

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Modélisation mathématique pour l'aide à la décision

ETUDE DE LA b -COLORATION ET DE LA b -CONTINUITÉ DANS LES GRAPHEs

Par

Mohamed ZAMIME

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
H. AIT HADDADENE	Professeur, USTHB, Alger	Promoteur
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Examineur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Maître de conférences U. de Blida	Examineur

Blida, 08 mai 2008

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطا برتبة n بحيث V تمثل مجموعة الرؤوس و E مجموعة الأضلاع. نسمي الوسيطين ω و θ زمرة قصوى وتجزئة أدنى للمجموعة V بالزمر على التوالي. إن k -تلوين أجود هو تجزئة $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ للمجموعة V بحيث v_i تمثل مجموعة مستقرة مهما يكن $i = 1, 2, \dots, k$.

التلوين المسيطر هو تلوين أجود بحيث كل قسم لوني i يحتوي على عنصر مجاور إلى عنصر آخر على الأقل من كل قسم لوني $j \neq i$. العدد اللوني المسيطر، المسمى $b(G)$ ، هو أكبر عدد من الأقسام اللونية في تلوين مسيطر. نقول عن بيان أنه b -مستمر إذا كان يقبل b -تلوين بـ k لون، من أجل كل k ، $\chi(G) \leq k \leq b(G)$. في k -تلوين معين نقول عن رأس ملون بلون i أنه رأس غراندني إذا كان مجاور لـ $(i-1)$ رأس على الأقل، ملونة بكل لون j ، $i-1 \geq j \geq 1$. نقول عن k -تلوين أجود أنه k -تلوين غراندني جزئي إذا كان كل قسم لوني يحتوي على رأس غراندني على الأقل. العدد الغراندني الجزئي لبيان G ، المسمى $\partial\Gamma(G)$ ، هو أكبر عدد من الألوان اللازمة في تلوين غراندني الجزئي.

في هذا البحث نقدم أولا قيمتين حديتين جديدتين للعدد b -لوني الأولى من أجل بيان عام بدلالة n ، ω و θ و الأخرى من أجل البيانات التي لا تحتوي على النجوم العامة $K_{t,3}$ ، $t \geq 3$ بدلالة Δ و t بحيث Δ الدرجة القصوى للبيان G ، ثم نقوم بحساب قيمة العدد $b(G)$ للجداء الكلى لبعض البيانات الخاصة و نبرهن بعد ذلك أن هذه البيانات b -مستمرة. بعد ذلك نبين أن البيانات التي لا تحتوي على سلسلة P_4 بأنها b -مستمرة، و نقدم برهانا جديدا للـ b -استمرار للأشجار، كما نبرهن أن العدد $b(G)$ أقل من $\partial\Gamma(G)$ في الحالة العامة. و في الأخير نقدم نظرية أخرى تميز البيانات التي تحقق $\partial\Gamma(H)=b(H)$ من أجل كل بيان جزئي H مولد من G .

RESUME

Soit $G=(V,E)$ un graphe simple d'ordre n où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On désigne par $\omega(G)$ et $\theta(G)$ respectivement la taille d'une clique maximum de G et la taille d'une partition minimum de l'ensemble des sommets de G en cliques.

Une k -coloration propre d'un graphe G est une partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ en k stables, appelés classes de couleurs. Le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble V est le nombre chromatique noté $\chi(G)$. Une coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre b -chromatique, noté $b(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Un graphe G est dit b -continu s'il admet une b -coloration avec k couleurs pour tout k , $\chi(G) \leq k \leq b(G)$. Dans une k -coloration un sommet $v \in V_i$ est appelé sommet de *Grundy* si v est adjacent à au moins un sommet dans chaque classe de couleur V_j , pour tout $j < i$. Une k -coloration partielle de *Grundy* d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs telle que toute classe de couleur V_i , $1 \leq i \leq k$, contient au moins un sommet de *Grundy*. Le nombre partiel de *Grundy* d'un graphe G , noté $\partial\Gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration partielle de *Grundy* de G .

Dans ce mémoire, on présente deux nouvelles bornes pour le nombre b -chromatique, l'une dans un graphe quelconque en fonction de n , ω et θ , et l'autre dans la classe des graphes sans $K_{1,t}$, $t \geq 3$ en fonction de Δ et t où Δ est le degré maximum de G . On donne une borne inférieure du nombre b -chromatique du produit total de deux graphes, et on détermine la valeur exacte du nombre b -chromatique du produit total de deux graphes particuliers, et on montre que ces graphes sont b -continus. On montre aussi que les graphes sans P_4 sont b -continus, et on présente une autre démonstration de la b -continuité des arbres.

Enfin, on montre que $b(G) \leq \partial\Gamma(G)$ pour tout graphe G , et on établit un théorème qui caractérise les graphes tels que $b(H) = \partial\Gamma(H)$ pour tout sous graphe induit H de G .

ABSTRACT

Let $G=(V,E)$ be a simple graph of order n , with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. By clique number of a graph G we mean the largest order of a complete subgraph in G and denote it by $\omega(G)$. Also we denote by $\theta(G)$ the minimum clique partition of the graph G .

A proper k -coloring of a graph G is a partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ of $V(G)$ into k independent sets, called color classes. The minimum cardinality k for which G has a proper k -coloring is the chromatic number $\chi(G)$ of G . A dominating coloring of a graph G is a proper coloring of the vertices of G such that every color class contains at least one vertex which has a neighbor in all the other classes. The b -chromatic number, denoted $b(G)$, is the number of the maximum colors classes in a b -coloring of G . A graph G is called b -continuous if there are b -colorings by k colors for all $\chi(G) \leq k \leq b(G)$, where $\chi(G)$ denotes the chromatic number. In a k -coloring, a vertex $v \in V_i$ is called a Grundy vertex if v is adjacent to at least one vertex in color class V_j for every $j, j < i$. A k -coloring is called a partial Grundy coloring if every color class contains at least one Grundy vertex. The partial Grundy number, denoted $\partial\Gamma(G)$, is the maximum number of color in a partial Grundy coloring.

In this thesis, we present two new bounds for the b -chromatic number; one bound for an arbitrary graph in terms of $n, \omega(G)$ and $\theta(G)$, the other bound for the class $K_{1,t}$ -free in terms of Δ and t , where Δ is the maximum degree of G . Then, we give a lower bound of the b -chromatic number for the cross product of two graphs, we determine exact values of the b -chromatic number for the cross product of two particular graphs, and we show that these graphs are b -continuous. Also we prove that P_4 -free graphs are b -continuous, and we give a new proof for the b -continuity of trees. For a general graph G , we prove that $b(G) \leq \partial\Gamma(G)$. Finally, we characterize all graphs G such that each induced subgraph H of G has $b(H) = \partial\Gamma(H)$.

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **Hacene Ait Haddadene**, Professeur à l'USTHB, pour m'avoir encadré, et pour la confiance qu'il m'a accordé en me permettant de réaliser ce mémoire sous sa direction.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Monsieur **Farouk Hannane**, Professeur à l'université de Blida, pour la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être le président de jury de ce mémoire.

Je remercie les membres de jury : Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida, Monsieur **Abdelhafid Berrachedi**, Professeur à l'USTHB, et Monsieur **Mustapha Chellali**, Maître de conférences à l'université de Saad Dahlab Blida, qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je remercie mon ami **Noureddine Ikhlef Eschouf** pour ses conseils et encouragements.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui m'ont aidé par leurs soutiens et leurs encouragements et qui m'ont permis d'accomplir mon travail à son terme.

Merci enfin à ma famille:

Mon père, ma mère, ma femme, mes frères et mes sœurs

TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLES DES MATIERES	
LISTE DES FIGURES	
INTRODUCION.....	09
1. ELEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHERS	12
1.1. Définitions et notations de base.....	12
1.1.1. Graphe et sous graphe	12
1.1.2. Chaînes et connexité.....	14
1.2. Quelques graphes particuliers.....	15
1.3. Quelques paramètres structurels d'un graphes.....	18
1.4. Notion d'algorithme et de complexité algorithmique.....	18
2. COLORATION DE GRAPHERS	21
2.1. Quelques colorations des graphes.....	21
2.1.1. Coloration propre et nombre chromatique.....	22
2.1.2. La a-coloration et le nombre a-chromatique	22
2.1.3. La coloration partielle de Grundy.....	23
2.1.4. Coloration de Grundy et nombre de Grundy.....	23
2.1.5. La b-coloration et le nombre b-chromatique.....	23
2.2. Quelques résultats liés à la b-coloration et au nombre b-chromatique.....	24
2.2.1. Le nombre b-chromatique de quelques classes de graphes.....	25
2.2.2. Bornes sur le nombre b-chromatique.....	25
2.2.3. Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe biparti.....	28
2.2.4. Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe sans $K_{1,t}$	29
2.2.5. Le nombre b-chromatique de certains graphes réguliers.....	29
3. NOUVELLES BORNES SUR LE NOMBRE b-CHROMATIQUE	31
3.1. Borne supérieure de $b(G)$ dans un graphe quelconque.....	31
3.2. Borne inférieure de $b(G)$ pour les graphes sans $K_{1,t}$	35

4. b-COLORATION et b-CONTINUITE	37
4.1. La b-coloration du produit total de certains graphes particuliers.....	37
4.2. La b-continuité de la b-coloration de quelques produits totaux de graphes particuliers.....	53
4.3. La b-continuité de quelques classes de graphe.....	57
4.3.1. La b-continuité des graphes sans P_4	58
4.3.2 La b-continuité des arbres.....	60
5. LES GRAPHES $b\partial\Gamma$ -PARFAITS	62
5.1. Définitions et notations.....	62
5.2. Les graphes b_x -parfaits.....	63
5.3. Les graphes b_γ -parfaits.....	64
5.4. Borne supérieure du nombre b-chromatique.....	65
5.5. Les graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits.....	66
CONCLUSION	69
REFERENCE	71

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Un graphe G.....	13
Figure 1.2	Un graphe G et un sous graphe de G.....	14
Figure 1.3	Un cycle d'ordre 4 et une chaîne d'ordre 4.....	15
Figure 1.4	Un graphe complet à 4 sommets ...	15
Figure 1.5	Un graphe G et son complémentaire	16
Figure 1.6	Le graphe biparti complet $K_{3,2}$	16
Figure 1.7	La griffe.....	16
Figure 1.8	Un arbre.....	17
Figure 1.9	Un stable.....	18
Figure 3.1	Une coloration dominante avec 7 couleurs.....	33
Figure 3.2	Une (4) b-coloration	33
Figure 4.1	Produit cartésien, total et croisé de P_4 et P_3	38
Figure 4.2	Le joint de P_2 et P_4	38
Figure 4.3	L'union de P_4 et P_3	39
Figure 4.4	Une (2)b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_1$	42
Figure 4.5	Une (4)b-coloration de $K_{1,n} \boxtimes P_2$	42
Figure 4.6	Une (5)b-coloration de $K_{1,3} \boxtimes P_3$	43
Figure 4.7	Une (6)b-coloration de $K_{1,n} \boxtimes P_3$	43
Figure 4.8	Une (6)b-coloration du graphe de $K_{1,n} \boxtimes P_4$	44
Figure 4.9	Une (6)b-coloration de $K_{1,n} \boxtimes P_5$	44
Figure 4.10	Une (k)b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, avec $n \geq 3$ et $6 \leq k \leq 2n+2$ k paire..	47
Figure 4.11	Une $(2n+2)$ b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$ et $k=2n+3$	47
Figure 4.12	Une $(k-2)$ b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$, $2n+4 \leq k \leq 3n+5$	48
Figure 4.13	Une $(3n+3)$ b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$ et $k \geq 3n+6$	48

Figure 4.14	(a) Une (5) b-coloration du $P_3 \boxtimes P_3$ (b) Une (6) b-coloration du du $P_4 \boxtimes P_3$ (c) une (6) b-coloration du $P_4 \boxtimes P_4$	51
Figure 4.15	Une (9) et (7) b-coloration des graphes $P_{11} \boxtimes P_3$ et $P_9 \boxtimes P_3$	52
Figure 4.16	Une (9) et (8) b-coloration du graphes $P_7 \boxtimes P_4$ et $P_{10} \boxtimes P_3$	52
Figure 4.17	Le graphe \bar{C}_{10}	57

INTRODUCTION

La Recherche Opérationnelle est une discipline dont le but est d'aider le gestionnaire à prendre des décisions dans des situations complexes grâce à l'utilisation de méthodes scientifiques et en particulier de modèles mathématiques. Ce n'est qu'après la deuxième guerre mondiale qu'on a vu apparaître des applications de la recherche opérationnelle dans le domaine de la gestion, classée avec beaucoup d'autres, sous le titre général RO. Cette discipline est définie comme étant l'approche scientifique des problèmes complexes rencontrés dans la direction et la gestion de grands systèmes. Ses techniques mathématiques principales sont: la théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires,...

La théorie des graphes est une branche particulièrement vivante et féconde de la recherche opérationnelle qui s'impose de plus en plus dans la communauté scientifique par les ouvertures qu'elle offre tant vers les applications que vers d'autres disciplines et également par la culture spécifique et le type de raisonnement qu'elle apporte. L'histoire de la théorie des graphes débute peut être avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloration de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseaux de communications, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ... Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Les problèmes de coloration des graphes sont au coeur de la théorie des graphes, et font l'objet, à ce titre, de nombreuses recherches. Au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des

problèmes réels issus de l'industrie . La technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets (ou arêtes) d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité.

Par ce travail de recherche, nous avons étudié un nouveau concept de coloration des sommets d'un graphe assujettie à certaines contraintes. La coloration liée à ce paramètre a pour caractéristiques d'être propre et de maximiser le nombre de couleurs utilisées. La détermination de ce paramètre pour un graphe quelconque étant un problème NP -complet, cependant plusieurs études ont été menées sur diverses classes particulières de graphes.

Ce mémoire est développé en cinq chapitres

Le premier chapitre est consacré aux concepts fondamentaux les plus utilisés dans ce manuscrit. On présente des généralités sur les concepts de base de la théorie des graphes ensuite, on donne un aperçu sur la théorie de la complexité des algorithmes.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les définitions de certains types de colorations et leurs paramètres que l'on considérera dans ce mémoire ensuite nous rappelons les principaux résultats existants sur la b -coloration.

Au chapitre trois, nous présentons de nouvelles bornes sur le nombre b -chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe et nous montrons que ces bornes sont atteintes.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la b -coloration et la b -continuité de certains graphes. Nous donnons d'abord un bref aperçu des principaux résultats de la littérature liée à la b -coloration et la b -continuité de la somme cartésienne et le produit croisé de deux graphes. Nous donnons ensuite une borne inférieure du nombre b -chromatique du produit total de deux graphes. Ainsi, nous étudions la b -coloration et la b -continuité du produit total d'une étoile par une chaîne, d'une clique par une chaîne, d'une chaîne par un cycle, d'une clique par un cycle, de plusieurs chaînes et cycles et celui de deux chaînes. Enfin nous rappelons des résultats liés à la b -continuité de quelques classes de graphes, et nous étudions la b -continuité des graphes sans P_4 , et nous présentons une nouvelle démonstration de la b -continuité des arbres.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude des graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits. Tout d'abord nous présentons une borne supérieure du nombre b -chromatique ensuite, nous introduisons un nouveau théorème qui caractérise les graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits. Un graphe G est dit $b\partial\Gamma$ -parfait si et seulement si pour tout sous graphe induit H de G le nombre b -chromatique et le nombre partiel de Grundy de H sont égaux.

CHAPITRE 1

ELEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHS

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Pour plus de détails sur la terminologie utilisée, nous renvoyons le lecteur à [3] .

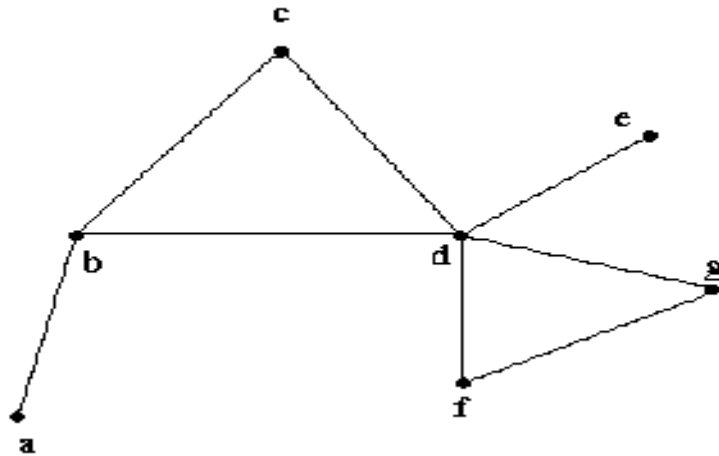
1.1 Définitions et notations de base

1.1.1 Graphe et sous graphe

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ (ou simplement $G = (V, E)$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté) est défini par la donnée d'un ensemble V fini non vide appelé ensemble des sommets de G ; et d'un ensemble fini E de paires de sommets appelé ensemble des arêtes de G . Le cardinal de V , appelé ordre de G , est noté n . Le cardinal de E est noté m . Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par $e = uv$ ou bien $e = vu$. Deux sommets u et v sont adjacents s'ils sont reliés par une arête e , et ils sont appelés extrémités de cette arête. On dit aussi que l'arête e est incidente à chacun d'eux. Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

Un graphe simple est un graphe sans boucles où tout couple de sommets est relié par au plus une arête. Dans tout ce qui suit, les graphes considérés sont des graphes simples et finis.

Dans le plan, les sommets d'un graphe G sont représentés par des points et chaque arête $e = uv$ de G est représentée par une ligne polygonale reliant les points correspondants aux sommets u et v . Dans la figure 1.1 on représente un graphe $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $E(G) = \{ab, bc, bd, de, df, dg\}$.

FIGURE 1.1 Un graphe G .

Un graphe $G = (V, E)$, avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, peut être représenté par sa matrice d'adjacence $A = [a_{ij}]$, d'ordre $n \times n$, définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est adjacent à } v_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il peut également être représenté par sa matrice d'incidence $B = [b_{ij}]$, d'ordre $n \times m$, définie par:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ est incidente à } v_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des sommets adjacents à un sommet v de G est appelé voisinage de v , il est noté $N_G(v)$. L'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ est dit voisinage fermé de v . Pour un sous ensemble $S \subseteq V$, l'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) de S .

Le degré du sommet v , noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes ayant v comme extrémité, c'est aussi le cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit sommet isolé, et un sommet de degré un est dit sommet pendant, un sommet adjacent à un sommet pendant est dit support. On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et minimum dans

G respectivement. S'il n'y a pas de confusion, on écrira $d(G)$, Δ , et δ pour désigner respectivement $d_G(v)$, $\Delta(G)$, et $\delta(G)$.

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appelle sous graphe induit par $A \subseteq V$, le graphe $G[A] = (A, E_A)$ où $E_A = \{uv \in E \mid u, v \in A\}$. Dans ce cas, on dira que l'ensemble des sommets A engendre ou induit le sous graphe $G[A]$.

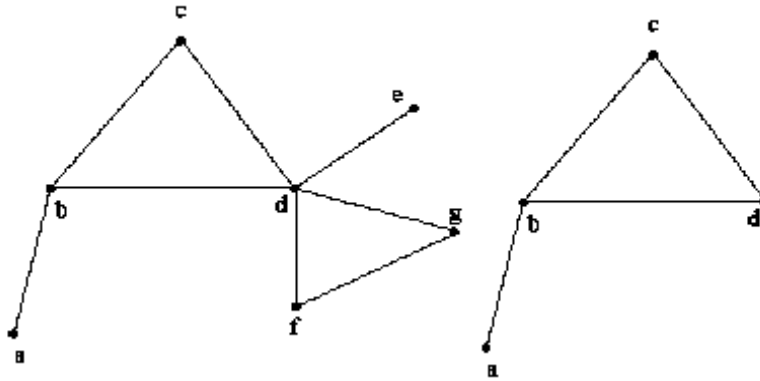


FIGURE 1.2. Un graphe G et un sous graphe de G .

Pour un sous ensemble $U \subseteq E$, le graphe partiel de G noté G_U est le sous graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U .

1.1.2 Chaînes et connexité

Dans un graphe G , une chaîne élémentaire P_k d'ordre k est une séquence $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de sommets distincts, telle que pour $i = 1, \dots, k-1$, v_i est adjacent à v_{i+1} dans G . L'entier $k-1$ représente la longueur de P_k et les sommets v_1 et v_k sont appelés extrémités de la chaîne P_k . Une chaîne qui n'utilise pas plusieurs fois la même arête est dite simple.

Un cycle dans un graphe est une chaîne dont les extrémités sont confondues. La longueur du petit cycle dans G est appelée maille de G . Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne ou d'un cycle. Un cycle sans corde de longueur n est désigné par C_n .

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une

chaîne reliant u et v . Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe induit connexe maximal de G . Un graphe connexe possède une seule composante connexe.

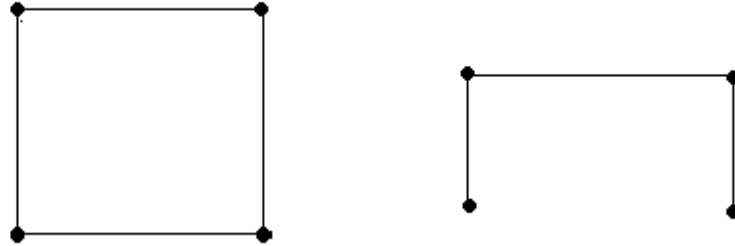


FIGURE 1.3 Un cycle d'ordre 4 et une chaîne de d'ordre 4.

La distance entre deux sommets u et v d'un graphe G notée $d(u, v)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . La plus grande distance dans G , notée $Diam(G)$ est appelée diamètre de G .

1.2 Quelques graphes particuliers

Un graphe G est dit complet si chaque sommet a pour ensemble de voisins tous les autres sommets. Un graphe complet d'ordre n est noté K_n .

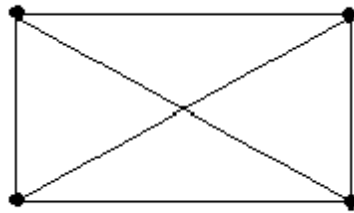
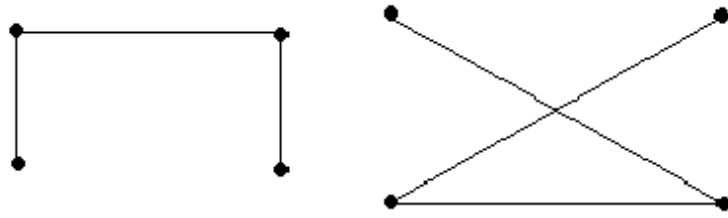


FIGURE 1.4. Un graphe complet à 4 sommets.

On appelle graphe complémentaire de $G = (V, E)$, le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tel que deux sommets sont adjacents dans \bar{G} si et seulement s'ils ne le sont pas dans G .

FIGURE 1.5. Un graphe G et son complémentaire

Un graphe G est dit biparti si l'ensemble de ses sommets admet une partition en deux stables. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles de longueur impaire. Un graphe biparti $G = (S_1 \cup S_2, E)$ est dit complet, si pour tout sommet $u \in S_1$ et $v \in S_2$, $uv \in E$. Si G est biparti complet et $|S_1| = p$, $|S_2| = q$, alors G est noté $K_{p,q}$. Si $|S_1| = 1$ et $|S_2| = q$ alors $K_{1,q}$ est appelé l'étoile d'ordre $q+1$ ayant q feuilles et si $q = 3$ G est appelé griffe.

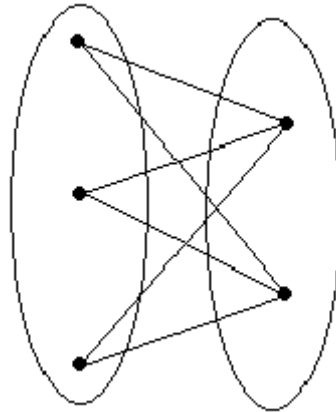


FIGURE 1.6. Un graphe biparti complet

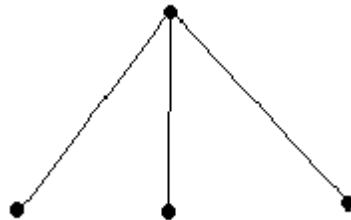


FIGURE 1.7. La griffe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit multiparti-complet si V admet une partition en k stables

S_1, S_2, \dots, S_k , tel que pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, tout sommet de S_i est adjacent à tout sommets de S_j , pour tout $j \neq i$.

On appelle arbre, et on le note par T , un graphe connexe et sans cycles. Un arbre d'ordre n contient exactement $(n - 1)$ arêtes. Dans un arbre d'ordre au moins deux il existe au moins deux sommets pendants. Une forêt est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

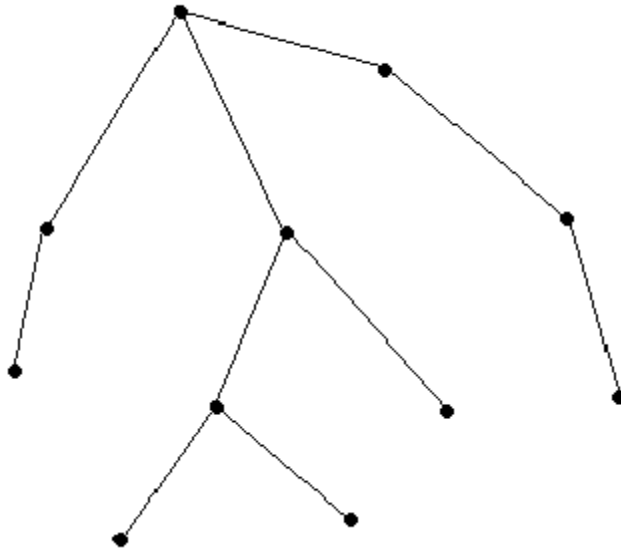


FIGURE 1.8. Un arbre.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré d est appelé un graphe d -régulier. Par exemple, les cycles élémentaires C_n sont des graphes 2-régulier; les cliques de n sommets sont des graphes $(n - 1)$ -réguliers.

Le graphe de puissance p avec $p \geq 1$ d'un graphe G , noté G^p , est obtenu à partir de G en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets à distance au plus p .

Un graphe G est dit sans H ou H -libre si G ne contient pas H comme sous graphe induit. Par exemple un graphe qui ne contient pas $K_{1,t}$, $t \geq 3$ comme sous graphe induit est dit graphe sans $K_{1,t}$.

1.3 Quelques Paramètres structurels d'un graphe

Une clique K d'un graphe G est un sous ensemble de sommet de G qui engendre un graphe complet. Une clique de n sommets est notée K_n . Le cardinal d'une clique maximum de G est noté $\omega(G)$.

La taille d'une partition minimum de l'ensemble de sommets de G en cliques est notée par $\theta(G)$.

Un stable de G est un sous ensemble S de G dont ses éléments sont deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$, est appelé nombre de stabilité de G . La taille d'une partition minimum de l'ensemble de sommets de G en stables, notée par $\chi(G)$, est appelée nombre chromatique de G . Dans un graphe G étant donné que deux sommets quelconque d'une clique (respectivement d'un stable) doivent se trouver dans des parties différentes de toute partition en stables (respectivement en cliques) de V , alors $\omega(G) \leq \chi(G)$ et $\alpha(G) \leq \theta(G)$.

Un couplage E dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. La taille d'un couplage maximum de G est noté par $\beta(G)$. Le couplage E est dit parfait dans G si toute arête de E est incidente à un sommet de V , c'est-à-dire $\beta(G) = \frac{n}{2}$.

1.4 Notion d'algorithme et de complexité algorithmique

Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné, est une procédure décomposable en opération élémentaires (la comparaison, l'affectation, les opérations arithmétiques, etc.....) transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème (P) en une chaîne de caractères représentant ses résultats. La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité (exprimée en termes du nombre n de caractères pour le codage des données) et le temps d'exécution (exprimé en termes du nombre $f(n)$ d'opérations élémentaires). Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif N , est égale ou plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2(N + 1)$.

Un algorithme est dit polynomial, si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour aboutir à la solution est une fonction polynomiale en la taille du problème. Autrement dit, il existe deux constantes c et k telles que $f(n) \leq cn^k$; un tel algorithme est de complexité $O(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartenant à la classe (P), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. On dit que les problèmes de la classe (P) sont faciles.

Un problème de reconnaissance est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs vrai ou faux.

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables, un problème de décision est dit dans NP (resp. $Co-NP$), si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée. Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que $P \subseteq NP$. Mais pour la plupart des problèmes de la classe NP , on ne sait pas dire s'ils peuvent ou ne peuvent pas être résolus par un algorithme polynomial, cette classe contient donc des problèmes qui sont plus difficiles que ceux de la classe P , la conjecture $P = NP$ demeure cependant ouverte.

Soient (P_1) et (P_2) deux problèmes de reconnaissance, on dit que (P_1) se réduit en temps polynomial à (P_2) s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel (comme à un sous programme) à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de reconnaissance est dit NP -complet, si tout problème de la classe NP peut se réduire polynomialement à lui.

La classe des problèmes de reconnaissance NP peut donc se partitionner en trois sous classes: les problèmes de la classe P , les problèmes NP -complet et les autres.

Les problèmes NP -durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP -complets et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est NP -complet est NP -dur.

CHAPITRE 2

COLORATION DES GRAPHES

Dans la première partie de ce chapitre, on présente la problématique générale de la coloration des graphes ensuite nous donnons quelques propriétés et résultats concernant quelques types de colorations des sommets d'un graphe. Dans la deuxième partie, nous donnons un bref aperçu sur la b -coloration et le nombre b -chromatique.

2.1 Quelques colorations des graphes

La coloration des graphes est un problème ancien, comme en témoigne le fameux problème des 4 couleurs posé par Francis Guthrie en 1852. Est-il possible de colorer toute carte géographique avec au plus 4 couleurs de sorte que deux pays qui ont une frontière en commun aient des couleurs différentes?

Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs américains Happel et Haken ont pu répondre affirmativement à ce problème. La coloration des graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels; depuis le placement de personnes autour d'une table ou de pièces sur un échiquier jusqu'aux différents problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours (réservation de ressources, logistique,...) et notamment dans le domaine des réseaux-télécom.

Il y a plusieurs façons de colorer les graphes; on cite la coloration des sommets, des arêtes ou sommets arêtes. A ceci peut s'ajouter la coloration sous contraintes. La contrainte la plus courante est celle de la propriété: deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Une autre contrainte est que le nombre de couleur utilisées soit minimal.

2.1.1 Coloration propre et nombre chromatique

Dans le domaine de la coloration, de nombreux paramètres ont été définis. Le paramètre le plus connu est le nombre chromatique, défini comme suit: on considère les colorations propres d'un graphe G , c'est-à-dire, les colorations pour lesquelles deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur. Alors, le nombre chromatique du graphe G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer le graphe.

Le problème de décision lié à ce paramètre est NP -complet dans le cas général; ceci a incité les chercheurs à établir des bornes inférieures et supérieures pour ce paramètre. Dans ce qui suit, on cite quelques résultats importants.

Théorème 2.1. [7]: *Si G est un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ alors, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$*

avec égalité si et seulement si on est dans un des deux cas suivants:

- 1) Soit $\Delta(G) \neq 2$ et G admet un sous graphe $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe, où $K_{\Delta(G)+1}$ est le graphe complet d'ordre $\Delta(G) + 1$.
- 2) Soit $\Delta(G) = 2$ et G admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.

Proposition 2.2. *Pour tout graphe G , on a: $\chi(G) \geq \omega(G)$, où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G .*

En effet, si $\chi(G) < \omega(G)$ alors, dans une clique maximum, il existe forcément deux sommets de même couleur, contradiction avec le fait que, dans une coloration propre, deux sommets adjacents sont de couleur différentes.

2.1.2 La a -coloration et le nombre a -chromatique

Il est à noter que cette coloration et ce paramètre ne font pas l'objet d'une étude approfondie dans ce mémoire, mais comme le nombre b -chromatique qu'on va le voir par la suite est défini à partir du nombre a -chromatique, nous introduisons dans ce paragraphe les notions de la a -coloration et le nombre a -chromatique.

Définition 2.3. *Une a -coloration d'un graphe G (également appelée coloration complète), est une coloration propre des sommets de G telle que pour toute paire de classe de couleurs*

différentes S_i et S_j , il existe au moins une arête qui a une extrémité dans S_i et l'autre extrémité dans S_j .

Le nombre a -chromatique, noté $\psi(G)$, d'un graphe G est le nombre maximum de couleurs pour lesquelles G admet une a -coloration. Ce paramètre a été introduit par Harary, Hedetniemi et Prins [16] et Harary et Hedetniemi [18].

2.1.3 La coloration partielle de Grundy

Définition 2.4. Dans une k -coloration d'un graphe G un sommet v , coloré par une couleur i , $1 \leq i \leq k$, est appelé sommet de Grundy s'il est adjacent à au moins $i - 1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i - 1$.

Définition 2.5. Une k -coloration partielle de Grundy est une coloration propre telle que toute classe de couleur S_i , $1 \leq i \leq k$, contient au moins un sommet de Grundy. Le nombre partiel de Grundy d'un graphe G , noté $\partial\Gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration partielle de Grundy de G , pris sur toute les colorations partielles de Grundy de G .

2.1.4 Coloration de Grundy et nombre de Grundy

Définition 2.6. Une k -coloration de Grundy d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v , coloré par une couleur i , $1 \leq i \leq k$, doit être adjacent à au moins $i - 1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i - 1$. Dans une coloration de Grundy chaque sommet est un sommet de Grundy. Le nombre de Grundy d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaire pour une coloration de Grundy de G , pris sur toute les colorations de Grundy de G . Ce paramètre a été introduit par C. Christen et S. Selkow [9]

2.1.5 La b -coloration et le nombre b -chromatique

Définition 2.7. Une coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleurs S_i contient au moins un sommets adjacent à ou moins un sommet de chaque classe de couleur S_j . avec $j \neq i$. Ce sommet est dit b -dominant pour la couleur i .

Le nombre b -chromatique est le nombre maximum de classe de couleurs dans une coloration dominante. En s'inspirant de la notion de la a -coloration, Irving et Manlove [19] ont défini la b -coloration et le nombre b -chromatique. En effet, étant donnée une k -coloration propre d'un graphe G , avec $k > \chi(G)$, on peut réduire le nombre de couleurs à l'aide d'une recoloration qui consiste à identifier deux classes de couleurs, une telle recoloration est impossible dès qu'il existe une arête entre chaque paire de couleurs, le plus grand nombre pour lequel ce procédé de recoloration est impossible est le nombre a -chromatique.

Au lieu d'identifier deux classes de couleurs, nous transférons les sommets d'une même classe de couleurs dans les autres classes de couleurs, une telle recoloration n'est plus possible si pour chaque classe, il existe au moins un sommet qui a un voisin dans chacune des autres classes. Le plus grand nombre pour lequel une telle recoloration est impossible est le nombre b -chromatique. Irving et Manlove ont montré dans [19] que le problème de décision associé au nombre b -chromatique est NP -complet en général même si on se restreint aux graphes bipartis.

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination du paramètre $b(G)$, dans un graphe quelconque a incité les chercheurs à établir des bornes qui encadrent ce paramètre et caractériser les graphes atteignant ces bornes pour des classes particulières.

Définition 2.8. *Une coloration dominante avec $b(G)$ couleurs est dite b -coloration.*

Définition 2.9. *Une (k) b -coloration de G est une coloration dominante de G avec k couleurs.*

Définition 2.10. *On appelle système b -dominant S d'un graphe G , l'ensemble des sommets b -dominants dans une coloration dominante tel que $|S| = b(G)$.*

2.2 Quelques résultats liés à la b -coloration et au nombre b -chromatique

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu des principaux résultats de la littérature liés à la b -coloration et au nombre b -chromatique.

2.2.1 Le nombre b -chromatique de quelques classes de graphes

Certaines études ont été réalisées pour donner la valeur exacte du nombre b -chromatique pour des classes particulières de graphes. Dans un premier temps, Kouider et Mahéo [23] ont donné les valeurs exactes du nombre b -chromatique pour des graphes particuliers: pour un stable S_n , $b(S_n) = 1$, pour un graphe complet K_n , $b(K_n) = n$, pour une chaîne P_n et une cycle C_n , $b(P_n) = b(C_n) = 3 \forall n \geq 5$. Pour un graphe biparti complet $K_{n,p}$, avec $n, p \in \mathbb{N}^*$ $b(K_{n,p}) = 2$. Pour le cas des arbres, Irving et Manlove [19] ont donné un algorithme polynomial pour le calcul du nombre b -chromatique, et récemment, M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray [5] ont donné un algorithme polynomial qui détermine le nombre b -chromatique pour les graphes sans P_4 .

Dans le paragraphe suivant, nous présentons des bornes du nombre b -chromatique dans un graphe quelconque.

2.2.2 Bornes sur le nombre b -chromatique

Définition 2.11. *Soit G un graphe de sommets v_1, v_2, \dots, v_n ordonnés de la manière suivante: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ où $d(v_i)$ est le degré de v_i . Le m -degré de G , noté $m(G)$, est défini par: $m(G) = \max \{i : d(v_i) \geq i - 1\}$.*

Un sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G) - 1$ est dit sommet dense .

Dans [19] et [23], Irving et Manlove, et Kouider et Mahéo ont montré que le m -degré est une borne supérieure du nombre b -chromatique

Proposition 2.12. [12] *Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble de sommets d'un graphe G ordonnés dans l'ordre décroissant de leur degrés. Alors*
 $b(G) \leq m(G)$.

Dans [12], T. Faik a défini le m -degré modifié et il a montré qu'il est une borne supérieure du nombre b -chromatique.

Définition 2.13. [12] Soient G un graphe de n sommets, et un ordre (v_1, v_2, \dots, v_n) des sommets de V tel que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ où d_i est le degré du sommet v_i . Nous supprimons de la liste (v_1, v_2, \dots, v_n) les sommets v_i pour lesquels il existe j , avec $j < i$ tel que $\Gamma(v_i) \subseteq \Gamma(v_j)$. On appelle séquence réduite, la liste des sommets $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ restant et séquence réduite des degrés, la séquence $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \dots \geq d_{i_k}$

Définition 2.14. Soit $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \dots \geq d_{i_k}$ la séquence des degrés modifiée d'un graphe G . Le m -degré modifié est défini par $m'(G) = \max \{j : d_{i_j} \geq j - 1\}$

Proposition 2.15. [12] Soient $G = (V, E)$ un graphe et u, v deux sommets de G tels que $\Gamma(u) \subseteq \Gamma(v)$. Soit G' le graphe induit par $V \setminus \{u\}$. Alors :

1. Toute (k) b -coloration de G' peut être étendu à G .
2. $b(G') \leq b(G)$
3. Pour toute b -coloration de G , si u est b -dominant, alors v est b -dominant et pour la même couleur.

Proposition 2.16. [12] Pour tout graphe G , on a $b(G) \leq m'(G)$.

Définition 2.17. [12] Soit $G = (V, E)$ un graphe k -parti, un sommet d'une classe X est dit charismatique si et seulement s'il a l'ensemble $V \setminus X$ comme voisinage.

Dans [12] T. Faik a caractérisé les graphes bipartis connexes tels que $b(G) = 2$.

Proposition 2.18. [12] Soit G un graphe k -parti, si chacune des k -parties contient au moins un sommet charismatique, alors $b(G) = k$.

Remarque 2.19. Si G est un graphe multiparti complet avec une k partition alors tout sommets de G est charismatique et d'après la proposition 2.18, $b(G) = k$. En particulier, si G est biparti complet alors $b(G) = 2$

Théorème 2.20. [12] Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti connexe. Alors $b(G) = 2$ si et seulement si chaque classe de la bipartition contient au moins un sommet charismatique.

Dans [19] Irving et Manlove ont remarqué que le nombre chromatique d'un graphe G est une borne inférieure du nombre b -chromatique.

Proposition 2.21. [19] *Toute coloration de G avec $\chi(G)$ couleurs est une coloration dominante.*

Corollaire 2.22. *Pour tout graphe G , on a $b(G) \geq \chi(G)$.*

Exemple 2.23. *Cette borne est atteinte pour les cliques et pour les graphes bipartis complets. En effet on a $b(K_n) = \chi(K_n) = n$, pour un graphe G biparti complet on a $b(G) = \chi(G) = 2$.*

Exemple 2.24. *Pour un graphe biparti complet $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ moins un couplage parfait, on a $b(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \frac{n}{2}$, et $\chi(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = 2$, d'où la différence entre $b(G)$ et $\chi(G)$ peut être très large.*

Irving et Manlove ont montré que $\Delta(G) + 1$ est une borne supérieure pour le nombre b -chromatique d'un graphe G .

Proposition 2.25. [19] *Pour tout graphe G , on a $b(G) \leq \Delta(G) + 1$ où $\Delta(G)$ est le degré maximum de G .*

Remarque 2.26. *La différence entre le nombre b -chromatique d'un graphe G et $\Delta(G) + 1$ peut être très large.*

Exemple 2.27. *Pour une clique K_n on a $\Delta(K_n) + 1 = b(K_n) = n$. Par contre $\Delta(K_{n,n}) + 1 = n + 1$ et $b(K_{n,n}) = 2$, d'où la différence entre $b(G)$ et $\Delta(G) + 1$ peut être très large.*

Dans [23], Kouider et Mahéo ont donné d'autres bornes supérieures du nombre b -chromatique d'un graphe.

Proposition 2.28. [23] *Pour tout graphe G de taille m , on a $b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$*

Proposition 2.29. [23] *Soient G un graphe connexe d'ordre n et α le nombre de stabilité de G . Alors, $b(G) \leq n + 1 - \alpha$.*

Proposition 2.30. [23] Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n alors $b(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G .

Proposition 2.31. [23] Soit G un graphe d'ordre n et \overline{G} son complémentaire alors, $b(G)b(\overline{G}) \geq n$.

Proposition 2.32. [23] Soit G un graphe non connexe avec des composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_p , $p \geq 2$, alors $b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}$

Théorème 2.33. [23] Soit G un graphe d'ordre n et \overline{G} son complémentaire, alors $b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1$

Remarque 2.34. Soit $G = S_p \vee K_{n-p}$ tel que S_p est un stable d'ordre p et K_{n-p} est une clique d'ordre $n - p$, alors $b(G) = b(S_p) + b(K_{n-p}) = 1 + n - p$, $\overline{G} = K_p + S_{n-p}$, et $b(\overline{G}) = \max\{p, 1\} = p$. Donc $b(G) + b(\overline{G}) = 1 + n - p + p = n + 1$. Dans ce cas, la borne $n + 1$ est atteinte.

On rappelle aussi que dans [10] et [11] B. Effantin et H. Kheddouci ont donné des bornes inférieures et supérieures pour quelques graphes puissances.

Dans ce qui suit, nous présentons deux bornes supérieures de $b(G)$ l'une pour les graphes bipartis, et l'autre pour les graphes sans $K_{1,t}$.

2.2.3 Borne supérieure de $b(G)$ dans un graphe biparti

Dans [24], M. Kouider et M. Zaker ont donné une borne supérieure du nombre b -chromatique d'un graphe en fonction de son nombre de biclique.

Définition 2.35. Soit G un graphe biparti, une biclique est un sous graphe biparti complet de G . Le nombre biclique de G , noté $t(G)$, est le nombre minimum de graphes bipartis complets deux à deux disjoints qui couvrent les sommets de G .

Exemple 2.36. Pour un graphe biparti complet $t(G) = 1$

Théorème 2.37. [24] Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti d'ordre n , alors $b(G) \leq \lfloor \frac{n-t+4}{2} \rfloor$ où t est le nombre biclique de G .

Dans [24], M. Kouider and M. Zaker ont montré que cette borne est atteinte.

Proposition 2.38. [24] *Pour tout entier $p \geq 3$, il existe un graphe biparti G d'ordre $n = 3p - 4$ et de nombre biclique $t = p - 1$ tel que $b(G) = p = \lfloor \frac{n-t+4}{2} \rfloor$*

2.2.4 Borne supérieure de $b(G)$ dans un graphe sans $K_{1,t}$

Théorème 2.39. [24] *Soit G un graphe sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, alors:*

$$b(G) \leq (t - 1)(\chi(G) - 1) + 1.$$

Remarque 2.40. *On peut obtenir la borne du théorème 2.39 d'une autre manière. En effet soient c une coloration dominante de G avec $b(G)$ couleurs et v un sommet de degré Δ . Si on note par H le sous graphe de G induit par $N(v)$, alors $\Delta = |N(v)| = |V(H)| \leq \alpha(H)\chi(H)$ et comme $\chi(H) \leq \chi(G) - 1$, et $\alpha(H) \leq t - 1$ on obtient $\Delta \leq (t - 1)(\chi(G) - 1)$ et on utilise la proposition 2.25 on trouve $b(G) \leq (t - 1)(\chi(G) - 1) + 1$.*

M. Kouider and M. Zaker ont montré qu'il existe une famille de graphes tels que cette borne est atteinte.

Proposition 2.41. [24] *Pour tout entier $t \geq 3$ et k , il existe un graphe sans $K_{1,t}$ tel que $\chi(G) = k$ et $b(G) = (t - 1)(k - 1) + 1$.*

Corollaire 2.42. *Si G est sans griffe, alors, $b(G) \leq 2\chi(G) - 1$*

Dans [8] M. Chundovsky et P. D. Seymour montrent que pour tout graphe sans griffes avec $\alpha(G) \geq 3$ on a $\chi(G) \leq 2\omega(G)$. En utilisant ce résultat, on obtient :

Corollaire 2.43. *Soit G un graphe sans griffes alors on a $b(G) \leq 4\omega(G) - 1$.*

Dans ce paragraphe on s'intéresse à la b -coloration dans les graphes réguliers.

2.2.5 Le nombre b -chromatique de certains graphes réguliers

Nous présentons dans ce paragraphe les principaux résultats liés à la b -coloration dans les graphes réguliers. Kratochvil et al. ont montré dans [25] que si G est un graphe

d -régulier avec au moins d^4 sommets, alors $b(G) = d + 1$. Dans [31] A.EL Sahili et M.Kouider ont donné la valeur exacte du nombre b -chromatique pour quelques graphes réguliers.

Proposition 2.44. [31] *Tout graphe d -régulier de maille 6 satisfait $b(G) = d + 1$.*

Théorème 2.45. [31] *Si G est un graphe d -régulier de maille $g(G) \geq 5$ et G ne contient pas C_6 alors $b(G) = d + 1$.*

A.EL Sahili et M.Kouider ont donné aussi la conjecture suivante.

Conjecture 2.46. [31] *Le nombre b -chromatique d'un graphe d -régulier de maille $g(G) = 5$ égale $d + 1$.*

Dans [6] M. Blidia , F. Maffray et Z. Zemir ont montré que cette conjecture est fautive. En effet ils ont montré que le nombre b -chromatique du graphe de Petersen égal à 3, mais ce graphe est 3-régulier, de maille 5. Ils ont reformulé cette conjecture de la manière suivante:

Conjecture 2.47. [6] *Le nombre b -chromatique d'un graphe d -régulier différent du graphe de Petersen de maille $g(G) = 5$ égale $d + 1$.*

Les même auteurs ont montré la conjecture pour $d \leq 5$, mais pour $d \geq 6$ le problème reste ouvert.

CHAPITRE 3

NOUVELLES BORNES SUR LE NOMBRE

b -CHROMATIQUE D'UN GRAPHE

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons une nouvelle borne supérieure sur le nombre b -chromatique ensuite nous montrons qu'il existe une famille de graphes pour laquelle cette borne est atteinte. Dans la deuxième section, nous déterminons une nouvelle borne inférieure pour les graphes sans $K_{1,t}$ et nous montrons que cette borne est atteinte pour une famille de graphes.

3.1 Borne supérieure de $b(G)$ dans un graphe quelconque

Soit G un graphe avec $\theta(G)$ et $\omega(G)$ sont respectivement, le nombre minimum d'une partition en cliques et la taille maximum d'une clique. Dans [24] Kouider et Zaker ont donné une borne supérieure du nombre b -chromatique d'un graphe G

Théorème 3.1. [24] *soit G un graphe avec $\theta(G) = k$ alors $b(G) \leq \frac{k^2 \omega(G)}{2k-1}$.*

Les mêmes auteurs [24] ont montré aussi qu'il existe une famille de graphes pour lesquels la borne du théorème 3.1 est atteinte.

Proposition 3.2. [24] *Pour tout entier positif $k \geq 2$ et ω divisible par $2k-1$, il existe un graphe G avec $\theta(G) = K$ tel que $b(G) = \frac{k^2 \omega}{2k-1}$ ou $\omega(G)$ et la taille maximum d'une clique.*

Récemment M. Blidia et N. Ikhlef Eschouf ont donné dans [4] une nouvelle borne supérieure de $b(G)$ en fonction de la taille maximum d'une clique de G .

Théorème 3.3. [4] *Pour tout graphe G d'ordre n différent d'une clique, on a $b(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \right\rfloor$ où $\omega(G)$ est la taille maximum d'une clique.*

M. Blidia et N. Ikhlef Eschouf [4] ont prouvé aussi qu'il existe une famille de graphes pour lesquels la borne du théorème 3.3 est atteinte.

Proposition 3.4. [4] *pour tout entier positif $n \geq 4$, il existe un graphe G d'ordre n tel que $\omega(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ et $b(G) = \lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \rfloor$*

Dans le paragraphe suivant, on donne une nouvelle borne supérieure du nombre b -chromatique ensuite on montre que cette borne est atteinte pour une famille de graphes.

Théorème 3.5. [1] *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n alors $b(G) \leq \left\lfloor \frac{\theta(G)\omega(G)+[\theta(G)-1]n}{2\theta(G)-1} \right\rfloor$*

où $\theta(G)$ et $\omega(G)$ sont respectivement, le nombre minimum d'une partition en cliques et la taille maximum d'une clique.

Preuve. Soient c une b -coloration de G et $S_1, S_2, \dots, S_{b(G)}$ les classes de couleurs de cette coloration, et soit n_k le nombre de classes de couleurs de taille k . Si $b(G) = b$ alors

$$n = \sum_{i=1}^b |S_i| = n_1 + \sum_{i=n_1+1}^b |S_i|. \text{ Comme } |S_i| \geq 2 \text{ alors } n \geq 2b - n_1.$$

$$\text{Donc } b(G) = b \leq \frac{n_1+n}{2} \quad (1)$$

$$\text{Comme } \alpha(G) \leq \theta(G) \text{ on a } n_i = 0 \text{ pour } i \geq \theta(G) + 1. \text{ Donc } b(G) = \sum_{i=1}^{\theta(G)} n_i = n_1 + \sum_{i=2}^{\theta(G)} n_i.$$

Ceci donne

$$\frac{b(G)-n_1}{\theta(G)} = \frac{\sum_{i=2}^{\theta(G)} n_i}{\theta(G)} \quad (2)$$

$$\text{Dans [24], les auteurs montrent que, } \frac{\sum_{i=2}^{\theta(G)} n_i}{\theta(G)} \leq \omega(G) - n_1 \quad (3)$$

En utilisant le résultat (3), on trouve $n_1 + \frac{b(G)-n_1}{\theta(G)} \leq \omega(G)$. Donc $n_1 \leq \frac{\theta(G)\omega(G)-b(G)}{\theta(G)-1}$.

En utilisant l'inégalité (1), on trouve $b(G) \leq \left\lfloor \frac{\theta(G)\omega(G)+[\theta(G)-1]n}{2\theta(G)-1} \right\rfloor$. □

Remarque 3.6. *La borne du théorème 3.5 est intéressante dans le cas des graphes parfaits car elle peut être déterminée en temps polynomial. En effet, les auteurs dans [15] ont montré que la détermination des quatre paramètres $\chi(G)$, $\alpha(G)$, $\omega(G)$ et $\theta(G)$ se fait en temps polynomial dans la classe des graphes parfaits.*

Remarque 3.7. La borne du théorème 3.5 est tout le temps meilleure par rapport à celle établie par M. Kouider et M. Zaker [24]. En effet, comme $n \leq \omega\theta$ alors que

$$\frac{\theta(G)\omega(G)+(\theta(G)-1)n}{2\theta(G)-1} \leq \frac{\theta^2\omega}{2\theta-1}.$$

Voir l'exemple de la figure 3.1, où $b(G) = \left\lfloor \frac{\theta(G)\omega(G)+[\theta(G)-1]n}{2\theta(G)-1} \right\rfloor = 7$ alors que $\frac{\theta^2\omega}{2\theta-1} = 11$, (avec $n = 10$, $\omega = 5$ et $\theta = 4$).

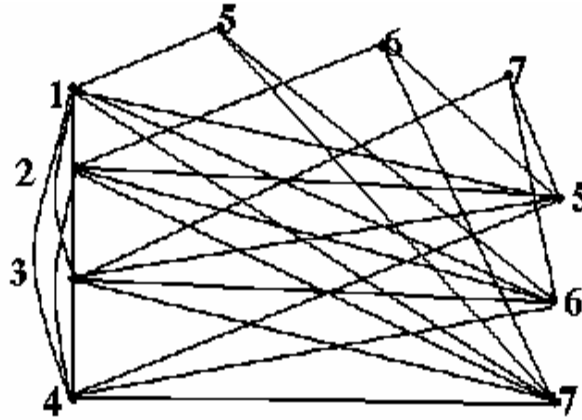


FIGURE 3.1. Une coloration dominante avec 7 couleurs..

Remarque 3.8. La borne du théorème 3.5 peut être meilleure dans certains cas par rapport à la borne établie par M. Blidia et N. Ikhlef Echouf [4] Voir l'exemple de la figure (3.2) avec $n = 12$, $\theta = 4$, $\omega = 3$ où $\left\lfloor \frac{\theta(G)\omega(G)+[\theta(G)-1]n}{2\theta(G)-1} \right\rfloor = 6$ alors que $\left\lfloor \frac{n+\omega-1}{2} \right\rfloor = 7$.

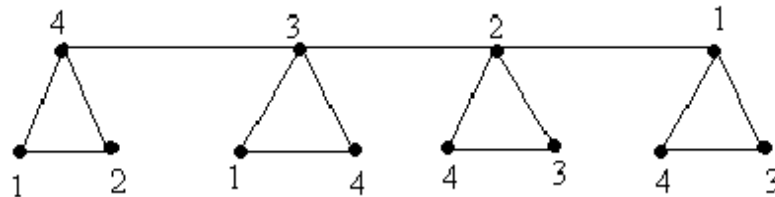


FIGURE 3.2. Une (4) b -coloration.

Dans la proposition suivante, on présente une famille de graphes pour lesquels la borne du théorème 3.5 est atteinte.

Proposition 3.9. [1] Pour tout $\theta \geq 2$ et $\omega \geq 3$ tel que ω est divisible par $2\theta - 1$ alors, il existe un graphe G d'ordre $n = \theta\omega$ tel que $b(G) = \left\lfloor \frac{\theta(G)\omega(G) + [\theta(G)-1]n}{2\theta(G)-1} \right\rfloor$

Preuve. Afin de construire notre graphe, on considère les trois ensembles de cliques deux à deux disjoints $\{X_1, \dots, X_\theta\}$, $\{Y_1, \dots, Y_\theta\}$ et $\{Z_1, \dots, Z_\theta\}$ avec $|X_i| = \frac{\omega}{2\theta-1}$, $|Y_i| = |Z_i| = \frac{(\theta-1)\omega}{2\theta-1}$, pour tout $i = 1, \dots, \theta$. Nous joignons deux sommets quelconques $x \in X_i$ et $y \in X_k$ par une arête, pour tout i et k . Donc, l'ensemble $\cup_{i=1}^\theta X_i$ forme une clique de taille $\frac{\theta\omega}{2\theta-1}$. Nous relient maintenant tout sommet de X_i avec tout sommet de Y_j pour tout i et j . Nous joignons aussi tout sommet de X_i avec tout sommet de Z_i pour tout i et il n'y a aucune arête entre X_i et Z_j , $i \neq j$. De plus, il n'y a aucune arête entre les sommets de Y_i et Y_j ; et entre les sommets de Z_i et Z_j , pour tout $i \neq j$. Enfin, nous relient tout sommet de Y_i avec tout sommet de Z_j , pour tout $i \neq j$.

Nous désignons le graphe obtenu par G . Pour montrer que notre borne est atteinte, il suffit de colorer le graphe G par $\frac{\theta(G)\omega(G) + (\theta(G)-1)n}{2\theta(G)-1}$ couleurs. Effet, nous colorons les sommets de l'ensemble $\cup_{i=1}^\theta X_i$ par les couleurs $1, 2, \dots, \frac{\theta\omega}{2\theta-1}$ ensuite, nous colorons les sommets de l'ensemble $\cup_{i=1}^\theta Y_i$ par les couleurs $\frac{\theta\omega}{2\theta-1} + 1, \dots, \frac{\theta\omega + (\theta-1)\theta\omega}{2\theta-1} = \frac{\theta\omega}{2\theta-1} + 1, \dots, \frac{\theta\omega + (\theta-1)n}{2\theta-1}$. On affecte aux sommets de Z_i les mêmes couleurs que Y_i , $1 \leq i \leq \theta$. Cette coloration est propre et b -dominante. Les sommets b -dominants sont les sommets de $(\cup_{i=1}^\theta X_i) \cup (\cup_{i=1}^\theta Y_i)$.

Le nombre de sommets de G est $\frac{\theta\omega}{2\theta-1} + \frac{(\theta-1)\theta\omega}{2\theta-1} + \frac{(\theta-1)\theta\omega}{2\theta-1} = \theta\omega = n$. Il est facile de voir que, les ensembles $X_1 \cup Z_1 \cup Y_2$, $X_2 \cup Z_2 \cup Y_3$, ..., $X_{\theta-1} \cup Z_{\theta-1} \cup Y_\theta$, $X_\theta \cup Z_\theta \cup Y_1$ forment une partition de $V(G)$ en θ cliques. Comme $\theta(G)$ est la taille d'une partition minimum de $V(G)$ en cliques alors $\theta(G) \leq \theta$. D'autre part, G contient un stable de taille θ . Donc, $\theta(G) \geq \alpha(G) \geq \theta$. D'ou, $\theta(G) = \theta$. On peut vérifier aussi que la taille d'une clique maximum de G est ω . Pour cela, on considère une clique K de taille maximum dans G , alors deux cas se présentent:

1) Il n'existe aucun sommet de Z_i dans K . Dans ce cas, K contient tous les sommets de l'ensemble $\cup_{i=1}^\theta X_i$ et tous les sommets de Y_m , où m est un entier quelconque, $1 \leq m \leq \theta$. Ceci implique que, K contient $\frac{\theta\omega}{2\theta-1} + \frac{(\theta-1)\omega}{2\theta-1} = \omega$ alors $|K| = \omega$.

2) Il existe r , $1 \leq r \leq \theta$, tel que les sommets de Z_r sont dans K . Dans ce cas, K contient forcément les sommets de X_t et les sommets de Y_l où t et l sont deux entiers quelconques, $1 \leq t \leq \theta$ et $1 \leq l \leq \theta$. De ce fait, K contient $\frac{\omega}{2\theta-1} + \frac{(\theta-1)\omega}{2\theta-1} + \frac{(\theta-1)\omega}{2\theta-1} = \omega$

alors $|K| = \omega$.

Les corollaires suivants sont des conséquences du théorème 3.5. □

Corollaire 3.10. *Si G est le complémentaire d'un graphe biparti d'ordre n alors, $b(G) \leq \lfloor \frac{2\omega+n}{3} \rfloor$, où ω est la taille de la plus grande clique de G .*

En effet, il suffit de poser $\theta = 2$ dans le théorème 3.5.

Corollaire 3.11. *Si G est un graphe sans triangle d'ordre n alors, $b(G) \leq \lfloor \frac{2\theta+(\theta-1)n}{2\theta-1} \rfloor$.*

En effet, il suffit de poser $\omega = 2$ dans le théorème 3.5.

Corollaire 3.12. *Pour tout graphe d'ordre n , on a $b(G) \leq \frac{\chi(\overline{G})\omega+(\chi(\overline{G})-1)n}{2\chi(\overline{G})-1}$, où $\chi(\overline{G})$ est le nombre chromatique de \overline{G} .*

En effet, comme $\theta(G) = \chi(\overline{G})$ alors, d'après le théorème 3.5, on a le résultat désiré.

3.2 Borne inférieure de $b(G)$ pour les graphes sans $K_{1,t}$

Dans cette section, on détermine une nouvelle borne inférieure du nombre b -chromatique et on montre qu'elle est atteinte pour une famille de graphes.

Théorème 3.13. *[1] Si G un graphe sans $K_{1,t}$, $t \geq 3$ alors, $b(G) \geq \frac{\Delta}{t-1} + 1$ où Δ est le degré maximum de G .*

Preuve. Soient $S_1, S_2, \dots, S_{b(G)}$ les classes d'une partition de G avec $b(G)$ couleurs, si x est un sommet quelconque de S_i $1 \leq i \leq b(G)$ alors, x admet au plus $t - 1$ voisins dans chaque classe S_j $1 \leq j \leq b$ et $j \neq i$. Ceci implique que $d(x) \leq (t - 1)(b - 1)$. Il est clair que le degré maximum de G ne peut pas dépassé $(t - 1)(b - 1)$, par conséquent $b(G) \geq \frac{\Delta}{t-1} + 1$. □

Dans la proposition suivante, on présente une famille de graphes pour lesquels la borne du théorème 3.13 est atteinte.

Proposition 3.14. *[1] Pour tout $t \geq 3$ et Δ tel que Δ est divisible par $t - 1$ alors, il existe un graphe G sans $K_{1,t}$ tel que $\Delta(G) = \Delta$ et $b(G) = \frac{\Delta}{t-1} + 1$.*

Preuve. Afin de construire notre graphe G , on considère le graphe H défini par un sommet v tel que ces voisins forment $t - 1$ cliques deux à deux disjoints chaque une contient $\frac{\Delta}{t-1}$ sommets. G est la réunion de $\frac{\Delta}{t-1} + 1$ copies de H . D'après le théorème 3.13 on a $b(G) \geq \frac{\Delta}{t-1} + 1$. Pour montrer que $b(G) = \frac{\Delta}{t-1} + 1$, il suffit de borner $b(G)$ supérieurement par $\frac{\Delta}{t-1} + 1$. En effet, le graphe G contient $\frac{\Delta}{t-1} + 1$ sommets de degré Δ , $\Delta(\frac{\Delta}{t-1} + 1)$ sommets de degré $\frac{\Delta}{t-1}$, dans G il n'existe pas $\frac{\Delta}{t-1} + 2$ sommets de degré au moins $\frac{\Delta}{t-1} + 1$, donc le m -degré de G est égal à $\frac{\Delta}{t-1} + 1$. D'où $b(G) \leq \frac{\Delta}{t-1} + 1$ \square

CHAPITRE 4

b -COLORATION ET b -CONTINUITE

Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons les définitions des produit cartésien, croisé, et total de deux graphes; nous donnons un rappel des différents résultats concernant la b -coloration du produit cartésien et croisé de certains graphes particuliers ensuite nous présentons nos premiers résultats concernant la b -coloration du produit total de certains graphes particuliers. Dans la deuxième section, nous exhibons les différents résultats relatifs à la b -continuité des produit cartésien et croisé de certains graphes particuliers ensuite nous étudions la b -continuité du produit total de ces graphes. La dernière section de ce chapitre est consacré à l'étude de la b -continuité de quelques classes de graphes.

4.1 La b -coloration du produit total de certains graphes particuliers

Nous rappelons d'abord la définition des produits cartésien, croisé et total de deux graphes:

Définition 4.1. *Le produit cartésien de deux graphes G et H , noté $G \square H$, est le graphe défini par:*

- $V(G \square H) = \{(u, v), u \in V(G) \text{ et } v \in V(H)\}$
- $E(G \square H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : u_1 = u_2 \text{ et } v_1 v_2 \in E(H) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } u_1 u_2 \in E(G))\}$

Définition 4.2. *On appelle hypercube de dimension n , et on note H_n , le produit cartésien de n copies de K_2*

Définition 4.3. *Le produit croisé de G et H , noté $G \times H$, est défini par:*

- $V(G \times H) = \{(u, v) : u \in V(G) \text{ et } v \in (H)\}$
- $E(G \times H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2), : u_1 u_2 \in E(G) \text{ et } v_1 v_2 \in E(H)\}.$

Définition 4.4. Le produit total de G et H , noté $G \boxtimes H$, est défini par:

- $V(G \boxtimes H) = \{(u, v) : u \in V(G) \text{ et } v \in V(H)\}$
- $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$.

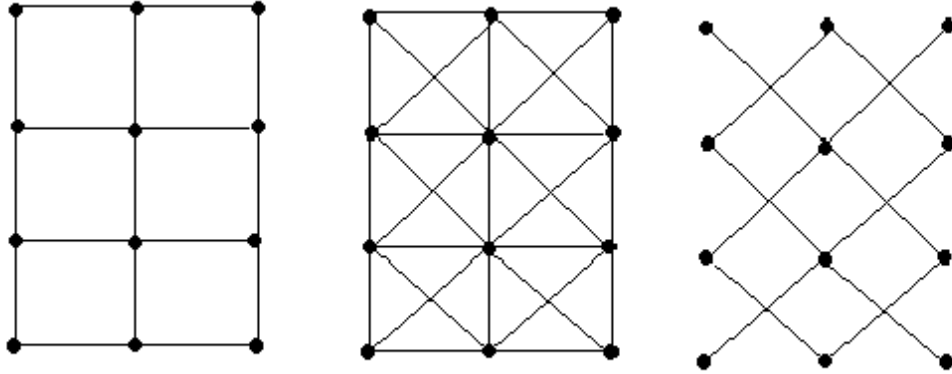


FIGURE 4.1. Produits cartésien, total et croisé de P_4 et P_3 .

Définition 4.5. On appelle joint de deux graphes G et H , noté GVH , le graphe obtenu en prenant une copie de G et une copie de H et en reliant tous les sommets de G à tous les sommets de H . Dans [17], les auteurs ont montré que $b(GVH) = b(G) + b(H)$.

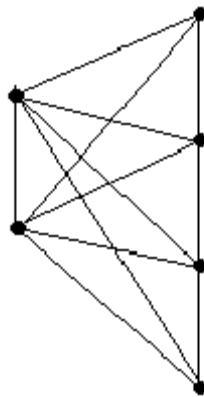


FIGURE 4.2. Le joint de P_2 et P_4 .

Définition 4.6. Soient G et H deux graphes disjoints, alors $G + H$ désigne l'union de G et H . Pour un entier k donné, kG désigne l'union de k copies de G .

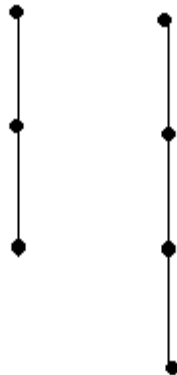


FIGURE 4.3. L'union de P_4 et P_3 .

Nous donnons maintenant un rappel sur quelques résultats concernant la b -coloration du produit cartésien et du produit croisé de deux graphes.

Dans [23], M. Kouider et M. Mahéo ont donné les résultats suivants:

Proposition 4.7. [23] Si $K_{1,n}$, P_n , K_n sont respectivement l'étoile d'ordre $n+1$, la chaîne d'ordre n et la clique d'ordre n , alors:

- $b(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 2$ si $n \geq 2$
- $b(K_{1,n} \square P_k) = \min(k, n + 3)$, $n \geq 3$, $k \geq 4$ sauf le cas $k = n + 3, k = n + 4$ où $b(K_{1,n} \square P_k) = n + 2$
- $n \leq b(K_n \square K_p) \leq p(p - 1)$ si $p \leq n < p(p - 1)$, et $b(K_n \square K_p) = n$ si $n \geq p(p - 1)$.

Proposition 4.8. [23] $b(G \square H) \geq \max(b(G), b(H))$

Théorème 4.9. [23] Soient G et H deux graphes tels que G a un système b -dominant stable avec $b(G)$ couleurs, et H a un système b -dominant stable avec $b(H)$ couleurs. Alors $b(G \square H) \geq (b(G) + b(H)) - 1$ et le graphe $G \square H$ a un système b -dominant stable avec $(b(G) + b(H) - 1)$ couleurs.

Comme conséquence du théorème 4.9 M. Kouider et M. Mahéo ont obtenu les deux corollaires suivants:

Corollaire 4.10. *Soient $C_n, C_{n'}$ deux cycles d'ordre respectif $n, n' \geq 6$ et $P_k, P_{k'}$ deux chaînes d'ordre respectif $k, k' \geq 7$ alors*

$$b(C_n \square C_{n'}) = b(C_n \square P_k) = b(P_k \square P_{k'}) = 5.$$

Corollaire 4.11. *$b(H_1) = b(H_2) = 2$ et $b(H_n) = n + 1, n \geq 3$, où H_n est l'hypercube de dimension n .*

Dans [20], N. Ikhlef Eschouf a donné les résultats suivants:

Proposition 4.12. [20] *Soient $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1$, et P_n la chaîne d'ordre n alors:*

a) pour $n, m \geq 3, b(K_{1,n} \times K_{1,m}) = 2$.

$$b) b(P_n \times P_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2, 3 \text{ et } m = 2, 3 \\ 3 & \text{si } (n \geq 4 \text{ et } m = 2) \text{ ou } (n = 4, 5 \text{ et } m = 3) \\ 4 & \text{si } (n = 6 \text{ et } m = 3) \text{ ou } (n = 4 \text{ et } m = 4) \\ 5 & \text{si } (n \geq 7 \text{ et } m = 3) \text{ ou } (n \geq 5 \text{ et } m \geq 4) \end{cases}$$

$$c) \text{ Pour tout } n \geq 3, b(K_{1,n} \times P_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = 2, 3 \\ 3 & \text{si } m = 4 \\ \min(m - 2, 2n + 1) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

Nous présentons maintenant une borne inférieure du nombre b -chromatique du produit total de deux graphes.

Théorème 4.13. [1] *Soient G et H deux graphes. Alors $b(G \boxtimes H) \geq b(G).b(H)$.*

Preuve. Soient c et π deux b -colorations de G et H respectivement et soient $S = \{S_1, S_2, \dots, S_{b(G)}\}$ une partition en b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs et $T = \{T_1, T_2, \dots, T_{b(H)}\}$ une partition en b -coloration de H avec $b(H)$ couleurs. Sans perte de généralité, on peut

supposer que, chaque classe de couleur S_i , $1 \leq i \leq b(G)$ (resp. T_j , $1 \leq j \leq b(H)$) contient un sommet b -dominant x_i (resp. y_j) de couleur i (resp. j). Soit $S_{ij} = G[S_i] \boxtimes G[T_j]$, $1 \leq i \leq b(G)$, $1 \leq j \leq b(H)$. D'après la définition du produit total, S_{ij} est un stable d'ordre $|S_i| \times |T_j|$. L'idée de la preuve consiste à colorer le graphe $G \boxtimes H$ par $b(G).b(H)$ couleurs. En effet, nous colorons les sommets de S_{ij} par la couleur $i + (j - 1)b(G)$, $1 \leq i \leq b(G)$, $1 \leq j \leq b(H)$. Il est facile de vérifier que cette coloration est propre et b -dominante dans $G \boxtimes H$. Chaque stable S_{ij} , $1 \leq i \leq b(G)$, $1 \leq j \leq b(H)$ contient un sommet b -dominant (x_i, y_j) de couleur $i + (j - 1)b(G)$ dans une b -coloration de $G \boxtimes H$ avec $b(G).b(H)$ couleurs. Donc $b(G \boxtimes H) \geq b(G).b(H)$ \square

Remarque 4.14. La borne du théorème 4.13 est atteinte par exemple pour le produit total d'une clique K_n et un stable S_n . En effet, le graphe $K_n \boxtimes S_n$ est l'union de n copies de K_n , donc $b(K_n \boxtimes S_n) = n = b(K_n).b(S_n)$.

Nous donnons maintenant des nouveaux résultats qui consistent à déterminer la valeur exacte du nombre b -chromatique du produit total d'une étoile et une chaîne, d'une clique et une chaîne, d'une chaîne et un cycle, d'une clique et un cycle, de plusieurs chaînes et cycles et celui de deux chaînes.

Proposition 4.15. [1] Soient $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1$ et P_k la chaîne d'ordre k alors,

$$\text{pour tout } n \geq 3, \text{ on a : } b(K_{1,n} \boxtimes P_k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 1 \\ 4 & \text{si } k = 2 \\ 5 & \text{si } k = 3 \text{ et } n = 3 \\ 6 & \text{si } (k = 4, 5) \text{ ou } (k = 3 \text{ et } n \geq 4) \\ k & \text{si } 6 \leq k \leq 2n + 2 \\ 2n + 2 & \text{si } k = 2n + 3 \\ k - 2 & \text{si } 2n + 4 \leq k \leq 3n + 5 \\ 3n + 3 & \text{si } k \geq 3n + 6 \end{cases}$$

Preuve. Il est facile de vérifier que $b(K_{1,n} \boxtimes P_1) = b(K_{1,n}) = 2$ (voir figure 4.4)



FIGURE 4.4. Une (2) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_1$.

- Le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_2$ a deux sommets de degré $2n + 1$ et $2n$ sommet de degré 3. Le m - degré du $K_{1,n} \boxtimes P_2$ est égal à 4, donc $b(K_{1,n} \boxtimes P_2) \leq 4$. Puisque qu'il existe une (4) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_2$ (voir figure 4.5) alors $b(K_{1,n} \boxtimes P_2) = 4$. \square

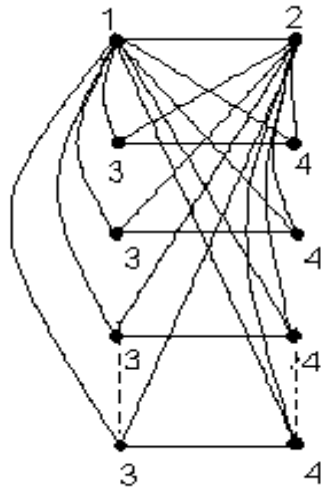


FIGURE 4.5. Une (4) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_2$.

- De même, le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_3$ a un sommet de degré $3n + 2$, deux sommets de degré $2n + 1$, n sommets de degré 5 et $2n$ sommets de degré 3. Le m - degré de $K_{1,n} \boxtimes P_3$ est égal à 6, d'autre part il n'existe aucune (6) b -coloration du graphe $K_{1,3} \boxtimes P_3$ mais ce graphe admet une (5) b -coloration (voir figure 4.6). Pour $n \geq 4$, il existe une (6) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_3$ (voir figure 4.7) donc $b(K_{1,n} \boxtimes P_3) = 6$.

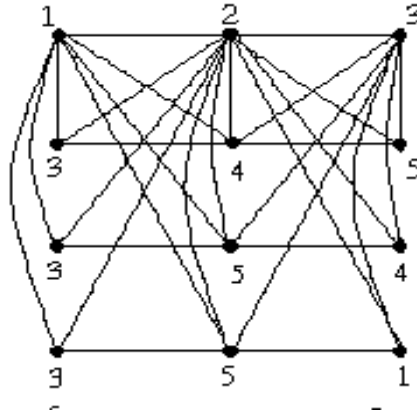


FIGURE 4.6. Une (5) b -coloration du graphe $K_{1,3} \boxtimes P_3$.

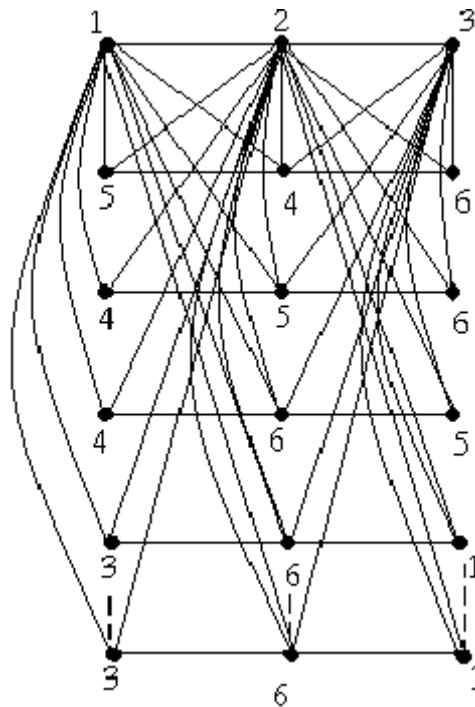


FIGURE 4.7. Une (6) b -coloration du graphe $K_{1,3} \boxtimes P_3$.

- Le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_4$ a deux sommets de degré $3n + 2$, deux sommets de degré $2n + 1$, $2n$ sommets de degré 5 et $2n$ sommets de degré 3. Le m -degré du $K_{1,n} \boxtimes P_4$ est égal à 6, d'autre part, il existe une (6) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_4$ (voir figure 4.8). D'où, $b(K_{1,n} \boxtimes P_4) = 6$.

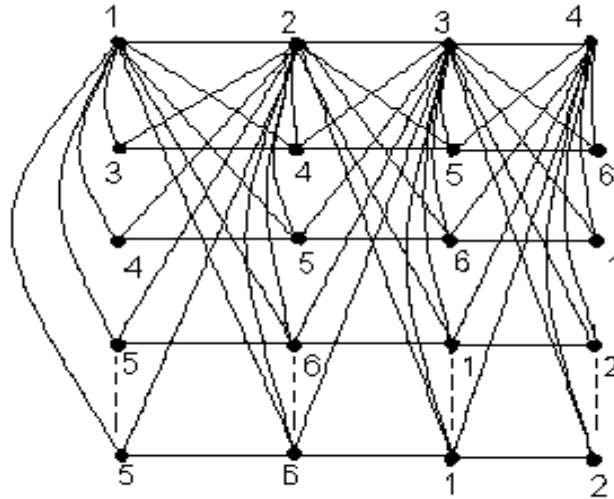


FIGURE 4.8. Une (6) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_4$.

• Le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_5$ a trois sommets de degré $3n + 2$, deux sommets de degré $2n + 1$, $3n$ de sommets de degré 5 et $2n$ sommets de degré 3. Le m -degré du $K_{1,n} \boxtimes P_5$ est égal à 6. D'autre part, il existe une (6) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_5$ (voir figure 4.9). D'où, $b(K_{1,n} \boxtimes P_5) = 6$.

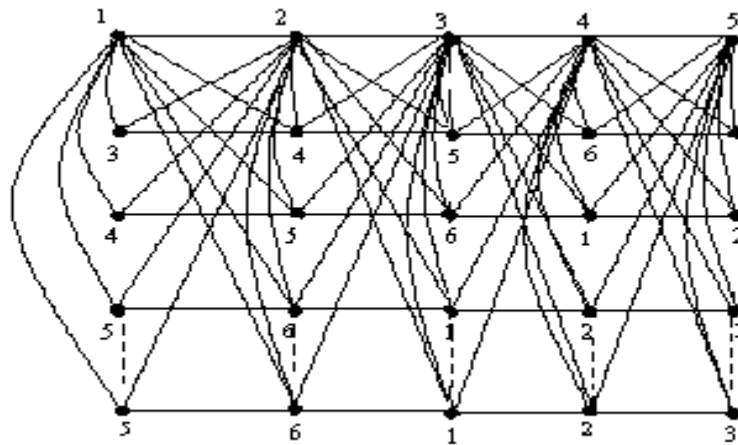


FIGURE 4.9. Une (6) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_5$.

• Pour $n \geq 3$ et $6 \leq k \leq 3n + 5$, le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$ a $(k - 2)$ sommet de degré $3n + 2$, deux sommets de degré $2n + 1$, $n(k - 2)$ sommets de degré 5 et $2n$ sommets de degré 3.

Posant $G = K_{1,n} \boxtimes P_k$, soit (x_i, y_i) un sommet de G où x_i et y_i $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq k$ sont deux sommets de $K_{1,n}$ et P_k respectivement. Quatre cas se présentent:

Cas 1: $6 \leq k \leq 2n+1$ alors $b(G) \leq m(G) = k$.

Pour montrer que $b(G) = k$, il suffit de construire une (k) b -coloration de $K_{1,n} \boxtimes P_k$.

Procédure de coloration 1 (voir figure 4.10 et)

1– Poser $c(x_1, y_1) = 1$

2– Pour tout $2 \leq j \leq m$, $c(x_1, y_j) = c(x_1, y_{j-1}) + 1$

3– Pour tout $2 \leq i \leq n+1$, $c(x_i, y_1) = c(x_{i-1}, y_1) + 2$

Si m est impair et $c(x_i, y_1) > m$ alors poser $c(x_i, y_1) = m$ et $c(x_i, y_2) = 4$,
 $c(x_{n+1}, y_m) = k - 2$.

Si m est paire et $c(x_i, y_1) > m$ alors poser $c(x_i, y_1) = m - 1$ et $C(x_i, y_2) = 1$

4– Pour tout $i, 2 \leq i \leq n+1$ et pour tout $j, 2 \leq j \leq m$:

4.1) Poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-1}) + 1$

4.2) Si $c(x_i, y_j) > m$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$ et aller à 4.1.

Cette coloration est propre et b -dominante, les sommets b -dominants étant (x_1, y_j) ,
 $2 \leq j \leq m$

Cas2: Si $k = 2n+3$ alors $b(G) \leq m(G) = 2n+2$. Puisque G admet une b -coloration avec $2n+2$ couleur alors $b(G) = 2n+2$.

Procédure de coloration 2 (voir figure 4.12)

1– Poser $c(x_1, y_1) = 1$ et $c(x_1, y_{2n+3}) = 1$

2– Pour tout $j, 2 \leq j \leq 2n+3$ poser $c(x_1, y_j) = j$

3– Pour tout $i, 2 \leq i \leq n+1$, $c(x_i, y_1) = c(x_{i-1}, y_1) + 2$

4– Pour tout $i, 2 \leq i \leq n+1$ et pour tout $j, 2 \leq j \leq 2n+3$:

4.1) Poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-1}) + 1$

4.2) Si $c(x_i, y_j) > 2n+2$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$ et aller à 4.1.

Cette coloration est propre et b -dominante, les sommets b -dominants étant (x_1, y_j)
 $1 \leq j \leq k$.

Cas 3: $2n + 5 \leq k \leq 3n + 5$

alors $b(G) \leq m(G) = k - 2$. sachant que G admet une b -coloration avec $k - 2$ couleurs.

D'ou $b(G) = k - 2$.

Procédure de coloration 3 (voir figure 4.13)

- 1– Poser $c(x_1, y_1) = 1, c(x_1, y_{k-1}) = 1$ et $c(x_1, y_k) = 2$. Poser pour tout j , $2 \leq j \leq k - 2, c(x_1, y_j) = j$
- 2– Poser $c(x_2, y_1) = 4$, et pour tout $i, 3 \leq i \leq n + 1, c(x_i, y_1) = c(x_{i-1}, y_1) + 3$.
Si $c(x_i, y_1) > k - 2$ alors poser $c(x_i, y_1) = 4$
- 3– Pour tout $i, 2 \leq i \leq n + 1$ et pour tout $j, 2 \leq j \leq k$
 - 3.1) Poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-1}) + 1$
 - 3.2) Si $c(x_i, y_j) > k - 2$ alors deux cas se présentent :
 - 3.2.1) Si $k \in \{12, 15, 18, 21, \dots\}$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$ et aller à 3.1.
 - 3.2.2) Si $k \notin \{12, 15, 18, 21, \dots\}$ alors poser $c(x_i, y_j) = 4$ et aller à 3.1.

Il est clair que cette coloration est propre et b -dominante, les sommets b -dominants étant $(x_1, y_j) \quad 2 \leq j \leq k - 1$

Cas 4: Si $k \geq 3n + 6$ alors $b(G) \leq m(G) = 3n + 3$. Afin de montrer que $b(K_{1,n} \boxtimes P_k) = 3n + 3$, nous construisons une $(3n + 3)$ b -coloration de $K_{1,n} \boxtimes P_k$ de la manière suivante:

Procédure de coloration 4 (voir figure 4.14)

- 1– Poser $c(x_1, y_1) = 1, c(x_1, y_{3n+4}) = 1, c(x_1, y_{3n+5}) = 2$
- 2– Pour tout $2 \leq j \leq 3n + 3, c(x_1, y_j) = C(x_1, y_{j-1}) + 1$
- 3 – a) Poser $C(x_2, y_1) = 4$
b) Pour tout $i, 3 \leq i \leq n + 1, c(x_i, y_1) = c(x_{i-1}, y_1) + 3$
- 4– Pour tout $i, 2 \leq i \leq n + 1$ et pour tout $j, 2 \leq j \leq k$
 - a) Poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-1}) + 1$
 - b) Si $c(x_i, y_j) > 3n + 3$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$ et aller à a).
- 5) Pour colorer le reste des sommets du graphe, il suffit de faire des copies des deux dernières colonnes.

De même, il est facile de vérifier que cette coloration est propre et b -dominante, les sommets b -dominants étant $(x_1, y_j), 2 \leq j \leq 3n + 4$.

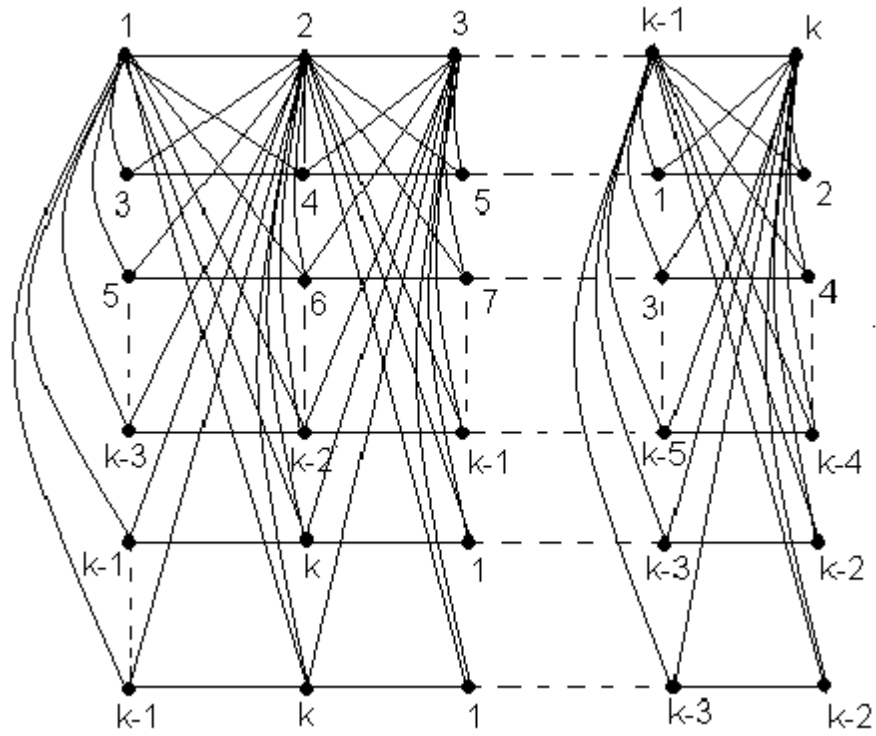


FIGURE 4.10. Une (k) b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$, $6 \leq k \leq 2n + 2$, k paire

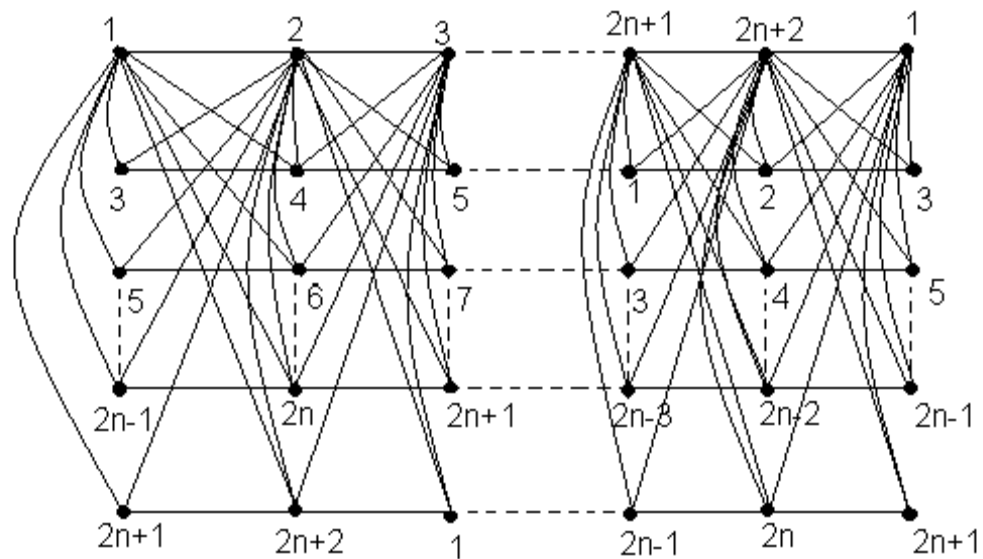


FIGURE 4.11. Une $(2n + 2)$ b -coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$, $k = 2n + 3$.

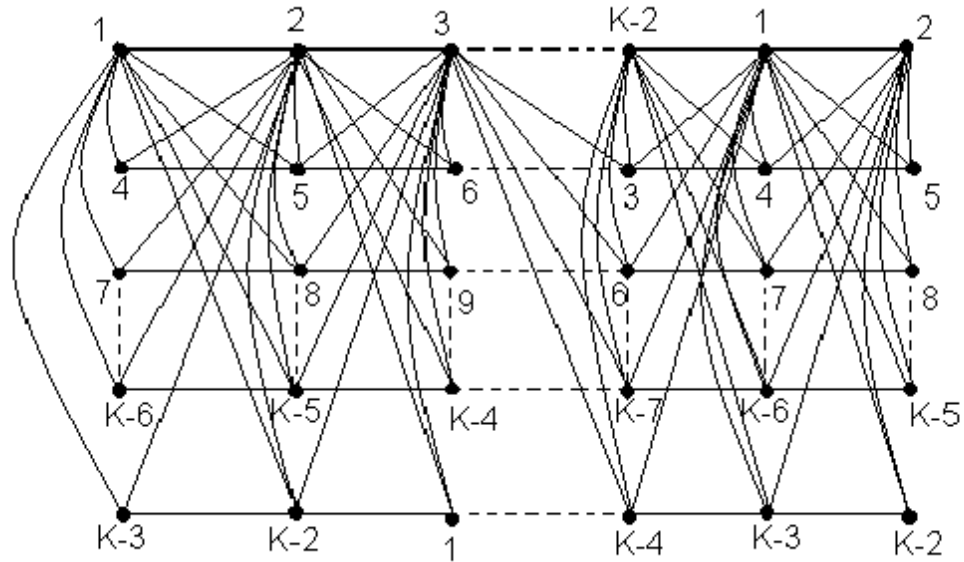


FIGURE 4.12. Une $(k - 2)$ b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$, $2n + 4 \leq k \leq 3n + 5$.

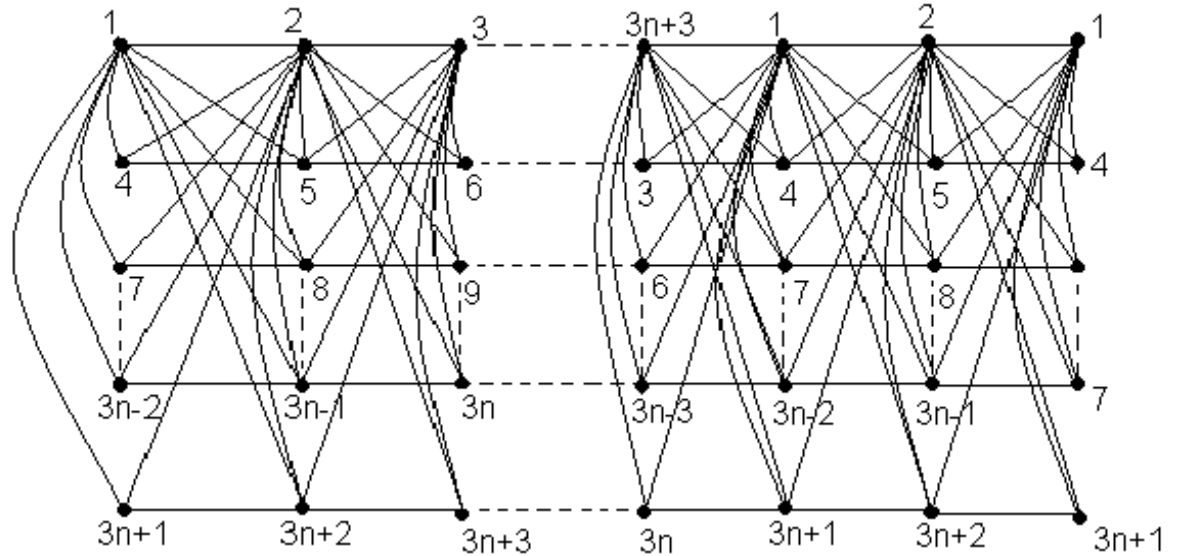


FIGURE 4.13. Une $(3n + 3)$ b-coloration du graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$, $n \geq 3$, $k \geq 3n + 6$.

Corollaire 4.16. [1] Soient K_n une clique d'ordre n et P_m une chaîne d'ordre m alors

$$b(K_n \boxtimes P_m) = \begin{cases} n & \text{si } m = 1 \\ 2n & \text{si } m = 2, 3, 4 \\ 3n & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

Preuve. Si $m = 1, 2$, le graphe $K_n \boxtimes P_m$ est une clique d'ordre n ou $2n$. Donc $b(K_n \boxtimes P_m) = n$ ou $2n$.

Si $m = 3, 4$ alors d'après le théorème 4.13, $b(K_n \boxtimes P_m) \geq 2n$. D'autre part, on a $m(K_n \boxtimes P_m) = 2n$. D'où $b(K_n \boxtimes P_m) = 2n$.

Si $m \geq 5$ alors d'après le théorème 4.13 $b(K_n \boxtimes P_m) \geq 3n$. Comme $\Delta(K_n \boxtimes P_m) = 3n - 1$ alors $b(K_n \boxtimes P_m) = 3n$. \square

Corollaire 4.17. [1] Soient P_n une chaîne d'ordre n et C_m un cycle d'ordre m alors, on a $b(P_n \boxtimes C_m) = 9$ avec $n \geq 5$ et $m \geq 5$.

Preuve. D'une part, on a d'après le théorème 3.3, $b(P_n \boxtimes C_m) \geq b(P_n).b(C_m) = 9$, d'autre part, le degré maximum de ce graphe est 8, ceci implique que $b(P_n \boxtimes C_m) \leq 9$ d'où, $b(P_n \boxtimes C_m) = 9$. \square

Proposition 4.18. [1] Soient K_n une clique d'ordre n et C_m un cycle d'ordre m , alors

$$b(K_n \boxtimes C_m) = \begin{cases} 3n & \text{si } m = 3 \text{ ou } m \geq 5 \\ 2n & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

Preuve. Si $m = 3$ alors $K_n \boxtimes C_m$ est une clique d'ordre $3n$, donc $b(K_n \boxtimes C_m) = 3n$.

Si $m = 4$ alors $K_n \boxtimes C_m$ est le joint de deux graphes G_1, G_2 et chacun est la réunion de deux cliques d'ordre n . Donc $b(G_1) = b(G_2) = \max(n, n) = n$. En conséquence, $b(K_n \boxtimes C_m) = b(G_1) + b(G_2) = 2n$.

Si $m \geq 5$ alors, d'après le théorème 3.3, $b(K_n \boxtimes C_m) \geq 3n$. D'autre part, $K_n \boxtimes C_m$ est $(3n - 1)$ -régulier, donc $b(K_n \boxtimes C_m) = 3n$. \square

Remarque 4.19. Pour deux cliques K_{n_1} et K_{n_2} d'ordre respectifs n_1 et n_2 on a $b(K_{n_1} \boxtimes K_{n_2}) = n_1.n_2$. En effet le graphe $K_{n_1} \boxtimes K_{n_2}$ est une clique d'ordre $n_1.n_2$ donc $b(K_{n_1} \boxtimes K_{n_2}) = n_1.n_2$. Ce résultat est généralisé au produit total de plusieurs cliques. Pour les cliques $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_p}$ d'ordres respectifs n_1, n_2, \dots, n_p on a $b(K_{n_1} \boxtimes K_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes K_{n_p}) = \prod_{i=1}^p n_i$

Proposition 4.20. [1] Soient $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_k}$ les chaînes d'ordres respectifs n_1, n_2, \dots, n_k , avec $n_i \geq 5, 1 \leq i \leq k$. Alors $b(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_k}) = 3^k$.

Preuve. D'après le théorème 3.3, on a $b(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_k}) \geq 3b(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_{k-1}}) \geq 3^2 b(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_{k-2}}) \geq \dots \geq 3^k$. Pour montrer que $b(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_k}) = 3^k$ il suffit de montrer que $\Delta(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_k}) = 3^k - 1$. En effet posons $G_i = P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_i}$ pour tout i , $2 \leq i \leq k$. Il est clair que $\Delta(G_2) = 8 = 3^2 - 1$. Supposons que $\Delta(G_{k-1}) = 3^{k-1} - 1$, $G_k = G_{k-1} \boxtimes P_{n_k}$. Soit $G_{k-1}^{(j)}$ la $j^{\text{ième}}$ copie de G_{k-1} dans G_k pour tout j , $1 \leq j \leq n_k$. Soit v un sommet de degré maximum dans G_k , alors $v \notin G_{k-1}^{(1)}$ et $v \notin G_{k-1}^{(n_k)}$, et par conséquent $d(v) = \Delta(G_k) = 3(3^k - 1) + 2 = 3^k - 1$. D'où $b(P_{n_1} \boxtimes P_{n_2} \boxtimes \dots \boxtimes P_{n_k}) = 3^k$ \square

Corollaire 4.21. *Soient $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_k}$ les cycles d'ordres respectifs n_1, n_2, \dots, n_k avec $n_i \geq 5$, $1 \leq i \leq k$. Alors $b(C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_k}) = 3^k$.*

Preuve. Même raisonnement que, la proposition 4.20. \square

Dans le paragraphe suivant, on détermine une borne supérieure $m(G)$ pour le paramètre $b(G)$ ensuite, on construit une b -coloration avec $m(G)$ couleurs.

Proposition 4.22. [1] *Soient P_n et P_k deux chaînes d'ordres respectifs n et k . Alors, on a:*

$$b(P_n \boxtimes P_k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 1 \text{ et } n = 2, 3, 4 \\ 3 & \text{si } k = 1 \text{ et } n \geq 5 \\ 4 & \text{si } (n = k = 2) \text{ ou } (n = 3 \text{ et } k = 2) \text{ ou } (n = 4 \text{ et } k = 2) \\ 5 & \text{si } n = k = 3 \\ 6 & \text{si } (n = 4, 5, 6, 7, 8 \text{ et } k = 3) \text{ ou } (n \geq 5 \text{ et } k = 2) \text{ ou } (n = 4, 5 \text{ et } k = 4) \\ 7 & \text{si } n = 9 \text{ et } k = 3 \\ 8 & \text{si } (n = 10 \text{ et } k = 3) \text{ ou } (n = 6 \text{ et } k = 4) \\ 9 & \text{si } (n \geq 11 \text{ et } k \geq 3) \text{ ou } (n \geq 7 \text{ et } k \geq 4) \text{ ou } (n \geq 5 \text{ et } k \geq 5) \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = P_n \boxtimes P_k$. On distingue deux cas:

Cas 1 : a) Si $(n = k = 2)$ ou $(n = 3 \text{ et } k = 2)$ ou $(n = 4 \text{ et } k = 2)$ alors d'après le théorème 3.3, on a $b(G) \geq 4$. D'autre part, le m -degré de G est égal à 4. Donc $b(G) = 4$.

b) Si $(n = 5, 6, 7, 8$ et $k = 3)$ ou $(n \geq 5$ et $k = 2)$ ou $(n = 5$ et $k = 4)$ alors d'après le théorème 3.3, on a $b(G) \geq 6$. D'autre part, il est facile de vérifier que $m(G) = 6$. Donc $b(G) = 6$.

c) Si $n \geq 5$ et $k \geq 5$ alors d'après le théorème 3.3, on a $b(G) \geq 9$. d'autre part, le m -degré de G est égal à 9. Donc $b(G) = 9$.

$$\text{d) Si } n = 1 \text{ ou } k = 1 \text{ alors } b(G) = b(P_{\max\{n,k\}}) = \begin{cases} 2 \text{ si } \max\{n, k\} \leq 4 \\ 3 \text{ si } \max\{n, k\} \geq 5 \end{cases} .$$

Cas 2 : Dans les autres cas, G contient $(n-2)(k-2)$ sommets de degré 8 et $2(n+m-4)$ sommets de degré 5 et quatre sommets de degré 3. Le m -degré de G est égal à 5, 6, 7, 8 ou 9, et cela suivant la valeur de $(n-2)(k-2)$ et $2(n+m-4)$. Sachant que G admet une b -coloration avec $m(G)$ couleurs (voir les figures 4.14, 4.15, 4.16) avec $m(G) = 5, 6, 7, 8$ ou 9 alors $b(G) = m(G)$.

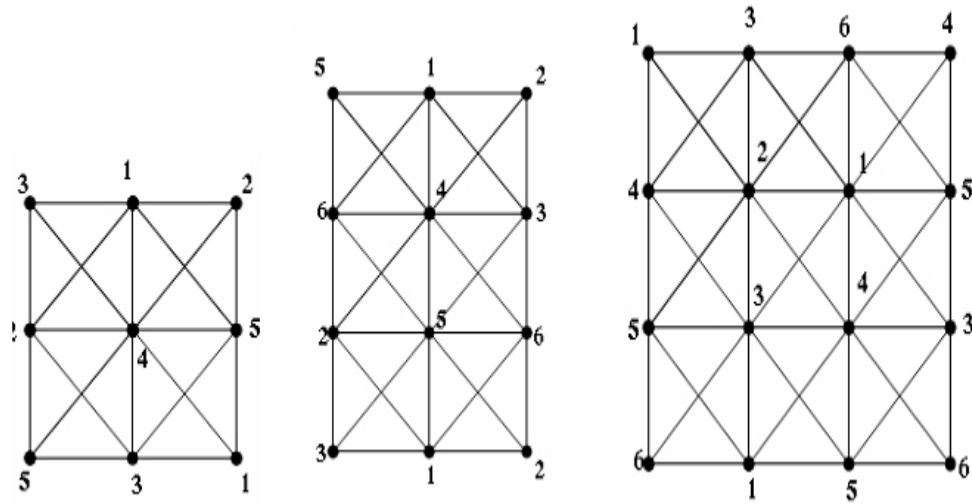


FIGURE 4.14

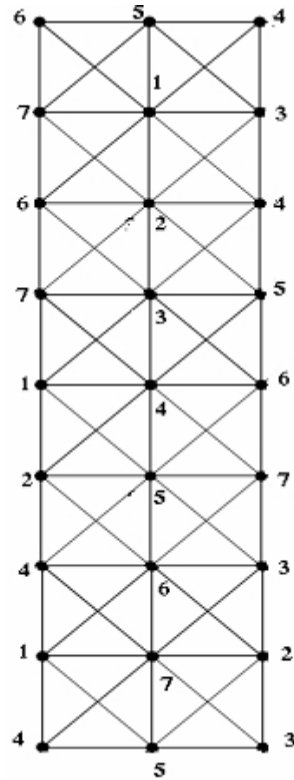
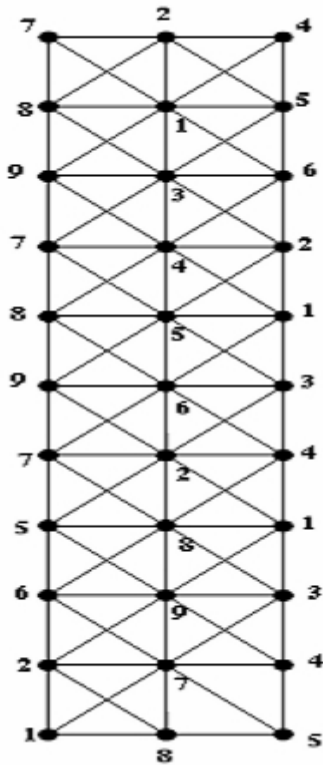


FIGURE 4.15

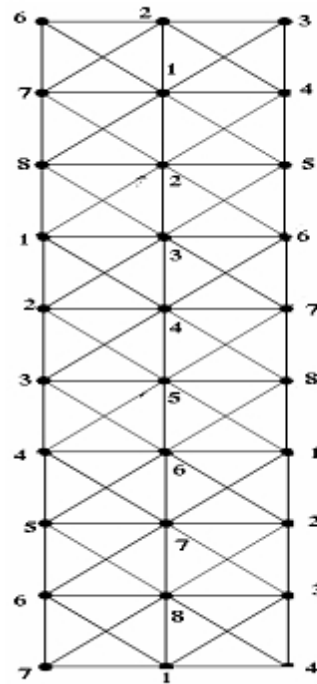
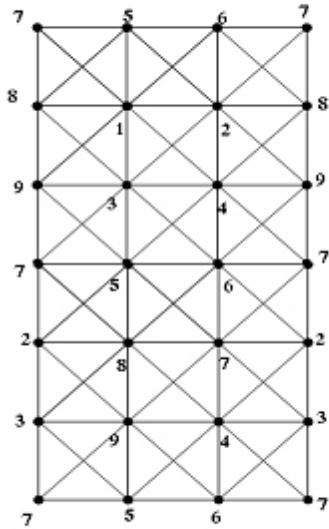


FIGURE 4.16

□

4.2 La b -continuité de la b -coloration de quelques produits totaux des graphes particuliers

Dans [16], F. Harary, S. Hedetniemi et G. Prins ont montré que pour tout graphe G et tout entier k tel que $\chi(G) \leq k \leq \psi(G)$, G admet une a -coloration utilisant k couleurs. Ils ont appelé ce théorème "Théorème d'Interpolation" et le paramètre $\psi(G)$ est un "Invariant d'Interpolation". La notion d'interpolation a été ensuite étudié pour différents paramètres de graphe. En effet dans [9] C. Christen, S. Selkow ont étudié l'interpolation du nombre de Grundy $\gamma(G)$. Ils ont montré que pour tout graphe G et tout entier k , $\chi(G) \leq k \leq \gamma(G)$, le graphe G admet une coloration de Grundy avec k couleurs.

Dans [19], R. W. Irving et D. F. Manlove ont remarqué que l'hypercube de dimension trois admet une b -coloration avec 2 et 4 couleurs respectivement, mais il n'admet pas de b -coloration avec trois couleurs. Selon la terminologie de Harary, le nombre b -chromatique n'est pas un invariant d'interpolation. Dans [12], T. Faik a appelé l'interpolation du nombre b -chromatique " b -continuité de la b -coloration des graphes"

Dans cette section, nous présentons nos résultats concernant la b -continuité de la b -coloration du produit total de deux graphes dans quelques cas particuliers. Avant de donner ces résultats, nous commençons d'abord par des définitions et des résultats concernant la b -continuité.

Définition 4.23. *Un graphe G est dit b -continu, s'il admet une (k) b -coloration pour tout k , avec $\chi(G) < k < b(G)$.*

Définition 4.24. *On appelle b -spectre, noté $S_b(G)$, d'un graphe G l'ensemble des entiers k pour lesquels G admet une b -coloration avec k couleurs.*

Définition 4.25. *Le graphe G est dit b -continu si et seulement si son b -spectre est un intervalle.*

Dans [13] T. Faik a donné les résultats suivants:

Proposition 4.26. *[13] Soient $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1$ et P_m la chaîne d'ordre m :*

- a) *Soit $m \geq n \geq 2$. Le graphe $K_{1,n} \square K_{1,m}$ est b -continu.*
- b) *Soient $n \geq 3$ et $m \geq 2$. Le graphe $K_{1,n} \square P_m$ est b -continu.*

Proposition 4.27. [13] Soient P_n et P_m les chaînes d'ordre respectifs $n \geq 2$ et $m \geq 2$.

Le graphe $P_n \square P_m$ est b -continu.

Proposition 4.28. [13] Soient C_n et C_m les cycles d'ordre respectif $n \geq 3$ et $m \geq 3$. Le graphe $C_n \square C_m$ est b -continu.

Dans [20], N. Ikhlef-Eschouf a donné les résultats suivants:

Proposition 4.29. [20] Soient $K_{1,n}$ et $K_{1,m}$ les étoiles d'ordres respectifs $n + 1 \geq 4$ et $m + 1 \geq 4$ et soient P_j et P_k les chaînes d'ordres respectifs $j \geq 1$ et $k \geq 1$.

a) Le graphe $K_{1,n} \times K_{1,m}$ est b -continu.

b) Le graphe $P_j \times P_k$ est b -continu.

Proposition 4.30. [20] Soit $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1 \geq 4$ et P_m la chaîne d'ordre $m \geq 1$ alors, le graphe $K_{1,n} \times P_m$ est b -continu.

Remarque 4.31. Soit $G = (V, E)$ un graphe et $U \subseteq E$. Si G est b -continu n'implique pas que le graphe partiel $G_U = (V, U)$ est b -continu.

Exemple 4.32. Si $G = K_{4,4}$ alors G est b -continu. Le cube est un graphe partiel de G qui n'est pas b -continu.

Nous montrons maintenant la b -continuité du produit total de deux graphes particuliers.

Proposition 4.33. Soient P_n et P_m les chaînes d'ordres respectifs n et m . Alors, le graphe $P_n \boxtimes P_m$ est b -continu.

Preuve. Posons $G = P_n \boxtimes P_m$. On sait que, pour $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\chi(G) = 4$.

1– Si $m = 1$, $G = P_n$. Dans ce cas, il est facile de vérifier que G est b -continu.

2– Si ($n = m = 2$) ou ($n = 3$ et $m = 2$) ou ($n = 4$ et $m = 2$) alors $b(G) = \chi(G) = 4$, donc G est b -continu.

3– Si $n = m = 3$ alors $b(G) = 5$, donc G est b -continu.

4– Si $(n = 4, 5, 6, 7, 8$ et $m = 3)$ ou $(n = 4, 5$ et $m = 4)$ alors $b(G) = 6$. Dans ce cas, le graphe $P_3 \boxtimes P_3$ est un sous graphe de G , d'après (3), il admet une $(5)b$ -coloration. Il est facile d'étendre cette coloration à G , en colorant les dernières lignes en utilisant successivement la coloration du deuxième et du troisième ligne et nous colorons la dernière colonne en utilisant la coloration du deuxième colonne.

Pour $n \geq 5$ et $m = 2$, $b(G) = 6$. On peut vérifier facilement que G admet une $(5)b$ -coloration. Donc G est b -continu.

5– Si $n = 9$ et $m = 3$, $b(G) = 7$. Le graphe $P_8 \boxtimes P_3$ est un sous graphe de G qui admet une $(5)b$ -coloration et une $(6)b$ -coloration d'après (4). On peut facilement étendre ces coloration à G .

6– Si $n = 10$ et $m = 3$, $b(G) = 8$. Le graphe $P_9 \boxtimes P_3$ est un sous graphe de G qui admet, d'après (5), une $(k)b$ -coloration avec $k = 5, 6$ et 7 . Cette coloration peut être étendue facilement à G .

Si $n = 6$ et $m = 4$ alors d'après (4), le graphe $P_6 \boxtimes P_3$ admet une (5) et $(6)b$ -coloration. Cette coloration peut être facilement étendue à G . On peut vérifier aussi que G admet une $(7)b$ -coloration. Donc G est b -continu.

7– Si $(n \geq 11$ et $m \geq 3)$ ou $(n \geq 7$ et $m \geq 4)$ alors $b(G) = 9$. Les graphes $P_{10} \boxtimes P_3$ et $P_6 \boxtimes P_4$ admettent, d'après (6), une $(k)b$ -coloration pour $k = 5, 6, 7$ et 8 . On peut étendre ces colorations à G .

Pour $n \geq 5$ et $m \geq 5$, le graphe $P_5 \boxtimes P_4$ est un sous graphes induit de G qui admet, d'après (4), une (5) et (6) b -colorations. On peut facilement étendre ces colorations à G ; et on peut vérifier que G admet une (7) et (8) b -coloration. Donc G est b -continu. \square

Proposition 4.34. *Soient $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1 \geq 4$ et P_m la chaîne d'ordre $m \geq 1$, alors le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_m$ est b -continu.*

Preuve. Soit $G = K_{1,n} \boxtimes P_m$. On peut vérifier que $\chi(G) = 4$. Il est facile aussi de constater que G est b -continu pour $m = 1, 2, 3, 4$ et 5 . Si $m \geq 6$ alors, le graphe G est b -continu car pour tout k , $4 < k < b(G)$, il existe une $(k)b$ -coloration de G . En effet, d'après la proposition 4.15, on distingue deux cas:

Cas 1 : $6 \leq k \leq 2n + 2$. Le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_k$ est un sous graphe induit de G qui admet

une $(k)b$ -coloration.

Cas 2 : $2n + 3 \leq k \leq 3n + 3$. Le graphe $K_{1,n} \boxtimes P_{k+2}$ est un sous graphe de G et admet une $(k)b$ -coloration.

Pour avoir une $(k)b$ -coloration de G , il suffit de faire des copies des deux dernières colonnes. \square

Proposition 4.35. *Soient K_n une clique d'ordre n , P_m une chaîne d'ordre m et C_s un cycle d'ordre s alors on a:*

1-Le graphe $(K_n \boxtimes C_s)$ est b -continu.

2-le graphe $(K_n \boxtimes P_m)$ est b -continu.

Preuve. 1-Si $s = 3$ ou $s \geq 5$ alors $b(K_n \boxtimes C_s) = \chi(K_n \boxtimes C_s) = 3n$ et si $s = 4$ alors $b(K_n \boxtimes C_s) = \chi(K_n \boxtimes C_s) = 2n$, En conséquence, ce graphe est b -continu.

2-Si $m = 1$ $b(K_n \boxtimes P_m) = \chi(K_n \boxtimes P_m) = n$, si $m = 2, 3, 4$ alors $b(k_n \boxtimes P_m) = \chi(K_n \boxtimes P_m) = 2n$, donc ce graphe est b -continu.

Si $m \geq 5$ alors $b(K_n \boxtimes P_m) = 3n$ et $\chi(K_n \boxtimes P_m) = 2n$. Ce graphe est b -continu car pour tout q , $1 \leq q \leq n$, il existe une $(2n + q)$ b -coloration de $K_n \boxtimes P_m$. En effet, étant donnée une b -coloration c de $K_n \boxtimes P_5$, il suffit de colorer le graphe $K_n \boxtimes P_5$ avec $2n + q$ couleurs ensuite étendre cette b -coloration au graphe tout entier. Pour cela, soient x_i, y_j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 5$, les sommets de K_n et P_5 respectivement. On construit une $(2n + q)$ b -coloration du graphe $K_n \boxtimes P_5$ de la manière suivante:

1) Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $c(x_i, y_1) = i + n$ et $c(x_i, y_2) = i$.

$$2) c(x_i, y_3) = \begin{cases} 2n + i, & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ n + i - q, & \text{si } q + 1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

$$3) c(x_i, y_4) = \begin{cases} 2n - q + i, & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ i - q, & \text{si } q + 1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

4) $c(x_i, y_5) = n - q + i$, pour tout i , $1 \leq i \leq n$. On peut maintenant étendre cette b -coloration au graphe $K_n \boxtimes P_m$ avec $2n + q$ couleurs en faisant des copies deux dernières colonnes. Les sommets b -dominants sont les sommets de la deuxième et troisième copie de K_n et l'ensemble des sommets (x_i, y_4) , avec $1 \leq i \leq q$. \square

4.3 La b -continuité de quelques classes de graphes

Dans [13] T. Faik a montré que le problème de savoir si un graphe est b -continu est NP -complet. Il est donc intéressant de caractériser des classes de graphes qui sont b -continus.

Dans la première partie de cette section, nous donnons un rappel sur les définitions et les résultats existants concernant la b -continuité de quelques classes de graphes.

Dans la deuxième partie, nous montrons la b -continuité des graphes sans P_4 et nous présentons une autre preuve de la b -continuité des arbres .

Définition 4.36. *Un graphe est dit triangulé s'il ne contient pas de cycles sans cordes de longueur supérieur ou égal à 4.*

Dans [13] et [14] T. Faik et Jean-François Saclé ont montré la b -continuité de l'hypercube, des graphes 3-réguliers avec quelques exceptions et des graphes triangulés.

Théorème 4.37. [14] [13] *Pour tout n , $n \neq 3$, l'hypercube de dimension n est b -continu.*

Proposition 4.38. [14] [13] *Le graphe $\overline{C_{10}}$ n'est pas b -continu.*

Où $\overline{C_{10}}$ est le graphe représenté dans la figure (4.18) .

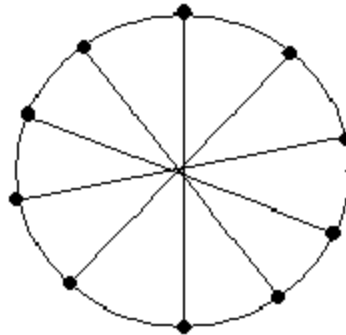


FIGURE 4.18. Le graphe $\overline{C_{10}}$

Théorème 4.39. [14] [13] *A l'exception du cube et du graphe $\overline{C_{10}}$, les graphes 3-réguliers sont b -continus.*

Théorème 4.40. [14] [13] *Les graphes triangulés sont b -continus.*

On rappelle aussi que dans [26] J. Kara J. Kratochvil ont présenté une autre preuve de la b -continuité des graphes triangulés et ils ont montré la b -continuité de quelques graphes planaires.

Nous donnons maintenant nos résultats concernant la b -continuité des graphes sans P_4 , et les arbres

4.3.1 La b -continuité des graphes sans P_4

Dans [5] M. Blidia et N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray ont montré que le nombre b -chromatique des graphes sans P_4 peut être calculé en temps polynomial. Nous montrons la b -continuité des graphes sans P_4 en construisant une $(k - 1)$ b -coloration à partir d'une (k) b -coloration, avec k strictement supérieur au nombre chromatique. Tout d'abord on rappelle le résultat de Seinche [30]:

Théorème 4.41. [30] *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) G est sans P_4 .

(ii) Pour tout ensemble A de V tel que $|A| \geq 2$, ou bien $G[A]$ ou bien son complémentaire est non connexe.

Théorème 4.42. *Si G est un graphe sans P_4 alors G est b -continus.*

Preuve. Soit G un graphe sans P_4 d'ordre n . On montre par induction sur n que G est b -continus. Il est clair que, si $n = 1, 2, 3, 4$ alors G est b -continus. Supposons par hypothèse d'induction que pour tout sous graphe H de G , H admet une (p) b -coloration pour tout $\chi(H) < p < b(H)$. Soit c une (k) b -coloration de G avec $\chi(G) < k < b(G)$, comme G est sans P_4 , et d'après le théorème de seinche on distingue deux cas:

Cas 1: Si \overline{G} est non connexe alors G est le joint de deux graphes G_1 et G_2 dans ce cas

$\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Dans la coloration c , aucune couleur ne peut être dans G_1 et G_2 à la fois, donc k_i couleurs sont utilisées pour colorer les sommets de G_i , pour $i = 1, 2$ avec $k = k_1 + k_2$. La restriction de la coloration c à G_i est une coloration dominante dans G_i pour $i = 1, 2$, sinon, il existe dans G_i au moins une couleur c_i qui n'admet aucun sommet b -dominant, donc la couleur c_i n'a aucun sommet b -dominant dans dans la coloration de G , contradiction. Puisque $k > \chi(G)$ on a au moins $k_i > \chi(G_i)$ pour $i = 1, 2$. Sans perte de généralité on suppose $k_1 > \chi(G_1)$ et par hypothèse d'induction G_1 admet une $(k_1 - 1)$ b -coloration. Les $k_1 - 1$ couleurs qui sont dans G_1 avec les k_2 couleurs qui sont dans G_2 forment une $(k - 1)$ b -coloration de G .

Cas 2: Si G est non connexe alors G est la réunion de deux graphes G_1 et G_2 . Dans ce cas, $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$, et $b(G) \geq \max\{b(G_1), b(G_2)\}$. On distingue deux cas:

Cas 2.1: Si $k \leq \max\{b(G_1), b(G_2)\}$ alors deux cas se présentent:

Cas 2.1.1: Si $k \leq b(G_i)$ pour $i = 1, 2$ alors comme $k > \chi(G_1)$ et $k > \chi(G_2)$, et par hypothèse d'induction G_i admet une coloration dominante avec k couleurs pour tout $i = 1, 2$. On fait une recoloration de G_i pour avoir une (k) b -coloration dans G_i pour $i = 1, 2$. Donc G_i admet une $(k - 1)$ b -coloration pour $i = 1, 2$. D'où le graphe G admet une $(k - 1)$ b -coloration.

Cas 2.1.2: Si k est supérieur ou égal à l'un des $b(G_i)$, $i = 1, 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b(G_1) < k < b(G_2)$. Donc, dans G_1 il n'existe aucune (k) b -coloration, sinon on a une contradiction avec la définition de $b(G_1)$ d'où, il existe au moins une couleur i qui n'admet aucun sommet b -dominant. Nous recolorons les sommets qui sont déjà colorés par i par une couleur manquante dans leur voisinage. D'après l'hypothèse d'induction G_2 admet une (k) b -coloration donc il admet une $(k - 1)$ b -coloration avec les couleurs $\{1, 2, \dots, k\} \setminus i$. La $(k - 1)$ b -coloration de G_2 peut être étendu en une $(k - 1)$ b -coloration dans G .

Cas 2.2: Si $k > \max\{b(G_1), b(G_2)\}$, alors pour $i = 1, 2$, G_i contient au moins une couleurs c_i qui n'est pas b -dominante, sinon si pour $i = 1, 2$ G_i contient des sommets b -dominants pour tous les k couleurs alors, $b(G_i) \geq k$ contradiction. Nous recolorons les sommets de

G par les k couleurs moins la couleur c_2 de la manière suivante:

1— Nous recolorons chaque sommets de G_2 qui est coloré par la couleur c_2 par une couleur qui n'existe pas dans son voisinage, et de même pour les sommets de G_1 qui sont colorés par c_2 et qui ne sont pas b -dominants on les donne une couleur manquante dans leurs voisinages.

2— Soit v un sommet de G_1 qui est b -dominant et de couleur c_2 , puisque la couleur c_1 n'est pas b -dominante donc dans le voisinage de v il existe au moins un sommets y de couleurs c_1 où y n'est pas un sommet b -dominant, donc il existe au moins une couleurs j telle que y n'est adjacent à aucun sommet de couleur j . Nous recolorons y par la couleur j , ensuite nous assignons la couleur c_1 au sommet v . Donc on obtient une $(k - 1)$ b -coloration de G . □

4.3.3 La b -continuité des arbres

T. Faik et al. [14] ont montré que les arbres sont b -continus. Dans ce paragraphe, on donne une autre démonstration de la b -continuité des arbres en construisons une $(k - 1)$ b -coloration de l'arbre T a partir d'une (k) b -coloration, avec $\chi(T) < k < b(T)$. Nous rappelons tout d'abord le résultat de Berge suivant:

Théorème 4.43. [3] *Un arbre d'ordre $n \geq 2$ admet au moins deux sommets pendants.*

On utilise ce résultat pour montrer la b -continuité des arbres.

Théorème 4.44. *Les arbres sont b -continus.*

Preuve. Soient $T = (V, E)$ un arbre et c une (k) b -coloration de T avec $k \geq 3$. On montre qu'on peut réduire la coloration c en une coloration c' qui utilise seulement $(k - 1)$ couleurs. Soit v un sommet pendent de T . Puisque $k \geq 3$ alors v n'est pas un sommet b -dominant. On supprime le sommet v du graphe. Le graphe obtenu est un arbre; s'ils existent encore des sommets b -dominants pour tout les k couleurs, on continue à supprimer un sommet pendent à chaque étape jusqu'à où une couleur perdre tous ses sommets b -dominants. Supposons que le dernier sommet supprimé v est coloré par 1 et l'arbre obtenu T' . Soit u le voisin de v dans T' , supposons que u est coloré par k . Il est clair que u est le seule sommet b -dominant de couleur k dans le sous graphe induit par

$V(T') \cup \{v\}$, et v est le seul sommet de couleur 1 dans le voisinage de u . Colorons u par 1, et comme les autres sommets de T' colorés par k ne sont pas des sommets b -dominants alors nous pouvons colorer chaque sommet par une couleur qui n'existe pas dans son voisinage. On obtient dans T' une $(k - 1)$ b -coloration; ainsi les sommets b -dominants de la coloration c restent des sommets b -dominants après la recoloration. On peut étendre cette coloration à T en ajoutant les sommets supprimés un par un, et à chaque fois nous colorons le sommet ajouté par une couleur de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ et qui n'existe pas dans son voisinage. \square

CHAPITRE 5

LES GRAPHES $b\partial\Gamma$ –PARFAITS

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les graphes pour lesquels $b(H) = \partial\Gamma(H)$ pour tout sous graphe H induit de G où $\partial\Gamma(H)$ désigne le nombre partiel de *Grundy* qu'on va le définir par la suite. En général, pour un graphe G quelconque on a $b(G) \leq \partial\Gamma(G)$. Par exemple, $\partial\Gamma(P_4) = 3 > b(P_4) = 2$, $\partial\Gamma(P_3 + P_2) = 3 > b(P_3 + P_2) = 2$, où P_4 et $P_3 + P_2$ désignent respectivement, une chaîne d'ordre 4 et l'union de P_3 et P_2 . Donc il est intéressant de caractériser les graphes pour lesquels $b(H) = \partial\Gamma(H)$ pour tout sous graphe H induit de G .

Dans ce chapitre, on détermine une borne supérieure pour le nombre b –chromatique ensuite on caractérise les graphes $b\partial\Gamma$ –parfaits. Ce travail est motivé par les résultats encourageants de Hoàng et Kouider [17], et de M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray [5]

5.1 Définitions et notations

Dans ce paragraphe, nous donnons un rappel sur les définitions nécessaires qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre

Définition 5.1. *On appelle joint de deux graphes G et H , noté $G \vee H$, le graphe obtenu en prenant une copie de G et une copie de H et on ajoutant toutes les arêtes entre les sommets de G et les sommets de H .*

Définition 5.2. *Un graphe G est dit sans H , si G ne contient pas de H comme sous-graphe induit.*

Définition 5.3. *Un graphe G est dit P_4 –sparse, si tout sous-graphe à 5 sommets de G contient au plus un P_4*

Définition 5.4. *Dans une k –coloration d'un graphe G un sommet v , coloré par une*

couleur i , $1 \leq i \leq k$, est appelé sommet de Grundy s'il est adjacent à au moins $i - 1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i - 1$.

Définition 5.5. Une k -coloration partielle de Grundy est une coloration propre telle que toute classe de couleur S_i , $1 \leq i \leq k$, contient au moins un sommet de Grundy. Le nombre partiel de Grundy d'un graphe G , noté $\partial\Gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration partielle de Grundy de G , pris sur toute les colorations partielles de Grundy de G .

Définition 5.6. Une coloration de Grundy de G est une coloration propre telle que chaque sommet de G est un sommet de Grundy. Le nombre de Grundy d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G , pris sur toute les colorations de Grundy de G .

Définition 5.7. Pour deux nombres distincts λ et μ de $\{\omega, \chi, b, \gamma, \partial\Gamma\}$, un graphe G est dit $\lambda\mu$ -parfait si et seulement si $\lambda(H) = \mu(H)$ pour tout sous graphe H induit de G .

Par exemple, un graphe G est dit $b\partial\Gamma$ -parfait si et seulement si $b(H) = \partial\Gamma(H)$ pour tout sous graphe H induit de G .

Dans ce qui suit on donne un rappel sur les résultats de Hoàng et Kouider [17] concernant les graphes $b\chi$ -parfaits, et les résultats de M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray [5] concernant les graphes $b\gamma$ -parfaits.

5.2 Les graphes $b\chi$ -parfaits

La notion des graphes $b\chi$ -parfaits a été introduite par Hoàng et Kouider [17] et a fait l'objet d'un article publié par les mêmes auteurs dont lequel ils ont caractérisé les graphes bipartis $b\chi$ -parfaits.

Théorème 5.8. [17] Soit G un graphe biparti. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. G est $b\chi$ -parfait
2. G ne contient pas de chaîne P_5 induite, ne contient pas trois copies distinctes de P_3 et ne contient pas un $P_4 + P_3$ induit.

Les mêmes auteurs ont également montré que si un graphe G ne contient pas deux graphes induits isomorphes à K_2 et ne contient pas le complémentaire d'une chaîne P_5 comme sous graphe induit alors G est $b\chi$ -parfait. Ils ont aussi caractérisé les graphes P_4 -sparse $b\chi$ -parfaits.

Théorème 5.9. [17] *Soit G un graphe P_4 -sparse. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. G est $b\chi$ -parfait
2. G est sans $2D$, sans $3P_3$ et sans $(P_4 + P_3)$.

Nous rappelons aussi deux autres résultats importants établis par C. A. Christen et Stanley M. Selkow [9] et S. Klein, M. Kouider [22] dont lesquels ils ont caractérisé les graphes $\gamma\omega$ -parfaits et les graphes $b\omega$ -parfaits respectivement.

Théorème 5.10. [9] *Pour tout graphe G , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) G est $\gamma\omega$ -parfait.
- (ii) G est $\gamma\chi$ -parfait.
- (iii) G ne contient pas un sous graphe induit isomorphe à une chaîne d'ordre 4.

Théorème 5.11. [22] *Soit G un graphe sans P_4 alors, on a l'équivalence suivante:*

- (i) $b(H) = \omega(H)$, pour tout sous graphe induit H de G
- (ii) G est sans $2D$ et sans $3P_3$.

5.3 les graphes $b\gamma$ -parfaits

La classe des graphes $b\gamma$ -parfaits a été introduite récemment par M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray [5].

Théorème 5.12. [5] *Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

- i) G est $b\gamma$ -parfait
- ii) G est sans P_4 , sans $3P_3$ et sans $2D$.

Les même auteurs ont déduit une caractérisation des graphes $b\psi$ -parfaits.

Définition 5.13. Une a -coloration (ou coloration complète) est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs distinctes i et j , il existe deux sommets adjacents de couleur i et j . Le nombre a -chromatique, noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a -coloration.

Dans [9], C.A. Christen et S.M. Selkow ont caractérisé les graphes $\psi\chi$ -parfaits.

Théorème 5.14. [9] Pour tout graphe G , les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) G est $\psi\chi$ -parfait
- ii) G ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à l'un des graphes suivant: $P_4, P_3 + P_2$ et $3P_2$.

Dans [5], les auteurs ont utilisé les théorèmes 5.12 et 5.14, pour déduire le corollaire suivant:

Corollaire 5.15. Soit G un graphe, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:

- i) G est $b\psi$ -parfait
- ii) G est sans P_4 , sans $3P_2$ et sans $P_3 + P_2$
- iii) G est $\psi\chi$ -parfait

Dans cette partie tout d'abord on donne une borne supérieure pour le nombre b -chromatique, enfin on caractérise les graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits

5.4 Borne supérieure du nombre b -chromatique

Nous montrons dans cette section que, le nombre partiel de Grundy est une borne supérieure du nombre b -chromatique.

Proposition 5.16. [2] Pour tout graphe $G = (V, E)$ on a $b(G) \leq \partial\Gamma(G)$.

Preuve. Soient c une b -coloration de G , et S_i $1 \leq i \leq b(G)$ les classes de couleurs de c . Dans le graphe G toute classe de couleur S_i contient au moins un sommet b -dominant x_i , ce sommet a des voisins dans chaque classe de couleur S_j pour tout $j < i$ donc x_i est un sommet de Grundy, ceci implique que c est une coloration partiel de Grundy avec $b(G)$ -couleurs, et d'après la définition de $\partial\Gamma(G)$ on obtient $b(G) \leq \partial\Gamma(G)$. \square

5.5 Les graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits

Dans cette section on introduit une nouvelle classe de graphes, dite $b\partial\Gamma$ -parfaits. Avant de donner notre résultat, on a besoin de rappeler les résultats suivants.

Dans [17], C.T. Hoàng et M. Kouider ont donné les résultats suivants:

Lemme 5.17. [17] *Etant donné un entier $k \geq 1$, soient G_1 et K_k deux graphes de sommets disjoints où K_k est une clique d'ordre k , et soit $G = G_1 + K_k$. Alors $b(G) = \max(b(G_1), k)$.*

Lemme 5.18. [17] *Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints. Alors le joint $G_1 \vee G_2$ a $b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2)$.*

Nous établissons les lemmes suivants qui nous seront utiles pour la caractérisation des graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits

Lemme 5.19. [2] *Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints. Alors*

$$\partial\Gamma(G_1 \vee G_2) = \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2) .$$

Preuve. Dans toute coloration de $G_1 \vee G_2$, aucune couleur ne peut apparaître dans G_1 et G_2 à la fois. Donc $\partial\Gamma(G_1 \vee G_2) \geq \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$. Si dans une coloration partielle de Grundy de $G_1 \vee G_2$, $\partial\Gamma(G_1 \vee G_2) > \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$ alors, on aura plus de $\partial\Gamma(G_1)$ couleurs (ou $\partial\Gamma(G_2)$ couleurs) qui se présentent dans une coloration partielle Grundy de G_1 (ou G_2), contradiction avec la définition de $\partial\Gamma(G_1)$ (ou $\partial\Gamma(G_2)$) \square

Lemme 5.20. [2] *Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints, et soit $G = G_1 + G_2$.*

Alors on a

$$(i) \quad \partial\Gamma(G) \geq \max \{ \partial\Gamma(G_1), \partial\Gamma(G_2) \}.$$

(ii) Si G_1 et G_2 sont deux cliques d'ordre k_1, k_2 respectivement alors, on a

$$\partial\Gamma(G) = \max \{ k_1, k_2 \}$$

Preuve. (i) Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints, et soit $G = G_1 + G_2$. Sans perte de généralité on suppose que $\max \{ \partial\Gamma(G_1), \partial\Gamma(G_2) \} = \partial\Gamma(G_1)$, il est clair que

$\partial\Gamma(G_2) \leq \partial\Gamma(G_1)$. Le graphe G admet une coloration partielle de Grundy avec $\partial\Gamma(G_1)$ couleurs, elle est donnée comme suit:

Nous colorons les sommets de G_1 avec les couleurs $1, 2, \dots, \partial\Gamma(G_1)$, ensuite nous colorons les sommets de G_2 avec les couleurs $1, 2, \dots, \partial\Gamma(G_2)$.

Comme $\partial\Gamma(G)$ est le nombre maximum de couleurs pris sur toutes les colorations partielles de Grundy de G on obtient $\partial\Gamma(G) \geq \partial\Gamma(G_1) = \max \{ \partial\Gamma(G_1), \partial\Gamma(G_2) \}$

(ii) Si G_1 et G_2 sont deux cliques d'ordre k_1, k_2 respectivement alors, on a d'après (i) $\partial\Gamma(G) \geq \max \{ k_1, k_2 \}$. Supposons que $\partial\Gamma(G) > \max \{ k_1, k_2 \}$, ceci implique que G_1 (ou G_2) contient au moins un sommet de degré supérieur à k_1 (ou à k_2) contradiction avec le fait que G_1 (ou G_2) est une clique d'ordre k_1 (ou k_2). \square

Définition 5.21. *Un graphe G est dit $b\partial\Gamma$ -imparfait minimal s'il n'est pas $b\partial\Gamma$ -parfait mais tout sous graphe propre de G est $b\partial\Gamma$ -parfait.*

Théorème 5.22. [2] *Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est $\partial\Gamma b$ -parfait.
- (ii) G est sans P_4 et sans $P_2 + P_3$.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) Il est clair que $b(P_4) = 2 < \partial\Gamma(P_4) = 3$, $b(P_2 + P_3) = 2 < \partial\Gamma(P_2 + P_3) = 3$. Si G est $\partial\Gamma b$ -parfait alors, il est sans P_4 et sans $P_2 + P_3$.

(ii) \Rightarrow (i) Soit G un graphe sans P_4 , sans $P_2 + P_3$ et supposons que G est $\partial\Gamma b$ -imparfait minimal. Comme G est sans P_4 alors d'après le théorème de Seincbe 4.41, on distingue deux cas:

Cas 1 : Si \bar{G} est non connexe alors G est le joint de deux graphes G_1 et G_2 . D'après les lemmes 5.18, et 5.19, on a $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$ et $\partial\Gamma(G_1 \vee G_2) = \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$. Puisque G_1 et G_2 sont $b\partial\Gamma$ -parfaits alors $\partial\Gamma(G) = b(G)$, contradiction avec le fait que G est $b\partial\Gamma$ -imparfait minimal

Cas 2 : Si G n'est pas connexe alors, il contient p composantes connexes G_1, G_2, \dots, G_p , $p \geq 2$. Si une composante connexe G_j contient P_3 alors chaque composante connexe G_i , $i = 1, 2, \dots, p$, $i \neq j$ contient un seul sommet sinon G contient $P_2 + P_3$. Ceci implique

que $\partial\Gamma(G) = \partial\Gamma(G_j)$ et comme G est b $\partial\Gamma$ -imparfait minimal alors on obtient $\partial\Gamma(G) = \partial\Gamma(G_j) = b(G_j) = b(G)$ contradiction avec le fait que G est $b\partial\Gamma$ -imparfait minimal. Donc toutes les composantes connexes G_1, G_2, \dots, G_p sont sans P_3 . Ceci implique que chaque composante connexe est une clique, d'après les lemmes 5.17, 5.20, on obtient $\partial\Gamma(G) = \max_{1 \leq i \leq p} \{\partial\Gamma(G_i)\} = \max_{1 \leq i \leq p} \{b(G_i)\} = b(G)$; contradiction. \square

CONCLUSION

Parmis les colorations et les paramètres de colorations connus, on s'intéresse principalement dans ce mémoire à la notion de la coloration dominante et le nombre b -chromatique.

Puisque la détermination du nombre b -chromatique d'un graphe G est un problème NP -complet pour un graphe quelconque, on est amené généralement à déterminer des bornes inférieures et supérieures qui l'encadre le mieux possible et à caractériser les graphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

Tout d'abord, nous avons donné une nouvelle borne supérieure pour ce paramètre en fonction de n , $\omega(G)$ et $\theta(G)$ et nous avons montré qu'elle est atteinte pour une famille de graphes. Ensuite, nous avons présenté une autre borne inférieure pour $b(G)$ en fonction de $\Delta(G)$ et t , dans le cas où G est sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$ et nous avons prouvé qu'il existe une famille de graphes pour lesquels cette borne est atteinte.

Nous avons étudié la b -coloration et la b -continuité du produit total de certains graphes particuliers. Dans un premier temps, nous avons donné une borne inférieure du nombre b -chromatique du produit total de deux graphes, ce résultat a nous permis de calculer la valeur exacte du produit total d'une étoile et une chaîne, d'une clique et une chaîne, d'une chaîne et un cycle, d'une clique et un cycle, de plusieurs chaînes et cycles et celui de deux chaînes. Dans un second temps, nous avons montré que ces graphes sont b -continus. Nous avons montré aussi que les graphes sans P_4 sont b -continus et nous avons présenté une nouvelle démonstration de la b -continuité des arbres.

Enfin, nous avons présenté une nouvelle borne supérieure pour le nombre b -chromatique d'un graphe G ensuite nous avons établi un théorème qui nous a permis de caractériser les graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits.

Comme perspectives, tout au long de ce mémoire, nous avons laissé des points non encore résolus. Dans ce paragraphe nous allons énumérer quelques-uns qui sont, à notre avis, les plus importants. Nous proposons de caractériser les graphes complémentaires des

graphes bipartis tels que le nombre b -chromatique égal à $\frac{2\omega+n}{3}$ et les graphes sans griffe dont $b(G) = \frac{\Delta}{2} + 1$.

RÉFÉRENCES

- [1] H. Ait Haddadène, M. Zamime. Etude sur la b -coloration et la b -continuité de certains graphes, communication acceptée pour le colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'08, USTT, Tiziouzhou.
- [2] H. Ait Haddadène, M. Zamime. Caractérisation des graphes $b\partial\Gamma$ -parfaits, communication acceptée pour le colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'08, USTT, Tiziouzhou.
- [3] C. Berge. Graphs, North Holland, 1985.
- [4] M. Blidia et N. Ikhlef Eschouf. Bornes sur le nombre b -chromatique d'un graphe, communication acceptée pour le colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'06, USTHB, Alger; soumis à RAIRO.
- [5] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray. Caractérisation des graphes $b\gamma$ -parfaits, communication acceptée pour le colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information, COSI'07, USTO, Oran.
- [6] M. Blidia, F. Maffray and Z. Zemir. On b -colorings in regular graphs, communication acceptée pour le colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information, COSI'07, USTO, Oran.
- [7] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 :194-197, (1941)
- [8] M. Chundovsky and P. D. Seymour. The structure of claw-free graphs, manuscrit 2004.
- [9] C.Christen, S. Selkow. Some Perfect Coloring Properties of Graphs. J. Combin. Theory Ser. B, 27:49-59,(1979) .

- [10] B. Effantin and H. Kheddouci. The b -chromatic number of some power graphs. *Discrete Math. Theor. Comput. Sc.* , 6: 45-54 (2003).
- [11] B. Effantin and H. Kheddouci. Exact values for b -chromatic number of a power complete k -ary tree. A paraître dans *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, (2003).
- [12] T. Faik. About the b -continuity of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 17: 151 – 156, 2004
- [13] T. Faik. La b -continuité des b -colorations: complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse d'université, université de PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY, 2005.
- [14] T. Faik. Jean-François Saclé. Some b continuous classes of graph. U.M.R. 86 – 23 B.R.L., Université paris -sud bât. 190 – 91405 Orsay Cedex. France.
- [15] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver. Polynomial algorithms for perfect graphs. In : *Topics on Perfect graphs* (Ann. Discrete Math. 21), ed. par C. Berge and V. Chvátal, pp. 325 – 356. Amsterdam, North-Holland, 1984.
- [16] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, *Port. Math.* 26 : 453 – 462, (1967).
- [17] C.T. Hoàng and M. Kouider. On the b -dominating coloring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 152:176 – 186, (2005).
- [18] F. Harary and S. Hedetniemi. The achromatic number of a graph. *J. Combin. Theory*, 8 : 154 – 161, (1970).
- [19] R. W. Irving and D. F. Manlove. The b -chromatic number of graphs. *Discrete Appl. Math.* 91: 127 – 141, (1999).
- [20] N. Ikhlef Eschouf. Contribution à l'étude de la b -coloration dans les graphes. Mémoire de Magister, université Saad Dahlab, Blida,(2007).

- [21] J. Kratochvíl, J. Kara and M. Voigt. *b*-continuity. Technical report, University Ilmenau, Fakultý for Mathematics and Natural Sciences, (2004).
- [22] S. Klein, M. Kouider. *b*-coloration and P_4 -free graphs, manuscript.
- [23] M. Kouider and M. Mahéo. Some bounds for the *b*-chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 256: 267 – 277, (2002).
- [24] M. Kouider and M. Zaker. Bounds for the *b*-chromatic number of some families of graphs. arXiv:math.Co/0506167 v1 9 Jun 2005.
- [25] J. Kratochvíl, Z. Tuza and M. Voigt. On the *b*-chromatic number of graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, 2573, 310 – 320, (2002).
- [26] J. Kàra J. Kratochvíl M. Voigt. *b*-continuity. June 21, 2004.
- [27] L. Lovasz. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 2: 253 – 267, (1972).
- [28] D. F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimisation problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998-27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.
- [29] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. *Ann. Math. Monthly*, 63: 175-177, (1956).
- [30] D. Seince. On a property of the class of *n*-colorable graphs, *J. Comb. Theory Ser. B* 16 (1974), 191-193.
- [31] Amine El Sahili and Mékkia Kouider. About *b*-colouring of regular graphs. Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.