UNIVERSITE BLIDA 1

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

THESE DE DOCTORAT

en mathématiques

Spécialité : Mathématiques

LA K-DOMINATION ET LA K-INDEPENDANCE DANS LES GRAPHES

Par

MEDDAH Nacéra

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, USD1. Blida	Président
M. BLIDIA	Professeur, USD1. Blida	Directeur de Thèse
M. CHELLALI	Professeur, USD1. Blida	Examinateur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB. Alger	Examinateur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB. Alger	Examinatrice
A. SEMRI	Maître de conférences A, USTHB. Alger	Examinateur

Blida, Juin 2014

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et k un entier positif. Un sous ensemble de sommets D dans le graphe G est dit k-dominant (resp. k-indépendant) si tout sommet extérieur à D a au moins k voisins dans D (resp. si le degré maximum du sous graphe induit par l'ensemble de sommets D est au plus $k - 1$). La cardinalité minimum (resp. maximum) d'un ensemble k-dominant (resp. k-indépendant) de G est appelée le nombre de la k-domination (resp. le nombre de la k-indépendance) et est notée par $\gamma_k(G)$ (resp. $\beta_k(G)$). La détermination de ces deux paramètres dans les graphes en général est un problème difficile (NP-Complet).

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de ces deux paramètres et notre travail s'articule autour de trois axes, la détermination de bornes qui encadrent le plus possible ces paramètres, la caractérisation des graphes extrémaux et le statut ou l'état de chaque sommet vis-à-vis de ces deux paramètres. En effet, nous avons élaboré dans la première partie une généralisation d'une borne inférieure pour le paramètre $\beta_k(G)$ déjà établie pour le nombre de 2-indépendance. Aussi on a fourni une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant cette nouvelle borne pour $k \geq 2$. Dans la deuxième partie nous avons donné la caractérisation des arbres tels que le nombre de 2-domination est égal au nombre de 2-indépendance. Dans la troisième partie, nous avons caractérisé les sommets appartenant à tout ou bien à aucun ensemble k-dominant minimum dans les arbres.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph and k be a positive integer. A subset D of V is k-dominating (resp. k-independent) of G, if every vertex of $V \setminus S$ has at least k neighbors in D (resp. if the maximum degree of the subgraph induced by the vertices of D is less or equal to $k - 1$). The minimum (resp. maximum) cardinality of a k-dominating (resp. a k-independent) set of G is called a k-domination number (resp. a k-independence number) and is denoted by $\gamma_k(G)$ (resp. $\beta_k(G)$). The determination of these two parameters in graphs in general is a difficult problem (NP-complete).

The main objective of this thesis is the study of these two parameters and our work revolves around three axes, the determination of the bounds governing possible these parameters, characterization of extremal graphs and the status or condition of each vertex relative to these two parameters. Indeed, we have developed in the first part a generalization of a lower bound for the parameter $\beta_k(G)$ already established for the number of 2-independence , so we provided a constructive characterization of extremal trees achieving this new bound for $k \geq 2$. In the second part we have given the characterization of trees such as the 2-domination number is equal to the 2-independence number. In the third part, we characterized the vertices belonging to all or to no minimum k-dominating set in trees.

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطا و k عدد طبيعي موجب. المجموعة الجزئية D من الرؤوس للبـيان G تسمى k- مسيطرة (على التوالي . k ـ مستقلة) إذا كان لكل رأ س خارجي عن D على الأقل k جارا في D (على التوالي .إذا كانت اكبر درجة للبيان الجزئي الناتج عن مجموعة الرؤوس D على الأكثر k-1). الأصلي الأدنى (على التوالي . الأصلي الأقصى) لمجموعة k ـ مسيطرة (على التوالي . k- مستقلة) للبيان G يسمى بعدد الـ k- سيطرة (على التوالي. عدد الـ k- استقلالية) و يرمز له بـ $\gamma_k(G)$ (على التوالي. $\beta_k(G)$). إيجاد قيمة كل من هذين الوسيطين للبيانات بصفة عامة هو مشكل صعب (*NP*-Complet).

الهدف الرئيسي في هذه الأطروحة هو دراسة هذين الوسيطين, و عملنا يرتكز حول ثلاثة محاور, إيجاد نهايات تحد الأكثر ممكن هذين الوسيطين, تمييز البيانات الذروية و حالة كل رأس بالنسبة لهذين الوسيطين. في المرحلة الأولى قمنا بتعميم حد أدنى بالنسبة للوسيط $\beta_k(G)$ المؤسس أنفا بالنسبة لعدد الـ 2-استقلالية, أيضا أعطينا تمييز بنائي للأشجار الذروية بالنسبة لهذا الحد الأدنى الجديد من أجل $k \leq 2$. في المرحلة الثانية أعطينا تمييزا للأشجار التي لها عدد الـ 2- سيطرة يساوي عدد الـ 2- استقلالية. في المرحلة الثالثة, ميزنا الرؤوس التي تنتمي إلى كل أو لا تنتمي إلى أي مجموعة k- مسيطرة دنيا في الأشجار.

Remerciements

En premier, je tiens à exprimer mes gratitudes, mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université SAAD DAHLEB de Blida, pour son suivi, ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide.

Je tiens également à remercier Monsieur **Farouk Hannane**, Professeur à l'université SAAD DAHLEB de Blida, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes sincères et vifs remerciements à Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur à l'université SAAD DAHLEB de Blida, pour ses précieux conseils et d'avoir accepté d'être membre de jury.

Je remercie également **Abdelhafid Berrachedi** et **Isma Bouchemakh,** Professeurs à l'USTHB, et **Ahmed Semri,** Maître de conférences **A** à l'USTHB, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être des membres de jury.

J'exprime mes remerciements envers tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin pour accomplir ce travail, plus particulièrement Monsieur R. Bensalah.

Table des Matières

Liste des illustrations graphiques

Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $18^{ème}$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

La théorie des graphes s'est donc développée dans diverses disciplines et elle représente un domaine faisant le lien entre les Mathématiques discrètes et l'informatique. Les méthodes développées pour étudier les objets de cette théorie ont de nombreuses applications dans tous les domaines liés à la notion de réseaux (réseaux social, de téléphone, de microprocesseurs, de télécommunications, etc ...) et dans bien d'autres domaines (par exemple génétique). Depuis le début du $20^{ème}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments: réseau de communication, réseaux routiers, circuits électriques, etc... .Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes (d'arcs dans le cas où l'orientation est importante).

La domination dans les graphes est un thème central de la théorie des graphes du fait de sa grande utilité pour de nombreuses applications. Cette première notion (Berge, 1958) s'est très vite enrichie et a donné lieu à de nombreux travaux et développements, si bien qu'une récente bibliographie sur la domination compte plus de 2000 articles.

Un sous ensemble D de sommets dans un graphe $G = (V, E)$ est dit dominant si tout sommet extérieur à D a au moins un voisin dans D. Plusieurs variantes de domination sont dérivées de la domination classique, en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, on cite par exemple la k-domination, en imposant la condition que tout sommet extérieur à D a au moins k voisins dans D, la k-indépendance, en imposant la condition que tout sommet de D a au plus $k-1$ voisins dans D. Ces deux types représentent l'objectif principal de cette thèse composée de cinq chapitres dont voici une description.

Dans le premier chapitre, nous rappelons en premier les définitions de la théorie des graphes nécessaire à la compréhension de ce manuscrit. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant un aperçu rapide (un petit historique) sur la domination. Nous présentons par la suite quelques invariants de graphes et quelques paramètres de domination. Nous donnons à la fin quelques applications de la domination.

Le chapitre deux est composé de deux sections. Nous nous intéressons à étudier dans la première section deux concepts étroitement liés, la k-domination (la domination multiple) et la k-indépendance dans les graphes. Nous définissons dans la première partie de cette section ces deux notions et nous donnons dans la deuxième partie quelques propriétés principales concernant ces deux notions. Ensuite nous présentons dans la troisième partie dans laquelle nous présentons un petit historique regroupant quelques principaux résultats antérieurs sur ces deux notions dans différentes classes de graphes. Dans la deuxième section nous évoquons la notion de la μ-excellence dans les graphes, où nous présentons quelques résultats obtenus dans la classe des graphes μ-excellents et ce par rapport à différents paramètres de domination. Notons que ces résultats sont spécifiques aux graphes dont la structure est simple, tels que les arbres.

Nous nous intéressons dans le chapitre trois à généraliser la borne inférieure déterminée par Blidia et al. (voir Théorème 9 dans [1]) pour le nombre de 2-indépendance dans un graphe G. Nous présentons la nouvelle borne inférieure du nombre de k-indépendance dans un graphe en fonction de l'ordre du graphe, du nombre chromatique et du nombre des sommets supports dans ce graphe, ainsi nous caractérisons constructivement les arbres extrémaux atteignant cette nouvelle borne.

Le chapitre quatre est consacré à la caractérisation des arbres T tels que le nombre de 2-domination est égal au nombre de 2-indépendance. En se base initialement sur la propriété que si G est un graphe tel que $\beta_k(G) = \gamma_k(G)$, alors G possède un ensemble à la fois $\gamma_k(G)$-ensemble et $\beta_k(G)$-ensemble. Cette propriété qui représente une conséquence directe du résultat de Favaron [2]: Pour tout graphe G et tout entier positif k, G admet un ensemble à la fois k-indépendant et k-dominant, d'où le résultat $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$.

Dans le chapitre cinq, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des sommets appartenant à tout ou bien à aucun ensemble k-dominant minimum dans les arbres. Cette caractérisation est basée initialement sur la technique d'élagage d'un arbre (*tree pruning*) introduite par Mynhardt [3] pour le nombre de domination. Après avoir caractérisé ces ensembles de sommets, on peut déduire la reconnaîssace des arbres γ_k-excellents, γ_k-recommandables, γ_k-indésirables et γ_k-exactes. On peut aussi reconnaître les arbres qui admettent un γ_k-ensemble unique.

Cette thèse s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et quelques perspectives futures dans ce domaine.

CHAPITRE 1

CONCEPTS FONDAMENTAUX

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées le long de cette thèse. Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes ; les notions propres à un chapitre donné sont définies dans le chapitre en question. Dans la deuxième partie on donne un aperçu sur la domination, on y présentera aussi quelques invariants de graphes, quelques paramètres de domination, aussi quelques applications liées au concept de la domination dans les graphes. Pour plus de détails conçernant la théorie des graphes, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages de C. Berge [4] et de Chartrand et Lesniak [5]. Pour la théorie de la domination dans les graphes, on recommande les ouvrages de Haynes et al. [6, 7].

1.1 Concept de base de la théorie des graphes

1.1.1 Définitions et notations

Un *graphe* G est défini par un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble de *sommets* et $E(G)$ est un ensemble de paires de sommets appelées *arêtes*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguîté, nous notons simplement V et E. Le nombre de sommets d'un graphe G est appelé *ordre* de G, et est noté par $n = |V(G)|$. Et le nombre d'arêtes est appelé la *taille* de G, et est noté par $m = |E(G)|$. Un graphe est dit *fini* ou *infini* suivant son ordre.

Soit G un graphe et soient u, v deux sommets de G. Une arête reliant deux sommets u, v est notée uv. Si $uv \in E$, alors u et v sont dits *adjacents* ou *voisins*. Par contre, si $uv \notin E$, alors u et v sont dits *non-adjacents* ou *non-voisins*. Si $e = uv$ est une arête de G, alors u et v sont les extrémités de e, et e est dite *incidente* à u et v. Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité en commun. Une *boucle* est une arête dont les extrémités sont confondues.

Un *graphe simple* est un graphe sans boucles ni arête multiple (i.e tout couple de sommets est relié par au plus une arête), pour plus de détails sur la terminologie des graphes voir [4]. Dans tout ce qui suit on s'intéresse qu'à des graphes simples et finis.

A titre d'exemple, on considère le graphe G de la Figure 1.1, dont l'ensemble des sommets est $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ et l'ensembles des arêtes est $\{v_1v_2,\ v_1v_6,\ v_2v_3,\ v_2v_6,\ v_3v_4,\ v_3v_5,\ v_3v_6,\ v_4v_6,\ v_6v_7,\ v_6v_8\}$. Les sommets v_1 et v_2 sont adjacents dans G, alors que v_1 et v_3 ne le sont pas.

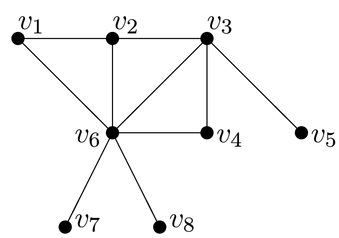


FIGURE 1.1. Un graphe G avec 8 sommets et 10 arêtes .

Graphes et sous-graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe $H = (V', E')$ est appelé *sous-graphe* de G induit par V', si $V' \subseteq V$ et $E' = \{\{u, v\} \in E : u \in V', v \in V'\}$, et il est appelé *graphe partiel* de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G, le sous graphe $H = (S, E)$ induit par S dans G, noté par $G[S]$, est le sous graphe de G avec l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$.

Un sous-ensemble A de V est dit est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que le sous graphe $G[B]$ induit par B vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que le sous graphe $G[B]$ induit par B vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et tel que $|A| > |B|$ (resp.$|B| > |A|$) où $|A|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Voisinages et degrés

Pour un sommet v d'un graphe G, le *voisinage ouvert* de v est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et le *voisinage fermé* est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé de l'ensemble S est $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$. Pour un sommet v de G, le *degré* de v noté par $d_G(v)$ (aussi par $d(v)$) est le nombre de sommets adjacents à v, i.e $|N_G(v)|$. Un sommet de degré 0 est dit sommet *isolé*, un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant* et son voisin est dit *support*. Dans un graphe G les degrés minimum et maximum sont notés par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$, respectivement.

Chaînes et cycles

Une *chaîne* de longueur $k-1$ dans un graphe G est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ..., v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, ..., v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ telle que $e_i = v_i v_{i+1}$ pour $i = 1, 2, ..., k-1$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se repète est dite *simple* et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par k sommets, notée P_k, est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* noté C_k de longueur k est une chaîne de longueur $k \geq 1$ dans lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets de C_k est égal à sa longueur.

Connexité

Un graphe G est dit *connexe*, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V(G)$. Un graphe qui n'est pas connexe est dit *disconnexe ou non connexe.* Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Distance, diamètre et excentricité

On appelle *distance* de x à y notée $d(x; y)$; la longueur de la plus courte chaîne de x à y. Le *diamètre* du graphe G, noté $\text{diam}(G)$, est la distance maximum entre deux sommets de G; c-à-d $\text{diam}(G) = \max_{x,y\in V}(d(x;y))$. L'*excentricité* de v est $exc(v) = \max\{d(v;w) : w \in V\}$.

1.1.2 Graphes particuliers

Graphe complet : Un *graphe complet* d'ordre n, noté par K_n, est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents.

Graphe multiparti : Un graphe G est dit *multiparti*, si l'ensemble des sommets peut être partitionné en q sous ensembles avec $q \geq 2$, sachant qu'aucune arête du graphe G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Pour $q = 2$, le graphe G est appelé *biparti*. Un graphe est dit biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impaires.

Si un sommet appartenant à un ensemble V_i de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres ensembles $\{V_j : j \neq i\}$ $\forall\ i = \overline{1,q}$, alors le graphe G est appelé *multiparti complet*. Un graphe multiparti avec $|V_i| = p_i, i = 1, 2, ..., q$, est noté par $K_{p_1,p_2,...,p_q}$. Si $p_1 = p_2 = ... = p_q = p$, alors le graphe G *multiparti complet* est noté par $K_{q\times p}$.

Couronne de deux graphes : La couronne G^* de deux graphes G_1 et G_2, comme c'est définit dans [8], est le graphe $G_1 \circ G_2$ obtenu à partir d'une copie de G_1 et $|V(G_1)|$ copies de G_2 où le $i^{ème}$ sommet de G_1 est adjacent à tous les sommets de la $i^{ème}$ copie de G_2. A titre d'exemple la couronne $K_3 \circ K_2$ représentée dans la Figure 1.2.

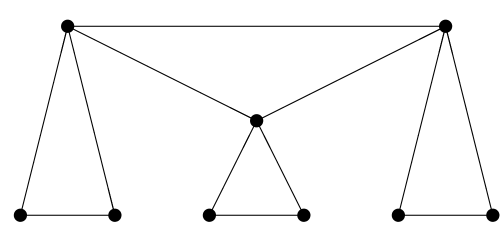


FIGURE 1.2. la couronne K_3oK_2

En particulier la *couronne* $G \circ K_1$, est appelée couronne de G, (voir la Figure 1.3).

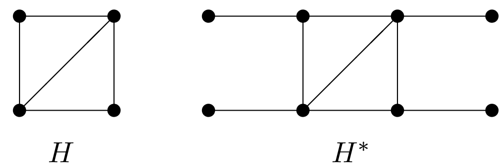


FIGURE 1.3. Un graphe H et sa couronne H^*

Arbre : Un *arbre* est un graphe connexe sans cycles ou acycliques. Un arbre comporte exactement $n-1$ arêtes et est noté par T.

Une *chenille, notée* $C(t_1, t_2, ..., t_n)$, est un arbre T avec la propriété que la suppréssion de tous ses sommets pendants donne une chaîne $P_n = (u_1, u_2, ..., u_n)$. Notons que $(t_1, t_2, ..., t_n)$ est une séquence d'entiers positifs où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i pour $1 \leq i \leq n$. A titre d'exemple la chenille $C(2, 1, 3, 2)$ est représentée dans la Figure 1.4.

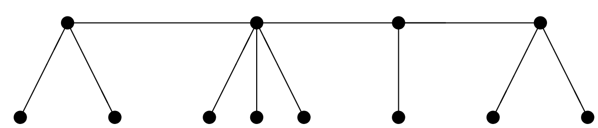


FIGURE 1.4. Une chenille $C(2, 3, 1, 2)$

Une *étoile* $K_{1,p}$ est un arbre obtenu en attachant p sommets pendants à un sommet isolé appelé par la suite *centre* ou *sommet central* de l'étoile.

Une *étoile double* $S_{p,q}$ est un arbre obtenu par deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ avec une arête reliant les deux centres.

Notons que l'*étoile* $K_{1,p}$ et l'étoile double $S_{p,q}$ sont des chenilles $C(p)$ et $C(p,q)$, respectivement.

Graphe k-régulier : Un *graphe k-régulier* est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k. Ainsi les cyles élémentaires C_n sont des graphes 2-réguliers et les graphes complets K_n sont des graphes $(n-1)$-réguliers.

Graphe biparti k-semi-régulier : Un *graphe biparti* est dit *k-semi-régulier* si chaque sommet dans l'une des deux parties a un degré k.

1.2 La domination dans les graphes

1.2.1 Aperçu sur la domination

Avant d'introduire la définition d'un ensemble dominant, nous donnons un petit aperçu sur la domination. Le concept de domination dans les graphes trouve son origine dans le jeu d'échec, introduit par D. Jaenisch [9], utilisant la reine comme pièce de jeu. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensembles des cases par certaines pièces de jeu. En 1862, D. Jaenisch posa le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé juqu'à présent. Pour plus de détails voir [10].

En 1958, la domination est devenue un domaine théorique grâce à Claude Berge (voir [4]). En effet, il a associé un graphe aux différentes situations, dans lequel on cherche un ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Dans l'exemple de déplacement du roi dans un échiquier $n \times n$, on associe le graphe suivant: Le graphe K_n (différent de la clique K_n) possède n^2 sommets qui correspondent aux cases de l'échiquier. Les arêtes de ce graphe correspondent aux déplacements du roi dans l'échiquier suivant les règles du jeu des échecs, c'est à dire deux sommets sont adjacents dans K_n si les cases correspondantes de l'échiquier ont un coté ou un coin en commun. Plus formellement $V(K_n) = \{(i, j); i, j \in \{1, ..., n\}\}$ et (i, j) est adjacent à (i', j') si et seulement si $|i - i'| \leq 1$ et $|j - j'| \leq 1$. En 1962, Ore proposa l'appellation nombre de domination (voir [11]). Le concept de domination a connu une véritable expansion après la parution de l'article de Cockayne et d'Hedetniemi paru en 1977 (voir [12]).

L'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est difficile au sens de la complexité algorithmique (voir [13, 14, 15]). Ainsi beaucoup d'axes de recherches ont vu le jour, par exemple: la détermination des bornes supérieures et inférieures, la recherche d'algorithmes polynomiaux, etc...

On peut définir un ensemble *dominant* comme étant un sous ensemble de sommets $D \subseteq V(G)$ de G tel que tout sommet $v \in V(G) \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet $u \in D$. Un dominant est ainsi un sous ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Un ensemble dominant D est dit *dominant minimal* si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant. Le *nombre de domination inférieur* (souvent appelé nombre de domination), $\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$-ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles. A titre d'exemple le graphe G de la Figure 1.5, dont on a $\gamma(G) = 2$ et $D_1 = \{v_2, v_5\}$ est un $\gamma(G)$-ensemble. La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée *nombre de domination supérieur*, et est noté par $\Gamma(G)$. Pour le même graphe G, $\Gamma(G) = 4$ et $D_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ est un $\Gamma(G)$-ensemble.

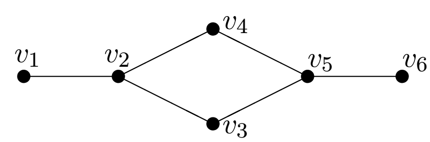


FIGURE 1.5. Un graphe G

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si $N[D] = V$.

La notion d'*indépendance* (*stabilité*) dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. Ainsi, un sous ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$ du graphe G est appelé indépendant s'il n'existe pas deux sommets dans S adjacents. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un ensemble indépendant maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant minimal.

1.2.2 Quelques invariants de graphes

Pour un graphe G d'ordre n, nous définissons quelques invariants de graphes intervenant dans ce manuscrit.

Un *isomorphisme* entre deux graphes G et G' désigne toute fonction bijective ϕ, associant à chaque sommet de G un sommet de G telle que $uv \in E(G)$ si et seulement si $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$. S'il existe un isomorphisme entre G et G', alors G et G' sont dits isomorphes.

Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes; chaque sommet est donc incident à au plus une arête du couplage. La taille maximale d'un couplage dans G est notée par $\beta_1'(G)$. Un couplage de G est dit *parfait* si tout sommet de G est incident à une arête du couplage, autrement dit si $\beta_1'(G) = n/2$.

Comme défini auparavant, un *stable (un indépendant)* de G, noté S, est un ensemble de sommets deux-à-deux non-adjacents. La cardinalité minimum (resp. maximum) des ensembles indépendants maximaux est appelée *le nombre de domination stable* (resp. le *nombre de stabilité ou d'indépendance)* du graphe G, noté par $i(G)$ (resp. $\beta(G)$). Pour le graphe G, representé dans la Figure 1.5, les ensembles de sommets, $\{v_2, v_5\}$ et $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ sont des ensembles indépendants maximaux. Puisque $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ est l'ensemble indépendant maximal de plus grande cardinalité, il s'ensuit que $\beta(G) = 5$. Aussi, $\{v_2, v_5\}$ est l'ensemble indépendant maximal de plus petite cardinalité, donc $i(G) = 2$.

Une *clique* de G, notée K, est un ensemble de sommets deux-à-deux adjacents. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets. Une clique de G est maximum si elle est de taille maximale dans G. On note par $\omega(G)$ la taille maximum d'une clique de G.

Une *coloration propre* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c de V dans un ensemble $\{1, 2, ...\}$ d'entiers positifs, appelées couleurs, telle que si deux sommets x et y sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont diférentes $c(x) \neq c(y)$. Ainsi, chaque ensemble de sommets de même couleur est un stable de G, autrement dit, une coloration est une partition de l'ensemble des sommets $V(G)$ en stables. Le nombre *chromatique*, noté par $\chi(G)$, est la taille minimum d'une partition de $V(G)$ en stables. D'une autre façon le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires d'une coloration propre de G.

1.2.3 Paramètres de domination

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble dominant D de G. On peut définir différents types de domination, à titre d'exemple on peut citer:

- *La domination k-multiple* : Pour un entier $k \geq 1$, un sous ensemble D de V est dit *dominant k-multiple* de G si tout sommet de V est dominé par au moins k sommets de D, autrement dit, si v est un sommet de $V \setminus D$, alors v possède au moins k voisins dans D et si v est un sommet de D alors v admet au moins $k - 1$ voisins dans D. Le *nombre de domination k-multiple*, noté $\gamma_{\times k}(G)$, designe la cardinalité minimale d'un ensemble dominant k-multiple de G.

- *La k-domination* : Pour un entier $k \geq 1$, un sous ensemble D de V est dit k-dominant de G si tout sommet de $V \setminus D$ a au moins k voisins dans D. Le *nombre de k-domination*, noté $\gamma_k(G)$, designe la cardinalité minimale d'un ensemble k-dominant de G (cette notion sera détaillée dans le Chapitre 2)

- *La domination couplée* : Un sous ensemble D de V est dit *dominant couplé* de G si le sous graphe induit par V contient un *couplage parfait*. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant couplé de G.

- *La domination totale* : Un sous ensemble D de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans D, autrement dit, si D est un dominant et le sous graphe induit par D, $G[D]$, ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de G.

- *La domination localisatrice et code identifiant*: Un sous ensemble D de V est dit dominant localisateur (resp. code identifiant) de G, si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap D \neq \emptyset$, et pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de $V \setminus D$, $N(v) \cap D \neq N(u) \cap D$ (resp. si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap D \neq \emptyset$, et pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de V, $N[v] \cap D \neq N[u] \cap D$). Les nombres $\gamma_L(G)$ et $M(G)$ désignent respectivement la cardinalité minimale d'un ensemble dominant localisateur de G et la cardinalité minimale d'un code identifiant de G.

1.2.4 Quelques applications de la notion de domination

La notion de domination dans les graphes a de nombreuses applications concrètes. Cette large variété d'application relative à notre monde réel a sans doute été aussi derrière sa grande popularité et son développement. En effet, beaucoup de situations réelles peuvent être modélisées comme des problèmes étudiés par le concept de domination et en particulier de ses nombreux paramètres, citons par exemple les réseaux informatiques et de communication, les systèmes de surveillance et de localisation, les réseaux électriques, les réseaux biologiques, les réseaux sociaux etc.

Parmi les nombreux exemples d'application, on donne dans ce qui suit deux exemples illustratifs.

Exemple 1: Réseau Informatique

Prenons par exemple un réseau de micro-ordinateurs dans lequel un groupe de serveurs a l'habitude de communiquer directement avec n'importe quel micro-ordinateur en dehors du groupe pour lui assurer un service. Le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble dominant minimum du graphe représentant le réseau. Si on impose à ce que tout serveur doit être relié à au moins un autre serveur. Dans ce cas, le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble dominant total minimum du graphe représentant le réseau. Si maintenant on impose à ce que chaque serveur assure k services et que tout micro-ordinateur en dehors du groupe peut bénéficier d'un seul service exactement d'un serveur qu'il lui est voisin. Dans ce cas, pour assurer les k services pour chaque micro-ordinateur, le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un k-dominant minimum du graphe représentant le réseau (dominant k-multiple minimum si on impose à ce que tout serveur du groupe communique avec au moins $k-1$ autres serveurs du groupe). Au fait cette propriété de la k-domination et la domination k-multiple permet par mesure de sécurité d'assurer la continuité du service au cas où des serveurs tombent en panne. Et vu le coût important, il est évident de chercher à minimiser le nombre de serveurs du groupe dans le réseau informatique.

Exemple 2: Détection d'incendie dans un bâtiment

Une deuxième application consiste à appliquer la notion d'ensembles dominant localisateurs et de codes identifiant pour la localisation d'incendie dans un bâtiment.

Considérons un bâtiment modélisé par un graphe où les sommets représentent les pièces ou les zones du bâtiment et les arêtes représentent le voisinage de deux pièces.

Le but est de minimiser le nombre de capteurs nécessaires afin de localiser un danger éventuel. La localisation est effectuée en comparant les ensembles identifiants de chaque sommet à l'ensemble des capteurs ayant détecté le danger.

Si les capteurs ont trois états possibles (positions) capables de distinguer entre aucun danger, un danger dans une pièce voisine et un danger dans la même pièce. Dans ce cas un ensemble de capteurs formant un ensemble dominant localisateur suffit pour localiser d'une manière unique la position du danger. Si les capteurs n'ont que deux états possibles capables de distinguer entre un danger à proximité (dans la même chambre ou dans la chambre voisine) et pas de danger, alors l'ensemble de capteurs formant un code identifiant est nécessaire pour localiser le danger. Le danger est localisé par la vérification des capteurs qui sont en état alarme, comme cet ensemble est unique pour tout sommet alors la localisation du danger est immédiate.

CHAPITRE 2

LA k-DOMINATION, LA k-INDÉPENDANCE ET LA μ-EXCELLENCE DANS LES GRAPHES AVEC QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS

Nous allons consacrer ce chapitre composé de deux sections 1 et 2, à l'étude dans la première section les deux concepts de k-domination et de k-indépendance dans les graphes, et dans la seconde section nous étudions le concept de la μ-excellence dans les graphes. Ensuite nous fournissons les principaux résultats existants.

Dans la première partie de la section 1, nous définissons les notions de la k-domination et la k-indépendance dans les graphes. Et dans la seconde partie, nous présentons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble k-dominant (resp. k-indépendant) dans un graphe G, soit minimal (resp. maximal), et à la fin de cette partie, nous donnons les principales propriétés concernant ces deux concepts. Ensuite nous concluons cette première section par une troisième partie dans laquelle nous présentons quelques résultats antérieurs sur ces deux notions dans différentes classes de graphes.

La section 2 est composée de deux parties. Dans la première partie, nous définissons la notion de la μ-excellence dans les graphes, ainsi que quelques paramètres liés à cette notion. Dans la seconde partie, nous présentons quelques résultats particuliers pour la μ-excellence dans la classe des arbres, et ce pour différents paramètres de domination comme $\gamma, \gamma_{\times 2}$ ou γ_{pr}.

2.1 La k-domination et la k-indépendance dans les graphes

2.1.1 Définitions et propriétés préliminaires

Les notions de la k-domination et de la k-indépendance ont été introduites par Fink et Jacobson en 1985 (pour plus de détails voir [16, 17]).

Pour un graphe $G = (V, E)$, on donne les définitions suivantes.

Définition 2.1. *Etant donné un entier $k \geq 1$. Un sous ensemble $D \subseteq V(G)$ est un k–dominant de G si tout sommet de $V(G) \setminus D$ a au moins k voisins dans D.*

Un ensemble k-dominant minimal D est un ensemble k-dominant dans G tel que pour tout sommet x dans D, $D \setminus \{x\}$ n'est pas k-dominant. Les ordres minimum et maximum d'un k–dominant minimal de graphe G sont notés $\gamma_k(G)$ et $\Gamma_k(G)$. Le *nombre de k–domination* est γ_k.

Définition 2.2. *Etant donné un entier $k \geq 1$, un sous ensemble $S \subseteq V(G)$ est un k-indépendant si tout sommet de S a au plus $k-1$ voisins dans S, ou encore si $\Delta(S) \leq k-1$.*

Tout sous ensemble d'un ensemble k-indépendant est un k-indépendant. Un ensemble k-indépendant S de G est maximal si pour tout sommet x dans $V(G) \setminus S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un k-indépendant. Le cardinal minimum et le cardinal maximum d'un ensemble k-indépendant maximal de G sont notés $i_k(G)$ et $\beta_k(G)$, respectivement. Le *nombre de k-indépendance* est β_k.

Notons qu'un ensemble k-indépendant est parfois appelé $(k-1)$-dependant [16, 17], k-dependant [18], $(k-1)$-small [19].

En 1989, Jacobson et Peters [21], ont démonté que la détermination des deux nombres $\gamma_k(G)$ et $\beta_k(G)$ pour un graphe quelconque G est un problème difficile au sens de la complexité algorithmique. Ils ont élaboré un algorithme linéaire pour les calculer dans les arbres et les graphes séries-parallèle. Pour plus de détails voir [22, 21].

Pour $k = 1$ on retrouve les définitions de la domination et de l'indépendance usuelles. Donc pour tout graphe G, $\gamma_1(G) = \gamma(G)$, $\Gamma_1(G) = \Gamma(G)$, $i_1(G) = i(G)$, $\beta_1(G) = \beta(G)$.

2.1.2 Minimalité d'un ensemble k-dominant et maximalité d'un ensemble k-indépendant

Puisque dans un graphe $G = (V, E)$ l'ensemble des sommets V est un k-dominant, Fink et Jacobson [17] ont établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble k-dominant soit minimal dans un graphe G.

Théorème 2.3 (Fink et Jacobson [17]). *Soit D un ensemble k-dominant d'un graphe G. Alors D est minimal si et seulement si pout tout sommet $v \in D$, on a:*

a. v possède moins de k voisins dans D, ou

b. Il existe un sommet $u \in V \setminus D$ tel que $|N(u) \cap D| = k$ et $u \in N(v)$.

Aussi, Chellali et al. [23], ont établi des conditions pour lesquelles un ensemble k-indépendant d'un graphe G soit maximal.

Théorème 2.4 (Chellali et al. [23]). *Soit S un ensemble k-indépendant d'un graphe G. Alors S est maximal si et seulement si pour tout sommet $v \in V \setminus S$, on a:*

a. v est adjacent à au moins k sommets dans S, ou

b. v est adjacent à un sommet $u \in S$ qui possède exactement $k - 1$ voisins dans S.

Donc, d'après ce qui précède et pour tout graphe G d'ordre n et tout entier positif k avec $n \geq k \geq 1$, on peut énoncer les propriétés principales suivantes:

1. Tout ensemble k-dominant contient au moins k sommets, d'où $\gamma_k(G) \geq k$.

2. Tout ensemble k-dominant contient tous les sommets de degré plus petit que k.

3. Tout ensemble de k sommets est k-indépendant d'où $i_k(G) \geq k$ pour tout graphe G.

4. Par définition $i_k(G) \leq \beta_k(G)$ et $\gamma_k(G) \leq \Gamma_k(G)$ pour tout graphe G.

5. Tout ensemble $(k+1)$-dominant de G est k-dominant et donc $\gamma_k(G) \leq \gamma_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$. De plus l'ensemble des sommets V est le seul ensemble $(\Delta+1)$-dominant mais n'est pas un Δ-dominant minimal. On en déduit que pour tout graphe G, $\Gamma_\Delta(G) < n$ et

$$\gamma(G) = \gamma_1(G) \leq \gamma_2(G) \leq \ldots \leq \gamma_\Delta(G) < \gamma_{\Delta+1}(G) = n.$$

6. De même, tout ensemble k-indépendant est $(k+1)$-indépendant et donc $\beta_k(G) \leq \beta_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$. De plus l'ensemble des sommets V est le seul $(\Delta+1)$-indépendant maximal mais n'est pas un Δ-indépendant. On en déduit que pour tout graphe G, $i_{\Delta+1}(G) = n$ et

$$\beta(G) = \beta_1(G) \leq \beta_2(G) \leq \ldots \leq \beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n.$$

7. Tout ensemble à la fois k-indépendant et k-dominant (s'il en existe) est un ensemble k-indépendant maximal.

8. Tout ensemble à la fois k-indépendant et k-dominant (s'il en existe) est un ensemble k-dominant minimal.

9. Pour $k \geq 2$, un ensemble k-indépendant maximal n'est pas nécessairement un ensemble k-dominant. A titre d'exemple, l'étoile $K_{1,p}$ avec $p \geq 2$, de centre c et avec l'ensemble des sommets pendants X. Pour un entier k avec $2 \leq k \leq 2$ et un sous ensemble $Y \subseteq X$ avec $|Y| = k-1$, on a $Y \cup \{c\}$ est un ensemble k-indépendant maximal et X est l'unique ensemble k-dominant.

On termine cette partie en mentionnant que Lu, Hou et Li [24], ont établi des conditions équivalentes pour les arbres ayant des ensembles k-dominant minimum uniques.

Pour cela ils ont définit quelques notations spéciales pour cette équivalence. Pour un arbre T et un entier positif $k \geq 2$, un sommet est dit k-pendant s'il est de degré au plus $k-1$ dans T. L'ensemble de k-pendants de T est noté par $L_k(T)$ et soit $X_k(T) = V(T) - L_k(T)$. Donc, pour $x \in X_k(T)$, $\deg_T(x) \geq k$.

Soit D un sous ensemble de $V(T)$ et $x \in D$. Un sommet $y \notin D$ est appelé un voisin k-privé de x par rapport à D si y est un voisin de x et $|D \cap N_G(y)| = k$. Le voisinage k-privé de x par rapport à D, noté par $PN_k(x, D, G)$, est l'ensemble de tous les voisins k-privé de x par rapport à D dans G.

Théorème 2.5 (Lu, Hou et Li [24])**.** *Supposons que T est un arbre et $k \geq 2$ est un entier positif. Soit D un sous ensemble de $V(T)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *D est un γ_k-ensemble unique de T,*

ii) *D est un γ_k-ensemble de T satisfaisant $|D \cap N_T(x)| \leq k-2$ ou $|PN_k(x, D)| \geq 2$ pour tout $x \in D \cap X_k(x)$,*

iii) *D est un ensemble k-dominant de T satisfaisant $|D \cap N_T(x)| \leq k-2$ ou $|PN_k(x, D)| \geq 2$ pour tout $x \in D \cap X_k(x)$.*

2.1.3 Quelques résultats particuliers

On s'intéresse dans cette partie à la présentation de quelques résultats obtenus sur les deux paramètres γ_k et β_k dans différentes classes de graphes.

Nous présentons à présent ceux concernant γ_k. On s'intéresse en premier aux bornes inférieures.

Théorème 2.6 (Fink et Jacobson [16])**.** *Pour tout graphe G avec n sommets et m arêtes et pour tout entier positif k,*

1. $\gamma_k(G) \geq kn/(k + \Delta)$.

2. $\gamma_k(G) \geq n - m/k$. En outre, si $m \neq 0$, alors $\gamma_k(G) = n - m/k$ si et seulement si G est un graphe biparti k-semi-régulier.

Puisque $m = n - 1$ pour un arbre, il s'ensuit à partir de la Condition (2) du Théorème 2.6 que pour tout arbre T d'ordre n et tout entier positif k, $\gamma_k(G) \geq ((k-1)n + 1)/k$.

Dans [25], Volkmann a établi une caractérisation des arbres extrémaux T vérifiant $\gamma_k(G) \geq \lceil ((k-1)n + 1)/k \rceil$.

Théorème 2.7 (Volkmann [25]). *Si T est un arbre d'ordre n et k un entier positif, alors $\gamma_k(G) = \lceil ((k-1)n+1)/k \rceil$ si et seulement si*

1. $n = kt+1$ pour un entier $t \geq 0$ et T est un arbre k-semi-régulier ou $n = 1$, ou

2. $n = kt+r$ pour des entiers $t \geq 0$ et $2 \leq r \leq k$ et T est formé de r sous arbres $T_1, T_2, ..., T_r$ chacun satisfait la Condition (1) et de $r-1$ arêtes telles que l'ensemble des sous arbres $T_1, T_2, ..., T_r$ et les $r-1$ arêtes forment l'arbre T.

Puisque $m \leq n$ pour les graphes avec au plus un cycle, il s'ensuit à partir de la Condition (2) du Théorème 2.6, que pour ces graphes d'ordre n et tout entier positif k, $\gamma_k(G) \geq (k-1)n/k$. Les Théorèmes 2.8 et 2.9 suivants améliorent cette borne. Pour un graphe G, soit $L_k(G)$ l'ensemble de sommets de G de degré au plus $k-1$, et $S_k(G)$ l'ensemble de tous les sommets n'appartenant pas à $L_k(G)$ et qui sont adjacent à $L_k(G)$.

Théorème 2.8 (Lu, Hou et Xu [26]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ et $k \geq 2$ un entier, alors $\gamma_k(G) \geq (n + |L_k(T)| - |S_k(T)|)/2$.*

Notons que les arbres extrémaux du Théorème 2.8 sont donnés dans [26] par une construction récursive.

Théorème 2.9 (Chellali [27]). *Si G est un graphe d'ordre n avec au plus un cycle, ℓ sommets pendant et s supports, alors $\gamma_2(G) \geq (n + \ell - s)/2$.*

Le graphe G obtenu en attachant au moins deux sommets pendants à chaque sommet d'un cycle est un exemple dont la borne du Théorème 2.9 est atteinte. Pour les arbres, la borne du Théorème 2.9 est égale à celle donnée dans le Théorème 2.8 dans le cas où $k = 2$.

Soit $\mu_0 = \mu_0(G)$ le nombre minimum d'arêtes qui peuvent être supprimer d'un graphe G pour que le graphe obtenu soit biparti. Le Théorème 2.10 améliore la Condition (2) du Théorème 2.6, pour tout graphe G.

Théorème 2.10 (Hansberg et Volkmann [28]). *Si G est un graphe d'ordre n et de taille m, alors $\gamma_k(G) \geq n - (m - \mu_0)/k$.*

Notons que si $m \neq 0$, alors $\gamma_k(G) \geq \lceil n - (m - \mu_0)/k \rceil$ si et seulement si G contient un graphe partiel H biparti k-semi-régulier avec $m(H) = m - \mu_0 - r$, où r est un entier vérifiant $0 \leq r \leq k-1$ et $m - \mu_0 - r \equiv 0 (\operatorname{mod} k)$.

Aussi, on présente deux nouvelles bornes supérieures pour le nombre de la k-domination γ_k, établies par Hansberg et Volkmann [30]. La première borne est meilleure que celle établie par Rautenbach et Volkmann [29],

$$\gamma_k(G) \leq (n/(\delta+1)) \left(k \ln(\delta+1) + \sum_{i=0}^{k-1} 1/(i!(\delta+1)^{k-1-i}) \right) \text{ pour } (\delta+1)/\ln(\delta+1) \geq 2k,$$

mais elle préserve les mêmes hypothèses sur le degré minimum δ.

Théorème 2.11 (Hansberg et Volkmann [30]). *Soit G un graphe d'ordre n avec le degré minimum $\delta \geq 1$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(\delta+1)/\ln(\delta+1) \geq 2k$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq (n/(\delta+1)) \left(k \ln(\delta+1) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta^i/(i!(\delta+1)^{k-1}) \right)$$

Comme conséquence immédiate à ce théorème, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.12 (Hansberg et Volkmann [30]). *Soit G un graphe d'ordre n avec le degré minimum $\delta \geq 1$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(\delta+1)/\ln(\delta+1) \geq 2k$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq (n/(\delta+1)) (k \ln(\delta+1) + 1)$$

Pour $k = 1$, la borne $\gamma(G) \leq (n/(\delta+1)) (\ln(\delta+1) + 1)$ pour $\delta \geq 1$ [31, 32, 33], découle directement à partir du Corollaire 2.12 et de la borne de Rautenbach et Volkmann ci-dessus [29].

Tandis que la seconde borne de Hansberg et Volkmann [30] affaiblit un peu plus l'hypothèse sur le degré minimum δ et, pour $k \geq 3$, elle est encore meilleure que la première borne.

Théorème 2.13 (Hansberg et Volkmann [30]). *Soit G un graphe d'ordre n avec le degré minimum $\delta \geq k$, où $k \in \mathbb{N}$. Si $(\delta + 1 + 2\ln(2))/\ln(\delta+1) \geq 2k$, alors*

$$\gamma_k(G) \leq (n/(\delta+1)) \left(k \ln(\delta+1) - \ln(2) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta^i/(i!(\delta+1)^{k-1}) \right)$$

L'observation suivante établie par Hansberg et Volkmann [30], améliore le Corollaire 2.12 pour $k \geq 4$.

Observation 2.14 (Hansberg et Volkmann [30]). *Soient $k \geq 4$ un entier et G un graphe de degré minimum $\delta \geq k$.*

(i) Si $(\delta+1)/\ln(\delta+1) \geq 2k$, alors $\gamma_k(G) \leq (n/(\delta+1))\,(k\ln(\delta+1)+1-(k-1)/\delta)$.

(ii) Si $(\delta+1+2\ln(2))/\ln(\delta+1) \geq 2k$, alors

$$\gamma_k(G) \leq (n/(\delta+1))\,(k\ln(\delta+1)-\ln(2)+2-2(k-1)/\delta).$$

Avant de présenter les résultats obtenus pour le nombre de la k-indépendance dans les graphes, nous donnons la définition du k-résidu $R_k(G)$ pour un graphe G. Le concept de résidu a été introduit par Fajtlowicz [34], et à partir du programme GRAFFITI, il a conjecturé que le nombre d'indépendance pour tout graphe est borné inférieurement par son résidu. Cette conjecture a été prouvée par Favaron, Mahéo and Saclé [35], par la suite Griggs et Kleitman [36] et Triesch [37] simplifient la preuve originale. Dans [38], Jelen a généralisé le concept de résidu à celui de k-résidu. On donne ci-dessous la définition du résidu R et du k-résidu R_k pour un graphe G et nous les illustrons par des exemples.

Etant donné une suite décroissante $(d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n)$ d'entiers positifs, s'il existe au moins un graphe de sommmets $x_1, x_2, ..., x_n$ où x_i est de degré d_i pour $1 \leq i \leq n$, nous dirons que la suite est une séquence de degré. Dans le cas contraire nous dirons que la suite n'est pas réalisable. Il est clair que toute suite décroissante d'entiers n'est pas nécessairement une séquence de degrés. Plus généralement, pour qu'une suite décroisante d'entiers de longueur n, soit réalisable il est necessaire que :

(i) Le premier élément soit inférieur ou égal à $n-1$.

(ii) Le nombre de termes impairs de la séquence soit pair.

Mais ces conditions ne sont pas suffisantes, ni $(2,0,0,0)$, ni $(4,4,2,1,1)$ ne sont des séquences de degrés, comme on peut rapidement s'en convaincre. Et que dire par exemple de la suite $S = (7,5,4,4,3,3,2,2,2,1,1)$. Le Théorème 2.16 dû à Havel et Hakimi [40, 39] apporte une méthode de résolution d'une telle question.

Définition 2.15. *Soit $\pi := (d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n)$ une séquence décroissante d'entiers qui satisfait $d_1 + 1 \leq n$. Le réarrangement des $(n-1)$ termes $(d_2 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n)$ en suite décroissante est noté par $H(\pi) = (d_2^1 \geq d_3^1 \geq ... \geq d_n^1)$ et H est appelé opérateur de Havel-Hakimi.*

Théorème 2.16 (Havel et Hakimi [40, 39])**.** *Soit $\pi := (d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n)$ une séquence d'entietrs positifs. π est réalisable ou graphique si et seulement si l'opérateur H est applicable c-à-d $d_1 + 1 \leq n$ et $H(\pi)$ est réalisable.*

Donc en réitérant ce processus, une séquence $\pi := (d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n)$ est réalisable si et seulement si l'opérateur H peut être appliqué i fois pour $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ de telle manière que $H^i(\pi) = (d_{i+1}^i \geq ... \geq d_n^i)$ soit une séquence de $n - i$ zéros. La hauteur $\tau(\pi)$ de π est le dernier i qui donne $H^i(\pi)$ formée de zéros. La différence $n - \tau(\pi)$ est appelé le résidu de la séquence π de G et il est noté par $R(\pi)$ ou $R(G)$.

Etant donné une séquence graphique $\pi := (d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n)$. Triesch [37] considère le terme le plus grand d_{i+1}^i de la séquence $H^i(\pi)$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ et appelle $E(\pi) = (d_1^0 := d_1 \geq d_2^1 \geq ... \geq d_n^{n-1})$ séquence d'élimination de π. Clairement, $R(\pi)$ est égal au nombre de zéros dans $E(\pi)$. Dans [38], Jelen définit le k-résidu de G, noté par $R_k(G)$ ou $R_k(\pi)$, pour $k \in \mathbb{N}$, par

$$R_k(G) = R_k(\pi) = (1/k) \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) b_j(\pi),$$

où $b_j(\pi)$ est le nombre d'élements de valeur j dans $E(\pi)$, et il montre que

$$\beta_k(G) \geq \lceil R_k(G) \rceil .$$

Exemple : On considère le graphe domino $(P_3 \square P_2)$ à 6 sommets. Soit la séquence des degrés $\pi = (3, 3, 2, 2, 2, 2)$. On applique l'opérateur H de Havel-Hakimi, on aura:

$H^0(\pi) = (3, 3, 2, 2, 2, 2); d_1^0 = 3,$

$H^1(\pi) = (2, 2, 2, 1, 1); d_2^1 = 2,$

$H^2(\pi) = (1, 1, 1, 1); d_3^2 = 1,$

$H^3(\pi) = (1, 1, 0); d_4^3 = 1,$

$H^4(\pi) = (0, 0);$

D'où $E(\pi) = (3, 2, 1, 1, 0, 0)$ et $R(\pi) = R(G) = 2$.

Pour passer d'une ligne à la suivante, supprimer le 1^{er} terme de degré d^i_{i+1} pour $i = 0, 1, ..., n-1$, oter 1 à chacun des d^i_{i+1} termes suivants et réordonner par ordre décroissant.

Pour $k = 3$, on a $\beta_3(G) = 5$ et $R_3(G) = R_3(\pi) = \frac{1}{3}\{3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1\} = 11/3$ le 3-résidu de G. Et donc $\beta_3(G) \geq \lceil R_3(G) \rceil = 4$.

Différentes bornes inférieures sur le nombre d'indépendance ont été établis en terme de degré maximum, d'ordre de graphe et de séquence de degrés de graphe. A titre d'exemple $\beta \geq n/(d^* + 1) \geq n/(\Delta + 1)$ [41] où $d^* = 2m/n$ est le degré moyen de graphe ou $\beta \geq \sum_{v \in V} 1/(1 + d(v))$ [42] ou $\beta \geq R$ [35]. Ces bornes ont été généralisées et même améliorées pour le nombre de la k-indépendance. Aussi de nombreuses autres bornes ont été établies pour β_k par différents auteurs.

Théorème 2.17 (Hopkins et Staton [19]). *Pour tout graphe G d'ordre n et tout entier positif $k \leq \Delta$, $\beta_k(G) \geq HS_k(G) := n/(1 + \lfloor \Delta/k \rfloor)$.*

Théorème 2.18 (Favaron [43]). *Pour tout graphe G et tout entier positif k, $\beta_k(G) \geq \sum_{v \in V} k/(1 + kd(v))$.*

Théorème 2.19 (Jelen [38]). *Pour tout graphe G et tout entier positif k, $\beta_k(G) \geq R_k(G)$.*

Théorème 2.20 (Caro-Tuza for Graphs [44, 38]). *Si G est un graphe avec la séquence de degrés $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ et k un entier positif, alors $\beta_k(G) \geq CT_k(G) := \sum_{i=1}^{n} f_k(d_i)$ où*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - x/(2k), \ si\ 0 \leq x \leq k, \\ (k+1)/(2x+1), \ si\ x > k. \end{cases}.$$

Corollaire 2.21 (Caro-Tuza for Graphs [44, 38]). *Si G est un graphe avec le degré moyen d^* et k est un entier positif, alors $\beta_k(G) \geq CT_k(G) \geq nf_k(d^*)$.*

Dans [38], Jelen a démontré que la borne R_k du Théorème 2.19 est toujours meilleure que la borne CT_k du Théorème 2.20 (Théorème 8 de [38]) et donne des exemples montrant que la borne R_k peut être arbitrairement petite ou grande que la borne HS_k du Théorème 2.17. D'autres part il a donné des exemples montrant que les deux bornes HS_k et CT_k sont incomparables.

Dans [45], Maddox a généralisé la borne usuelle $\beta(T) \geq n/2$ pour un arbre non triviale T et démontre que $\beta_k(T) \geq kn/(k+1)$. Dans [1], on a donné une autre démonstration de ce résultat qui a permis de caractériser les arbres extremaux avec une construction récursive. Soit $\mathcal{F}(k)$ l'ensemble des arbres qui peuvent être construit récursivement à partir de $T_1 = K_{1,k}$ en joignant par une arête un sommet quelconque de T_i à un sommet quelconque d'une étoile $K_{1,k}$.

Théorème 2.22 (Maddox [45], Blidia, Chellali, Favaron et Meddah [1])**.** *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors pour tout entier k avec $2 \leq k \leq \Delta$, $\beta_k(T) \geq B_k := kn/(k+1)$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}(k)$.*

Pour apprécier cette borne $B_k := kn/(k+1)$, on la compare aux meilleures bornes connues. La première borne est de Hopkin et Staton $HS_k(G) := n/(1 + \lfloor \Delta/k \rfloor)$; On peut voir que dans tous les cas $B_k \geq HS_k(G)$. La deuxième borne due à Jelen, $R_k(G)$, le k-résidu de G. Ces deux bornes HS_k et B_k sont incomparables comme on a vu dans [1, 46], et il en est de même pour les deux bornes B_k et $R_k(G)$.

D'autres résultats ont été obtenus récemment pour le nombre de k-indépendance, par Caro et Hansberg dans [47]. Le Théorème 2.23 suivant est une conséquence directe de Théorème 2.17, et il généralise et améliore différents résultats concernant les relations entre $\beta_p(G)$ et $\beta_q(G)$ (voir [48]).

Théorème 2.23 (Caro et Hansberg [47])**.** *Soit G un graphe et $q \geq p \geq 1$ deux entiers, alors $\beta_q(G) \leq \lceil q/p \rceil \, \beta_p(G)$.*

En ajoutant r à Δ où $1 \leq r \leq k$ tel que $\Delta + r$ est un multiple de k, alors on en déduit à partir de Théorème 2.17 l'observation suivante.

Observation 2.24 (Caro et Hansberg [47])**.** *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ et soit r un entier où $1 \leq r \leq k$ et $\Delta + r \equiv 0(\mathrm{mod}(k))$. Alors on a $\beta_k(G) \geq kn/(\Delta + r)$.*

Théorème 2.25 (Caro et Hansberg [47])**.** *Soit G un graphe d'ordre n, alors $\beta_k(G) > kn/(d^* + 2k)$.*

Pour plus de détails sur le nombre de la k-indépendance et celui de la k-domination dans les graphes, voir [23] $(3-22)$.

Nous clôturons cette partie par la présentation de quelques résultats particuliers reliant les deux paramètres γ_k et β_k.

Théorème 2.26 (Favaron [49])**.** *Pour tout graphe G et tout entier positif k, $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$ et $i_k(G) \leq \Gamma_k(G)$.*

Théorème 2.27 (Hansberg, Meierling et Volkmann [50])**.** *Soient G un graphe non trivial connexe de degré maximum Δ et k un entier positif avec $\delta(G) \geq k$. Si G n'est pas isomorphe à un cycle d'ordre impair pour $k = 2$ ni à un graphe complet K_{k+1}, alors $\gamma_k(G) \leq (\Delta - 1)\beta(G)$. De plus, si G est un graphe non régulier, alors $\gamma_k(G) = (\Delta-1)\beta(G)$ si et seulement si G est la couronne $K_2 \circ K_k$.*

Théorème 2.28 (Hansberg, Meierling et Volkmann [50])**.** *Si G est un graphe r-partis connexe et k est un entier tel que $\Delta \geq k$, alors $\gamma_k(G) \leq \beta(G)((r-1)r + k - 1)/r$.*

Pour les graphes bipartis et $k = 2$, la borne précédente est donnée par Fujisawa, Hansberg, Kubo, Saito, Sugita et Volkmann [51], qui ont caractérisé dans ce cas les graphes avec l'égalité $\gamma_2(G) = 3\beta(G)/2$. L'inégalité $\gamma_2(G) \leq 3\beta(G)/2$ a été démontrée en premier lieu pour les arbres par Blidia et al. [52].

Théorème 2.29 (Fujisawa, Hansberg, Kubo, Saito, Sugita et Volkmann [51])**.** *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre au moins 3, alors $\gamma_2(G) \leq 3\beta(G)/2$ et l'égalité est atteinte si et seulement si G est la couronne de la couronne d'un graphe biparti ou G est la couronne d'un cycle C_4.*

Le résultat suivant donne une borne inférieure du nombre de la k-domination en terme de nombre de $(k-1)$-indépendance pour des classes spéciales de graphes. Le cas $k = 2$ du Théorème 2.30 suivant a été défini dans [52].

Théorème 2.30 (Blidia, Chellali et Volkmann [53])**.** *Si T est un arbre, alors $\gamma_k(T) \geq \beta_{k-1}(T)$ pour tout entier $k \geq 2$.*

Des conditions équivalentes pour les arbres satisfaisant $\gamma_k(T) = \beta_{k-1}(T)$ sont aussi données dans [53]. Pour caractériser les arbres dont $\gamma_k(T) = \beta_{k-1}(T)$, ils ont introduit la famille $\mathcal{A}_k$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence $T_1, T_2, ..., T_p$ avec $(p \geq 1)$ d'arbres, où T_1 est un $\mathcal{N}_k$-arbre faible de sommet spécial w de degré au moins k, $T = T_p$, et, si $p \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i, par l'une des opérations définies ci-dessous. Soit $A(T_1) = V(T_1) - \{w\}$.

- *Opération* $\mathcal{T}_1$: Attacher un $\mathcal{N}_k$-arbre faible T_0 de sommet spécial w de degré au moins k à un sommet quelconque de T_i. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (V(T_0) - \{w\})$.

- *Opération* $\mathcal{T}_2$: Attacher un $\mathcal{N}_k$-arbre exact faible T_0 de sommet spécial w à un sommet quelconque de $A(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (V(T_0) - \{w\})$.

Théorème 2.31 (Blidia, Chellali et Volkmann [53]). *Soient T un arbre et $k \geq 2$ un entier. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\gamma_k(T) = \beta_{k-1}(T)$.

2. $\Delta(T) \leq k - 2$ *ou* $T \in \mathcal{A}_k$.

3. T *possède un* $\gamma_k(T)$*-ensemble unique qui est à la fois un* $\beta_k(T)$*-ensemble unique.*

2.2 La μ-excellence dans les graphes

Nous présentons dans cette section quelques résultats obtenus dans la classe des graphes μ-excellents et ce par rapport à différents paramètres de domination tels que, la domination sans condition, la domination couplée, la domination double et la domination localisatrice. Ce concept a été introduit par Fricke et al. [54], où ils ont posé le problème de la caractérisation des graphes μ-excellents pour un paramètre donné $\mu(G)$ tel que $\mu(G) = \gamma(G); i(G)$ ou $\beta(G)$ et il a été investi par différents auteurs tels que Cockayne et al. [55] et par Blidia et al. ([56, 57]).

Vu la difficulté de l'étude de la classe des graphes μ-excellents dans le cas général, les résultats présentés ici sont spécifiques aux graphes dont la structure est simple, tels que les arbres.

Définition 2.32. *Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un paramètre $\mu(G)$. On dit qu'un sommet v de V est μ-bon s'il est contenu dans au moins un $\mu(G)$-ensemble et, qu'il est μ-mauvais sinon. Si μg (resp. μb) désigne le nombre de sommets μ-bons dans G (resp. μ-mauvais) alors le graphe G est dit:*

- μ-excellent si tout sommet de V est μ-bon, en d'autres termes si $\mu b = 0$.
- μ-recommandable (ou μ-acceptable) si $\mu g > \mu b \geq 1$.
- μ-juste ou (μ-équitable) si $\mu g = \mu b$.
- μ-pauvre ou (μ-indésirable) si $1 \leq \mu g < \mu b$.

On donne ainsi un ensemble d'exemples simples sur ces quatre notions:

Les chenilles $C(t_1, t_2, ..., t_n)$ pour tout $t_i \geq 2$ où $i \in \{1, ..., n\}$, sont des graphes γ-indésirables et β-recommandables.

Les graphes multipartis complets, les cycles ainsi que les couronnes $G \circ K_1$ de graphes G, sont des graphes γ-excellents.

La chenille $C(2, 1, 2)$ est un graphe γ-juste.

La chaîne P_5 est un graphe γ-recommandable, β-recommandable et i-recommandable.

2.2.1 Quelques résultats particuliers

1°) **Les arbres γ-excellents**

Nous donnons en premier quelques résultats antérieurs concernant les graphes γ-excellents d'une manière générale. Rappelons qu'un graphe $G = (V, E)$ est γ-excellent si tout sommet de V appartient à un $\gamma(G)$-ensemble.

Dans [54], Fricke et al. ont fourni les remarques et propositions suivantes:

Remarque 2.33 (Fricke et al. [54]). *Si G est un graphe différent de la clique K_2, alors tout sommet support de G est γ-bon et il existe un $\gamma(G)$-ensemble qui contient tous les sommets support de G.*

Remarque 2.34 (Fricke et al. [54]). *Si G est un graphe γ-excellent, alors tout sommet pendant de G est contenu dans un $\gamma(G)$-ensemble et il n'exite aucun sommet pendant de G qui soit contenu dans tout $\gamma(G)$-ensemble.*

Notons que si un sommet support v d'un graphe G est adjacent à au moins deux sommets pendants alors compte tenu de la Remarque 2.33, aucun des sommets pendants de G n'appartient à un $\gamma(G)$-ensemble, d'où la remarque suivante:

Remarque 2.35 (Fricke et al. [54]). *Si G est un graphe γ-excellent, alors tout sommet support de G n'est adjacent qu'à un seul sommet pendant.*

Proposition 2.36 (Fricke et al. [54]). *Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe γ-excellent.*

A titre d'exemple, on considère la couronne $G^* = G \circ K_1$ d'un graphe quelconque G. Comme tout sommet de $V(G)$ est un sommet support dans G^*, il s'ensuit d'après la Remarque 2.33 que $V(G)$ est un $\gamma(G^*)$-ensemble. Aussi l'ensemble des sommets pendants de G^* est un $\gamma(G^*)$-ensemble. D'où on a tous les sommets de $V(G^*)$ sont des sommets γ-bons, et donc G^* est un graphe γ-excellent et le graphe G est un sous graphe induit d'un graphe γ-excellent.

Suite à cette remarque, Fricke et al. [54] ont constaté qu'il n'existe pas de caractérisation des graphes γ-excellents en terme de sous graphes induits interdits.

On présente ainsi trois caractérisations des arbres γ-excellents. La première est dûe à Mynhardt [3], et elle est basée sur la détermination des sommets contenus dans tout ou dans aucun γ-ensemble d'un arbre. Alors que les deux autres sont dûes à Fricke et al. [54], l'une est descriptive tandis que l'autre est constructive et qui en fait ne caractérisent pas tous les arbres γ-excellents.

a) Caractérisation basée sur la détermination des sommets appartenant à tout ou à aucun γ-ensemble

La caractérisation des arbres γ-excellents basée sur la détermination des sommets contenus dans tout ou dans aucun γ-ensemble d'un arbre, a été établie par Mynhardt [3]. Dans

[3], Mynhardt a défini l'ensemble des sommets appartenant à tout ou à aucun γ-ensemble d'un arbre T par:

$$\mathcal{A}(T) = \{v \in V(T) \mid v \text{ est dans tout } \gamma(T)\text{-ensemble}\}, \text{ et}$$
$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V(T) \mid v \text{ n'est dans aucun } \gamma(T)\text{-ensemble}\}.$$

La détermination de $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ permet de caractériser les arbres γ-excellents du fait qu'un arbre T est γ-excellent si et seulement si l'ensemble de ses sommets qui n'appartiennent à aucun $\gamma(T)$-ensemble est vide.

Pour commencer, introduisons la notion des arbres enracinés. Dans un arbre T, un *arbre enraciné* en un sommet r, noté T_r, est un arbre pendu en r, où les sommets sont classés par niveaux suivant leur distance par rapport au sommet *racine* r. Dans un arbre T_r, on définit le sommet parent $p(v)$ d'un sommet v comme étant le sommet de niveau plus haut que v et adjacent à v. Le sommet u est un sommet fils de v si $p(u) = v$, un sommet fils n'a qu'un seul parent mais un parent peut avoir plusieurs fils. Un sommet u est descendant de v s'il est situé sur un niveau inférieur à celui de v et il existe une chaîne reliant v et u. On note pour un sommet w d'un arbre enraciné T :

$C(w) = \{u \in V/\ u \text{ est un sommet fils de } w \text{ dans } T_r\}$;

$D(w) = \{u \in V/\ u \text{ est un sommet descendant de } w \text{ dans } T_r\}$;

$D[w] = D(w) \cup \{w\}$ et

$T_w = D[w] \cap T_r$.

Dans un arbre T, on note par $L(T)$ l'ensemble des sommets pendants de T et par $S(T)$ l'ensemble des sommets supports de T. Un sommet branche est un sommet de degré au moins trois. On note par $B(T)$ l'ensemble des sommets branches de T. Une chaîne P dans T est dite une $v - L$ chaîne, si elle joint le sommet v à un sommet pendant de T : On note la longueur de P par $l(P)$ et pour $j = 0, 1$ et 2 : On définit:

$C^j(v) = \{u \in C(v) : T_u \text{ contient une } u - L \text{ chaîne } P \text{ avec } l(P) \equiv j (\bmod 3)\}$.

Pour un arbre enraciné T_v, tel que pour tout $u \in V(T) - \{v\}, \deg_T(u) \leq 2$. Les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ sont caractérisés par le théorème suivant:

Théorème 2.37 (Mynhardt [3]). *Soit T un arbre enraciné en un sommet v tel que $\deg_T(u) \leq 2$ pour tout $u \in V(T) - \{v\}$. Alors*

- *$v \in \mathcal{N}(T)$ si et seulement si $C^0(v) = \emptyset$ et $C^1(v) \neq \emptyset$.*
- *$v \in \mathcal{A}(T)$ si et seulement si $|C^0(v)| \geq 2$.*

Processus d'élagage d'un arbre par rapport à la domination (Mynhardt [3]):

Nous décrivons à présent une technique appelée élagage d'un arbre (en anglais, *tree pruning*) introduite par Mynhardt [3]. Cette technique permet de caractériser les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ pour un arbre T quelconque.

Pour tout sommet u d'un arbre enraciné T, l'ensemble de toutes les $u - L$ chaînes dans T_u est noté $\Pi(u)$. Pour $j = 0, 1, 2$, on définit $\Pi^j(u) = \{P \in \Pi(u) : l(P) \equiv j (\bmod 3)\}$.

Le processus d'élagage de T s'effectue par rapport au sommet racine. Supposons que T est enraciné en un sommet v ($T = T_v$) et soit u le sommet branche à distance maximum de v (notons que $|C(u)| \geq 2$ et $\deg(x) \leq 2$ pour tout $x \in D(u)$).

Pour tout $w \in C(u)$, une priorité est assignée à w ou à la chaîne $P \in \Pi(w)$; où $w^0 \in C^0(u)$ et $P^0 \in \Pi^0(u)$ ont une priorité supérieure à celle de $w^1 \in C^1(u)$ et $P^1 \in \Pi^1(u)$ qui ont encore une priorité supérieure à celle de $w^2 \in C^2(u)$ et $P^2 \in \Pi^2(u)$.

Soit z le fils de u ayant la plus grande priorité. Pour tout $w \in C(u) - \{z\}$, effacer $D[w]$. Cette étape de l'élagage, où tous les fils de u excepté un seul, sont effacés avec leurs descendants pour donner un arbre dans lequel u est de degré 2, est appelé un élagage de T_v en u. Ce processus est répété jusqu'à l'obtention d'un arbre $\overline{T}_v$ dans lequel $\deg(u) \leq 2$ pour tout $u \in V(\overline{T}_v) - \{v\}$: ($\overline{T}_v$ est l'arbre élagué obtenu à partir de T_v). Afin de simplifier les notations, on écrit $\overline{C}^j(v)$ au lieu de $C^j_{\overline{T}_v}(v)$.

Nous énonçons à présent les résultats illustrant l'efficacité du processus d'élagage à savoir que ce processus conserve la propriété d'appartenance ou de non appartenance d'un sommet v de T à un $\gamma(T)$-ensemble.

Théorème 2.38 (Mynhardt [3]). *Soit T un arbre enraciné en un sommet v et soit $\overline{T}_v$ l'arbre élagué obtenu à partir de T. Pour tout γ-ensemble $\overline{X}$ de $\overline{T}_v$, il existe un γ-ensemble*

X de T tel que $v \in X$ si et seulement si $v \in \overline{X}$. Réciproquement, pour tout γ-ensemble X de T, il existe un γ-ensemble $\overline{X}$ de $\overline{T}_v$ tel que $v \in \overline{X}$ si et seulement si $v \in X$.

Corollaire 2.39 (Mynhardt [3])**.** *Pour tout arbre T et tout sommet v de T;*

- *$v \in \mathcal{A}(T)$ si et seulement si $\left|\overline{C}^0(v)\right| \geq 2$, et*
- *$v \in \mathcal{N}(T)$ si et seulement si $\overline{C}^0(v) = \emptyset$ et $\overline{C}^1(v) \neq \emptyset$.*

Ayant caractérisé l'ensemble $\mathcal{N}(T)$ des sommets de T qui n'appartiennent à aucun $\gamma(T)$-ensemble pour tout arbre T, elle déduit le corollaire suivant qui donne une caractérisation des arbres γ-excellents.

Corollaire 2.40 (Mynhardt [3])**.** *Un arbre T est γ-excellent si et seulement si pour tout sommet v de T, $\overline{C}^0(v) \neq \emptyset$ et $\overline{C}^1(v) = \emptyset$.*

b) Caractérisation descriptive

Dans [54], Fricke et al ont donné une caractérisation descriptive des arbres γ-excellents avec $diam(T) \leq 5$. On définit par $\mathcal{F}$ la famille des couronnes d'étoiles et des couronnes des doubles étoiles. Comme la couronne $G \circ K_1$ de tout graphe G est γ-excellente, Fricke et al. [54] ont montré que tous les arbres T qui sont γ-excellents avec $diam(T) \leq 5$ sont des couronnes.

Théorème 2.41 (Fricke et al. [54])**.** *Soit T un arbre non trivial avec $diam(T) \leq 5$, alors T est γ-excellent si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Corollaire 2.42 (Fricke et al. [54])**.** *Soit T un arbre non trivial. Si $T \notin \mathcal{F}$ est un arbre γ-excellent, alors $diam(T) \geq 6$.*

Il convient de mentionner que les couronnes γ-excellentes de diam ≥ 6 ne sont pas les seuls graphes γ-excellents vérifiant cette borne inférieure. Parmi les graphes γ-excellents de diam ≥ 6 on peut citer la chaîne P_7.

c) Construction de quelques arbres γ-excellents

Dans [54], Fricke et al ont "construit" une classe d'arbres γ-excellents, c'est à dire qu'en partant de deux arbres γ-excellents d'ordre au moins 4; et en opérant sur ces deux arbres une "construction" qu'on définira plus loin, ils produisent une famille d'arbres γ-excellents. Cette construction est fondée sur le lemme suivant:

Lemme 2.43 (Fricke et al. [54])**.** *Si T est un arbre γ-excellent d'ordre $n \geq 4$ alors, il existe un $\gamma(T)$-ensemble S tel que S n'est pas un ensemble indépendant dans T.*

Nous définissons à présent la construction des arbres notée $\mathcal{H}$ développée dans [54] obtenue à partir des deux étapes suivantes:

1. Soient T_1 et T_2 deux arbres γ-excellents d'ordre au moins 4 et soient S_1 un $\gamma(T_1)$-ensemble et S_2 un $\gamma(T_2)$-ensemble tels que S_1 (resp. S_2) n'est pas un ensemble indépen-dant de T_1 (resp. de T_2). Soient u un sommet non isolé dans $\langle S_1 \rangle$, le sous graphe induit par S_1 et v un sommet non isolé dans $\langle S \rangle$ le sous graphe induit par S_2.

2. Soit T l'arbre obtenu à partir des deux arbres T_1 et T_2 en reliant le sommet u de S_1 au sommet v de S_2 par l'arête uv alors, il s'ensuit la proposition suivante:

Proposition 2.44 (Fricke et al. [54])**.** *L'arbre obtenu par la construction $\mathcal{H}$ est un arbre γ-excellent.*

2°) **Les arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents**

Le concept de la domination double a été introduit par Harary et Haynes [58]. Un graphe $G = (V, E)$ est dit $\gamma_{\times 2}(G)$-excellent si tout sommet de V est contenu dans un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble. Avant d'énnoncer les résultats relatifs aux arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents, nous donnons quelques résultats intermédiaires concernant la domination double d'une manière générale.

Théorème 2.45 (Harary et Haynes [58])**.** *Tout graphe sans sommets isolés possède un ensemble dominant double et donc un nombre de domination double.*

Remarque 2.46 (Blidia et al [56]). *Dans un graphe tout ensemble dominant double contient tous les sommets support et tous les sommets pendants.*

Théorème 2.47 (Chellali et Haynes [59]). *Soient G un graphe sans sommets isolés et S un ensemble dominant double de G. Alors S est minimal si et seulement si tout sommet v de S satisfait l'une des conditions suivantes:*

1. v est un sommet pendant dans $\langle S \rangle$.

2. v est adjacent à un sommet pendant dans $\langle S \rangle$.

3. Il existe un sommet u dans $V - S$ tel que $N(u) \cap S = \{u, v\}$.

D'autres résultats généraux concernant la domination double peuvent être trouvés dans [58, 59].

Caractérisation basée sur la détermination des sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_{\times 2}$-ensemble

Nous présentons à présent une caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents dûe à Blidia, Chellali et Khelifi [56]. Cette caractérisation est basée sur la détermination de l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun $\gamma_{\times 2}$-ensemble d'un arbre.

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

$$\mathcal{A}_{\times 2}(T) = \{v \in V(T) \mid v \text{ est dans au moins un } \gamma_{\times 2}(T)\text{-ensemble}\}, \text{ et}$$
$$\mathcal{N}_{\times 2}(T) = \{v \in V(T) \mid v \text{ n'est dans aucun } \gamma_{\times 2}(T)\text{-ensemble}\}.$$

Définition 2.48 (Khelifi [60]). *Soient T un arbre enraciné en un sommet v, $P^j(w)$ est l'ensemble des sommets $u \in L(w)$ tels que $d(w, u) \equiv j (\bmod 3)$ et $\deg x = 2$ pour tout sommet intermédiaire x de la chaîne $w - u$ pour $j = 0, 1$ ou 2.*

Définition 2.49 (Blidia et al [56]). *Soit T un arbre enraciné en un sommet v, on définit l'ensemble $W^*(T_v)$ par:*

$$W^*(T_v) = \{w^* \in C(v) \mid |P^2(w^*)| \geq 2 \text{ et } P^0(w^*) \cup P^1(w^*) = \emptyset\}.$$

Théorème 2.50 (Khelifi [60]). *Soit T un arbre enraciné en v tel que* $\deg(u) \leq 2$ *pour tout sommet $u \notin W^*(T) \cup \{v\}$ on a:*

a) $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T)$ si et seulement si au moins une des conditions suivantes est vérifiée

- v est un sommet support dans T,
- v est un sommet pendant dans T,
- $|P^1(v)| \geq 2$,
- $|P^0(v)| \geq 3$,
- $|P^1(v)| = 1$ et $|P^0(v| \in \{1, 2\}$,
- $|P^1(v)| = 1, W^*(T) \neq \emptyset$ et $P^2(v) \cup P^0(v) = \emptyset$,
- $|P^0(v)| = 2$ et $|P^2(v)| \geq 1$,

b) $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T)$ si et seulement si $|P^2(v)| \geq 2$ et $P^1(v) \cup P^0(v) = \emptyset$.

Processus d'élagage d'un arbre par rapport à la domination double (**Blidia et al [56]**)

Pour décrire l'élagage propre à la domination double, supposons que l'arbre T est enraciné en v différent d'un sommet support et différent d'un sommet pendant. Si $\deg(x) \leq 2$ pour tout sommet $u \in (V(T) - W^*(T_v)) - \{v\}$, alors $\overline{T}_v = T_v$. Sinon, soit u un sommet branche à distance maximum de v. Puisque $|C(u)| \geq 2$ et $\deg(x) \leq 2$ pour tout sommet $x \in D(u)$, alors appliquer le processus d'élagage suivant:

Si $|P^1(u)| \geq 1$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 (un sommet) à u.
Si $|P^2(u)| \geq 1$, $|P^0(u)| \geq 1$ et $P^1(u) = \emptyset$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 à u.
Si $|P^2(u)| \geq 2$ et $P^0(u) \cup P^1(u) = \emptyset$, alors
 si $u \in C(v)$, effacer $D(u)$ et attacher deux chaînes P_2 à u,
 si $d(v, u) = 2$ et $p(u) \notin B(T)$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_2 à u,
 si $u \notin C(v)$ et $d(v, u) \neq 2$ ou bien $p(u) \in B(T)$, effacer $D[u]$.
Si $|P^0(u)| \geq 2$ et $P^1(u) \cup P^2(u) = \emptyset$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_3 à u.

Il s'ensuit après avoir détaillé le processus d'élagage propre à la domination double le théorème et le corollaire suivants qui constituent une caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents.

Théorème 2.51 (Blidia et al [56]). *Soit v un sommet d'un arbre T, alors*

1. $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(\overline{T}_v)$.
2. $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(\overline{T}_v)$.

Ayant caractérisé l'ensemble $\mathcal{N}_{\times 2}(T)$ des sommets de T, Khelifi dans [60], déduit le corollaire suivant qui donne la caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents.

Corollaire 2.52 (Khelifi [60]). *Un arbre T est $\gamma_{\times 2}$-excellent si et seulement si pour tout $v \in T$, $|P^2(v)| \leq 1$ ou $P^1(v) \cup P^0(v) \neq \emptyset$ dans l'arbre $\overline{T}_v$.*

D'autres résultats concernant les arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents peuvent être trouvés dans [56, 60].

3°) **Les arbres γ_{pr}-excellents**

Le concept de la domination couplée a été introduit par Haynes et Slater [69]. On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est dit γ_{pr}-excellent si tout sommet de V est contenu dans un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble. Afin de caractériser les arbres γ_{pr}-excellents, nous donnons des résultats et définitions concernant les graphes γ_{pr}-excellents d'une manière générale.

Remarque 2.53 (Khelifi [60], Henning et Plummer [61]). *Si u est un sommet support d'un graphe G, alors u appartient à tout ensemble dominant couplé minimum de G.*

Observation 2.54 (Khelifi [60]). *Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe γ_{pr}-excellent.*

Corollaire 2.55 (Khelifi [60]). *Il n'existe pas de caractérisation des graphes γ_{pr}-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

Caractérisation basée sur la détermination des sommets appartenant à tout ou à aucun γ_{pr}-ensemble

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

Définition 2.56 (Khelifi [60], Henning et Plummer [61]). *On définit les ensembles $\mathcal{A}_{pr}(G)$ et $\mathcal{N}_{pr}(G)$ d'un graphe G par:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{pr}(G) &= \{v \in V \ / \ v \text{ est dans tout } \gamma_{pr}(G)\text{-ensemble}\}, \text{ et} \\ \mathcal{N}_{pr}(G) &= \{v \in V \ / \ v \text{ n'est dans aucun } \gamma_{pr}(G)\text{-ensemble}\}\end{aligned}$$

Définition 2.57 (Khelifi [60], Henning et Plummer [61]). *Soit T un arbre enraciné. Pour tout sommet v de T, on définit l'ensemble:*

$L^j(v) = \{u \in L(v) \ / \ d(u, v) \equiv j (\text{mod}\, 4)\}$ *et ce pour* $j = 0, 1, 2,$ *ou* 3.

L'élagage d'un arbre par rapport à la domination couplée (Khelifi [60], Henning et Plummer [61])

Supposons que l'arbre T est enraciné en un sommet v ($T = T_v$) tel que v est différent d'un sommet support. Si $\deg_T(u) \leq 2$ pour tout sommet $u \in V(T) - \{v\}$, alors $\overline{T}_v = T_v$. Sinon, soit w un sommet branche à distance maximum de v. Notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_T(x) \leq 2$, $\forall\, x \in D(w)$.

Appliquer le processus suivant:

Si $|L^2(v)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_2 à w;
Si $|L^1(v)| \geq 1$ et $L^2(v) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_1 à w;
Si $|L^3(v)| \geq 1$ et $L^1(v) \cup L^2(v) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_3 à w;
Si $L^1(v) \cup L^2(v) \cup L^3(v) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.

Cette étape du processus d'élagage où tous les descendants de w sont effacés et où une chaîne P_1, P_2, P_3 ou P_4 est attachée au sommet w pour donner un arbre dans lequel $\deg(w) = 2$ est appelée un élagage de T en w. On répète ce processus jusqu'à ce qu'un arbre $\overline{T}_v$ avec $\deg_T(x) \leq 2$, $\forall x \in \overline{T}_v - \{v\}$ soit obtenu.

Suite au détail du processus d'élagage propre à la domination couplée, nous donnons le théorème et le corollaire suivants qui constituent une caractérisation des arbres γ_{pr}-excellents.

Théorème 2.58 (Khelifi [60], Henning et Plummer [61])**.** *Soit v un sommet d'un arbre T, alors*

1. $v \in \mathcal{A}_{pr}(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_{pr}(\overline{T}_v)$.

2. $v \in \mathcal{N}_{pr}(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{pr}(\overline{T}_v)$.

Corollaire 2.59 (Khelifi [60])**.** *Un arbre T est γ_{pr}-excellent si et seulement si il n'existe aucun sommet v de T vérifiant $|L^3(v)| = 0$ ou $L^1(v) \cup L^2(v) \neq \emptyset$ dans l'arbre $\overline{T}_v$ obtenu par l'élagage de l'arbre T enraciné en v.*

Mentionnons que la technique d'élagage a été utilisée aussi par Cockayne et al. [55] pour le nombre de domination totale γ_t, et par Blidia et al. [57] pour le nombre de domination localisatrice γ_L.

CHAPITRE 3

NOUVELLE BORNE INFÉRIEURE DU NOMBRE DE k-INDÉPENDANCE DANS LES GRAPHES ET ARBRES EXTRÉMAUX

Dans [1], Blidia et al. ont déterminé une borne inférieure pour le nombre de 2-indépendance dans un graphe en fonction de l'ordre du graphe et du nombre de ses sommets supports. Dans ce qui suit on s'intéresse au cas général à savoir la détermination d'une nouvelle borne inférieure du nombre de k-indépendance dans un graphe en fonction de l'ordre du graphe, du nombre chromatique et du nombre de sommets supports dans ce graphe. Notons que ce résultat (voir Théorème 3.6) généralise celui trouvé pour le nombre de 2-indépendance dans [1]. Aussi on caractérise les arbres extrémaux atteignant cette nouvelle borne pour $k \geq 2$.

Le travail présenté dans ce chapitre a été accepté comme communication au deuxième édition du Symposium ISOR 2011 [62], et a été accepté aussi comme publication dans la revue Discussiones Mathematicae Graph Theory [63].

3.1 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne une nouvelle borne inférieure pour le nombre de la k-indépendance $\beta_k(G)$, en fonction de l'ordre du graphe, du nombre chromatique et du nombre de sommets supports dans ce graphe. Ainsi on caractérise les arbres atteignant cette borne pour $k \geq 2$. Pour cette caractérisation, on se base initialement sur le Lemme 3.1, qui peut être trouvé dans [1].

Lemme 3.1 (Blidia, Chellali, Favaron et Meddah [1])**.** *Soit G'' un graphe. Pour $k \geq 1$, soit w un sommet de G'' tel que chaque voisin de w a un degré au plus k, au moins w ou* *un de ses voisins a un degré au moins k et chaque sommet dans $V(G'')\backslash N[w]$ s'il existe, a un degré inférieur à k dans G''. Soit G' un graphe et G le graphe construit à partir de G' et G'' en reliant par une arête le sommet w à un sommet quelconque de G'. Alors $\beta_k(G) = \beta_k(G') + |V(G'')| - 1$.*

Avant de présenter nos résultats, nous donnons un des résultats classiques concernant le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe G, dû à Brooks [64].

Théorème 3.2 (Brooks [64]). *Pour un graphe G, $\chi(G) \leq \Delta + 1$, avec égalité si et seulement si, $\Delta \neq 2$ et G a le sous graphe $K_{\Delta+1}$ comme composante connexe, ou $\Delta = 2$ et G a un cycle C_{2k+1} comme composante connexe.*

Aussi, nous donnons deux caractérisations constructives, la première est dû à Volkmann (dans [65]), et elle consiste à caractériser les arbres T avec $\beta(T) = \lceil n(T)/2 \rceil$. Pour cela Volkmann a défini les deux familles d'arbres $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ comme suit:

$T \in \mathcal{T}_1$ si et seulement si $T = K_2$ ou T est obtenu à partir de K_2 par une séquence finie de l'opération ci dessous.

$T \in \mathcal{T}_2$ si et seulement si $T = K_1$ ou T est obtenu à partir de K_1 par une séquence finie de l'opération ci dessous.

Opération: Soit w un sommet quelconque d'un arbre T_w et soit v un sommet du graphe complet K_2. Soit T obtenu à partir de $T_w \cup K_2$ en ajoutant l'arête vw.

Théorème 3.3 (Volkmann [65]). *Soit T un arbre d'ordre n.*

1. *Si n est pair, alors $\beta(T) = n/2$ si et seulement si $T \in \mathcal{T}_1$.*

2. *Si n est impair, alors $\beta(T) = (n+1)/2$ si et seulement si $T \in \mathcal{T}_2$.*

La seconde caractérisation est dû à Blidia et al [1], et consiste à caractériser les arbres T avec $\beta_2(T) = (n + s(G))/2$. Cette caractérisation est basée sur le résultat de Théorème 3.4 suivant.

Théorème 3.4 (Blidia, Chellali, Favaron et Meddah [1]). *Soit G un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$ avec $\ell(G)$ sommets pendants et $s(G)$ sommets supports, alors $i_2(G) \leq (n + s(G))/2 \leq \beta_2(G)$, et ces bornes sont atteintes.*

Dans ce théorème, on a montré que si G est un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$ avec $s(G)$ sommets supports, alors $\beta_2(G) \geq (n + s(G))/2$, ensuite on a donné une caractérisation constructive des arbres T tels que $\beta_2(T) = (n + s(T))/2$.

Pour cette caractérisation, on a défini la famille $\mathcal{H}$ des arbres T avec $\beta_2(T) = (n + s(T))/2$, comme étant l'ensemble des arbres qui peuvent être construits à partir de la chaîne P_3 ou P_4 récursivement en utilisant les opérations $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ ci-dessous:

Opération $\mathcal{H}_1$: Ajouter une copie de la chaîne P_3 attachée par une arête entre un sommet de la chaîne P_3 et un sommet r de T_i, avec la condition que si r est un sommet pendant dans T_i, alors son sommet support dans T_i est fort.

Opération $\mathcal{H}_2$: Ajouter une copie de la chaîne P_4 de sommets supports u, v attachée par une arête uz à un sommet z dans T_i, avec la condition que si z est un sommet pendant dans T_i, alors son sommet support dans T_i est fort.

Théorème 3.5 (Blidia, Chellali, Favaron et Meddah [1])**.** *Soit T un arbre non trivial d'ordre n. Alors on a $\beta_2(T) = (n + s(T))/2$ si et seulemnt si $T = P_2$ ou $T \in \mathcal{H}$.*

On définit maintenant quelques chenilles spéciales, qui seront utilisées pour la prochaine caractérisation.

- $G_1(u) = C(t_1, m, t_2)$ où $|L_u| = m, k-2 \leq m \leq k-1$ et $1 \leq t_1, t_2 \leq k-2$.
- $G_2(u) = C(t_1, t_2, k-1)$ où $|L_u| = k-1, 1 \leq t_1 \leq k-2$ et $1 \leq t_2 \leq k-3$.
- $F_1(v) = C(k-1, m, t)$ où $|L_v| = m, 0 \leq m \leq k-1$ et $1 \leq t \leq k-1$.
- $F_2(v) = C(t, k-2, m)$ où $|L_v| = m, 0 \leq m \leq k-1$ et $1 \leq t \leq k-2$.

Notons que ces notations sont spécifiques à ce chapitre.

3.2 Borne inférieure sur β_k

Théorème 3.6 (Meddah et Blidia [63])**.** *Soit G un graphe d'ordre n avec un nombre chromatique $\chi(G)$ et k un entier positif tel que $2 \leq k \leq \Delta(G)$. Alors*

$$\beta_k(G) \geq \left\lceil (n + (\chi(G) - 1) \sum_{v \in S(G)} \min(|L_v|, k-1))/\chi(G) \right\rceil,$$

et cette borne est atteinte.

Preuve. Le résultat peut être facilement vérifié si G est l'union des graphes complets. Supposons maintenant que G est différent de l'union de graphes complets. Soit C l'ensemble des sommets pendants défini comme suit: Pour chaque sommet support v de G on met dans C exactement $\min(|L_v|, k-1)$ de ses sommets pendants. Alors $|C| = \sum_{v\in S(G)} \min(|L_v|, k-1)$. Soient $A_1, A_2, ..., A_{\chi(G)}$ une $\chi(G)$-coloration du sous graphe induit par les sommets de $V(G) \setminus C$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|A_1| \leq |A_2| \leq ... \leq \left|A_{\chi(G)}\right|$. Notons que $\chi(G) = \chi(G[V(G) \setminus C])$. Il est clair que $n-|C| = |A_1| + |A_2| + ... + \left|A_{\chi(G)}\right| \leq \chi(G)\left|A_{\chi(G)}\right|$, et ceci implique que $\left|A_{\chi(G)}\right| \geq (n-|C|)/\chi(G)$. Puisque $A_{\chi(G)} \cup C$ est un k-indépendant, $\beta_k(G) \geq \left|A_{\chi(G)} \cup C\right| \geq (n-|C|)/\chi(G) + |C|$. Il s'ensuit que $\beta_k(G) \geq (n + (\chi(G)-1)|C|)/\chi(G)$, et ainsi on a:

$$\beta_k(G) \geq \left\lceil (n + (\chi(G)-1) \sum_{v\in S(G)} \min(|L_v|, k-1))/\chi(G) \right\rceil .$$

Cette borne est atteinte et ceci peut être vu dans la caractérisation suivante et par les graphes différent des arbres obtenus à partir d'une clique en attachant $k-1$ sommets à chaque sommet de la clique, alors pour un entier $k : 2 \leq k \leq \Delta$, l'égalité est vérifiée dans le cas général. $\square$

Comme conséquences immédiates du Théorème 3.2 et Théorème 3.6, on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 3.7 (Meddah et Blidia [63]). *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Soit k un entier positif tel que $2 \leq k \leq \Delta(G)$, alors on a*

$$\beta_k(G) \geq \left\lceil (n + \Delta(G) \sum_{v\in S(G)} \min(|L_v|, k-1))/(\Delta(G)+1) \right\rceil ,$$

et cette borne est atteinte.

Pour le cas particulier $k = 2$, on a le résultat suivant:

Corollaire 3.8 (Meddah et Blidia [63]). *Soit G un graphe avec le nombre chromatique $\chi(G)$, alors*

$$\beta_2(G) \geq \lceil (n + (\chi(G)-1)s(G))/\chi(G) \rceil ,$$

et cette borne est atteinte.

Le cycle C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$ sont des graphes extrémaux atteignant les bornes des Corollaires 3.7 et 3.8, respectivement.

Corollaire 3.9 (Meddah et Blidia [63])**.** *Soient G un graphe biparti d'ordre n et k un entier positif tel que $2 \leq k \leq \Delta(G)$. Alors on a*

$$\beta_k(G) \geq \left\lceil (n + \sum_{v \in S(G)} \min(|L_v|, k-1))/2 \right\rceil,$$

et cette borne est atteinte.

Les arbres extrémaux atteignant la borne du Corollaire 3.9, représentent l'objectif principal de notre travail.

3.3 Caractérisation des arbres extrémaux

Notons que la différence $\beta_k(T) - \left\lceil (n + \sum_{v \in S(T)} \min(|L_v|, k-1))/2 \right\rceil$ peut être aussi large que l'on veut. En effet si on considère la chenille $T = C(t_1, t_2, ..., t_{2p})$ où $t_i = t > k$ pour tout $i : 1 \leq i \leq 2p$. Il est clair que $\beta_k(T) = 2pt$, $\left\lceil (n + \sum_{v \in S(T)} \min(|L_v|, k-1))/2 \right\rceil = p(t+k)$ et donc $\beta_k(T) - \left\lceil (n + \sum_{v \in S(T)} \min(|L_v|, k-1))/2 \right\rceil = p(t-k)$.

Nous arrivons maintenant à la caractérisation constructive de la famille des arbres T ayant $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{v \in S(T)} \min(|L_v|, k-1))/2 \right\rceil$. On définit la famille $\mathcal{H}(k)$ pour $k \geq 2$ de tous les arbres non triviaux T qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres $T_0, T_1, ..., T_p$ $(p \geq 0)$, où $T_0 = C(t)$ avec $1 \leq t \leq k+1$ pour $k \geq 2$, $T_0 = C(t, k-1)$ ou $T_0 = C(t, k)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ et $k \geq 3$, ou les arbres $G_1(u)$ avec $k \geq 3$ ou $G_2(u)$ avec $k \geq 4$, $T = T_p$, et si $p \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu recursivement à partir de T_i en appliquant l'une des opérations suivantes.

- *Opération* $\mathcal{H}_1(k)$: Ajouter une copie de l'étoile $C(k)$ attachée par une arête entre un sommet quelconque de l'étoile $C(k)$ et un sommet v de T_i, tel que si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_2(k)$: Ajouter une copie de l'étoile $C(k+1)$ centrée en u, attachée par une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_3(k)$: Pour un entier $k \geq 3$, ajouter une copie d'une étoile double $C(t, k-1)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ de sommets supports u_1, u, où $|L_{u_1}| = t$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_4(k)$: Pour un entier $k \geq 3$, ajouter une copie d'une étoile double $C(t, k)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ de sommets supports u_1, u, où $|L_{u_1}| = t$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_5(k)$: Pour un entier $k \geq 3$, ajouter une copie de $G_1(u)$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_6(k)$: Pour un entier $k \geq 4$, ajouter une copie de $G_2(u)$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_7(k)$: Pour un entier $k \geq 3$, ajouter une copie d'une étoile double $C(t, k-1)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ de sommets supports u_1, u, où $|L_{u_1}| = t$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et v est un sommet pendant dans T_i d'un support z satisfaisant $|L_z| \leq k-1$.

- *Opération* $\mathcal{H}_8(k)$: Ajouter une copie de l'étoile $C(k)$ attachée par une arête entre un sommet quelconque de $C(k)$ et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et v est un sommet pendant dans T_i d'un support z satisfaisant $|L_z| \leq k-1$.

- *Opération* $\mathcal{H}_9(k)$: Ajouter une copie d'une étoile double $C(k-1, m)$ avec $1 \leq m \leq k-1$ de sommets supports u_1, u, où $|L_u| = m$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_{10}(k)$: Ajouter une copie d'une étoile double $C(k-1, k)$ de sommets supports u_1, u, avec $|L_u| = k$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_{11}(k)$: Ajouter une copie de $F_1(u)$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_{12}(k)$: Pour un entier $k \geq 3$, ajouter une copie de $F_2(u)$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, tel que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k$.

- *Opération* $\mathcal{H}_{13}(k)$: Ajouter une copie d'une étoile double $C(k-1, m)$ avec $1 \leq m \leq k-1$ de sommets supports u_1, u, où $|L_u| = m$ et une arête entre u et un sommet v de T_i, sachant que $n(T_i) + \sum_{x \in S(T_i)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair et v est un sommet pendant dans T_i d'un support z satisfaisant $|L_z| \leq k-1$.

Lemme 3.10 (Meddah et Blidia [63]). *Si $T \in \mathcal{H}(k)$, alors pour tout entier k avec $2 \leq k \leq \Delta(T)$,*

$$\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)/2 \right\rceil .$$

Preuve. Soit T un arbre de $\mathcal{H}(k)$. On procède par induction sur le nombre des opérations $\mathcal{H}_i(k)$ réalisées pour construire T. La propriété est vraie pour $T_0 = C(t)$ avec $1 \leq t \leq k+1$ pour $k \geq 2$, $T_0 = C(t, k-1)$ ou $T_0 = C(t, k)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ et $k \geq 3$, ou pour les arbres $G_1(u)$ avec $k \geq 3$ ou $G_2(u)$ avec $k \geq 4$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de $\mathcal{H}(k)$ construits avec $j-1 \geq 0$ opérations et soit T un arbre de $\mathcal{H}(k)$ construit avec j opérations. Considérons les cas suivants, selon la dernière opération effectuée pour obtenir T.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_1(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + 1$ et $s(T) = s(T') + 1$ car chaque sommet support dans T' est un sommet support dans T (puisque si v est un sommet pendant dans T_i, alors son support z dans T_i satisfait $|L_z| \geq k \geq 2$). Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 \tag{3.1}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k = \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k.$$

Si $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant $n(T) = n(T') + k + 1$ et la formule (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\ &= \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil \end{aligned}$$

Si $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est impair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + 1$ et la formule (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 1 + 2k)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2 \end{aligned}$$

Puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_2(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + 2$, et $s(T) = s(T') + 1$ car tout sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1. \tag{3.2}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k + 1 = \left\lceil (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + 1.$$

Puisque $n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + 2$ et la formule (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_3(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + t + 1$ avec $1 \leq t \leq k-2$ et $s(T) = s(T') + 2$ car chaque sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 + t \tag{3.3}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k + t = \left\lceil (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + t$$

Si $n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant $n(T) = n(T') + k + t + 1$ et la formule (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2t)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\ &= \left\lceil (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil\end{aligned}$$

Si $n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est impair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + t + 1$ et la formule (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 1 + 2k + 2q)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Puisque $n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_4(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + t + 2$ avec $1 \le t \le k-2$ et $s(T) = s(T') + 2$ car chaque sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 + t. \tag{3.4}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k + t + 1 = \left\lceil (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + t + 1.$$

Puisque $n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + t + 2$ et la formule (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2t + 2)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_5(k)$, alors $n(T) = n(T') + t_1 + t_2 + m + 3$ avec $k-2 \le m \le k-1$ et $1 \le t_1, t_2 \le k-2$. Et $s(T) = s(T') + 3$ car chaque sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + t_1 + t_2 + m \tag{3.5}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + t_1 + t_2 + m + 2\\ &= \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + t_1 + t_2 + m + 2.\end{aligned}$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + t_1 + t_2 + m + 3$ et la formule (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2t_1 + 2t_2 + 2m + 4)/2\\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_6(k)$, alors $n(T) = n(T') + t_1 + t_2 + k + 2$ avec $1 \leq t_1 \leq k-2$ et $1 \leq t_2 \leq k-3$. Et $s(T) = s(T') + 3$ car chaque sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + t_1 + t_2 + k - 1 \tag{3.6}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + t_1 + t_2 + k + 1\\ &= \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + t_1 + t_2 + k + 1.\end{aligned}$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + t_1 + t_2 + k + 2$ et la formule (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2t_1 + 2t_2 + 2k + 2)/2\\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_7(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + t + 1$ avec $1 \leq t \leq k-2$ et $s(T') + 1 \leq s(T) \leq s(T') + 2$ (puisque v est un sommet pendant dans T_i d'un sommet support z satisfait $|L_z| \leq k-1$). Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 + t - 1 \tag{3.7}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k + t = \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + t.$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + t + 1$ et la formule (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2t)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_8(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + 1$ et $s(T') \leq s(T) \leq s(T') + 1$. Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 2 \tag{3.8}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k = \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + 1$ et la formule (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_9(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + m + 1$ avec $1 \leq m \leq k-1$ et $s(T) = s(T') + 2$ car chaque sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 + m \tag{3.9}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k + m = \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + m.$$

Si $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + m + 1$ et la formule (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2m)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\ &= \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil\end{aligned}$$

Si $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est impair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + m + 1$ et la formule (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 1 + 2k + 2m)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_{10}(k)$, alors $n(T) = n(T') + 2k + 1$ et $s(T) = s(T') + 2$ car chaque sommet support de T' est un support de T. Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k - 2 \tag{3.10}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + 2k = \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + 2k$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + 2k + 1$ et la formule (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 4k)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2 \end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_{11}(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + t + m + 2$ avec $0 \le m \le k-1$ et $1 \le t \le k-1$. Et $s(T') + 2 \le s(T) \le s(T') + 3$, ($s(T) = s(T') + 2$ si $m = 0$ et $s(T) = s(T') + 3$ si $m \ge 1$),

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 + t + m \tag{3.11}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\begin{aligned} \beta_k(T) &= \beta_k(T') + k + t + m + 1 \\ &= \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + t + m + 1 \end{aligned}$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + t + m + 2$ et la formule (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2t + 2m + 2)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_{12}(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + t + m + 1$ avec $0 \leq m \leq k-1$ et $1 \leq t \leq k-2$. Et $s(T') + 2 \leq s(T) \leq s(T') + 3$, ($s(T) = s(T') + 2$ si $m = 0$ et $s(T) = s(T') + 3$ si $m \geq 1$),

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 2 + t + m \tag{3.12}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + k + t + m \\ &= \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + t + m\end{aligned}$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + t + m + 1$ et la formule (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2t + 2m)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2\end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $j-1$ opérations est $\mathcal{H}_{13}(k)$, alors $n(T) = n(T') + k + m + 1$ avec $1 \leq m \leq k-1$ et $s(T') + 1 \leq s(T) \leq s(T') + 2$. Donc

$$\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + k - 1 + m - 1 \tag{3.13}$$

D'après le Lemme 3.1 et l'hypothèse d'induction appliquée sur T',

$$\beta_k(T) = \beta_k(T') + k + m = \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + k + m.$$

Puisque $n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors en utilisant le fait que $n(T) = n(T') + k + m + 1$ et la formule (3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_k(T) &= (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2k + 2m)/2 \\ &= (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2 \end{aligned}$$

Et puisque $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1$ est pair, $n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Donc $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$. $\square$

A présent, on donne la caractérisation des arbres qui satisfont l'égalité

$$\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{v \in S(T)} \min(|L_v|, k-1))/2 \right\rceil.$$

Théorème 3.11 (Meddah et Blidia [63]). *Soit T un arbre non trivial. Alors pour tout entier k avec $2 \leq k \leq \Delta(T)$, $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si $T \in \mathcal{H}(k)$.*

Preuve. La condition suffisante est fournie par le Lemme 3.10.

Montrons la condition nécessaire. Pour un entier k avec $2 \leq k \leq \Delta$, soit T un arbre d'ordre n avec $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$. Soit $Y(T)$ l'ensemble des sommets de degré au moins k dans l'arbre T. On procède par induction sur $|Y(T)|$.

Si $|Y(T)| = 0$, alors $\beta_k(T) = n = \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si $n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Car si $n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors $n = \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$, ce qui est impossible. Donc $n = (n+1+\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2$, et ainsi $n-1 = \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$. Si $|S(T)| \geq 2$, alors $n-1 > \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$, et ainsi $|S(T)| = 1 = |\{u\}|$. Donc $n-1 = \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = |L_u|$ avec $|L_u| \leq k-1$ (car on a supposé que $|Y(T)| = 0$). Ceci implique que toutes les étoiles $C(t)$ avec $1 \leq t \leq k-1$ satisfont $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Si $|Y(T)| = 1 = |\{u\}|$, alors $\beta_k(T) = n - 1 = \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$.

Premièrement, on suppose que $n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors on obtient $n = \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 2$. Maintenant, si $|S(T)| = 1$, alors $n = k+1$, et ceci implique que $T = C(k)$ centrée en u, et si $|S(T)| \geq 2$, alors soit $\{u_1, u_2, ..., u_p\} : p \geq 1$, l'ensemble de sommets supports descendants de u avec $1 \leq |L_{u_i}| = t_i \leq k-2$, $1 \leq i \leq p$, $k \geq 3$ et $|L_u| = m \geq 1$. Puisque $d_T(u) \geq k \geq 2$, si $m = 0$, alors $\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) < n-2$, contradiction. Donc $m \geq 1$.

i) Maintenant, si $m \leq k-1$, alors $n = \sum_{i=1}^{p} t_i + m + 2$ ce qui implique que $n = (\sum_{i=1}^{p} t_i + 1) + m + 1$, ainsi $|S(T)| = 2$ et puisque $d_T(u) \geq k$, alors $m \geq k-1$. Donc $m = k-1$ et $T = C(t, k-1)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ et $k \geq 3$.

ii) Si $m \geq k$, alors $n = \sum_{i=1}^{p} t_i + (k-1) + 2$, et ainsi $|S(T)| = 2$. Si $m = k$, alors $n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = 2k + 2t_1 + 1$ est impair, d'où on a une contradiction, et si $m > k$, alors $\beta_k(T) > \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$. Dans les deux cas on a une contradiction.

Deuxièment, on suppose que $n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Alors $\beta_k(T) = n-1 = (n+1+\sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2$, ce qui implique que $n = \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1)+3$. Maintenant si $|S(T)| = 1$, alors $n = k+2$, et ceci implique que $T = C(k+1)$ centrée en u, et si $|S(T)| \geq 2$, alors de même que précédement, soit $\{u_1, u_2, ..., u_p\} : p \geq 1$, l'ensemble des sommets supports descendants de u avec $1 \leq |L_{u_i}| = t_i \leq k-2 : 1 \leq i \leq p$, $k \geq 3$ et $|L_u| = m \geq 1$. Comme $d_T(u) \geq k \geq 2$, si $m = 0$, alors $n = \sum_{i=1}^{p} t_i + 3 = (\sum_{i=1}^{p} t_i + 2) + |\{u\}|$, et donc $|S(T)| = 2$. Donc ou bien $2 = d_T(u) \geq k \geq 2$, et ainsi $k = 2$ et $|L_{u_i}| = t_i \leq 0$ pour $1 \leq i \leq 2$, ou bien $1 = d_T(u) \geq k \geq 2$. Dans les deux cas on a une contradiction. D'où $m \geq 1$.

i) Maintenant, si $m \leq k-1$, alors $n = \sum_{i=1}^{p} t_i + m + 3$. Donc, soit $n = (\sum_{i=1}^{p} t_i + 1) + m + 2$, et ainsi $|S(T)| = 2$ et $p = 1$. Puisque $d_T(u) \geq k$, alors $m = k-1$, et T est obtenu à partir de l'étoile $T = C(t)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$. Ou bien $n = (\sum_{i=1}^{p} t_i + 2) + m + 1$, et ainsi $|S(T)| = 3$ et $p = 2$. Donc, soit $d_T(u) = m + 2 \geq k$, et ainsi $k-2 \leq m \leq k-1$, donc T est la chenille $G_1(u)$ avec $k \geq 3$, ou bien $d_T(u) = m + 1 \geq k$, et ainsi $m = k-1$, donc T est la chenille $G_2(u)$ avec $k \geq 4$.

ii) Si $m \geq k$, alors $n = \sum_{i=1}^{p} t_i + (k-1) + 3 = (\sum_{i=1}^{p} t_i + 1) + k + 1$. Ainsi $|S(T)| = 2$, $p = 1$ et $T = C(t, k)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ pour $k \geq 3$.

Maintenant on suppose que la propriété du Théorème 3.11 est vraie pour tous les arbres avec $|Y(T)| < \lambda$ et $\lambda \geq 2$ et soit T l'arbre d'ordre n ayant $|Y(T)| = \lambda$. Enracinons T en un sommet pendant r d'excentricité maximum. Soit u le sommet de degré au moins k le plus loin possible de r et dont le degré est maximum. Comme $|Y(T)| \geq 2$, u est à distance au moins 2 de r. Soit v, z les sommets parents des sommets u et v dans l'arbre enraciné, respectivement, et w le sommet parent de z (s'il en existe). On distingue les deux cas:

Cas 1. $d_T(u) \geq k+1$. Soient T' et T'' les deux composantes de $T - uv$, contenant v et u, respectivement. Alors $d_{T''}(u) \geq k$ et vu la première condition du choix de u, tous les sommets de $V(T'')\backslash\{u\}$ ont un degré inférieur à k. Par conséquent u vérifie les conditions du sommet ω dans le Lemme 3.1. Puisqu'on a $|Y(T')| < |Y(T)|$, alors on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur T'. De plus $|V(T'')| = n'' \geq k+1$, $n(T') = n' = n - n''$ et donc:

$$\begin{aligned}
\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1 \\
&\geq \left\lceil (n(T') + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + n'' - 1
\end{aligned}$$

Supposons que $|L_u| = m \geq 0$ et que u possède $\{u_1, ..., u_p\}$ {possible vide} comme ensemble des sommets supports descendant de u avec $1 \leq t_i = |L_{u_i}| \leq k-2 : 1 \leq i \leq p$ pour $k \geq 3$. Ainsi $|S(T'' - \{u\})| = p \geq 0$, et donc, $n'' = \sum_{i=1}^{p} t_i + m + p + 1$. Si $p = 0$, alors $\sum_{i=1}^{p} t_i = 0$ et $m \geq k$, ainsi $m - \min(m, k-1) \geq 1$ et $p+ m - \min(m, k-1) - 1 \geq 0$. Et si $p \geq 1$, alors $p + m - \min(m, k-1) - 1 \geq 0$. Donc $p+ m - \min(m, k-1) - 1 \geq 0$. On distingue donc les deux sous cas suivants:

Sous cas 1.1: v n'est pas un sommet pendant ou v est un pendant d'un support z avec $|L_z| \geq k$: Alors

$$\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + \min(m, k-1) + \sum_{i=1}^{p} t_i$$

a°) $n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair : Alors en utilisant $n'' = \sum_{i=0}^{p} t_i + m + p + 1$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1 \\
&\geq (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 + n'' - 1 \\
&= (n' + 2n'' - 2 + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \\
&\geq (p + m - \min(m, k-1) - 1 + n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\
&\geq (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2.
\end{aligned}$$

En effet, si $n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est pair, alors

$$\begin{aligned}
(n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 &= \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil \\
&= \beta_k(T).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité, et ainsi $p + m - \min(m, k-1) - 1 = 0$. Aussi, si $n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1)$ est impair, alors

$$\begin{aligned}
\beta_k(T) &= \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil \\
&\geq (n + 1 + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\
&= \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité, et ainsi $p + m - \min(m, k-1) - 1 = 1$. Finalement, $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si

$\beta_k(T') = \left\lceil (n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ et $0 \leq p + m - \min(m, k-1) - 1 \leq 1$. Donc par hypothèse d'induction sur $T', T' \in \mathcal{H}(k)$, et $0 \leq p \leq 2$.

i) Maintenant, si $m = 0$, alors $1 \leq p \leq 2$. Si $p = 1$, alors $1 = d_T(u) \geq k \geq 2$, ce qui est impossible. Si $p = 2$, alors ou bien $1 = d_T(u) \geq k \geq 2$ et on a une contradiction, ou bien $2 = d_T(u) \geq k \geq 2$, et donc $k = 2$ et les deux sommets supports descendants u_1 et u_2 ont $|L_{u_1}| \leq 0$ et $|L_{u_2}| \leq 0$, respectivement, d'où la contradiction avec $|L_{u_1}|, |L_{u_2}| \geq 1$.

ii) Si $m \geq 1$, alors :

- Si $p = 0$, alors $1 \leq m - \min(m, k-1) \leq 2$. Ce qui implique que $m = k$ ou $m = k+1$, et ainsi $T'' = C(k)$ ou $T'' = C(k+1)$, respectivement, attachée à T' par le sommet support u. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$ ou l'Opération $\mathcal{H}_2(k)$, respectivement. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

- Si $p = 1$, alors $0 \leq m - \min(m, k-1) \leq 1$. Ce qui implique que $m = k-1$ ou $m = k$, et ainsi $T'' = C(t, k-1)$ ou $T'' = C(t, k)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ et $k \geq 3$, respectivement, attachée à T' par le sommet support u. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_3(k)$ ou l'Opération $\mathcal{H}_4(k)$, respectivement. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

- Si $p = 2$, alors $m - \min(m, k-1) = 0$. Ce qui implique que $m \leq k-1$. Alors soit $d_{T''}(u) = m + 2 \geq k$, ainsi $k - 2 \leq m \leq k-1$ ou $d_{T''}(u) = m + 1 \geq k$, donc $m = k-1$. Ainsi $T'' = G_1(u)$ avec $k \geq 3$ ou $T'' = G_2(u)$ avec $k \geq 4$, respectivement, attachée à T' par le sommet support u. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_5(k)$ ou l'Opération $\mathcal{H}_6(k)$, respectivement. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

b°) $n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est impair : Alors

$$\begin{aligned}
\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1 \\
&\geq \left\lceil (n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + n'' - 1 \\
&= (n' + 1 + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2n'' - 2)/2
\end{aligned}$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &\geq (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + p + m - \min(m, k-1))/2 \\ &\geq (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2 \\ &\geq \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).\end{aligned}$$

Donc, $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité, c-à-d si et seulement si $\beta_k(T') = \left\lceil (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ et $p + m - \min(m, k-1) = 1$. Donc par hypothèse d'induction sur $T', T' \in \mathcal{H}(k)$. Aussi $m \geq 1$, car sinon $p = 1$ et on obtient une contradiction.

i) Maintenant, si $m \leq k-1$, alors $m - \min(m, k-1) = 0$ et $p = 1$. Ainsi $m = k-1$ (car $d_{T''}(u) = m+1 \geq k$). Alors $T'' = C(t, k-1)$ avec $1 \leq t \leq k-2$ pour $k \geq 3$ est attaché à T' par le sommet support u. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_3(k)$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

ii) Si $m \geq k$, alors $m - \min(m, k-1) = 1$ et $p = 0$. Ainsi $m = k$, et alors $T'' = C(k)$ est attaché à T' par le sommet support u, donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

Sous cas 1.2 : v est un sommet pendant d'un support z avec $|L_z| \leq k-1$: Alors

$$\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) = \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + \min(m, k-1) + \sum_{i=1}^{p} t_i - 1$$

a°) $n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair : Alors

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1 \\ &\geq (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 + n'' - 1 \\ &= (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 2n'' - 2)/2 \\ &\geq (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + p + m - \min(m, k-1))/2\end{aligned}$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &\geq (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1)+1)/2\\ &\geq \left\lceil (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).\end{aligned}$$

Donc, $\beta_k(T) = \left\lceil (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité. Ainsi si et seulement si $\beta_k(T') = \left\lceil (n'+\sum_{x\in S(T')}\min(|L_x|,k-1))/2 \right\rceil$ et $p+m-\min(m,k-1)=1$. Donc par hypothèse d'induction sur $T', T' \in \mathcal{H}(k)$. Aussi $m \geq 1$. Car sinon $p=1$, et comme les cas précédents, on obtient une contradiction.

i) Si $m \leq k-1$, alors $m-\min(m,k-1)=0$ et $p=1$. Alors $m=k-1$ (car $d_{T''}(u)=m+1\geq k$), et ainsi $T''=C(t,k-1)$ avec $1\leq t\leq k-2$ pour $k\geq 3$ est attaché à T' par le sommet support u. Et donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_7(k)$. Il s'ensuit que $T\in\mathcal{H}(k)$.

ii) Si $m \geq k$, alors $m-\min(m,k-1)=1$ et $p=0$. Alors $m=k$, et ainsi $T''=C(k)$ est attaché à T' par le sommet support u. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_8(k)$. Il s'ensuit que $T\in\mathcal{H}(k)$.

b°) $n'+\sum_{x\in S(T')}\min(|L_x|,k-1)$ est impair : Alors

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T')+n''-1\\ &\geq \left\lceil (n'+\sum_{x\in S(T')}\min(|L_x|,k-1))/2 \right\rceil + n''-1\\ &= (n'+1+\sum_{x\in S(T')}\min(|L_x|,k-1)+2n''-2)/2\\ &\geq (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1)+p+m-\min(m,k-1)+1)/2\\ &\geq (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1)+2)/2\\ &> \left\lceil (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).\end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Cas 2. $d_T(u) = k$. Alors soient T' et T'' les deux composantes de $T - vz$, respectivement, contenant z et v. Alors à partir des deux conditions de choix de u, $d_{T''}(u) = k$, les sommets de $N_{T''}(v)\backslash\{u\}$ ont un degré au plus k et tous les sommets de $V(T'')\backslash N_{T''}[v]$ ont un degré inférieur à k. Par conséquent le sommet v vérifie les conditions du sommet ω du Lemme 3.1. Puisqu'on a $|Y(T')| < |Y(T)|$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur T'. De plus $|V(T'')| = n'' \geq k+1$ et donc

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1\\ &\geq \left\lceil (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + n'' - 1\end{aligned}$$

Supposons que $|L_v| = m \geq 0$, et v possède $u_1, ..., u_p$ comme sommets supports descendant de v, avec $1 \leq |L_{u_i}| \leq k-1$ pour $1 \leq i \leq p$ et $k \geq 2$. Et v possède q sommets descendant de v, qui ne sont ni des sommets pendants ni des sommets supports et différent de v (si $m = 0$). Ainsi $|S(T'' - \{v\})| = p \geq 1, q \geq 0, n(T'') = n'' = \sum_{i=1}^{p} t_i + p + q + m + 1$ et $p + q + m - \min(m, k-1) - 1 \geq 0$.

On distingue de même que précédement, deux sous cas:

Sous cas 2.1: z n'est pas un sommet pendant ou z est un sommet pendant d'un sommet support w avec $|L_w| \geq k$: Alors

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) &= \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + \sum_{i=1}^{p} t_i + \min(m, k-1)\\ &= \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + n'' - p - q - 1 - m + \min(m, k-1)\end{aligned}$$

a°) $n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair. Alors

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1\\ &\geq (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 + n'' - 1\\ &= (p + q + m - \min(m, k-1) - 1 + n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2\\ &\geq (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2\end{aligned}$$

En effet, si $n+\sum\limits_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1)$ est pair, alors

$$\begin{aligned}(n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2 &= \left\lceil (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2\right\rceil \\ &= \beta_k(T).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité précédente, ainsi $p+q+m-\min(m,k-1)-1=0$. Aussi, si $n+\sum\limits_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1)$ est impair, alors

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \left\lceil (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2\right\rceil \\ &\geq (n+1+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2 \\ &= \left\lceil (n+\sum_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2\right\rceil \\ &= \beta_k(T).\end{aligned}$$

Et par conséquent, on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité, ainsi $p+q+m-\min(m,k-1)-1=1$. Finalement, $\beta_k(T)=\left\lceil (n+\sum\limits_{x\in S(T)}\min(|L_x|,k-1))/2\right\rceil$ si et seulement si $\beta_k(T')=\left\lceil (n'+\sum\limits_{x\in S(T')}\min(|L_x|,k-1))/2\right\rceil$ et $0\leq p+q+m-\min(m,k-1)-1\leq 1$. Donc par hypothèse d'induction sur $T', T'\in\mathcal{H}(k)$, et $1\leq p+q\leq 2$.

i) Maintenant, si $m=0$, alors $1\leq p+q\leq 2$ et ainsi :

- Si $p+q=1$, alors $p=1, q=0$. Ainsi $T''=C(k)$ est attaché à T' par le sommet pendant v. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$. Il s'ensuit que $T\in\mathcal{H}(k)$.

- Si $p+q=2$, alors ($p=2$ et $q=0$) car le cas ($p=1$ et $q=1$) est impossible. Ceci implique que, ou bien $d_{T''}(v)=2$, ainsi $T''=F_1(v)$ pour $m=0$, ou bien $d_{T''}(v)=1$, ainsi $T''=F_2(v)$ pour $m=0$, respectivement, et T'' est attaché à T' par le sommet v. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_{11}(k)$, ou l'Opération $\mathcal{H}_{12}(k)$, respectivement. Il s'ensuit que $T\in\mathcal{H}(k)$.

ii) Si $m\geq 1$, alors :

- Si $p+q=1$, alors $p=1, q=0$ et $0 \leq m-\min(m,k-1) \leq 1$. Pour $m-\min(m,k-1)=0$, on a $1 \leq m \leq k-1$. Ainsi $T''=C(k-1,m)$ avec $1 \leq m \leq k-1$. Pour $m-\min(m,k-1)=1$, on a $m=k$, ainsi $T''=C(k-1,k)$. Donc $T''=C(k-1,m)$ avec $1 \leq m \leq k-1$ ou $T''=C(k-1,k)$, respectivement, et T'' est attaché à T' par le sommet support v. Et donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_9(k)$ ou l'Opération $\mathcal{H}_{10}(k)$, respectivement. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

- Si $p+q=2$, alors $m-\min(m,k-1)=0$, ainsi $m \leq k-1$ et ($p=2$ et $q=0$). Ceci implique que, soit $d_{T''}(v)=m+2$, ainsi $T''=F_1(v)$ pour $m>0$ et $k \geq 3$, ou $d_{T''}(v)=m+1$, ainsi $T''=F_2(v)$ pour $m>0$ et $k \geq 3$, respectivement. Donc T'' est attaché à T' par le sommet support v. Et donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_{11}(k)$, ou l'Opération $\mathcal{H}_{12}(k)$, respectivement. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

b°) $n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Alors

$$
\begin{aligned}
\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1 \\
&\geq (n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2 + n'' - 1 \\
&= (p+q+m-\min(m,k-1) + n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\
&\geq (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 1)/2 \\
&\geq \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).
\end{aligned}
$$

Finalement, $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si on a l'égalité le long de cette chaîne d'inégalité. Ainsi, si et seulement si $p+q+m-\min(m,k-1)=1$ et $\beta_k(T') = \left\lceil (n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$. Donc par hypothèse d'induction sur $T', T' \in \mathcal{H}(k)$, et $p=1, q=0$ et puisque $m-\min(m,k-1)=0$, alors $0 \leq m \leq k-1$.

i) Si $m=0$, alors $T''=C(k)$ est attaché à T' par le sommet pendant v. Donc T et obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

ii) Si $1 \leq m \leq k-1$, alors $T'' = C(k-1,m)$ avec $1 \leq m \leq k-1$ est attaché à T' par le sommet support v. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_9(k)$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

Sous cas 2.2: z est un sommet pendant d'un sommet support w avec $|L_w| \leq k-1$: Alors

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1) &= \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + \sum_{i=1}^{p} t_i + \min(m, k-1) - 1 \\ &= \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1) + n'' - p - q - 2 - m + \min(m, k-1)\end{aligned}$$

a°) $n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est pair. Alors

$$\begin{aligned}\beta_k(T) &= \beta_k(T') + n'' - 1 \\ &\geq (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 + n'' - 1 \\ &= (p+q+m-\min(m,k-1)+n+\sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \\ &\geq (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1)+1)/2 \\ &\geq \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).\end{aligned}$$

Finalement, $\beta_k(T) = \left\lceil (n + \sum_{x\in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$ si et seulement si on a l'égalité le long de cette chaîne d'inégalité. Ainsi, si et seulement si $p+q+m-\min(m,k-1) = 1$ et $\beta_k(T') = \left\lceil (n' + \sum_{x\in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$. Donc par hypothèse d'induction sur $T', T' \in \mathcal{H}(k)$, $p = 1, q = 0$ et puisque $m - \min(m, k-1) = 0$, alors $0 \leq m \leq k-1$.

i) Si $m = 0$, alors $T'' = C(k)$ est attaché à T' par le sommet pendant v. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_8(k)$. Il s'ensuitt que $T \in \mathcal{H}(k)$.

ii) Si $1 \leq m \leq k-1$, alors $T'' = C(k-1,m)$ avec $1 \leq m \leq k-1$ est attaché à T' par le sommet support v. Donc T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_{13}(k)$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{H}(k)$.

b°) $n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1)$ est impair. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_k(T) &\geq \left\lceil (n' + \sum_{x \in S(T')} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil + n'' - 1 \\
&= (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + p + q + m - \min(m, k-1) + 1)/2 \\
&\geq (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1) + 2)/2 \\
&> \left\lceil (n + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil = \beta_k(T).
\end{aligned}$$

D'où la contradiction. □

Exemple d'application : Pour illustrer la construction d'un arbre de la famille $\mathcal{H}(k)$ de tous les arbres T tels que $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$, on considère l'arbre T de la Figure 3.1, enraciné en x_1 et d'ordre $n(T) = 5k + t_1 + t_2 + 5$, tel que

$$\begin{aligned}
\beta_k(T) &= \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil \\
&= 5k + t_1 + t_2.
\end{aligned}$$

avec $1 \leq t_1, t_2 \leq k-2$. Soit $Y(T)$ l'ensemble de sommets de degré au moins k dans l'arbre T. Démontrons que cet arbre T appartenant à la famille $\mathcal{H}(k)$.

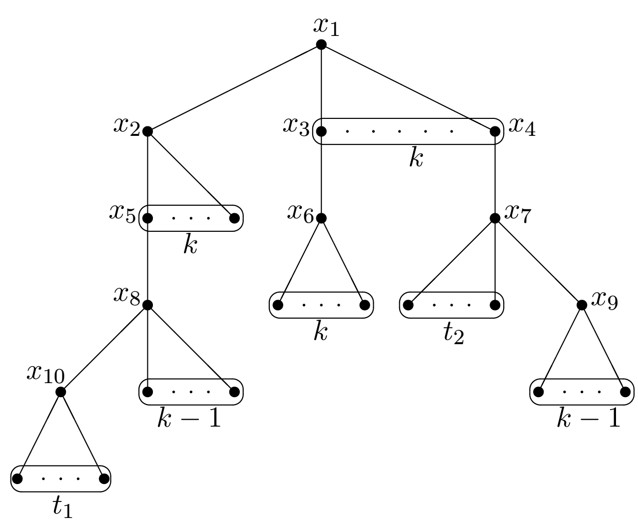


FIGURE 3.1. Un arbre T avec $\beta_k(T) = \left\lceil (n(T) + \sum_{x \in S(T)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$

Notons en premier l'arbre intial T par $T(1)$. Dans cet arbre $T(1)$, on a $|Y(T(1))| = 5$. Il est clair que le sommet x_8 de degré maximum $k+1$ dans $T(1)$ est le plus loin de la racine x_1. D'après le cas 1 du Théorème 3.11, soient $T''(1) := T_{x_8}(1)$ et $T'(1) := T(1) \setminus T''(1)$. Le sommet x_5 parent de x_8 dans l'arbre $T(1)$, est un sommet pendant dans $T'(1)$ d'un support x_2 avec $|L_{x_2}| = k$ et $n(T'(1)) + \sum_{x \in S(T'(1))} \min(|L_x|, k-1) = 8k + 2t_2 - 1$ est impair. Aussi le sommet x_8 vérifie les conditions du sommet ω dans le Lemme 3.1, d'où $\beta_k(T(1)) = \beta_k(T'(1)) + n(T''(1)) - 1$ avec $n(T''(1)) = k + t_1 + 1$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\beta_k(T'(1)) &= \beta_k(T(1)) - n(T''(1)) + 1 \\
&= 4k + t_2 \\
&= \left\lceil (n(T'(1)) + \sum_{x \in S(T'(1))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil .
\end{aligned}$$

Ainsi, l'arbre $T(1)$ de la Figure 3.1 est obtenu à partir de l'arbre $T'(1)$ de la Figure 3.2 en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_3(k)$.

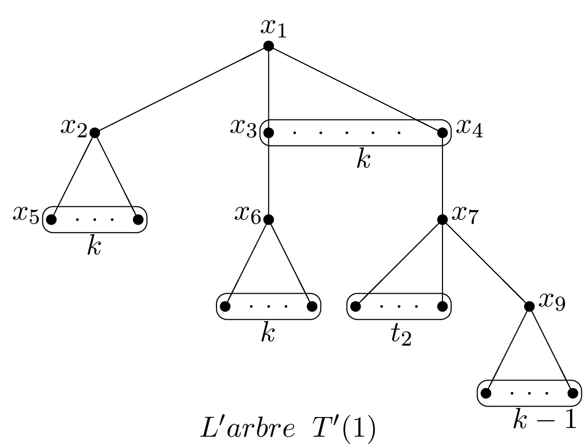


FIGURE 3.2. La première décomposition de l'arbre $T(1)$.

On considère maintenant l'arbre $T'(1)$ de la Figure 3.2 comme étant l'arbre initial de la $2^{ème}$ décomposition de $T(1)$, et on le note par $T(2)$, avec

$$\begin{aligned}
\beta_k(T(2)) &= 4k + t_2 \\
&= \left\lceil (n(T(2)) + \sum_{x \in S(T(2))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil .
\end{aligned}$$

Dans cet arbre $T(2)$, il est clair que le sommet x_9 de degré k est le sommet de degré maximum le plus loin de x_1. D'après le cas 2 du Théorème 3.11, soient $T''(2) := T_{x_7}(2)$

et $T'(2) := T(2) \setminus T''(2)$. Le sommet x_4 parent de x_7, est un sommet pendant dans $T'(2)$ d'un support x_1 avec $|L_{x_1}| = k-1$ et $n(T'(2)) + \sum_{x\in S(T'(2))} \min(|L_x|, k-1) = 6k$ est pair. Aussi le sommet x_7 vérifie les conditions du sommet ω dans le Lemme 3.1, d'où $\beta_k(T(2)) = \beta_k(T'(2)) + n(T''(2)) - 1$ avec $n(T''(2)) = k + t_2 + 1$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}\beta_k(T'(2)) &= \beta_k(T(2)) - n(T''(2)) + 1\\ &= 3k\\ &= \left\lceil (n(T'(2)) + \sum_{x\in S(T'(2))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil.\end{aligned}$$

Ainsi, l'arbre $T(2)$ de la Figure 3.2 est obtenu à partir de l'arbre $T'(2)$ de la Figure 3.3 en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_{13}(k)$.

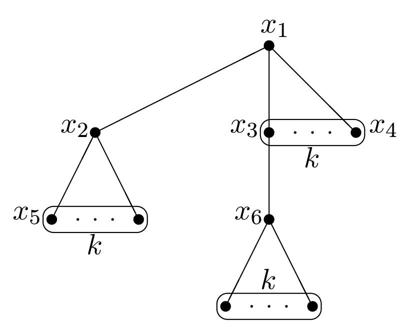


FIGURE 3.3. La deuxième décomposition de l'arbre $T(1)$.

On considère maintenant l'arbre $T'(2)$ de la Figure 3.3 comme étant l'arbre initial de la $3^{ème}$ décomposition de $T(1)$, et on le note par $T(3)$, avec

$$\begin{aligned}\beta_k(T(3)) &= 3k\\ &= \left\lceil (n(T(3)) + \sum_{x\in S(T(3))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil.\end{aligned}$$

Le sommet x_6 de degré $k+1$ dans l'arbre $T(3)$ de la Figure 3.3 est le sommet de degré maximum le plus loin de x_1. De même que précédement et d'après le cas 1 du Théorème 3.11, soient $T''(3) := T_{x_6}(3)$ et $T'(3) := T(3) \setminus T''(3) = C(k,k)$. Le sommet x_3 parent de x_6, est un sommet pendant dans l'arbre $T'(3)$ d'un support x_1 avec $|L_{x_1}| = k$ et $n(T'(3)) + \sum_{x\in S(T'(3))} \min(|L_x|, k-1) = 4k$ est pair. Aussi le sommet x_6 vérifie les conditions du sommet ω dans le Lemme 3.1, d'où $\beta_k(T(3)) = \beta_k(T'(3)) + n(T''(3)) - 1$ avec $n(T''(3)) = k+1$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}\beta_k(T'(3)) &= \beta_k(T(3)) - n(T''(3)) + 1 \\ &= 2k \\ &= \left\lceil (n(T'(3)) + \sum_{x \in S(T'(3))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil.\end{aligned}$$

Ainsi, l'arbre $T(3)$ de la Figure 3.3 est obtenu à partir de l'arbre $T'(3)$ de la Figure 3.4 (a) en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$.

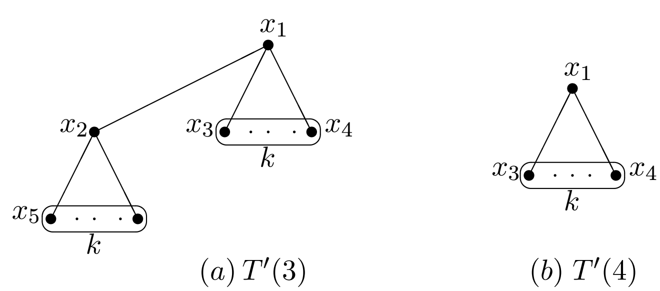


FIGURE 3.4. Les deux dernières décompositions de l'arbre $T(1)$.

Aussi, dans cette étape on considère l'arbre $T'(3)$ de la Figure 3.4 (a) comme étant l'arbre initial de la $4^{ème}$ décomposition de $T(1)$, et on le note par $T(4)$, avec

$$\begin{aligned}\beta_k(T(4)) &= 2k \\ &= \left\lceil (n(T(4)) + \sum_{x \in S(T(4))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil.\end{aligned}$$

Le sommet x_2 de degré $k+1$ dans l'arbre $T(4)$ de la Figure 3.4 (a) est le sommet de degré maximum le plus loin de x_1. De même que précédement, et d'après le cas 1 du Théorème 3.11, soient $T''(4) := T_{x_2}(4)$ et $T'(4) := T(4) \setminus T''(4) = C(k)$ (voir la Figure 3.4 (b)). Le sommet x_1 parent de x_2, n'est pas un sommet pendant dans $T'(4)$ et $n(T'(4)) + \sum_{x \in S(T'(4))} \min(|L_x|, k-1) = 2k$ est pair. Aussi le sommet x_2 vérifie les conditions du sommet ω dans le Lemme 3.1, d'où $\beta_k(T(4)) = \beta_k(T'(4)) + n(T''(4)) - 1$ avec $n(T''(4)) = k+1$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}\beta_k(T'(4)) &= \beta_k(T(4)) - n(T''(4)) + 1\\ &= k\\ &= \left\lceil (n(T'(4)) + \sum_{x\in S(T'(4))} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil.\end{aligned}$$

Ainsi, l'arbre $T(4)$ de la Figure 3.4 (a) est obtenu à partir de l'arbre $T'(4) = C(k)$ de la Figure 3.4 (b) en utilisant l'Opération $\mathcal{H}_1(k)$.

Donc l'arbre initial $T(1)$ est bien obtenu à partir de $T_0 = C(k)$ en utilisant successivement les opérations $\mathcal{H}_1(k), \mathcal{H}_1(k), \mathcal{H}_{13}(k)$ et $\mathcal{H}_3(k)$. Il en résulte que l'arbre $T(1)$ et les arbres $T(2), T(3)$ et $T(4)$ construisant l'arbre $T(1)$, appartenant à la famille $\mathcal{H}(k)$.

CHAPITRE 4

ARBRES AVEC LE NOMBRE DE 2-DOMINATION ÉGAL AU NOMBRE DE 2-INDÉPENDANCE

Dans [2], Favaron a montré que pour tout graphe G et tout entier positif k, G admet un ensemble à la fois k-indépendant et k-dominant, d'où découle le résultat $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$, pour tout entier positif k. Il s'ensuit que si G est un graphe tel que $\beta_k(G) = \gamma_k(G)$, alors G possède un ensemble à la fois $\gamma_k(G)$-ensemble et $\beta_k(G)$-ensemble. Cette propriété sera utilisée pour la démonstration de notre propre résultat. Notons que les arbres T avec $\gamma_1(T) = \beta_1(T)$, sont caractérisés dans [66] par Borowiecki, qui a montré que de tels arbres sont soit le graphe K_1 ou les couronnes d'arbres.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des arbres T tels que le nombre de 2-domination est égal au nombre de 2-indépendance. On note de tels arbres par (γ_2, β_2)-arbres.

Le travail présenté dans ce chapitre a été réalisé en collaboration avec M. Chellali, et a fait l'objet d'une publication dans la revue Discussiones Mathematicae Graph Theory [67].

4.1 Résultats préliminaires

Observation 4.1. *Tout ensemble 2-dominant d'un graphe G contient tout sommet pendant.*

Observation 4.2. *Soient T un arbre non trivial et w un sommet de $V(T)$, alors $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T \setminus \{w\}) + 1$.*

Preuve. Si D est un $\gamma_2(T \setminus \{w\})$-ensemble, alors $D \cup \{w\}$ est un ensemble 2-dominant de T et ainsi $\gamma_2(T) \leq |D| + 1$. □

Observation 4.3. *Soient T un arbre non trivial et v un sommet de T, alors $\beta_2(T \setminus \{v\}) \leq \beta_2(T) \leq \beta_2(T \setminus \{v\}) + 1$.*

Preuve. Puisque tout ensemble 2-indépendant de $T \setminus \{v\}$ est aussi un ensemble 2-indépendant de T, alors $\beta_2(T \setminus \{v\}) \leq \beta_2(T)$. Maintenant si D est un $\beta_2(T)$-ensemble, alors $D \setminus \{v\}$ est un ensemble 2-indépendant de $T \setminus \{v\}$ et donc $\beta_2(T \setminus \{v\}) \geq |D| - 1$. □

Observation 4.4 (Meddah et Chellali [67])**.** *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' et d'une étoile $K_{1,p}$ de centre v en ajoutant l'arête vw à un sommet quelconque w de T'. Alors on a,*

1. *$\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - p$, avec égalité si $p \geq 2$ ou w est un sommet pendant de T'.*
2. *Si $p \geq 2$, alors $\beta_2(T) = \beta_2(T') + p$.*

Preuve.

1. Soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble. Alors d'après l'Observation 4.1, $L_v \subset D$ et, sans perte de généralité, $v \notin D$ (sinon remplacer v par w dans D). Donc T' est 2-dominé par $D \cap V(T')$ et ainsi $\gamma_2(T') \leq |D \cap V(T')| = \gamma_2(T) - p$. Maintenant si $p \geq 2$, alors tout $\gamma_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de T en ajoutant les p sommets pendants de l'étoile $K_{1,p}$, et donc $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + p$. Supposons que $p = 1$ et soit v' l'unique sommet pendant adjacent à v. Si w est un pendant dans T', alors w appartient à tout $\gamma_2(T')$-ensemble D' et $D' \cup \{v'\}$ est un ensemble 2-dominant de T', ce qui implique que $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + 1$. Dans les deux cas on obtient l'égalité.

2. Soit S' un $\beta_2(T')$-ensemble quelconque. Il est clair que $S' \cup L_v$ est un ensemble 2-indépendant de T, ainsi on a $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + |L_v|$. Maintenant parmis tous les $\beta_2(T)$-ensembles, soit S un tel ensemble contenant le nombre maximum de sommets pendants. S'il existe un sommet pendant $v' \in L_v$ tel que $v' \notin S$, alors $v \in S$ (sinon $S \cup \{v'\}$ est un ensemble 2-indépendant de taille plus grande que celle de S), mais dans ce cas $\{v'\} \cup (S \setminus \{v\})$ est un ensemble 2-indépendant de T contenant plus de sommets pendants que S, d'où la une contradiction. Donc $L_v \subset S$, et ainsi $S \setminus L_v$

est un ensemble 2-indépendant de T'. Il s'ensuit que $\beta_2(T') \geq \beta_2(T) - |L_v|$ et donc l'égalité $\beta_2(T) = \beta_2(T') + |L_v|$.

□

Observation 4.5 (Meddah et Chellali [67]). *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' et d'une étoile double $S_{1,p}$ dont les sommets supports sont u et v où $|L_v| = p$ en ajoutant l'arête vw à un sommet w de T'. Alors,*

1. $\beta_2(T) = \beta_2(T') + (p+2)$.

2. $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + (p+2)$, avec égalité si $\beta_2(T) = \gamma_2(T)$.

Preuve.

1. Soient u' l'unique sommet pendant voisin de u et S un $\beta_2(T)$-ensemble contenant le maximum de sommets pendants. Alors comme on a vu dans la démonstration de l'Observation 4.4, $L_v \cup \{u'\} \subset S$. Aussi S contient u ou v, sinon $S \cup \{u\}$ sera un ensemble 2-indépendant de T plus grand que S. Sans perte de généralité, $u \in S$ et ainsi $S \setminus (L_v \cup \{u, u'\})$ est un ensemble 2-indépendant de T'. Donc $\beta_2(T') \geq \beta_2(T) - (|L_v| + 2)$. L'égalité est obtenue par le fait que chaque $\beta_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de T en ajoutant $L_v \cup \{u, u'\}$.

2. Il est clair que si D' est un $\gamma_2(T')$-ensemble, alors $D' \cup L_v \cup \{u', v\}$ est un ensemble 2-dominant de T et ainsi $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + (p+2)$. Supposons maintenant que $\beta_2(T) = \gamma_2(T)$ et que $\gamma_2(T) < \gamma_2(T') + (p+2)$. Alors d'après l'item 1, on a

$$\beta_2(T') + (p+2) = \beta_2(T) = \gamma_2(T) < \gamma_2(T') + (p+2),$$

ce qui implique que $\beta_2(T') < \gamma_2(T')$, d'où on a une contradiction. Par conséquent, si $\beta_2(T) = \gamma_2(T)$, alors $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + (p+2)$.

□

Observation 4.6 (Meddah et Chellali [67]). *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' et une chaîne $P_3 = xyz$ en attachant une arête xw à un sommet w de T'. Alors on a*

1. $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2$.

2. $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + 2$, *avec égalité si* $\beta_2(T) = \gamma_2(T)$.

Preuve.

1. Si D' est un $\beta_2(T')$-ensemble, alors $D' \cup \{y, z\}$ est un ensemble 2-indépendant de T et ainsi $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2$. Maintenant soit D un $\beta_2(T)$-ensemble. Il est clair qu'on a $1 \leq |D \cap \{x, y, z\}| \leq 2$. Si $|D \cap \{x, y, z\}| = 1$, alors, sans perte de généralité $z \in D$, mais $D \cup \{y\}$ est un ensemble 2-indépendant de T plus grand en taille que D, d'où ona une contradiction. donc $|D \cap \{x, y, z\}| = 2$, et ainsi $D \cap V(T')$ est un ensemble 2-indépendant de T', ce qui implique que $\beta_2(T') \geq \beta_2(T) - 2$. Donc $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2$.

2. Si S' est un $\gamma_2(T')$-ensemble, alors $S' \cup \{z, x\}$ est un ensemble 2-dominant de T, et ainsi $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + 2$. Maintenant supposons que T satisfait $\beta_2(T) = \gamma_2(T)$. Si $\gamma_2(T) < \gamma_2(T') + 2$, alors d'après l'item 1, on a $\beta_2(T') + 2 = \beta_2(T) = \gamma_2(T) < \gamma_2(T') + 2$,ce qui implique que $\beta_2(T') < \gamma_2(T')$, d'où on a une contradiction. Par conséquent, si $\beta_2(T) = \gamma_2(T)$, alors $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 2$.

□

4.2 Caractérisation des (γ_2, β_2)-arbres

Nous arrivons à la caractérisation constructive de la famille $\mathcal{O}$ des arbres T tels que $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$. On définit la famille $\mathcal{O}$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenus récursivement à partir d'une séquence T_1, T_2, …, T_k $(k \geq 1)$ d'arbres, où T_1 est l'étoile $K_{1,p}$ $(p \geq 1)$, $T = T_k$, et, si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en utilisant l'une des opérations ci-dessous.

- *Opération* $\mathcal{O}_1$: Ajouter l'étoile $K_{1,p}$, $p \geq 2$, de centre u en attachant u par une arête à un sommet de T_i.

- *Opération* $\mathcal{O}_2$: Ajouter l'étoile double $S_{1,p}$ de sommets supports u et v, où $|L_v| = p$ en attachant v par une arête à un sommet w de T_i sachant que si $\gamma_2(T_i \setminus \{w\}) = \gamma_2(T_i) - 1$, alors aucun voisin de w dans T_i n'appartient à un $\gamma_2(T_i \setminus \{w\})$-ensemble.

- *Opération* $\mathcal{O}_3$: Ajouter une chaîne $P_2 = u'u$ en attachant u par une arête à un sommet pendant v de T_i qui est dans tout $\beta_2(T_i)$-ensemble et qui satisfait la condition $\beta_2(T_i \setminus \{v\}) + 1 = \beta_2(T_i)$.

- *Opération* $\mathcal{O}_4$: Ajouter une chaîne $P_3 = u'uv$ en attachant v par une arête à un sommet w qui est dans un $\gamma_2(T_i)$-ensemble et qui satisfait la condition $\gamma_2(T_i \setminus \{w\}) \leq \gamma_2(T_i)$, sachant que si $\gamma_2(T_i \setminus \{w\}) = \gamma_2(T_i) - 1$, alors aucun voisin de w dans T_i n'appartient à un $\gamma_2(T_i \setminus \{w\})$-ensemble.

On constate le lemme suivant.

Lemme 4.7 (Meddah et Chellali [67]). *Si $T \in \mathcal{O}$, alors $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$.*

Preuve. Soit T un arbre de $\mathcal{O}$. Alors T est obtenu à partir d'une séquence T_1, T_2, ..., T_k $(k \geq 1)$ d'arbres, où T_1 est l'étoile $K_{1,p}$ $(p \geq 1)$, $T = T_k$, et, si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i en utilisant l'une des quatre opérations définies ci-dessus. Par induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire T. Il est clair que la propriété est vraie si $k = 1$. Ceci établit le cas de base.

Supposons maintenant que $k \geq 2$ et que le résultat est vérifié pour tous les arbres $T \in \mathcal{O}$ qui peuvent être construit à partir d'une séquence d'au plus $k - 1$ opérations, et soit $T' = T_{k-1}$. Par hypothèse d'induction, T' est un (γ_2, β_2)-arbre. Soit T un arbre obtenu à partir de T' en utilisant l'une des opérations $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ et $\mathcal{O}_4$. On constate les quatre situations suivantes, en respectant les mêmes notations des opérations pour la construction de la famille $\mathcal{O}$.

Si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{O}_1$, alors d'après l'Observation 4.4, $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + p$ et $\beta_2(T) = \beta_2(T') + p$. Puisque T' est un (γ_2, β_2)-arbre, il s'ensuit que $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{O}_2$, alors d'après l'Observation 4.5, $\beta_2(T) = \beta_2(T') + (p + 2)$ et $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + (p + 2)$. Maintenant supposons que

$\gamma_2(T) < \gamma_2(T') + (p+2)$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble. Alors, sans perte de généralité, D contient $L_v \cup \{v\}$ et D contient aussi l'unique sommet pendant voisin de u. Si $w \in D$, alors $D \cap V(T')$ est un ensemble 2-dominant de T' de cardinalité $\gamma_2(T) - (p+2) < \gamma_2(T')$, ce qui est impossible. Donc $w \notin D$ et soit $D' = D \cap V(T')$ est un ensemble 2-dominant de $T' \setminus \{w\}$. Notons que puisque $w \notin D$ et $v \in D$, D' contient un voisin de w dans T'. Donc $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) \leq |D'| = \gamma_2(T) - (p+2) < \gamma_2(T')$. Il en résulte à partir de l'Observation 4.2 que $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) = \gamma_2(T') - 1$ et D' est un $\gamma_2(T' \setminus \{w\})$-ensemble contenant un voisin de w, d'où on a une contradiction avec la construction. Donc $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + (p+2)$. En utilisant le fait que $\gamma_2(T') = \beta_2(T')$, on obtient $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$, ce qui implique que T est un (γ_2, β_2)-arbre.

Si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{O}_3$, alors d'après l'Observation 4.4, on constate que $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - 1$. Aussi $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 1$ puisque tout $\beta_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de T en ajoutant u'. Maintenant supposons que $\beta_2(T) > \beta_2(T') + 1$ et soit S un $\beta_2(T)$-ensemble. Puisque $\beta_2(T') \geq |S \cap V(T')|$, il en résulte que $u, u' \in S$. Donc $v \notin S$ et $S \cap V(T')$ est un ensemble 2-indépendant de $T' \setminus \{v\}$. Donc $\beta_2(T' \setminus \{v\}) \geq |S \cap V(T')| = \beta_2(T) - 2$. Aussi à partir de la construction v satisfait $\beta_2(T' \setminus \{v\}) + 1 = \beta_2(T')$. Donc

$$\beta_2(T') - 1 = \beta_2(T' \setminus \{v\}) \geq \beta_2(T) - 2 > (\beta_2(T') + 1) - 2,$$

d'où la contradiction. Par conséquent $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 1$, et puisque $\gamma_2(T') = \beta_2(T')$ on obtient $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{O}_4$, alors d'après l'Observation 4.6, $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2$ et $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + 2$. Supposons que $\gamma_2(T) < \gamma_2(T') + 2$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble. Il est clair que $u' \in D$ et $|D \cap \{u', u, v\}| = 2$. Si $u \in D$, alors $v \notin D$ et ainsi $w \in D$. Donc $D \cap V(T')$ est un ensemble 2-dominant de T' de cardinal $|D| - 2 < \gamma_2(T')$, contradiction. Donc $u \notin D$ et ainsi $v \in D$. Si $w \in D$, alors en utilisant le même argument utilisé ci-dessus, on arrive à une contradiction. Donc $w \notin D$ et alors $D \cap V(T')$ est un ensemble 2-dominant de $T' \setminus \{w\}$. Il s'ensuit que $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) \leq |D| - 2 < \gamma_2(T')$ et par l'Observation 4.2, on obtient $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) = \gamma_2(T') - 1$. donc $D \cap V(T')$ est un $\gamma_2(T' \setminus \{w\})$-ensemble. Notons que w est 2-dominé dans T par v et quelques autres sommets, disons

$w' \in V(T')$. Mais alors w' appartient à un $\gamma_2(T' \setminus \{w\})$-ensemble, contradiction avec la construction. Par conséquent, $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 2$ ce qui implique que $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$, et donc T est (γ_2, β_2)-arbre. □

On donne maintenant la caractérisation des (γ_2, β_2)-arbres.

Théorème 4.8 (Meddah et Chellali [67]). *Soit T un arbre d'ordre n. Alors $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$ si et seulement si $T = K_1$ ou $T \in \mathcal{O}$.*

Preuve. Si $T = K_1$, alors $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$. Si $T \in \mathcal{O}$, alors d'après le Lemme 4.7, $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$. Maintenant on montre la nécessité: Il est évident que, $\gamma_2(K_1) = \beta_2(K_1)$. Maintenent supposons que $n \geq 2$. Par induction sur l'ordre n de l'arbre T : Si $n = 2$, alors $T = K_{1,1}$ qui appartient à $\mathcal{O}$. Supposons que tout (γ_2, β_2)-arbre T' d'ordre $2 \leq n' < n$ est dans $\mathcal{O}$ et soit T un (γ_2, β_2)-arbre d'ordre n. Si T est une étoile, alors $T \in \mathcal{O}$. Si T est une étoile double, alors T est obtenu à partir de $T_1 = K_{1,p}$ $(p \geq 1)$ en utilisant l'Opération $\mathcal{O}_1$ si $n \geq 5$, et T est obtenu à partir de $T_1 = K_{1,1}$ en utilisant l'Opération $\mathcal{O}_3$ si $n = 4$. Donc toutes les étoiles et les étoiles doubles sont dans $\mathcal{O}$. Donc on peut supposer que T a un diamètre au moins 4.

Enracinons T en un sommet pendant r de la plus longue chaîne. Parmi tous les sommets à distance $\mathrm{diam}(T) - 1$ de r sur la plus longue chaîne commençant par r, soit u un de degré maximum. Puisque $\mathrm{diam}(T) \geq 4$, soit v, w les sommets parents de u et v, respectivement. Aussi soit D un sous ensemble de sommets de T qui est à la fois $\beta_2(T)$-ensemble et $\gamma_2(T)$-ensemble. Rappelons qu'un tel ensemble existe comme il est mentionné dans l'introduction de ce chapitre (voir [2]). Ainsi on distingue les deux cas suivants:

Cas 1. $\deg_T(u) \geq 3$. Ceci signifie que u est adjacent à au moins deux sommets pendants. Soit $T' = T \setminus T_u$. D'après l'Observation 4.4, $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + |L_u|$ et $\beta_2(T) = \beta_2(T') + |L_u|$. Donc $\gamma_2(T') = \beta_2(T')$. Par induction sur l'ordre de T', $T' \in \mathcal{O}$ et ainsi $T \in \mathcal{O}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{O}_1$.

Cas 2. $\deg_T(u) = 2$. Soit u' l'unique sommet pendant voisin de u. Par notre choix de u, tout fils de v a un degré au plus deux. Premièrement on suppose que tout fils de v différent de u (s'il en existe) est un sommet pendant. Pour contredire l'inverse, on suppose que un fils b de v est un sommet support avec $L_b = \{b'\}$. Alors $u', b' \in D$. Si $v \in D$, alors

$u, b \notin D$ (puisque D est un $\beta_2(T)$-ensemble) mais $\{u, b\} \cup D \setminus \{v\}$ devient un ensemble 2-indépendent de T de taille plus grande que celle de D, contradiction. Donc $v \notin D$ et ainsi $u, b \in D$ mais $\{v\} \cup D \setminus \{u, b\}$ devient un ensemble 2-dominant de T de taille plus petite que celle de D, contradiction. Donc tout fils de v différent de u est un sommet pendant. On considère donc les deux sous cas suivants.

Sous cas 2.1. $\deg_T(v) \geq 3$. Donc v est un sommet support et T_v est une étoile double $S_{1,|L_v|}$. Soit $T' = T \setminus T_v$. Il est clair que T' est non trivial. D'après Observation 4.5, $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + |L_v| + 2$ et $\beta_2(T) = \beta_2(T') + |L_v| + 2$. Il s'ensuit que $\gamma_2(T') = \beta_2(T')$ et par induction sur T', $T' \in \mathcal{O}$. Supposons maintenant que $T' \setminus \{w\}$ admet un $\gamma_2(T' \setminus \{w\})$-ensemble D'' sachant que $|D''| = \gamma_2(T') - 1$ et D'' contient au moins un sommet adjacent à w dans T'. Alors $D'' \cup L_v \cup \{u', v\}$ est un ensemble 2-dominant de T', et ainsi

$$\begin{aligned}\gamma_2(T) &\leq |D'' \cup L_v \cup \{u', v\}| = \gamma_2(T' \setminus \{w\}) + |L_v| + 2 \\ &= \gamma_2(T') - 1 + |L_v| + 2 < \gamma_2(T') + |L_v| + 2,\end{aligned}$$

contradiction. Donc chaque cas peut ne pas être apparu et ainsi T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{O}_2$. Donc $T \in \mathcal{O}$.

Sous cas 2.2. $\deg_T(v) = 2$. Il est clair que $u' \in D$. Trois possibilités peuvent être apparu ($u \notin D$ et $v, w \in D$), ($u, w \notin D$ et $v \in D$) et ($u, w \in D$ et $v \notin D$). On observe que si la première situation apparue, alors $\{u\} \cup D \setminus \{v\}$ est à la fois $\beta_2(T)$-ensemble et $\gamma_2(T)$-ensemble. Donc on considère uniquement les deux dernières situations.

Supposons que $u, w \notin D$ et $v \in D$ et soit $T' = T \setminus \{u, u'\}$. D'après l'Observation 4.4, $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - 1$. De même il est clair que $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 1$. Si $\beta_2(T) > \beta_2(T') + 1$, alors $\gamma_2(T') + 1 = \gamma_2(T) = \beta_2(T) > \beta_2(T') + 1$, ce qui implique que $\gamma_2(T') > \beta_2(T')$, contradiction. Donc $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 1$ et ainsi $\gamma_2(T') = \beta_2(T')$. Par induction sur T', $T' \in \mathcal{O}$. Notons que v appartient à tout $\beta_2(T')$-ensemble, sinon, si S' est un $\beta_2(T')$-ensemble sachant que $v \notin S'$, alors $S' \cup \{u, u'\}$ doit être un ensemble 2-indépendant de T plus grand que D, contradiction. D'autre part et d'après l'Observation 4.3, $\beta_2(T' \setminus \{v\}) \leq \beta_2(T') \leq \beta_2(T' \setminus \{v\}) + 1$. Il est clair que si $\beta_2(T' \setminus \{v\}) = \beta_2(T')$, alors tout $\beta_2(T' \setminus \{v\})$-ensemble est aussi un $\beta_2(T')$-ensemble mais ne contenant pas v, contradiction avec le fait que v appartient à tout $\beta_2(T')$-ensemble. Donc v satisfait $\beta_2(T') = \beta_2(T' \setminus \{v\}) + 1$. Il en résulte que $T \in \mathcal{O}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{O}_3$.

Finalement, on suppose que $u, w \in D$ et $v \notin D$. Soit $T' = T \setminus \{v, u, u'\}$. Alors d'après l'Observation 4.6, $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2$ et $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 2$. Notons que $D \cap V(T')$ est un $\gamma_2(T')$-ensemble, qui contient w. De même d'après l'Observation 4.2, $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) \geq \gamma_2(T') - 1$. Supposons que $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) > \gamma_2(T')$. Alors utilisant le fait que $\beta_2(T) \geq \beta_2(T' \setminus \{w\}) + 2$, il s'ensuit que

$$\beta_2(T) \geq \beta_2(T' \setminus \{w\}) + 2 \geq \gamma_2(T' \setminus \{w\}) + 2 > \gamma_2(T') + 2 = \gamma_2(T),$$

et ainsi $\beta_2(T) > \gamma_2(T)$, contradiction. Donc $\gamma_2(T') \geq \gamma_2(T' \setminus \{w\}) \geq \gamma_2(T') - 1$. Maintenant on note que si $\gamma_2(T' \setminus \{w\}) = \gamma_2(T') - 1$, alors aucun voisin de w dans T' appartient à un $\gamma_2(T' \setminus \{w\})$-ensemble, sinon un tel ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de T en ajoutant u', v ce qui conduit à $\beta_2(T) > \gamma_2(T)$. Sous ces conditions il est clair que T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{O}_4$ et puisque $T' \in \mathcal{O}$ il en résulte immédiatement que $T \in \mathcal{O}$. $\square$

Exemple d'application: Pour illustrer la construction de la famille $\mathcal{O}$, on considère l'arbre $T := T_{x_1}$ de la Figure 4.1, tel que $\gamma_2(T) = \beta_2(T) = p_1 + p_2 + 7$. Soit D un sous ensemble de sommets de T qui est à la fois $\beta_2(T)$-ensemble et $\gamma_2(T)$-ensemble (les sommets représentés en noir). Démontrons que cet arbre appartenant à la famille $\mathcal{O}$.

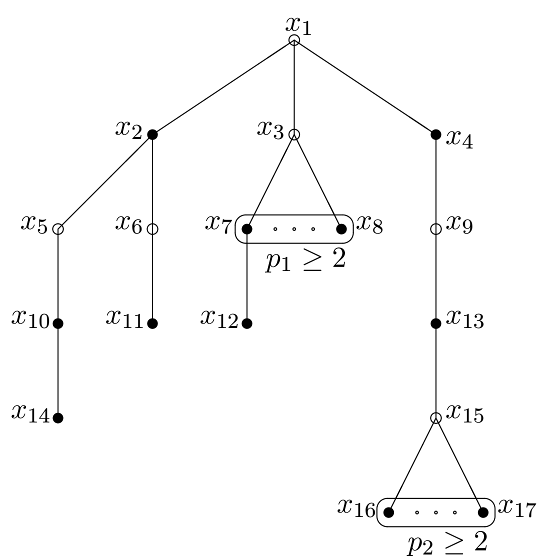


FIGURE 4.1. Un arbre T avec $\gamma_2(T) = \beta_2(T)$

En premier, le sommet x_{15} de degré $p_2+1 \geq 3$ est le sommet le plus loin de la racine x_1. Puisque $d_T(x_{15}) \geq 3$, alors soit $T_1 := T \setminus T_{x_{15}}$ (voir la Figure 4.2). D'après l'Observation 4.4, $\gamma_2(T) = \gamma_2(T_1) + p_2$ et $\beta_2(T) = \beta_2(T_1) + p_2$. Donc $\gamma_2(T_1) = \beta_2(T_1)$. Notons que l'ensemble $D_1 = D \cap V(T_1)$ est à la fois un $\gamma_2(T_1)$-ensemble et un $\beta_2(T_1)$-ensemble. Il en résult que l'arbre T est obtenu à partir de T_1 en utilisant l'opération $\mathcal{O}_1$.

On considère maintenant l'arbre T_1 avec $\gamma_2(T_1) = \beta_2(T_1) = p_1 + 7$. Il est clair que le sommet x_{10} de degré 2 est le sommet à distance maximum de x_1. Soient x_5, x_2 les sommets parents de x_{10} et x_5, respectivement avec $d_T(x_5) = 2$. Puisque $x_{10}, x_2 \in D_1$ et $x_5 \notin D_1$, alors, soit $T_2 := T_1 \setminus T_{x_5}$ (voir la Figure 4.2). Ainsi, d'après l'Observation 4.6, $\beta_2(T_1) = \beta_2(T_2) + 2$ et $\gamma_2(T_1) = \gamma_2(T_2) + 2$, d'où $\gamma_2(T_2) = \beta_2(T_2)$. Notons que $D_2 = D_1 \cap V(T_2)$ est un $\gamma_2(T_2)$-ensemble, qui contient x_2 et que

$$p_1 + 6 = \gamma_2(T_2 \setminus \{x_1\}) > \gamma_2(T_2) - 1 = p_1 + 4$$

Donc l'arbre T_1 est obtenu à partir de T_2 en utilisant l'opération $\mathcal{O}_4$.

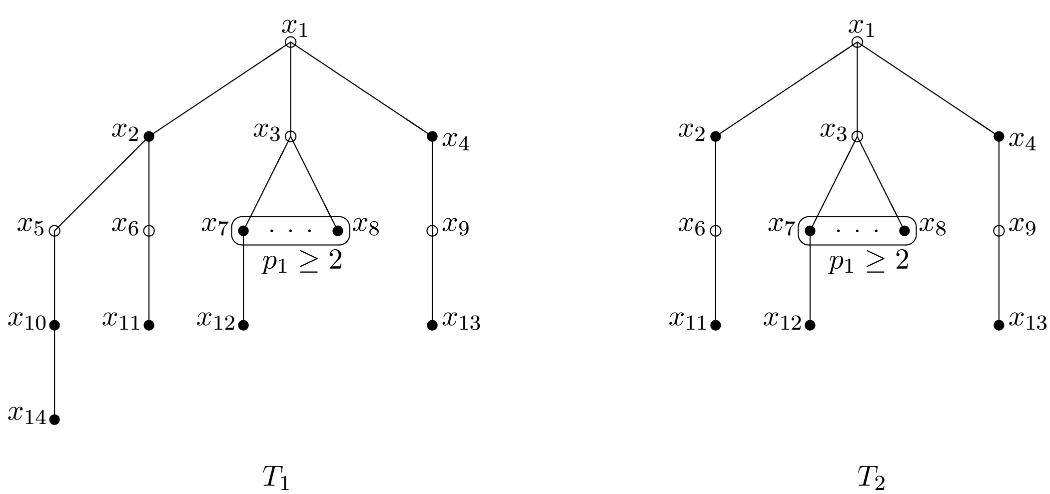


FIGURE 4.2. La première et la deuxième décomposition de l'arbre T

On considère maintenant l'arbre T_2 avec $\gamma_2(T_2) = \beta_2(T_2) = p_1 + 5$. Les sommets x_6, x_7 et x_9 sont les sommets à distance maximum de x_1. Choisissons en premier le sommet x_6. Soient x_2, x_1 les sommets parents de x_6 et x_2, respectivement avec $d_T(x_2) = 2$. Puisque $x_6, x_1 \notin D_2$ et $x_2 \in D_2$, alors, soit $T_3 := T_2 \setminus T_{x_6}$ (voir la Figure 4.3). Ainsi, d'après l'Observation 4.4. De même $\beta_2(T_2) = \beta_2(T_3) + 1$ et $\gamma_2(T_2) = \gamma_2(T_3) + 1$, d'où $\gamma_2(T_3) =$

$\beta_2(T_3)$. Notons que $D_3 = D_2 \cap V(T_3)$ est à la fois un $\gamma_2(T_3)$-ensemble et un $\beta_2(T_3)$-ensemble et que x_2 est dans tout $\beta_2(T_3)$-ensemble. Donc x_2 satisfait la condition $\beta_2(T_3) = \gamma_2(T_3 \setminus \{x_2\}) + 1$. Il s'ensuit que l'arbre T_2 est obtenu à partir de T_3 en utilisant l'opération $\mathcal{O}_3$.

On procède de la même façon, en considérant l'arbre T_3 avec $\gamma_2(T_3) = \beta_2(T_3) = p_1 + 4$. Considérons le sommet x_9 à distance maximum de x_1. Soient x_4, x_1 les sommets parents de x_9 et x_4, respectivement avec $d_T(x_4) = 2$. Puisque $x_9, x_1 \notin D_3$ et $x_4 \in D_3$, alors, soit $T_4 := T_3 \setminus T_{x_9}$ (voir la Figure 4.3). De même que précédement on aura $\gamma_2(T_4) = \beta_2(T_4)$. Notons que $D_4 = D_3 \cap V(T_4)$ est à la fois un $\gamma_2(T_4)$-ensemble et un $\beta_2(T_4)$-ensemble et que x_4 est dans tout $\beta_2(T_4)$-ensemble. Donc x_4 satisfait la condition $\beta_2(T_4) = \gamma_2(T_4 \setminus \{x_4\}) + 1$. Il s'ensuit que l'arbre T_3 est obtenu à partir de T_4 en utilisant l'opération $\mathcal{O}_3$.

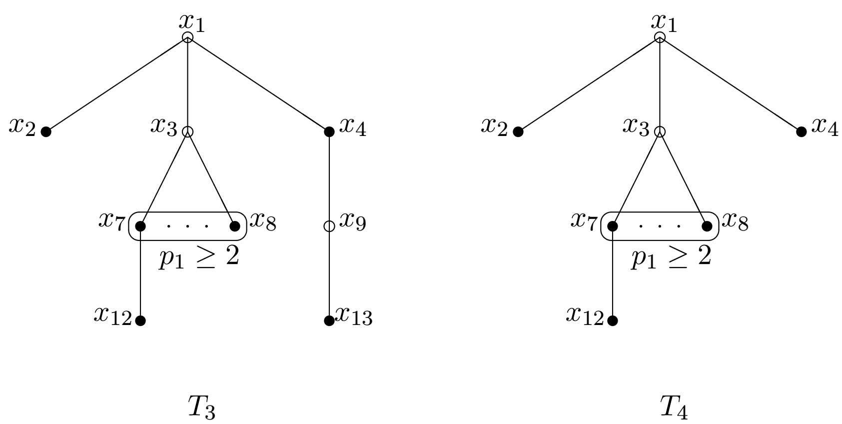


FIGURE 4.3. La troisième et la quatrième décomposition de l'arbre T

Dans l'arbre T_4, le sommet x_7 de degré 2 est à distance maximum de x_1. Comme $d_{T_4}(x_3) \geq 3$, alors soit $T_5 := T_4 \setminus T_{x_3} = K_{1,2}$. D'après l'Observation 4.5, $\gamma_2(T_4) = \gamma_2(T_5) + p_1 + 1 = p_1 + 3$ et $\beta_2(T_4) = \beta_2(T_5) + p_1 + 1 = p_1 + 3$. Il s'ensuit que $\gamma_2(T_5) = \beta_2(T_5)$. Il est facile de vérifier que $D_5 = D_4 \cap V(T_5) = \{x_2, x_4\}$ est à la fois un $\gamma_2(T_5)$-ensemble et un $\beta_2(T_5)$-ensemble et que $2 = \gamma_2(T_5 \setminus \{x_1\}) > \gamma_2(T_5) - 1 = 1$. Alors, l'arbre T_4 est obtenu à partir de l'arbre T_5 en utilisant l'opération $\mathcal{O}_2$.

Notons que l'arbre $T_5 = K_{1,2}$ est un arbre de base de la famille $\mathcal{O}$. Donc l'arbre T est obtenu à partir de la séquence d'arbres T_5, T_4, T_3, T_2 et T_1 en appliquant successivement les opérations $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ et $\mathcal{O}_1$. D'où $T \in \mathcal{O}$.

CHAPITRE 5

SOMMETS DANS TOUT OU DANS AUCUN γ_k-ENSEMBLE DANS UN ARBRE ET ARBRES SPÉCIAUX

La technique d'élagage d'un arbre (*tree pruning*) introduite par Mynhardt [3] pour le nombre de domination, a été la motivation de beaucoup de travaux et a permis de réaliser beaucoup de résultats dans le domaine de la domination dans les graphes. En effet, cette technique a été utilisée par Cockayne et al. [55] pour le nombre de domination totale γ_t, et par Blidia et al. [56, 57] pour le nombre de domination double et le nombre de domination localisatrice $\gamma_{\times 2}$ et γ_L, respectivement. Dans ce chapitre en utilisant la technique d'élagage des arbres, nous caractérisons les sommets appartenant à tout et les sommets n'appartenant à aucun ensemble k-dominant minimum dans les arbres. Cette caractérisation nous permet de reconnaître les arbres γ_k-excellents, γ_k-recommandables, γ_k-indésirables et γ_k-exactes. Aussi elle nous permet de reconnaître les arbres qui admettent un γ_k-ensemble unique.

Le contenu de ce chapitre a été réalisé en collaboration avec M. Blidia, et a été accepté comme publication dans la revue AKCE [68].

5.1 Définitions et résultats préliminaires

Afin de faciliter la représentation, nous définissons les ensembles $\mathcal{A}_k(T), \mathcal{N}_k(T)$ et $L^j(v)$ par:

$$\mathcal{A}_k(T) = \{v \in V(T) \mid v \text{ est dans tout } \gamma_k(T)\text{-ensemble}\},$$

$$\mathcal{N}_k(T) = \{v \in V(T) \mid v \text{ n'est dans aucun } \gamma_k(T)\text{-ensemble}\}, \text{ et}$$

$$L^j(v) = \{x \in C(v) \mid \deg_T(x) = j\}.$$

Pour un entier $k \geq 2$, on définit les arbres suivants. Un arbre non trivial T est appelé un $\mathcal{H}_{k-1}$-arbre si T a un sommet w tel que $d_T(w) \geq k-1$, et $d_T(x) \leq k-1$ pour tout sommet $x \in V(T) \setminus \{w\}$. Le sommet w est appelé sommet spécial de T. Un $\mathcal{H}_{k-1}$-arbre de sommet spécial w est appelé *exact* si $d_T(w) = k-1$. Notons que l'étoile du centre de degré au moins $k-1$ est un exemple d'un $\mathcal{H}_{k-1}$-arbre.

Pour un entier $k \geq 2$, un sommet de degré au moins $k+1$ est dit sommet $(k-1)$-branche. Aussi on note par $B^k(T)$ l'ensemble de tous les sommets $(k-1)$-branches de T.

Commme on a vu dans la section 2 du Chapitre 2, et d'après Fricke [54], un sommet v d'un arbre T est appelé γ_k-bon (resp. γ_k-mauvais), s'il appartient (resp. n'appartient) à au moins un $\gamma_k(T)$-ensemble (resp. à aucun $\gamma_k(T)$-ensemble). On note par $b_k(T) = |\mathcal{N}_k(T)|$ le nombre de sommets γ_k-mauvais, et par $g_k(T) = |V(T)| - |\mathcal{N}_k(T)|$ le nombre de sommets γ_k-bon dans T.

Observation 5.1. *Pour un graphe G, un ensemble k-dominant contient tous les sommets de degré infèrieur à k.*

Lemme 5.2 (Meddah et Blidia [68])**.** *Soit $k \geq 2$ un entier et u un sommet d'un arbre T' de degré au plus $k-1$. Soit T un arbre obtenu à partir de T' et un $\mathcal{H}_{k-1}$–arbre exacte H de sommet spécial w en ajoutant l'arête uw. Alors*

1. $\gamma_k(T) = \gamma_k(T') + |V(H)| - 1$;
2. *Pour tout sommet $v \neq u$ de T', $v \in \mathcal{A}_k(T')$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_k(T)$;*
3. *Pour tout sommet $v \neq u$ de T', $v \in \mathcal{N}_k(T')$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_k(T)$.*

Preuve. Supposons que l'arbre T est obtenu à partir de T' et un $\mathcal{H}_{k-1}$-arbre exacte H de sommet spécial w en ajoutant l'arête uw. D'après l'Observation 5.1, u (resp. $V(H) \setminus \{w\}$) est dans $\mathcal{A}_k(T')$ (resp. est dans $\mathcal{A}_k(T)$).

1. Soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Alors d'après l'Observation 5.1, D contient $V(H) \setminus \{w\}$, et sans perte de généralité, on peut supposer que $w \notin D$ (sinon remplacer w par

u), ainsi $u \in D$. Donc $D \cap V(T')$ est un ensemble k-dominant de T', et ainsi $\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - |V(H)| + 1$. Maintenant, soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. Puisque $\deg_{T'}(u) \leq k-1$, $u \in D'$ et $D' \cup (V(H) \setminus \{w\})$ est un ensemble k-dominant de T. Donc $\gamma_k(T) \leq \gamma_k(T') + |V(H)| - 1$ et on a l'égalité.

2. Supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Il est clair d'après l'item 1 que, $D' = D \cap T'$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |V(H)| + 1$, et puisque $v \notin V(H) \setminus \{w\}$, alors $v \in D' \subset D$. Donc $v \in \mathcal{A}_k(T)$.

   Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T)$, et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. D'après l'item 1, $D = D' \cup (V(H) \setminus \{w\})$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble de taille $\gamma_k(T') + |V(H)| - 1$. De même, puisque $v \in D \setminus V(H)$, alors $v \in D'$ et donc $v \in \mathcal{A}_k(T')$.

3. Supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. D'après l'item 1, $D' = D \cap T'$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |V(H)| + 1$, et puisque $v \notin V(H) \setminus \{w\}$, alors $v \notin D' \subset D$. Donc $v \in \mathcal{N}_k(T)$.

   Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T)$, et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. D'après l'item 1, $D = D' \cup (V(H) \setminus \{w\})$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble de taille $\gamma_k(T') + |V(H)| - 1$. De même, puisque $v \notin D \setminus V(H)$, alors $v \notin D'$ et donc $v \in \mathcal{N}_k(T')$.

$\square$

5.2 Processus d'élagage par rapport à la k-domination

Pour la caractérisation des sommets appartenant aux ensembles $\mathcal{A}_k(T)$ et $\mathcal{N}_k(T)$ d'un arbre non trivial T, on va utiliser la technique d'élagage d'arbre introduite par Mynhardt [3]. Soit v un sommet d'un arbre non trivial T_v avec un degré au moins $k \geq 2$. Utilisant le processus décrit ci-dessous, sur tout sommet $(k-1)$-branche différent de v, l'arbre T_v est transformé en un autre arbre $\overline{T}_v$, appelé l'élagage de l'arbre T_v, dans lequel tout sommet différent de v a un degré au plus k et tous les sommets de degré k sont dans $C(v)$. On montre que les propriétés du sommet v d'être dans $\mathcal{A}_k(T)$ ou $\mathcal{N}_k(T)$ sont préservées dans $\overline{T}_v$.

Nous décrivons maintenant le processus d'élagage par rapport à la k-domination. Soit T_v un arbre non trivial enraciné en v. Si $d_{T_v}(u) \leq k$ pour tout $u \in D(v)$, alors d'après le Lemme 5.2, on peut supprimer consécutivement tous les $\mathcal{H}_{k-1}$–arbres exactes attachés aux sommets descendants de v, de degré k et à distance au moins 2 de v, et en plus à distance maximum de v. Donc et après cette transformation on obtient l'arbre $\overline{T}_v$. Sinon, soit $u \neq v$ un sommet $(k-1)$–branche à distance maximum de v et $w = p(u)$ le parent de u dans T_v. Puisque $d_{T_v}(x) \leq k$ pour tout $x \in D(u)$, alors on applique sur T_u le même processus décrit auparavant sur T_v, en utilisant le Lemme 5.2. Ainsi, et sans perte de généralité, dans le sous arbre T_u, tous les sommets de degré k sont dans $C(u)$. Puisque $|L^k(u)| + \sum_{j=1}^{k-1} |L^j(u)| \geq k$, alors :

- Si $\left|L^k(u)\right| \geq 1$, alors supprimer $D(u)$.
- Si $\left|L^k(u)\right| = 0$, alors on distingue entre deux situations :

  a) Si $w \notin B^k(T)$, alors supprimer $D(u)$ et attacher $(k-1)$ sommets adjacents à u.

  b) Si $w \in B^k(T)$, alors supprimer $D[u]$.

On repète ce processus jusqu'à obtenir un arbre $\overline{T}_v$ tels que $d_{\overline{T}_v}(u) \leq k$ pour tout $u \in V(\overline{T}_v) \setminus \{v\}$ et tous les sommets de degré k sont dans $C(v)$.

Pour illustrer ce processus pour un entier donné, disant $k = 3$, on considère l'arbre de la Figure 5.1, dont les sommets x, y, z et w sont des sommets 2-branches de T.

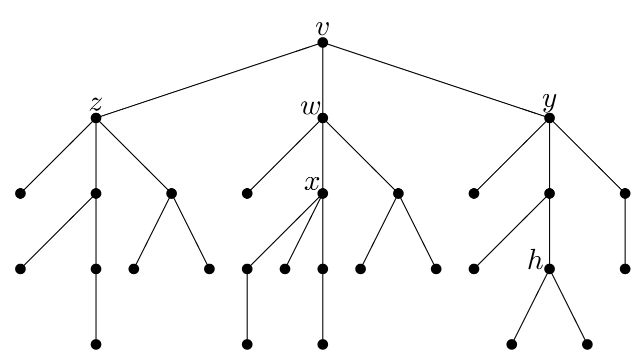


FIGURE 5.1. Un arbre T_v

Premièrement, x est le sommet 2-branche à distance maximum 2 de v, et puisque tout sommet de $D(x) \setminus C(x)$ a un degré inférieur à 3, on n'applique pas le Lemme 5.2. De même, puisque $|L^3(x)| = 0$ et le parent w de x est dans $B^3(T)$, on supprime $D[x]$ (Figure 5.2).

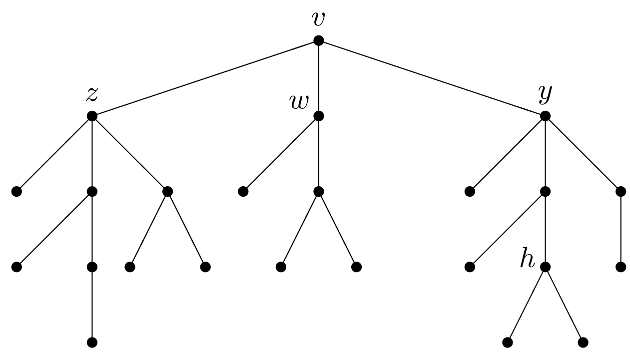


FIGURE 5.2. La première étape de l'élagage de T_v

Maintenant il reste deux sommets 2-branches, y et z à distance maximum 1 de v. On considère en premier le sommet y. Puisque il existe un sommet h descendant de y de degré 3 n'appartient pas à $C(y)$, on applique le Lemme 5.2 avec $H = T_h$, ainsi on supprime $D[h]$ (Figure 5.3).

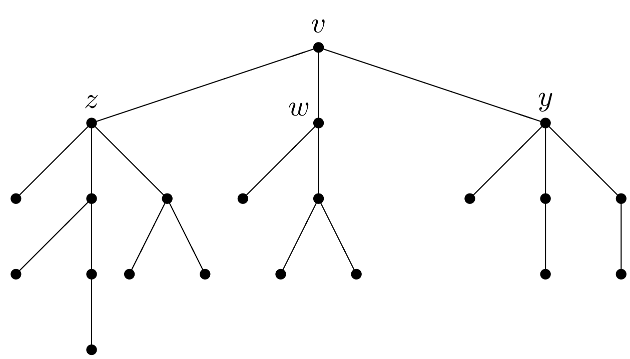


FIGURE 5.3. La deuxième étape de l'élagage de T_v

Donc on obtient $|L^3(y)| = 0$ et le sommet v parent de y n'est pas dans $B^3(T)$, ainsi on supprime $D(y)$ et on attache deux sommets à y (Figure 5.4).

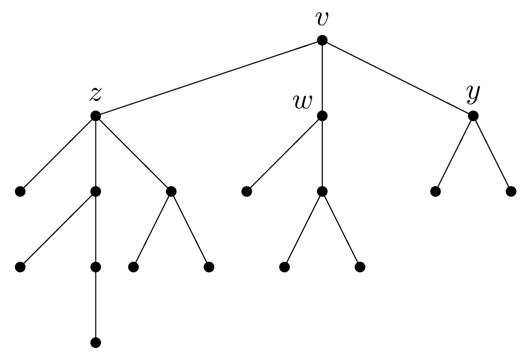
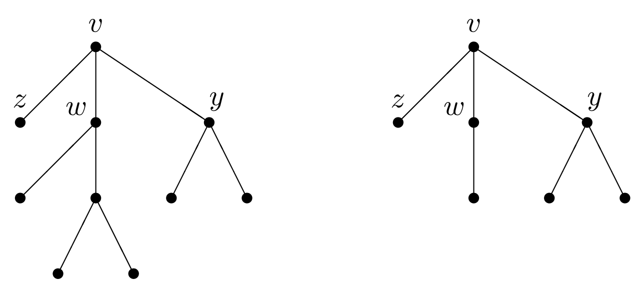


FIGURE 5.4. La troisième étape de l'élagage de T_v

Finalement on considère le sommet 2-branche z. Puisque tout sommet de $D(z) \setminus C(z)$ a un degré infèrieur à 3 et $|L^3(z)| = 2 \geq 1$, alors on supprime $D(z)$ (Figure 5.5 (a)). De même, puisque à l'étape finale de l'élagage (Figure 5.5 (a)) il existe un sommet dans $D(v) \setminus C(v)$ de degré 3, on applique le Lemme 5.2, et ainsi on obtient l'arbre $\overline{T}_v$ de la Figure 5.5 (b), dans lequel tous les sommets de degré 3 (s'il en existent) sont dans $C(v)$.



(a) (b)

FIGURE 5.5. Etape finale de l'élagage

Soit T un arbre enraciné en v. Dans le lemme suivant on doit supposer pour un sommet $(k-1)$–branche u, à distance maximum de v, que tous ses sommets descendants de degré k sont dans $C(u)$. Sinon, il existe au moins un sommet de degré k dans $D(u) \setminus C(u)$. Parmi tous ces sommets, soit x un sommet à distance maximum de u, ainsi x remplit la condition spécifique au sommet w du Lemme 5.2. Appliquant le Lemme 5.2 avec $H = T_x$, et donc $T = T \setminus V(H)$.

Lemme 5.3 (Meddah et Blidia [68]). *Soit $k \geq 2$ un entier et T un arbre enraciné en un sommet v. Soit u un sommet $(k-1)$-branche à distance maximum de v, $w = p(u)$ et $l_k = \left|L^k(u)\right|$.*

1. *Si $l_k \geq 1$, alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(u)$.*

2. *Si $l_k = 0$, alors:*

- Si $w \notin B^k(T)$, alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(u)$ et en ajoutant $k-1$ sommets adjacents à u.

- Si $w \in B^k(T)$, alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D[u]$.

Alors pour chaque cas on a:

a. $v \in \mathcal{A}_k(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_k(T)$.

b. $v \in \mathcal{N}_k(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_k(T)$.

Preuve. Soit $C(u) = \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}, y_1, y_2, ..., y_{l_m}\}$ où $d_T(x_i) = k$ pour tout i $(1 \leq i \leq l_k)$, $l_m = \sum_{j=1}^{k-1} |L^j(u)|$ et $d_T(y_i) = j$ pour tout i $(1 \leq i \leq l_m)$ et $1 \leq j \leq k-1$. Puisque u est un sommet $(k-1)$-branche, alors $l_k + l_m \geq k$. On note par w le sommet parent de u dans l'arbre enraciné T.

1. $l_k \geq 1$. Soit $T' = T \setminus D(u)$. On montre que $\gamma_k(T') = \gamma_k(T) - |D(u)| + l_k$. Tout $\gamma_k(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble k-dominant de T en ajoutant l'ensemble $D(u) \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\}$, ainsi on a $\gamma_k(T) \leq \gamma_k(T') + |D(u)| - l_k$. Maintenant, soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble et $D' = D \cap T'$. Si $u \notin D$, alors $\{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\} \subset D$ et ainsi $\{u\} \cup (D \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\})$ est un ensemble k-dominant de taille inférieure à $|D|$ ou égale à $|D|$ (si on a $l_k = 1$). Alors et sans perte de généralité, on peut supposer que $u \in D$. Comme précédement, $D \setminus (D(u) \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\})$ est un ensemble k-dominant de T', ce qui implique que $\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - (|D(u)| - l_k)$, et donc on a l'égalité.

Maintenant on montre l'item a. Supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Comme précédement, $D' = D \cap T' = D \setminus (D(u) \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\})$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |D(u)| + l_k$. Maintenant puisque $v \notin D(u)$ et $v \in D' \subset D$, il s'ensuit que $v \in \mathcal{A}_k(T)$.

Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T)$, et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. De même, on a $D = D' \cup (D(u) \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\})$ de taille $\gamma_k(T') + |D(u)| - l_k$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble. Maintenant, puisque $v \in D \setminus D[u]$, alors $v \in D'$ et donc $v \in \mathcal{A}_k(T')$.

Pour l'item b, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Il est clair que, $D' = D \cap T' = D \setminus (D(u) \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\})$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |D(u)| + l_k$. Puisque $v \notin D' \subset D$, il s'ensuit que $v \in \mathcal{N}_k(T)$.

Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T)$, et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. L'ensemble $D = D' \cup (D(u) \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{l_k}\})$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble de taille $\gamma_k(T') + |D(u)| - l_k$. Maintenant, puisque $v \notin D \setminus D[u]$, alors $v \notin D'$ et donc $v \in \mathcal{N}_k(T')$.

2. $l_k = 0$. On distingue entre deux situations:

- $w \notin B^k(T)$: Soit $T' = T \setminus (D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\})$. Il est clair $D(u) \subset D$. On montre que $\gamma_k(T') = \gamma_k(T) - |D(u)| + k - 1$. Premièrement, tout $\gamma_k(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble k-dominant de T en ajoutant l'ensemble $D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\}$, ainsi $\gamma_k(T) \leq \gamma_k(T') + |D(u)| - (k - 1)$. Maintenant, soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble et $D' = D \cap T' = D \setminus (D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\})$. Si $w \in D$, alors u est k-dominé dans T', et ainsi D' est un ensemble k-dominant de T'. Si $w \notin D$, alors $u \in D$ puisque $w \notin B^k(T)$, et ainsi D' est un ensemble k-dominant de T'. Dans les deux cas on a $\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - |D(u)| + (k - 1)$, et donc on a l'égalité.

Maintenant on montre l'item a. Supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Comme on a vu précédement, $D' = D \setminus (D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\})$ de taille $\gamma_k(T) - |D(u)| + (k - 1)$, est un $\gamma_k(T')$-ensemble. Puisque $v \notin D[u]$ et $v \in D' \subset D$, alors $v \in \mathcal{A}_k(T)$.

Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T)$ et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. De même que précédement, on a $D = D' \cup (D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\})$ de taille $\gamma_k(T') + |D(u)| - (k-1)$, est un $\gamma_k(T)$-ensemble. Maintenant puisque $v \in D \setminus D(u)$, $v \in D'$ et donc $v \in \mathcal{A}_k(T')$.

Pour l'item b, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Il est clair que, $D' = D \setminus (D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\})$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |D(u)| + (k-1)$ et $v \notin D'$. Puisque $v \notin D(u)$ et $D' \subset D$, $v \notin D$ et donc $v \in \mathcal{N}_k(T)$.

Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T)$ et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. L'ensemble $D = D' \cup (D(u) \setminus \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}\})$ de taille $\gamma_k(T') + |D(u)| - (k-1)$, est un $\gamma_k(T)$-ensemble. Puisque $v \notin D \setminus D(u)$, $v \notin D'$ et donc $v \in \mathcal{N}_k(T')$.

- $w \in B^k(T)$: Soit $T' = T \setminus D[u]$. On montre premièrement que $\gamma_k(T') = \gamma_k(T) - |D(u)|$. L'inégalié $\gamma_k(T) \leq \gamma_k(T') + |D(u)|$ s'obtient par le fait que tout $\gamma_k(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble k-dominant de T en ajoutant $D(u)$. De même, soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble et $D' = D \cap T'$. Si $w \in D$, alors D' est un ensemble k-dominant de T'. Maintenant si $w \notin D$, alors on considère deux situations: Si $u \notin D$, alors D' est un ensemble k-dominant de T', ainsi $\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - |D(u)|$. De même, si $u \in D$, alors $D_1 = \{w\} \cup (D \setminus \{u\})$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble, et donc $D' = D_1 \cap T'$ est un ensemble k-dominant de T'. Donc $\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - |D(u)|$. Dans les deux situations et d'après ce qui précède, on a $\gamma_k(T') = \gamma_k(T) - |D(u)|$.

Maintenant on montre l'item a. Supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. D'après ce qui précède et sans perte de généralité, $u \notin D$ et $D' = D \cap T' = D \setminus D(u)$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |D(u)|$. Puisque $v \notin D(u)$ et $v \in D' \subset D$, alors $v \in \mathcal{A}_k(T)$.

Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_k(T)$ et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. L'ensemble $D = D' \cup D(u)$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble de taille $\gamma_k(T') + |D(u)|$. Puisque $v \in D \setminus D(u)$, alors $v \in D'$ et donc $v \in \mathcal{A}_k(T')$.

Pour l'item b, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T')$ et soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Il est clair que $D' = D \cap T' = D \setminus D(u)$ est un $\gamma_k(T')$-ensemble de taille $\gamma_k(T) - |D(u)|$. Puisque $v \notin D(u)$ et $v \notin D' \subset D$, alors $v \notin D$ et ainsi $v \in \mathcal{N}_k(T)$.

Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_k(T)$ et soit D' un $\gamma_k(T')$-ensemble. L'ensemble $D = D' \cup D(u)$ est un $\gamma_k(T)$-ensemble de taille $\gamma_k(T') + |D(u)|$. Puisque $v \notin D \setminus D(u)$, alors $v \notin D'$ et ainsi $v \in \mathcal{N}_k(T')$.

$\square$

5.3 Caractérisation

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que la racine v d'un arbre non trivial T soit dans $\mathcal{A}_k(T)$ ou dans $\mathcal{N}_k(T)$. Notons que l'arbre considéré dans le Théorème 5.4, est l'arbre obtenu après avoir appliqué le processus d'élagage.

Théorème 5.4 (Meddah et Blidia [68]). *Soit $k \geq 2$ un entier et T un arbre non trivial enraciné en un sommet v de degré au moins k, sachant que* $\deg_T(u) < k$ *pour tout sommet $u \in V(T) \setminus C(v)$ $(u \neq v)$. Alors*

1. *$v \in \mathcal{A}_k(T)$ si et seulement si $|L^k(v)| \geq 2$;*

2. *$v \in \mathcal{N}_k(T)$ si et seulement si $L^k(v) = \emptyset$.*

Preuve. Puisque v a un degré au moins k, alors $|L^k(v)| + \sum_{j=1}^{k-1} |L^j(v)| \geq k$. Soit D un $\gamma_k(T)$-ensemble. Premièrement on montre la condition suffisante.

1. $|L^k(v)| \geq 2$. Soit $x, y \in L^k(v)$, Il est clair d'après l'Observation 5.1 que $\cup_{j=1}^{k-1} L^j(v) \subset D$. Si $\{x, y\} \subset D$, alors $v \notin D$, et ainsi $\{v\} \cup (D \setminus \{x, y\})$ est un ensemble k-dominant de taille inférieure à $|D|$, on a une contradiction. Donc $v \in \mathcal{A}_k(T)$.

2. $\left|L^k(v)\right| = 0$. D'après l'Observation 5.1, $\cup_{j=1}^{k-1} L^j(v) \subset D$, et puisque $\sum_{j=1}^{k-1} |L^j(v)| \geq k$, alors v est k-dominé par $\cup_{j=1}^{k-1} L^j(v)$. Donc $v \in \mathcal{N}_k(T)$.

Inversement, par la contraposée, la négation de $(|L^k(v)| \geq 2)$ et $(\left|L^k(v)\right| = 0)$ produit $|L^k(v)| = 1$. Soit $L^k(v) = \{x\}$, donc d'après l'Observation 5.1, $\cup_{j=1}^{k-1} L^j(v) \subset D$ avec $\sum_{j=1}^{k-1} |L^j(v)| \geq k - 1$. Maintenant, si $v \notin D$, alors $x \in D$, et si $v \in D$, alors $x \notin D$. Dans les deux cas D est un $\gamma_k(T)$-ensemble, et donc $v \notin \mathcal{A}_k(T) \cup \mathcal{N}_k(T)$. $\square$

Il est clair d'après le Théorème 5.4, pour l'arbre obtenu dans la Figure 5.5 (b) et qui vérifie $|L^3(v)| = 1$, que $v \notin \mathcal{A}_3(T) \cup \mathcal{N}_3(T)$.

Le Lemme 5.3 et le Théorème 5.4, produisent un résultat qui s'avère intéressant, donné par le théorème suivant.

Théorème 5.5 (Meddah et Blidia [68]). *Soit v un sommet d'un arbre T, alors*

- $v \in \mathcal{A}_k(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_k(\overline{T}_v)$.
- $v \in \mathcal{N}_k(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_k(\overline{T}_v)$.

Ayant caractérisé les deux ensembles $\mathcal{A}_k(T)$ et $\mathcal{N}_k(T)$ des sommets pour un arbre T, nous en déduisons le corollaire suivant qui donne une caractérisation des arbres ayant un γ_k-ensemble unique.

Corollaire 5.6. *Un arbre non trivial* T *a un* γ_k*-ensemble unique si et seulement si* $\mathcal{A}_k(T) \cup \mathcal{N}_k(T) = V$.

Aussi, la caractérisation des arbres γ_k-excellents est équivalente à ce que l'ensemble $\mathcal{N}_k(T)$ soit vide, d'où découle le corollaire suivant:

Corollaire 5.7 (Meddah et Blidia [68]). *Un arbre* T *est* $\gamma_k(T)$*-excellent si et seulement si pour tout* $v \in T$, $L^k(v) \neq \emptyset$.

A titre d'exemple, l'arbre T_v de la Figure 5.1 n'est pas γ_3-excellent (car x n'est contenu dans aucun γ_3-ensemble) mais il est γ_3-recommandable (car $g_3 > b_3 \geq 1$) et puisque $v \notin \mathcal{A}_3(T_v) \cup \mathcal{N}_3(T_v)$, T_v n'a pas un $\gamma_3(T_v)$-ensemble unique.

En appliquant le Théorème 5.4, on peut tester tous les sommets de l'arbre T et ceci donne l'état de ces sommets c-à-d d'être dans tout ou dans aucun ensemble k-dominant minimum de T (pour $k \geq 2$). Donc on peut déterminer les ensembles $\mathcal{A}_k(T)$ et $\mathcal{N}_k(T)$ pour l'arbre T. Vu que la procédure d'élagage d'un arbre décrite précédemment s'effectue en temps polynomial, alors les valeurs de $b_k(T)$ et $g_k(T)$ sont déterminées en temps polynomial. Et donc la nature de l'arbre peut être reconnue efficacement c-à-d en un temps polynomial. En effet, d'après les définitions de la première section de ce chapitre, on a:

Si $b_k(T) = 0$, alors T est dit γ_k-excellent.
Si $g_k(T) > b_k(T) \geq 1$, alors T est dit γ_k-recommandable.
Si $b_k(T) > g_k(T) \geq 1$, l'arbre T est dit γ_k-indésirable.
Si $g_k(T) = b_k(T)$, alors T est appelé γ_k-exacte.
Si $\mathcal{A}_k(T) \cup \mathcal{N}_k(T) = V$, alors T a un $\gamma_k(T)$-ensemble unique.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif principal de cette thèse est l'étude des deux notions; la k-domination et la k-indépendance dans les graphes. Ces deux notions ont été intensivement étudiées au cours de ces cinquante dernières années, et les résultats les concernant sont tellement nombreux que nous avons essayé d'en citer que les plus importants, liés principalement à nos objectifs qui sont:

- Etablissement des bornes sur les nombres de la k-domination et la k-indépendance et la caractérisation des graphes atteignant ces bornes;

- Caractérisation des sommets qui sont dans tout ou dans aucun γ_k-ensemble dans un arbre et arbres spéciaux: γ_k-excellents, γ_k-recommandables, γ_k-justes et γ_k-indésirables.

Nous avons en premier, généralisé la borne inférieure obtenue pour le nombre de 2-indépendance [1], et ce pour le nombre de la k-indépendance dans les graphes. Ainsi nous avons caractérisé constructivement les arbres atteignant cette nouvelle borne.

En seconde lieu, nous avons également évoqué un des résultats important de Favaron [2]; $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$. Et ce par la caractérisation des arbres T ayant le nombre de 2-domination égal au nombre de 2-indépendance, en se basant initialement sur le fait que si G est un graphe avec $\beta_k(G) = \gamma_k(G)$, alors G possède un ensemble à la fois $\gamma_k(G)$-ensemble et $\beta_k(G)$-ensemble.

Enfin, nous avons abordé la notion de la γ_k-excellence dans les graphes. Et ce par la caractérisation de l'ensemble des sommets appartenant à tout et l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun ensemble k-dominant minimum $\mathcal{A}_k(T)$ et $\mathcal{N}_k(T)$, respectivement, dans un arbre T. Cette caractérisation est basée initialement sur la technique d'élagage d'un arbre introduite par Mynhardt [3] pour le nombre de domination usuelle. À partir de cette caractérisation, nous avons déduit d'autres résultats qui s'avèrent intéressant pour les arbres; À savoir, la reconnaissance des arbres: γ_k-excellents, γ_k-recommandables,

γ_k-indésirables et γ_k-exacts. Aussi, la reconnaissance des arbres qui admettent un γ_k-ensemble unique.

Bien que les travaux réalisés le long de cette thèse et les travaux réalisés auparavant soient importants, nous sommes loin de répondre aux nombreux problèmes posés dans le domaine de la domination et la domination conditionnée.

La contribution réalisée durant cette thèse ouvre plus de perspectives de recherche. Suite aux résultats obtenus sur le nombre de la k-indépendance et le nombre de la k-domination dans les graphes, l'étude de ces problèmes peut être poursuivie dans des classes particulières de graphes ayant des structures simples tels que: Les graphes bipartis ou les graphes triangulés par exemple.

Il serait intéressant donc, de caractériser les graphes bipartis G, tels que $\beta_k(G) = \left\lceil (n(G) + \sum_{x \in S(G)} \min(|L_x|, k-1))/2 \right\rceil$, et même, de caractériser les arbres ou d'autres classes particulières de graphes G ayant une structure simple, avec $\gamma_k(G) = \beta_k(G)$ pour $k \geq 2$. Aussi, il est intéressant de déterminer la valeur exacte, si c'est possible, du nombre de la k-domination et du nombre de la k-indépendance pour des classes particulières de graphes. Un autre problème qui s'avère intéressant est d'étendre la notion de la μ-excellence dans les graphes pour d'autres paramètres de domination tels que β_k.

Références

1. M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron et **N. Meddah**. *On k-independence in graphs with emphasis on trees*. Discrete Math. 307, 2209 – 2216 (2007).

2. O. Favaron, *On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k-domination and k-dependence*. J. Combin. Theory Series. B 39 N°1, 101 – 102 (1985).

3. C.M. Mynhardt, *Vertices contained in every minimum dominating set of a tree.* J. Graph Theory. 31 (3), 163 – 177 (1999).

4. C. Berge, *Graphes et Hypergraphes.* Dunod, deuxième édition,1970.

5. G. Chartrand, et L. Lesniak, *Graphs &Digraphs*. Third Edition, Chapman&Hall, London, 1996.

6. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Fundamentals of domination in Graphs.* Marcel Dekker, New York, 1998.

7. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Domination in Graphs.* Advanced Topics. Marcel Dekker, New York, 1998.

8. R.W. Frucht et F. Harary, *On the corona of two graphs.* Journal: Aequationes Mathematicae. 4, 322 – 325 (1970).

9. C.F. De Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématiques au jeu d'échecs.* Petrograd, 1962.

10. G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards: A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, 507 – 528 (1995).

11. O. Ore, *Theory of graphs.* Amer. Math. Soc. colloq. Publ. 38 (1962).

12. E.J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs.* Networks. 7, 247 – 261 (1977).

13. K.S. Booth et J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs.* SIAM J. Comput. 11, 191 – 199 (1982).

14. R. Laskar et K. Peters, *Domination and irredundance in graphs.* Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

15. R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination.* SIAM J. Alg. Meth. Vol. 5, N°3, september 1984.

16. J.F. Fink et M.S. Jacobson, *n-domination in graphs.* In: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, 283–300 (1985).

17. J.F. Fink et M.S. Jacobson, *On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs.* In: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, 301 – 311 (1985).

18. M.S. Jacobson, K. Peters et D.F. Rall, *On n-irredundance and n-domination.* Ars Combin. 29B, 151 – 160 (1990).

19. G. Hopkins et W. Staton, *Vertex partition and k-small subsets of graphs.* Ars Combin. 22, 19 – 24 (1986).

20. A. Meir et J.W. Moon, *Relations between packing and covering number of a tree.* Pacific J. Math. 61, 225 – 233 (1975).

21. M.S. Jacobson et K. Peters, *Complexity questions for n-domination and related parameters.* Congr. Numer. 68, 7 – 22 (1989).

22. T.J. Bean, M.A. Henning et H.C. Swart, *On the integrity of distance domination in graphs.* Australas. J. Combin. 10, 29 – 43 (1994).

23. M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg et L. Volkmann, *k-Domination and k-Independence in Graphs.* Graphs and Combinatorics 28, 1 – 55 (2012). DOI 10.1007/s00373 – 011 – 1040 – 3. SURVEY.

24. Y. Lu, X. Hou, J. Xu et N. Li, *Trees with unique minimum p-dominating sets.* Util. Math. 86, $193 - 205$ (2011). ISSN $0315 - 3681$.

25. L. Volkmann, *Some remarks on lower bounds on the p-domination number in trees.* J. Combin. Math. Combin. Comput. 61, $159 - 167$ (2007).

26. Y. Lu, X. Hou et J. Xu, *A note on the p-domination number of trees.* Opuscula Math. $29, 157 - 164$ (2009).

27. M. Chellali, *Bounds on the 2-domination number in cactus graphs.* Opuscula Math. 26, $5 - 12$ (2006).

28. A. Hansberg et L. Volkmann, *Lower bounds on the p-domination number in terms of cycles and matching number.* J. Combin. Math. Combin. Comput. 68, $245 - 255$ (2009).

29. D. Rautenbach et L. Volkmann, *New bounds on the k-domination number and the k-tuple domination number.* Appl. Math. Lett. 20, $98 - 102$ (2007).

30. A. Hansberg et L. Volkmann, *Upper bounds on the k-domination number and the k-Roman domination number.* Discrete Appl. Math. 157, $1634 - 1639$ (2009).

31. V.I. Arnautov, *Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of vertices.* Prikl. Mat. i Programmirovanie. 11, $3 - 8$ (1974) (in Russian).

32. L. Lovász, *On the ratio of optimal and integral fractional covers.* Discrete Math. 13, $383 - 390$ (1975).

33. C. Payan, *Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple.* Cahiers Centre Études Recherche Opér. 17, $307 - 317$ (1975).

34. S. Fajtlowicz, *On conjectures of Graffiti.* III. Congr. Numer. 66, $23 - 32$ (1988).

35. O. Favaron, M. Mahéo et J.F. Saclé, *On the residue of a graph.* J. Graph Theory. 15, $39 - 64$ (1991).

36. J.R. Griggs et D.J. Kleitman, *Independence and the Havel-Hakimi residue.* Discrete Math. 127, 209 – 212 (1994).

37. E. Triesch, *Degree sequences of graphs and dominance order.* J Graph Theory. 22, 89 – 93 (1996).

38. F. Jelen, *k-Independence and the k-residue of a graph.* J. Graph Theory. 32, 241 – 249 (1999).

39. S.L. Hakimi, *On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph.* I., SIAM J Appl Math. 10, 496 – 506 (1962).

40. V. Havel, *A remark on the existence of finite graphs* (Czech), Časopis Pěst Mat. 80, 477 – 480 (1955).

41. C. Berge, *Les problèmes de coloration en théorie des graphes.* Publ. Inst. Stat. Univ. Paris. 9, 123 – 160 (1960).

42. V.K. Wei, *A lower bound on the stablity number of a simple graph.* Bell Laboratories Technical Memorandum . 81 – 11217 – 9, Murray Hill, NJ, (1981).

43. O. Favaron, *k-domination and k-independence in graphs.* Ars Combinatoria. 25C, 159 – 167 (1988).

44. Y. Caro, Z. Tuza, *Improved lower bounds on k-independence.* J. Graph Theory. 15, 99 – 107 (1991).

45. R. B. Maddox, On k-dependent subsets and partitions of k-degenerate graphs. Congr. Numer. 66, 11 – 14 (1988).

46. **N. Meddah**, *Contribution à l'étude de la k-indépendance dans les graphes.* Mémoire de magister, soutenu décembre 2006.

47. Y. Caro et A. Hansberg, New approach to the k-independence number of a graph, Electron. J. Combin. 20 (1) (2013), #P33.

48. M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron et **N. Meddah**, *Maximal k-independent sets in graphs*. Discuss. Math. Graph Theory. 28 (1), $151 - 163$ (2008).

49. O. Favaron, *On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k-domination and k-dependence*. J. Combin. Theory Ser. B 39, $101 - 102$ (1985).

50. A. Hansberg, D. Meierling et L. Volkmann, *Independence and k-domination in graphs*. Int. J.Comput. Math. 88, $905 - 915$ (2011).

51. J. Fujisawa, A. Hansberg, T. Kubo, A. Saito, M. Sugita et L. Volkmann, *Independence and 2-domination in bipartite graphs*. Australas. J. Combin. 40, $265 - 268$ (2008).

52. M. Blidia, M. Chellali et O. Favaron, *Independence and 2-domination in trees*. Australas. J. Combin. 33, $317 - 327$ (2005).

53. M. Blidia, M. Chellali et L. Volkmann, *Some bounds on the p-domination number in trees*. Discrete Math. 306, $2031 - 2037$ (2006).

54. G.H. Fricke, T.W. Haynes, S.M. Hedetnieni, S.T. Hedetnieni et R.C. Laskar, *excellents trees.* Bull.Inst.Combin Appl. 34, $27 - 28$ (2002).

55. E.J. Cockayne, M.A. Henning et C.M. Mynhardt, *Vertices contained in all or in no minimum total dominating set of a tree. Discrete Math.* 260, $37 - 44$ (2003).

56. M. Blidia, M. Chellali et S. Khelifi, *Vertices belonging to all or to no minimum double dominating sets in trees*. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. *Vol.* 2, N°1, $1 - 9$ (2005).

57. M. Blidia et R. Lounes, *Vertices belonging to all or to no minimum locating dominating sets of a trees*. Opuscula Mathematica Vol. 29, N°1, $5 - 14$ (2009).

58. F. Haray et T.W. Haynes, *Double domination in graphs.* Ars Combin., 55, $201-213$ (2000).

59. M. Chellali et T.W. Haynes, *On paired and double domination in graphs.* Utilitas Mathematica., 67, $161 - 171$ (2005).

60. S. Khelifi, Contribution à l'étude des graphes μ-excellents. Mémoire de Magister, soutenu décembre 2004.

61. M. A. Henning, M. D. Plummer, *Vertices contained in all or in no minimum paired dominating set of a tree.* Journal of Combinatorial Optimization., 10, $283-294$ (2005).

62. **N. Meddah** et M. Blidia, *A characterization of trees for a new lower bound on the k-independence number.* The Second International Symposium on Operational Research Algiers, Algeria : May $30th$ –June $02nd$, 2011.

63. **N. Meddah** et M. Blidia, *A characterization of trees for a new lower bound on the k-independence number.* Discussiones Mathematicae Graph Theory. 33 (2), $395-410$ (2013).

64. R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 37, $194-197$ (1941)

65. L. Volkmann, *A characterization of bipartite graphs with independence number half their order.* Australas. J. Combin. 41, $219-222$ (2008).

66. M. Borowiecki, *On a minimaximal kernel of trees. Discuss. Math.*, 1, $3-6$ (1975).

67. M. Chellali et **N. Meddah**, *Trees with equal 2-domination and 2-independence numbers.* Discuss. Math. Graph Theory., 32 (2), $263-270$ (2012).

68. **N. Meddah** et M. Blidia, *Vertices contained in all or in no minimum k-dominating sets of a tree.* AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, Vol 11, N°1, $105-113$ (2014).

69. T. W. Haynes et P. J. Slater, *Paired domination in graphs*, Networks., 32, $199-206$ (1998).