

**UNIVERSITE DE BLIDA 1**

**Faculté des Sciences**

Département de Mathématiques

# **THESE DE DOCTORAT**

En Mathématiques

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE

**ETUDE DE LA K-DOMINATION, LA K-INDEPENDANCE**

**ET LA K-DOMINATION ROMAINE DANS LES**

**GRAPHES**

Par

**Ahmed BOUCHOU**

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, Univ. de Blida 1	Président
M. BLIDIA	Professeur, Univ. de Blida 1	Promoteur
M. CHELLALI	Professeur, Univ. de Blida 1	Examineur
M. AIDER	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examinatrice
S. BOUROUBI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
H. KHEDDOUCI	Professeur, Univ. de Lyon 1	Invité

**Blida, 26 Avril 2015**

A la mémoire de ma mère, de mon père  
et de mon frère

## RESUME

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$  et de taille  $m$  où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. Pour un entier  $k \geq 1$ , un sous ensemble de sommets  $D$  de  $V$  est dit ensemble  $k$ -dominant de  $G$  si tout sommet de  $V - D$  est adjacent à au moins  $k$  sommets de  $D$ . On désigne par  $\gamma_k(G)$  le cardinal minimum d'un ensemble  $k$ -dominant de  $G$ . Un sous ensemble de sommets  $S$  de  $V$  est dit ensemble  $k$ -indépendant de  $G$  si le degré maximum du sous graphe induit par  $S$  est au plus  $k - 1$ , et on désigne par  $\beta_k(G)$  le cardinal d'un ensemble  $k$ -indépendant maximum de  $G$ . Une fonction de  $k$ -dominant romain sur  $G$  est une fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  telle que chaque sommet  $u$  pour lequel  $f(u) = 0$  est adjacent à au moins  $k$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$  avec  $f(v_i) = 2$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ . Le poids d'une fonction de  $k$ -domination romaine est la valeur  $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ , le poids minimum d'une fonction de  $k$ -domination romaine d'un graphe  $G$  est appelé le nombre de  $k$ -domination romaine de  $G$  et il est noté  $\gamma_{kR}(G)$ .

Dans cette thèse, en premier lieu nous présentons de nouvelles inégalités entre les paramètres  $\beta_k(G)$ ,  $\beta_j(G)$  et  $\gamma(G)$  avec  $1 \leq j < k$ . Nous donnons quelques caractérisations des graphes extrémaux. Ensuite nous présentons des relations entre  $\beta_j(G)$  et  $\beta_\Delta(G)$ , et nous donnons des caractérisation des graphes tels que  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  pour  $j \in \{1, 2, \delta, \delta - 1, \Delta - 1\}$ . En second lieu nous étudions la  $k$ -domination romaine, nous donnons des relations entre le nombre de  $k$ -domination romaine  $\gamma_{kR}(G)$  et le nombre de domination romain  $\gamma_R(G)$ , de plus, nous donnons des caractérisation des graphes tel que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ , et nous caractérisons les graphes sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  tels que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + t$ , avec  $t \in \{2k - 3, 2k - 2, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$ . Aussi nous etudions les graphes  $k$ -romains pour  $k \geq 2$ . A la fin, nous étudiant la NP-complétude du problème de la  $k$ -domination romaine pour les graphes bipartis et les graphes scindés.

## ABSTRACT

Let  $G = (V, E)$  be a simple graph of order  $n$ , and of size  $m$  with vertex set  $V$  and edge set  $E$ . For an integer  $k \geq 1$ , a subset  $D$  of  $V$  is  $k$ -dominating set if every vertex of  $V - D$  has at least  $k$  neighbors in  $D$  and the  $k$ -dominating number  $\gamma_k(G)$  is the minimum cardinality of a  $k$ -dominating set of  $G$ . A subset  $S$  of  $V$  is  $k$ -independent set if  $\Delta(G[S]) < k$ , and the  $k$ -independent number  $\beta_k(G)$  is the maximum cardinality of a  $k$ -independent set. A *Roman  $k$ -dominating function* on  $G$  is a function  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  such that every vertex  $u$  for which  $f(u) = 0$  is adjacent to at least  $k$  vertices  $v_1, v_2, \dots, v_k$  with  $f(v_i) = 2$  for  $i = 1, 2, \dots, k$ . The *weight* of a Roman  $k$ -dominating function is the value  $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ . The minimum weight of a Roman  $k$ -dominating function on a graph  $G$  is called the *Roman  $k$ -domination number*  $\gamma_{kR}(G)$ .

In this thesis, firstly we present new inequalities between parameters  $\beta_k(G)$ ,  $\beta_j(G)$  and  $\gamma(G)$  with  $1 \leq j < k$ . We give some characterizations of extremal graphs. Also we present the relationship between  $\beta_j(G)$  and  $\beta_\Delta(G)$ , and we give characterization of graphs with  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  for  $j \in \{1, 2, \delta, \delta - 1, \Delta - 1\}$ . Secondly we study the Roman  $k$ -domination, we give the relationship between the number of Roman  $k$ -domination  $\gamma_{kR}(G)$  and the number of Roman domination  $\gamma_R(G)$ . Moreover, we give characterization of graphs such that  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ , and we characterize the graphs without  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  such that  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + t$  with  $t \in \{2k - 3, 2k - 2, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$ . Also we study the  $k$ -Roman graphs for  $k \geq 2$ . Finally, we study the problem of the complexity relative to the Roman  $k$ -dominating number for bipartite graphs and split graphs.

## ملخص

ليكن  $G = (V, E)$  بيانا بسيطا رتبته  $n$  وسعته  $m$  حيث  $V$  مجموعة الرؤوس و  $E$  مجموعة الأضلاع . من اجل العدد الصحيح  $k \geq 1$ . نقول عن مجموعة جزئية  $D$  من  $V$  أنها  $k$ -مسيطرة في  $G$  إذا كان لكل رأس من  $D$  على الأقل  $k$  جوارا في  $D$ . نرسم  $\gamma_k(G)$  للأصلي الأدنى لمجموعة  $k$ -مسيطرة في  $G$ . نقول عن مجموعة جزئية  $S$  من  $V$  أنها  $k$ -مستقلة في  $G$  إذا كانت درجة البيان الجزئي المولد بـ  $S$  على الأكثر  $k-1$  في  $G$ . ونرسم  $\beta_k(G)$  للأصلي الأعلى لمجموعة  $k$ -مستقلة في  $G$ ، ونقول عن الدالة  $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  حيث كل رأس  $u$  مع  $f(u) = 0$  مجاورا ل  $k$  رؤس  $v_1, v_2, \dots, v_k$  مع  $f(v_i) = 2$   $i = 1, 2, \dots, k$  أنها دالة  $k$ -مسيطرة رومانية. وزن دالة  $k$  - مسيطرة رومانية هو المقدار  $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ . الوزن الأصغر لدالة  $k$ -مسيطرة رومانية لبيان  $G$  هو  $\gamma_{kr}(G)$ .

اولا نستعرض علاقات جديدة بين الوسائط  $\gamma(G)$  و  $\beta_j(G)$  و  $\beta_k(G)$  حيث  $0 \leq j < k$ . نعطي بعض مميزات للبيانات الحدية. كذلك نستعرض علاقات بين الوسيطين  $\beta_\Delta(G)$  و  $\beta_j(G)$ ، و نعطي مميزات البيانات التي تحقق  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  حيث  $j \in \{1, 2, \delta, \delta-1, \Delta-1\}$ . أخيرا ندرس  $k$  - السيطرة الرومانية، نعطي علاقات بين الوسيطين  $\gamma_{kr}(G)$  و  $\gamma_R(G)$ ، بالإضافة إلى ذلك نعطي مميزات البيانات  $G$  حيث  $\gamma_R(G) = \gamma_{kr}(G) + c$ ، و نعطي مميزات البيانات بدون  $\{K_{1,3}, K_{1,3}+e\}$  التي تحقق  $\gamma_R(G) = \gamma_{kr}(G) + t$  كذلك ندرس البيانات ال  $k$  - رومانية من أجل  $k \geq 2$ . و في الاخير، ندرس التعقيدات الخوارزمية في بعض البيانات.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Mostafa BLIDIA**, (Professeur à l'*Université de Blida 1*), d'avoir été à mes côtés depuis 2007 pour la préparation du magister et du doctorat, pour la confiance qu'il m'a accordée. Je le remercie également pour ses précieux conseils, ses encouragements, son aide et sa disponibilité. Je témoigne aussi de ma reconnaissance à Monsieur **Hamamache KHEDDOUCI** (Professeur à l'*Université de Lyon1*) qui a accepté de m'accueillir au sein de son laboratoire (LIRIS) pour finaliser cette thèse.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Madame **Odile FAVARON**, (Professeur en retraite France) et Monsieur **Mustapha CHELLALI**, (Professeure à l'*Université de Blida 1*), d'avoir guidé avec gentillesse certains de mes travaux.

Je remercie Monsieur **Farouk HANNANE**, (Professeur à l'*Université de Blida 1*), qui me fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie également les membres de jury: Monsieur **Mustapha CHELLALI**, (Professeure à l'*Université de Blida 1*), Monsieur **Méziane Aïder**, (Professeur à l'*USTHB Alger*), Mademoiselle **Isma BOUCHEMAKH**, (Professeur à l'*USTHB Alger*) et Monsieur **Sadak BOUROUBI**, (Professeur à l'*USTHB Alger*) qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis sans doute de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je voudrais à la fin remercier toutes les personnes qui m'ont aidé par leur soutien et leur encouragements d'accomplir mon travail à son terme.

# TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION.....**10**

1. NOTIONS GENERALES SUR LES GRAPHE.....**12**

1.1 Concepts fondamentaux.....12

1.1.1 Définitions d'un Graphe.....12

1.1.2 Quelques graphes particuliers.....13

1.1.3 Quelques opérations sur les graphes.....15

1.1.4 Connexité.....15

1.1.5 Invariants de graphes.....15

1.2 Problème de graphes.....16

1.2.1 Notion de complexité.....16

1.2.2 Quelques problèmes de décision NP-Complets.....18

1.3 Aperçu sur la domination.....19

1.3.1 La domination.....20

1.3.2 L'indépendance.....22

1.3.3 La domination romaine.....24

2. LA K-DOMINATION, LA K-INDEPENDANCE ET LA k-DOMINATION

ROMAINE DANS LES GRAPHE.....**26**

2.1 Définitions et propriétés.....27

2.1.1 La  $\kappa$ -domination.....27

2.1.2 La  $\kappa$ -indépendance.....28

2.1.3 Autres propriétés.....28

2.2 Des inégalités et égalité entre deux paramètres.....29

2.2.1	Des relations entre deux paramètres de même type.....	29
2.2.2	Des relations entre des paramètres de différents types.....	35
2.3	Bornes sur les paramètres $\gamma_k(G)$ , $\beta_k(G)$ .....	39
2.3.1	Bornes sur $\gamma_k(G)$ .....	39
2.3.2	Bornes sur $\beta_k(G)$ .....	45
2.4	Relations de type Nordhaus-Gaddum sur $\gamma_k(G)$ , $\beta_k(G)$ .....	50
2.5	La $k$ -domination romaine dans les graphes.....	51
3.	DES INEGALITES ENTRE LES PARAMETRES DE LA $k$ -INDEPENDANCE DANS LES GRAPHES.....	<b>56</b>
3.1	Relations entre deux paramètres de la $k$ -ndépendance.....	56
3.1.1	Relations entre $\beta_k(G)$ et $\beta_j(G)$ .....	56
3.1.2	Caractérisations de quelques graphes spéciaux.....	61
3.2	Delta-indépendance dans les graphes.....	69
3.2.1	Une inégalité entre $\beta_j(G)$ et $\beta_\Delta(G)$ .....	69
3.2.2	Quelques familles de graphes.....	71
3.2.3	Egalités entre les paramètres de la $j$ -indépendance.....	75
4.	DES INEGALITES ENTRE LES PARAMETRE DE LA $k$ -DOMINATION ROMAINE, LA DOMINATION ROMAINE ET LA $k$ - DOMINATION.....	<b>81</b>
4.1	Relations entre $\gamma_{kR}(G)$ et $\gamma_R(G)$ .....	81
4.1.1	Inégalité entre $\gamma_{kR}(G)$ et $\gamma_R(G)$ .....	81
4.1.2	Graphes $G$ avec $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ .....	83
4.1.3	Graphes sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ avec $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ .....	89
4.2	Etude des graphes $\kappa$ -romains.....	92
4.3	Résultats sur la NP-complitude.....	95
5.	CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	<b>98</b>
REFERENCES.....		<b>100</b>



## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1	Les graphes $K_{1,3}$ , $K_{1,3} + e$ et $C_4$ .....	14
Figure 1.2	Le graphe $K_{2,3}$ avec $\gamma(G) = i(G) = 2$ et $\beta(G) = \Gamma(G) = 3$ .....	21
Figure 2.1	La chenille $C(2,0,2)$ et la $\bar{K}_2$ -couronne de $C_3$ avec $\Gamma_2(G) > \Gamma_3(G)$ et $i_1(G) > i_2(G)$ .....	30
Figure 2.2	Le graphe $G = K_k + pP_2$ avec $\gamma_{k+1}(G) = (n + \gamma_{k+1}(G))/2$ .....	31
Figure 2.3	Les graphes $H_6$ et $K_2 + H_4$ .....	32
Figure 2.4	Le bicycle $G$ avec $\gamma_{kR}(G) < n$ .....	55
Figure 2.5	La roue $W_9$ avec $\gamma_{kR}(G) = n$ pour $k \geq 3$ .....	55
Figure 3.1	Le graphe $G_1$ tel que, chaque composante de tout $\beta_2(G)$ -ensemble est une clique $K_2$ et $\beta_2(G) \neq 2\beta(G)$ .....	58
Figure 3.2	Le graphe $G_2$ tel que, chaque composante de tout $\beta_2(G)$ -ensemble est un cycle $C_4$ et $\beta_3(G) \neq 2\beta_2(G)$ .....	59
Figure 3.3	Le graphe $G$ avec $\beta_2(G) = \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1 < 2\beta(G)$ .....	60
Figure 3.4	Le graphe $G'$ avec $\beta_2(G) = 2\beta(G) < \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1$ .....	61
Figure 3.5	Les graphes $K_4 - e$ et $H$ tels que $\beta_\Delta(G) = 2\beta_{\Delta-1}(G) - 1$ .....	62
Figure 3.6	La couronne $T$ d'une étoile avec $\beta_2(T) = 2\beta(T) - 1$ .....	66
Figure 3.7	Un arbre $T$ de la famille $F$ avec $\beta_2(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$ .....	67
Figure 3.8	Le graphe $L_8$ avec $L_8 \in H(3,4)$ , $L_8 \notin F(3,4)$ et $L_8 \notin G(3,4)$ .....	75
Figure 3.9	Un arbre $T$ avec $\beta_2(T) = \beta_\Delta(T)$ .....	77
Figure 3.10	Un graphe $G$ avec $\beta_2(G) = \beta_\Delta(G)$ .....	78
Figure 4.1	Les graphes cubiques $K_4$ , $K_{3,3}$ et $\bar{C}_6$ tels que $\gamma_{3R}(G) = \gamma_R(G) + 2$ .....	85
Figure 4.2	La famille $T$ telles que $\gamma_{3R}(G) = \gamma_R(G) + 2$ .....	86
Figure 4.3	La famille $C$ telles que $\gamma_{3R}(G) = \gamma_R(G) + 2$ .....	86
Figure 4.4	Les graphes $K_{1,k} + e$ et $F$ avec $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G) - k + 1$ .....	94
Figure 4.5	Construction d'un graphe biparti à partir de la chaîne $P_4$ .....	97

# INTRODUCTION

La Théorie des Graphes est une branche des mathématiques discrètes, en forte croissance grâce à son rôle essentiel dans les sciences appliquées, incluant l'ingénierie et en particulier l'informatique, mais aussi la biologie, la génétique ou encore les sciences sociales. Généralement, les problèmes pratiques modélisables par les graphes sont de nature combinatoire où il est souvent question de recherche de structures optimales particulières, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimum ou dominant minimum. Ce dernier problème dont l'origine remonte au 16<sup>ème</sup> siècle en Inde dans le jeu d'échec [64]. Le principe est de couvrir l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. Au début des années 1850 [68], les amateurs d'échecs étaient intéressés à trouver le nombre minimum de reines nécessaires à placer sur un échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [76] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connue sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [36]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [61, 62] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré.

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson [48, 49] ont introduit une généralisation de la domination et de l'indépendance, qui sont l'objet d'étude dans cette thèse.

Nous nous sommes intéressés aussi à un autre type de domination; la domination romaine dans les graphes, introduite par Cockayne et al [33] et motivée par un article de Ian Stewart dans *Scientific American*, intitulé "*Defend the Roman Empire!*" [84].

La notion de domination a gagné une grande popularité entre les chercheurs. Des résultats plus récents peuvent être trouvés dans [30, 61, 62].

Cette thèse est une contribution à l'étude de la  $k$ -domination, la  $k$ -indépendance et la  $k$ -domination romaine dans les graphes.

Le problème qui se pose d'une manière naturelle est la détermination de la valeur de ces paramètres, mais comme en général ce problème est NP-complet, nous nous penchons vers ou bien la détermination de bornes à ces paramètres qui les encadrent le plus étroitement possible, ou bien les déterminer exactement dans des classes particulières de graphes. Aussi nous intéressons aux graphes extrémaux pour les bornes élaborées.

Ce document est composé de quatre chapitres dont voici une description rapide.

1. *Notions générales sur les graphes* : Nous rappelons d'abord les définitions de base liés à la théorie des graphes et nécessaires à la compréhension de cette thèse. Ensuite nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique. Enfin nous rappelons brièvement la notion de la domination dans les graphes et nous définissons quelques paramètres de dominations.

2. *La  $k$ -domination, la  $k$ -indépendance et la  $k$ -domination romaine* : Nous abordons le thème étudié et nous donnons un aperçu sur la  $k$ -domination, la  $k$ -indépendance et la  $k$ -domination romaine dans les graphes. Nous donnons un recueil des principaux résultats de la littérature liés à ces notions.

3. *Des inégalités entre les paramètres de la  $k$ -indépendance dans les graphes* : Dans ce chapitre nous présentons de nouvelles relations entre les paramètres  $\beta_k(G)$ ,  $\beta_j(G)$  avec  $1 \leq j < k$ . Aussi nous donnons quelques caractérisations des graphes extrémaux. Ensuite nous présentons des inégalités entre  $\beta_j(G)$  et  $\beta_\Delta(G)$ , et nous donnons des caractérisation des graphes avec  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  pour  $j \in \{1, 2, \delta, \delta - 1, \Delta - 1\}$ .

4. *Des inégalités entre les paramètres de la  $k$ -domination romaine, la domination romaine et la  $k$ -domination* : Ce chapitre est consacré à la  $k$ -domination romaine, nous donnons des relations entre le nombre de  $k$ -domination romaine  $\gamma_{kR}(G)$  et le nombre de domination romaine  $\gamma_R(G)$ , de plus, nous donnons une caractérisation des graphes tel que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ , et nous caractérisons les graphes sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  tels que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + t$ . Ensuite nous étudions les graphes  $k$ -romains pour  $k \geq 2$ , nous améliorons la borne  $\gamma_{kR}(G) \leq 2\gamma_k(G)$  et nous caractérisons ces bornes. A la fin, nous montrons que le problème de décision pour la  $k$ -domination romaine est NP-complet.

## CHAPITRE 1

### NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHS

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées dans l'ensemble de ce document. Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes, nous donnons un bref aperçu sur les paramètres structurels d'un graphe. Ensuite nous citons quelques invariants de graphes; les notions propres à un chapitre donné sont définies dans le chapitre en question. Nous introduisons après la notion de complexité algorithmique dans les graphes. Enfin, nous rappelons brièvement la notion de la domination dans les graphes et nous définissons quelques paramètres de domination tels: les nombres de domination, d'indépendance, de domination romaine.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans cette thèse, le lecteur est invité à se référer aux ouvrages de Berge [2], Haynes, Hedetniemi et Slater [61] et de Chellali, Favaron, Hansberg et Volkmann [9].

#### 1.1 Concepts fondamentaux

##### 1.1.1 Définitions d'un Graphe

Un *graphe*  $G = (V, E)$  est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de *sommets*  $V$  et un ensemble d'*arêtes*  $E$ . Le cardinal de  $V$  est appelé l'*ordre* de  $G$ ; noté par  $n(G)$  et le cardinal de  $E$  est appelé la *taille* de  $G$ ; noté par  $m(G)$ . Une arête  $e \in E$  est un couple de sommets  $(u, v)$  notée par  $e = uv$ , où  $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$ . On dira dans ce cas que  $u$  et  $v$  sont adjacents et que  $e$  est incidente à  $u$  et  $v$ . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis.

Le *voisinage ouvert* d'un sommet  $v$  est  $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$  et le *voisinage fermé* de  $v$  est  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . Pour un sous-ensemble  $S \subseteq V$ ; le voisinage ouvert

est  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$  et le voisinage fermé  $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N(v) \cup S$ . Le *degré* d'un sommet  $v \in V$  noté  $d_G(v)$  est égal au cardinal de son voisinage ouvert. On note par  $N_S(x) = N_G(x) \cap S$  et  $d_S(x) = |N_S(x)|$ . On notera par  $\Delta(G)$  et  $\delta(G)$ , respectivement, le *degré maximum* et le *degré minimum* dans  $G$ . Un sommet de degré nul sera dit un sommet *isolé*, un sommet de degré égal à un sera dit sommet *pendant*. Un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet *support* et une arête adjacente à un sommet pendant est appelée *arête pendante*.

### 1.1.2 Quelques graphes particuliers

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.

Pour un sous-ensemble  $S \subseteq V$ , le *sous graphe induit* par  $S$  noté par  $G[S]$  est le graphe ayant  $S$  pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs deux extrémités dans  $S$ .

Pour un sous-ensemble  $U \subseteq E$ , le *graphe partiel* de  $G$  défini par  $U$  noté  $G_U$  est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement  $V$  et  $U$ .

Le graphe *complémentaire* de  $G$  noté  $\overline{G}$  est un graphe ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et une arête est dans  $\overline{G}$  si elle n'est pas dans  $G$ .

Pour  $r \geq 2$ , un graphe est dit *r-parti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en  $r$  sous-ensembles  $X_1, X_2, \dots, X_r$  tels que les sous graphes  $G[X_1], G[X_2], \dots, G[X_r]$  ne contiennent aucune arête. En particulier, pour  $r = 2$ , le graphe  $G$  est appelé *biparti*. Si un sommet dans un ensemble de partition  $V_i$  d'un graphe  $r$ -parti est adjacent à tout sommet des autres ensembles  $\{V_j : j \neq i\}$  pour tout sommet dans  $G$ , alors  $G$  est appelé *multiparti complet* et noté par  $K_{p_1, p_2, \dots, p_r}$  avec  $p_j = |X_j|$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

Une *chaîne*  $P$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est une séquence finie de sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de  $V$  telle que  $v_i v_{i+1} \in E$  pour tout  $1 \leq i \leq k-1$ . L'entier  $k-1$  représente la longueur de la chaîne  $P$  (au sens des arêtes) et les deux sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés respectivement *extrémité initiale* et *extrémité finale* de la chaîne  $P$ . Une chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une *chaîne minimale* induite par  $n$  sommets, notée par  $P_n$ , est une chaîne

élémentaire sans cordes.

Un *arbre* est un graphe ayant exactement  $n - 1$  arêtes.

Une *étoile*, noté par  $K_{1,n}$ , est un arbre à  $n + 1$  sommets ayant au moins  $n$  sommets pendants.

Une *chenille*  $C(t_1, t_2, \dots, t_s)$  est un arbre dont la suppression de ses sommets pendants donne une chaîne  $u_1, u_2, \dots, u_s$ , où  $t_i$  est le nombre de sommets pendants adjacents à  $u_i$ .

Un *cactus* est un graphe, où toute arête appartient à au plus un cycle. Un graphe contenant un seul cycle est appelé un *unicycle*.

Un graphe  $G$  est *d-régulier* si tous ses sommets sont de degré  $d$  et semi-régulier si  $\Delta(G) - \delta(G) = 1$ .

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire  $C_n$  induit par  $n$  sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Une *subdivision*  $S(G)$  d'un graphe  $G$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête  $uv$  de  $G$  par un sommet  $w$  et les deux arêtes  $uw$  et  $wv$ .

Etant donné un graphe  $F$ , un graphe  $G$  est dit sans  $F$  si  $G$  ne contient pas  $F$  comme sous-graphe induit. Plus généralement, si  $F_1, F_2, \dots, F_k$  sont  $k$  graphes et  $G$  ne contient pas de sous-graphe induit  $F_i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , alors on dit que  $G$  est sans  $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ .

La notion de sous graphes induits est très importante en théorie des graphes car elle permet de définir des classes de graphes caractérisées par sous-graphes *exclus* ou *interdits*. Par exemple, la classe des arbres est caractérisée par exclusion des cycles, la classe des graphes bipartis est caractérisée par exclusion des cycles impairs, etc...

Parmi la liste des classes de graphes définies par les sous graphes exclus on trouve la classe des graphes sans *griffe*  $K_{1,3}$ , la classe des graphes sans *patte*  $K_{1,3} + e$ , la classe des graphes sans cycle  $C_4$ , etc...(voir Figure 1.1).

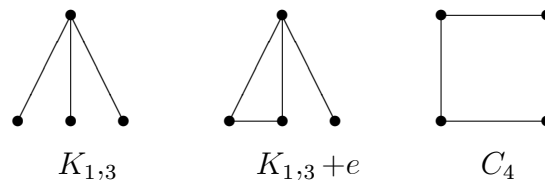


FIGURE 1.1.

### 1.1.3 Quelques opérations sur les graphes

Etant donné deux graphes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  avec  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

La  $G_2$ -*couronne* de  $G_1$ , c'est le graphe  $G_1 \circ G_2$  obtenu d'une copie de  $G_1$  et  $|V_1|$  copies de  $G_2$  où le  $i^{\text{ième}}$  sommet de  $G_1$  est adjacent à tous les sommets de la  $i^{\text{ième}}$  copie de  $G_2$ . Lorsque  $G_2$  est une clique  $K_1$ ,  $G_1 \circ K_1$  est appelé la *couronne* du graphe  $G_1$ . Il est à noter que l'ordre de  $G_1 \circ K_1$  est  $2|V_1|$ .

L'*union* de  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , leur *joint* est le graphe  $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$  où  $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$ , et leur *produit cartésien*  $G_1 \square G_2$  est le graphe  $G = (V, E)$  tel que  $V = \{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$  et deux sommets  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$  sont adjacents si  $u_1 = v_1$  et  $u_2v_2 \in E(G_2)$  ou  $u_2 = v_2$  et  $u_1v_1 \in E(G_1)$ .

### 1.1.4 Connexité

La relation  $\sim$  entre les sommets d'un graphe  $G$  est définie comme suit :  $u \sim v$  si et seulement s'il existe dans  $G$  une chaîne reliant  $u$  à  $v$ . La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de  $\sim$  sont appelés composantes connexes de  $G$ . Le graphe  $G$  est dit connexe s'il possède une seule composante connexe. Une *forêt* est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Si  $G$  est connexe, alors  $\overline{G}$  est dit co-connexe. Les complémentaires des composantes connexes de  $\overline{G}$  sont appelées composantes co-connexes de  $G$ . Il est bien connu que pour tout graphe  $G$ ,  $G$  et  $\overline{G}$  ne peuvent être tous les deux non connexes.

### 1.1.5 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe. Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes, en d'autres termes un invariant est une

propriété stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$ . Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans cette thèse.

Un *couplage* dans un graphe  $G$  est un sous-ensemble d'arêtes non-adjacentes deux à deux. On notera par  $\alpha_0(G)$  la taille maximale d'un couplage dans  $G$ . Le couplage est dit *parfait* dans  $G$  si  $\alpha_0(G) = \frac{n}{2}$ .

Un *stable* dans  $G$ , est un ensemble de sommets deux-à-deux non-adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de ses sommets. Un stable de  $G$  est maximum s'il est de taille maximale dans  $G$ .

Une *clique* de  $G$ , est un ensemble de sommets adjacents deux-à-deux. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets. Une clique de  $G$  est maximum si elle est de taille maximale dans  $G$ .

Un *transversal* dans un graphe  $G$  est un ensemble de sommets  $W \subset V$  tel que chaque arête de  $G$  a au moins une extrémité dans  $W$ . La taille d'un transversal est égale au nombre de ses sommets. Un transversal de  $G$  est minimum s'il est de taille minimale dans  $G$ .

## **1.2 Problèmes de graphes**

Beaucoup de problèmes sont réputés difficiles en théorie des graphes. Dans cette section, nous introduisons quelques éléments de base sur la complexité algorithmique et nous définissons quelques problèmes que l'on rencontre dans cette thèse.

### **1.2.1 Notion de complexité**

Un *algorithme* est une procédure de résolution composée d'une suite finie d'opérations élémentaires qui, pour toute instance du problème à traiter, transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties). Le mot "algorithme" vient du nom du mathématicien Al Khawarizmi (9<sup>ème</sup> siècle) qui a fourni le premier algorithme pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.



Un problème d'*optimisation combinatoire* consiste à déterminer un meilleur élément parmi un nombre fini d'éléments mais souvent très élevé. Pour ce type de problèmes, il est nécessaire de mesurer l'efficacité de tout algorithme mis en oeuvre. Ainsi, pour comparer les performances de plusieurs algorithmes résolvant un même problème, il existe une mesure basée sur leur temps d'exécution; c'est la complexité en temps.

L'*analyse de la complexité* d'un algorithme donne une estimation de son temps d'exécution, exprimé en termes du nombre d'opérations élémentaires, en fonction de la taille de l'entrée, exprimée en termes du nombre de caractères nécessaires pour coder les données du problème. La notation de Landau  $O$  est utilisée pour donner une majoration du nombre d'opérations effectuées en fonction de la taille de l'entrée

La notion d'*algorithme efficace ou polynomial* a été introduite par J. Edmonds [43]. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opérations élémentaires  $T(n)$ , nécessaire pour résoudre un problème de taille  $n$ , est borné par un polynôme en  $n$ , c'est-à-dire, si  $T(n) \leq c.n^k$  ( $c$  et  $k$  étant des constantes). Un tel algorithme est dit de complexité  $O(n^k)$ .

Un *problème de décision* est un problème dont la réponse attendue est de type "oui" ou "non". La théorie de la complexité fournit une classification des problèmes de décision selon leur niveau de difficulté.

Un problème de décision est dit appartenir à la *classe P* (classe facile), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Plusieurs problèmes de graphes appartiennent à P, tels : la *connexité*, le *couplage parfait*, le *plus court chemin*, le *flot maximum*, l'*arbre de poids minimum* etc.

Un problème de décision est dit appartenir à la *classe NP* s'il existe, pour toute instance dont la réponse est "oui", un *certificat* vérifiable en temps polynomial en la taille des données. La classe NP (*Non déterministe Polynomial*) réunit les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe. Nous retrouvons dans cette classe, tous les problèmes classiques en théorie des graphes, tels : l'*indépendance*, la *coloration* la *domination* etc.

Evidemment,  $P \subseteq NP$ . Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. De ce fait, une question majeure reste posée à ce jour : Est-ce que  $P = NP$ ?

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions. Une *réduction* est une transformation d'un problème  $P_1$  à un autre problème  $P_2$ , s'il existe un algorithme pour  $P_1$  qui fait appel à un algorithme de résolution de  $P_2$ . On dit que  $P_2$  est au moins aussi difficile que  $P_1$ . Il existe plusieurs réductions, la plus utilisée est la réduction polynômiale.

Un problème de la classe NP est dit *complet*, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autres termes, s'il existait un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP, et on aurait l'égalité  $P = NP$ . Les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

Il est montré par Ladner [69] que si  $P \neq NP$  alors ils existent des problèmes qui ne sont ni dans P, ni NP-complet, ils sont dits NP-intermédiaire.

Il existe un lien fort entre un problème de décision et un problème d'optimisation. En fait, la plupart des problèmes de décision ont une version d'optimisation. Les problèmes d'optimisation associés aux problèmes de décision NP-complets sont qualifiés de NP-difficiles. Un problème NP-difficile (ou NP-dur) est un problème au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet.

Pour une présentation plus complète, le lecteur peut consulter l'article de Cook [39], ou l'ouvrage de Garey et Johnson [53].

A noter que pour une sous classe de graphes  $\mathcal{H}$  d'une classe  $\mathcal{G}$ , si un problème  $Q$  est NP-complet pour  $\mathcal{H}$  alors il l'est pour  $\mathcal{G}$ . Et, un algorithme qui résout  $Q$  pour  $\mathcal{G}$ , le résout aussi pour  $\mathcal{H}$ .

Notons que, dans les graphes, la taille d'une instance est  $|V| + |E|$ .

### 1.2.2 Quelques problèmes de décision NP-Complets

Le premier problème NP-Complet a été trouvé par Cook qui a montré que SAT (Satisfaisabilité) était complet et tout problème de décision est polynomialement réductible à SAT. Parmi les premiers problèmes de décision connus NP-complets sont les problèmes :

**Problème:** CLIQUE

*Entrée :* Un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $p \leq |V|$ .

*Question* : Y a-t-il un sous-ensemble  $K \subseteq V$  de cardinalité  $p$  tel que  $\forall x, y \in K, xy \in E$ ?

*Complexité* : NP-complet.

**Problème:** STABLE (INDEPENDENT)

*Entrée* : Un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $p \leq |V|$ .

*Question* : Y a-t-il un sous-ensemble  $S \subseteq V$  de cardinalité  $p$  tel que  $\forall x, y \in S, xy \notin E$ ?

*Complexité* : NP-complet.

**Problème:** TRANSVERSAL

*Entrée* : Un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $p \leq |V|$ .

*Question* : Y a-t-il un sous-ensemble  $C \subseteq V$  de cardinalité au plus  $p$  tel que pour toute arête  $xy \in E$ , soit  $x \in C$  ou  $y \in C$ ?

*Complexité* : NP-complet même pour les graphes bipartis et les graphes scindés [53].

Il suffit pour cela de remarquer que le problème de la **Clique** dans un graphe  $G = (V, E)$  est équivalent au problème du **Stable** dans le graphe complémentaire de  $G$ .

Le problème du **Stable** se réduit polynomialement au problème du **Transversal** puisque si  $S$  est un stable,  $T = V - S$  est un transversal dans  $G = (V, E)$ .

### 1.3 Aperçu sur la domination

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16<sup>eme</sup> siècle en Inde (Voir [64]). En 1862, De Jaenisch [68] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier  $5 \times 5$  le nombre minimum est 3 et pour un échiquier  $8 \times 8$  le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier  $n \times n$  reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [51].

En 1958, Claude Berge [2] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [76] en 1962. La domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [36] en 1977.

Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [23, 70, 71]). Une étude approfondie de quelques types de domination fera l'objet des prochains chapitres. Ainsi beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple: la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, etc....

En 1990, Un numéro spécial de la revue *Discrete Mathematics* édité par Hedetniemi et Laskar a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar [64] ont inclus une liste de quelques 400 références. On dénombre actuellement quelques 200 types de domination (certains ont été définis avec des applications pratiques) et plus de 3000 références dans le domaine.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([61, 62]).

### 1.3.1 La domination

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.

Un sous ensemble de sommets  $D \subseteq V$  de  $G$  est dit ensemble *dominant* si tout sommet  $V - D$  est adjacent à au moins un sommet de  $D$ .

Un ensemble dominant  $D$  est dit *dominant minimal* si aucun sous ensemble propre de  $D$  n'est un ensemble dominant.

Le *nombre de domination inférieur* ( appelé *nombre de domination*), noté  $\gamma(G)$ , d'un graphe  $G$  représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de  $G$ .

Un ensemble *dominant minimum* avec une telle cardinalité est appelé  $\gamma(G)$ -ensemble, on note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\gamma(G)$ -ensembles.

La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée *nombre de domination supérieur*, et est noté par  $\Gamma(G)$ .

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap D| \geq 1$ ,

Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout  $v \in V - D$ ,  $|N(v) \cap D| \geq 1$ ,

Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si  $N[D] = V$ .

Par exemple pour le graphe  $K_{2,3}$  de la Figure 1.2,  $\gamma(G) = 2$ , et  $\{u, v\}$ ,  $\{u, x\}$  et  $\{v, z\}$  sont des  $\gamma(G)$ -ensembles.  $\Gamma(G) = 3$  et  $\{x, y, z\}$  est l'unique  $\Gamma(G)$ -ensemble.

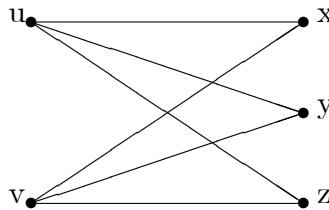


FIGURE 1.2. Le graphe  $K_{2,3}$

Cockayne, Goodman et Hedetniemi 1975 [35] ont construit le premier algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination de tout arbre. Johnson 1975 [53] était le premier qui a montré que le problème de détermination du nombre  $\gamma(G)$  pour un graphe arbitraire est NP-complet, En outre, Dewdney 1981 [41], Chang et Nemhauser 1984 [28], Bertossi 1984 [4], indépendamment, ont montré que le problème reste NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. Booth et Johnson 1982 [23] ont montré que le problème reste aussi NP-complet pour les graphes triangulés.

La domination est utilisée dans beaucoup de situations concrètes et son développement théorique a énormément contribué dans la résolution de problèmes pratiques comme les problèmes relevant des réseaux de communications, les systèmes de surveillances (par Radars), les systèmes électriques, les réseaux informatiques et d'autres. Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination, en effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. Cette condition peut être intérieure à l'ensemble dominant, extérieure à l'ensemble dominant ou bien intérieure et extérieure en même temps à l'ensemble dominant, par exemple:

-Imposer la condition que le nombre de voisin dans l'ensemble de chaque sommet extérieur soit supérieur ou égale à  $k$ , donne l'ensemble  $k$ -dominant.

-Imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant soit de degré maximum  $k - 1$ , donne l'ensemble  $k$ -indépendant.

Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extérieur.

A titre d'exemple, considérons quelque types de domination qui nous intéressent dans les prochains chapitres.

*La domination multiple* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit dominant multiple (ou  $k$ -dominant) de  $G$  si tout sommet de  $V - D$  possède au moins  $k$  voisins dans  $D$ . Le *nombre de domination multiple* (ou *nombre de  $k$ -domination*), noté par  $\gamma_k(G)$ , est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple de  $G$ . La  $k$ -domination a été introduite par Fink et Jacobson en 1984.

Pour son application, on considère le problème de localisation des radars pour contrôler une région donnée: Un certain nombre de points stratégiques  $a, b, c, \dots$  (les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars; on exige que chaque cellule soit surveiller par au moins  $k$  radars. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle manière à contrôler toutes les cellules en respectant la contrainte de la  $k$ -domination pour chaque cellule.

### 1.3.2 L'indépendance

Une autre notion est apparue avant la notion de domination, c'est la notion d'*indépendance* (*stabilité*). Ainsi, un sous ensemble de sommets  $S \subseteq V$  d'un graphe  $G$  est appelé indépendant s'il n'existe pas deux sommets adjacents dans  $S$ .

Un ensemble indépendant  $S$  est dit *indépendant maximal* si aucun sur-ensemble de  $S$  n'est un ensemble indépendant.

Cette notion est reliée à celle de la domination par le fait qu'un indépendant est maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant. La cardinalité maximum (resp. minimum) des ensembles indépendants maximaux  $S$  est appelée *nombre d'indépendance supérieur* (resp. *nombre d'indépendance inférieur*) de  $G$ , noté par  $\beta(G)$  (resp.  $i(G)$ ).

Pour le graphe  $K_{2,3}$ , représenté dans la Figure 1.2, les deux ensembles de sommets,  $\{u, v\}$  et  $\{x, y, z\}$  sont des ensembles indépendants maximaux. L'ensemble  $\{x, y, z\}$  est l'ensemble indépendant maximal le plus large, il s'ensuit que  $\beta(K_{2,3}) = 3$ , et l'ensemble indépendant maximal le plus petit est  $\{u, v\}$ , et donc  $i(K_{2,3}) = 2$ .

La proposition suivante donne un résultat intuitif, reliant l'indépendance maximal et la domination minimale dans un graphe.

**Proposition 1.1.** [49] *Pour un graphe  $G$ .*

1. *Tout ensemble indépendant maximal dans  $G$  est un dominant minimal de  $G$ .*
2. *Un ensemble indépendant est maximal si et seulement si il est dominant. Et un ensemble indépendant et dominant est un dominant minimal.*

La Proposition précédente a pour conséquence immédiate la chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [37] reliant les quatre paramètres:

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G). \quad (1.1)$$

Le problème de la détermination de  $\beta(G)$  a été montré qu'il est NP-complet pour un graphe arbitraire par Garey et Johnson dans 1975 [53]. Aussi, Fricke, Hedetniemi, et Jacobs 1998 [52] ont montré que le problème reste NP-complet pour la classe des graphes réguliers. Dayckin et Ng 1966 [40], ont fourni le premier algorithme pour la détermination de  $\beta(G)$  pour les arbres. En 1972, Gvaril [54] a montré que le problème peut être résolu en un temps polinomial si l'on se restreint aux graphes triangulés. Il est bien connu qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre ce problème dans les graphes bipartis, car  $\beta(G) = n - \alpha_0(G)$  pour les graphes bipartis, et  $\alpha_0(G)$  peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe  $G$  (Voir [43]).

### 1.3.3 La domination romaine

Nous nous sommes intéressés aussi à un autre type de domination est la *domination romaine* dans les graphes, introduite par Cockayne et al [33], et motivée par un article de Ian Stewart dans Scientific American, intitulé "Defend the Roman Empire!"[84].

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Une fonction de domination romaine (RDF) sur  $G$  est une fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tel que chaque sommet  $u$  avec  $f(u) = 0$  est adjacent à au moins un sommet  $v$  avec  $f(v) = 2$ . Le poids de  $f$  est la valeur  $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ . Le poids minimum de  $f$  est appelé le *nombre de domination romaine* de  $G$ , noté  $\gamma_R(G)$ .

Chaque sommet dans notre graphe représente une ville dans l'empire romain. Une ville (sommet  $v$ ) est considérée non-sécurisée si elle n'a aucune légions (i.e., si  $f(v) = 0$ ) et elle est sécurisée sinon (i.e., si  $f(v) \in \{1, 2\}$ ). Une ville non-sécurisée (sommet  $v$ ) peut être sécurisée par l'envoi d'une légion d'une ville  $v$  voisine (sommet adjacent). Mais l'empereur Constantine, en 4<sup>ème</sup> siècle A.D, décréta que toute ville qui n'a pas de légions pour la sécuriser ( $f(u) = 0$ ) doit être voisine à au moins une autre ville qui a deux légions ( $f(v) = 2$ ). Si la 1<sup>ère</sup> serait attaquée, alors la 2<sup>ème</sup> pourrait déployer une légion pour la protéger sans qu'elle devient vulnérable elle même. De cette manière, l'empereur Constantine pouvait défendre tout l'empire romain. Comme le maintien d'une légion à une ville coûte chère. L'objectif de l'empereur, est de minimiser le nombre total de légions nécessaires pour protéger tout l'empire. Le problème est généralisé pour un graphe. Une fonction de domination romaine de poids  $\gamma_R(G)$  correspond à une affectation optimale des légions aux villes.

Soit  $(V_0, V_1, V_2)$  une partition ordonnée de  $V$  induite par  $f$ , on écrit  $f = (V_0, V_1, V_2)$ , où  $V_i = \{v \in V(G) : f(v) = i\}$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

Cockayne et al. [33] ont donné des relations entre le nombre de domination romaine et le nombre de domination d'un graphe  $G$ :

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G). \quad (1.2)$$

Dans sa thèse 2000 [42], Dreyer a construit un algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination romaine pour tout arbre. En outre, Schnupp 2006 [83] a montré que



le problème de détermination du nombre  $\gamma_R(G)$  pour un graphe arbitraire est NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis, graphes scindés ou graphes planaires.

Dans cette thèse nous ne considérons que l'aspect théorique de ces problèmes. Comme les paramètres de domination sont difficiles à déterminer (problème d'optimisation combinatoire NP-difficiles) et en l'absence de valeurs exactes pour ces paramètres, on est amené vers la recherche de bornes supérieures et inférieures simples à vérifier, c'est à dire qu'elles soient en fonction de l'ordre  $n$  de  $G$ , degré maximum  $\Delta$ , degré minimum  $\delta$ , etc... Chercher les graphes extrémaux, c'est à dire caractériser les graphes pour lesquelles ces bornes sont atteintes. Nous recherchons des inégalités entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité. Une autre approche classique dans les problèmes d'optimisation combinatoire, est d'essayer de trouver une bonne approximation sous forme d'une fonction en  $n$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$  ou d'une liaison entre les paramètres de domination. L'étude porte en général sur, la relation entre ces paramètres, la détermination des bornes supérieures et inférieures pour une fonction  $f(\mu(G), \varphi(G))$  de deux paramètres, la comparaison entre deux paramètres pour certaines classes de graphes.

## CHAPITRE 2

# LA $k$ -DOMINATION, LA $k$ -INDÉPENDANCE ET LA $k$ -DOMINATION ROMAINE

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson ont introduit la généralisation de la domination et de l'indépendance dans les graphes. Les papiers [48, 49] parus dans les actes de la conférence contiennent les définitions de ces nouveaux paramètres, quelques propriétés et deux conjectures. La première a été prouvée par Favaron [44] et la deuxième fait l'objet de notre travail.

Nous allons consacrer ce chapitre (composé de cinq sections) à l'état d'art sur la  $k$ -domination, la  $k$ -indépendance et la  $k$ -domination romaine dans les graphes. Nous présentons d'une manière détaillée quelques résultats suivis de certaines améliorations.

Dans la première section, nous définissons les notions de la  $k$ -domination et la  $k$ -indépendance dans les graphes et nous donnons quelques propriétés. Dans la deuxième section, nous donnons des inégalités et égalités entre deux paramètres de domination de même type et de types différents. Dans la troisième section, nous donnons des bornes sur les paramètres  $\gamma_k$  et  $\beta_k$  et quelques caractérisations des graphes extrémaux. Dans la section 4, nous présentons des relations de type Nordhaus-Gaddum sur  $\gamma_k$  et  $\beta_k$ . Enfin la dernière section sera consacré aux résultats sur la  $k$ -domination romaine.

Certains résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de publications et de communications, citons les revues «Studia Informatica Universalis» [11] et «Ars Combinatorica» [12], et les colloques internationaux ISOR'08 (Alger) [14], COSI'09 (Annaba) [15], DIMACOS'11 (Maroc) [16].

## 2.1 Définitions et propriétés

### 2.1.1 La $k$ -domination

**Définition 2.1.** [48] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est un  $k$ -dominant de  $G$  si tout sommet de  $V - D$  a au moins  $k$  voisins dans  $D$ .

**Définition 2.2.** [48] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Un  $k$ -dominant de  $G$  est minimal si pour tout sommet  $x$  dans  $D$ ,  $D - \{x\}$  n'est pas un  $k$ -dominant.

Etant donné que l'ensemble  $V$  de sommets d'un graphe  $G$  est  $k$ -dominant, Fink et Jacobson [48] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un  $k$ -dominant soit minimal dans un graphe  $G$ .

**Théorème 2.3.** [48] Soit  $D$  un ensemble  $k$ -dominant d'un graphe  $G$ . Alors  $D$  est minimal si et seulement si pour tout sommet  $v \in D$ ,

1.  $v$  a moins de  $k$  voisins dans  $D$ , ou
2. il existe un sommet  $u \in N(v) \cap (V - D)$  tel que  $|N(u) \cap D| = k$ .

Les cardinalités minimum et maximum d'un  $k$ -dominant minimal d'un graphe  $G$  sont notés par  $\gamma_k(G)$  et  $\Gamma_k(G)$ , où  $\gamma_k(G)$  est appelé le *nombre de  $k$ -domination*.

De ce qui précède, nous avons les propriétés générales suivantes.

1. Tout sur-ensemble d'un ensemble  $k$ -dominant est  $k$ -dominant.
2. Un  $k$ -dominant contient au moins  $k$  sommets, d'où  $\gamma_k(G) \geq k$  pour tout graphe  $G$ .
3. Tout ensemble  $k$ -dominant contient tous les sommets de degré plus petit que  $k$ .
4. Tout ensemble  $k$ -dominant est  $k'$ -dominant pour  $k' < k \leq \Delta + 1$ , et donc la séquence  $(\gamma_k)$  est croissante. De plus  $V$  est le seul  $(\Delta + 1)$ -dominant minimal mais n'est pas un  $\Delta$ -dominant minimal. On en déduit que pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma_\Delta(G) < \gamma_{\Delta+1}(G) = \Gamma_{\Delta+1}(G) = n$ .

### 2.1.2 La $k$ -indépendance

**Définition 2.4.** [48] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est un  $k$ -indépendant si tout sommet de  $S$  a moins de  $k$  voisins dans  $S$ , ou encore si  $\Delta(G[S]) \leq k - 1$ .

**Définition 2.5.** [48] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Un  $k$ -indépendant  $S$  de  $G$  est maximal si pour tout sommet  $x$  dans  $V - S$ ,  $S \cup \{x\}$  n'est pas un  $k$ -indépendant.

De même, nous donnons ci-dessous les conditions dans lesquelles un ensemble  $k$ -indépendant d'un graphe  $G$  est maximal.

**Théorème 2.6.** [30] Soit  $S$  un ensemble  $k$ -indépendant d'un graphe  $G$ . Alors  $S$  est maximal si et seulement si pour tout sommet  $v \in V - S$ ,

1.  $v$  est adjacent à au moins  $k$  sommets de  $S$ , ou
2.  $v$  est adjacent à un sommet  $u \in S$  qui a exactement  $k - 1$  voisins dans  $S$ .

Les cardinalités minimum et maximum d'un  $k$ -indépendant maximal de  $G$  sont notés  $i_k(G)$  et  $\beta_k(G)$ , où  $\beta_k(G)$  est appelé le *nombre de  $k$ -indépendance*.

De ce qui précède, nous avons les propriétés générales suivantes.

1. Tout sous-ensemble d'un  $k$ -indépendant est  $k$ -indépendant.
2. Tout ensemble de  $k$  sommets est  $k$ -indépendant d'où  $i_k(G) \geq k$  pour tout graphe  $G$ .
3. Tout ensemble  $k'$ -indépendant est  $k$ -indépendant pour  $k' \leq k \leq \Delta + 1$ , et donc la séquence  $(\beta_k)$  est croissante. De plus  $V$  est le seul  $(\Delta + 1)$ -indépendant maximal mais n'est pas un  $\Delta$ -indépendant. On en déduit que pour tout graphe  $G$ ,  $\beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = i_{\Delta+1}(G) = n$ .

### 2.1.3 Autres propriétés

**Proposition 2.7.** [45] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Alors

1. *Tout sous-ensemble  $S$  de  $V$  à la fois  $k$ -indépendant et  $k$ -dominant ( s'il en existe ) est  $k$ -indépendant maximal.*
2. *Tout sous-ensemble  $S$  de  $V$  à la fois  $k$ -indépendant et  $k$ -dominant ( s'il en existe ) est  $k$ -dominant minimal.*

**Remarque 2.8.** [45] *Pour  $k \geq 2$ , un ensemble  $S$ ,  $k$ -indépendant maximal n'est pas nécessairement  $k$ -dominant. La couronne d'un cycle  $C_n \circ K_1$  est un exemple, en effet  $V(C_n)$  est un ensemble 3-indépendant maximal, mais pas un ensemble 3-dominant.*

En 1989, Jacobson et Peters [66] ont montré que la détermination des nombres  $\gamma_k(G)$  et  $\beta_k(G)$  pour un graphe arbitraire est NP-complet et ont donné des algorithmes linéaires dans les arbres et dans les graphes série-parallèles.

En 1994, Bean, Henning et Swart [1] ont montré que le problème reste NP-complet dans les graphes bipartis et les graphes triangulés pour  $\gamma_k(G)$ .

Notons qu'un ensemble  $k$ -indépendant est parfois appelé  $(k - 1)$ -dépendante [48, 49],  $k$ -dépendante [67],  $(k - 1)$ -small [65]. De plus, le terme  $k$ -domination est parfois utilisé pour la domination  $k$ -distance introduite par Meir et Moon [75].

Pour  $k = 1$  on retrouve les paramètres de la domination est de l'indépendance usuelles  $\gamma(G)$ ,  $\Gamma(G)$ ,  $i(G)$  et  $\beta(G)$ .

## **2.2 Des inégalités et égalités entre deux paramètres**

### **2.2.1 Des relations entre deux paramètres de même type**

#### **Graphes généraux:**

Nous avons vu dans l'introduction que la suite  $(\gamma_k)$  est croissante. Dans [48, 49], Fink et Jacobson ont soulevé la question de la vitesse à laquelle le nombre de  $k$ -domination augmente avec  $k$ .

**Théorème 2.9.** [48] *Soit  $G$  un graphe avec  $\Delta \geq k \geq 2$ . Alors on a:*

$$\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2. \tag{2.1}$$

Dans [49], Fink et Jacobson ont proposé une conjecture généralisant la propriété  $\gamma(G) < \gamma_3(G)$  sous la forme  $\gamma_k(G) < \gamma_{2k+1}(G)$  pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \leq \delta$ .

Cette inégalité a été prouvée dans le cas  $k = 2$  par Chen et Jacobson [31] pour  $\delta \geq 2$ .

**Théorème 2.10.** [31] *Pour tout graphe  $G$  avec  $\delta \geq 2$ , on a:  $\gamma_2(G) < \gamma_5(G)$ .*

Le théorème précédent est le meilleur possible dans la mesure où il existe une infinité de graphes  $G$  avec un degré minimum au moins 2 et ayant  $\gamma_2(G) = \gamma_4(G)$ .

Mais Schelp a construit une famille de graphes contredisant la conjecture pour un entier pair  $k \geq 8$ . La conjecture donc a été modifiée et reste ouverte sous la forme suivante.

**Conjecture 2.11.** [49] *Il existe une application  $f : N \rightarrow N$  telle que  $\gamma_k(G) < \gamma_{f(k)}(G)$  pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \leq \delta$ .*

D'après l'exemple de Schelp, si la conjecture est vraie alors  $f(k) > \frac{k^2+2k}{4}$ . Nous donnons ci-dessous quelques autres résultats relatifs à ce sujet.

Une telle fonction  $f$  ne peut pas exister dans les graphes en général, pour la séquence  $(\beta_k)$ , car l'étoile  $K_{1,n}$  satisfait  $\beta(K_{1,n}) = \beta_2(K_{1,n}) = \dots = \beta_{n-1}(K_{1,n}) = n - 1$ .

Des problèmes similaires n'existent pas pour les séquences  $(i_k)$  et  $(\Gamma_k)$ . Des exemples, donnés par Favaron dans [45], montrent que  $(i_k)$  et  $(\Gamma_k)$  ne sont pas nécessairement monotone: Pour la chenille  $C(2, 0, 2)$ ,  $\Gamma_2(G) = 6 > \Gamma_3(G) = 5$  et pour la  $\overline{K_2}$ -courronne de  $C_3$ ,  $i_1(G) = 5 > i_2(G) = 4$  (voir Figure 2.1).

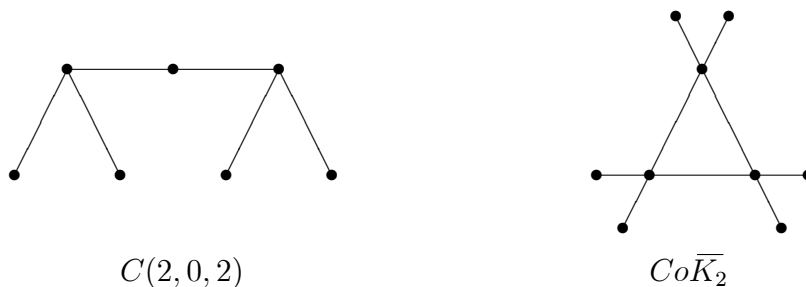


FIGURE 2.1.

**Théorème 2.12.** [88] Pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \leq \delta - 1$ , on a :

$$\gamma_{k+1}(G) \leq \frac{n + \gamma_k(G)}{2}.$$

Le graphe obtenu à partir d'une clique  $B$  d'ordre  $k$  et  $p \geq k$  cliques  $A_i$  d'ordre 2 en ajoutant toutes les arêtes entre  $B$  et les  $A_i$  vérifie  $n = k + 2p$ ,  $\delta = k + 1$ ,  $\gamma_k(G) = k$  et  $\gamma_{k+1}(G) = k + p = (n + \gamma_k(G))/2$  (voir Figure 2.2).

Dans [88], Volkmann a caractérisé les graphes connexes sans  $P_4$  avec la propriété que  $\overline{G}$  est sans  $K_4 - e$  atteignant l'égalité dans le Théorème 2.12.

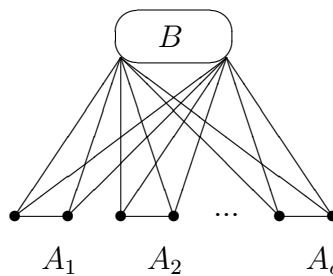


FIGURE 2.2. Le graphe  $G$

**Théorème 2.13.** [47] Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ , et tous entiers  $k$  et  $k'$  avec  $1 \leq k \leq k' \leq \delta$ , on a :

$$\gamma_k(G) + \left( \frac{k' - k + 1}{2k' - k} \right) \gamma_{k'}(G) \leq n.$$

**Théorème 2.14.** [7] Pour tout graphe  $G$  et tous entiers  $j, k$  avec  $1 \leq j \leq k$ , on a :

1.  $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_j(G) + \beta_{k-j+1}(G)$ .
2.  $i_{k+1}(G) \leq (k - j + 2)i_j(G)$ . L'égalité ne peut se produire que lorsque  $j = 1$  ou  $j = k$ .

Par le Théorèmes 2.14, on a  $\beta_{k+1}(G) \leq (k + 1)\beta(G)$  et  $i_k(G) \leq (k + 1)i(G)$ .

### Classes particulières de graphes:

Les résultats suivants établissent la conjecture de Fink et Jacobson avec détermination de  $f(k)$  dans la classe des graphes sans  $K_{1,3}$  ou dans des sous-classes de cette classe, ainsi que des propriétés de même nature portant sur  $\beta_k$ .

**Théorème 2.15.** [49] Si  $G$  est sans  $K_{1,3}$  et  $2 \leq k \leq \Delta$ , alors on a :

$$\gamma_k(G) < \gamma_{2k}(G).$$

**Théorème 2.16.** [45] Si  $G$  est sans  $K_{1,3}$  et  $k \leq \Delta$ , alors on a :

$$\beta_k(G) < \beta_{2k+1}(G).$$

**Théorème 2.17.** [11] Soit  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta + 1$ . Si  $G$  est cubique sans  $K_{1,3}$  ou  $G$  est 4-régulier sans  $\{K_{1,3}, C_4\}$  alors on a :

$$\gamma_k(G) < \gamma_{k+1}(G) \quad \text{et} \quad \beta_k(G) < \beta_{k+1}(G).$$

Nous nous concentrons sur la classe de graphes sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  pour laquelle nous caractérisons les graphes tels que  $\gamma_{k+1}(G) < \gamma_k(G)$  et  $\beta_k(G) < \beta_{k+1}(G)$  pour tout entier positif  $k \geq 1$ . A cet effet, voici d'abore un résultat qui donne la structure des graphes sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ , établi par Bouchou, Blidia et Chellali dans [20]. Notons que  $H_n$  est le graphe complet d'ordre  $n$  moins un couplage parfait. Le graphe  $K_p + H_q$ , est le joint d'une clique  $K_p$  et d'un graphe  $H_q$ , où  $p \geq 1$  et  $q \geq 2$  (voir Figure 2.3).

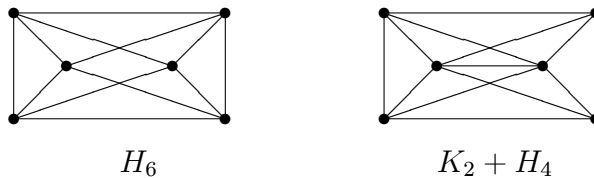


FIGURE 2.3.

**Lemme 2.18.** [20] Si  $G$  est un graphe connexe sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ , alors  $G = K_p + H_q$ , où  $p + q = n$  et  $p \geq 1$  et  $q$  est un entier positif pair, ou  $G \in \{P_n, C_n, K_n, H_n\}$ .

Preuve. Soit  $G$  un graphe connexe sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ . Il est clair que si  $\Delta \leq 2$ , alors  $G \in \{P_n, C_n\}$ . Supposons donc que  $\Delta \geq 3$  et soit  $y$  un sommet de  $G$  de degré maximum  $\Delta$ . On pose  $A = N_G(y)$ . Comme  $G$  est sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ , pour tout sommet  $x$  de  $A$ ,  $\Delta - 2 \leq |N_G(x) \cap A| \leq \Delta - 1$ . Si  $|N_G(x) \cap A| = \Delta - 1$  pour tout  $x$  de  $A$ , alors  $V = A \cup \{y\}$  et donc  $G = K_{\Delta+1}$ . Maintenant on suppose que  $A$  contient deux sommets non adjacents  $x$  et  $x'$ . Etant donné que chaque sommet de  $A$  a au moins  $\Delta - 2$  voisins



dans  $A$ , on obtient  $|N_G(x) \cap A| = |N_G(x') \cap A| = \Delta - 2$ . Il en résulte que chaque sommet de  $A$  a au plus un voisin dans  $V - (A \cup \{y\})$ , comme  $\Delta \geq 3$ ,  $x$  et  $x'$  ont au moins un voisin commun  $b \in A$ . Supposons que  $V - (A \cup \{y\}) \neq \emptyset$ , et soit  $z$  un sommet de  $V - (A \cup \{y\})$  ayant un voisin dans  $A$ . Comme tout voisin de  $z$  dans  $A$  est de degré  $\Delta$ , on suppose, sans perte de généralité, que  $z$  et  $x$  sont adjacents. Alors,  $z$  est adjacent à tous les voisins de  $x$  dans  $A$ , sinon  $y, x, z, x''$  induisent un  $K_{1,3} + e$ , où  $x'' \in N_G(x) - (N_G(z) \cup \{y, z\})$ , une contradiction. En plus,  $z$  est adjacent à  $x'$ , sinon  $y, x', z, b$  induisent un  $K_{1,3} + e$ , une contradiction. Ainsi  $z$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ , ce qui implique que chaque sommet de  $G$  est de degré  $\Delta = n - 2$ . Par conséquent  $G$  est un graphe complet moins un couplage parfait. Enfin, supposons que  $V - (A \cup \{y\}) = \emptyset$ . Rappelons que  $A$  contient deux sommets non adjacents, et donc  $G$  n'est pas complet. D'où  $G$  est un graphe d'ordre  $\Delta + 1$  ayant au moins un sommet de degré  $\Delta = n - 1$  et au moins deux sommets de degré  $\Delta - 1$ . Par conséquent,  $G$  est le joint d'un graphe complet (induit par les sommets de degré maximum  $\Delta$ ) et un graphe complet moins un couplage parfait (induit par les sommets de degré  $\Delta - 1$ ).  $\square$

**Observation 2.19.** *Si  $n > k$ , alors  $\gamma_k(K_n) < \gamma_{k+1}(K_n)$  et  $\beta_k(K_n) < \beta_{k+1}(K_n)$ .*

**Observation 2.20.** *Soit  $P_n$  la chaîne d'ordre  $n$ . Alors on a :*

1. *Pour tout  $n \geq 3$ ,  $\gamma(P_n) < \gamma_2(P_n) < \gamma_3(P_n) = n$ .*
2. *Pour tout  $n \geq 4$ ,  $\beta(P_n) < \beta_2(P_n) < \beta_3(P_n) = n$ .*

**Observation 2.21.** *Soit  $C_n$  un cycle différent de  $C_4$ . Alors on a :*

$$\gamma(C_n) < \gamma_2(C_n) < \gamma_3(C_n) = n \text{ et } \beta(C_n) < \beta_2(C_n) < \beta_3(C_n) = n.$$

Maintenant, nous étudions la croissance des séquences  $(\gamma_k)$  et  $(\beta_k)$  en donnant les valeurs exactes de  $\gamma_k(G)$  et  $\beta_k(G)$  pour les graphes  $H_n$  et  $K_p + H_q$ .

**Remarque 2.22.**  *$H_n$  est un graphe  $(n-2)$ -régulier d'ordre  $n$  pair.  $K_p + H_q$  est un graphe semi-régulier d'ordre  $n = p + q \geq 3$ , de degré maximum  $\Delta = n - 1$  et de degré minimum  $\delta = n - 2$ .*

**Théorème 2.23.** [11] Soit  $G$  un graphe connexe  $(n - 2)$ -régulier d'ordre  $n \geq 4$  et  $k \leq n - 1$ . Alors on a :

$$\gamma_k(G) = \beta_k(G) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair,} \\ k + 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

**Corollaire 2.24.** [11] Soit  $G$  un graphe connexe  $(n - 2)$ -régulier d'ordre  $n \geq 4$  et  $k \leq n - 1$ . Alors on a :

$$\mu_{k+1}(G) = \begin{cases} \mu_k(G) + 1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \mu_k(G) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

tel que  $\mu_k = \gamma_k$  ou  $\beta_k$ .

**Théorème 2.25.** [16] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Si  $G = K_p + H_q$  avec  $n = p + q$ ,  $p \geq 1$  et  $q \geq 2$ , alors pour tout  $k \leq n$ , on a :

$$\gamma_k(G) = k.$$

Preuve. Soit  $D = D_1 \cup D_2$  un sous-ensemble de  $V$  avec  $D_1 \subseteq V(K_p)$  et  $D_2 \subseteq V(H_q)$  tel que le sous graphe  $G[D_2]$  induit par  $D_2$  est  $(|D_2| - 2)$ -régulier et  $|D| = k$ , alors  $D$  est un ensemble  $k$ -dominant de  $G$ . Donc  $\gamma_k(G) \leq |D| = k$ , et l'égalité découle du fait que  $\gamma_k(G) \geq k$ , pour  $k \leq n$ .  $\square$

**Corollaire 2.26.** [16] Si  $G = K_p + H_q$  avec  $n = p + q$ ,  $p \geq 1$  et  $q \geq 2$ , alors pour tout  $k \leq n$ , on a :

$$\gamma_{k+1}(G) = \gamma_k(G) + 1.$$

**Théorème 2.27.** [16] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Si  $G = K_p + H_q$  avec  $n = p + q$ ,  $p \geq 1$  et  $q \geq 2$ , alors pour tout  $k \leq n$ , on a :

$$\beta_k(G) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair ou } k \geq q, \\ k + 1 & \text{si } k \text{ est impair et } k \leq q - 1. \end{cases}$$

Preuve. On sait que  $\beta_k(G) \geq k$ , pour tout  $k \leq n$ . Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble. Alors pour tout sommet  $x$  de  $S$ ,  $|N_S(x)| \leq k - 1$ . Montrons que  $|S| \leq k + 1$ , supposons que  $|S| \geq k + 2$ , par la définition du graphe  $G$ ,  $|N_S(x)| \geq |S| - 2 \geq k$ , pour tout sommet  $x$  de  $S$ , ce qui contredit le fait que  $S$  est un  $k$ -indépendant. Supposons que  $|S| = k + 1$ , pour

tout sommet  $x$  de  $S$ ,  $|N_S(x)| \geq |S| - 2 = k - 1$ , alors  $|N_S(x)| = k - 1$  donc le sous graphe  $G[S]$  induit par  $S$  est  $(k - 1)$ -régulier d'ordre  $k + 1$  avec  $k$  impair et donc  $S \subseteq V(H_q)$  et  $k \leq q - 1$ . Pour la réciproque, supposons que  $k$  est impair et  $k \leq q - 1$ , alors il existe un sous-graphe  $G[S]$  de  $H_q$  d'ordre  $k + 1$  qui est  $(k - 1)$ -régulier. Il est clair que  $S$  est un ensemble  $k$ -indépendant maximum, et donc  $\beta_k(G) = k + 1$ .  $\square$

**Corollaire 2.28.** [16] Si  $G = K_p + H_q$  avec  $n = p + q$ ,  $p \geq 1$  et  $q \geq 2$ , alors pour tout  $k \leq n$ , on a:

$$\beta_{k+1}(G) = \begin{cases} \beta_k(G) + 1 & \text{si } k \text{ est pair ou } k \geq q, \\ \beta_k(G) & \text{si } k \text{ est impair et } k \leq q - 1. \end{cases}$$

Le Lemme 2.18, les Observations 2.19, 2.20 et 2.21, et les Corollaires 2.24, 2.26 et 2.28, donnent la caractérisation de tous les graphes  $G$  sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  tel que  $\gamma_{k+1}(G) < \gamma_k(G)$  et  $\beta_k(G) < \beta_{k+1}(G)$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

**Théorème 2.29.** [16] Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 4$  et sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ . Alors on a:

1. La séquence  $(\gamma_k)$  est strictement croissante si et seulement si  $G \in \{P_n, C_n, K_n, K_p + H_q \text{ avec } p + q = n\}$ .
2. La séquence  $(\beta_k)$  est strictement croissante si et seulement si  $G \in \{P_n, C_n, K_n\}$ .

## 2.2.2 Des relations entre des paramètres de différents types

Selon la célèbre chaîne d'inégalités (1.1) du Chapitre 1 établie par Cockayne, Hedetniemi et Miller [37], tout graphe  $G$  satisfait  $\gamma(G) \leq \beta(G)$ . Dans [48], Fink et Jacobson ont prouvé que  $\gamma_2(G) \leq \beta_2(G)$ . Ce résultat a incité Fink et Jacobson à conjecturer que pour tout graphe  $G$  et tout entier positif  $k$ ,  $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$ . Cette inégalité n'est pas évidente pour  $k \geq 3$ , un  $k$ -indépendant maximal n'est pas nécessairement  $k$ -dominant. La conjecture a été prouvée par Favaron [44] grâce à un résultat plus fort.

**Théorème 2.30.** [44] Pour tout graphe  $G$  et tout entier positif  $k$ , tout ensemble  $k$ -indépendant  $S$  tel que  $k|S| - m(G[S])$  est maximum, est un ensemble  $k$ -dominant.

D'après le Théorème 2.30, tout graphe  $G$  admet un ensemble  $S$  à la fois  $k$ -indépendant et  $k$ -dominant. Comme un tel ensemble est un  $k$ -dominant minimal et un  $k$ -indépendante maximal,  $\gamma_k(G) \leq |S| \leq \Gamma_k(G)$  et  $i_k(G) \leq |S| \leq \beta_k(G)$ . Donc,

**Corollaire 2.31.** [44] *Pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \geq 1$ , on a:*

$$\gamma_k(G) \leq \beta_k(G) \quad \text{et} \quad i_k(G) \leq \Gamma_k(G).$$

La chaîne d'inégalité (1.1) est maintenant partiellement généralisé. On peut se demander si une généralisation complète est possible pour tout entier positif  $k$ . La réponse est négative comme l'a remarqué Favaron dans [45]. Les exemples suivants montrent que chacune des quatre inégalités  $\gamma_k(G) > i_k(G)$ ,  $i_k(G) > \gamma_k(G)$ ,  $\Gamma_k(G) > \beta_k(G)$  et  $\beta_k(G) > \Gamma_k(G)$  est possible.

Pour la chenille  $G = C(2, 2)$ , nous avons  $\gamma_3(G) = 5 > i_3(G) = 4$ , tandis que pour le graphe  $G'$  construit à partir de  $3P_5$  avec les centres  $a, b, c$  en ajoutant les arêtes  $ab$  et  $bc$ ,  $i_2(G') = 10 > \gamma_2(G') = 9$ .

Considérons maintenant la chenille  $G'' = C(2, 0, 2)$ . Alors  $\Gamma_2(G'') = 6 > \beta_2(G'') = 5$ , tandis que  $\Gamma_3(G'') = 5 < \beta_3(G'') = 6$ .

Toutefois, certaines inégalités peuvent être prouvées dans des situations particulières, comme l'indiquent les théorèmes suivants.

**Théorème 2.32.** [8] *Si  $T$  est un arbre, alors pour tout entier positif  $k \geq 2$ , on a:*

$$\gamma_k(T) \geq \beta_{k-1}(T).$$

Une caractérisation constructive des arbres extrimaux a été donnée par les même auteurs. Aussi le cas particulier  $k = 2$  a été donné par Blidia, Chellali et Favaron dans [5].

Donc d'après le Théorème 2.32 et le Corollaire 2.31, pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta$  on a:

$$\gamma(T) \leq \beta(T) \leq \gamma_2(T) \leq \beta_2(T) \leq \dots \leq \gamma_\Delta(T) \leq \beta_\Delta(T) \leq \gamma_{\Delta+1}(T) = \beta_{\Delta+1}(T) = n.$$

**Théorème 2.33.** [55] Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$  et  $k$  un entier avec  $2 \leq k \leq \Delta$ . Si  $\gamma_k(G) = \gamma(G) + k - 2$  et  $D$  est un ensemble  $k$ -dominant minimum, alors  $D$  est un ensemble  $(k - 1)$ -indépendant de  $G$  et donc  $\gamma_k(G) \leq \beta_{k-1}(G)$ .

**Théorème 2.34.** [67] Si  $\gamma_{k+1}(G) = \gamma_k(G)$  pour un entier positif  $k$ , alors on a :

$$\gamma_k(G) \geq i_k(G).$$

**Théorème 2.35.** [30] Tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  satisfait

$$\beta_\Delta(G) \geq \Gamma_\Delta(G).$$

**Théorème 2.36.** [13] Tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  satisfait

$$\gamma_\Delta(G) \geq i_\Delta(G).$$

Preuve. Soit  $D$  un  $\gamma_\Delta$ -ensemble de  $G$ . Alors  $\Delta(G[D]) \leq \Delta - 1$  sinon  $D$  contient un sommet  $v$  de degré  $\Delta$  qui a tous ses voisins dans  $D$  et donc  $D - \{v\}$  est un ensemble  $\Delta$ -dominant, contradiction avec la minimalité de  $D$ . Donc  $D$  est un ensemble  $\Delta$ -indépendant maximal dans  $G$ , d'où  $i_\Delta(G) \leq |D| = \gamma_\Delta(G)$ .  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des deux théorèmes précédents qui donne une chaîne d'inégalité reliant les quatre paramètres  $i_\Delta(G)$ ,  $\gamma_\Delta(G)$ ,  $\Gamma_\Delta(G)$  et  $\beta_\Delta(G)$ .

**Corollaire 2.37.** [13] Tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  satisfait

$$i_\Delta(G) \leq \gamma_\Delta(G) \leq \Gamma_\Delta(G) \leq \beta_\Delta(G). \quad (2.2)$$

Dans la partie restante de la sous-section, nous donnons des relations entre deux paramètres de différents types et de différents indices.

Dans [67], Jacobson, Peters et Rall ont observé que, si  $S$  est un ensemble  $k$ -indépendant d'un graphe  $G$  de degré minimum  $\delta \geq k$ , alors  $V - S$  est un ensemble  $(\delta - k + 1)$ -dominant. De même, Favaron [46] a observé que, si  $S$  est un ensemble  $k$ -dominant d'un graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta \geq k$ , alors  $V - S$  est un ensemble  $(\Delta - k + 1)$ -indépendant.

**Proposition 2.38.** [67] Soit  $G$  un graphe de degré minimum  $\delta$  et  $k, j$  deux entiers positifs avec  $k + j - 1 = \delta$ . Alors on a :  $\beta_j(G) + \gamma_k(G) \leq n$ .

**Proposition 2.39.** [46] Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$  et  $k, j$  deux entiers positifs avec  $k + j - 1 = \Delta$ . Alors on a:  $\beta_j(G) + \gamma_k(G) \geq n$ .

Et si  $G$  est  $d$ -régulier avec  $d = k + j - 1$ , alors on a:  $\beta_j(G) + \gamma_k(G) = n$ .

**Théorème 2.40.** [57] Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta \geq 1$ . Alors on a:

$$\gamma_k(G) + \beta_j(G) = n \quad \text{et} \quad \gamma_{k'}(G) + \beta_{j'}(G) = n$$

pour toute paire d'entiers  $k, j$  et  $k', j'$  tel que  $k + j - 1 = \delta$  et  $k' + j' - 1 = \Delta$  si et seulement si  $G$  est régulier.

Enfin nous donnons une relation entre  $\Gamma_k(G)$  et  $i_j(G)$  dans les graphes réguliers.

**Théorème 2.41.** [13] Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier d'ordre  $n$  et  $k, j$  deux entiers positifs avec  $d = k + j - 1$ . Alors on a:

$$\Gamma_k(G) + i_j(G) = n.$$

Preuve. Soit  $S$  un  $i_j(G)$ -ensemble de  $G$ . Alors pour tout  $x \in S$ ,  $d_S(x) \leq j - 1$  et donc  $d_{V-S}(x) \geq k$ , par conséquent  $V - S$  est un  $k$ -dominant de  $G$ . Maintenant montrons que  $V - S$  est  $k$ -dominant minimal. En effet, supposons le contraire, que  $V - S$  a un sommet  $y$  tel que  $(V - S) - \{y\}$  est un  $k$ -dominant, c.à.d que  $d_{V-S}(y) \geq k$  et  $d_{V-S}(v) \geq k + 1$  pour tout  $v \in N_S(y)$ , et donc  $d_S(y) \leq j - 1$  et  $d_S(v) \leq j - 2$  en contradiction avec la maximalité de  $S$ . Donc  $V - S$  est un ensemble  $k$ -dominant minimal. Par conséquent  $\Gamma_k(G) \geq |V - S| = n - i_j(G)$ .

D'autre part, soit  $D$  un  $\Gamma_k(G)$ -ensemble de  $G$ . Alors  $d_D(x) \geq k$  pour tout sommet  $x$  de  $V - D$  et  $d_{V-D}(x) \leq j - 1$ , et donc  $V - D$  est  $j$ -indépendant. Maintenant montrons que  $V - D$  est maximal, en effet, supposons que  $D$  a un sommet  $y$  tel que  $(V - D) \cup \{y\}$  est un  $j$ -indépendant, c.à.d que  $d_{V-D}(y) \leq j - 1$  et  $d_{V-D}(v) \leq j - 2$  pour tout  $v \in N_{V-D}(y)$ , et donc  $d_D(y) \geq k$  et  $d_D(v) \geq k + 1$  en contradiction avec la minimalité de  $D$ . Donc  $V - D$  est un ensemble  $k$ -indépendant maximal. Par conséquent  $i_j(G) \leq |V - D| = n - \Gamma_k(G)$ .  $\square$

## 2.3 Bornes sur les paramètres $\gamma_k(G)$ et $\beta_k(G)$

### 2.3.1 Bornes sur $\gamma_k$

Dans leur papier introduisant la  $k$ -domination et la  $k$ -indépendance, Fink et Jacobson ont donné des bornes sur  $\gamma_k(G)$ . Les résultats suivants donnent des minorants pour  $\gamma_k(G)$ .

Nous rappelons les preuves des Théorèmes 2.42 et 2.48 qui sont utiles pour des caractérisations des graphes extrimaux dans des cas particuliers.

**Théorème 2.42.** [48] *Pour tout graphe  $G$  avec  $n$  sommets,  $m$  arêtes et pour tout entier positif  $k \leq \Delta$ , on a :*

$$\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k} \quad \text{et} \quad \gamma_k(G) \geq \frac{kn}{\Delta + k}.$$

Preuve. Soit  $D$  un  $\gamma_k(G)$ -ensemble. Le nombre  $m(D, V - D)$  des arêtes entre  $D$  et  $V - D$  satisfait  $k|V - D| \leq m(D, V - D) \leq \Delta|D|$ . On peut déduire que le nombre  $m$  d'arêtes de  $G$  satisfait  $m \geq k|V - D|$ , donc  $\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k}$  et  $k|V - D| \leq \Delta|D|$ . Par conséquent  $\gamma_k(G) \geq \frac{kn}{\Delta + k}$ .  $\square$

**Théorème 2.43.** [48] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m \neq 0$  et  $k$  un entier positif, alors  $\gamma_k(G) = n - \frac{m}{k}$  si et seulement si  $G$  est un graphe biparti  $k$ -semi-régulier.*

*En particulier,  $\gamma_2(G) = n - \frac{m}{2}$  si et seulement si  $G$  est le graphe subdivisé d'un autre multigraphe graphe (graphe éventuellement, avec des arêtes parallèles).*

Comme  $m = n - 1$  pour les arbres  $T$ , il résulte du Théorème 2.42 que  $\gamma_k(T) \geq \frac{(k-1)n+1}{k}$ .

Dans [86], Volkmann a fourni une amélioration du Théorème 2.43 pour les arbres.

**Théorème 2.44.** [86] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$  et  $k$  un entier positif. Alors*

$$\gamma_k(T) = \left\lceil \frac{(k-1)n+1}{k} \right\rceil$$

*si et seulement si*

- (i)  $n = pt + 1$  avec  $t$  un entier positif et  $T$  est un arbre  $k$ -semi-régulier ou  $n = 1$  ou
- (ii)  $n = pt + r$  avec  $t$  un entier positif et  $2 \leq r \leq k$  et  $T$  formé par  $r$  arbres  $T_1, T_2, \dots, T_r$  qui vérifient les conditions en (i) et  $r - 1$  arêtes tels que les arbres  $T_1, T_2, \dots, T_r$  avec ces arêtes forment un arbre.

Dans [60], Hansberg et Volkmann ont donné une amélioration du Théorème 2.42 pour tout graphe. Soit  $\mu_0$  le nombre minimum d'arêtes qui peuvent être supprimées d'un graphe  $G$  tel que le graphe résultant est biparti.

**Théorème 2.45.** [60] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m$  et  $k$  un entier positif, alors on a:*

$$\gamma_k(G) \geq n - \frac{m - \mu_0}{k}.$$

*En outre, si  $m \neq 0$ , alors  $\gamma_k(G) = \lceil n - \frac{m - \mu_0}{k} \rceil$  si et seulement si  $G$  contient un facteur biparti  $k$ -semi-régulière  $H$  avec  $m(H) = m - \mu_0 - r$ , où  $r$  est un entier tel que  $0 \leq r \leq k - 1$  et  $m - \mu_0 - r \equiv 0 \pmod{k}$ .*

**Proposition 2.46.** [13] *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta$ . Alors  $\gamma_k(G) = \frac{kn}{\Delta + k}$  si et seulement si  $V = X \cup Y$ , où  $|X| = \frac{kn}{\Delta + k}$ , chaque sommet de  $X$  a  $\Delta$  voisins dans  $Y$  et chaque sommets de  $Y$  a exactement  $k$  voisins dans  $X$ .*

Preuve. Supposons que  $\gamma_k(G) = \frac{kn}{\Delta + k}$ . Soit  $D$  un  $\gamma_k(G)$ -ensemble de  $G$ . Alors, par la preuve du Théorème 2.42-2,  $k|V - D| = m(D, V - D) = \Delta|D|$ . Il est clair que chaque sommet de  $D$  a  $\Delta$  voisins dans  $V - D$  et donc l'ensemble  $S$  est indépendant et chaque sommet de  $V - S$  a exactement  $k$  voisins dans  $S$ .

Inversement, il est facile de voir que si  $G$  est l'un des graphes décrits dans la Proposition 2.46, alors chaque sommets de  $Y$  a exactement  $k$  voisins dans  $X$ , et donc  $X$  est un  $k$ -dominant de  $G$ . D'où  $\gamma_k(G) \leq |X| = \frac{kn}{\Delta + k}$ , et l'égalité découle du fait que  $\gamma_k(G) \geq \frac{kn}{\Delta + k}$ .  $\square$

Pour le cas particulier  $k = \Delta$ , on a le résultat suivant.

**Corollaire 2.47.** [13] *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $\gamma_\Delta(G) = \frac{n}{2}$  si et seulement si  $G$  est un graphe biparti régulier.*

**Théorème 2.48.** [57] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m \neq 0$  et de degré maximum  $\Delta$ , et soit  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta$ . Alors on a:*

$$\gamma_k(G) \geq \frac{2m - (k - \Delta)n}{\Delta + k}.$$



Preuve. Soit  $D$  un ensemble  $k$ -dominant minimum de  $G$ . Alors tout sommet de  $V - D$  a au moins  $k$  voisins dans  $D$ , et donc  $m(G[V - D]) \leq \frac{1}{2}(\Delta - k)(n - \gamma_k(G))$ . En outre,  $m(G[D]) + m(D, V - D) \leq \Delta\gamma_k(G)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} m &= m(G[V - D]) + m(G[D]) + m(D, V - D) \\ &\leq \frac{1}{2}(\Delta - k)(n - \gamma_k(G)) + \Delta\gamma_k(G), \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\gamma_k(G) \geq \frac{2m - (\Delta - k)n}{\Delta + k}$ .  $\square$

**Proposition 2.49.** [13] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m \neq 0$  et de degré maximum  $\Delta$  et soit  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta$ . Alors  $\gamma_k(G) = \frac{2m - (\Delta - k)n}{\Delta + k}$  si et seulement si  $V = X \cup Y$ , où  $|X| = \frac{2m - (k - \Delta)n}{\Delta + k}$ , chaque sommet de  $X$  a  $\Delta$  voisins dans  $Y$ , chaque sommet de  $Y$  a exactement  $k$  voisins dans  $X$  et  $G$  est régulier.

Preuve. Soit  $S$  un  $\gamma_k(G)$ -ensemble. Par la preuve du Théorème 2.40. Si  $\gamma_k(G) = \frac{2m - (\Delta - k)n}{\Delta + k}$ , alors  $m(G[V - D]) = \frac{1}{2}(\Delta - k)(n - \gamma_k(G))$  et  $m(G[D]) + m(D, V - D) = \Delta\gamma_k(G)$ , et donc  $G[V - D]$  est  $(\Delta - k)$ -régulier, chaque sommet de  $V - D$  a exactement  $k$  voisins dans  $D$ ,  $D$  est indépendant et chaque sommet de  $D$  a  $\Delta$  voisins dans  $V - D$ . Donc  $G$  est régulier.

Inversement, il est facile de voir que si  $G$  est l'un des graphes décrits dans la Proposition 2.49, alors  $d_X(y) = k$  pour tout  $y \in Y$ , et donc  $Y$  est  $k$ -dominant. D'où  $\gamma_k(G) \leq |X| = \frac{2m - (\Delta - k)n}{\Delta + k}$ , et l'égalité découle du fait que  $\gamma_k(G) \geq \frac{2m - (\Delta - k)n}{\Delta + k}$ .  $\square$

Pour le cas particulier  $k = \Delta$ , on a le résultat suivant.

**Corollaire 2.50.** [13] Soit  $G$  un graphe de taille  $m$  et de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $\gamma_\Delta(G) = \frac{m}{\Delta}$  si et seulement si  $G$  est biparti régulier.

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur  $\gamma_k(G)$ . En 1962, Ore [76] a prouvé que le nombre de domination d'un graphe sans sommets isolés est au plus la moitié de son ordre ( $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$ ). Les graphes extrémaux atteignant cette borne ont été déterminés par Payan et Xuong [77], et indépendamment par Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [50]. La première borne supérieure sur le nombre  $\gamma_k(G)$  généralisée a été donnée

par Cockayne, Gamble et Shepherd en 1985. Cette borne supérieure a été améliorée plus tard par d'autres auteurs, parmi eux Caro et Roditty [25], Stracke et Volkmann [85], Chen et Zhou [32] et Favaron, Hansberg et Volkmann [47].

Dans [34], Cockayne, Gamble et Shepherd ont donné une borne supérieure en fonction du degré minimum  $\delta$ .

**Théorème 2.51.** [34] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  un entier avec  $k \leq \delta$ , alors on a :*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{k+1}.$$

Si on pose  $k = k'$  dans le Théorème 2.13, on obtient immédiatement le Théorème 2.51. En utilisant le Théorème 2.13, Favaron, Hansberg et Volkmann [47] ont caractérisé les graphes extrémaux atteignant l'égalité dans le Théorème 2.51. Cette caractérisation généralise celle des graphes sans sommets isolés avec  $k = 1$ , donnée par Fink et al. [50], et indépendamment, par Payan et Xuong [77].

**Théorème 2.52.** [47] *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \delta$ . Alors  $\gamma_k(G) = \frac{kn}{k+1}$  si et seulement si  $k \geq 2$  et  $G$  est la  $K_k$ -couronne  $J \circ K_k$ , ou  $k = 1$  et  $G$  est la couronne  $J \circ K_1$  où  $J$  est un graphe connexe, ou  $G = C_4$ .*

**Théorème 2.53.** [25] *Soient  $r, k$  des entiers positifs et  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de degré minimum  $\delta \geq \frac{r+1}{r}k - 1$ . Alors, on a  $\gamma_k(G) \leq \frac{rn}{r+1}$ .*

La borne du Théorème précédent peut être présentée d'une manière équivalente, mais avec une forme plus explicite.

**Corollaire 2.54.** [47] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \delta$ , alors on a :*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil n}{\lceil k/(\delta+1-k) \rceil + 1}.$$

Dans [85], Stracke et Volkmann ont défini une généralisation de la notion de domination comme suit: Pour une fonction à valeurs entières  $f$  définie sur  $V$ , un ensemble  $D \subseteq V$

est appelé un ensemble  $f$ -dominant de  $G$ , si chaque  $x \in V - D$  est adjacent à au moins  $f(x)$  sommets de  $D$ . Le nombre de  $f$ -domination  $\gamma_f(G)$  de  $G$  est la cardinalité minimum d'un ensemble  $f$ -dominant de  $G$ . Il est clair que, si  $f(x) = k$  pour chaque sommet  $x$  de  $G$ ,  $\gamma_f(G)$  est le nombre de  $k$ -domination. Ils l'ont utilisé pour démontrer le Théorème 2.55.

**Théorème 2.55.** [85, 25] *Pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \geq 1$ , on a :*

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} (2k - \delta) n / (2k - \delta + 1) & \text{si } (\delta + 1) / 2 \leq k \leq \delta - 1, \\ n / 2 & \text{si } k \leq (\delta + 1) / 2. \end{cases}$$

En s'inspirant des idées de Stracke et Volkmann [85], Chen et Zhou [32] ont amélioré légèrement la borne du théorème 2.55.

**Théorème 2.56.** [32] *Pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \geq 1$ , on a :*

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} kn / (k + 1) & \text{si } k = \delta, \\ (2k - \delta - 1) n / (2k - \delta) & \text{si } (\delta + 3) / 2 \leq k \leq \delta - 1, \\ 2n / 3 & \text{si } k = (\delta + 2) / 2, \\ n / 2 & \text{si } k \leq (\delta + 1) / 2. \end{cases}$$

Le théorème suivant améliore la borne de Chen et Zhou pour  $(\delta + 3) / 2 \leq k \leq \delta - 1$ .

**Théorème 2.57.** [47] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  est un entier positif avec  $k \leq \delta$ , alors on a :*

$$\gamma_k(G) \leq \frac{\delta n}{2\delta + 1 - k}.$$

**Lemme 2.58.** [47] *Soit  $G$  un graphe. Si  $r \geq 1$  un entier, alors il existe une partition  $V_1, V_2, \dots, V_r$  de  $V$  telle que*

$$|N(u) \cap V_i| \leq \frac{d(u)}{r}$$

*pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  et tout  $u \in V_i$ .*

**Corollaire 2.59.** [13] *Soit  $G$  un graphe. Si  $r \geq 1$  un entier, alors il existe une partition  $V_1, V_2, \dots, V_r$  de  $V$  telle que*

$$|N(u) \cap (V - V_i)| \geq \frac{(r - 1) d(u)}{r}$$

*pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  et tout  $u \in V_i$ .*

**Théorème 2.60.** [13] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  est un entier positif avec  $k \leq \delta$ . Alors on a:

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} kn/\delta & \text{si } (\delta + 2)/2 \leq k \leq \delta, \\ n/2 & \text{si } k \leq (\delta + 1)/2. \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 2.59, il existe une partition  $V_1, V_2, \dots, V_r$  de  $V$  telle que  $|N(u) \cap (V - V_i)| \geq \frac{(r-1)d(u)}{r}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  et tout sommet  $u \in V_i$ , alors nous avons  $|N(u) \cap (V - V_i)| \geq \frac{(r-1)d(u)}{r} \geq \frac{(r-1)\delta}{r} = \delta - \frac{\delta}{r}$  et donc  $|N(u) \cap (V - V_i)| \geq \delta - \lfloor \frac{\delta}{r} \rfloor$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  et tout  $u \in V_i$ . Si  $k = \delta - \lfloor \frac{\delta}{r} \rfloor$ , alors  $k \geq \frac{\delta}{2}$  et  $|N(u) \cap (V - V_i)| \geq k$ . Par conséquent, chaque ensemble  $(V - V_i)$  est un  $k$ -dominant de  $G$  pour  $r \geq 2$  et  $1 \leq i \leq r$ . Donc  $\gamma_k(G) \leq \min_{1 \leq i \leq r} |V - V_i| = n - \max_{1 \leq i \leq r} |V_i| \leq n - \frac{n}{r} = (\delta - \frac{\delta}{r})\frac{n}{\delta} \leq (\delta - \lfloor \frac{\delta}{r} \rfloor)\frac{n}{\delta} = \frac{kn}{\delta}$ .

Pour  $k \leq \frac{\delta+1}{2}$ , nous avons  $\gamma_k(G) \leq \gamma_{\lfloor \frac{\delta+1}{2} \rfloor}(G) \leq \gamma_{\lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil}(G)$ , car la séquence  $(\gamma_k)$  est croissante. D'autre part, d'après le Théorème 2.38 et le Corollaire 2.31, nous avons respectivement,  $\beta_{\lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil}(G) + \gamma_{\lfloor \frac{\delta+1}{2} \rfloor}(G) \leq n$  et  $\gamma_{\lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil}(G) \leq \beta_{\lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil}(G)$ , et donc  $\gamma_{\lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil}(G) + \gamma_{\lfloor \frac{\delta+1}{2} \rfloor}(G) \leq n$ . Par conséquent  $2\gamma_k(G) \leq 2\gamma_{\lfloor \frac{\delta+1}{2} \rfloor}(G) \leq \gamma_{\lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil}(G) + \gamma_{\lfloor \frac{\delta+1}{2} \rfloor}(G) \leq n$ .  $\square$

On remarque que la borne du Théorème 2.60 est meilleure que la borne du Théorème 2.57 pour  $\delta > k + \sqrt{k}$ .

En affaiblissant considérablement la condition sur le degré minimum et en utilisant la méthode probabiliste, Rautenbach et Volkmann [80] ont présenté la borne suivante.

**Théorème 2.61.** [80] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta \geq 1$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ , alors on a:

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1} \left( k \ln(\delta+1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!(\delta+1)^{k-1-i}} \right).$$

Suivant la même méthode probabiliste comme dans [80], Hansberg et Volkmann [59] ont présenté deux nouvelles bornes pour  $\gamma_k(G)$ , la première est meilleure que la borne de Rautenbach et Volkmann, même s'ils conservent les mêmes hypothèses.

**Théorème 2.62.** [59] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta \geq 1$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $\frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ , alors on a:

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1} \left( k \ln(\delta+1) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i!(\delta+1)^{k-1-i}} \right).$$

La deuxième borne de Hansberg et Volkmann dans [59] affaiblit un peu plus l'hypothèse sur le degré minimum de  $\delta$ , et pour  $k \geq 3$ , elle est encore meilleure que la première.

**Théorème 2.63.** [59] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de degré minimum  $\delta \geq k$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $\frac{\delta+1+2\ln 2}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ , alors on a :

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1} \left( k \ln(\delta+1) - \ln 2 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i!(\delta+1)^{k-1}} \right).$$

Les deux théorèmes suivants donnent des bornes supérieures sur  $\gamma_k(G)$  pour les graphes multipartis et les cactus. Rappelons que  $L_k(G) = \{x \in V \mid d_G(x) \leq k-1\}$ . Pour les graphes bipartis  $G$ , Blidia, Chellali et Volkmann [8] ont montré que  $\gamma_k(G) \leq (n + |L_k(G)|)/2$ . Cette borne a été généralisée plus tard aux graphes  $r$ -partis.

**Théorème 2.64.** [56] Soit  $k \geq 1$  un entier. Si  $G$  est un graphe  $r$ -parti, alors on a :

$$\gamma_k(G) \leq \frac{(r-1)n + |L_k(G)|}{r}.$$

De leur borne supérieure  $\frac{n+|L_k(G)|}{2}$  dans les graphes bipartis, Blidia et al. [8] ont déduit une borne supérieure plus forte sur  $\gamma_k(G)$  pour les cactus.

**Théorème 2.65.** [10] Soit  $k \geq 2$  un entier. Si  $G$  est un cactus connexe avec  $c(G)$  cycles impairs, alors on a :

$$\gamma_k(G) \leq \frac{n + |L_k(G)| + c(G)}{2}.$$

Les arbres extrémaux atteignant la borne du Théorème 2.65 sont décrits par une construction récursive dans [5] pour  $k = 2$  et dans [8] pour le cas général.

### 2.3.2 Bornes sur $\beta_k$

Plusieurs bornes inférieures sont connues sur le nombre d'indépendance en fonction de degré maximum  $\Delta$ , de degré moyen  $d^*$  ou la séquence de degrés d'un graphe  $G$ , telles  $\beta(G) \geq \frac{n}{1+d^*} \geq \frac{n}{1+\Delta}$  [3] ou  $\beta(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{n}{1+d(v)}$  [89]. Ces bornes ont été généralisées pour le nombre de  $k$ -indépendance par plusieurs auteurs.

**Théorème 2.66.** [65] *Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et pour tout entier positif  $k \leq \Delta$ , on a:*

$$\beta_k(G) \geq \frac{n}{1 + \lfloor \frac{\Delta}{k} \rfloor}.$$

**Théorème 2.67.** [45] *Pour tout graphe  $G$  et tout entier positif  $k$ , on a:*

$$\beta_k(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{n}{1 + kd(v)}.$$

Dans [26], Caro et Tuza ont établi une borne inférieure sur  $\beta_k$  dans les hypergraphes uniformes en fonction de la séquence de degrés qui améliore le Théorème 2.67.

Pour les arbres  $T$  non triviaux, Maddox [74] a généralisé la borne  $\beta(T) \geq \frac{n}{2}$  et a prouvé que  $\beta_k(T) \geq \frac{kn}{k+1}$ . Dans [6], Blidia, Chellali, Favaron et Meddah ont donné une autre preuve de ce résultat, en plus ils ont donné une caractérisation constructive des arbres extrémaux.

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des arbres qui peuvent être construits à partir d'une étoile  $T_1 = K_{1,k}$  en joignant, de manière récursive, par une arête un sommet de  $T_i$  à un sommet d'une nouvelle étoile  $K_{1,k}$ .

**Théorème 2.68.** [6] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta$ . Alors pour tout entier  $k$  avec  $2 \leq k \leq \Delta$ ,  $\beta_k(T) \geq \frac{kn}{k+1}$ . Avec égalité si et seulement si  $T \in \mathcal{F}$ .*

La borne du Théorème 2.68 est toujours meilleure que la borne du Théorème 2.66 sur les arbres.

Maintenant nous présentons des bornes supérieures sur  $\beta_k(G)$  et nous rappelons les preuves des Théorèmes 2.69 et 2.73 qui sont utiles pour des caractérisations des graphes extrémaux dans des cas particuliers.

**Théorème 2.69.** [57] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m \neq 0$ , de degré maximum  $\Delta$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \delta$ , alors on a:*

$$\beta_k(G) \leq \frac{m}{\delta - k + 1} \text{ et } \beta_k(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}.$$

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble. Le nombre  $m(S, V - S)$  des arêtes entre  $S$  et  $V - S$  satisfait  $|S|(\delta - k + 1) \leq m(S, V - S) \leq \Delta |V - S|$ . On peut déduire que le nombre  $m$

d'arêtes de  $G$  satisfait  $m \geq |S|(\delta - k + 1)$ , donc  $\beta_k(G) \leq \frac{m}{\delta - k + 1}$  et  $\beta_k(G)(\delta - k + 1) \leq \Delta(n - \beta_k(G))$ . Par conséquent  $\beta_k(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}$ .  $\square$

**Proposition 2.70.** [13] Soit  $G$  un graphe de taille  $m \neq 0$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \delta$ , alors  $\beta_k(G) = \frac{m}{\delta - k + 1}$  si et seulement si  $k = 1$  et  $G$  est biparti  $\delta$ -semi-régulier.

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble. Si  $\beta_k(G) = \frac{m}{\delta - k + 1}$  avec  $m \neq 0$ , alors  $m = |S|(\delta - k + 1)$  et toutes les arête de  $G$  sont entre  $S$  et  $V - S$ . Donc  $S$  et  $V - S$  sont indépendants et chaque sommet de  $S$  est de degré  $\delta - k + 1$ . Puisque  $d(x) \geq \delta$  pour tout sommet  $x$  de  $G$ , alors  $\delta - k + 1 \geq \delta$ , et donc  $k = 1$  et  $G$  est un graphe biparti  $\delta$ -semi-regular.

Inversement, supposons que  $G$  est biparti  $\delta$ -semi-regular avec les parties  $A$  et  $B$  tel que chaque sommet de  $A$  est de degré  $\delta$ . Alors  $A$  est indépendant et  $m = |A|\delta$ . Donc  $\beta(G) \geq |A| = \frac{m}{\delta}$ , et l'égalité découle du fait que  $\beta(G) \leq \frac{m}{\delta}$ .  $\square$

**Proposition 2.71.** [13] Si  $G$  est un graphe de  $n$  sommets,  $m$  arêtes et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \delta$ , alors  $\beta_k(G) = \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}$  si et seulement si  $V = X \cup Y$ , où  $|X| = \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}$ ,  $G[X]$  est  $(k - 1)$ -régulier, chaque sommets de  $X$  a exactement  $\delta - k + 1$  voisins dans  $Y$  et chaque sommet de  $Y$  a  $\Delta$  voisins dans  $X$ .

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble. Si  $\beta_k(G) = \frac{n\Delta}{\Delta + \delta - k + 1}$ , alors  $|S|(\delta - k + 1) = m(S, V - S) = \Delta|V - S|$ , et donc par la preuve du Théorème 2.48, chaque sommet de  $S$  a exactement  $\delta - k + 1$  voisin dans  $V - S$ , et chaque sommet de  $V - S$  a exactement  $\Delta$  voisin dans  $S$ , et donc  $V - S$  est indépendant. D'autre part,  $d_S(x) = k - 1$ , pour tout  $x \in S$ , sinon  $d_G(x) < \delta$ , c.à.d que  $G[S]$  est  $(k - 1)$ -régulier, et donc chaque sommet de  $S$  est de degré  $\delta$  dans  $G$ .

Inversement, il est facile de voir que si  $G$  est l'un des graphes décrits dans la Proposition 2.71, alors  $d_X(x) = k - 1$  pour tout  $x \in X$ . Donc  $X$  est  $k$ -indépendant avec  $\beta_k(G) \geq |X| = \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}$ , et l'égalité découle du fait que  $\beta_k(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}$ .  $\square$

Pour le cas particulier  $k = 1$ , on a le résultat suivant.

**Corollaire 2.72.** [13] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta$ . Alors on a:

1. Si  $\delta < \Delta$ , alors  $\beta(G) = \frac{\Delta n}{\Delta + \delta}$  si et seulement si  $G$  est biparti avec les parties  $X$  et  $Y$ , telles que  $X$  est formée par les sommets de degré minimum et  $Y$  est formée par les sommets de degré maximum.
2. Si  $\delta = \Delta$ , alors  $\beta(G) = \frac{n}{2}$  si et seulement si  $G$  est biparti.

**Théorème 2.73.** [57] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m$  et de degré maximum  $\Delta$  et soit  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta$ . Alors on a:

$$\beta_k(G) \leq \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}.$$

Preuve. Soit  $S$  un ensemble  $k$ -indépendant maximum de  $G$ . Alors pour tout  $x \in S$ ,  $|N(x) \cap S| \leq k-1$  et donc  $m(G[S]) \leq \left(\frac{k-1}{2}\right) \beta_k(G)$ . En plus  $m(G[V-S]) + m(V-S, S) \leq \Delta(n - \beta_k(G))$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} m &= m(G[S]) + m(G[V-S]) + m(V-S, S) \\ &\leq \frac{1}{2}(k-1) \beta_k(G) + \Delta(n - \beta_k(G)) = \left(\frac{k-1}{2} - \Delta\right) \beta_k(G) + \Delta n, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\beta_k(G) \leq \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}$ . □

**Proposition 2.74.** [13] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m$  et de degré maximum  $\Delta$ , et soit  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta$ . Alors  $\beta_k(G) = \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}$  si et seulement si  $V = X \cup Y$ , où  $|X| = \frac{2\Delta n - m}{2\Delta - k + 1}$ ,  $D[X]$  est  $(k-1)$ -régulier, chaque sommet de  $Y$  a  $\Delta$  voisins dans  $X$  et  $G$  est régulier.

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble. Par la preuve du Théorème 2.48, Si  $\beta_k(G) = \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}$ , alors  $m(G[S]) = \left(\frac{k-1}{2}\right) \beta_k(G)$  et  $m(G[V-S]) + m(V-S, S) = \Delta(n - \beta_k(G))$ , c-à-d que  $G[S]$  est  $(k-1)$ -régulier, chaque sommet de  $S$  a exactement  $\Delta - k + 1$  voisins dans  $V-S$ ,  $G[V-S]$  est indépendant, chaque sommet de  $V-S$  a  $\Delta$  voisins dans  $S$ . Donc  $G$  est régulier.

Inversement, Si  $G$  est l'un des graphes décrits dans la Proposition 2.74, alors  $X$  est  $k$ -indépendant. D'où  $\beta_k(G) \geq |X| = \frac{2\Delta n - m}{2\Delta - k + 1}$ , et l'égalité découle du fait que  $\beta_k(G) \leq \frac{2\Delta n - 2m}{2\Delta - k + 1}$ . □



Pour le cas particulier  $k = 1$ , on a le résultat suivant.

**Corollaire 2.75.** [13] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de taille  $m$  et de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $\beta(G) = n - \frac{m}{\Delta}$  si et seulement si  $G$  est biparti régulier.*

Enfin nous montrons que la borne  $\beta_k(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta - k + 1}$  donnée dans le Théorème 2.48 peut être améliorée considérablement si  $\Delta + \delta - k + 1 > n$ .

**Théorème 2.76.** [13] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$ , de degré minimum  $\delta$  et  $k$  un entier positif avec  $k \leq \Delta$ . Alors on a :*

$$\beta_k(G) \leq n - \delta + k - 1$$

avec égalité si et seulement si  $V = X \cup Y$ ,  $|X| = n - \delta + k - 1$ ,  $G[X]$  est  $(k - 1)$ -régulier, tout sommet de  $X$  est adjacent à tout sommet de  $Y$  et  $k \leq \delta$ .

Preuve. Si  $k \geq \delta + 1$ , alors  $n - \delta + k - 1 \geq n$ , et donc  $\beta_k(G) < n - \delta + k - 1$ , car  $\beta_k(G) \leq n - 1$  pour  $k \leq \Delta$ . Supposons que  $k \leq \delta$ . Soit  $X$  un ensemble  $k$ -indépendant maximum dans  $G$ , et soit  $v$  un sommet de  $X$ . Comme  $v$  a au plus  $k - 1$  voisins dans  $X$  et  $d(v) \geq \delta$ ,  $v$  est adjacent à au moins  $\delta - k + 1$  sommet de  $Y = V - X$ , ce qui signifie que,  $|V - X| \geq \delta - k + 1$ , et donc  $\beta_k(G) \leq n - \delta + k - 1$ .

Supposons que  $|X| = n - \delta + k - 1$ . Alors  $k \leq \delta$  et  $|Y| = \delta - k + 1$ , donc pour tout sommet  $v$  de  $X$ ,  $v$  a exactement  $k - 1$  voisins dans  $X$  et  $v$  est adjacent à tout sommet de  $Y$ , ce qui signifie que  $d(v) = \delta$  et  $G[X]$  est  $(k - 1)$ -régulier.

Inversement, Si  $G$  est l'un des graphes décrits dans le Théorème 2.76, alors  $X$  est  $k$ -indépendant. D'où  $\beta_k(G) \geq |X| = n - \delta + k - 1$ , et l'égalité découle du fait que  $\beta_k(G) \leq n - \delta + k - 1$ . □

**Corollaire 2.77.** [38] *Si  $G$  est un graphe connexe d'ordre  $n$  et de degré minimum  $\delta$ , alors  $\beta(G) = n - \delta$  si et seulement si  $V = X \cup Y$ , tel que  $|X| = n - \delta$ ,  $G[X]$  est indépendant et chaque sommet de  $X$  est attaché à tout sommet de  $Y$ .*

## 2.4 Relations de type Nordhaus-Gaddum sur $\gamma_k$ et $\beta_k$

Comme extension des bornes classiques de Chartrand et Schuster [29] pour  $\beta(G)$ , Blidia, Bouchou et Volkmann [12] ont prouvé un résultat de type Nordhaus-Gaddum pour  $\beta_k(G)$ .

**Théorème 2.78.** [12] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , et soit  $k$  un entier positif tel que  $k \leq \min(\Delta(G) + 1, \Delta(\overline{G}) + 1)$ . Alors on a:*

$$\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}) \leq n + 2k - 1 \text{ et } \beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) \leq \frac{(n + 2k - 1)^2}{4}.$$

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble de  $G$ , et soit  $S'$  un  $\beta_k(\overline{G})$ -ensemble de  $\overline{G}$ . Si  $A = S \cap S'$ ,  $B = S' \cap (V - S)$ ,  $C = S \cap (V - S')$  et  $D = (V - S) \cap (V - S')$ , alors  $A$  est un ensemble  $k$ -indépendant dans  $G$  ainsi que dans  $\overline{G}$  ou  $A = \emptyset$ . Donc  $\Delta(G[A]) \leq k - 1$  et  $\Delta(\overline{G}[A]) \leq k - 1$ . Comme  $2m(G[A]) = \sum_{v \in A} d_{G[A]}(v) \leq |A|(k - 1)$  et  $2m(\overline{G}[A]) = \sum_{v \in A} d_{\overline{G}[A]}(v) \leq |A|(k - 1)$ , on a  $|A|(|A| - 1) = 2(m(G[A]) + m(\overline{G}[A])) \leq 2|A|(k - 1)$ . Ceci implique que  $|A| \leq 2k - 1$ . En outre nous avons  $n \geq |S| + |S'| - |A|$ , il s'en suit que  $\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}) \leq n + 2k - 1$ . D'autre part  $(n + 2k - 1)^2 \geq (\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}))^2 = (\beta_k(G) - \beta_k(\overline{G}))^2 + 4\beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) \geq 4\beta_k(G)\beta_k(\overline{G})$ , et donc  $\beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) \leq \frac{(n+2k-1)^2}{4}$ .  $\square$

Le résultat suivant découle immédiatement du Théorème 2.78 et du Corollaire 2.31.

**Corollaire 2.79.** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , et soit  $k$  un entier positif tel que  $k \leq \min(\Delta(G) + 1, \Delta(\overline{G}) + 1)$ . Alors on a:*

- (i) [78]  $\gamma_k(G) + \gamma_k(\overline{G}) \leq n + 2k - 1$ .
- (ii) [13]  $\gamma_k(G)\gamma_k(\overline{G}) \leq \frac{(n + 2k - 1)^2}{4}$ .

**Théorème 2.80.** [13] *Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier connexe d'ordre  $n$ , et soit  $k$  un entier positif tel que  $k \leq \min(d(G) + 1, d(\overline{G}) + 1)$ . Alors on a:*

- (i)  $\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}) = n + 2k - 1$  si et seulement si  $G$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier d'ordre  $2k - 1$  et chaque composante connexe de  $\overline{G}$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier.
- (ii)  $\beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) = (n + 2k - 1)^2 / 4$  si et seulement si  $G$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier d'ordre  $2k - 1$ .

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble de  $G$ , et soit  $S'$  un  $\beta_k(\overline{G})$ -ensemble de  $\overline{G}$ .

(i) Supposons que  $\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}) = n + 2k - 1$ . Alors, selon les notations du Théorème 2.78,  $n = |S| + |S'| - |A|$ ,  $|A| = 2k - 1$  et  $D = \emptyset$ . D'autre part, par le Théorème 2.76,  $G$  est le joint de  $G[A \cup B]$  et  $G[C]$ , et  $\overline{G}$  est le joint de  $\overline{G}[A \cup C]$  et  $\overline{G}[B]$ , ce qui signifie que  $B = \emptyset$ . Alors  $S = A$  et  $S' = A \cup C = V$ , et donc  $k = d(G) + 1$  c-à-d que  $\beta_k(G) = 2k - 1$  et  $\beta_k(\overline{G}) = n$  et chaque composante connexe de  $\overline{G}$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier. La réciproque est évidente.

(ii) Supposons que  $\beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) = \frac{(n+2k-1)^2}{4}$ . Alors, selon la preuve du Théorème 2.78,  $\beta_k(G) = \beta_k(\overline{G})$ , et d'après le Théorème 2.76,  $\beta_k(G) = \beta_k(\overline{G}) = n = 2k - 1$ . D'où  $G$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier d'ordre  $2k - 1$ . La réciproque est évidente.  $\square$

**Corollaire 2.81.** [13] *Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier connexe d'ordre  $n$ , et soit  $k$  un entier positif tel que  $k \leq \min(d(G) + 1, d(\overline{G}) + 1)$ . Alors on a :*

- (i)  $\gamma_k(G) + \gamma_k(\overline{G}) = n + 2k - 1$  si et seulement si  $G$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier d'ordre  $2k - 1$  et chaque composante connexe de  $\overline{G}$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier.
- (ii)  $\gamma_k(G)\gamma_k(\overline{G}) = \frac{(n + 2k - 1)^2}{4}$  si et seulement si  $G$  est un graphe  $(k - 1)$ -régulier d'ordre  $2k - 1$ .

## 2.5 La $k$ -domination romaine dans les graphes

Dans cette section, nous nous concentrons sur une extension de la fonction de domination romaine qui a été suggérée par ReVelle et Rosing [82] et Stewart [84]. Selon [33], Constantin le Grand (Empereur de Rome) a publié un décret dans le 4<sup>ème</sup> siècle après JC pour défendre ses villes. Il décréta que toute ville qui n'a pas de légions pour la sécuriser elle doit être voisine d'une autre ville qui a deux légions. Si la première serait attaquée, alors la deuxième pourrait déployer une légion pour la protéger sans qu'elle devienne vulnérable elle-même. De cette manière, l'empereur Constantine peut défendre tout l'empire.

Cependant l'Empire romain avait beaucoup d'ennemis, et si un certain nombre de  $k$  ennemis attaquent une ville sans légion, alors la ville peut se défendre si elle est voisine à au moins  $k$  villes ayant deux légions.

Cela conduit à la généralisation de la fonction de domination romaine suivante. Soit  $k$  un entier positif, une fonction de  $k$ -domination romaine ( $Rk$ -DF) sur  $G$  est une fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  telle que chaque sommet  $u$  pour lequel  $f(u) = 0$  est adjacent à au moins  $k$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$  avec  $f(v_i) = 2$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$ . Le poids d'une fonction de  $k$ -domination romaine est la valeur  $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ . Le poids minimum d'une fonction de  $k$ -domination romaine sur un graphe  $G$  est appelé le nombre de  $k$ -domination romaine de  $G$  et il est noté  $\gamma_{kR}(G)$ . Le nombre de  $k$ -domination romaine a été présenté par Kämmerling et Volkmann dans [73]. On notera que le nombre de 1-domination romaine  $\gamma_{1R}(G)$  est le nombre de domination romaine usuel  $\gamma_R(G)$ . Une fonction de  $k$ -domination romaine de poids minimum est appelé  $\gamma_{kR}(G)$ -fonction. Si  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  est une fonction de  $k$ -domination romaine, alors soit  $(V_0, V_1, V_2)$  la partition ordonnée de  $V$  induite par  $f$ , où  $V_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Notons qu'il y a une 1-1 correspondance entre la fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  et la partition ordonnée  $(V_0, V_1, V_2)$  de  $V$ . Ainsi nous écrirons  $f = (V_0, V_1, V_2)$ . Pour  $k = 1$  on retrouve le paramètre de la domination romaine  $\gamma_R(G)$ .

Nous rappelons quelques résultats importants qui seront utiles pour le dernier chapitre.

**Proposition 2.82.** [33] *Si  $G$  est une chaîne  $P_n$  ou un cycle  $C_n$ , alors  $\gamma_R(G) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ .*

**Proposition 2.83.** [27] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta$ , alors on a:*

$$\gamma_R(G) \leq n - \Delta + 1.$$

**Théorème 2.84.** [27] *Si  $G$  est un graphe connexe d'ordre  $n$ , alors on a:  $\gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5}$ , avec égalité si et seulement si  $G$  est un  $C_5$  ou  $G$  est obtenu de  $\frac{n}{5}P_5$  en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de  $\frac{n}{5}P_5$ .*

Kämmerling et Volkmann dans [73] ont donné un résultat qui est une extension de la chaîne de l'inégalité de Cockyten et al. dans [33] pour  $k = 1$ .

**Proposition 2.85.** [73] *Pour tout graphe  $G$ , on a:*

$$\gamma_k(G) \leq \gamma_{kR}(G) \leq 2\gamma_k(G).$$

Un graphe  $G$  est dit  $k$ -romain si  $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G)$ . Kämmerling et Volkmann ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit  $k$ -romain.

**Proposition 2.86.** [73] *Un graphe  $G$  est  $k$ -romain si et seulement si  $G$  a une  $\gamma_{kR}$ -fonction  $f = (V_0, V_1, V_2)$  avec  $V_1 = \emptyset$ .*

**Proposition 2.87.** [73] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G)$ ,
- (ii)  $\gamma_k(G) = n$ ,
- (iii)  $\Delta \leq k - 1$ .

**Corollaire 2.88.** [33]  $\gamma(G) = \gamma_R(G)$  si et seulement si  $G = \overline{K_n}$ .

**Proposition 2.89.** [73] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ .*

- (i) *Si  $n \leq 2k$ , alors  $\gamma_{kR}(G) = n$ .*
- (ii) *Si  $n \geq 2k + 1$ , alors  $\gamma_{kR}(G) \geq 2k$ .*
- (iii) *Si  $n \geq 2k + 1$  et  $\gamma_k(G) = k$ , alors  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_k(G) + k = 2k$ .*

**Corollaire 2.90.** [33] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  contenant un sommet de degré  $n - 1$ , alors on a:  $\gamma_R(G) = 2$ .*

**Proposition 2.91.** [73] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , alors on a:*

$$\gamma_{kR}(G) \geq \min\{n, \gamma_k(G) + k\}.$$

**Théorème 2.92.** [73] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta \geq k$ , alors on a:*

$$\gamma_{kR}(G) \geq \frac{2nk}{\Delta + k}.$$

**Corollaire 2.93.** [73] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta \geq 1$ , alors on a:*

$$\gamma_{\Delta R}(G) = n.$$

Maintenant, on présente une caractérisation des graphes  $G$  avec  $\gamma_{kR}(G) < n$ .

**Théorème 2.94.** [73] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Alors on a:  $\gamma_{kR}(G) < n$  si et seulement si  $G$  contient un sous-graphe biparti  $H$  avec bipartition  $X, Y$  telle que  $|X| > |Y| \geq k$ , et  $d_H(v) \geq k$  pour chaque  $v \in X$ .

Comme application du théorème précédent, Kämmerling et Volkmann dans [73] ont démontré le résultat suivant par récurrence sur le nombre *cyclomatique*  $\lambda = m - n + c$ , où  $c$  est le nombre de composantes connexes de  $G$ .

**Théorème 2.95.** [73] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Si  $k \geq 2$ , alors on a:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \min\{n, n + 1 - \lambda\}.$$

Comme conséquence du théorème précédent, on a le résultat suivant dans les graphes avec au plus un cycle.

**Corollaire 2.96.** [73] Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  avec au plus un cycle et  $k \geq 2$ , alors on a:

$$\gamma_{kR}(G) = n.$$

Le bicyclic  $G$  d'ordre 7 constitué de deux cycles  $r, s, t, u$  et  $u, x, y, z$  et la fonction  $f$  de 2-dominance romaine telle que  $f(u) = f(s) = f(y) = 2$  et  $f(r) = f(t) = f(x) = f(z) = 0$  montre que le corollaire précédent n'est pas vrai si le graphe contient plus d'un cycle (voir Figure 2.4).

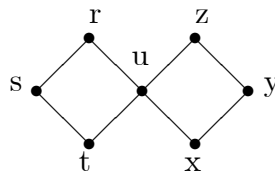


FIGURE 2.4. Le bicyclic  $G$

**Proposition 2.97.** [73] Si  $G$  est un cactus d'ordre  $n$  et  $k \geq 3$ , alors on a:

$$\gamma_{kR}(G) = n.$$

La roue  $W_n$  d'ordre  $n \geq 4$  vérifie  $\gamma_R(W_n) = 2$ ,  $\gamma_{2R}(W_n) = \left\lceil \frac{2(n-1)}{3} \right\rceil + 2$  et  $\gamma_{kR}(W_n) = n$  pour  $k \geq 3$ . C'est donc un exemple de graphe extrémal pour la Proposition 2.97 (voir Figure 2.5).

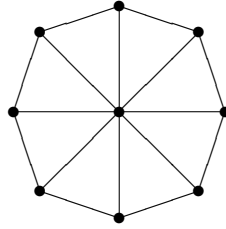


FIGURE 2.5. La roue  $W_9$

## CHAPITRE 3

# DES INÉGALITÉS ENTRE LES PARAMÈTRES DE LA $k$ -INDÉPENDANCE DANS LES GRAPHS

Ce chapitre est composé de deux sections, dans la première section, nous donnons des relations entre  $\beta_k$  et  $\beta_j$  pour  $1 \leq j < k \leq \Delta + 1$  et une relation entre  $\beta_2(G)$ ,  $\beta(G)$  et  $\gamma(G)$ . Aussi nous donnons quelques caractérisations des graphes extrémaux.

Dans la deuxième section, nous présentons des relations entre  $\beta_j(G)$  et  $\beta_\Delta(G)$ . En plus, nous caractérisons les graphes  $G$  tels que  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  pour  $j \in \{1, 2, \delta, \delta - 1, \Delta - 1\}$ .

Les résultats obtenus dans la première section sont publiés dans un article accepté dans la revue (Australasian Journal of Combinatorics [19]), et les résultats de la deuxième section sont soumis [22].

### 3.1 Relations entre deux paramètres de la $k$ -indépendance

#### 3.1.1 Relations entre $\beta_k$ et $\beta_j$

Dans [24], Caro et Hansberg ont donné une relation entre  $\beta_k$  et  $\beta_j$  pour  $1 \leq j < k \leq \Delta + 1$  en utilisant la borne  $\beta_j(G) \geq \frac{n}{1 + \lfloor \frac{\Delta}{j} \rfloor}$  dû à Hopkins et Staton [65].

Nous donnons une nouvelle preuve qui est utile pour les caractérisations de graphes qu'on fournit.

**Théorème 3.1.** [19] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et  $j, k$  deux entiers avec  $1 \leq j < k \leq \Delta + 1$ . Alors on a:*

$$\beta_k(G) \leq \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil \beta_j(G). \quad (3.1)$$

Preuve. Soit  $I$  un  $\beta_k(G)$ -ensemble de  $G$ . Soit  $S_1$  un ensemble  $j$  indépendant et  $j$ -dominant de  $G[I]$ . D'après le Théorème 2.30 du Chapitre 2, un tel ensemble existe.



Alors chaque sommet de  $I - S_1$  a au moins  $j$  voisins dans  $S_1$  et donc,  $\Delta(G[I - S_1]) \leq k - j - 1$ . Soit  $S_2$  un ensemble  $j$ -indépendant et  $j$ -dominant de  $G[I - S_1]$ . Alors tout sommet de  $I - (S_1 \cup S_2)$  a au moins  $j$  voisins dans  $S_1$  et  $j$  voisins dans  $S_2$ , et donc  $\Delta(G[I - (S_1 \cup S_2)]) \leq k - 2j - 1$ . Nous continuons le processus jusqu'à ce que le choix de l'ensemble  $S_{p-1}$ , qui est  $j$ -indépendant et  $j$ -dominant de  $G[I - \cup_{i=1}^{p-2} S_i]$ , et tel que l'ensemble  $S_p = I - \cup_{i=1}^{p-1} S_i$  soit  $j$ -indépendant. Alors  $\Delta(G[I - \cup_{i=1}^{p-1} S_i]) \leq k - (p-1)j - 1$ . Par conséquent,  $\beta_k(G) = |I| = \sum_{i=1}^p |S_i|$  et comme  $|S_i| \leq \beta_j(G)$  pour  $1 \leq i \leq p$ , alors  $\beta_k(G) \leq p\beta_j(G)$ .

Maintenant, nous montrons que  $p \leq \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil$ . Soit  $x$  un sommet de  $S_p$ . Comme  $\Delta(G[I]) \leq k - 1$  et  $d_{S_i}(x) \geq j$  pour  $1 \leq i \leq p - 1$ , alors  $j(p - 1) \leq d_I(x) \leq k - 1$ , ce qui signifie que  $p \leq \left\lfloor \frac{k-1}{j} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil$ . Par conséquent  $\beta_k(G) \leq \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil \beta_j(G)$ .  $\square$

Si on pose  $k = \Delta + 1$  dans l'inégalité (3.1) du Théorème 3.1 on trouve la borne de Hopkins et Staton [65].

**Corollaire 3.2.** [65] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$ , de degré maximum  $\Delta$  et  $j$  un entier positif, alors on a:  $\beta_j(G) \geq \frac{n}{1 + \left\lceil \frac{\Delta}{j} \right\rceil}$ .*

Si on pose  $j = 1$  dans l'inégalité (3.1) du Théorème 3.1 on trouve la borne de Blidia et al. [7].

**Corollaire 3.3.** [7] *Si  $G$  est un graphe et  $k$  un entier positif, alors on a:  $\beta_k(G) \leq k\beta(G)$ .*

Maintenant, on donne une condition nécessaire pour l'égalité  $\beta_k(G) = \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil \beta_j(G)$  lorsque  $j = k - 1$ .

**Théorème 3.4.** [19] *Pour tout graphe  $G$  et tout entier positif  $k \geq 2$ , on a:*

$$\beta_k(G) \leq 2\beta_{k-1}(G). \quad (3.2)$$

*En plus si l'égalité est vérifiée, alors chaque composante de tout  $\beta_k(G)$ -ensemble  $I$  est une clique  $K_2$  et  $k = 2$  ou un cycle  $C_4$  et  $k = 3$ .*

Preuve. En remplaçant dans l'inégalité (3.1) du Théorème 3.1  $j$  par  $k - 1$ , il est facile de voir que  $\left\lceil \frac{k}{k-1} \right\rceil = 2$ , et nous obtenons ainsi l'inégalité souhaitée.

Supposons maintenant que  $\beta_k(G) = 2\beta_{k-1}(G)$ . Suivons la notation utilisée dans la preuve du Théorème 3.1. Comme  $I$  est  $k$ -indépendant,  $d_{S_2}(x) \leq k - 1$  pour tout  $x \in S_1$ , et puisque  $S_1$  est un ensemble  $(k - 1)$ -dominant de  $G[I]$ ,  $d_{S_1}(y) \geq k - 1$  pour tout  $y \in S_2$ . D'autre part, le nombre  $m(S_1, S_2)$  des arêtes de  $G$  entre  $S_1$  et  $S_2$  satisfait  $(k - 1)|S_2| \leq m(S_1, S_2) \leq (k - 1)|S_1|$  et donc  $|S_2| \leq |S_1|$ . Comme  $2\beta_{k-1}(G) = \beta_k(G) = |I| = |S_1| + |S_2| \leq 2|S_1| \leq 2\beta_{k-1}(G)$ ,  $|S_1| = |S_2|$  et nous obtenons l'égalité  $(k - 1)|S_2| = m(S_1, S_2) = (k - 1)|S_1|$ . Par conséquent  $G[I]$  est un graphe biparti  $(k - 1)$ -régulier et  $\beta_{k-1}(G) = \frac{|I|}{2}$ . Maintenant appliquons le Théorème 2.39 du Chapitre 2 pour le sous-graphe  $G[I]$ , nous obtenons  $\gamma(G[I]) = |I| - \beta_{k-1}(G[I]) = \frac{|I|}{2}$ , et le Théorème 2.52 du Chapitre 2 montre que les seuls graphes bipartis réguliers connexes avec  $\gamma(G[I]) = \frac{|I|}{2}$  sont  $K_2$  ou  $C_4$ , donc chaque composante connexe de  $G[I]$  est ou bien une clique  $K_2$  avec  $k = 2$  ou bien un cycle  $C_4$  avec  $k = 3$ .  $\square$

Les exemples suivants montrent que la réciproque du Théorème 3.4 n'est pas vraie.

**Exemples :** Soit  $P_5$  la chaîne de cinq sommets  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Soit  $F$  le graphe obtenu à partir de  $P_5$  en ajoutant les deux arêtes  $x_1x_4$  et  $x_2x_5$ .

Pour  $k = 2$ : Soit  $G_1$  un graphe formé par l'union disjointe de  $2p$  copies de  $P_5$  plus une chaîne traversant les sommets centraux de ces copies, il est clair que  $n(G_1) = 10p$ ,  $\beta_2(G_1) = 8p$ ,  $\beta(G_1) = 5p$  et chaque composante de tout  $\beta_2(G_1)$ -ensemble est une clique  $K_2$ , mais  $\beta_2(G_1) \neq 2\beta(G_1)$  (voir Figure 3.1).

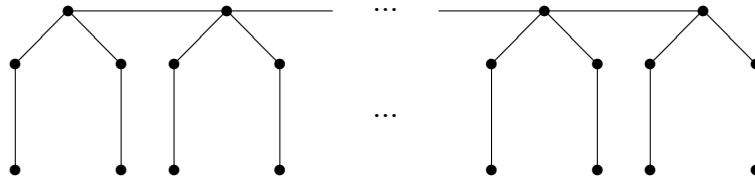
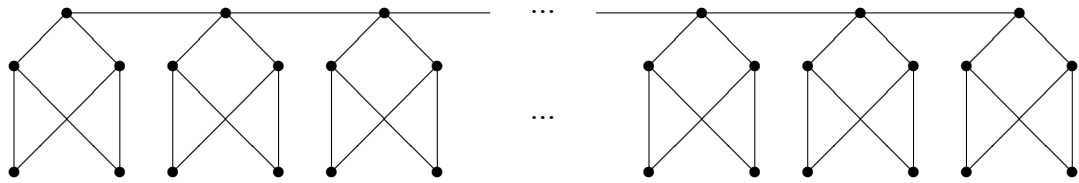


FIGURE 3.1. Le graphe  $G_1$

Pour  $k = 3$ : Soit  $G_2$  un graphe composé de l'union disjointe de  $3p$  copies de  $F$  plus une chaîne traversant  $x_3$  de chaque copie, il est clair que  $n(G_2) = 15p$ ,  $\beta_3(G_2) = 12p$ ,  $\beta_2(G_2) = 8p$  et chaque composante connexe de tout  $\beta_3(G_2)$ -ensemble est un cycle  $C_4$ , mais  $\beta_3(G_2) \neq 2\beta_2(G_2)$  (voir Figure 3.2).

FIGURE 3.2. Le graphe  $G_2$ 

D'après la l'inégalité (3.2) du Théorème 3.4, et  $\beta_{\Delta+1}(G) = n$ , nous obtenons cette borne pour  $\beta_{\Delta}(G)$ .

**Corollaire 3.5.** *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta$ , alors  $\beta_{\Delta}(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .*

D'après le Corollaire 3.3, nous avons  $\beta_k(G) \leq k\beta(G)$ , cette inégalité ne peut pas être améliorée pour  $\beta_k(G) \leq k\gamma(G)$ , même pour les arbres, comme l'indique l'étoile  $K_{1,p}$  avec  $p \geq k+1$ . Cependant, le théorème suivant l'améliore dans la classe de graphes avec au plus un cycle pour  $k = 2$ . On note que  $\lambda(G) = m(G) - n(G) + 1$  est le nombre *cyclomatique* d'un graphe connexe  $G$ .

**Théorème 3.6.** [19] *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 3$ . Alors on a :*

$$\beta_2(G) \leq \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1.$$

*Preuve.* Soit  $I$  un  $\beta_2(G)$ -ensemble et  $S$  un ensemble indépendant maximal de  $G[I]$ . Si  $G[I]$  est indépendant, alors  $\beta_2(T) = \beta(T)$ , et donc  $\beta_2(G) \leq \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1$ . Si  $G[I]$  n'est pas indépendant, alors les arêtes de  $G[I]$  forment un couplage induit  $M$  entre  $A = I - S$  et un sous-ensemble  $A'$  de  $S$ .

Soit  $D$  un  $\gamma(G)$ -ensemble,  $M_1$  un sous-couplage de  $M$  tel que aucun sommet de  $M_1$  n'est dans  $D$ , et  $A_1$  (resp.  $A'_1$ ), l'ensemble des sommets de  $M_1$  dans  $A$  (resp. dans  $A'$ ). Si  $|M_1| \neq 0$  et  $\gamma(G) \leq |M| - \lambda(G)$ , alors les sommets de  $A_1 \cup A'_1$  ne peut être dominé par les sommets de  $D \cap I$ , puisque  $M$  est induit. Ainsi l'ensemble  $W = D - I$  n'est pas vide et domine  $A_1 \cup A'_1$ . Par conséquent, le sous-graphe induit par  $W \cup A_1 \cup A'_1$  est d'ordre  $|W| + 2|M_1|$  et contient au moins  $3|M_1|$  arêtes. En outre, étant donné que  $D$  contient au moins un sommet pour chaque arête dans  $M - M_1$ ,  $|W| \leq |D| - |M - M_1| = (\gamma(G) - |M|) + |M_1| < |M_1| - \lambda(G) + 1$ . Donc, le sous-graphe connexe  $G'$  induit par

$W \cup A_1 \cup A'_1$  satisfait  $|E(G')| \geq 3|M_1| > 2|M_1| + |W| + \lambda(G) - 1 \geq 2|M_1| + |W| + \lambda(G') - 1$ , donc  $|\lambda(G')| = m(G') - n(G') + 1 < |E(G')| - (2|M_1| + |W|) + 1 = m(G') - n(G') + 1$ , contradiction. Donc  $\gamma(G) \geq |M| - \lambda(G) + 1$  ou  $|M_1| = 0$ . Si  $\gamma(G) \geq |M| - \lambda(G) + 1$ , alors  $\gamma(G) \geq |A| - \lambda(G) + 1$  et  $\beta_2(G) = |S| + |A| \leq \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1$ . Si  $\gamma(G) \leq |M| - \lambda(G)$  et  $|M_1| = 0$ , alors  $\lambda(G) = 0$ , car  $|M| \leq \gamma(G)$ , et donc  $\gamma(G) = |M| = |A|$ ,  $S - A' = \emptyset$  et  $G$  est un arbre. Par conséquent, nous devons avoir  $V - I \neq \emptyset$ . Soit  $x$  un sommet de  $V - I$ , pour toute arête  $e$  de  $M$ ,  $x$  est adjacent à au plus un sommet de  $e$ . Sans perte de généralité, supposons que les sommets adjacents à  $x$  sont dans  $A$ , alors  $A' \cup \{x\}$  est un indépendant. Donc,  $\beta(G) \geq |A| + 1$  et  $\beta_2(G) = 2|A| \leq \beta(G) + \gamma(G) - 1 = \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1$ .  $\square$

En général, les bornes du Théorème 3.4 pour  $k = 2$  et le Théorème 3.6 ne sont pas comparables pour  $\lambda(G) \geq 2$ . En effet, si  $G$  est le graphe obtenu à partir de  $M = pK_2 + qK_1$  en attachant tous les sommets de  $M$  à un nouveau sommet  $x$ , alors  $\beta_2(G) = 2p + q$ ,  $\beta(G) = p + q$ ,  $\lambda(G) = p$  et  $\gamma(G) = 1$ . Si  $p = 0$  et  $q \geq 2$ , alors  $G$  est une étoile et  $\beta_2(G) = \beta(G) + \gamma(G) - 1 = 2\beta(G)$ . Si  $p \geq 1$  et  $q \geq 0$ , alors  $G$  est un graphe avec  $p$  triangles et  $\beta_2(G) = \beta(G) + \gamma(G) + p - 1 < 2\beta(G)$ . (voir Figure 3.3).

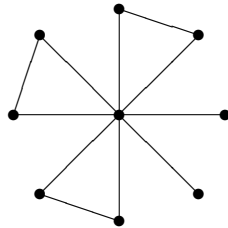
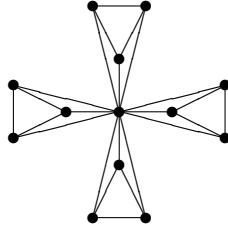


FIGURE 3.3. Le graphe  $G$  avec  $p = 3$  et  $q = 2$

Cependant, si  $G'$  est le graphe obtenu en attachant chaque sommet des  $t$  copies de  $K_3$  à un nouveau sommet  $x'$ , alors  $\beta_2(G') = 2t$ ,  $\beta(G') = t$ ,  $\gamma(G) = 1$ ,  $\lambda(G') = 3t$  et  $\beta_2(G') \leq 2\beta(G') = 2t < \beta(G') + \gamma(G') + \lambda(G') - 1 = 4t + 1$ . (voir Figure 3.4).

FIGURE 3.4. Le graphe  $G'$  avec  $t = 4$ 

### 3.1.2 Caractérisations de quelques graphes spéciaux

Dans cette sous-section, nous donnons quelques caractérisations de graphes spéciaux pour l'inégalité  $\beta_k(G) \leq \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil \beta_j(G)$ .

Nous commençons par la caractérisation des graphes extrémaux atteignant la borne du Corollaire 3.5.

**Théorème 3.7.** [19] *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  et de degré maximum  $\Delta$ . Alors*

$$\beta_{\Delta}(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

*si et seulement si  $G \in \{P_2, P_3, C_3, C_4, C_5, C_7\}$ .*

*Preuve.* Il est facile de voir que  $\beta_{\Delta}(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  pour  $G = P_2, P_3, C_3, C_4, C_5$  ou  $C_7$ .

Maintenant, supposons que  $\beta_{\Delta}(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Si  $n$  est pair, alors du Théorème 3.4,  $G = P_2$  ou  $C_4$ . Si  $n$  est impair, alors  $n = 2\beta_{\Delta}(G) - 1 \geq 3$  et  $\Delta \geq 2$ . En appliquant le Théorème 2.39 du Chapitre 2, on obtient  $\gamma(G) \geq n - \beta_{\Delta}(G) = \frac{n-1}{2}$  et par la borne d'Ore [76], on déduit que  $\gamma(G) = \frac{n-1}{2}$ . D'autre part, d'après le Corollaire 2.31,  $\gamma_{\Delta}(G) \leq \beta_{\Delta}(G)$ , et donc  $\gamma_{\Delta}(G) - \gamma(G) \leq \beta_{\Delta}(G) - \gamma(G) = 1$ , qui n'est possible que si  $\Delta \leq 3$ , car  $\gamma_p(G) \geq \gamma(G) + p - 2$  pour tout  $2 \leq p \leq \Delta$  (voir théorème 2.9, Chapitre 2). On distingue deux cas:

**Cas 1 .**  $\Delta = 2$ . Alors  $G$  est une chaîne ou un cycle. Si  $G$  est une chaîne avec  $n \geq 5$  ou un cycle avec  $n \geq 9$ , alors  $\beta_2(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil > \frac{n+1}{2}$  et  $\beta_2(C_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor > \frac{n+1}{2}$ .

**Cas 2 .**  $\Delta = 3$ . Alors  $1 \leq \delta \leq 3$ . similairement à la preuve du Théorème 3.1,  $I = V$ ,  $S_1$  est un ensemble 3-indépendant et 3-dominant de  $G$  et  $S_2$  est indépendant. Par conséquent,  $3|S_2| = m(S_1, S_2) \leq 3|S_1|$ . Donc,  $|S_2| \leq |S_1| - 1$ , car  $n = |S_1| + |S_2|$  est impair. Alors

$2\beta_3(G) - 1 = |S_1| + |S_2| \leq 2|S_1| - 1 \leq 2\beta_3(G) - 1$ , on en déduit que  $\beta_3(G) = |S_1| = |S_2| + 1$  et le nombre d'arêtes entre  $S_1$  et  $S_2$  est  $m(S_1, S_2) = 3|S_2| = 3|S_1| - 3$ . Donc le sous-graphe  $G[S_2]$  contient au plus une arête. On doit examiner trois possibilités :

**Sous-cas 2.1** .  $S_1$  a un sommet  $x$  avec  $d_{S_2}(x) = 0$ . Alors pour tout sommet  $v$  de  $S_1 - \{x\}$ ,  $d_{S_2}(v) = 3$  et  $S_1$  est indépendant, et donc  $d_G(x) = 0$ , ce qui contredit le fait que  $\delta \geq 1$ .

**Sous-cas 2.2** .  $S_1$  a deux sommets  $x$  et  $x'$  avec  $xx' \in G[S_1]$ ,  $d_{S_2}(x) = 2$ ,  $d_{S_2}(x') = 1$ . Alors pour tout sommet  $v$  de  $S_1 - \{x, x'\}$ ,  $d_{S_2}(v) = 3$ . Si  $y, y' \in N_{S_2}(x)$ , alors  $S' = (S_1 - \{x\}) \cup \{y, y'\}$  est 3-indépendant avec  $|S'| = |S_1| + 1$ , contradiction.

**Sous-cas 2.3** .  $S_1$  a trois sommets  $x, x', x''$  avec  $d_{S_2}(x) = d_{S_2}(x') = d_{S_2}(x'') = 2$ . Alors pour tout sommet  $v$  de  $S_1 - \{x, x', x''\}$ ,  $d_{S_2}(v) = 3$ . Soit  $y, y' \in N_{S_2}(x)$ . Si  $S_1$  est indépendant, alors  $S' = (S_1 - \{x\}) \cup \{y, y'\}$  est un ensemble 3-indépendant avec  $|S'| = |S_1| + 1$ , contradiction. Si  $S_1$  n'est pas indépendant, alors  $G[S_1]$  a exactement une arête  $e$ , puisque  $\Delta = 3$ , sans perte de généralité, posons  $e = xx'$  et si  $y, y' \in N_{S_2}(x)$ , alors  $S' = (S_1 - \{x\}) \cup \{y, y'\}$  est 3-indépendant avec  $|S'| = |S_1| + 1$ , contradiction aussi. Ainsi  $\beta_\Delta(G) = \frac{n+1}{2}$  n'est pas possible dans ce cas.  $\square$

Nous donnons une caractérisation des graphes  $G$  extrémaux atteignant la borne du Théorème 3.4 pour  $k = \Delta$ . En plus, nous améliorons cette borne et nous donnons tous les graphes atteignant cette nouvelle borne. Nous rappelons que  $K_4 - e$  est le *diamant* (le graphe obtenu à partir de  $K_4$  en supprimant une arête). Soit  $H$  le graphe obtenu à partir de  $C_5$  en joignant trois sommets non consécutifs de  $C_5$  à un nouveau sommet (voir Figure 3.5).

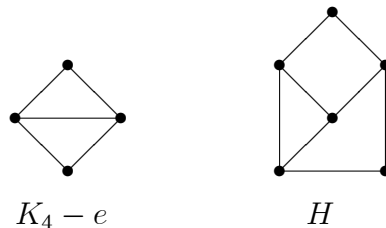


FIGURE 3.5.

**Proposition 3.8.** [19] Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ . Alors

$$\beta_{\Delta}(G) = 2\beta_{\Delta-1}(G)$$

si et seulement si  $G = C_3$ .

Preuve. Il est clair que  $\beta_{\Delta}(C_3) = 2\beta_{\Delta-1}(C_3)$ .

Pour la réciproque, supposons que  $\beta_{\Delta}(G) = 2\beta_{\Delta-1}(G)$ . Similairement à la preuve du Théorème 3.4.  $I$  est  $\Delta$ -indépendant et  $S_1$  est un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant et  $(\Delta - 1)$ -dominant de  $G[I]$ . Appliquons le Théorème 3.7 pour le sous-graphe  $G[I]$ , on déduit que chaque composante connexe de  $G[I]$  est une chaîne  $P_2$  et  $\Delta = 2$ , ou un cycle  $C_4$  et  $\Delta \leq 3$ . Si  $\Delta = 2$ , alors  $G$  est une chaîne ou un cycle. Si  $G$  est une chaîne avec  $n \geq 3$ , ou un cycle avec  $n \neq 3$ , alors  $\beta_2(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil < 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil = 2\beta(P_n)$  et  $\beta_2(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor < 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2\beta(C_n)$ . Si  $\Delta = 3$ , alors tous les sommets de  $V - I$  sont adjacents à au plus trois sommets de  $C_4$ , et on peut facilement trouver un ensemble 2-indépendant  $S$  dans  $G$  avec  $|S| = |S_1| + 1$ , contradiction, et donc dans ce cas,  $\beta_3(G) < 2\beta_2(G)$ .  $\square$

**Proposition 3.9.** [19] Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ . Alors

$$\beta_{\Delta}(G) = 2\beta_{\Delta-1}(G) - 1$$

si et seulement si  $G \in \{K_4, K_4 - e, H\}$ .

Preuve. Il est clair que  $\beta_{\Delta}(G) = 2\beta_{\Delta-1}(G) - 1$  lorsque  $G = K_4, K_4 - e$  ou  $H$ .

Pour la réciproque, supposons que  $\beta_{\Delta}(G) = 2\beta_{\Delta-1}(G) - 1$ . Similairement à la preuve du Théorème 3.4.  $I$  est  $\Delta$ -indépendant et  $S_1$  est un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant et  $(\Delta - 1)$ -dominant de  $G[I]$ . Appliquons le Théorème 3.7 pour le sous-graphe  $G[I]$ , on obtient que chaque composante connexe de  $G[I]$  est un  $P_3, C_3, C_5$  ou  $C_7$  et  $\Delta = 3$ . Si  $G[I] = P_3$ , alors chaque sommet de  $V - I$  est adjacent à tout les sommets de  $P_3$ , sinon on peut trouver un 2-indépendante  $S$  dans  $G$  avec  $|S| > |S_1|$ . Comme  $\Delta = 3$ ,  $V - I$  contient exactement un sommet, et donc  $G = K_4 - e$ . Si  $G[I] = C_3$ , alors, par le même raisonnement que précédemment,  $V - I$  a exactement un sommet qui est adjacent à au moins deux sommets de  $C_3$ , et donc  $G = K_4 - e$  ou  $K_4$ . Si  $G[I] = C_5$ , alors  $V - I$  est constitué d'un sommet qui est adjacent à trois sommets non consécutifs de  $C_5$ , Sinon  $G$

contient un ensemble 2-indépendant  $S$  avec  $|S| > |S_1|$ , et donc  $G = H$ . Enfin, si  $G[I] = C_7$ , alors pour tout sommet  $v$  de  $V - I$ , on peut trouver un ensemble 2-indépendant  $S$  dans  $G$  contenant  $v$  avec  $|S| = |S_1| + 1$ , contradiction avec  $\beta_2(G) = |S_1|$ , et donc dans ce cas,  $\beta_3(G) < 2\beta_2(G) - 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.10.** [19] *Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$ , alors  $\beta_\Delta(T) \leq 2\beta_{\Delta-1}(G) - 2$ .*

Maintenant, nous donnons une caractérisation des graphes bipartis atteignant la borne (3.1) dans le Théorème 3.1, lorsque  $j$  divise  $k - 1$  (i.e :  $\left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil = \frac{k+j-1}{j}$ )

**Proposition 3.11.** [19] *Soit  $G$  un graphe biparti d'ordre  $n$  et  $j, k$  des entiers positifs avec  $j < k \leq \Delta + 1$ . Alors*

$$\beta_k(G) = \frac{k+j-1}{j}\beta_j(G),$$

*si et seulement si  $G = \frac{n}{2}K_2$ , avec  $j = 1$  et  $k = 2$ , ou  $G = \frac{n}{4}C_4$ , avec  $j = 2$  et  $k = 3$ .*

Preuve. Supposons que  $\beta_k(G) = \frac{k+j-1}{j}\beta_j(G)$ . On a  $\beta_j(G) \geq \frac{n}{2}$  pour les graphes bipartis et  $\beta_k(G) \leq n$  pour tout graphe  $G$ . Donc

$$n \geq \beta_k(G) = \frac{k+j-1}{j}\beta_j(G) \geq \frac{k+j-1}{j}\frac{n}{2} \geq n,$$

on a donc l'égalité le long de la chaîne d'inégalités précédente. En particulier,  $\beta_k(G) = n$ ,  $j = k - 1$  et  $\beta_j(G) = \frac{n}{2}$ . Il en découle que  $k = \Delta + 1$  et  $j = \Delta$ , et donc d'après le Théorème 3.7,  $G = \frac{n}{2}K_2$  ou  $\frac{n}{4}C_4$ . La réciproque est évidente.  $\square$

Comme conséquence de la Proposition 3.11, on en déduit le résultat suivant qui donne une condition suffisante dans le Théorème 3.4.

**Corollaire 3.12.** [19] *Si  $G$  est un graphe biparti d'ordre  $n$  et  $k$  un entier positif avec  $2 \leq k \leq \Delta + 1$ , alors*

$$\beta_k(G) = 2\beta_{k-1}(G)$$

*si et seulement si  $G = \frac{n}{2}K_2$  et  $k = 2$  ou  $G = \frac{n}{4}C_4$  et  $k = 3$ .*

D'après la Proposition 3.11,  $\beta_k(G) \leq \frac{k+j-1}{j}\beta_j(G) - 1$  pour les arbres d'ordre  $n \geq 3$ . Nous améliorons cette borne pour  $k \geq 3$ . Aussi, nous caractérisons tous les arbres



atteignant cette borne. Nous avons besoin d'une observation sur l'égalité  $\beta_k(G) = n - 1$ , et une caractérisation constructive des arbres  $T$  pour lesquels  $\beta_j(T) = \frac{jn}{j+1}$  dû à Blidia et al. [6].

**Observation 3.13.** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et  $k$  un entier positif. Alors  $\beta_k(G) = n - 1$  si et seulement si  $G$  a un sommet  $w$  tel que tout voisin de  $w$  est de degré au plus  $k$ ,  $w$  ou au moins un de ses voisins est de degré  $k$  ou plus, et chaque sommet dans  $V - N[w]$  est de degré inférieur à  $k$  dans  $G$ .*

Soit l'opération suivante.

*Operation  $\mathcal{O}$ :* Soit  $w$  un sommet arbitraire d'un arbre  $T_w$  et soit  $v$  un sommet de l'étoile  $K_{1,j}$ . Soit  $T$  un arbre obtenu à partir de  $T_w \cup K_{1,j}$  en ajoutant l'arête  $vw$ .

On définit maintenant la famille  $\mathcal{T}$  comme suit:

$T \in \mathcal{T}$  si et seulement si  $T = K_{1,j}$  ou  $T$  est obtenu à partir de  $K_{1,j}$  par une séquence finie de l'opération  $\mathcal{O}$ .

**Théorème 3.14.** [19] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 3$  et  $j, k$  des entiers positifs avec  $j < k \leq \Delta$ . Alors on a:*

$$\beta_k(T) \leq \frac{k+j-1}{j} \beta_j(T) - \frac{(k-2)n}{j+1} - 1 \quad (3.3)$$

avec égalité si et seulement si

- (i)  $T \in \mathcal{T}$ , et
- (ii)  $T$  a un sommet  $w$  tel que tout voisin de  $w$  est de degré au plus  $k$ ,  $w$  ou au moins un de ses voisins est de degrés  $k$  ou plus, et chaque sommet dans  $V - N[w]$  est de degré inférieur à  $k$  dans  $G$ .

*Preuve.* On montre d'abord la borne supérieure. Comme  $\beta_k(T) \leq n - 1$  pour  $k \leq \Delta$ , et  $\beta_j(T) \geq \frac{jn}{j+1}$  pour les arbres (voir Théorème 2.68 du Chapitre 2), on en déduit que  $\beta_k(T) - \frac{k+j-1}{j} \beta_j(T) \leq -(k-2) \frac{n}{j+1} - 1$ , et la borne est prouvée.

Si  $T \in \mathcal{T}$  et  $T$  vérifie la Condition (ii), alors par le Théorème 2.68 et l'Observation 3.13,  $\beta_j(T) = \frac{jn}{j+1}$  et  $\beta_k(T) = n - 1$ , respectivement. Donc  $\beta_k(T) - \frac{k+j-1}{j} \beta_j(T) = -\frac{(k-2)n}{j+1} - 1$ .

Supposons maintenant que  $\beta_k(T) = \frac{k+j-1}{j}\beta_j(T) - \frac{(k-2)n}{j+1} - 1$ . Alors, on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalités précédente. En particulier,  $\beta_j(T) = \frac{jn}{j+1}$  et  $\beta_k(T) = n - 1$ . Par le Théorème 2.68, la première égalité implique que  $T \in \mathcal{T}$ , et par l'Observation 3.13, la deuxième égalité implique que  $T$  vérifie la condition (ii).  $\square$

Comme conséquence du Théorème 3.14, on en déduit le résultat suivant qui améliore la borne du Corollaire 3.3 et le Théorème 3.4 pour les arbres.

**Corollaire 3.15.** [19] *Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$  et  $k$  est un entier avec  $2 \leq k \leq \Delta$ , alors on a :*

$$(i) \quad \beta_k(T) \leq k\beta(T) - \frac{(k-2)n}{2} - 1.$$

$$(ii) \quad \beta_k(T) \leq 2\beta_{k-1}(T) - \frac{(k-2)n}{k} - 1.$$

Le Théorème 3.14 nous conduit à la caractérisation descriptive de la classe des arbres atteignant la borne 3.3 pour  $k = 2$  et  $j = 1$  (voir Figure 3.6).

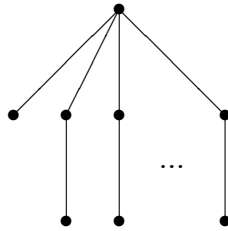


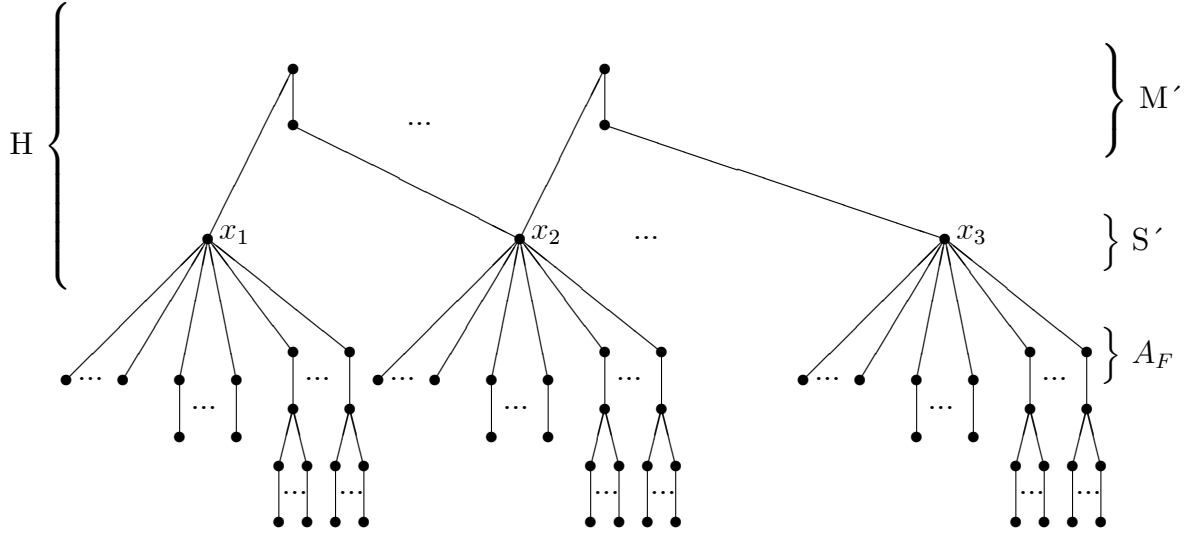
FIGURE 3.6. La couronne d'une étoile

**Corollaire 3.16.** [19] *Si  $T$  est un arbre, alors*

$$\beta_2(T) = 2\beta(T) - 1$$

*si et seulement si  $T = K_1$ , ou  $T$  est la couronne d'une étoile.*

Enfin, nous caractérisons la classe des arbres  $T$  atteignant la borne du Théorème 3.6. Nous donnons d'autres définitions. Pour un entier positif  $p$ , un arbre obtenu à partir d'une étoile  $K_{1,t}$ ,  $t \geq 1$  en subdivisant  $p$  arêtes est notée par  $S_p(K_{1,t})$ , un sommet de degré  $t$  sera

FIGURE 3.7. Exemple d'un graph dans la famille  $\mathcal{F}$ 

appelé le *centre*. Si  $p = 0$ , alors  $S_p(K_{1,t})$  est l'étoile  $K_{1,t}$ . Si  $p = t$ , alors  $S_p(K_{1,t})$  est une *araignée saine*. Si  $1 \leq p \leq t - 1$ , alors  $S_p(K_{1,t})$  est une *araignée blessée*.

Soit  $\mathcal{F}'$  une famille d'arbres obtenus à partir de deux araignées saines en joignant leurs centres,  $\mathcal{F}''$  (resp.  $\mathcal{F}'''$ ) une famille d'arbres obtenus à partir de deux araignées saines (resp. une araignée saine et  $K_1$ ) et une arête  $xy$  en joignant  $x$  au centre de la première araignée saine et  $y$  au centre de la seconde araignée saine (resp. en joignant  $x$  au centre de l'araignée saine et  $y$  au centre de  $K_1$ ).

Soit  $F_i$  un arbre obtenu d'une araignée blessée  $S_{p_i}(K_{1,t_i})$  et  $q_i \leq p_i$  araignées saines en identifiant  $q_i$  sommets pendants de l'araignée blessée  $S_{p_i}(K_{1,t_i})$  qui sont non adjacentes au centre avec les centres de ces  $q_i$  araignées saines. Soit  $H$  un arbre obtenu en reliant les arêtes d'un couplage induit  $M'$  de taille  $h - 1$  avec un ensemble de sommets indépendant  $S' = \{x_1, x_2, \dots, x_h\}$  tel que chaque sommet d'une arête de  $M'$  a exactement un voisin dans  $S'$ . Maintenant, définissons  $\mathcal{F}$  comme la famille des arbres obtenus à partir de  $F_1, F_2, \dots, F_h$  et  $H$  en identifiant un sommet  $x_i$  de  $S'$  avec les centres de  $F_i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ . Pour un arbre  $F \in \mathcal{F}$ , soient  $L_F$  et  $S_F$  les ensembles de sommets pendants et de supports de  $F$ , respectivement, et soit  $A_F$  l'ensemble des sommets de  $F$  adjacents à  $\sum_{i=1}^h q_i$  sommets pendants choisés dans  $\bigcup_{i=1}^h S_{p_i}(K_{1,t_i})$  (voir Figure 3.7).

Maintenant, nous sommes prêts à donner les arbres  $T$  tel que  $\beta_2(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$ .

**Théorème 3.17.** [19] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 3$ . Alors*

$$\beta_2(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$$

*si et seulement si  $T$  est une étoile, une araignée saine, une araignée blessée ou  $T \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'' \cup \mathcal{F}'''$ .*

Preuve. Il est facile de vérifier que si  $T$  est une étoile, une araignée saine, une araignée blessée ou  $T \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'' \cup \mathcal{F}'''$ , alors  $\beta_2(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$ . Si  $T \in \mathcal{F}$ , alors il est facile de voir que  $\gamma(T) = |S_F|$ ,  $\beta(T) = |L_F \cup A_F| + |M'| = |L_F| + |A_F| + h - 1$  et

$$\beta_2(T) = |(S_F - S') \cup L_F \cup A_F| + 2|M'| = |S_F| + |L_F| + |A_F| + h - 2.$$

Donc  $\beta_2(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$ .

Inversement, supposons que  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$  avec  $\beta_2(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$ . D'après la notation utilisée dans la démonstration du Théorème 3.6. Si  $I$  est indépendant, alors  $\beta_2(T) = \beta(T)$  et donc  $\gamma(T) = 1$ . Par conséquent  $T$  est une étoile. Si  $I$  n'est pas indépendant, alors  $\gamma(T) \geq |A| = |M|$ , car  $T$  est un arbre. Deux cas sont distingués:

**Case 1.**  $\gamma(T) = |M| = |A|$ .

Alors  $S - A' = \emptyset$ , et donc  $M_1 = \emptyset$ , car  $T$  est un arbre. Par conséquent,  $\beta_2(T) = 2|A| = 2\gamma(T) = \beta(T) + \gamma(T) - 1$ , ce qui donne  $\beta(T) = |A| + 1$ . Comme  $T$  est connexe avec  $n \geq 3$ , on doit avoir  $|V - I| \in \{1, 2\}$ , sinon on a  $\beta(T) > |A| + 1$ . Si  $|V - I| = 1$ , soit  $\{w\} = V - I$ , alors  $w$  est adjacent à exactement un sommet de chaque arête de  $M$ , car  $T$  est un arbre. Par conséquent,  $T$  est une araignée saine de centre  $w$ . Si  $|V - I| = 2$ , soit  $\{u, v\} = V - I$ , alors on doit examiner les possibilités selon que l'arête  $uv$  existe ou non. Si  $uv \in E(T)$ , alors  $u$  est adjacent à exactement un sommet de chaque arête d'un couplage  $M_u \subset M$  avec  $M_u \neq \emptyset$ , et  $v$  est adjacent à exactement un sommet de chaque arête de  $M_v = M - M_u$  avec  $M_v \neq \emptyset$ , car  $T$  est un arbre et  $M_1 = \emptyset$ . Par conséquent,  $T \in \mathcal{F}'$ . Si  $uv \notin E(T)$ , alors  $u$  et  $v$  ont exactement un voisin commun dans  $M$ , ou  $u$  est adjacent à un sommet d'une arête de  $M$  et  $v$  est adjacent à l'autre sommet, sinon on a un cycle ou  $T$  n'est pas connexe. Comme  $\beta(T) = |A| + 1$ , la première situation n'est pas possible. La deuxième situation conduit à un arbre  $T \in \mathcal{F}'' \cup \mathcal{F}'''$ .

**Case 2.**  $\gamma(T) \geq |M| + 1 = |A| + 1$ .

Alors  $\beta_2(T) = |S| + |A| = \beta(T) + \gamma(T) - 1 \geq |S| + |A|$ , et donc  $\gamma(T) = |A| + 1$  et  $\beta(T) = |S|$ . Par conséquent  $S - A' \neq \emptyset$  et  $|S - A'| \geq |V - I|$ , car  $\beta(T) \geq \frac{n}{2}$  pour les arbres. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A - A_1 \subset D$  et donc  $|D \cap (V - I)| = |M_1| + 1$  et les sommets de  $S - A'$  sont dominés par  $D \cap (V - I)$ . Comme  $\gamma(T) = |A| + 1$ ,  $|V - I| \geq 1$ . Chaque sommet de  $V - I$  est adjacent à exactement un sommet de  $S - A'$ , car  $D \cap (V - I)$  domine  $(S - A') \cup A_1 \cup A'_1$ , sinon on a un cycle ou  $\beta(T) > |S|$ . En outre, par le même argument, le sous-ensemble  $V - I$  est indépendant et pour toute paire de sommets  $x$  et  $y$  de  $V - I$ ,  $x$  est adjacent aux sommets des arêtes d'un couplage  $M_x \subseteq M$  et  $y$  est adjacent aux sommets des arêtes d'un couplage  $M_y \subseteq M - M_x$  et les sommets de  $(V - I) - D$  sont dominés par les sommets de  $M - M_1$ . Donc  $T \in \mathcal{F}$ . Notons que si  $|(V - I) \cap D| = 1$ , alors  $T$  est l'arbre  $F_1$ , et si  $|V - I| = 1$ , alors  $T$  qui est l'arbre  $F_1$ , est une araignée blessée.  $\square$

## 3.2 Delta-indépendance dans les graphes

Dans cette section nous présentons des relations entre  $\beta_j(G)$  et  $\beta_\Delta(G)$ . En plus, nous caractérisons les graphes tels que  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  pour  $j \in \{1, 2, \delta, \delta - 1, \Delta - 1\}$ .

### 3.2.1 Une inégalité entre $\beta_j(G)$ et $\beta_\Delta(G)$

On sait que la séquence  $(\beta_j)$  est croissante. Dans cette sous-section, nous renforçons l'inégalité  $\beta_j(G) \leq \beta_\Delta(G)$  pour  $j \leq \delta - 1$ .

**Théorème 3.18.** [22] *Soient  $j, \delta, \Delta$  trois entiers positifs avec  $j < \delta \leq \Delta$  et soit  $G$  un graphe de degré minimum  $\delta$  et de degré maximum  $\Delta$ . Alors on a:*

$$\beta_j(G) \leq \beta_\Delta(G) - \delta + j + 1. \quad (3.4)$$

En plus,  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G) - \delta + j + 1$  si et seulement si les trois égalités suivantes sont vérifiées:

$$\begin{cases} \beta_j(G) & = n - \gamma_{\delta-j+1}(G) & (a) \\ \gamma_{\delta-j+1}(G) & = \gamma(G) + \delta - j - 1 & (b) \\ \beta_\Delta(G) & = n - \gamma(G) & (c) \end{cases}$$

Preuve. En appliquant successivement les Théorèmes 2.38, 2.9 et 2.39 du Chapitre 2, avec  $j = \delta - k + 1$ , nous obtenons les trois inégalités suivantes.

$$\beta_j(G) \leq n - \gamma_{\delta-j+1}(G) \leq n - \gamma(G) - \delta + j + 1 \leq \beta_\Delta(G) - \delta + j + 1. \quad (3.5)$$

L'égalité se produit dans (3.5) si et seulement si chacun des inégalités précédentes est une égalité.  $\square$

**Corollaire 3.19.** [22] *Si  $G$  est un graphe de degré minimum  $\delta \geq 3$  et degré maximum  $\Delta$ , alors  $\beta_j(G) < \beta_\Delta(G)$  pour tout  $j \leq \delta - 2$ .*

Le resultat suivant donne une propriété des graphes atteignant la borne du Théorème 3.18 pour  $j \leq \delta - 1$ .

**Proposition 3.20.** [22] *Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$ , de degré minimum  $\delta \geq 2$  et  $j$  un entier positif avec  $j \leq \delta - 1$ . Si  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G) - \delta + j + 1$ , alors tout  $\beta_j(G)$ -ensemble est un ensemble  $(j + 1)$ -dominant de  $G$  et donc  $\beta_j(G) \geq \gamma_{j+1}(G) \geq j + 1$ .*

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_j(G)$ -ensemble. S'il existe un sommet  $y \in V - S$  tel que  $|N_S(y)| \leq j$ , alors  $|N_{V-S}(y)| \geq \delta - j$ . Soit  $A$  un sous-ensemble de  $N_{V-S}(y)$  avec  $|A| = \delta - j$ . Alors  $S \cup A$  est  $\Delta$ -indépendant avec  $|S| + \delta - j$  sommets, ce qui contredit  $\beta_\Delta(G) = |S| + \delta - j - 1$ . Donc  $S$  est un ensemble  $(j + 1)$ -dominant de  $G$ .  $\square$

**Exemple :** Soit  $H_n$  un graphe  $(n - 2)$ -régulier et d'ordre  $n$  pair avec  $n \geq 4$  ( $H_n$  est une clique  $K_n$  moins un couplage parfait). Alors  $\delta = \Delta = n - 2$ . On peut vérifier que  $\gamma_j(H_n) = \beta_j(H_n) = j$  si  $j$  est pair,  $\gamma_j(H_n) = \beta_j(H_n) = j + 1$  si  $j$  est impair. Ainsi  $\beta_j(H_n) = \beta_\Delta(H_n) - \delta + j$  si  $j$  est pair,  $\beta_j(H_n) = \beta_\Delta(H_n) - \delta + j + 1$  si  $j$  est impair, et seulement dans le deuxième cas, les trois inégalités (a), (b), (c) sont vérifiées. En outre, pour  $j$  impair, tout  $\beta_j(H_n)$ -ensemble est isomorphe à  $H_{j+1}$  et  $(j + 1)$ -dominant.

Toute condition supplémentaire sur  $G$  pour renforcer les Théorèmes 2.9, 2.38 ou 2.39 permet d'améliorer la borne (3.4) du Théorème 3.18. Par exemple, dans [55] Hansberg a prouvé que si un graphe  $G$  avec un degré maximum  $\Delta \leq n - 2$  a moins de  $(\gamma(G) - 1)(k - 1)$  cycles  $C_4$  induits pour un entier  $k$  avec  $\Delta \geq k \geq 2$ , alors  $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 1$ . Cela donne le corollaire suivant en posant à nouveau  $j = \delta - k - 1$ .

**Corollaire 3.21.** [22] Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta \leq n-2$  et de degré minimum  $\delta$ , et soit  $j \leq \delta - 1$  un entier positif. Si  $G$  contient moins  $(\gamma(G) - 1)(\delta - j)$  cycles  $C_4$  induits, alors on a :

$$\beta_j(G) \leq \beta_\Delta(G) - \delta + j.$$

### 3.2.2 Quelques familles de graphes

Dans cette sous-section, nous donnons les définitions de quelques familles de graphes utiles aux caractérisations des graphes  $G$  tels que  $\beta_i(G) = \beta_j(G)$ .

#### Les familles $\mathcal{G}(j, \Delta)$ et $\mathcal{F}(\delta, \Delta)$

**Définition 3.22.** Soient  $j$  et  $\Delta$  des entiers avec  $1 \leq j \leq \Delta - 1$ . Un graphe connexe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  appartient à la famille  $\mathcal{G}(j, \Delta)$  si  $V$  admet une partition  $(X, Y)$ , appelée bonne partition, tel que  $d_X(y) = \Delta$  pour  $y \in Y$  et  $d_X(x) \leq j - 1$ ,  $d_Y(x) \leq 1$  pour tout  $x \in X$ .

Notons que l'ensemble  $Y$  est indépendant et tous ses sommets sont de degré  $\Delta$ , l'ensemble  $X$  est un  $j$ -indépendant et tous ses sommets sont de degré au plus  $j < \Delta$ . Comme  $Y$  est l'ensemble de tous les sommets de degré  $\Delta$ , la bonne partition  $(X, Y)$  est unique.

**Proposition 3.23.** [22] Soient  $j$  et  $\Delta$  des entiers positifs avec  $j \leq \Delta - 1$  et soit  $G$  un graphe de la famille  $\mathcal{G}(j, \Delta)$ . Alors la partie  $X$  de la bonne partition  $(X, Y)$  de  $G$  est un ensemble  $j$ -indépendant maximum et  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$ .

Preuve. L'ensemble  $j$ -indépendant  $X$  et aussi  $\Delta$ -indépendant. Supposons que  $T$  est un autre ensemble  $\Delta$ -indépendant de  $G$  et soit  $y \in T \cap Y$ . Alors  $d_{T \cap X}(y) \leq \Delta - 1$  et  $d_{X-T}(y) \geq 1$  car  $d_X(y) = \Delta$ . Comme tout sommet de  $X$  a au plus un voisin dans  $Y$ ,  $|X - T| \geq |Y \cap T|$  et donc  $|T| = |T \cap X| + |T \cap Y| \leq |X|$ . Donc  $X$  est un ensemble  $\Delta$ -indépendant maximum et par conséquent un ensemble  $j$ -indépendant maximum. Donc on a  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$ .  $\square$

Par la Définition 3.22, le degré minimum d'un graphe  $G$  de  $\mathcal{G}(j, \Delta)$  est au plus  $j$ . La définition suivante décrit la sous-famille  $\mathcal{F}(\delta, \Delta)$  de graphes de  $\mathcal{G}(\delta, \Delta)$ .

**Définition 3.24.** Soit  $\delta$  et  $\Delta$  des entiers avec  $1 \leq \delta \leq \Delta - 1$ . Un graphe connexe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta$  appartient à la famille  $\mathcal{F}(\delta, \Delta)$  si  $V$  admet une partition  $(X, Y)$  tel que  $d_X(y) = \Delta$  pour tout  $y \in Y$ ,  $d_Y(x) = 1$  pour tout  $x \in X$  et le sous-graphe  $G[X]$  induit par  $X$  est  $(\delta - 1)$ -régulier.

Les familles  $\mathcal{L}(\Delta)$ ,  $\mathcal{H}(\Delta - 1, \Delta)$ ,  $\mathcal{H}(\Delta, \Delta)$

**Définition 3.25.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ , et soit  $(X, Y)$  une partition de  $V$  tel que  $Y$  est un ensemble indépendant,  $X$  est un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant et  $d_X(y) = \Delta$  pour tout  $y \in Y$ . La partition  $(X, Y)$  a la Propriété  $\mathcal{P}$  si pour tout  $A \subseteq X$  et  $B \subseteq Y$  tel que  $|A| < |B|$  et  $B \subseteq N_Y(A)$ , il existe un sommet  $v$  de  $X - A$  tel que  $d_{(X-A) \cup B}(v) = \Delta$ .

**Définition 3.26.** Soit  $\Delta \geq 2$  un entier. Un graphe connexe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  appartient à la Famille  $\mathcal{L}(\Delta)$  si  $V$  admet une partition  $(X, Y)$ , appelée bonne partition, tel que  $d_X(y) = \Delta$  pour tout  $y \in Y$ ,  $d_X(x) \leq \Delta - 2$  pour tout  $x \in X$  et la partition  $(X, Y)$  satisfait la Propriété  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 3.27.** [22] Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ . Si  $G$  appartient à  $\mathcal{L}(\Delta)$ , alors l'ensemble  $X$  de toute bonne partition  $(X, Y)$  de  $V$  est un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant maximum et  $\beta_{\Delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ .

Preuve. Soit  $G \in \mathcal{L}(\Delta)$  et soit  $(X, Y)$  une bonne partition. L'ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant  $X$  est aussi  $\Delta$ -indépendant. Supposons que  $G$  admet un autre ensemble  $\Delta$ -indépendant  $T$  et soit  $T \cap X = T_X$ ,  $T \cap Y = T_Y$ . Comme tout sommet  $y$  de  $T_Y$  a  $\Delta$  voisins dans  $X$  et au plus  $\Delta - 1$  voisins dans  $T_X$ ,  $y$  a au moins un voisin dans  $X - T_X$ . Donc  $T_Y \subseteq N_Y(X - T_X)$ . Si  $|X - T_X| < |T_Y|$ , alors par la Propriété  $\mathcal{P}$ , il existe un sommet  $v$  dans  $T_X$  tel que  $d_{T_X \cup T_Y}(v) = \Delta$ , ce qui contredit la définition de  $T$ . Alors  $|T_Y| \leq |X - T_X|$  et donc  $|T| \leq |X|$ . Par conséquent  $X$  est un ensemble  $\Delta$ -indépendant maximum de  $G$  et donc un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant maximum, et  $\beta_{\Delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ .  $\square$

La proposition suivante montre que la Proposition 3.27 est plus forte que la Proposition 3.23 pour  $j = \Delta - 1$ .



**Proposition 3.28.** [22] *Pour tout entier  $\Delta \geq 2$ ,  $\mathcal{G}(\Delta - 1, \Delta) \subset \mathcal{L}(\Delta)$  et l'inclusion est stricte.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}(\Delta - 1, \Delta)$ , et soit  $(X, Y)$  sa bonne partition unique. Comme  $d_Y(x) \leq 1$  pour tout  $x \in X$ ,  $|B| \leq |A|$  pour chaque paire de sous-ensembles  $A \subseteq X$  et  $B \subseteq Y$  tel que  $B \subseteq N_Y(A)$ . Par conséquent, la partition  $(X, Y)$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}$  et  $G \in \mathcal{L}(\Delta)$ . Le troisième exemple du graphe  $L_n$  donné à la fin de cette sous-section montre que l'inclusion est stricte.  $\square$

La propriété  $\mathcal{P}$  n'est pas facile à vérifier. La propriété  $\mathcal{Q}$  suivante, plus simple mais plus faible que  $\mathcal{P}$ , est parfois utile.

**Définition 3.29.** *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ , l'ensemble  $V$  des sommets de  $G$  admet une partition  $(X, Y)$  tel que  $Y$  est un ensemble indépendant,  $X$  est un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant et  $d_X(y) = \Delta$  pour tout  $y \in Y$ . La partition  $(X, Y)$  a la propriété  $\mathcal{Q}$  si pour toute paire  $y_1, y_2$  de sommets de  $Y$  tel que  $N_X(y_1) \cap N_X(y_2) \neq \emptyset$ , il existe au moins deux sommets non adjacents  $x_1, x_2$  dans  $N_X(y_1) \cap N_X(y_2)$  tels que  $d_X(x_1) = d_X(x_2) = \Delta - 2$ .*

**Proposition 3.30.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ , l'ensemble  $V$  des sommets de  $G$  admet une partition  $(X, Y)$  tel que  $Y$  est un ensemble indépendant,  $X$  est un ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant et  $d_X(y) = \Delta$  pour tout  $y \in Y$ . Si la partition  $(X, Y)$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ , alors elle satisfait la propriété  $\mathcal{Q}$ .*

Preuve. Soit  $y_1, y_2$  deux sommets de  $Y$  tel que  $N(y_1) \cap N(y_2)$  contient un sommet  $x$  de  $X$  et  $A = \{x\}$ ,  $B = \{y_1, y_2\}$ . Par la propriété  $\mathcal{P}$ , il existe un sommet  $x_1$  dans  $X - \{x\}$  qui a  $\Delta$  voisins dans  $(X - \{x\}) \cup \{y_1, y_2\}$ . Comme  $d_X(x_1) \leq \Delta - 2$ ,  $d_X(x_1) = \Delta - 2$  et  $x_1$  n'est pas adjacent à  $x$  mais il est adjacent à  $y_1$  et  $y_2$ . Le même raisonnement s'applique sur les ensembles  $A_1 = \{x_1\}$  et  $B$  et montre qu'il existe un sommet  $x_2$  dans  $X$ , peut-être égal à  $x$ , de degré  $\Delta - 2$  dans  $X$ , non adjacent à  $x_1$  mais adjacent à la fois à  $y_1$  et  $y_2$ . Ainsi la propriété  $\mathcal{Q}$  est vérifiée.  $\square$

De la proposition précédente, si un graphe  $G$  a une partition satisfaisant la propriété  $\mathcal{Q}$ , et si un sommet  $x$  de  $X$  a plus d'un voisin dans  $Y$ , alors  $x$  appartient à un cycle induit  $C_4$  de  $G$ . On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 3.31.** [22] *Tout graphe sans  $C_4$  de famille  $\mathcal{L}(\Delta)$  est dans  $\mathcal{G}(\Delta - 1, \Delta)$ .*

Dans la sous-section précédente, nous nous sommes spécialement intéressés aux graphes de la famille  $\mathcal{L}(\Delta)$  avec un degré minimum  $\Delta - 1$  ou  $\Delta$ . Pour cela, nous donnons les définitions suivantes.

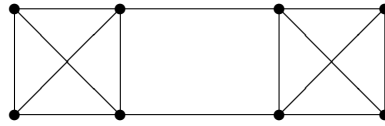
**Définition 3.32.**  $\mathcal{H}(\Delta - 1, \Delta)$  est le sous-famille des graphes de  $\mathcal{L}(\Delta)$  de degré minimum  $\Delta - 1$ , et  $\mathcal{H}(\Delta, \Delta)$  est la sous-famille des graphes de  $\mathcal{L}(\Delta)$  de degré minimum  $\Delta$ , i. e., respectivement, les graphes semi-réguliers et les graphes réguliers de  $\mathcal{L}(\Delta)$ .

Notons que pour chaque bonne partition  $(X, Y)$  de l'ensemble des sommets d'un graphe de  $\mathcal{L}(\Delta)$  et pour tout  $x \in X$ ,  $d_Y(x) \geq 1$  si  $G \in \mathcal{H}(\Delta - 1, \Delta)$  et  $d_Y(x) \geq 2$  si  $G \in \mathcal{H}(\Delta, \Delta)$ .

Dans ce qui précède, les entiers  $j, \delta, \Delta$ , sont souvent donnés en fonction de l'ordre  $n$  de  $G$ . Nous donnons ci-dessous quelques exemples des familles précédentes.

### Exemples :

1.  $\mathcal{F}(1, \Delta) = \mathcal{F}(1, n - 1) = \{K_{1, \Delta}\}$  est l'ensemble de toutes les étoiles  $K_{1, n-1}$ .
2. Pour un entier pair  $n$  ;  $n \geq 4$ , considérons de nouveau le graphe  $(n - 2)$ -régulier  $H_n$  constitué d'une clique d'ordre  $n$  moins un couplage parfait. La partition  $(X, Y)$  où  $Y$  est constitué de deux sommets non adjacents montre que  $H_n \in \mathcal{H}(n - 2, n - 2)$ .
3. Pour  $n$  pair;  $n \geq 6$ , soit  $L_n$  un graphe obtenu à partir de deux cliques disjointes d'odres  $n/2$ , en ajoutant deux arêtes non adjacentes reliant deux sommets différents de la première clique à deux sommets différents de la seconde clique. Pour ce graphe,  $\Delta = n/2$ ,  $\delta = n/2 - 1$  et la partition  $(X, Y)$ , où  $Y$  est constitué de deux sommets non adjacents de degré  $n/2$ , satisfait la propriété  $\mathcal{P}$  de la définition de  $\mathcal{L}(\Delta)$ . Par conséquent  $L_n \in \mathcal{H}(n/2 - 1, n/2) \subseteq \mathcal{L}(n/2)$ . Mais  $L_n$  n'appartient pas à  $\mathcal{F}(n/2 - 1, n/2)$ , ni à  $\mathcal{G}(n/2 - 1, n/2)$ , car deux sommets de  $X$  ont deux voisins dans  $Y$  (voir Figure 3.8).

FIGURE 3.8. Le graphe  $L_8$ 

### 3.2.3 Egalités entre les paramètres de la $j$ -indépendance

Dans cette sous-section, nous donnons des caractérisations et des propriétés des graphes  $G$  tels que  $\beta_i(G) = \beta_j(G)$  pour certaines valeurs de  $i$  et  $j$ . Nous nous sommes particulièrement intéressés à  $j = \Delta$ . Par le Corollaire 3.19,  $\beta_i(G) = \beta_\Delta(G)$  n'est pas vraie pour  $i < \delta(G) - 1$ . Si  $G$  a plusieurs composantes connexes  $G_k$ , alors  $\Delta(G) = \max_k \Delta(G_k)$ ,  $\delta(G) = \min_k \delta(G_k)$  et le problème est intéressant que si tous les composantes ont le même degré maximum et le même degré minimum. Dans ce cas, les propriétés des graphes tels que  $\beta_i(G) = \beta_j(G)$  sont valables pour chaque composante connexe. Par conséquent, il suffit dans ce qui suit de considérer que les graphes connexes.

#### L'égalité $\beta_{j-1}(G) = \beta_j(G)$ pour $2 \leq j \leq \Delta$

Il est connu dans [45] que le nombre de  $j$ -indépendance  $\beta_j(G)$  d'un graphe peut être plus grand que le nombre de  $j$ -domination minimal maximum  $\Gamma_j(G)$ . Nous montrons que ce n'est pas vrai lorsque  $\beta_{j-1}(G) = \beta_j(G)$ .

**Proposition 3.33.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$  et  $j$  un entier avec  $2 \leq j \leq \Delta$ . Si  $\beta_{j-1}(G) = \beta_j(G)$  et  $S$  est un ensemble  $(j-1)$ -indépendant maximum, alors  $S$  est un ensemble  $j$ -dominant minimal de  $G$  et donc  $\beta_j(G) \leq \Gamma_j(G)$ .*

*Preuve.* Soit  $S$  un  $\beta_{j-1}(G)$ -ensemble. Si un sommet  $y$  de  $V - S$  a moins de  $j$  voisins dans  $S$ , alors  $S \cup \{y\}$  est un ensemble  $j$ -indépendant plus grand que  $S$ , on a une contradiction avec  $|S| = \beta_{j-1}(G) = \beta_j(G)$ . D'où  $S$  est un  $j$ -dominant. Cet ensemble  $j$ -dominant est minimal car  $d_S(x) < j$  pour tout  $x \in S$ . Par conséquent  $\beta_j(G) = |S| \leq \Gamma_j(G)$ .  $\square$

Pour  $j = \Delta$ , il est connu par [30] que  $\beta_\Delta(G) \geq \Gamma_\Delta(G)$ , ceci donne le corollaire suivant.

**Corollaire 3.34.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$  et tel que  $\beta_{\Delta-1}(G) = \beta_\Delta(G)$ . Alors tout ensemble  $(\Delta - 1)$ -indépendant maximum est un ensemble  $\Delta$ -dominant minimal et  $\beta_\Delta(G) = \Gamma_\Delta(G)$ .*

**L'égalité  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  pour  $1 \leq j \leq \Delta - 1$**

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe connexe  $G$  satisfasse l'égalité  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$ .

**Théorème 3.35.** [22] *Soit  $j$  et  $\Delta$  des entiers positifs avec  $j \leq \Delta - 1$  et soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G \in \mathcal{G}(j, \Delta)$  avec  $j \leq \Delta - 2$  ou  $G \in \mathcal{L}(\Delta)$  avec  $j = \Delta - 1$ .*

Preuve. La condition nécessaire est une conséquence des Propositions 3.23 et 3.27. Pour montrer la condition suffisante, nous considérons un ensemble  $j$ -indépendant maximum  $X$  de  $G$  et  $Y = V - X$ . Comme  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  et la séquence  $(\beta_k)$  est croissante,  $X$  est un ensemble  $k$ -indépendant maximum de  $G$  pour  $j \leq k \leq \Delta$  et d'après la Proposition 3.33,  $X$  est un ensemble  $\Delta$ -dominant de  $G$ . Donc  $d_X(y) = \Delta$  pour tout  $y \in Y$  et  $Y$  est indépendant.

Pour le cas  $j \leq \Delta - 2$ , supposons qu'il existe un sommet  $x$  de  $X$  tel que  $x$  a au moins deux voisins  $y_1$  et  $y_2$  dans  $Y$  et considérons l'ensemble  $S = (X - \{x\}) \cup \{y_1, y_2\}$ . Pour  $i = 1, 2$ ,  $d_S(y_i) = \Delta - 1$ , et pour tout  $v \in S \cap X$ ,  $d_S(v) \leq j + 1 \leq \Delta - 1$ . Donc  $S$  est un ensemble  $\Delta$ -indépendant plus grand que  $X$ , ce qui contredit  $|X| = \beta_\Delta(G)$ . Par conséquent  $d_Y(x) \leq 1$  pour tout  $x$  dans  $X$  et donc  $G \in \mathcal{G}(j, \Delta)$ .

Maintenant supposons que  $j = \Delta - 1$  et qu'il existe deux sous-ensemble  $A \subseteq X$  et  $B \subseteq Y$  tels que  $|A| < |B|$ ,  $B \subseteq N_Y(A)$  et  $d_{(X-A) \cup B}(x) < \Delta$  pour tout  $x$  de  $X - A$ . Comme  $B \subseteq N_Y(A)$ , chaque sommet de  $B$  a un voisin dans  $A$  et donc au plus  $\Delta - 1$  voisins dans l'ensemble  $S = (X - A) \cup B$ . Comme  $d_S(x) < \Delta$  pour tout sommet  $x$  de  $X - A$ ,  $S$  est un ensemble  $\Delta$ -indépendant plus grand que  $X$ , ce qui contredit  $|X| = \beta_\Delta(G)$ . Par conséquent la partition  $(X, Y)$  satisfait la Propriété  $\mathcal{P}$  et donc  $G \in \mathcal{L}(\Delta)$ .  $\square$

Lorsque  $G$  est sans  $C_4$ , le corollaire suivant découle du Corollaire 3.31.

**Corollaire 3.36.** [22] Soit  $j$  et  $\Delta$  des entiers positifs avec  $j \leq \Delta - 1$  et soit  $G$  un graphe connexe sans  $C_4$  de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G \in \mathcal{G}(j, \Delta)$ .

L'application du Théorème 3.35 pour les cas particuliers  $j = 1$  et  $j = 2$  donne les résultats suivants.

**Théorème 3.37.** [22] Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $\beta(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G$  est le cycle  $C_4$  ou une étoile.

Preuve. Si  $\Delta = 1$ ,  $G$  est la chaîne  $P_2$ . Si  $\Delta \geq 2$  alors, d'après le théorème 3.35,  $\beta(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G \in \mathcal{L}(2)$  ou  $G \in \mathcal{G}(1, \Delta)$  avec  $\Delta \geq 3$ . Les graphes de  $\mathcal{L}(2)$  sont la chaîne  $P_3$  et le cycle  $C_4$ . Les graphes de  $\mathcal{G}(1, \Delta)$  avec  $\Delta \geq 3$  sont les étoiles  $K_{1, n-1}$  avec  $n \geq 4$ .  $\square$

**Théorème 3.38.** [22] Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ . Alors  $\beta_2(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si,

- i)  $G$  est une chaîne  $P_n$  ou un cycle  $C_n$ ,
- ii)  $G \in \mathcal{L}(3)$  avec  $\Delta = 3$  ou
- iii)  $G \in \mathcal{G}(2, \Delta)$  avec  $\Delta \geq 4$ .

**Exemple 1 :** Soit  $T$  un arbre constitué de  $p \geq 1$  étoiles disjointes  $K_{1, k}$ ;  $k \geq 3$ , et  $p - 1$  arêtes reliant les sommets pendant des étoiles, de sorte que les  $p$  étoiles  $K_{1, k}$  avec les  $p - 1$  sommets pendants forment une chaîne d'étoiles. Alors  $n(T) = p(k + 1)$ ,  $\Delta(T) = k$  et  $\beta_2(T) = \beta_\Delta(T) = kp$ . On voit que  $T \in \mathcal{G}(2, \Delta)$  pour  $\Delta = k$ . Lorsque  $\Delta = 3$ , par la Proposition 3.28,  $\mathcal{G}(2, 3) \subseteq \mathcal{L}(3)$  (voir Figure 3.9).

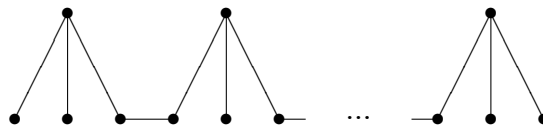


FIGURE 3.9. L'arbre  $T$  pour  $k = 3$

**Exemple 2 :** Soit  $G$  le graphe obtenu à partir de  $p \geq 3$  arêtes  $x_i y_i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  en joignant les sommets  $x_i$  à un nouveau sommet  $x$  et les sommets  $y_i$  à un autre nouveau sommet  $y$ . Alors  $n = 2p + 2$ ,  $\Delta = p$ , et  $\beta_2(G) = \beta_\Delta(G) = 2p$ . On voit que  $G \in \mathcal{G}(2)$ , pour  $p \geq 3$ . Lorsque  $\Delta = 3$ ,  $\mathcal{G}(2, 3) \subseteq \mathcal{L}(3)$  (voir Figure 3.10).

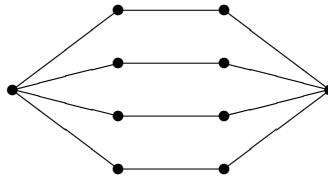


FIGURE 3.10. Le graphe  $G$  pour  $p = 4$

Par le Corollaire 3.19,  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  implique  $j \geq \delta - 1$ . Dans les deux parties suivantes, nous considérons les cas particuliers  $j = \delta$  et  $j = \delta - 1$ .

**L'égalité  $\beta_\delta(G) = \beta_\Delta(G)$**

En remplaçant  $j$  par  $\delta$  dans le Théorème 3.35, nous trouvons le résultat suivant.

**Théorème 3.39.** [22] *Un graphe connexe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta \leq \Delta - 1$  satisfait  $\beta_\delta(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G$  appartient à  $\mathcal{F}(\delta, \Delta)$  lorsque  $\delta \leq \Delta - 2$  et  $G$  appartient à  $\mathcal{H}(\Delta - 1, \Delta)$  lorsque  $\delta = \Delta - 1$ . Si de plus  $G$  est sans  $C_4$ , alors  $\beta_\delta(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G$  appartient à  $\mathcal{F}(\delta, \Delta)$  pour chaque valeur de  $\delta$ .*

**L'égalité  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_\Delta(G)$**

En remplaçant  $j$  par  $\delta - 1$  dans le Théorème 3.35, nous trouvons le résultat suivant.

**Théorème 3.40.** [22] *Soit  $\delta$  et  $\Delta$  deux entiers positifs avec  $2 \leq \delta \leq \Delta$ . Un graphe connexe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta$ , alors  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $G \in \mathcal{H}(\Delta, \Delta)$ .*

Preuve. Comme le degré minimum des graphes de  $\mathcal{G}(j, \Delta)$  est au plus  $j$ , il n'y a pas de graphes de degré  $\delta$  dans  $\mathcal{G}(\delta - 1, \Delta)$ . Par le théorème 3.35,  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_\Delta(G)$  si et seulement si  $\delta - 1 = \Delta - 1$ , i. e.,  $G$  est régulier, et donc  $G \in \mathcal{L}(\Delta)$ . Ceci est équivalent à  $G \in \mathcal{H}(\Delta, \Delta)$ .  $\square$

Par exemple, le graphe  $H_n$  satisfait  $\beta_{n-3}(H_n) = \beta_{n-2}(H_n) = n - 2$ .

Les  $n/2$  partitions  $(X, Y)$  obtenues en prenant  $Y$  comme un ensemble de deux sommets non adjacents montrent que  $H_n \in \mathcal{H}(\Delta, \Delta)$ . Notons que  $\gamma(H_n) = \gamma_2(H_n) = 2$ .

**Corollaire 3.41.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta \geq 2$ . Alors  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$  si et seulement si  $G$  est régulier et  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ .*

Preuve. Supposons que  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ . Alors par le Théorème 3.40,  $G$  est régulier et  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ . Pour satisfaire la propriété (b) dans le cas de l'égalité dans le Théorème 3.18. Supposons que  $G$  est régulier et  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ . D'après le Théorème 2.39 du Chapitre 2,  $n = \gamma(G) + \beta_{\Delta}(G) = \gamma_2(G) + \beta_{\Delta-1}(G)$  et donc  $\beta_{\Delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ .  $\square$

La caractérisation des graphes tels que  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$  n'est connue que dans certaines classes particulières de graphes. Par exemple, il est prouvé dans [58] que les seuls graphes  $G$  réguliers sans griffes  $K_{1,3}$  tel que  $\gamma(G) = \gamma_2(G)$  sont le graphe  $H_n$  et le produit cartésien de deux cliques  $K_p \square K_p$ . Cela donne le corollaire suivant.

**Corollaire 3.42.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe  $\Delta$ -régulier sans  $K_{1,3}$ . Alors  $\beta_{\Delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$  si et seulement si  $G = H_n$  ou  $G = K_p \square K_p$  avec  $p \geq 2$  et  $p^2 = n$ .*

Nous donnons maintenant quelques propriétés des graphes satisfaisant  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ . La première est une conséquence du Corollaire 3.21.

**Corollaire 3.43.** *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \leq n - 2$  et de degré minimum  $\delta \geq 2$ . Si  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ ,  $G$  contient au moins  $\gamma(G) - 1$  cycles  $C_4$  induits.*

**Proposition 3.44.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta \geq 3$ . Si  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_{\Delta}(G)$ , alors on a:  $\gamma(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$  et  $\Delta \geq 4$ .*

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_{\delta-1}(G)$ -ensemble. D'après le Théorème 3.40, le nombre  $m(S, V-S)$  d'arêtes de  $G$  entre  $S$  et  $V-S$  satisfait  $2|S| \leq m(S, V-S) = \Delta|V-S|$ , et par suite  $\beta_{\delta-1}(G) = |S| \leq \frac{\Delta n}{\Delta+2}$ . D'après le Théorème 2.39,  $n - \gamma(G) \leq \beta_{\Delta}(G) = \beta_{\delta-1}(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta+2}$  et donc  $\gamma(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$ . D'après un résultat de Reed [81],  $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$  pour  $\delta \geq 3$ . Par conséquent  $n - \frac{3n}{8} \leq \frac{\Delta n}{\Delta+2}$ , et donc  $\Delta \geq \lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$ .  $\square$

**Corollaire 3.45.** *Si  $G$  est un graphe cubique, alors on a:  $\beta_2(G) < \beta_3(G)$  et  $\gamma(G) < \gamma_2(G)$ .*

**Lemme 3.46.** [22] *Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$ . Alors  $G$  a un ensemble  $S$  indépendant maximum contenant un sommet avec exactement  $\Delta - 1$  voisins dans  $S$ .*

Preuve. Soit  $S$  un  $\beta_\Delta(G)$ -ensemble. Si  $S$  ne contient aucun sommet de degré  $\Delta - 1$  dans  $S$ , alors  $d_S(x) \leq \Delta - 2$  pour tout  $x$  dans  $S$ . Soit  $y \in V - S$  et  $u$  un voisin de  $y$  dans  $S$ . Comme  $S \cup \{y\}$  n'est pas  $\Delta$ -indépendant,  $d_S(y) = \Delta$ . Ainsi l'ensemble  $S' = (S - \{u\}) \cup \{y\}$  est un ensemble  $\Delta$ -indépendant contenant un sommet  $y$  de degré  $\Delta - 1$  dans  $S'$ .  $\square$

**Proposition 3.47.** [22] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta$  et de degré minimum  $\delta \geq 2$ . Si  $\beta_{\delta-1}(G) = \beta_\Delta(G)$ , alors  $G$  a au moins deux ensembles  $\Delta$ -indépendants maximums.*

Preuve. Par le Théorème 3.40,  $G \in \mathcal{H}(\Delta, \Delta)$ . Soit  $(X, Y)$  une bonne partition de  $G$ . l'ensemble  $X$  est un  $\beta_\Delta(G)$ -ensemble de  $G$  de degré maximum  $\Delta - 2$ , et par le lemme précédent, il existe au moins un autre  $\beta_\Delta(G)$ -ensemble  $S$  contenant un sommet de degré  $\Delta - 1$  dans  $S$ .  $\square$



## CHAPITRE 4

# DES INÉGALITÉS ENTRE LES PARAMÈTRES DE LA $k$ -DOMINATION ROMAINE, LA DOMINATION ROMAINE ET LA $k$ -DOMINATION

Dans [73], Kamerling et Volkmann ont donné des bornes sur  $\gamma_{kR}(G)$  et des relations entre  $\gamma_{kR}(G)$  et  $\gamma_k(G)$ , et Henning [63] a donné une caractérisation des arbres romains.

Ce chapitre est composé de deux sections, dans la première section, nous donnons une relation entre  $\gamma_{kR}(G)$  et  $\gamma_R(G)$  et nous donnons une caractérisation des graphes  $G$  tels que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ .

Dans la deuxième section, nous étudions les graphes  $k$ -romains pour  $k \geq 2$ ; nous améliorons la borne  $\gamma_{kR}(G) \leq 2\gamma_k(G)$  et donnons quelques caractérisations des graphes extrémaux. A la fin, nous montrons que le problème de la  $k$ -DOMINATION ROMAINE est NP-complet pour les graphes bipartis et les graphes triangulés, pour tout entier  $k \geq 1$ .

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été acceptés comme communication aux colloques COSI'12 [17] et COSI'13 [18], et ont fait l'objet de publications dans les revues « Discrete Mathematics, Algorithms and Applications » [20] et « Opuscula Math. » [21].

### 4.1 Relations entre $\gamma_{kR}(G)$ et $\gamma_R(G)$

#### 4.1.1 Inégalité entre $\gamma_{kR}(G)$ et $\gamma_R(G)$

Dans cette sous-section, nous donnons quelques relations entre  $\gamma_{kR}(G)$  et  $\gamma_R(G)$ . Nous commençons par une simple propriété de toute  $\gamma_{kR}$ -fonction d'un graphe  $G$ .

**Observation 4.1.** *Si  $f = (V_0, V_1, V_2)$  est une  $\gamma_{kR}(G)$ -fonction, alors pour tout sommet  $v$  de  $V_2$ ,  $N(v) \cap V_0 \neq \emptyset$ .*

Ensuite nous établissons une relation entre  $\gamma_{kR}(G)$  et  $\gamma_R(G)$  pour tout graphe  $G$  avec  $\gamma_{kR}(G) < n$  et  $k \geq 2$ .

**Proposition 4.2.** [20] *Soit  $k \geq 2$  un entier et  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Si  $\gamma_{kR}(G) < n$ , alors*

$$\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_R(G) + 2k - 4. \quad (4.1)$$

Preuve. Soit  $f = (V_0, V_1, V_2)$  une  $\gamma_{kR}$ -fonction sur  $G$ . Comme  $\gamma_{kR}(G) < n$ ,  $V_0 \neq \emptyset$  et donc  $|V_2| \geq k$ . Soient  $v \in V_0$  et  $A$  un sous-ensemble de  $N_G(v) \cap V_2$  de cardinalité  $k - 1$ . Il est clair que  $V'_2 = (V_2 - A) \cup \{v\}$  domine  $V'_0 = (V_0 - \{v\}) \cup A$ . Par conséquent  $f' = (V'_0, V_1, V'_2)$  est une R1-DF sur  $G$ , et donc  $\gamma_R(G) \leq |V_1| + 2|V'_2| = |V_1| + 2|V_2| - 2k + 4 = \gamma_{kR}(G) - 2k + 4$ .  $\square$

Les deux résultats suivants améliorent la borne (4.1) de la Proposition 4.2 pour  $k = 2$  et pour les graphes sans  $C_4$ , respectivement.

**Proposition 4.3.** [20] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  avec  $\gamma_{2R}(G) < n$ , alors*

$$\gamma_{2R}(G) \geq \gamma_R(G) + 1.$$

Preuve. Soit  $f = (V_0, V_1, V_2)$  une  $\gamma_{2R}$ -fonction sur  $G$ . Comme  $\gamma_{2R}(G) < n$ ,  $V_0 \neq \emptyset$  et donc  $|V_2| \geq 2$ . Soit  $x$  un sommet de  $V_2$ . Alors  $(V_0, V_1 \cup \{x\}, V_2 - \{x\})$  est une R1-DF sur  $G$ , et par conséquent  $\gamma_R(G) \leq |V_1 \cup \{x\}| + 2|V_2 - \{x\}| = |V_1| + 2|V_2| - 1 = \gamma_{2R}(G) - 1$ .  $\square$

**Proposition 4.4.** [20] *Soit  $k \geq 2$  un entier et  $G$  un graphe sans  $C_4$  d'ordre  $n$ . Si  $\gamma_{kR}(G) < n$ , alors*

$$\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_R(G) + 2k - 2.$$

Preuve. Soit  $f = (V_0, V_1, V_2)$  une  $\gamma_{kR}$ -fonction sur  $G$ . Comme  $\gamma_{kR}(G) < n$ ,  $V_0 \neq \emptyset$ . Soit  $x$  un sommet de  $V_0$  et  $A$  un sous ensemble quelconque de  $N_G(x) \cap V_2$  d'ordre  $k$ . Si  $f' = ((V_0 \cup A) - \{x\}, V_1, (V_2 - A) \cup \{x\})$  est un R1-DF sur  $G$ , alors  $\gamma_R(G) \leq |V_1| + 2|(V_2 - A) \cup \{x\}| = \gamma_{kR}(G) - 2k + 2$ . Donc supposons que  $f'$  n'est pas un R1-DF sur  $G$ . Soit  $B$  l'ensemble des sommets de  $V_0$  tel que pour tout sommet  $y \in B$ ,  $N_G(y) \cap V_2 = A$  et  $y$  n'est pas adjacent à  $x$ . Comme  $G$  est sans cycle  $C_4$ , le sous graphe  $G[A]$  doit être complet.

Soit  $u$  un sommet de  $A$ . Il s'ensuit que  $(V_0 \cup (A - \{u\}), V_1, V_2 - (A - \{u\}))$  est une R1-DF sur  $G$ , ce qui implique que  $\gamma_R(G) \leq |V_1| + 2|V_2 - (A - \{u\})| = \gamma_{kR}(G) - 2k + 2$ .  $\square$

**Corollaire 4.5.** [20] *Si  $G$  est un graphe sans  $C_4$  d'ordre  $n$  avec  $\gamma_{2R}(G) < n$ , alors*

$$\gamma_{2R}(G) \geq \gamma_R(G) + 2.$$

Soit  $K_{p,q}$  le graphe biparti complet avec  $p \geq q \geq 3$ . Il est clair que  $K_{p,q}$  contient un cycle  $C_4$ ,  $\gamma_R(K_{p,q}) = 4$ ,  $\gamma_{qR}(K_{p,q}) = 2q$  et  $K_{p,q}$  vérifie  $\gamma_{qR}(K_{p,q}) = \gamma_R(K_{p,q}) + 2q - 4$ . D'autre part, le graphe complet  $K_n$  avec  $n \geq 2k + 1$  qui ne contient aucun cycle  $C_4$  vérifie  $\gamma_{kR}(K_n) = \gamma_R(K_n) + 2k - 2$ . Ceci montre que les Propositions 4.2 et 4.4 sont les meilleures possibles.

#### 4.1.2 Graphes $G$ avec $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$

Nous commençons par la borne inférieure pour  $\gamma_{kR}(G)$  en fonction de  $n$ ,  $\Delta$  et  $k$ . De plus, nous donnons une caractérisation des graphes atteignant cette borne.

**Théorème 4.6.** [20] *Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  et  $k$  est un entier avec  $2 \leq k \leq \Delta$ , alors*

$$\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_R(G) + \frac{6k - 4\Delta}{5(\Delta + k)}n$$

avec égalité si et seulement si  $G$  est un cycle  $C_5$  ou  $G$  est obtenu en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de  $\frac{n}{5}P_5$  et  $k = \Delta$ .

Preuve. Les bornes du Théorèmes 2.92 et 2.84 du Chapitre 2 nous conduisent directement à  $\gamma_{kR}(G) - \gamma_R(G) \geq \frac{2k}{k+\Delta}n - \frac{4}{5}n = \frac{6k-4\Delta}{5(\Delta+k)}n$ , et la borne est prouvée.

Supposons maintenant que  $\gamma_{kR}(G) - \gamma_R(G) = \frac{6k-4\Delta}{5(\Delta+k)}n$ . Alors on a l'égalité dans la chaîne des inégalités précédente. En particulier,  $\gamma_R(G) = \frac{4}{5}n$  et  $\gamma_{kR}(G) = \frac{2k}{\Delta+k}n$ . D'après le Théorème 2.84, la première égalité implique que  $G$  est un cycle  $C_5$  ou  $G$  est obtenu en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de  $\frac{n}{5}P_5$ , et la seconde égalité implique que  $k = \Delta$  (voir la démonstration du Théorème 2.92 dans [73]).

L'inverse est facile de montrer et nous omettons les détails.  $\square$

Notons que la borne du Théorème 4.6 est meilleure que la borne de la Proposition 4.2 lorsque  $\frac{6k-4\Delta}{5(\Delta+k)}n > 2k - 4$ , tandis que, la Proposition 4.2 donne de meilleurs résultats pour  $\frac{6k-\Delta}{5(\Delta+k)}n < 2k - 4$ , et pour le cas particulier  $k = \Delta$ , on a  $\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_R(G) + 1$ .

Maintenant, nous donnons une caractérisation des graphes  $G$  avec  $\gamma_{\Delta R}(G) = \gamma_R(G) + 1$ .

**Corollaire 4.7.** [20] *Soit  $G$  un graphe connexe de degré maximum  $\Delta \geq 2$ . Alors*

$$\gamma_{\Delta R}(G) = \gamma_R(G) + 1$$

*si et seulement si  $G \in \{P_3, C_3, P_4, C_4, P_5, C_5\}$ .*

Preuve. Si  $G = P_3, C_3, P_4, C_4, P_5$  ou  $C_5$ , alors  $\Delta = 2$  et il est facile de vérifier que  $\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + 1$ .

Inversement, supposons que  $G$  est un graphe connexe tel que  $\gamma_{\Delta R}(G) = \gamma_R(G) + 1$ . En appliquons le Théorème 4.6, nous observons que  $\frac{6\Delta-4\Delta}{5(\Delta+\Delta)}n \leq 1$ , ce qui implique que  $3 \leq n \leq 5$ . Comme  $\gamma_{\Delta R}(G) = n$  (d'après le Corollaire 2.93 du Chapitre 2),  $\gamma_R(G) = n - 1$ , et par la Proposition 2.83, on en déduit que  $\Delta \leq 2$ . Par conséquent,  $G$  est une chaîne ou un cycle d'ordre 3, 4 ou 5.  $\square$

Ensuite, nous caractérisons les graphes cubiques  $G$  avec  $\gamma_{\Delta R}(G) = \gamma_R(G) + 2$ .

**Théorème 4.8.** [20] *Soit  $G$  un graphe cubique connexe d'ordre  $n$ . Alors*

$$\gamma_{3R}(G) = \gamma_R(G) + 2$$

*si et seulement si  $G = K_4, K_{3,3}$  ou  $G$  est le complémentaire de  $C_6$ .*

Preuve. Il est facile de voir que  $\gamma_{3R}(G) = \gamma_R(G) + 2$  pour  $G = K_4, K_{3,3}$  ou  $\overline{C_6}$ .

Supposons que  $G$  est un graphe cubique connexe avec  $\gamma_{3R}(G) = \gamma_R(G) + 2$ . En appliquant le Corollaire 2.93 et le Théorème 2.84, nous observons que  $n - 2 = \gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5}$  ce qui implique que  $n \leq 10$ . Comme  $2m(G) = 3n$  pour les graphes cubiques,  $n$  doit être pair, et d'après le Théorème 2.84,  $n \neq 10$  (i.e.  $n \in \{4, 6, 8\}$ ), et comme les cinq graphes cubiques d'ordre 8 satisfont  $\gamma_R(G) < 6 = n - 2$ , il ne reste que  $n = 4$  ou 6. Maintenant, il est facile de voir que  $G = K_4, K_{3,3}$  ou  $\overline{C_6}$  (voir Figure 4.1).  $\square$

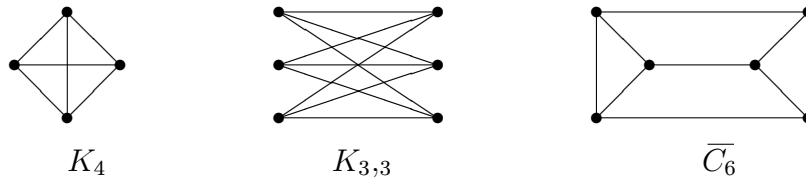


FIGURE 4.1.

Nous caractérisons les arbres et les unicycles tels que  $\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + 1$ .

**Théorème 4.9.** [20] *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  avec au plus un cycle. Alors*

$$\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + 1$$

*si et seulement si  $G \in \{P_3, C_3, P_4, C_4, P_5, C_5\}$ .*

Preuve. Il est clair que, si  $G = P_3, C_3, P_4, C_4, P_5$  ou  $C_5$ , alors  $\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + 1$ .

Inversement, soit  $G$  un graphe connexe avec au plus un cycle tel que  $\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + 1$ . Il est clair que  $n \geq 3$ . En appliquant le Corollaire 2.96, nous observons que  $\gamma_R(G) = n - 1$ . Alors il résulte de la Proposition 2.83 que  $\Delta \leq 2$ . Par conséquent  $\Delta = 2$  et donc par le Corollaire 4.7,  $G \in \{P_3, C_3, P_4, C_4, P_5, C_5\}$ .  $\square$

Notre objectif dans ce qui suit est de caractériser tous les arbres  $T$  tel que  $\gamma_{2R}(T) = \gamma_R(T) + 2$ . Nous donnons d'autres définitions et d'autres résultats. Il est bien connu par Ore [76] que tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  sans sommets isolés satisfait  $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$ . Les graphes extrémaux atteignant l'égalité dans la borne d'Ore ont été donnés par Payan et Xuong [77] et indépendamment par Fink et al. [50]. Ils ont montré qu'un graphe  $G$  d'ordre pair sans sommets isolés vérifie  $\gamma(G) = \frac{n}{2}$  si et seulement si chaque composante connexe de  $G$  est soit le cycle  $C_4$  soit la couronne d'un graphe connexe  $H$ , indépendamment Rautenbach et Volkmann [79] et Xu et al. [90] ont caractérisé les graphes  $G$  d'ordre impair pour lesquels  $\gamma(G) = \frac{n-1}{2}$ . Nous prenons leurs résultats que pour la classe d'arbres.

**Théorème 4.10.** [77, 50, 79, 90] *Un arbre  $T$  non trivial vérifie  $\gamma(T) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  si et seulement si  $T$  est une couronne d'un arbre  $T'$  ou  $T$  est obtenue à partir d'une couronne d'une forêt  $H$  et un nouveau sommet attaché à des sommets de  $H$ .*

Dans [59], Hansberg et Volkmann ont caractérisé les arbres  $T$  avec  $\gamma(T) = \frac{n-2}{2}$ . Cependant, nous prenons que les résultats dont nous avons besoin pour notre caractérisation.

**Théorème 4.11.** [59] Soit  $T$  un arbre d'ordre pair  $n \geq 4$ . Si  $\gamma(T) = \frac{n-2}{2}$ , alors  $T$  contient deux sommets  $u$  et  $v$  tel que  $T' = T - \{u, v\}$  est la couronne d'une forêt.

Soit  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ , où  $T_1$  est l'arbre obtenu à partir de deux chaînes  $P_5$  en ajoutant une arête entre leurs centres,  $T_2$  est l'arbre obtenu à partir de  $P_5$  et  $P_3$  en ajoutant une arête entre leurs centres,  $T_3$  est l'arbre obtenue à partir de  $P_5$  et  $P_3$  par l'ajout d'une arête entre le centre de  $P_5$  et un sommet pendent de  $P_3$ ,  $T_4$  est l'étoile subdivisé d'ordre 7 et  $T_5$  est l'arbre obtenu à partir de  $T_1$  par suppression d'un sommet pendent (voir Figure 4.2).

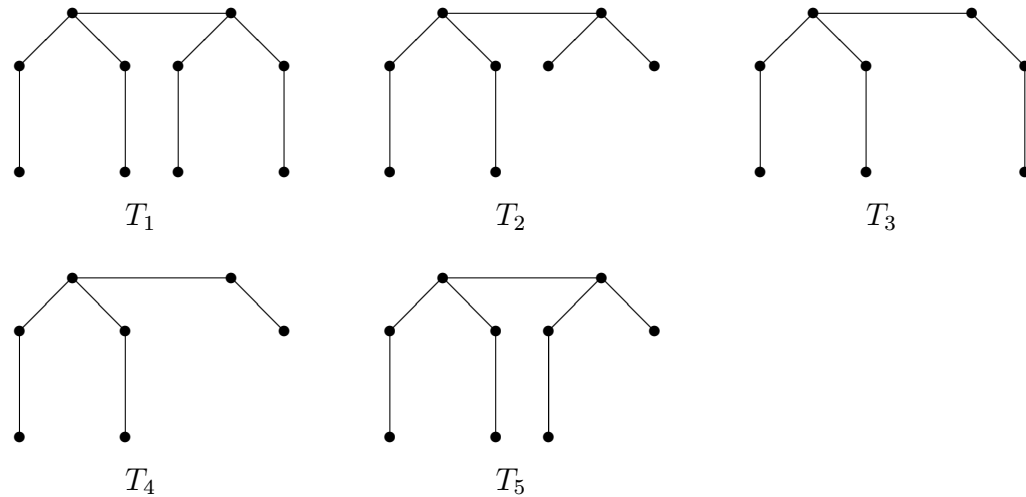


FIGURE 4.2. La famille  $\mathcal{T}$

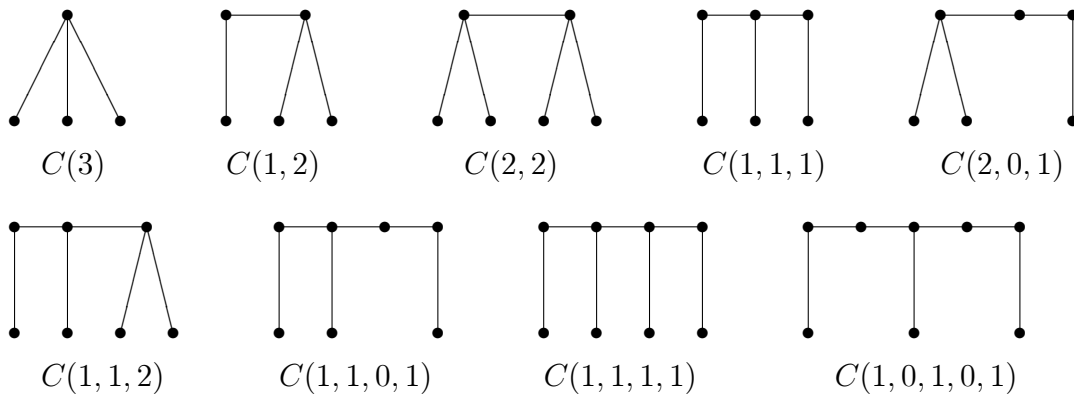


FIGURE 4.3. La famille  $\mathcal{C}$

On définit aussi la famille  $\mathcal{C}$  de chenilles  $C(3)$ ,  $C(1, 2)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $C(1, 1, 1)$ ,  $C(2, 0, 1)$ ,  $C(1, 1, 2)$ ,  $C(1, 1, 0, 1)$ ,  $C(1, 1, 1, 1)$  et  $C(1, 0, 1, 0, 1)$  (voir Figure 4.3).

Nous sommes maintenant prêts à donner la caractérisation des arbres tels que  $\gamma_{2R}(T) = \gamma_R(T) + 2$ .

**Théorème 4.12.** [20] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$ . Alors*

$$\gamma_{2R}(T) = \gamma_R(T) + 2$$

*si et seulement si  $T \in \{P_6, P_7, P_8\} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{C}$ .*

*Preuve.* Si  $T \in \{P_6, P_7, P_8\} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{C}$ , alors il est facile de vérifier l'égalité  $\gamma_{2R}(T) = \gamma_R(T) + 2$ .

Inversement, soit  $T$  un arbre tel que  $\gamma_{2R}(T) = \gamma_R(T) + 2$ . Il est clair que  $n \geq 4$ . En appliquant le Corollaire 2.96 et le Théorème 2.84, nous observons que  $n - 2 = \gamma_R(T) \leq \frac{4n}{5}$  ce qui implique que,  $n \leq 10$ . Si  $n = 10$ , alors  $\gamma_R(T) = 8 = \frac{4n}{5}$ , et par le Théorème 2.84,  $T = T_1$ . Si  $n = 4$ , il est clair que  $T = K_{1,3}$  (le cas  $T = P_4$  est exclu car  $\gamma_{2R}(P_4) \neq \gamma_R(P_4) + 2$ ). Ainsi, pour la suite, on suppose que  $5 \leq n \leq 9$ . En outre, par la Proposition 2.83, nous avons  $\Delta \leq n - \gamma_R(T) + 1 = 3$ . Maintenant, nous considérons deux cas selon  $\Delta$ :

**Cas 1.**  $\Delta = 2$ . Alors  $T$  est une chaîne  $P_n$ . Il est clair que si  $n \notin \{6, 7, 8\}$ , alors l'égalité de la Proposition 2.82 donne  $\gamma_R(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil \neq n - 2$ , d'où  $\gamma_{2R}(P_n) = \gamma_R(P_n) + 2$  n'est pas possible dans ce cas.

**Cas 2.**  $\Delta = 3$ . Alors par la borne d'Ore ( $\gamma(T) \leq \frac{n}{2}$ ) et la Proposition 2.85 du Chapitre 2, nous obtenons  $\frac{n}{2} \geq \gamma(T) \geq \frac{\gamma_R(T)}{2} = \frac{n-2}{2}$ . Si  $\gamma(T) = \frac{n}{2}$ , alors  $n \in \{6, 8\}$  et donc par le Théorème 4.10,  $T = H \circ K_1$  tel que  $H$  est un arbre d'ordre, respectivement, 3 ou 4. Comme  $\Delta = 3$ ,  $H$  est différent de  $K_{1,3}$ . Par conséquent  $T = C(1, 1, 1)$  ou  $C(1, 1, 1, 1)$ . Pour ce qui suit, on suppose que  $\gamma(T) = \frac{n-2}{2}$  ou  $\frac{n-1}{2}$ .

**Sous-Cas 2.1.**  $\gamma(T) = \frac{n-2}{2}$ . Donc  $n \in \{6, 8\}$  et par le Théorème 4.11,  $T$  contient deux sommets  $u$  et  $v$  tels que  $T' = T - \{u, v\}$  est la couronne d'une forêt. On doit examiner les possibilités, selon que l'arête  $uv$  existe ou non.

Si  $n = 6$ , alors  $T' = 2P_2$  ou  $P_4$ . Supposons que  $T' = 2P_2$ . Il est clair que  $T$  est un arbre et  $\Delta = 3$ , l'un des sommets  $u$  et  $v$ , soit  $u$ , est adjacent à une extrémité de chaque chaîne

$P_2$ . En outre, comme  $T$  est un arbre,  $v$  a au plus un voisin dans  $T'$ . Si  $uv \notin E(T)$ , alors  $v$ ,  $u$  ont un voisin commun (car  $\Delta = 3$ ), donc  $T = C(2, 0, 1)$ . Si  $uv \in E(T)$ , alors  $v$  n'a pas de voisin dans  $T'$ , et donc  $T = C(1, 1, 1)$ . Supposons maintenant que  $T' = P_4 = a', a, b, b'$ . Comme  $\Delta = 3$ , on suppose, sans perte de généralité, que  $ua \in E(T)$ . Si  $uv \in E(T)$ , alors  $v$  n'a pas de voisin dans  $T'$ , et donc  $T = C(1, 1, 1)$ . Si  $uv \notin E(T)$ , alors  $v$  est adjacent à  $b$ ,  $b'$  ou  $a'$ , ceci implique que  $T = C(2, 2)$ ,  $T = C(2, 0, 1)$  ou  $T = C(1, 1, 1)$ , respectivement.

Si  $n = 8$ , alors  $T' = 3P_2$ ,  $P_2 \cup P_4$  ou  $P_3 \circ K_1$ . Supposons que  $T' = 3P_2$ , et soit  $V(T') = \{a_1, b_2, a_2, b_2, a_3, b_3\}$ , où pour  $i = 1, 2, 3$ , les sommets  $a_i, b_i$  induisent la  $i^{\text{ème}}$  chaîne  $P_2$  dans  $T'$ . Il est clair que l'un des  $u$  et  $v$ , soit  $u$ , est adjacent à deux ou trois sommets de  $T'$ . Supposons que  $u$  a exactement deux voisins dans  $V(T')$ . Pour des raisons de symétrie,  $ua_1, ua_2$  et  $ua_3 \in E(T)$ . Il est clair que si  $uv \in E(T)$ , alors  $v$  est adjacent à  $a_3$  ou  $b_3$ , et donc  $T = T_3$ . Si  $uv \notin E(T)$ , alors comme  $\Delta = 3$ ,  $v$  est adjacent à  $a_1$  ou  $a_2$ , soit  $a_2$ . En outre,  $v$  est adjacent à  $a_3$  ou  $b_3$ , et donc  $T = C(1, 0, 1, 0, 1)$ . Supposons maintenant que  $u$  a exactement trois voisins dans  $V(T')$ . Pour des raisons de symétrie,  $ua_1, ua_2$  and  $ua_3 \in E(T)$ . Comme  $\Delta = 3$ ,  $uv \notin E(T)$ . Par isomorphisme,  $v$  est adjacent à  $a_3$  ou  $b_3$ , ce qui implique que  $T = T_2$  ou  $T_3$ , respectivement. Supposons maintenant que  $T' = P_2 \cup P_4$ . Soit  $V(T') = \{x, y, a, b, c, d\}$ , où  $P_2 = x, y$  et  $P_4 = a, b, c, d$  sont les deux composantes connexes de  $T'$ . Supposons que  $uv \in E(T)$ . Ensuite, soit l'un des  $u$  et  $v$  est adjacent aux deux composantes connexes ou chacun est adjacent à exactement une composante connexe. Par isomorphisme, pour la première situation, si  $ux, ub \in E(T)$ , alors  $T = P_4 \circ K_1 = C(1, 1, 1, 1)$  (exclu car  $\gamma(T) = \frac{n}{2}$ ), et si  $ux, ua \in E(T)$ , alors  $T = C(1, 1, 0, 0, 1)$  (exclu car  $\gamma_R(T) = 5 < n - 2$ ). Pour la deuxième situation, les deux arbres sont exclus car si  $ux, vb \in E(T)$ , alors  $T = C(1, 1, 0, 0, 1)$  ( $\gamma_R(T) = 5$ ) et si  $ux, va \in E(T)$ , alors  $T = P_8$  ( $\Delta \neq 3$ ). Ensuite, nous supposons que  $uv \notin E(T)$ . Il est clair que l'un des sommets  $u$  et  $v$ , soit  $u$ , est adjacent aux deux composantes connexes de  $T'$ . Pour des raisons de symétrie,  $ux \in E(T)$  et  $ua \in E(T)$  ou  $ub \in E(T)$ . Supposons que  $ua \in E(T)$ . Comme  $\Delta = 3$ ,  $v$  doit être adjacent à  $a, x, b$  ou  $c$ . Ce qui implique que  $T = C(1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $T = (2, 0, 0, 0, 1)$ ,  $T = C(1, 1, 0, 0, 1)$  ou  $T = (2, 0, 0, 0, 1)$ , respectivement. Mais les trois derniers sont exclus car  $\gamma_R(T) = 5 < n - 2$ . Supposons maintenant que  $ub \in E(T)$ . Etant donné que  $\Delta = 3$ ,  $v$  est adjacent à un



sommet de  $\{y, x, a, c, d\}$ . On peut facilement voir que si  $av \in E(T)$ , alors  $T = T_3$ , et si  $vd \in E(T)$ , alors  $T = C(1, 0, 1, 0, 1)$ . Les possibilités restantes sont exclus car  $\gamma_R(T) = 5 < n - 2$ . Enfin, supposons que  $T' = P_3 \circ K_1$ . Soient  $a, b, c$  les support de  $T'$  et  $a', b', c'$  leurs sommets pendants, respectivement, où  $b$  est le centre de  $T'$ . Comme  $\Delta = 3$ ,  $ub$  et  $vb \notin E(T)$ . Maintenant, si  $uv \in E(T)$ , alors, par isomorphisme,  $u$  est adjacent à  $a', a$  ou  $b'$ . Il s'ensuit que  $T = C(1, 1, 0, 0, 1)$ , ou  $T = C(1, 1, 1, 1)$  ou  $T = T_3$ , respectivement. Le premier est déjà exclu. Supposons maintenant que  $uv \notin E(T)$ . Par symétrie,  $u$  est adjacent à  $a, a'$  ou  $b'$ . Si  $ua \in E(T)$ , alors  $v$  est adjacent à  $a', b', c'$  ou  $c$ . Il s'ensuit que  $T = C(1, 1, 1, 1)$ ,  $T = T_2$ ,  $T = C(2, 1, 0, 1)$  ou  $T = C(2, 1, 2)$ , respectivement. Les deux derniers sont exclus car  $\gamma_R(T) = 5 < n - 2$ . Si  $ua' \in E(T)$ , alors, pour éviter les situations précédentes,  $v$  est adjacent à  $a', b'$  ou  $c'$ . Il s'ensuit que  $T = C(2, 0, 1, 1)$ ,  $T = T_3$  ou  $T = C(1, 0, 1, 0, 1)$ . Si  $ub' \in E(T)$ , alors, pour éviter les cas précédents,  $v$  est adjacent à  $b'$ , ce qui implique que  $T = T_2$ .

**Sous-Cas 2.2.** Enfin, supposons que  $\gamma(T) = \frac{n-1}{2}$ . Donc  $n \in \{5, 7, 9\}$  et par le Théorème 4.10,  $T$  est obtenu à partir d'une couronne d'une forêt  $H$  en ajoutant un nouveau sommet attaché aux sommets de  $H$ . Comme précédemment, si  $n = 5$ , alors  $H \circ K_1 = P_4$  ou  $H \circ K_1 = 2P_2$  et donc, respectivement,  $T = C(1, 2)$  ou  $P_5$  qui est exclu car  $\Delta = 3$ . Si  $n = 7$ , alors  $H \circ K_1 = 3P_2$ ,  $P_2 \cup P_4$  ou  $P_3 \circ K_1$  et donc, respectivement,  $T = T_4$ ,  $C(1, 1, 0, 1)$  ou  $C(1, 1, 2)$ . Si  $n = 9$ , alors  $H \circ K_1 = 4P_2$ ,  $2P_2 \cup P_4$ ,  $P_2 \cup P_3 \circ K_1$ ,  $2P_4$  ou  $P_4 \circ K_1$ , et donc la seule possibilité pour  $T$  est  $T_5$ .  $\square$

#### 4.1.3 Graphes sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ avec $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$

D'après la Proposition 4.3, pour tout entier positif  $k$  et tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  avec  $\gamma_{kR}(G) < n$ ,  $\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_R(G) + 2k - 4$ . Dans cette sous-section, nous nous concentrons sur la classe des graphes sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ . Nous allons montrer que pour tout graphe sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  et tout entier positif  $k \geq 2$ ,  $\gamma_{kR}(G) \leq \gamma_R(G) + \max\{2k - 2, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$ . De plus, nous caractérisons tous les graphes  $G$  sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  tels que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + t$ , avec  $t \in \{2k - 3, 2k - 2, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$ .

Nous rappelons que la structure des graphes sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  est donné dans le Chapitre 2 par le Lemme 2.18.

Les deux observations suivantes sont évidentes.

**Observation 4.13.** *Si  $G$  est une chaîne  $P_n$  ou un cycle  $C_n$ , alors*

$$\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = n.$$

**Observation 4.14.** *Si  $K_n$  est une clique et  $k$  est un entier positif avec  $n \geq 2k$ , alors*

$$\gamma_{kR}(K_n) = \gamma_R(K_n) + 2k - 2.$$

Maintenant, nous donnons la valeur exacte du nombre de  $k$ -domination romaine pour les graphes de degré minimum  $n - 2$ .

**Proposition 4.15.** *[20] Soit  $H_n$  un graphe  $(n - 2)$ -régulier d'ordre  $n$  et soit  $k$  un entier positif avec  $n \geq 2k$ , Alors*

$$\gamma_{kR}(H_n) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \text{ est pair ou } n = 2k, \\ 2k + 1 & \text{si } k \text{ est impair et } n > 2k. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant la Proposition 2.89, considérons deux cas. Si  $n = 2k$ , alors  $\gamma_{kR}(H_n) = n = 2k$ . Supposons que  $n \geq 2k + 1$ . Si  $k$  est pair, alors la fonction  $f = (V - V_2, \emptyset, V_2)$  tel que  $G[V_2] = H_k$ , est une  $Rk$ -DF sur  $H_n$  de poids  $f(V) = 2k$ , et donc  $\gamma_{kR}(H_n) = 2k$ . Supposons maintenant que  $k$  est impair. Si  $k = 1$ , il est clair que  $\gamma_{1R}(H_n) = 3$ . Supposons que  $k \geq 3$ , et soit  $xx' \notin E(H_n)$  et considérons la fonction  $f = (V - (V_2 \cup \{x, x'\}), \{x'\}, V_2 \cup \{x\})$  telle que  $G[V_2] = H_{k-1}$ . Il est clair que  $f$  est une  $Rk$ -DF sur  $H_n$  de poids  $f(V) = 2k + 1$ . Donc  $2k \leq \gamma_{kR}(H_n) \leq 2k + 1$ . Montrons que  $\gamma_{kR}(H_n) \neq 2k$ . Supposons que  $\gamma_{kR}(H_n) = 2k$ , et soit  $f = (V_0, V_1, V_2)$  une  $\gamma_{kR}$ -fonction sur  $H_n$ . Comme  $|V_2| \geq k$  et  $\gamma_{kR}(H_n) = |V_1| + 2|V_2| = 2k$ , alors  $|V_1| = 0$  et  $|V_2| = k$ . Etant donné que chaque sommet de  $V_0$  est adjacent à l'ensemble des sommets de  $V_2$ , le sous-graphe  $G[V_2]$  induit par  $V_2$  est  $(k - 2)$ -régulier. Il en résulte que  $2|E(G[V_2])| = k(k - 2)$ , ce qui n'est pas possible, puisque  $k$  est impair. On en déduit que  $\gamma_{kR}(H_n) = 2k + 1$ .  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 4.15.

**Corollaire 4.16.** *[20] Si  $H_n$  est un graphe  $(n - 2)$ -régulier d'ordre  $n$  et si  $k$  un entier positif avec  $n \geq 2k$ , alors*

$$\gamma_{kR}(H_n) = \begin{cases} \gamma_R(H_n) + 2k - 3 & \text{si } k \text{ est pair ou } n = 2k, \\ \gamma_R(H_n) + 2k - 2 & \text{si } k \text{ est impair et } n > 2k. \end{cases}$$

**Proposition 4.17.** [20] Si  $G = K_p + H_q$  est un graphe d'ordre  $n = p + q$  avec  $p \geq 1$ , et si  $k$  est un entier positif avec  $n \geq 2k$ , alors

$$\gamma_{kR}(G) = 2k.$$

Preuve. Soit  $S_1$  un sous-ensemble de  $V(K_p)$  et  $S_2$  un sous-ensemble de  $V(H_q)$  tel que  $G[S_2]$  est  $(|S_2| - 2)$ -régulier et  $|S_1 \cup S_2| = k$ . Alors  $f = (V - (S_1 \cup S_2), \emptyset, S_1 \cup S_2)$  est une  $Rk$ -DF sur  $G$  avec  $f(V) = 2k$ . L'égalité découle du fait que  $\gamma_{kR}(G) \geq 2k$  (voir la Proposition 2.89).  $\square$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 4.17.

**Corollaire 4.18.** [20] Si  $G = K_p + H_q$  est un graphe d'ordre  $n$  et si  $k$  un entier positif avec  $n \geq 2k$ , alors

$$\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + 2k - 2.$$

D'après le Lemme 2.18 du Chapitre 2, les Observations 4.13 et 4.14, et les Corollaires 4.16 et 4.18, nous avons  $\gamma_{kR}(G) - \gamma_R(G) \in \{2k - 3, 2k - 2, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$  pour tout graphe sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  et tout entier  $k$  avec  $n \geq 2k$ .

Le résultat suivant donne la caractérisation de tous les graphes  $G$  sans- $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  tel que  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + t$ , avec  $t \in \{2k - 3, 2k - 2, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$ .

**Théorème 4.19.** [20] Soient  $G$  un graphe connexe sans  $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$  d'ordre  $n$  et  $k$  un entier positif avec  $2 \leq k \leq \min\{\Delta, \frac{n}{2}\}$ . Alors

- (i)  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + 2k - 3$  si et seulement si  $G \in \{P_3, C_3, P_4, C_4, P_5, C_5\}$  et  $k = 2$  ou  $G = H_n$  et  $k$  est pair ou  $n = 2k$ .
- (ii)  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + 2k - 2$  si et seulement si  $G \in \{P_6, C_6, P_7, C_7, P_8, C_8\}$  et  $k = 2$ ,  $G = K_n$ ,  $G = H_n$  et  $k$  est impair avec  $n \geq 2k + 1$ , ou  $G = K_p + H_q$  avec  $p \geq 1$ ,  $q$  est un entier pair et  $n \geq 2k$ .
- (iii)  $\gamma_{2R}(G) = \gamma_R(G) + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  si et seulement si  $G = P_n$  ou  $C_n$  pour  $n \geq 9$ .

## 4.2 Etude des graphes $k$ -romains

Dans cette section, nous étudions les graphes  $k$ -romains pour  $k \geq 2$ ; nous améliorons quelques bornes existantes et nous donnons quelques caractérisations des graphes extrémaux.

Nous commençons par une condition nécessaire pour qu'un graphe soit  $k$ -romain.

**Théorème 4.20.** [21] *Si  $G$  est un graphe  $k$ -romain avec  $k \geq 2$ , alors chaque sommet de  $G$  est adjacent à au plus  $k - 1$  sommets pendants de  $G$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe  $k$ -romain avec  $k \geq 2$ . Supposons que  $v$  est un sommet de  $G$  adjacent à au moins  $k$  sommets pendants. Soit  $L_v$  l'ensemble des sommets pendants adjacents à  $v$ . Il est évident que pour tout  $\gamma_{kR}$ -fonction sur  $G$ , à chaque sommet pendant est attribué une valeur positive. Aussi, par la Proposition 2.86 du Chapitre 2,  $G$  a une  $\gamma_{kR}$ -fonction  $f = (V_0, V_1, V_2)$  avec  $V_1 = \emptyset$ . Ainsi  $f(w) = 2$  pour tout sommet pendant  $w$  de  $L_v$ . Maintenant, si  $f(v) \neq 0$ , alors on peut diminuer le poids de  $f$  en attribuant la valeur 1 au lieu de 2 pour chaque sommet pendant de  $L_v$ , ce qui contredit le fait que  $f$  est un  $\gamma_{kR}$ -fonction sur  $G$ . Donc,  $f(v) = 0$ . Comme  $k \geq 2$ , on peut changer  $f(w) = 2$  par  $f(w) = 1$  pour tout sommet  $w \in L_v$  et  $f(v) = 0$  par  $f(v) = 1$ . Il est clair qu'on obtient une fonction de  $k$ -domination romaine avec un poids inférieur à  $f(V)$ , aussi une contradiction. Par conséquent,  $|L_v| \leq k - 1$ .  $\square$

Nous donnons maintenant une caractérisation des graphes  $k$ -romains lorsque  $k = \Delta$ .

**Théorème 4.21.** [21] *Un graphe  $G$  est  $\Delta$ -romain si et seulement si  $G$  est un graphe biparti régulier.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe avec  $\gamma_{\Delta R}(G) = 2\gamma_{\Delta}(G)$ . Alors, par le Corollaire 2.93,  $\gamma_{\Delta R}(G) = n = 2\gamma_{\Delta}(G)$ , et donc d'après le Corollaire 2.47 du Chapitre 2,  $G$  est un graphe biparti régulier.

Inversement, supposons que  $G$  est un graphe biparti  $\Delta$ -régulier. Par le Corollaire 2.93 et le Corollaire 2.47,  $\gamma_{\Delta R}(G) = n$  et  $\gamma_{\Delta}(G) = \frac{n}{2}$ , respectivement. Par conséquent  $\gamma_{\Delta R}(G) = 2\gamma_{\Delta}(G)$ .  $\square$

Ensuite, nous améliorons la borne supérieure dans la Proposition 2.85 du Chapitre 2 pour la classe d'arbres. De plus, nous caractérisons tous les arbres atteignant cette borne.

**Théorème 4.22.** [21] *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 3$  avec  $\Delta \geq k \geq 2$ . Alors*

$$\gamma_{kR}(T) \leq 2\gamma_k(T) - k + 1,$$

*avec égalité si et seulement si,*

- (i)  $k = 2$  et  $T$  est un arbre subdivisé d'un autre arbre, ou
- (ii)  $k = n - 1$  et  $T$  est une étoile.

*Preuve.* Nous montrons d'abord la borne supérieure. Comme  $m = n - 1$  pour les arbres, il résulte du Théorème 2.42-1 que pour tout arbre  $T$  et tout entier positif  $k$ ,  $\gamma_k(T) \geq \frac{(k-1)n+1}{k}$ . En outre, il est facile de vérifier que  $\frac{(k-1)n+1}{k} \geq \frac{n+k-1}{2}$  pour  $2 \leq k \leq \Delta \leq n - 1$ . Maintenant, en utilisant le fait que  $\gamma_{kR}(T) = n$  (par le Corollaire 2.96), nous obtenons  $\gamma_k(G) \geq \frac{(k-1)n+1}{k} \geq \frac{n+k-1}{2} = \frac{\gamma_{kR}(T)+k-1}{2}$ , et la borne est prouvée.

Supposons maintenant que  $\gamma_{kR}(T) = 2\gamma_k(T) - k + 1$ . Alors, nous avons l'égalité dans toute la chaîne de l'inégalité précédente. En particulier,  $\frac{(k-1)n+1}{k} = \frac{n+k-1}{2}$  et  $\gamma_k(G) = \frac{(k-1)n+1}{k}$ . La première égalité implique que  $k = 2$  ou  $k = n - 1$ . Si  $k = 2$ , alors  $\gamma_2(G) = \frac{n+1}{2}$  et par le Théorème 2.43,  $T$  est un arbre subdivisé d'un autre arbre. Si  $k = n - 1$ , alors il est clair que  $T$  est une étoile.

L'inverse est facile à montrer. □

Le Corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 4.22.

**Corollaire 4.23.** [21] *Il n'y a pas d'arbres  $k$ -romain pour  $k \geq 2$ .*

Maintenant, nous montrons qu'il n'y a pas de cactus  $k$ -romain pour  $k \geq 3$ . Nous avons besoin du Lemme suivant.

**Lemme 4.24.** [87] *Si  $G$  est un cactus de  $n$  sommets et  $m$  arêtes, alors*

$$2m \leq 3n - 3.$$

**Proposition 4.25.** [21] *Il n'y pas de cactus  $k$ -romain pour  $k \geq 3$ .*

Preuve. Supposons que  $G$  est un cactus  $k$ -romain pour  $k \geq 3$ . Par le Corollaire 2.97 et le Théorème 2.42-1, nous avons  $n = \gamma_{kR}(T) = 2\gamma_k(G) \geq 2\left(n - \frac{m}{k}\right)$ , qui donne  $kn \leq 2m$ , et donc par le Lemme 4.24,  $kn \leq 2m \leq 3n - 3$ , ce qui est impossible, car  $k \geq 3$ .  $\square$

Dans ce qui suit, nous améliorons la borne supérieure dans la Proposition 2.85 pour les unicycles. On note par  $K_{1,p} + e$  le graphe obtenu à partir de l'étoile  $K_{1,p}$  en ajoutant une arête entre deux sommets pendants de  $K_{1,p}$ . Soit  $P_5$  la chaîne de cinq sommets  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Soit  $F$  le graphe obtenu à partir de  $P_5$  en ajoutant un nouveau sommet  $y$  et les arêtes  $yx_2$  et  $yx_4$ . Soit  $G_1, G_2$  et  $G_3$  trois graphes obtenus à partir de  $P_5$  en ajoutant, respectivement, les arêtes  $x_2x_4, x_3x_5$  et  $x_2x_5$  (voir Figure 4.4).

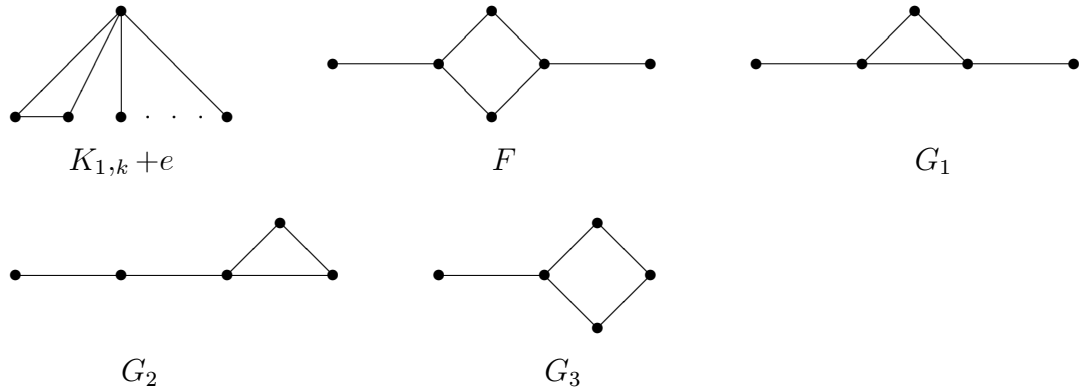


FIGURE 4.4.

**Théorème 4.26.** [21] *Soit  $G$  un unicycle avec  $\Delta \geq k \geq 3$ . Alors*

$$\gamma_{kR}(G) \leq 2\gamma_k(G) - k + 1,$$

*avec égalité si et seulement si  $k = \{3, 4, n - 1\}$  et  $G = K_{1,k} + e$ , ou  $k = 3$  et  $G = F$ .*

Preuve. Notons d'abord que  $n \geq 4$  car  $\Delta \geq 3$ . Si  $n = 4$ , alors  $k = \Delta = 3$  et  $G = K_{1,3} + e$ , et donc  $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G) - k + 1$ . Si  $n = 5$ , alors  $k \in \{3, 4\}$ . Si  $k = 3$ , alors il est clair que  $G \in \{G_1, G_2, G_3, K_{1,4} + e\}$  et  $\gamma_{kR}(G) < 2\gamma_k(G) - k + 1$ . Si  $k = 4$ , alors  $G = K_{1,4} + e$ , et donc  $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G) - k + 1$ . Ensuite, si  $n = k + 1$ , alors  $k = \Delta$  et  $G = K_{1,n-1} + e$ , et donc  $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G) - k + 1$ .

Supposons maintenant que  $n \geq \max\{6, k + 2\}$ . On peut voir facilement que

$$\frac{(k-1)n}{k} \geq \frac{n+k-1}{2} \quad (4.2)$$

et la borne supérieure résulte du Corollaire 2.96 et le Théorème 2.42-1.

Supposons maintenant que  $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G) - k + 1$ . Il est clair que, si  $n \in \{4, 5, k+1\}$ , alors  $G = K_{1, n-1} + e$ . Donc, supposons que  $n \geq \max\{6, k + 2\}$ . Alors, nous avons l'égalité dans (4.2), en particulier  $\gamma_k(G) = \frac{n+k-1}{2} = \frac{(k-1)n}{k}$ . Il s'ensuit que  $n = 6$ ,  $k = 3$ ,  $\gamma_3(G) = 4$ , et donc  $G = F$ .  $\square$

Enfin, nous donnons une caractérisation des unicycles 2-romains.

**Théorème 4.27.** [21] *Un unicycle  $G$  est un graphe 2-romain si et seulement si  $G$  est le graphe subdivisé d'un autre unicycle (éventuellement avec un cycle de deux sommets).*

Preuve. Si  $\gamma_{2R}(G) = 2\gamma_2(G)$ , alors d'après le Corollaire 2.96,  $n = 2\gamma_2(G)$ , et donc  $\gamma_2(G) = \frac{n}{2}$ . Par le Théorème 2.43,  $G$  est le graphe subdivisé d'un autre unicycle. Supposons maintenant que  $G$  est le graphe subdivisé d'un unicycle. D'après le Théorème 2.43 et le Corollaire 2.96, nous avons respectivement,  $\gamma_2(G) = \frac{n}{2}$  et  $\gamma_{2R}(G) = n$ . Par conséquent,  $\gamma_{2R}(G) = 2\gamma_2(G)$ .  $\square$

### 4.3 Résultats sur la NP-complétude

Schnupp 2006 [83] a montré que le problème de la DOMINATION ROMAINE est NP-complet dans les graphes bipartis et les graphes scindés. Dans cette section, nous montrons que le problème de la  $k$ -DOMINATION ROMAINE reste NP-complet pour tout entier  $k \geq 2$ , en le réduisant au problème de TRANSVERSAL qui est connu NP-complet [53] :

**Problème:** TRANSVERSAL.

**Instance :** Un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $p \leq |V|$ .

**Question :** Y a-t-il un sous-ensemble  $C \subseteq V$  de cardinalité au plus  $p$  tel que pour toute arête  $xy \in E$ , soit  $x \in C$  ou  $y \in C$ ?

Considérons d'abord les graphes bipartis.

**Théorème 4.28.** [13] *Le problème de  $k$ -DOMINATION ROMAINE est NP-complet pour les graphes bipartis.*

Preuve. Il est évident que le problème de la  $k$ -domination romaine est dans la classe NP, vu que une fonction de  $k$ -domination romaine peut être vérifiée en temps polynomial. Nous transformons le problème de transversal au problème de la  $k$ -domination romaine dans les graphes bipartis. Soit  $G = (V, E)$  un graphe sans sommets isolés et  $s = 2|V| + 4k - 1$ , construisons le graphe  $G' = (V', E')$  avec l'ensemble de sommets  $V' = V \cup X \cup Y \cup T \cup Z$  et ensemble d'arêtes  $E' = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ , où  $X = \{x_i : 1 \leq i \leq s\}$ ,  $Y = \{y_i : 1 \leq i \leq k\}$ ,  $T = \{e_j : e \in E, 1 \leq j \leq s\}$ ,  $Z = \{z_i : 1 \leq i \leq k - 1\}$ , et  $E_1 = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ ,  $E_2 = \{vy : v \in V, y \in Y\}$ ,  $E_3 = \{ve_j : v \in V, e \in E, 1 \leq j \leq s\}$ ,  $E_4 = \{tz : t \in T, z \in Z\}$ . Notons que  $G'$  est un graphe biparti dont l'ensemble de sommets  $V'$  est l'union disjointe de deux ensembles indépendants  $X \cup V \cup Z$  et  $Y \cup T$ , par exemple  $G = P_4$  (voir Figure 4.5). Il est évident que le graphe  $G'$  peut être construit à partir d'un graphe  $G$  en temps polynomial. Nous allons montrer que,  $G$  a un transversal de cardinalité au plus  $p$  si et seulement si  $G'$  a une fonction de  $k$ -domination romaine de poids au plus  $2p + 4k - 2$ .

Tout d'abord, si  $C$  est un transversal de cardinalité au plus  $p$  de  $G$ , alors la fonction  $f : f(v) = 2$  pour  $v \in Y \cup C \cup Z$  et  $f(v) = 0$  pour  $v \in X \cup (V - C) \cup T$ , est une fonction de  $k$ -domination romaine de poids au plus  $2p + 4k - 2$ .

D'autre part, supposons que  $G'$  a une fonction de  $k$ -domination romaine  $g$  de poids au plus  $2p + 4k - 2$ . Supposons que  $g(y) \neq 2$  pour un sommet  $y \in Y$ . Alors  $g(x) \neq 0$  pour tout  $x \in X$ , et donc  $g(V') \geq \sum_{t \in T} g(x) \geq s > 2p + 4k - 2$ , ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent,  $g(y) = 2$  pour tout  $y \in Y$ . Supposons que  $g(u) \neq 2$  et  $g(v) \neq 2$  pour une arête  $uv \in E$ . Alors  $g(t) \neq 0$  pour tout  $t \in N(\{u, v\}) \cap T$ , et donc  $g(V') \geq \sum_{t \in N(\{u, v\}) \cap T} g(t) \geq s > 2p + 4k - 2$ , ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent,  $g(u) = 2$  ou  $g(v) = 2$  pour toute arête  $uv \in E$ . Supposons maintenant que  $g(z) \neq 2$  pour au moins 2 sommets de  $Z$ . Alors  $g(t) \neq 0$  pour tout  $t \in T$ , et donc  $g(V') \geq \sum_{t \in T} g(t) \geq s|E| > (2p + 4k - 2)|E|$ , aussi une contradiction avec l'hypothèse. Ainsi, il existe au plus un sommet  $z' \in Z$  avec  $g(z') \neq 2$ .

Si  $g(z) = 2$  pour tout  $z \in Z$ , alors  $C = \{v \in V : g(v) = 2\}$  est un transversal de  $G$  et  $2|C| + 2|Y| + 2|Z| = 2|C| + 4k - 2 \leq g(V') \leq 2p + 4k - 2$ , et donc  $|C| \leq p$ .

S'il existe un sommet  $z' \in Z$  avec  $g(z') \neq 2$  et  $g(z) = 2$  pour tout  $z \in Z - \{z'\}$ , alors  $g(v) = 2$  pour tout  $v \in V$ , sinon il existe un sommet  $v' \in V$  avec  $g(v') \neq 2$  et par suite



$g(t) \neq 0$  pour tout  $t \in N(v') \cap T$ , d'où la contradiction suivante  $g(V') \geq \sum_{t \in N(v') \cap T} g(t) \geq s > 2p + 4k - 2$ . Par conséquent, pour tout sommet  $u \in V$ ,  $C = V - \{u\}$  est un transversal de  $G$  et  $2|V| + 2|Y| + 2|Z| = 2|C| + 2 + 4k - 4 \leq g(V') \leq 2p + 4k - 2$ , et donc  $|C| \leq p$ . □

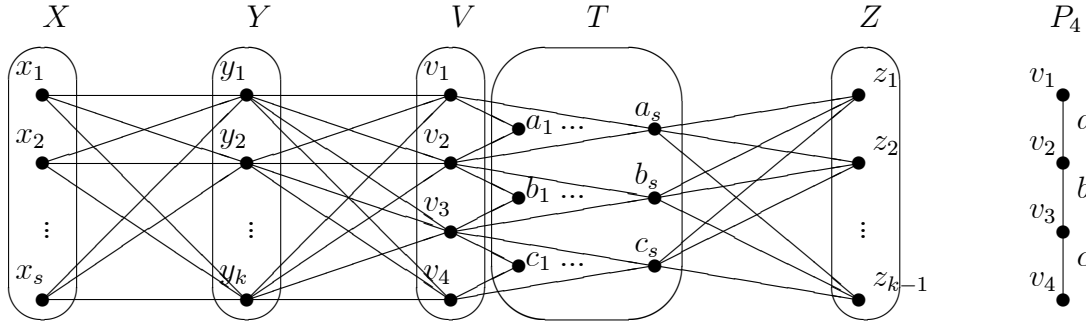


FIGURE 4.5. Un graphe biparti construit à partir de la chaîne  $P_4$ .

Supposons que  $G''$  est obtenu à partir de  $G'$  en ajoutant toutes les arêtes possibles dans  $G[V \cup Y \cup Z]$ , alors  $G'$  est un graphe scindé tel que  $V \cup Y \cup Z$  est une clique et  $X \cup T$  est un indépendant. Les mêmes arguments de la preuve du théorème précédent donnent le résultat suivant.

**Corollaire 4.29.** [13] *Le problème de  $k$ -DOMINATION ROMAINE est NP-complet pour les graphes scindés.*

## Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de la  $k$ -domination, la  $k$ -indépendance et la  $k$ -domination romaine. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur quatre points importants: Etablissement des relations entre deux paramètres de  $k$ -indépendance, des relations entre  $\gamma_{kR}$  et  $\gamma_R$  et caractérisation des graphes atteignant l'égalité dans ces relations dans des classes particulières de graphes, et à la fin nous avons étudié la complexité de la  $k$ -domination romaine.

Dans un premier lieu, nous avons montré que  $\beta_k(G) \leq \lceil k/j \rceil \beta_j(G)$  pour tout graphe  $G$ . Ensuite nous avons montré que  $\beta_2(G) \leq \beta(G) + \gamma(G) + \lambda(G) - 1$ , et nous avons caractérisé les arbres tels que  $\beta_2(G) = \beta(G) + \gamma(G) - 1$ . Nous avons également montré que tout graphe  $G$  satisfait l'inégalité  $\beta_j(G) \leq \beta_\Delta(G) - \delta + j - 1$ , et nous avons caractérisé les graphes pour lesquels  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G)$  pour  $j \in \{1, 2, \delta, \delta - 1, \Delta - 1\}$ .

Dans un second lieu, nous avons étudié la  $k$ -domination romaine dans les graphes. Nous avons établi la relation  $\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_R(G) + 2k - 4$  pour  $k \geq 2$  et  $\gamma_{kR}(G) < n$ , et nous avons amélioré ce résultat pour  $k = 2$  et pour les graphes sans  $C_4$ . Ensuite nous avons donné des caractérisations de graphes  $G$  avec  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ . En dernier lieu, nous avons abordé la notion de graphes  $k$ -romains, c'est à dire les graphes  $G$  tels que  $\gamma_{kR}(G) = 2\gamma_k(G)$  pour  $k \geq 2$ . En effet, après avoir donné une propriété de ces graphes, nous avons donné une caractérisation des graphes  $\Delta$ -romains, et nous avons amélioré la borne  $\gamma_{kR}(G) \leq 2\gamma_k(G)$  dans les arbres pour  $k \geq 2$  et les unicycles pour  $k \geq 3$ , en caractérisant les arbres et les unicycles atteignant ces bornes. Enfin nous avons donné une caractérisation des unicycles 2-romains, A la fin nous avons étudié la complexité de la  $k$ -domination romaine dans les graphes bipartis et les graphes scindés.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Nous proposons des questions qui peuvent faire l'objet de travaux et recherches ultérieures.

1. Caractérisation des graphes sans  $K_{1,3}$  tels que  $\gamma_k(G) < \gamma_{k+1}(G)$  et  $\beta_k(G) < \beta_{k+1}(G)$ .
2. Caractérisation des graphes tels que  $\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}) = n + 2k - 1$  et  $\beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) = (n + 2k - 1)^2 / 4$ .

3. Caractérisation des cactus tels que  $\beta_2(G) = \beta(G) + \gamma(G)$ .
4. Caractérisation des graphes tels que  $\beta_j(G) = \beta_\Delta(G) + j - \delta + 1$ .
5. Caractérisation des graphes sans  $K_{1,3}$  avec  $\gamma_{kR}(G) = \gamma_R(G) + c$ .
6. Caractérisation des cactus 2-romains.
7. Recherche d'algorithmes efficaces qui déterminent la valeur exacte de  $\gamma_{kR}$  dans certaines classes de graphes ayant une structure simple.

## RÉFÉRENCES

- [1] T. J. Bean, M. A. Henning and H. C. Swart, *On the integrity of distance domination in graphs*. Australas. J. Comb. 10 (1994) 29-43.
- [2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. (North Holland, Amsterdam, 1973).
- [3] C. Berge, *Les problèmes de coloration en théorie des graphes*. Publ.Inst. Statist. Univ. Paris 9, (1960) 123-160.
- [4] A. A. Bertossi, *Dominating set for split and bipartite graphs*, Inform. Process. Lett., 19 (1984)37-40.
- [5] M. Blidia, M. Chellali and O. Favaron, *Independence and 2-domination in trees*. Australasian journal of combinatorics volume 33 (2005) 317-27.
- [6] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah, *Maximal  $k$ -independent sets in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 28 (2008) 151-163.
- [7] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah. *On  $k$ -indépendance in graphs with emphasis on trees*, Discrete Math. 307 (2007) 2209-2216.
- [8] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann. *Some bounds on the  $p$ -domination number in trees*. Discrete Mathematics 306 (2006) 2031-2037.
- [9] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann. *Bounds on the 2-domination number of graphs*. Utilitas Maths. 71 (2006) 209-216.
- [10] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann. *On the  $p$ -domination number of cactus graphs*, Discussiones Mathematicae. Graph Theory 25 (2005) 355-361.
- [11] M. Blidia and A. Bouchou, *On sequences  $(\beta_k)$  and  $(\gamma_k)$  in regular graphs*, Studia Informatica Universalis, 9 (2011) 7-18.
- [12] M. Blidia, A. Bouchou and L. Volkmann, *Bounds on the  $k$ -indépendance and  $k$ -chromatic numbers of graphs*, Ars Comb. 113 (2014) 33-46.

- [13] A. Bouchou and M. Blidia, *Papiers en préparation*.
- [14] A. Bouchou and M. Blidia, *On sequences  $(\beta_k)$  and  $(\gamma_k)$  in régular graphs*, ISOR'08 (Alger 2008).
- [15] A. Bouchou and M. Blidia, *Bounds on the  $k$ -indépendance and  $k$ -chromatic numbers of graphs*, COSI'09 (Annaba 2009).
- [16] A. Bouchou and M. Blidia, *On sequences  $(\gamma_k)$  and  $(\beta_k)$  in graphs*, DIMACOS'11 (Maroc 2011).
- [17] A. Bouchou and Blidia, *Note on Roman  $k$ -domination number in graphs*, COSI'12 (Tlemcen 2012).
- [18] A. Bouchou, M. Blidia and M. Chellali, *A note on  $k$ -Roman graphs*, COSI'13 (Alger 2013).
- [19] A. Bouchou and M. Blidia, *On the  $k$ -independence number in graphs*, Australasian Journal of Combinatorics 59(2) (2014) 311-322.
- [20] A. Bouchou, M. Blidia and M. Chellali, *Relations between the Roman  $k$ -domination and Roman domination numbers in graphs*, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 6 N° 3 (2014) 1450045 (11 pages).
- [21] A. Bouchou, M. Blidia and M. Chellali, *A note on  $k$ -Roman graphs*, Opuscula Math. 33, no. 4 (2013), 641-646.
- [22] A. Bouchou and O. Favaron, *On Delta-independence number in graphs*, Soumis.
- [23] K.S. Booth et J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput. 11(1982) 191-199.
- [24] Y. Caro and A. Hansberg. *New approach to the  $k$ -independence number of a graph*, Electronic journal of combinatorics 20 (2013) 1-16.
- [25] Y. Caro and Y. Roditty, *A note on the  $k$ -domination number of a graph*, Internat. J . Math . & Math . Sci. 13 (1990) 205-206.

- [26] Y. Caro and Z. Tuza, *Improved lower bounds on  $k$ -independence*, J. Graph Theory 15 (1991) 99-107.
- [27] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, *Extremal problems for Roman domination*, SIAM J. Discrete Math. 23 (2009) 1575-1586.
- [28] G. J. Chang and G. L. Nemhauser, *the  $k$ -domination and  $k$ -stability problems in sun-free chordal graphs*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 5 (1984) 332-345.
- [29] G. Chartrand and S. Schuster, *On the independence numbers of complementary graphs*, Trans. New York Acad. Sci., Series II, 36 (1974) 247-251.
- [30] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann,  *$k$ -Domination and  $k$ -Independence in Graphs: A Survey*, Graphs and Combinatorics 28 (2012) 1-55.
- [31] G. Chen and M. S. Jacobson, *On a relationship between 2-dominating and 5-dominating sets in graphs*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 39 (2001) 139-145.
- [32] B. Chen and S. Zhou, *Upper bounds for  $f$ -domination number of graphs*, Discrete Math. 185 (1998) 239-243.
- [33] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs*, Discrete Mathematics 278 (2004) 11-22.
- [34] E. J. Cockayne, B. Gamble and B. Shepherd. *An upper bound for the  $k$ -domination number of a graph*. J. Graph Theory 9 (1985) 533-534.
- [35] E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi. *A linear algorithm for the domination number of a tree*. Inform. Process. Lett., 4 (2) (1975) 41-4.
- [36] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977) 247-261.
- [37] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi and D. J. Miller, *Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs*, Canad Math. Bull. 21 (1978) 461-468.

- [38] E. J. Cockayne and C. M. Mynhardt, *Domination and irredundance in cubic graphs*, Discrete Math. 167/168 (1997) 205–214.
- [39] S. Cook, "The complexity of theorem proving procedures" Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 22 (1) (1971) 151-158.
- [40] D. E. Daykin and C. P. Ng, *Algorithms for generalized stability number of tree graphs*, J. Austral. Math. Soc., 6 (1994) 89-100.
- [41] A. K. Dewdney, *Fast turning reductions between problems in NP; chapter 4; reductions between NP-compet problems. Technical report 71*, Dep. Computer Science, Univ. Western Ontario, 1981.
- [42] P. A Dreyer, *Applications and Variations of Domination in Graphs*, Thesis, New Jersey (2000).
- [43] J. Edmonds, *Paths trees and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449-467.
- [44] O. Favaron, *On a conjecture of Fink and Jacobson concerning  $k$ -domination and  $k$ -dependence*, J. Combin. Theory Series B 39 n°1(1985) 101-102.
- [45] O. Favaron,  *$k$ -domination and  $k$ -independence in graphs*, Ars Combin.25 (1988) 159-167.
- [46] O. Favaron. *La  $k$ -domination et la  $k$ -indépendance dans les graphes. Séminaire à l'université de Blida*, Avril 2005.
- [47] O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, *On  $k$ -domination and minimum degree in graphs*, J. Graph Theory 57 (2008) 33-40.
- [48] J. F. Fink and M. S. Jacobson,  *$n$ -domination in graphs*, in : Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. John Wiley and Sons, New York (1985) 283-300.
- [49] J. F. Fink and M. S. Jacobson,  *$n$ -domination,  $n$ -dependence and forbidden subgraphs*, in : Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. John Wiley and Sons, New York (1985) 301-311.

- [50] J.F. Fink, M. S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts, *On graphs having domination number half their order*, Period. Math. Hungar 16 (1985) 287-293.
- [51] G. H. Fricke, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, C.K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin and W. D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards*, A brief survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507-528.
- [52] G. H. Fricke, S. T. Hedetniemi and D. P. Jacobs, *Independence and Irredundance in  $k$ -regular graphs*, Ars Combin., 49 (1998) 271-279.
- [53] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [54] F. Gvaril, *Algorithms for minimum colorings, maximum clique, minimum coverings by cliques, and maximum independent set of a chordal graph*, SIAM J. Compu. 1 (1972) 180-187.
- [55] A. Hansberg, *On the  $k$ -domination number, the domination number and the cycle of length four*, Submitted.
- [56] A. Hansberg, D. Meierling and L. Volkmann, *Independence and  $k$ -domination in graphs*, Int. J. Comput. Math. 88 (5) (2011) 905-915.
- [57] A. Hansberg and A. Pepper, *On  $k$ -domination and  $j$ -dependence in graphs*, Discrete Applied Mathematics 161 (10-11) (2013) 1472-1480.
- [58] A. Hansberg, B. Randerath and L. Volkmann, *Claw-free graphs with equal domination and 2-domination numbers*, submitted.
- [59] A. Hansberg and L. Volkmann, *Upper bounds on the  $k$ -domination number and the  $k$ -Roman domination number*, Discrete Appl. Math. 157 (2009) 1634-1639.
- [60] A. Hansberg, L. Volkmann, *Lower bounds on the  $p$ -domination number in terms of cycles and matching number*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 68 (2009) 245-255.



- [61] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [62] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [63] M.A. Henning, *A characterization of Roman trees*, Discuss. Math. Graph Theory 22 (2) (2002) 325-334.
- [64] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*, Discrete Mathematics 86 (1990) 3-9.
- [65] G. Hopkins and W. Staton, *Vertex partitions and  $k$ -small subsets of graphs*, Ars Combin. 22 (1986) 19-24.
- [66] M. S. Jacobson and K. Peters, *Complexity questions for  $n$ -domination and related parameters*, Congressus Numerantium 68 (1989) 7-22.
- [67] M.,S. Jacobson, K. Peters and D. F. Rall, *On  $n$ -irredundance and  $n$ -domination*, Ars Combin. 29 B (1990) 151-160.
- [68] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*, Petrograde (1862).
- [69] R. E. Ladner, "On the structure of polynomial time reducibility" Journal of the ACM, 22 (1) (1975) 151-171.
- [70] R. Laskar and K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
- [71] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination*. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, N°3, september 1984.
- [72] C. Liu and G. J. Chang, *Roman domination on strongly chordal graphs*, J Comb Optim 26 (2013) 608-61.
- [73] K. Kämmerling and L. Volkmann, *Roman  $k$ -domination in graphs*, J. Korean Math. Soc. 46 (2009) 1309-1318.

- [74] R. B. Maddox, *On  $k$ -dependant subsets and  $k$ -degenerate graphs*, Congressus Numerantium 68 (1989) 11-14.
- [75] A. Meir and J.W. Moon, *Relations between packing and covering number of a tree*, Pacific J. Math. 61 (1975) 225-233.
- [76] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).
- [77] C. Payan and N.H. Xuong, *Domination-balanced graphs*, J. Graph Theory 6 (1982) 23-32.
- [78] N. Prince, *Nordhaus-Gaddum bounds for  $k$ -domination in graphs*, Submitted.
- [79] B. Rautenbach and L. Volkmann, *Characterization of graphs with equal domination and covering number*, Discrete Math. 191 (1998) 159-169.
- [80] B. Rautenbach and L. Volkmann, *New bounds on the  $k$ -domination number and the  $k$ -tuple domination number*. Appl. Math. Lett. 20 (2007) 98-102.
- [81] B. Reed, *Paths, stars, and the number three*, Comb. Prob. Comp 5 (1996) 227-295.
- [82] C. S. ReVelle and K. E. Rosing, *Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy*, Amer Math. Monthly 107 (2000) 585-594.
- [83] M. Schnupp, *Broadcast Domination*, Thesis, Jena (2006).
- [84] I. Steward, *Defend the Roman Empire!*, Sci. Amer. 281 (1999) 136-139.
- [85] C. Stracke and L. Volkmann. *A new domination conception*. J . Graph Theory 17 (1993) 315-323.
- [86] L. Volkmann, *Some remarks on lower bounds on the  $p$ -domination number in trees*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 61 (2007) 159-167.
- [87] L. Volkmann, *Graphen an allen Ecken und Kanten*, RWTH Aachen 2006, XVI, 377 pp.

- [88] L. Volkmann, *A bound on the  $k$ -domination number of a graph*, Czechoslovak Mathematical Journal, 60 (135) (2010) 77-83.
- [89] V. K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*. Bell Laboratories Technical Memorandum 81-11217-9, Murray Hill, NJ,(1981).
- [90] B. Xu, E. J. Cockayne, T.W. Haynes, S. Hedetniemi and Z. Shangchao, *Extremal graphs for inequalities involving domination parameters*, *Discrete Mathematics* 216 (2000) 1-10.