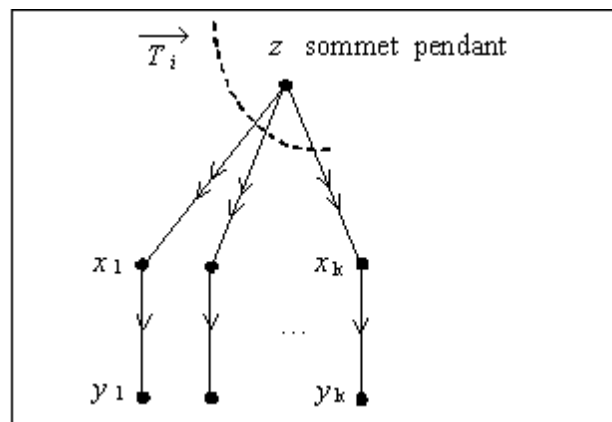
- Opération Φ_2 : On ajoute une chaîne orientée $\overrightarrow{P_2^1(x, y)}$ à \vec{T}_i , puis on attache x par une arête à un sommet z de \vec{T}_i où l'arête xz est munie d'une orientation quelconque (Voir Figure 3.11).

Figure 3.11 : Opération Φ_2

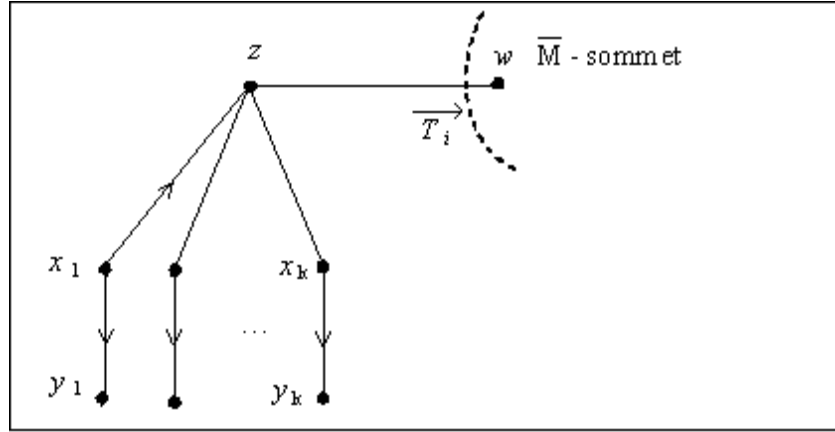
- Opération Φ_3 : On ajoute une chaîne orientée $\overrightarrow{P_2^2(x, y)}$ à $\overrightarrow{T_i}$, puis on attache x par une arête à un sommet support z de $\overrightarrow{T_i}$ où l'arête $x_i z$ est munie d'une orientation quelconque (Voir Figure 3.12).

Figure 3.12 : Opération Φ_3

- Opération Φ_4 : On ajoute k chaînes orientées $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)}$; $i = \overline{1, k}$ ($k \geq 1$) à $\overrightarrow{T_i}$, puis on attache chaque sommet x_i de $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)}$ $i = \overline{1, k}$, ($k \geq 1$) à un sommet pendant z par une arête munie d'une orientation unique de z vers x_i , $i = \overline{1, k}$ ($k \geq 1$). (Voir Figure 3.13).

Figure 3.13 : Opération Φ_4

- Opération Φ_5 : On ajoute l'arbre orienté $\overrightarrow{H_k(z)}$ à \overrightarrow{T}_i , puis on attache le sommet z de $\overrightarrow{H_k(z)}$ à un sommet w de \overrightarrow{T}_i où w est un \overline{M} -sommet de \overrightarrow{T}_i pour M un couplage maximum de \overrightarrow{T}_i et en orientant l'arête zw arbitrairement (Voir Figure 3.14).

Fig 3.14 : Opération Φ_5

Nous commençons la caractérisation en donnant le lemme suivant qui montre que les opérations définies au-dessus préservent l'égalité $\gamma(\overrightarrow{T}) = n(\overrightarrow{T}) - \beta_1(\overrightarrow{T})$.

Lemme 3.37. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Si un arbre orienté non trivial \overrightarrow{T} est dans F , alors $\gamma(\overrightarrow{T}) = n(\overrightarrow{T}) - \beta_1(\overrightarrow{T})$.*

Preuve. Soit \overrightarrow{T} un arbre orienté non trivial \overrightarrow{T} de F . Pour montrer que $\gamma(\overrightarrow{T}) = n(\overrightarrow{T}) - \beta_1(\overrightarrow{T})$, on procède par induction sur m où $m - 1$ est le nombre d'opérations nécessaires pour construire \overrightarrow{T} à partir de \overrightarrow{T}_1 . Si $m = 1$, alors $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{P_2^1(x_i, y_i)}$ ou $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)}$ et comme $\beta_1(\overrightarrow{T}) = 1, \gamma(\overrightarrow{T})$ et $n(\overrightarrow{T}) = 2$ alors $\gamma(\overrightarrow{T}) = n(\overrightarrow{T}) - \beta_1(\overrightarrow{T})$. La propriété est vérifiée pour ce cas. Supposons maintenant que $m \geq 2$ et les résultats sont vérifiés pour tous les arbres orientés de F qui peuvent être construits à partir d'une séquence d'au moins $m - 2$ opérations. Soit $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}_m$ un arbre orienté non trivial de F construit par $m - 1$ opérations, posons $\overrightarrow{T}' = \overrightarrow{T}_{m-1}$ et supposons que \overrightarrow{T}' a $n(\overrightarrow{T}'), \beta_1(\overrightarrow{T}')$ et $\gamma(\overrightarrow{T}')$. Par l'hypothèse d'induction, \overrightarrow{T}' satisfait $n(\overrightarrow{T}') = \gamma(\overrightarrow{T}') + \beta_1(\overrightarrow{T}')$. On considère cinq cas dépendants de \overrightarrow{T} obtenus à partir de \overrightarrow{T}' en utilisant $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ ou Φ_5 . Examinons ces cas un par un.

Cas 1. \vec{T} est obtenu à partir de \vec{T}' par l'utilisation de l'Opération Φ_1 . Soit S' un $\gamma(\vec{T}')$ -ensemble. Alors $S' \cup \{y\}$ est un dominant de \vec{T} , donc:

$$\gamma(\vec{T}) \leq |S' \cup \{y\}| = \gamma(\vec{T}') + 1 \quad (3.9)$$

Maintenant soit S un $\gamma(\vec{T})$ -ensemble de \vec{T} . D'après l'Observation 3.30 (1), S contient y . Sans perte de généralité comme x est un sommet support de \vec{T}' , ou bien il est contenu dans S , ou bien il est dominé par l'un des sommets de $L_x \setminus \{y\}$, donc $S \setminus \{y\}$ est un dominant de \vec{T}' . Ceci implique que:

$$\gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{y\}| = \gamma(\vec{T}) - 1 \quad (3.10)$$

D'après (3.9) et (3.10) on obtient $\gamma(\vec{T}) = \gamma(\vec{T}') + 1$. Par induction $\gamma(\vec{T}') = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$ et d'après l'Observation 3.31 (1):

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}) &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') + 1 \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}) + 1 \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}). \end{aligned}$$

Cas 2. \vec{T} est obtenu à partir de \vec{T}' par l'utilisation de l'Opération Φ_2 . Soit S' un $\gamma(\vec{T}')$ -ensemble. Alors $S' \cup \{y\}$ est un dominant de \vec{T} , donc:

$$\gamma(\vec{T}) \leq |S' \cup \{y\}| = \gamma(\vec{T}') + 1 \quad (3.11)$$

Maintenant soit S un $\gamma(\vec{T})$ -ensemble de \vec{T} . D'après l'Observation 3.30 (1), S contient y . Sans perte de généralité on peut supposer que $x \notin S$ (sinon on remplace x par z). Donc $S' = S \setminus \{y\}$ est un dominant de \vec{T}' , ce qui implique que:

$$\gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{y\}| = \gamma(\vec{T}) - 1 \quad (3.12)$$

D'après (3.11) et (3.12) on obtient $\gamma(\vec{T}) = \gamma(\vec{T}') + 1$. Par induction $\gamma(\vec{T}') = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$ et d'après l'Observation 3.31 (3) on a $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + 1$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}) &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') + 1 \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}) + 2 \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}). \end{aligned}$$

Cas 3. \vec{T} est obtenu à partir de \vec{T}' par l'utilisation de l'Opération Φ_3 . Soit S' un $\gamma(\vec{T}')$ -ensemble. Alors $S' \cup \{x\}$ est un dominant de \vec{T} , donc:

$$\gamma(\vec{T}) \leq |S' \cup \{x\}| = \gamma(\vec{T}') + 1 \quad (3.13)$$

Maintenant soit S un $\gamma(\vec{T})$ -ensemble de \vec{T} . Sans perte de généralité on peut supposer que $x \in S$ et $y \notin S$ et comme z est un sommet support de \vec{T}' , ou bien il est contenu dans S ou il est dominé par l'un de sommet de L_z , donc $S' = S \setminus \{x\}$ est un dominant de \vec{T}' . Ceci implique que:

$$\gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{x\}| = \gamma(\vec{T}) - 1 \quad (3.14)$$

D'après (3.13) et (3.14) on obtient $\gamma(\vec{T}) = \gamma(\vec{T}') + 1$. Par induction $\gamma(\vec{T}') = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$ et d'après l'Observation 3.31 (3) on a $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + 1$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}) &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') + 1 \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}) + 2 \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}). \end{aligned}$$

Cas 4. \vec{T} est obtenu à partir de \vec{T}' par l'utilisation de l'Opération Φ_4 . Soit S' un $\gamma(\vec{T}')$ -ensemble. Alors $S' \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ est un dominant de \vec{T} donc:

$$\gamma(\vec{T}) \leq |S' \cup \{x_1, \dots, x_k\}| = \gamma(\vec{T}') + k \quad (3.15)$$

Maintenant soit S un $\gamma(\vec{T})$ -ensemble de \vec{T} . Sans perte de généralité on peut supposer que $x_i \in S$ et $y_i \notin S$ pour $i = 1, \dots, k$, et comme chaque arête $x_i z$ est d'orientation asymétrique de z à x_i pour $i = 1, \dots, k$, alors $S' = S \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ est un dominant de \vec{T}' . Alors:

$$\gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{x_1, \dots, x_k\}| = \gamma(\vec{T}) - k \quad (3.16)$$

D'après (3.15) et (3.16) on obtient:

$$\gamma(\vec{T}) = \gamma(\vec{T}') + k$$

Par induction $\gamma(\vec{T}') = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$ et d'après l'observation 3.31 (3) on a $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + k$, donc:

$$\begin{aligned}\gamma(\vec{T}) &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') + k \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}) + 2k \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}).\end{aligned}$$

Cas 5. \vec{T} est obtenu à partir de \vec{T}' par l'utilisation de l'Opération Φ_5 . Soit S' un $\gamma(\vec{T}')$ -ensemble. Comme il existe au moins une arête $x_i z$ orientée de x_i à z , alors $S' \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ est un dominant de \vec{T} donc:

$$\gamma(\vec{T}) \leq |S' \cup \{x_1, \dots, x_k\}| = \gamma(\vec{T}') + k \quad (3.17)$$

Maintenant soit S un $\gamma(\vec{T})$ -ensemble de \vec{T} . Sans perte de généralité on peut supposer que $x_i \in S$ et $y_i \notin S$ pour $i = 1, \dots, k$, et $z \notin S$, (sinon on remplace z par w), donc $S' = S \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ est un dominant de \vec{T}' , ceci implique que:

$$\gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{x_1, \dots, x_k\}| = \gamma(\vec{T}) - k \quad (3.18)$$

D'après (3.17) et (3.18) on obtient:

$$\gamma(\vec{T}) = \gamma(\vec{T}') + k$$

Par induction $\gamma(\vec{T}') = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$ et comme il existe un couplage maximum M avec w est un \bar{M} -sommet, alors $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + k$, ce qui donne:

$$\begin{aligned}\gamma(\vec{T}) &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') + k \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}) + 2k + 1 \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}).\end{aligned}$$

□

Maintenant nous sommes prêt à donner une caractérisation constructive des arbres orientés satisfaisant l'égalité $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$.

Théorème 3.38. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Si \vec{T} est un arbre orienté non trivial, d'ordre $n(\vec{T})$, alors $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ si et seulement si $\vec{T} \in F$.*

Preuve. La condition suffisante découle du lemme 3.37, si $\vec{T} \in F$ alors on a $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$. Pour montrer la condition nécessaire, si \vec{T} est un arbre orienté non trivial, d'ordre $n(\vec{T}) \geq 2$, vérifie $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ alors $\vec{T} \in F$, on procédera par induction sur l'ordre de \vec{T} . Si $diam(\vec{T}) = 1$, alors $\vec{T} = \overrightarrow{P_2^1(x_i, y_i)}$ ou $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)} \in F$. Si $diam(\vec{T}) = 2$, alors $\vec{T} = \overrightarrow{K_{1,p}}$ (Voir l'Observation 3.33) qui est obtenu à partir de $\overrightarrow{P_2^1(x_i, y_i)}$ ou $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)}$ en utilisant $p - 2$ fois l'Opération Φ_1 . Si $diam(\vec{T}) = 3$, alors $\vec{T} = \overrightarrow{S_{p,q}}$ (voir 3.34) qui est obtenu en utilisant les opérations Φ_2 ou Φ_3 suivi par zéro au plusieurs fois l'Opération Φ_1 .

Supposons maintenant que $diam(\vec{T}) \geq 4$ et que tout arbre orienté \vec{T}' d'ordre $n(\vec{T}') < n(\vec{T})$ satisfaisant $\gamma(\vec{T}') = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$ est dans F . Soit \vec{T} un arbre orienté non trivial, d'ordre $n(\vec{T})$, satisfaisant $\gamma(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ et soit S un $\gamma(\vec{T})$ -ensemble de \vec{T} .

Enracinons \vec{T} en un sommet r d'excentricité maximum dans \vec{T} (On prend l'arbre \vec{T} , on l'enracine par un sommet r et tel que le diamètre de \vec{T} vérifie $diam(\vec{T}) = exc(r) = \max\{d(r, v), v \in L(\vec{T})\}$ (où $L(\vec{T})$ l'ensemble des sommets pendants de \vec{T}). Prenons y le sommet pendant qui se trouve à la fin de l'arborescence et qui satisfait $diam(\vec{T}) = exc(r) = d(r, y) = \max\{d(r, v), v \in L(\vec{T})\}$. Soit x le sommet support de y . On note par \vec{T}_x le sous arbre induit par un sommet x et ses descendants, on dit que \vec{T}_x est l'arbre enraciné en x . On considère trois cas, on les examine un par un :

Cas 1. x est un sommet support avec $|L_x| \geq 2$. D'après l'Observation 3.33, le sous digraphe induit $D[\{x\} \cup L_x]$ est une étoile $\overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 1$ de centre x avec $od(x) < 2$. Par conséquent, il existe y attaché à x avec l'arête xy ayant une orientation asymétrique de y vers x (i.e. $\overrightarrow{yx} \in A(\vec{T})$ et $\overrightarrow{xy} \notin A(\vec{T})$). Prenons $\vec{T}' = \vec{T} \setminus \{y\}$. Alors $n(\vec{T}') = n(\vec{T}) - 1$. D'après l'Observation 3.31 (1) $\beta_1(\vec{T}') = \beta_1(\vec{T})$ et d'après l'Observation 3.30 (1), S contient

y et comme x est un sommet support, donc sans perte de généralité $S' = S \setminus \{y\}$ est un dominant de \vec{T}' (x est dominé par un sommet pendant de $L_x \setminus \{y\}$ ou $x \in S$). Ceci implique que:

$$\gamma(\vec{T}) - 1 \leq \gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{y\}| = \gamma(\vec{T}) - 1,$$

ce qui donne:

$$\gamma(\vec{T}') = \gamma(\vec{T}) - 1 = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}) - 1 = -1 = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}').$$

Par induction sur \vec{T}' , on a $\vec{T}' \in F$ et comme \vec{T} est construit à partir de \vec{T}' par l'Opération Φ_1 (on note $\vec{T} = \Phi_1(\vec{T}')$) alors $\vec{T} \in F$.

Cas 2. x est un sommet support avec $|L_x| = 1$ et l'arête xy ayant une orientation asymétrique de y vers x (ie $\vec{yx} \in A(\vec{T})$ et $\vec{xy} \notin A(\vec{T})$).

Prenons $\vec{T}' = \vec{T} \setminus \{x, y\}$. Alors $n(\vec{T}') = n(\vec{T}) - 2$. D'après l'Observation 3.31 (3) $\beta_1(\vec{T}') = \beta_1(\vec{T}) + 1$ et d'après l'Observation 3.30 (1), S contient y . Sans perte de généralité on peut supposer que $x \notin S$ (sinon on remplace x par z). Ceci implique que $S' = S \setminus \{y\}$ est un dominant de \vec{T}' , ce qui donne:

$$\gamma(\vec{T}) - 1 \leq \gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{y\}| = \gamma(\vec{T}) - 1,$$

Ceci implique que:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}') &= \gamma(\vec{T}) - 1 = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}) - 1 \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') - 2 \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}'). \end{aligned}$$

Par induction sur \vec{T}' , on a $\vec{T}' \in F$ et comme \vec{T} est construit à partir de \vec{T}' par l'Opération Φ_2 , ($\vec{T} = \Phi_2(\vec{T}')$) alors $\vec{T} \in F$.

Cas 3. x est un sommet support avec $|L_x| = 1$ et l'arête xy a une orientation de x vers y (possible l'arc symétrique).

Comme $\text{diam}(T) \geq 4$ il existe une autre extrémité $z \neq y$ où x est son fils dans \vec{T} . On considère deux sous cas.

Cas 3.1. z est un sommet support dans \vec{T} .

Soit $\vec{T}' = \vec{T} \setminus \{x, y\}$. Alors $n(\vec{T}') = n(\vec{T}) - 2$. D'après l'Observation 3.31(3) $\beta_1(\vec{T}') = \beta_1(\vec{T}) + 1$. Sans perte de généralité on peut supposer que $x \in S$ et $y \notin S$ (sinon on remplace y par x), et comme z est dominé par un sommet pendant de L_z ou $z \in S$ alors $S' = S \setminus \{x\}$ est un dominant de \vec{T}' , ceci implique que:

$$\gamma(\vec{T}) - 1 \leq \gamma(\vec{T}') \leq |S'| = |S \setminus \{x\}| = \gamma(\vec{T}) - 1,$$

Ce qui donne aussi:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}') &= \gamma(\vec{T}) - 1 = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}) - 1 \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}') - 2 \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}'). \end{aligned}$$

Par induction sur \vec{T}' , on a $\vec{T}' \in F$ et comme \vec{T} est construit à partir de \vec{T}' par l'Opération Φ_3 ($\vec{T} = \Phi_3(\vec{T}')$) alors $\vec{T} \in F$.

Cas 3.2. z n'est pas un sommet support dans \vec{T} .

On peut supposer que chaque fils x de z dans l'arbre orienté enraciné est un sommet support faible avec $L_x = \{y\}$ et de plus x est un sommet prédécesseur de y (sinon, on peut appliquer le Cas2). Alors soit $\overrightarrow{P_2^2(x_i, y_i)}$ $i = \overline{1, k}$, ($k \geq 1$), k chaînes orientées où chaque sommet x_i est attaché avec un sommet z dans \vec{T} .

Maintenant si l'arête $x_i z$ est munie d'une orientation unique de z vers x_i , pour $i = \overline{1, k}$ ($k \geq 1$), alors on considère $\vec{T}' = \vec{T} \setminus \cup_{i=1}^k \{x_i, y_i\}$. Comme $\text{diam}(\vec{T}) \geq 4$ donc \vec{T}' est un arbre orienté non trivial et z est un sommet pendant dans \vec{T}' . Et comme $n(\vec{T}') = n(\vec{T}) - 2k$ et d'après l'Observation 3.31 (3) alors $\beta_1(\vec{T}') = \beta_1(\vec{T}) - k$. Il est claire que $\gamma(\vec{T}') = \gamma(\vec{T}) - k$. Par conséquent:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}') &= \gamma(\vec{T}) - k = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}) - k \\ &= n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}') - 2k \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}'). \end{aligned}$$

Par induction sur \vec{T}' , on a $\vec{T}' \in F$ et comme \vec{T} est construit à partir de \vec{T}' par l'Opération Φ_4 ($\vec{T} = \Phi_4(\vec{T}')$) alors $\vec{T} \in F$.

S'il existe une arête $x_i z$ munie d'une orientation de x_i vers z (ie $\overrightarrow{x_i z} \in A(\vec{T})$) et il est possible que l'arc $\overrightarrow{zx_i} \in A(\vec{T})$, alors comme $\text{diam}(\vec{T}) \geq 4$, soit w le parent de z dans l'arbre enraciné. Soit $\vec{T}' = \vec{T} \setminus \left(\left(\bigcup_{i=1}^k \{x_i, y_i\} \right) \cup \{z\} \right)$. Comme $n(\vec{T}') = n(T) - 2k - 1$ et $\text{diam}(T) \geq 4$, alors \vec{T}' est un arbre orienté non trivial. Il est facile de vérifier que $\gamma(\vec{T}') = \gamma(\vec{T}) - k$. Si pour chaque couplage maximum M de T' , w est incident avec au moins une arête de M alors $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + k$. Donc:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{T}) &= \gamma(\vec{T}') + k \leq n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}') + k \\ &= n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}) + 2k \\ &= n(\vec{T}) - 1 - \beta_1(\vec{T}) \\ &< n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}), \text{ une contradiction.} \end{aligned}$$

Ceci implique qu'il existe un couplage maximum M dont w est non saturé par ce couplage (c.-à-d. $w - \overline{M}$). Par conséquent $\beta_1(\vec{T}) = \beta_1(\vec{T}') + k + 1$ et $\gamma(\vec{T}') = \gamma(\vec{T}) - k = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T}) - k = n(T) - \beta_1(\vec{T}') - 2k - 1 = n(\vec{T}') - \beta_1(\vec{T}')$. Par induction sur \vec{T}' , on a $\vec{T}' \in F$ et comme \vec{T} est construit à partir de \vec{T}' par l'Opération Φ_5 ($\vec{T} = \Phi_5(\vec{T}')$) alors $\vec{T} \in F$. Ceci achève la preuve du Théorème. \square

3.5 Nouvelle borne inférieure pour $\gamma(D)$

On propose dans cette section une nouvelle borne inférieure pour le paramètre de domination inférieur $\gamma(D)$.

Théorème 3.39. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Si D est un digraphe non trivial d'ordre n , et $S(D)$ l'ensemble des sommets supports de D , alors $\gamma(D) \geq s(D)$ où $s(D) = |S(D)|$.*

Preuve. Soit $x \in S(D)$ un sommet support de D et soit S' un $\gamma(D)$ -ensemble. D'après l'Observation 3.30 (2), S' contient au moins un sommet de $L_x \cup \{x\}$, et ceci implique que $\gamma(D) = |S'| \geq |S(D)| = s(D)$. \square

3.6 Caractérisation des digraphes pour lesquels $(s(D) = \gamma(D))$

Théorème 3.40. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Soit D un digraphe. Alors $\gamma(D) = s(D)$ si et seulement si le digraphe D vérifie:*

1°/ *Pour tout sommet z de $V(D) \setminus (S(D) \cup L(D))$, $I(z) \cap S(D) \neq \emptyset$.*

2°/ *Pour tout sommet $x \in S(D)$ avec $|L_x| \geq 2$, $O(x) \cap L_x = L_x$.*

3°/ *Soit $L' = \{y \in L / I(y) \cap S(D) = \emptyset\}$, pour chaque $z \in V(D) \setminus (S(D) \cup L(D))$, $(I(z) \setminus O(L')) \cap S(D) \neq \emptyset$.*

Preuve. Commençons par la condition suffisante. Supposons que l'une des conditions n'est pas vraie. Alors dans tous les cas, $\gamma(D) > s(D)$, une contradiction. Montrons la condition nécessaire d'après le Théorème 3.39 $\gamma(D) \geq s(D)$. On construit l'ensemble dominant S' comme le suivant. Posons chaque sommet support x avec $|L_x| \geq 2$ dans S' . Si x est un sommet support avec $|L_x| = 1$ et tel que $O(x) \cap L_x = \emptyset$, alors on pose le sommet pendant L_x dans S' , si non on pose x dans S' . Par construction, $|S'| = s(D)$ et S' domine tous les sommets de $S(D) \cup L(D)$. Supposons maintenant qu'il existe un sommet z de $V(D) \setminus (S(D) \cup L(D))$ qui n'est pas dominé par S' . Par 1°/ $I(z) \cap S(D) \neq \emptyset$, soit

$S'' = I(z) \cap S(D)$, par construction de S' les pendants attachés aux sommets supports de S'' sont dans S' . Par conséquent pour chaque sommet x de S'' , $O(x) \cap L_x = \emptyset$, une contradiction avec 3°. Donc D est un ensemble dominant, et on a $|D| = s(D) \geq \gamma(D)$, ceci implique que $\gamma(D) = s(D)$. \square

Théorème 3.41. [2] *Soit D un digraphe. Alors $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$ si et seulement si le graphe G associé à D est une couronne.*

Preuve. Commençons par la condition suffisante. Si le graphe G de D est une couronne, alors G a un couplage parfait, $\beta_1(D) = \frac{n(D)}{2} = s(D)$. Par le Théorème 3.12:

$$\frac{n(D)}{2} = s(D) \leq \gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D) = n(D) - \frac{n(D)}{2} = \frac{n(D)}{2}.$$

donc $\gamma(D) = \frac{n(D)}{2} = s(D)$. Montrons la condition nécessaire. D'après le Théorème 3.3 2 $s(D) = n(D) - \beta_1(D) \geq \beta(D)$ et $s(D) \leq l(D) \leq \beta(D)$ donc:

$$s(D) = l(D) = \beta(D)$$

ceci implique que:

$$V(D) \setminus (S(D) \cup L(D)) = \emptyset$$

Il s'ensuit que le graphe G de D est une couronne, d'où le résultat. \square

Nous proposons pour les travaux de recherches futurs la conjecture suivante:

Est-ce-que les conditions (1) et (2) du Lemme 3.29 sont des conditions nécessaires et suffisantes pour les arbres orientés?

Le chapitre suivant est consacré à l'étude du concept de l'irrédondance dans les graphes orientés introduit par J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone [7].

CHAPITRE 4

L'IRRÉDONDANCE DANS LES GRAPHEs ORIENTÉS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne une nouvelle borne inférieure pour le nombre d'irrédondance inférieur à savoir $ir(D) \geq s(D)$. Ensuite nous donnons les valeurs exactes de $ir(D)$ pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement, puis la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$. Enfin, nous donnons une nouvelle borne supérieure pour le nombre d'irrédondance supérieur à savoir $IR(D) \leq n(D) - 1$. Ensuite nous caractérisons les graphes orientés pour lesquels $IR(D) = n(D) - 1$, et nous donnons des conditions nécessaires pour que les bornes des deux inégalités $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$ soient vraies et nous montrons que ces bornes sont atteintes.

4.2 Observations

Dans les graphes non orientés, on a la célèbre chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [5] qui relie les six paramètres de domination pour tout graphe G est:

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

Remarque 4.1. (*Blidia & Ouldrabah*) Cette chaîne d'inégalités n'est pas vraie pour les graphes orientés, le contre exemple d'un circuit \vec{C}_6 (cycle orienté anti symétriquement dont les arcs sont tous orientés dans le même sens) est représenté par la Figure 4.1. Néanmoins elle peut être vraie, un exemple d'une couronne orientée $\vec{C}_6 o K_1$ est représenté par la Figure 4.2.

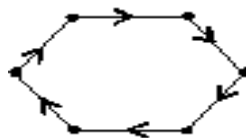


Figure 4.1: Circuit \vec{C}_6

Cet exemple donne : $ir(\vec{C}_6) = \gamma(\vec{C}_6) = 3$, $i(\vec{C}_6) = 2$, $\beta(\vec{C}_6) = 3$, $\Gamma(\vec{C}_6) = IR(\vec{C}_6) = 4$, et $\beta_1(\vec{C}_6) = 3$. Et par conséquent on a pour cet exemple:

$$i(D) < ir(D) = \gamma(D) = \beta(D) < \Gamma(D) = IR(D)$$

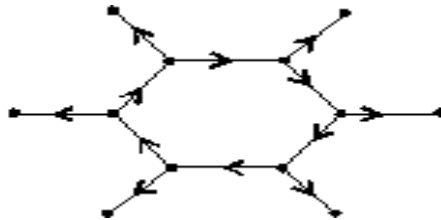


Figure 4.2: La couronne orientée \vec{C}_6oK_1

Cet exemple donne: $ir(\vec{C}_6oK_1) = \gamma(\vec{C}_6oK_1) = i(\vec{C}_6oK_1) = \beta(\vec{C}_6oK_1) = \Gamma(\vec{C}_6oK_1) = IR(\vec{C}_6oK_1) = 6$, et $\beta_1(\vec{C}_6oK_1) = 6$. Par conséquent on a pour cet exemple: $ir(D) \leq \gamma(D) \leq i(D) \leq \beta(D) \leq \Gamma(D) \leq IR(D)$.

Dans [10] on trouve un autre exemple : Pour un circuit de 3 sommets, on a $\gamma(D) = 2$, alors que $\beta(D) = 1$. Donc cette chaîne d'inégalités n'est pas vérifiée dans les digraphes. Le problème qui se pose d'une manière naturelle est la détermination des graphes orientés tels que la chaîne précédente soit vérifiée dans le cas orientés. J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone [7] ont montré le résultat suivant :

Proposition 4.2. [7] *Si D est un digraphe transitif, alors $ir(D) = \gamma(D) = i(D) = \beta(D) = \Gamma(D) = IR(D)$.*

Le théorème suivant caractérise les tournois satisfaisant la chaîne d'inégalités dans le cas orienté.

Théorème 4.3. [10] *T est un tournoi satisfaisant $ir(T) \leq \gamma(T) \leq i(T) \leq \beta(T) \leq \Gamma(T) \leq IR(T)$ si et seulement si T contient un sommet x tel que $id(x) = 0$.*

Théorème 4.4. [10] *Soit D un digraphe de n sommets on a: $ir(D) \leq n(D) - \Delta_+(D)$.*

4.3 Une nouvelle borne inférieure pour $ir(D)$

Pour le paramètre d'irrédondance inférieur $ir(D)$, nous avons établi une nouvelle borne inférieure donnée par le résultat suivant:

Théorème 4.5. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Tout digraphe D avec n sommets, satisfait:*
 $ir(D) \geq s(D)$.

Preuve. Soit S un $ir(D)$ -ensemble de D . Pour tout sommet support v , tel que $S \cap (L_v \cup \{v\}) = \emptyset$, correspond au moins un sommet $z \in S$ avec v son unique successeur privé, sinon $S \cup L_v$ est un ensemble irrédondant qui contredit la maximalité de S . Si z est un sommet support, alors $L_z \in S$. De plus toutes les arêtes pendantes attachées à v sont orientées de $y \in L_v$ à v . Donc, $ir(D) = |S| \geq s(D)$. \square

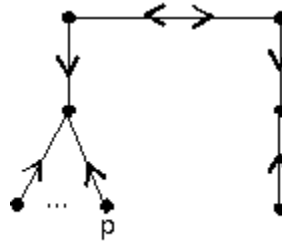
Corollaire 4.6. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Tout digraphe D avec n sommets, satisfait:*
 $s(D) \leq ir(D) \leq \gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$.

Preuve. Puisque tout ensemble dominant minimal est un irrédondant maximal, donc $ir(D) \leq \gamma(D)$ et comme $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$, et d'après le théorème précédent on a $s(D) \leq ir(D) \leq \gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$. \square

Théorème 4.7. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *Soit D un digraphe de n sommets. Si $ir(D) + \beta_1(D) = n(D)$, alors $\gamma(D) + \beta_1(D) = n(D)$.*

Preuve. Puisque $n(D) = ir(D) + \beta_1(D) \leq \gamma(D) + \beta_1(D) \leq n(D)$ donc $\gamma(D) + \beta_1(D) = n(D)$. \square

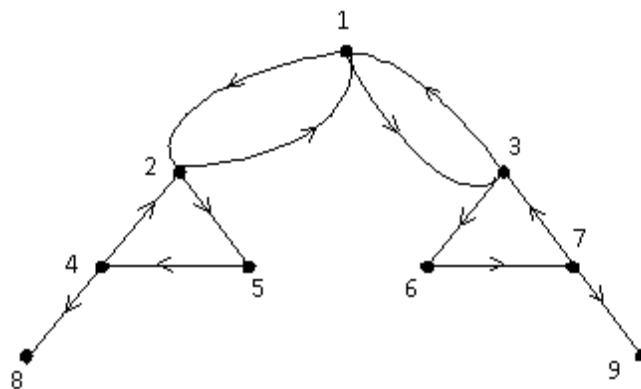
Remarque 4.8. (*Blidia & Ouldrabah*) [2] *La différence entre $\gamma(D)$ et $ir(D)$ peut être très grande pour les arbres orientés. Pour cela considérons l'arbre orienté de la Figure 4.3, où $\gamma(T) = p + 2$ et $ir(T) = 2 = s(D)$.*

Figure 4.3: $\gamma(T) = p + 2$ et $ir(D) = 2$

Corollaire 4.9. *Si $D = (V, A)$ est un digraphe connexe d'ordre n , contient au moins un ensemble dominant ouvert, alors $s(D) \leq ir(D) \leq \gamma(D) \leq \gamma_t(D) \leq \gamma_0(D)$.*

Preuve. On a pour tout digraphe D , $s(D) \leq ir(D) \leq \gamma(D)$ et comme tout dominant total est un dominant, alors $\gamma(D) \leq \gamma_t(D)$ et d'après la Remarque 2.26 $\gamma_t(D) \leq \gamma_0(D)$, on a : $s(D) \leq ir(D) \leq \gamma(D) \leq \gamma_t(D) \leq \gamma_0(D)$. \square

Exemple 4.10. *Revenons à l'exemple de la Remarque 2.26, représenté par la Figure 4.4, on a l'ensemble $\{2, 3, 4, 7\}$ est un $\gamma(D)$ -ensemble de plus est aussi un $\gamma_t(D)$ -ensemble, et $ir(D)$ -ensemble, l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est un $\gamma_0(D)$ -ensemble et $\{4, 7\}$ est l'ensemble de sommets supports de D . Dans cet exemple on a $s(D) < ir(D) = \gamma(D) = \gamma_t(D) < \gamma_0(D)$.*

Figure 4.4: $s(D) = 2$, $ir(D) = \gamma(D) = \gamma_t(D) = 4$ et $\gamma_0(D) = 6$.

4.4 Étude de quelques digraphes pour lesquels $ir(D) + \beta_1(D) = n$

Dans la suite, on étudie certaines classes de graphes orientés pour lesquelles $ir(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

4.4.1 Chemins orientés anti symétriquement \vec{P}_n

Soit \vec{P}_n un chemin orienté anti symétriquement dont ses arcs sont tous orientés dans le même sens. On définit le sous ensemble $V_k = \{x_{4k-3}, x_{4k-2}, x_{4k-1}, x_{4k}\} \subseteq V(\vec{P}_n); k \geq 1$ et $\vec{P}_4[V_k]$ le chemin orienté anti symétriquement d'ordre 4 engendré par V_k .

Proposition 4.11. (*Blidia & Ouldrahah*) *Si \vec{P}_n est un chemin orienté anti symétriquement, alors $ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n$.*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre n du chemin orienté anti symétriquement \vec{P}_n . Pour $n \leq 8$, voir le tableau ci-dessous:

n	$V(\vec{P}_n)$	$ir(\vec{P}_n)$ -ensb.	$ir(\vec{P}_n)$	$\beta_1(\vec{P}_n)$	$ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n)$
1	$\{x_1\}$	$\{x_1\}$	1	0	1
2	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1\}$	1	1	2
3	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	2	1	3
4	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_2, x_3\}$	2	2	4
5	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	3	2	5
6	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$\{x_1, x_3, x_5\}$	3	3	6
7	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$\{x_2, x_3, x_5, x_6\}$	4	3	7
8	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$	$\{x_2, x_3, x_6, x_7\}$	4	4	8

On voit dans ce tableau que si $n \leq 8$, alors $ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n)$. Pour $n = 8$ par exemple, on a l'ensemble $\{x_2, x_3, x_6, x_7\}$ est un $ir(\vec{P}_n)$ -ensemble où $ir(\vec{P}_n) = 4$ et $\beta_1(\vec{P}_n) = 4$.

Supposons maintenant que $n \geq 9$ et que tout chemin orienté anti symétriquement $\vec{P}_{n'}$ d'ordre $n' < n$, satisfait $ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_{n'}) = n(\vec{P}_{n'})$.

Soit \vec{P}_n un chemin orienté d'ordre $n > n'$ et $V(\vec{P}_n)$ l'ensemble de sommets de \vec{P}_n . Soit S un $ir(\vec{P}_n)$ -ensemble.

On pose $U = S \cap V_1 = S \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $d = |U|$, Comme S est maximal alors $d \geq 2$ et comme le cas $d = 4$ est impossible, alors $2 \leq d \leq 3$. Posons $\vec{P}_n = \vec{P}_4[V_1] \cup \vec{P}_{n'}$, où $\vec{P}_{n'}$ est une chaîne orientée d'ordre $n' = n - 4$. Les cas possibles pour l'ensemble U sont:

$$U = \begin{cases} \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\} \text{ ou } \{x_1, x_3\} & \text{si } d = 2 \\ \{x_1, x_2, x_4\} \text{ ou } \{x_1, x_3, x_4\} & \text{si } d = 3 \end{cases}$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\{x_2, x_3\} \subset S$. En effet supposons que $\{x_1, x_3\} \subset S$, on distingue deux cas.

Cas a. Si $x_4 \in S$ alors $x_5 \in pne(x_4, S)$. Supposons que $x_6, x_7 \in S$, donc $S \setminus \{x_1, x_3, x_4\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Ceci implique que $ir(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + 3$ et donc $ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_n) + 3$ et comme $\beta_1(\vec{P}_n) = \beta_1(\vec{P}_{n'}) + 2$ alors $ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_{n'}) + 5$, et par l'hypothèse d'induction on a $ir(\vec{P}_{n'}) = n(\vec{P}_{n'}) - \beta_1(\vec{P}_{n'})$. Ce que implique que $n(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_{n'}) + 5 = n(\vec{P}_{n'}) + 5 = n(\vec{P}_n) + 1 > n(\vec{P}_n)$, contradiction. Donc ou bien $x_6, x_8 \in S$ et $x_7 \notin S$ ou bien $x_6 \notin S$ et $x_7, x_8 \in S$, et dans ce cas l'ensemble $S_1 = ((S \setminus \{x_1, x_4\}) \cup \{x_2, x_5\})$ est un $ir(\vec{P}_n)$ -ensemble avec $S_1 \cap V_1 = \{x_2, x_3\}$ et l'ensemble $S' = S_1 \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Par conséquent $ir(\vec{P}_{n'}) \leq ir(\vec{P}_n) - 2$.

Cas b. $x_4 \notin S$, comme S est maximal, alors ou bien $x_5 \in S$ ou bien $x_5 \notin S$ et $x_6, x_7 \in S$, et dans les deux cas on a l'ensemble $S_2 = ((S \setminus \{x_1\}) \cup \{x_2\})$ est un $ir(\vec{P}_n)$ -ensemble avec $S_2 \cap V_1 = \{x_2, x_3\}$ et l'ensemble $S' = S_2 \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Par conséquent $ir(\vec{P}_{n'}) \leq ir(\vec{P}_n) - 2$.

Supposons maintenant que $\{x_1, x_2, \} \subset S$ dans ce cas $x_3 \notin S$, on distingue deux cas.

Cas a. Si $x_4 \notin S$, comme S est maximal, alors $x_5, x_6 \in S$ et l'ensemble $S_3 = ((S \setminus \{x_1\}) \cup \{x_3\})$ est un $ir(\vec{P}_{n'})$ -ensemble avec $S_3 \cap V_1 = \{x_2, x_3\}$ et l'ensemble $S' = S_3 \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Par conséquent $ir(\vec{P}_{n'}) \leq ir(\vec{P}_n) - 2$.

Cas b. Si $x_4 \in S$, on distingue deux sous cas.

Cas b1. Si $x_5 \in S$, alors $x_6 \in pne(x_5, S)$. Supposons que $x_7 \in S$. Dans ce cas l'ensemble $S \setminus \{x_1, x_2, x_4\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Ceci implique que $ir(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + 3$ et comme le cas précédent on a $n(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_{n'}) + 5 = n(\vec{P}_{n'}) + 5 = n(\vec{P}_n) + 1 > n(\vec{P}_n)$, contradiction. Par conséquent $x_7 \notin S$ et l'ensemble $S_4 = ((S \setminus \{x_1, x_4\}) \cup \{x_3, x_6\})$ est un $ir(\vec{P}_n)$ -ensemble avec $S_4 \cap V_1 = \{x_2, x_3\}$ et l'ensemble $S' = S_4 \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Par conséquent $ir(\vec{P}_{n'}) \leq ir(\vec{P}_n) - 2$.

Cas b2. Si $x_5 \notin S$. Supposons que $x_6, x_7 \in S$. Dans ce cas l'ensemble $S \setminus \{x_1, x_2, x_4\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$ et on a $n(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_{n'}) + 5 = n(\vec{P}_{n'}) + 5 = n(\vec{P}_n) + 1 > n(\vec{P}_n)$ contradiction. Comme S est maximal alors $x_6 \in S$ et $x_7 \notin S$ et l'ensemble $S_5 = ((S \setminus \{x_1, x_4\}) \cup \{x_3, x_5\})$ est un $ir(\vec{P}_n)$ -ensemble avec $S_5 \cap V_1 = \{x_2, x_3\}$ et l'ensemble $S' = S_5 \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$. Par conséquent $ir(\vec{P}_{n'}) \leq ir(\vec{P}_n) - 2$. Donc dans tous les cas on a:

$$ir(\vec{P}_n) \geq ir(\vec{P}_{n'}) + 2 \quad (4.1)$$

Soit S' un $ir(\vec{P}_{n'})$ -ensemble. Il est clair que $ir(\vec{P}_n) \leq ir(\vec{P}_{n'}) + 2$, puisque S' est un $ir(\vec{P}_{n'})$ -ensemble de $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ donc l'ensemble $S = \{x_1, x_2\} \cup S'$ est un irrédondant maximal de \vec{P}_n , et donc:

$$ir(\vec{P}_n) \leq ir(\vec{P}_{n'}) + 2 \quad (4.2)$$

De (4.1) et (4.2), on a: $ir(\vec{P}_n) = ir(\vec{P}_{n'}) + 2$. D'après l'Observation 3.31 (3), $\beta_1(\vec{P}_n) = \beta_1(\vec{P}_{n'}) + 2$, et d'après l'hypothèse d'induction $ir(\vec{P}_{n'}) + \beta_1(\vec{P}_{n'}) = n(\vec{P}_{n'})$, avec $n(\vec{P}_{n'}) = n(\vec{P}_n) - 4$, on obtient:

$$ir(\vec{P}_n) + \beta_1(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n)$$

□

4.4.2 Circuits \vec{C}_n

Comme conséquence immédiate de la Proposition 4.11 on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.12. *Tout circuit orienté anti symétriquement \vec{C}_n , satisfait*
 $ir(\vec{C}_n) + \beta_1(\vec{C}_n) = n$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 4.7 et le Théorème 3.28 des cycles orientés \vec{C}_n impairs tels que $ir(\vec{C}_n) = n - \beta_1(\vec{C}_n)$.

Corollaire 4.13. *Si \vec{C}_n est un cycle orienté d'ordre impair tel que $ir(\vec{C}_n) = n - \beta_1(\vec{C}_n)$ alors $\vec{C}_n \supseteq \vec{K}[x_i]$ pour tout $i \in \overline{1, n}$.*

Théorème 4.14. (Blidia & Ouldrabah) *Un cycle orienté \vec{C}_n d'ordre impair vérifié $ir(\vec{C}_n) = n - \beta_1(\vec{C}_n)$ si et seulement si $\vec{C}_n = \vec{C}_n$.*

Preuve. La condition nécessaire découle du Corollaire 4.13. Inversement, comme $\vec{C}_n \supseteq \vec{K}[x_i]$, pour tout $i \in \overline{1, n}$, donc $\vec{C}_n = \vec{C}_n$ est un circuit et d'après l'Observation 3.7, la condition suffisante est simple à voir. \square

Théorème 4.15. (Blidia & Ouldrabah) [2] *Soit D un digraphe. Alors $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$ si et seulement si le graphe G associé à D est une couronne.*

Preuve. Commençons par la condition nécessaire. Si $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$ et d'après le corollaire 4.6 alors $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$. D'après le Théorème 3.41 le graphe G associé à D est une couronne. Montrons la condition nécessaire. Si le graphe G de D est un couronne, alors G possède un couplage parfait, $\beta_1(D) = \frac{n(D)}{2} = s(D)$. D'après le corollaire 4.6 on a:

$$\frac{n(D)}{2} = s(D) \leq ir(D) \leq n(D) - \beta_1(D) = n(D) - \frac{n(D)}{2} = \frac{n(D)}{2}.$$

donc $ir(D) = \frac{n(D)}{2} = s(D)$. \square

4.4.3 Arbres orientés \vec{T}

Nous commençons par donner la remarque suivante concernant les graphes orientés satisfaisant $ir(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Remarque 4.16. (*Blidia & Ouldrabah*) D'après le Théorème 4.7, on peut avoir la même condition nécessaire comme dans le Lemme 3.29 pour les graphes orientés satisfaisant $ir(D) = n(D) - \beta_1(D)$. La condition suffisante n'est pas vérifiée dans la classe des arbres orientés, à cause du contre exemple suivant : Soit \vec{T} l'arbre orienté d'ordre 5 représenté par la Figure 4.5. On a $n = 5$; $ir(\vec{T}) = 2$ et $\beta_1(\vec{T}) = 2$, et chaque couplage maximum $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_1\}$ dans l'arbre non orienté T de \vec{T} , vérifié les deux conditions du lemme (3.29), mais $ir(\vec{T}) < n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$.

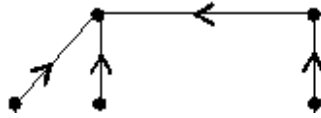


Figure 4.5: Contre exemple

Proposition 4.17. (*Blidia & Ouldrabah*) Soit \vec{T} un arbre non trivial orienté d'ordre n . Si $ir(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ alors tout sommet support x de \vec{T} satisfait $|O(x) \cap L_x| \leq 1$.

Preuve. Supposons qu'il existe un sommet support x de \vec{T} tel que $|O(x) \cap L_x| \geq 2$. Donc $O(x) \cap L_x \neq \emptyset$ et d'après l'observation 3.31 (2), il existe un couplage maximum M qui contient une arête pendante d'extrémité x . Comme $ir(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ (par l'hypothèse), alors M satisfait les deux conditions du lemme 3.29. Par conséquent $\exists e = xy \in M$ où $y \in O(x) \cap L_x$, et comme $|O(x) \cap L_x| \geq 2$ alors il existe un sommet $z \in Z_M \cap (O(x) \cap L_x)$. Ce qui implique $\exists z \in Z_M$ tel que $I(z) \cap \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \neq \emptyset$. Donc la condition 1 du lemme 3.29 n'est pas vérifiée, contradiction. Donc $|O(x) \cap L_x| \leq 1$.

Corollaire 4.18. (*Blidia & Ouldrabah*) Soit \vec{T} un arbre orienté d'ordre $n \geq 3$, si $ir(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ alors pour tout sommet support x de \vec{T} , le sous digraphe induit par $L_x \cup \{x\}$ est une étoile orientée de type $\vec{K}_{1,p}$; $p \geq 2$.

Définition 4.19. Une étoile orientée de centre x notée par $\overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 2$ est une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 2$ (Voir la définition 3.32) avec $|O(x) \cap L_x| = 1$ (ie $od(x) = 1$).

□

Exemple 4.20. Étoile orientée de centre x notée par $\overrightarrow{K_{1,3}}$ représenté dans la Figure 4.6.

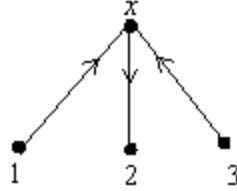


Figure 4.6 : Étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,3}}$

Proposition 4.21. (Blidia & Ouldrabah) Si \vec{T} est une étoile orientée d'ordre $n \geq 3$, de centre x . Alors $ir(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$ si et seulement si $\vec{T} = \overrightarrow{K_{1,p}}$; $p \geq 2$.

Preuve. Soit \vec{T} une étoile orientée d'ordre $n \geq 3$, de centre x vérifiée $ir(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$. Supposons que \vec{T} n'est pas une étoile orientée de type $\overrightarrow{K_{1,p}}$. Ceci implique que $|O(x) \cap L_x| \neq 1$. Maintenant si $|O(x) \cap L_x| = 0$ (ie $O(x) \cap L_x = \emptyset$), alors l'ensemble $S = \{x\}$ est l'unique $ir(\vec{T})$ -ensemble, avec $ir(\vec{T}) = 1$, et comme $\beta_1(\vec{T}) = 1$, donc $ir(\vec{T}) < n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$, contradiction. Comme x est un sommet support de \vec{T} . Donc d'après la proposition 4.17 $|O(x) \cap L_x| \leq 1$. Ce qui implique que $|O(x) \cap L_x| = 1$, et donc $\vec{T} = \overrightarrow{K_{1,p}}$. Inversement, si x est un sommet support de $\vec{T} = \overrightarrow{K_{1,p}}$, alors $|O(x) \cap L_x| = 1$. Posons $O(x) \cap L_x = \{y\}$, donc l'ensemble $S = L_x$ ou $S = \{x\} \cup (L_x - \{y\})$ est un $ir(\vec{T})$ -ensemble, avec $ir(\vec{T}) = p$ et comme $\beta_1(\vec{T}) = 1, n = p + 1$ ($p \geq 2$), donc $ir(\vec{T}) = n(\vec{T}) - \beta_1(\vec{T})$, d'où le résultat.

□

La remarque suivante concernant les graphes orientés satisfaisant $ir(D) \leq n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$.

Remarque 4.22. *D'après le Théorème 4.7, on peut avoir la même condition comme dans la Proposition 3.19 pour les graphes orientés satisfaisant $ir(D) \leq n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$, et cette borne est atteinte.*

Exemple 4.23. *Dans le digraphe représenté par la Figure 4.7, on a $\delta_+(D) = \Delta_+(D) = 1$ et comme l'ensemble $S_1 = \{1, 3, 4\}$ est un $ir(D)$ -ensemble avec $ir(D) = 3$, donc $ir(D) = n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$*

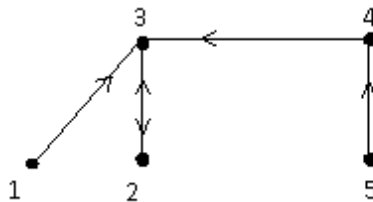


Figure 4.7 : $ir(D) = n(D) - \Delta_+(D) - \delta_+(D)$

Proposition 4.24. *Soit \vec{P}_n un chemin orienté anti symétriquement.*

Alors $ir(\vec{P}_n) = n(\vec{P}_n) - \Delta_+(\vec{P}_n) - \delta_+(\vec{P}_n)$ si et seulement si $\vec{P}_n = \vec{P}_2$ ou \vec{P}_3 .

Preuve. D'après la Proposition 4.11, $ir(\vec{P}_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ et de même raisonnement comme dans la Proposition 3.21 on obtient le résultat. □

Proposition 4.25. *Soit \vec{C}_n un circuit orienté anti symétriquement.*

Alors $ir(\vec{C}_n) = n(\vec{C}_n) - \Delta_+(\vec{C}_n) - \delta_+(\vec{C}_n)$ si et seulement si $\vec{C}_n = \vec{C}_4$ ou \vec{C}_5 .

Preuve. D'après le corollaire 4.11, $ir(\vec{C}_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ et de même raisonnement comme dans la Proposition 3.22 on obtient le résultat. □

4.5 Nouvelle borne supérieure pour $IR(D)$

Théorème 4.26. (*Blidia & Ouldrabah*) *Tout digraphe connexe non trivial D d'ordre n , satisfait $IR(D) \leq n - 1$, et cette borne est atteinte si et seulement si $D = \overrightarrow{K_{1,d}} \cup \overrightarrow{H(p, q, k)}$, où $\overrightarrow{K_{1,d}}$ est une étoile orientée d'ordre $d + 1$ et $\overrightarrow{H(p, q, k)}$ est le digraphe représenté dans la figure 4.8.*

Preuve. Supposons qu'il existe un $IR(D)$ -ensemble S , tel que $|S| = n$, (c.-à-d. $V \setminus S = \emptyset$), donc S contient au moins un arc (x, y) , et par définition de l'ensemble S , y doit avoir un sommet privé relatif à S , contradiction avec $V \setminus S = \emptyset$. Donc on a $IR(D) \leq n - 1$.

Soit S un $IR(D)$ -ensemble, tel que $|S| = n - 1$, posons $V \setminus S = \{x\}$, on distingue les deux cas suivants.

Cas 1. $S \setminus N(x) \neq \emptyset$. Comme D est connexe, soit $N(x) = \{z_1, \dots, z_m\}$ et posons $Y = S \setminus N(x)$, $|Y| = p \neq 0$, et supposons que $|N(x)| \geq 2$. L'irrédondance de S implique que Y est stable, sinon pour un sommet $y_1 \in Y$ a un voisin y_2 , l'un des deux doit avoir un sommet privé relatif à S , contradiction. Comme D est connexe, alors $|N(y)| = 1$, pour tout $y \in Y$. En effet, supposons qu'il existe $y \in Y$ tel que $|N(y)| \geq 2$, soient $\{z_1, z_2\} \subseteq N(y)$, l'irrédondance de S implique que z_1, z_2 ou y possède un sommet privé $v \neq x$ relatif à S , contradiction. De plus $N(y_1) = N(y_2)$ pour tout $y_1 \neq y_2 \in Y$, sinon on a les arêtes $(z_i, y_i); z_i = N(y_i); i = 1; 2$ et ces arêtes sont orientées et leurs extrémités terminales doivent avoir des sommets privés $v_i; i = 1; 2$, contradiction. Par conséquent il existe $z \in N(x)$ tel que $N(Y) = \{z\}$ et l'irrédondance de S implique que les arcs sont asymétriques de Y à z et donc $x \in pne(z, S)$ et comme $|N(x)| \geq 2$, alors les arêtes $(x, z_i); i = \overline{1, m}$ et $z_i \neq z$ doivent être orientés asymétriquement de x vers z_i . Maintenant si $N(x)$ est stable, alors $D = \overrightarrow{H(p, q, 0)} = \overrightarrow{S_{p,q}}$, où $p, q \geq 1$ (étoile double où x et z sont les deux supports de $\overrightarrow{S_{p,q}}$ voir Figure 4.8). Sinon, $N(x)$ possède au moins un arc, partitionnons $X = N(x) \setminus \{z\}$ en deux sous ensembles X_0 et X_1 tels que $X_0 = \{z_i \in X; od_S(z_i) = 0; i \in \overline{1, p}; p \geq 1\}$ et $X_1 = \{z_i \in X; od_S(z_i) \geq 1; i \in \overline{1, k}; k \geq 1\}$. L'irrédondance de S implique que $N(z_1) = N(z_2) = \{z\}$ pour tout $z_1 \neq z_2 \in X_1$ et les

arêtes (z_i, z) où $z_i \in X_1$; $i \in \overline{1, k}$ sont orientées asymétriquement de z_i vers z ; $i \in \overline{1, k}$, (sinon on a une contradiction avec le fait que x est l'unique privé relatif à S). Dans ce cas on a l'ensemble $X_1 = \{z_i \in N(x); \overrightarrow{z_i z} \in A(D); i \in \overline{1, k}\}$ et $D = \overrightarrow{H(p, q, k)}$ où $p \geq 1$, $q \geq 0$ et $k \geq 1$ (Voir Figure: 4.9). Supposons maintenant que $|N(x)| = 1$, alors $N(x) = \{z\}$ et $D = \overrightarrow{H(p, 0, 0)}$; $p \geq 1$ (étoile orientée d'ordre $p + 2$ et de centre z voir Figure 4.10).

Cas 2. $S \setminus N(x) = \emptyset$. Supposons maintenant que $|N(x)| \geq 2$. Si $N(x)$ est stable alors $D = \overrightarrow{K_{1, d}}$ (étoile orientée arbitrairement d'ordre $d + 1$ où $d = q + 1$), si $N(x)$ n'est pas stable alors comme le cas précédent, l'irrédondance de S implique que $D = \overrightarrow{H(0, q, k)}$ où $q \geq 0$ et $k \geq 1$. Supposons maintenant que $|N(x)| = 1$, alors $N(x) = \{z\}$ et $D = \overrightarrow{P_2(x, z)}$ (chaîne orientée arbitrairement d'ordre 2). La condition suffisante est évidente.

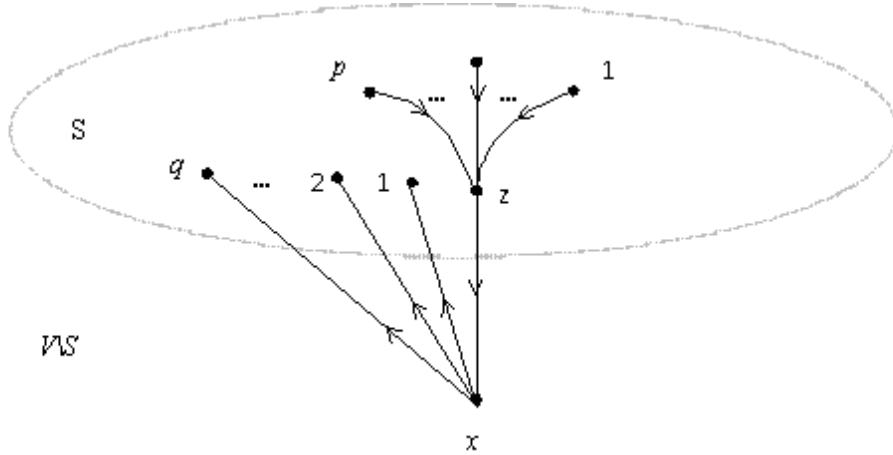


Figure: 4.8: Digraphe $\overrightarrow{H(p, q, 0)}$

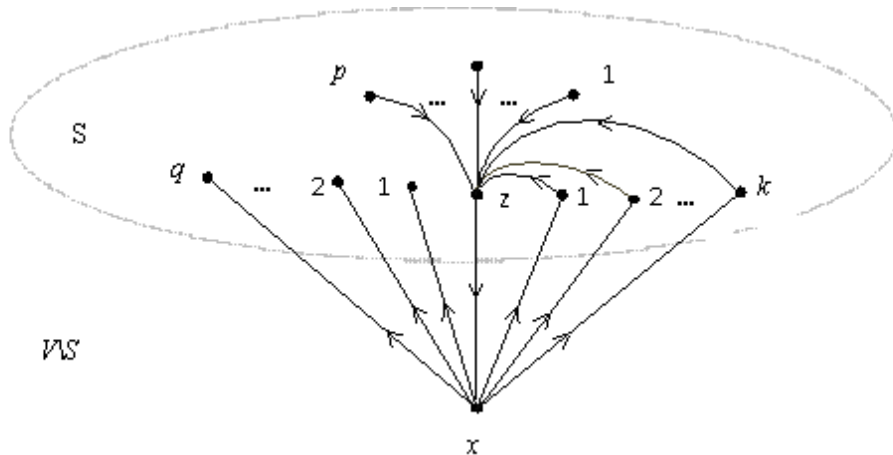


Figure: 4.9: Digraphe $\overrightarrow{H(p, q, k)}$

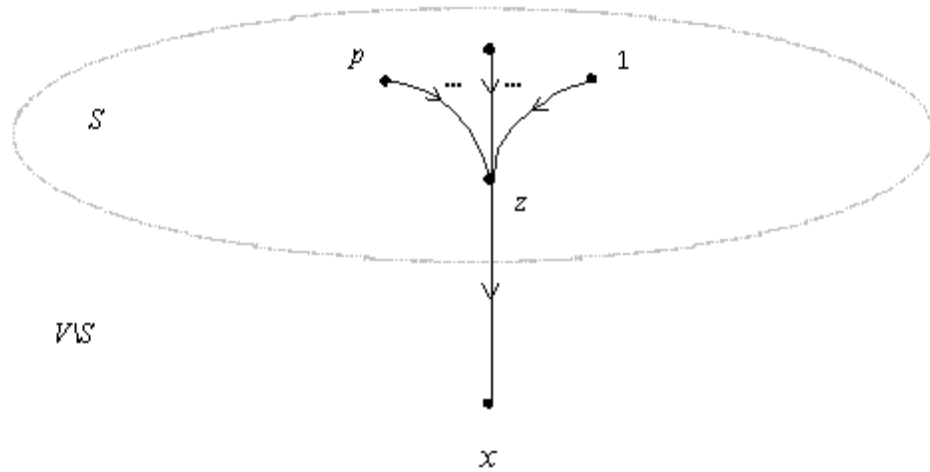


Figure: 4.10: Digraphe $\overrightarrow{H(p, 0, 0)}$

□

Corollaire 4.27. *Si D_1 est un digraphe connexe non trivial d'ordre n_1 qui satisfait $IR(D_1) = n_1 - 1$ et D_2 est un digraphe sans arcs d'ordre $n_2 \geq 1$, alors le digraphe $D = D_1 \cup D_2$ d'ordre $n = n_1 + n_2$, satisfait $IR(D) = n - 1$.*

4.6 Valeur exacte de $IR(D)$ pour un chemin orienté anti symétriquement

Dans cette section on donne une valeur exacte de $IR(D)$ pour un chemin orienté anti symétriquement.

Théorème 4.28. (*Blidia & Ouldrabah*) Si \vec{P}_n est un chemin orienté anti symétriquement, alors

$$IR(\vec{P}_n) = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 2 [3] \end{cases} \quad (4.3)$$

Preuve. Soit \vec{P}_n un chemin orienté anti symétriquement d'ordre n . On procède par induction sur l'ordre n du chemin orienté \vec{P}_n . Pour $n \leq 8$ on peut vérifier la formule (4.3).

Voir le tableau ci-dessous:

n	$V(\vec{P}_n)$	$S; IR(\vec{P}_n)$ -ensemble	$IR(\vec{P}_n)$
1	$\{x_1\}$	$\{x_1\}$	1
2	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1\}$	1
3	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	2
4	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	3
5	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	3
6	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	4
7	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7\}$	5
8	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$	$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7\}$	5

On voit dans ce tableau que si $1 \leq n \leq 8$, la formule 4.3 est vérifiée. Pour $n = 8$ par exemple, on a l'ensemble $\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7\}$ est un $IR(\vec{P}_n)$ -ensemble où $IR(\vec{P}_n) = 5$.

Supposons maintenant que $n \geq 9$ et que tout chemin orienté $\vec{P}_{n'}$ d'ordre n' avec $1 \leq n' < n$ vérifie la formule. Soit \vec{P}_n un chemin orienté ordre n , et soit S un $IR(\vec{P}_n)$ -ensemble, on montre que \vec{P}_n d'ordre n vérifie la formule. Il est clair que $IR(\vec{P}_n) \geq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$, puisque si S' est un $IR(\vec{P}_{n'})$ de $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ alors l'ensemble $S = \{x_1, x_2\} \cup S'$ est un

irrédondant maximal de \vec{P}_n , et donc :

$$IR(\vec{P}_n) \geq IR(\vec{P}_{n'}) + 2 \quad (4.4)$$

Maintenant on montre que $IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$. Soit S un $IR(\vec{P}_n)$ -ensemble de \vec{P}_n . Comme S est maximal et de cardinalité maximum alors $|S \cap \{x_1, x_2, x_3\}| = 2$ (il est impossible d'avoir trois sommets successifs dans S), les cas possibles pour l'ensemble $U = S \cap \{x_1, x_2, x_3\}$, sont $U = \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}$ ou $\{x_2, x_3\}$, on distingue donc trois cas:

Cas 1. Si $\{x_1, x_2\} \subset S$, vu la maximalité de S , $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 2$, donc $S' = S \setminus \{x_1, x_2\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ ce qui donne $IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$.

Cas 2. Si $\{x_1, x_3\} \subset S$, vu la maximalité de S , $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| \geq 1$. Maintenant si $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 2$, alors $S' = S \setminus \{x_1, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$ et on a $IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$. Sinon $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 1$, maintenant si $x_4 \notin S$, comme S est maximal alors $S \cap \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_5\}$ et $x_7 \in S$, et dans ce cas l'ensemble $S_1 = (S \setminus \{x_3\}) \cup \{x_2, x_4\}$ est un irrédondant maximal de \vec{P}_n de cardinalité $|S_1| = |S| + 1 > |S| = IR(\vec{P}_n)$, contradiction. Sinon $x_4 \in S$, comme $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 1$, alors $\{x_7, x_8\} \subset S$ et dans ce cas l'ensemble $S_1 = (S \setminus \{x_3\}) \cup \{x_2, x_5\}$ est un irrédondant maximal de \vec{P}_n de cardinalité $|S_1| = |S| + 1 > |S| = IR(\vec{P}_n)$ contradiction, donc forcément $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 2$ et $S' = S \setminus \{x_1, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$, ce qui donne $IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$.

Cas 3. Si $\{x_2, x_3\} \subset S$, vu la maximalité de S , $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| \geq 1$. Comme dans le cas précédent si $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 2$, alors $S' = S \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'}$ et donc $IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$. Sinon $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 1$, comme $x_4 \notin S$, si $x_5 \notin S$, alors $x_6 \notin S$ et $x_7 \in S$ mais dans ce cas l'ensemble $S_1 = (S \setminus \{x_3\}) \cup \{x_1, x_4\}$ est un irrédondant maximal de \vec{P}_n , avec $|S_1| > IR(\vec{P}_n)$, contradiction. De même si $x_6 \in S$ et $x_5 \notin S$, alors $x_7 \in S$ et l'ensemble $S_1 = (S \setminus \{x_3\}) \cup \{x_1, x_4\}$ est un irrédondant maximal de \vec{P}_n , avec $|S_1| > IR(\vec{P}_n)$, contradiction. donc forcément $|S \cap \{x_4, x_5, x_6\}| = 2$ et $S' = S \setminus \{x_2, x_3\}$ est un irrédondant maximal de $\vec{P}_{n'} = \vec{P}_n \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$, ceci implique que $IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2$. Donc dans tous les cas on a:

$$IR(\vec{P}_n) \leq IR(\vec{P}_{n'}) + 2 \quad (4.5)$$

De (4.4) et (4.5), on a :

$$IR(\vec{P}_n) = IR(\vec{P}_{n'}) + 2 \quad (4.6)$$

et d'après l'hypothèse d'induction on a:

$$IR(\vec{P}_{n'}) = \begin{cases} 2 \lfloor \frac{n'}{3} \rfloor & \text{si } n' \equiv 0 [3] \\ 2 \lfloor \frac{n'}{3} \rfloor + 1 & \text{si } n' \equiv 1 \text{ ou } 2 [3] \end{cases}$$

Et comme $n' = n - 3$, alors:

$$IR(\vec{P}_n) = \begin{cases} 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 2 [3] \end{cases}$$

□

Proposition 4.29. (*Blidia & Ouldrabah*) Soit D un digraphe connexe non trivial d'ordre n . Si tout couplage maximum $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_1\}$ dans le graphe non orienté G de D où les arcs $\overrightarrow{x_i y_i} \in A(D)$ $i = 1, \dots, \beta_1$ et Z_M l'ensemble de tous \overline{M} -sommets, satisfait :

- 1) Ou bien $Z_M = \emptyset$ ou bien $\forall z \in Z_M; I(z) \cap \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \neq \emptyset$.
- 2) S'il existent i, j tels $\overrightarrow{x_i x_j} \in A(D)$, alors $I(y_j) \cap (\{x_1, \dots, x_{\beta_1}\} \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Alors $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$, et ces bornes sont atteintes.

Preuve. Il suffit de construire un irrédondant maximal de cardinalité $\beta_1(D)$. Soit $M = \{x_i y_i : i = 1, \dots, \beta_1\} \neq \emptyset$ (car $n \geq 2$ et D connexe) un couplage maximum de cardinalité $\beta_1(D)$ et $X = \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\}$. Par construction X est un irrédondant maximal. En effet Si $\forall j \in \overline{1, \beta_1}; I(x_j) \cap S = \emptyset$, alors x_j est un sommet privé de lui même. Supposons maintenant qu'il existe $j \in \overline{1, \beta_1}$ tel que $I(x_j) \cap X \neq \emptyset$, soit $x_i \in I(x_j) \cap X$, donc il existe un arc $\overrightarrow{x_i x_j} \in A(D)$ dans l'ensemble S . Supposons que $y_j \notin pne(z, X)$ dans ce cas $I(y_j) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, contradiction avec la condition 2. Donc $\forall x \in X$, $|O[x] - O[X - x]| \geq 1$, c.-à-d. $\forall x \in S$, l'ensemble $pn(x, X) \neq \emptyset$, et donc par définition

l'ensemble $X \subseteq V$ est un irrédondant. Supposons maintenant qu'il n'est pas maximal, donc il existe $v \in V \setminus S$ tel que l'ensemble $S = X \cup \{v\}$ est un irrédondant. Si $Z_M = \emptyset$ alors $v \in Y = \{y_1, \dots, y_{\beta_1}\}$ et comme $\forall y \in Y \setminus \{v\} I(y) \cap X \neq \emptyset$ alors $pn(v, S) = \emptyset$, contradiction avec le fait que S est un irrédondant. Supposons maintenant que l'ensemble $Z_M \neq \emptyset$, si $v \in Y$, et d'après le cas précédent $pn(v, S) \not\subseteq Y \setminus \{v\}$ alors $pn(v, Y) \subseteq Z_M$ et ceci implique que $I(pn(v, S)) \cap X = \emptyset$, contradiction avec la condition 1. Maintenant si $v \in Z_M$, d'après la condition 1, $I(v) \cap S \neq \emptyset$ donc v doit avoir un sommet privé u relatif à S' c.-à-d. il existe $u \in V \setminus S$ tel que $u \in pn(v, S)$. Si $u \in Y$ Comme $\forall y \in Y; I(y) \cap X \neq \emptyset$ alors $u \notin Y$, donc $u \in Z_M$ et ceci implique qu' $M \cup (v, u)$ est un couplage dans G de cardinalité $|M \cup (v, u)| > \beta_1(D)$, contradiction. Donc $S = X \cup \{v\}$ n'est pas un irrédondant de D . Par conséquent l'ensemble $X = \{x_1, \dots, x_{\beta_1}\}$ est un irrédondant maximal de cardinalité $|X| = \beta_1(D)$, et par définition on a $ir(D) \leq |X| \leq IR(D)$, donc $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$. \square

Nous donnons maintenant quelques exemples où l'une ou toutes ces bornes sont atteintes ou non.

Exemple 4.30. *Le digraphe D d'ordre 12 dont le graphe non orienté G de D est une couronne $H = C \circ K_1$ ou C est un cycle d'ordre 6, donne $ir(D) = \beta_1(D) = IR(D)$ (Voir Figure 4.11).*

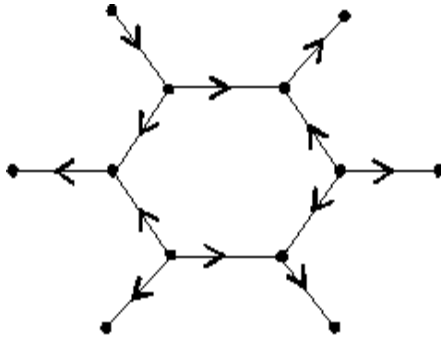


Figure: 4.11 : $ir(D) = \beta_1(D) = IR(D) = 6$ (les arcs éventuellement symétriques).

Exemple 4.31. Le digraphe D d'ordre $n = 5$ représenté par Figure 4.12, donne $\beta_1(D) < IR(D) = ir(D)$

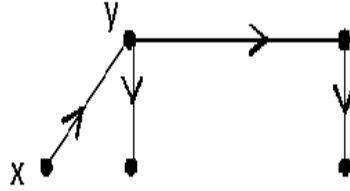


Figure: 4.12 : $ir(D) = IR(D) = 3$ et $\beta_1(D) = 2$ (l'arc \overrightarrow{xy} est asymétrique).

Exemple 4.32. Le digraphe D d'ordre $n = 5$ représenté par Figure 4.13, donne $ir(D) < \beta_1(D) < R(D)$

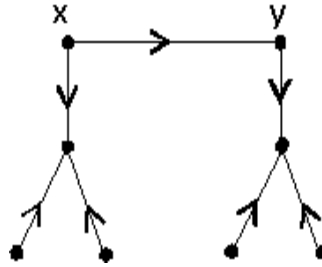


Figure: 4.13 : $ir(D) = 2$, $IR(D) = 5$ et $\beta_1(D) = 3$ (l'arc \overrightarrow{xy} est asymétrique).

Exemple 4.33. Le digraphe $D = \overrightarrow{K_{1,3}}$ (étoile orientée) d'ordre $n = 4$ représenté par Figure 4.14, donne $ir(D) = \beta_1(D) < IR(D)$.



Figure: 4.14 : $ir(D) = \beta_1(D) = 1$, $IR(D) = 3$ (les arcs éventuellement symétriques).

CONCLUSION

L'étude de la domination dans les graphes orientés n'a pas été étudiée intensivement comme dans les graphes sans orientation. Les premiers résultats connus dans ce domaine sont donnés par Ghosal et al., Et peuvent être trouvés aussi dans l'ouvrage de T.W. Haynes (1998). En 2006, Albertson, Harris, Langley, and Merz., ont publié leur premier article sur la domination orienté. Ils ont caractérisé les arbres orientés satisfaisant $\gamma(D) = n - \Delta_+(D)$.

En l'absence de valeurs exactes sur nombre de domination d'un graphe orienté D , on est amené généralement à déterminer des bornes inférieures et supérieures qui les encadrent le mieux possible et à caractériser les graphes orientés pour lesquels ces bornes sont atteintes.

En effet, dans un premier lieu, nous avons présenté deux nouvelles bornes supérieures $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$ et $\gamma(D) \leq n - d^+(v) - \beta_v(D)$, ainsi une conditions nécessaire pour que la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \delta_+(D) - \Delta_+(D)$ soit vraie et nous avons montré que cette borne est atteinte pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement, ensuite on a caractérisé les chaînes, les cycles et les arbres orientés pour lesquels la borne supérieure de $\gamma(D) \leq n(D) - \beta_1(D)$ est atteinte, puis nous avons donné une nouvelle borne inférieure $s(D) \leq \gamma(D)$, et nous avons caractérisé les graphes orientés pour lesquels $s(D) = \gamma(D)$ (où $s(D)$ est le nombre de sommets supports dans D). Puis par la suite on a donné la caractérisation des graphes orientés pour lesquels $\gamma(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Dans un second lieu, nous avons donné une nouvelle borne inférieure pour le nombre d'irrédondance inférieur à savoir $ir(D) \geq s(D)$, aussi nous avons donné une nouvelle borne supérieure pour le nombre d'irrédondance supérieur à savoir $IR(D) \leq n - 1$. Ensuite nous avons donné les valeurs exactes de $ir(D)$ pour les chemins et les circuits orientés anti symétriquement, puis on a donné la caractérisation des graphes orientés tels que $ir(D) = s(D) = n(D) - \beta_1(D)$.

Enfin, nous avons donné une nouvelle borne supérieure pour le nombre d'irrédondance supérieur à savoir $IR(D) \leq n(D) - 1$. Puis nous avons caractérisé les graphes orientés pour lesquels $IR(D) = n(D) - 1$, ainsi des conditions nécessaires pour que les bornes des deux inégalités $ir(D) \leq \beta_1(D) \leq IR(D)$ soient vraies et nous avons montré que ces bornes sont atteintes.

Bien que ces résultats et ceux qui ont été obtenus avant soient importants, nous sommes loin de répondre aux nombreuses problèmes posés dans le domaine de la domination orientée. De ce fait, nous citons quelques problèmes non encore résolus sur la domination orientée qui feront sans doute l'objet de nos perspectives et travaux de recherches futurs:

1. Caractérisation des graphes orientés tels que $\gamma(D) = n(D) - \beta_1(D)$.
2. Caractérisation des graphes orientés tels que $\gamma(D) = n(D) - d^+(v) - \beta_v(D)$.
3. Caractérisation des arbres orientés tels que $\gamma(D) = n(D) - \delta_+(D) - \Delta_+(D)$.
4. Caractérisation des graphes orientés tels que $ir(D) = n(D) - \beta_1(D)$.
5. Caractérisation des graphes orientés tels que $s(D) = ir(D)$.
6. Caractérisation des graphes orientés tels que $ir(D) = \beta_1(D) = IR(D)$.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge. "*Graphs et hypergraphes*", 2ème ed. Dunod, Paris, 1973.
- [2] M. Blidia, L. Ouldrabah. "*Bounds on the domination number in oriented graphs*", acte de COSI'2010, pp 20 – 31. Soumis à publication, Australasian journal of combinatorics.
- [3] J. Albertson, A. Harris, L. Langley, and S. Merz, "*Domination parameters and Gallai-type theorems for directed trees*", *Ars Combinatoria* 81(2006), pp 201 – 207.
- [4] Changwoo Lee, "*On the domination number of a digraph*", Ph.D. Dissertation, Michigan State University (1994).
- [5] E.J. Cockayne, S. T. Hedetniemi and D. J. Miller, "*Properties of hereditary graphs and middle graphs*", *Canad. Math. Bull.* 21(1978), pp 461 – 467.
- [6] J. Edmonds, "*Paths, trees and flowers*", *Canad. J. Math.* 17 (1965) 449 – 467.
- [7] J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone, "*Topics on domination in directed graphs*", "*In Domination in Graphs*", Haynes, T.W., Hedetniemi. S. T. Slater and P.J., editors. Marcel Dekker, Inc. New York, (1998), pp 401 – 437.
- [8] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, "*Fundamentals of Domination in Graphs*", Marcel Dekker, New York, (1998).
- [9] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater (eds), "*Domination in Graphs: Advanced Topics*", Marcel Dekker, New York, (1998).
- [10] S. K. Merz and D. J. Stewart, "*Gallai-type theorems and domination in digraphs and tournaments*", *Congressus Numerantium*, 154 (2002) 31 – 41.
- [11] O. Ore, "*Theory of graphs*", Amer. Soc. Colloq. Pub38, Providence, R.I.(1962).

- [12] S. Xu, "*Relations between parameters of graphs*", Disc.Maths.89(1991), pp 65 – 88.
- [13] S. Arumugam, K.Jacob, and L. Volkman, "*Total and connected domination in digraphs*", Australasian .J.C.39(2007), pp283 – 292.
- [14] S. M. Hedetniemi, K. B. Red and A. A. Mcrac, "*Domination and irredundance in tournaments*", Australasian .J.C.29(2004), pp157 – 172.
- [15] E. J. Cockayne, R. M. Dawes and S. T. Hedetniemi, "*Total domination in graphs*", Network 10 (1980), pp 211 – 219.
- [16] H. B. Wallikar and E. Sampathkumar, "*The conncted domination number of a graphe*", J. Maths. Phy. Sci.(1979), pp 607 – 613.
- [17] G. S. Domke, J.E. Dunbar, and L. R. Markus, "*Gallai- type theoremes and domination parameters*", Journal of Graph Theory, 24(3)(1997), pp 221 – 231.