

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université SAAD DAHLEB Blida
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique
Projet de fin d'étude



En vue de l'obtention du diplôme de Master Académique en Génie
Mécanique
Option : Energétique

Thème :

**Écoulements diphasiques : méthodes VOF et
Level Set appliquées à l'étude des instabilités de
Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz**

Présenté par :

MAIZIA Abdelkader

KOUIDRI Fethi

Soutenu le : 13/07/2021

Devant le jury composé de :

Grade, Nom &Prénom	Statut	Domiciliation
Dr. ALI BENYAHIA Brahim	Président	USD-Blida 1
Dr. GRINE Kada	Encadreur	USD-Blida 1
Dr. GUERGADJ Mohamed	Examineur	USD-Blida 1

Année universitaire 2020/2021

Remerciement

Nous tenons à remercier le bon Dieu (Allah) le tout Puissant de nous avoir attribué la faveur de réussir nos études.

Nous tenons à remercier vivement notre promoteur **Dr. Grine kada**, pour sa confiance et ses précieux Conseils, ainsi que sa disponibilité et encouragements qui nous ont poussé à donner le meilleur de nous-même tout au long de la Préparation de ce mémoire.

Que les membres de jury trouvent ici le témoignage de Notre reconnaissance pour avoir bien voulu juger notre travail.

A Ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin pour la réalisation de Ce travail.

Nous profitons de cette occasion pour remercier nos enseignants de département génie mécanique.

Dédicaces

Je souhaite dédier ce modeste travail, synonyme de concrétisation

De tous mes efforts fournis ces dernières Années :

A mes très chers parents ma raison de vivre, symbole de courage.

Et de sacrifice, Que dieu les gardes.

A mes chères Sœurs.

A mes frères Mohamed et Abderrahmane et Mouad et Mohamed amine et
Abdillah

A ma petite fleur Ranime

A toutes ma famille Kouidri

A tous mes collègues amine Kerrouche et Sami elmajarsi et amine lakhal.

Aux gens que j'aime.

F. Kouidri

Table des matières

Remerciement	
Dédicaces	
Sommaire	
Nomenclature	
Listes des figures	
Listes des tableaux	
Résumé	
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralité et Notions Fondamentales	
1-Introduction.....	4
2-Application.....	4
3-Classification	6
3-1-Selon la combinaison des phases	6
3-2-Selon la structure des interfaces	6
4-Les régimes d'écoulements diphasiques	8
4-1-Régimes d'écoulement dans la conduite verticale	9
4-2-Régimes d'écoulements dans les conduites horizontales	11
4-3-Transition entre les écoulements	13
5-Problématiques traités dans l'écoulements diphasiques	14
5-1- La cavitation	14
5-2-L'atomisation	14
5-3-Ecoulement à surface libre	14
5-4-l'ébullition	14
6-Notions fondamentales des écoulements diphasiques	15
6-1-Définition d'une phase	15
6-2- phénomènes de surface.....	15

7- Les force fondamentales d'un écoulement diphasique	18
8-les paramètres descriptifs des écoulements diphasiques.....	19
9-Nombres adimensionnels	22

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

1-Introduction	24
2-Motivation	24
3-Méthode de suivi et capteur d'interface	25
3-1-Méthode de suivi d'interface (Interface Tracking method).....	25
3-1-1-Méthode BIM (Boundary Integral Method).....	27
3-1-2-Méthode Front Tracking.....	27
3-2-Méthode de capteur d'interface (ou de suivi de volume) (Interface Capturing Method) :	29
3-2-1-Méthode volume de fluide (VOF).....	29
3-2-2-Formalisme de la méthode Level Set	34
3-2-2-1-Motivation et principe de base :	34
3-2-2-2-Résolution numérique de l'équation de transport	36
3-3-Couplage de la méthode Level Set/VOF 5CLSVOF)	43

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

1-Introduction	44
2-Approche phénoménologique de la notion d'instabilité.....	45
3-Types d'instabilités.....	46
4-Instabilité de Kelvin Helmholtz.....	48
4-1-Historique	48
4-2-Mise en perspectives	48
4-3-Développement d'équations de perturbation	49
4-4-Analyse en modes normaux	53
5-Instabilité de Rayleigh Taylor	56

5-1-Introduction	56
5-2-Phénoménologie	56
5-3-Principe de la machine d'Atwood	57
5-4-Modélisation de l'instabilité interfaciale.....	58
5-5-Relation de dispersion interfaciale	60

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

1-Introduction	63
2-Procédure de travail :.....	63
3-Effet de maillage sur les deux instabilités	64
4-Instabilité de Kelvin Helmholtz.....	65
4-1-Position de problème	65
4-2-Modèle et sa résolution.....	65
4-3-Simulation	67
4-4-Résultats et discussion	70
4-4-1-l'effet du vitesses et la longueur d'onde	70
4-4-2-Effet de différence de densité.....	72
4-4-3-Effet du Tension de surface	74
4-4-4-Etude comparative.....	76
5-Instabilité de Rayleigh Taylor	78
5-1-Proposition de problème	78
5-2-Génération de géométrie	78
5-3-Génération de maillage	79
5-4-Simulation	79
5-5-Résultat et Discussion	80
5-5-1-Effet de nombre d'Atwood	80
5-5-2-Effet de tension de surface	82
Conclusion générale	86

Bibliographie

Annexe

Nomenclature

A : air d'une région d'espèce

g : accélération gravitationnelle

h : pas de temps

L : longueur

P : pression

t : temps

U : vitesse

ρ : masse volumique

μ : viscosité dynamique

ν : viscosité cinématique

α : fraction volumique

i, j : indice de position

κ : courbure moyenne de surface

n : vecteur normale

R : rayon

Φ : potentiel de vitesse

k : nombre d'onde

η : l'amplitude originale du déplacement d'interface

c : vitesse d'onde complexe

$\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2$: fonction d'amplitude

A, B, C, D : constants d'intégration

Nombres adimensionnels

Eo : Nombre d'Eötvös

Fr : nombre de Froude

Eu : nombre d'Euler

Mo : nombre de Morton

Re : nombre de Reynol

Liste des figures

Figure I.1 Schéma des différents domaines industriels et naturels des écoulements diphasiques.....	5
Figure I.2 Ecoulement à phase séparé	7
Figure I.3 Ecoulement à phase dispersé.....	7
Figure I.4 Ecoulement de transition.....	8
Figure I.5 Régimes d'écoulements dans une conduite verticale : a) écoulement à bulles dispersées, b) écoulements à poches (bulles de Taylor), c) (churn flow) écoulements pulsatile, d) écoulement annulaire, e) écoulement annulaire à gouttelettes.....	10
Figure I.6 Régimes d'écoulements dans une conduite horizontale : a) écoulement à bulles dispersées, b) écoulements à poches, c) écoulements stratifié, d) écoulement stratifié à vagues, e) écoulements à bouchons (slug flow), f) écoulement annulaire, g) écoulement à gouttelettes dispersées.....	12
Figure I.7 Processus de la coalescence de la bulle et fluctuation	13
Figure I.8 Représentation de l'interface	16
Figure I.9 Schématisation du travail d'adhésion	17
Figure I.10 Particule fluide sphérique.....	17
Figure I.11 Visualisation de vide.....	19
Figure II.1 principe de la méthode du suivi d'interface.....	25
Figure II.2 : (a) l'idée de base de la méthode Front Tracking. (b) volume de contrôle de la sub-grille. (c) volume de contrôle de maillage eulérien	28
Figure II.3 : construction de la hauteur locales dans un bloc 3x3 pour une cellule centrale	32
Figure II.4 : volume de contrôle Ω_C associé à la discrétisation de l'équation de transport de la fonction Level-Set en 2D.	36
Figure IV.1 : Représentation géométrique de KHI (a) cas 1. (b) cas 2	65
Figure IV.2 : Géométries des deux cas de KHI	65
Figure IV.3 : maillage des géométries (a) cas 1 (b) cas 2.....	66
Figure IV.4 : modèle ANSYS Fluent 2020 R1	68
Figure IV.5 : modèle COMSOL multiphasique.....	69
Figure IV.6 : simulation de KHI avec différentes vitesses par la méthode VOF (a) 5 m/set 0.5 m/s.....	70

Figure IV.7 : simulation de KHI avec différentes vitesses par la méthode LS (a) 5 m/set 0.5 m/s.....	71
Figure IV.8 : simulation de KHI avec $\rho_1=1.225 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.5542 \text{ kg/m}^3$ par la méthode VOF.....	72
Figure IV.9 : simulation de KHI avec $\rho_1=1.111 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.350 \text{ kg/m}^3$ par la méthode VOF.....	73
Figure IV.10 : simulation de KHI par la méthode LS (a) $\rho_1=1.225 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.5542$ kg/m^3	73
Figure IV .11 : simulation de KHI avec Tension de surface (a) $T_s=0.004\text{N/m}$ (b) $T_s=0.0035 \text{ N/m}$ par la méthode VOF	74
Figure IV .12 : simulation de KHI avec Tension de surface (a) $T_s=0.004\text{N/m}$ (b) $T_s=0.0035 \text{ N/m}$ par la méthode LS.....	75
Figure IV.13 : simulation de KH par la méthode CLSVOF (a) sans Tension de surface	77
Figure IV.14 : Représentation géométrique de RTI	78
Figure IV.15 : Géométrie de l'instabilité RT.....	78
Figure IV.16 : maillage d'instabilité RT.....	79
Figure IV.17 : cas 1 sans tension de surface (a) méthode VOF (b) méthode Level Set. 80	
Figure IV.18 : cas 1 sans tension de surface CLSVOF	80
Figure IV.19 : cas 2 sans tension de surface (a) méthode VOF (b) méthode Level Set. 81	
Figure IV.20 : cas 2 sans tension de surface CLSVOF	81
Figure IV.21 : cas 1 avec tension 0.15 N/m de surface (a) méthode VOF (b) méthode Level Set	82
Figure IV.22 : cas 1 avec tension 0.15 N/m de surface CLSVOF.....	83
Figure IV.23 : cas 2 avec tension de surface 0.15 N/m (a) méthode VOF (b) méthode Level Set	83
Figure IV.24 : cas 2 avec tension 0.15 N/m de surface CLSVOF.....	83
Figure IV.25 : cas 2 avec tension de surface 0.3 N/m (a) méthode VOF (b) méthode Level Set	83
Figure IV.26 : cas 2 avec tension de surface 0.3 N/m CLSVOF.....	83

Liste des tableaux

Tableau I.1 Les régimes d'écoulements dans un conduite horizontale et verticale dépend de la fraction volumique	9
Tableau IV.1 : dimensions des deux géométries	66
Tableau IV.2 : Paramètre physiques des fluides dans la simulation de Kelvin-Helmholtz	67
Tableau IV.3 : Etude comparative de méthode VOF et Level Set (LS)	76
Tableau IV.4 : Paramètre de simulation de Rayleigh-Taylor	79

Résumé

La plus grande partie des écoulements qui nous entourent sont des écoulements complexes multiphasique. L'étude, la description et la compréhension physique de ce type d'écoulement forment un sujet de recherche fondamentale en mécanique des fluides, dont les applications industrielles sont très nombreuses.

En générale on utilise la notion d'interface pour évoquer la surface de séparation qui existe entre deux phases. La simulation des écoulements diphasiques avec prise en compte dans la description des problèmes étudiés de l'interface entre les deux phases, peut être abordée suivant différentes approches.

Deux approches sont utilisées, à savoir les méthodes lagrangiennes ou suivi d'interface : méthode des marqueurs et maillage mobile ; et les méthodes eulériennes ou capture d'interface : méthode VOF (volume of fluid), méthode LS (Level Set), et méthode CLSVOF (combined LSVOF).

Dans ce travail les trois méthodes eulériennes précitées ont été utilisées pour simuler numériquement, grâce aux logiciels numériques ANSYS et COMSOL, les écoulements de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor. Le premier est dû à une instabilité de l'interface, entre fluides, causée par un cisaillement du champ de vitesse. Tandis que le second est dû à l'instabilité de l'interface causée par la gravité.

Mots clés : écoulements diphasique, interface, instabilités, VOF, Level Set, simulation.

Abstract

Most of the flows around us are complex multiphase flows. The study, description and physical understanding of this type of flow form a subject of fundamental research in fluid mechanics, whose industrial applications are very numerous.

In general, the notion of interface is used to refer to the separation surface that exists between two phases. The simulation of two-phase flows, taking into account in the description of the studied problems of the interface between the two phases, can be approached using different approaches.

Two approaches are used, namely the Lagrangian methods or interface tracking: method of markers and mobile mesh; and Eulerian methods or interface capture: VOF method (volume of fluid), LS method (Level Set), and CLSVOF method (combined LSVOF).

In this work the three aforementioned Eulerian methods were used to numerically simulate, thanks to the digital software ANSYS and COMSOL, the Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor flows. The first is due to an instability of the interface, between fluids, caused by a shear of the velocity field. While the second is due to interface instability caused by gravity.

Keywords : Two-phase flows, interface, instabilities, VOF, Level Set, simulation.

الملخص

معظم التدفقات من حولنا عبارة عن تدفقات متعددة الاطوار وذات طبيعة معقدة. تشكل دراسة هذا النوع من التدفقات تحديا وموضوعا أساسيا للبحث في ميكانيكا الموائع.

بشكل عام يتم استخدام مفهوم الوصلة او الفاصل البيني للإشارة الى مساحة الفصل الموجودة بين الطورين. يمكن التعامل مع محاكاة التدفقات ثنائية الطور باستخدام مناهج وطرق مختلفة، مع مراعاة المشكل المدروس للوصلة بين الطورين.

يتم استخدام طريقتين مختلفتين وهما: طريقة تتبع والصلة باستخدام طريقتي التعليم والتقسيم المتحرك. اما الطريقة الثانية فهي طريقة التقاط او تحديد الوصلة: باستخدام طرق: حجم المائع، مجموعة المستوي والطريقة المدمجة.

في هذا العمل تم استخدام طرق التقاط او تتبع الوصلة المذكورة أعلاه وذلك بفضل البرامج الرقمية لمحاكاة تدفقات رابلي_تايلور وكالفن_هولميلتز. يرجع سبب الأول الى عدم استقرار الفاصل البيني بين الطورين لوجود الجاذبية اما الثاني سببه عدم الاستقرار في الوصلة لنتائج عن اختلاف السرعة بين الطورين.

الكلمات المفتاحية: وصلة، محاكاة، حجم المائع، مجموعة المستوي، تدفق ثنائي الطور، عدم استقرار

Introduction

Générale

Introduction générale

Une phase est définie comme l'un des états de matière. Il peut s'agir d'un solide, liquide ou bien d'un gaz. L'écoulement polyphasique est l'écoulement simultané de plusieurs phases. L'étude des écoulements polyphasiques est très importante dans les industries et les applications liées à l'énergie. Le cas le plus simple d'écoulement polyphasique est l'écoulement diphasique. L'écoulement diphasique peut être un écoulement solide-liquide, liquide-liquide, gaz-solide et un écoulement gaz-liquide.

Les scientifiques sont intéressés aux différents outils pour mieux comprendre la dynamique des écoulements diphasiques et prédire le comportement des conceptions techniques. Du point de vue analytique, les écoulements diphasiques sont particulièrement difficiles à modéliser, car les équations gouvernantes sont non linéaires et la position d'interface doit être suivie. Par conséquent, les solutions analytiques sont limitées à des écoulements simples.

En outre, l'étude expérimentale est peu probable pour des nombreux écoulements diphasiques, en raison de l'échelle de longueur de modèle, de l'échelle de temps courte et du coût expérimentale. Bien que l'étude expérimentale et analytique ne sont pas toujours réalisable, la dynamique des fluides est la meilleure technique pour une exploitation en toute confiance des phénomènes diphasiques.

Deux approches différentes ont été développées pour modéliser et simuler les écoulements diphasiques. Les méthodes lagrangiennes utilisent un maillage mobile qui se déplace avec le fluide et suit automatiquement la surface libre, des exemples de ces approches ont été présentés par Hirt et Al (1994) et Hyman (1948).

La deuxième catégorie est l'approche eulérienne. Dans cette méthode les particules fluides sont marquées comme des marqueurs sans masse et sans volume. La particularité de ces méthodes est la considération de l'interface comme un champ scalaire, qui sera transporté par le champ de vitesse grâce à une équation de transport.

La méthode VOF (volume of fluide) (Hirt et Nichols, 1981) introduit une équation de continuité pour le volume de fluide. Dans les implémentations ultérieures, la diffusion numérique de l'interface est éliminée avec la reconstruction de l'interface à partir de la fraction volumique dans les cellules de calcul avec les éléments géométrique, il existe plusieurs techniques de reconstruction qui utilisent différents segments de reconstruction.

Introduction Générale

La méthode Level Set (Osher et Sethiane, 1988) utilise la fonction Level Set, qui est positive dans l'espace occupé par le premier fluide et négative dans l'espace de l'autre fluide). La fonction Level Set est définie comme la distance minimale à l'interface, la position de l'interface est définie avec la valeur zéro de la fonction Level Set. L'inconvénient de cette méthode est la non-conservation de la masse.

La possibilité de réduire les inconvénients des VOF et Level Set est de coupler les deux méthodes, cette méthode est nommée par CLSVOF (combined Level Set -Volume of Fluid).

Les trois méthodes eulériennes précitées (LS, VOF et CLSVOF) ont été utilisées pour simuler les phénomènes de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (RTI) et Kelvin-Helmholtz (KHI). Les instabilités hydrodynamiques, dans lesquelles s'inscrivent celle de KHI et RTI, occupent une place de choix en mécanique des fluides.

Les problèmes essentiels de l'instabilité hydrodynamique ont été identifiés et formulés au 19^{ème} siècle, notamment par Helmholtz, Kelvin, Rayleigh et Reynolds. Depuis Reynolds et Taylor on conçoit aisément que, par exemple la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement plus en plus turbulent vient de l'aspect instable de certaines classes de perturbations, soit infinitésimales, soit d'amplitudes finies. Notons très clairement que, la théorie des instabilités hydrodynamiques fait partie de chantiers techniques mis à la disposition du mécanicien des fluides pour étudier les transitions dans un grand variété des écoulements, soit en génie chimique, soit en génie mécanique, aérodynamique et dans l'étude des phénomènes naturels. La théorie classique de ces instabilités porte généralement sur les écoulements cisailés quasi parallèles ou parallèles.

Objet de travail :

L'objet principal de travail est d'étudier les phénomènes de l'instabilité de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz, en appliquant les méthodes VOF (volume of fluide), Level Set et CLSVOF (combined Level Set-volume of fluide), afin de faire une étude comparative entre ces méthodes de simulation.

Introduction Générale

Présentation du mémoire :

Le présent travail est constitué de quatre chapitres fondamentaux. Dans le premier chapitre, une brève présentation des caractéristiques des écoulements diphasiques et leurs différents types sont décrits. Les problématiques traitées dans ces écoulements sont mentionnées et les paramètres adimensionnels largement utilisés dans la simulation numérique est présentée.

Le second chapitre introduit les différentes méthodes des simulations des écoulements diphasiques, et est consacré à la méthode VOF, le formalisme de la méthode Level Set et la méthode CLSVOF.

Le troisième chapitre porte sur l'étude théorique des instabilités hydrodynamiques : de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Le quatrième chapitre est consacré à la simulation des deux instabilités par la méthode VOF, Level Set et CLSVOF, et l'analyse et l'interprétation des résultats des simulations.

Chapitre I

1-Introduction

Un écoulement diphasique est un écoulement simultané de deux fluides ayant des propriétés physiques différentes ou des phases différentes.

Dans un écoulements diphasique deux phases traversent un système, tel qu'un tube, simultanément. L'écoulement diphasique est rencontré dans beaucoup d'application d'ingénierie. C'est un sujet difficile principalement en raison de la complexité de la forme dans laquelle les fluides existent à l'intérieur du tube et connue sous le nom de régime d'écoulement. Dans ce type d'écoulement, la distribution ou la topologie géométrique des phases influencent sensiblement la quantité de mouvement, le taux de transfert d'énergie et de masse. L'étude de ce couplage complexe entre l'écoulement dans chaque phase et la géométrie d'écoulement, dans l'écoulement diphasique présente un défi important.

Ce sujet est devenu progressivement important et a besoin de compréhension afin de mener à des exploitations sûres et à une conception optimum.

2-Application

Les domaines industriels concernés par les écoulements diphasiques vont être brièvement présentés. Les motivations d'études sont assez différentes dans chaque branche et quelques éléments explicatifs sont alors apportés. Il y a manifestement des domaines où l'on produit délibérément des écoulements diphasiques, comme le génie chimique, où pour les besoins du procédé, deux phases sont mises en contact, un liquide et un gaz par exemple, afin de produire une nouvelle espèce à leur interface commune. Bien que la notion thermodynamique de phase soit relative, l'un des trois états courants de la matière, solide, liquide, gaz ; on continue, par extension, à considérer les écoulements liquide-liquide par exemple comme diphasique, car leurs méthodes de description sont analogues à celles des écoulements diphasiques (en énergétique on produit dans une chaudière de la vapeur en portant à l'ébullition le liquide, et l'écoulements diphasique est délibérément produit).[1]

En revanche, la cavitation dans les turbomachines est subie. Dans les aubages, l'accélération du fluide dépressurise le liquide qui peut alors dans certaines conditions changer de phase. L'apparition de vapeur s'accompagne souvent d'une chute des performances et d'autre manifestation comme le bruit et l'érosion du matériau de machine.

Chapitre I : Généralité et Notions Fondamentales

Le transport pneumatique des poudres est un autre exemple d'écoulement diphasique qui, avec l'exemple précédent, donnent une idée de la vaste diversité des situations rencontrées.[2]

La première situation met en œuvre l'écoulement d'un liquide et d'un gaz, la seconde deux liquides non-miscibles, la troisième d'un liquide et de sa vapeur et finalement d'un gaz et d'un solide.

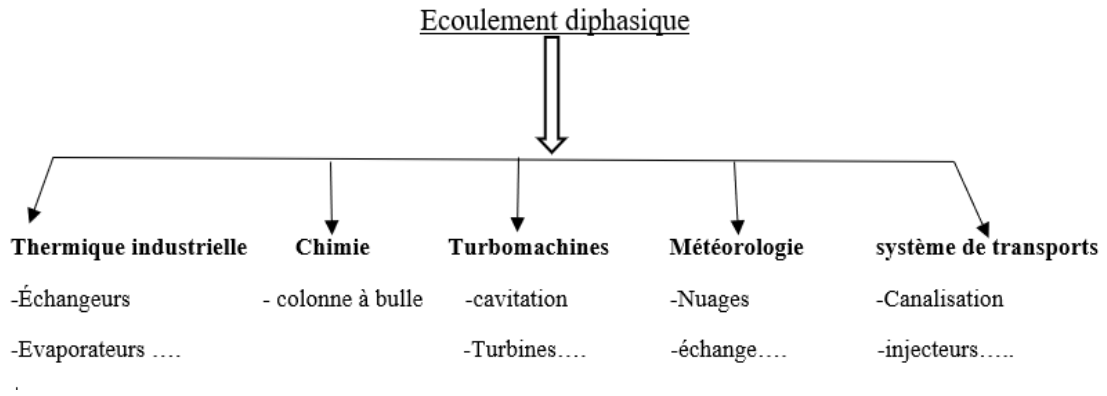


Figure I.1 Schéma des différents domaines industriels et naturels des écoulements diphasiques

3-Classification

Les écoulements diphasiques peuvent être classés selon les phases en présence (liquide, gaz, solide) ou selon la distribution des interfaces :

3-1-Selon la combinaison des phases :

Pour cette classification les combinaisons sont les suivantes :

*liquide-liquide : à condition que ces liquides soient non-miscible.

*liquide-solide : la phase solide est composée des grains comme c'est le cas pour les sédiments transporté dans les rivières.

*gaz-solide : on peut citer l'exemple des cendres volumiques s'échappant dans l'atmosphère ou encore le vent de sable

*Liquide-gaz : le gaz peut être d'une autre composition chimique ou de même matière que le liquide comme par exemple l'eau et le vapeur.

3-2-Selon la structure des interfaces

Un écoulement diphasique peut être classé selon la distribution géométrique des phases appelé " régime " ou " configuration " d'écoulement.

Différents régimes sont identifiés par inspection visuelle ou par analyse spectrales des fluctuations de la fraction volumique ou des pression instables.

1- A phases séparées :

Les fluides s'écoulent de façon stratifiée en deux couches continues dispersées selon leur densité et séparées par une interface plus ou moins perturbé. Un cas particulier est l'écoulement annulaire, composé de deux couches continues s'écoulant concentriquement

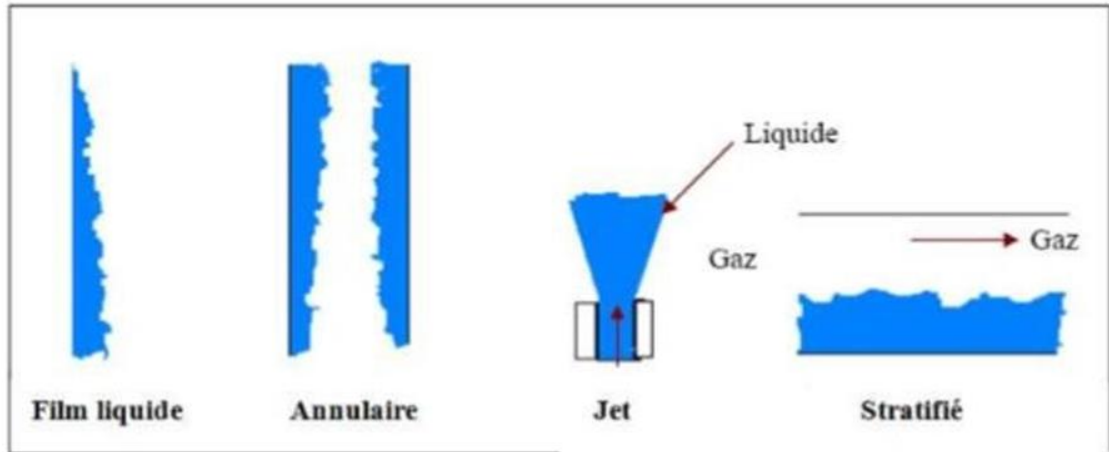


Figure I.2 Ecoulement à phase séparé [2]

2- A phases dispersées :

Un, ou deux fluides, est présent sous forme de gouttes dans toute ou une partie de la section de conduite, on distingue donc deux catégories :

- Régimes pleinement dispersés : les gouttes sont présentes dans toute la section de la conduite de façon plus ou moins homogène.
- Régime dispersé-stratifié : comprenant une zone dispersée plus ou moins dense et une ou deux couches continue. Dans certains cas, ces régimes dispersés peuvent aussi s'écouler de façons annulaires.

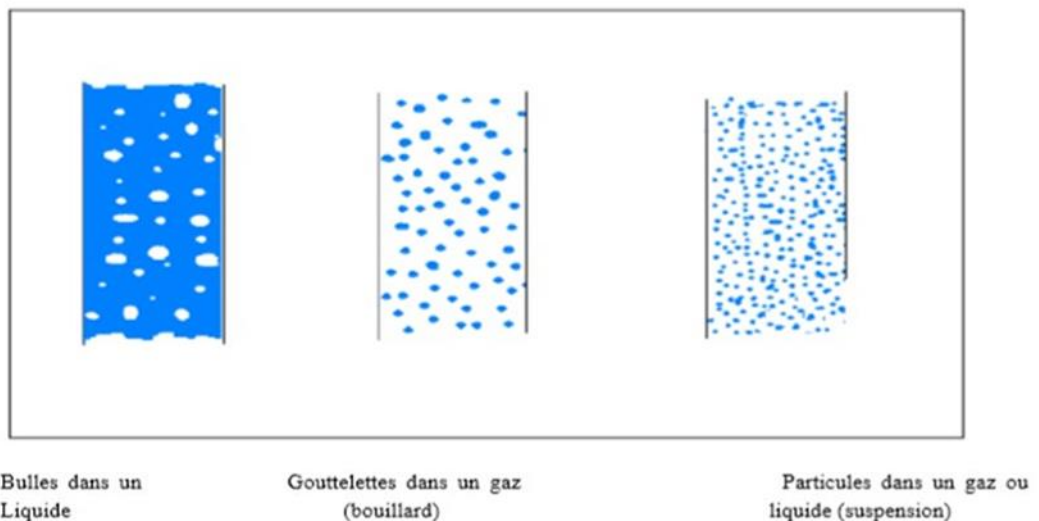


Figure I.3 Ecoulement à phase dispersé [2]

3- De transition :

Les phases s'écoulent sous la forme des grandes poches ou de bouchons. Ces régimes intermittents apparaissent en générale lorsque les différences des masses volumiques des fluides sont faibles.

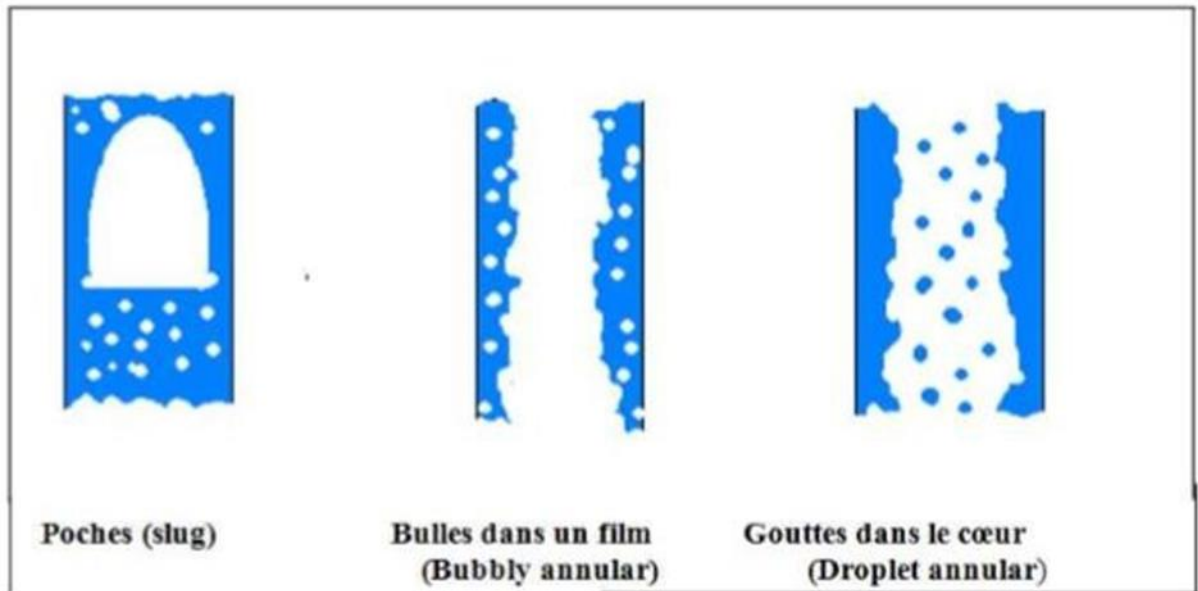


Figure I.4 Ecoulement de transition [2]

4-Les régimes d'écoulements diphasiques :

Les écoulements diphasiques gaz-liquide ou liquide-liquide peuvent apparaitre sous différentes configurations topologiques. Ces configurations sont basées sur la description de l'interface et sont appelées « régimes d'écoulement ».

Lors d'un écoulement diphasique gaz-liquide, l'interface entre les deux phases peut prendre plusieurs formes en fonction de la vitesse superficielle des deux phases, du débit volumique, de la fraction volumique (Tableau I.1), des propriétés physiques des phases et aussi de la géométrie de la conduite.

La différence principale entre les régimes d'écoulements diphasiques dans les conduites verticales ou horizontales est dû aux effets de la force de gravité.

Dans les conduites verticales, elle s'agit dans la même direction que la force d'inertie et la force visqueuse, tandis que dans la configuration horizontale la force de gravité agit dans une direction normale à l'axe du canal. Ceci a comme conséquence l'apparition de la stratification des deux phases.[2]


Fraction volumique du gaz	Écoulement horizontale	Écoulement verticale
<p>La fraction volumique de gaz $\alpha=0$</p>  <p>La fraction volumique de gaz $\alpha=1$</p>	à bulles (finely dispersed bubbly flow)	à bulles (finely dispersed bubbly flow)
	à poches (slug flow)	Disperse bubbly flow with near wall void fraction maximum
		Disperse bubbly flow with breakup & coalescence
	Stratifié (stratified flow with free surface (smooth, wavy..))	à poches (Taylor bubble)
		à forte coalescence (churn flow)
Annulair (annular/wall film flow)	Annulair (annular/wall film flow)	
Spray ou goutte (droplet flow)	Spray ou goutte (droplet flow)	

Tableau I.1 Les régimes d'écoulements dans un conduite horizontale et verticale dépend de la fraction volumique

4-1-Régimes d'écoulement dans la conduite verticale :

La terminologie utilisée dans la définition des régimes d'écoulements dépend de l'interprétation des expériences réalisées. La classification des régimes d'écoulements est valide seulement d'un point de vue qualitatif.[3]

1) Écoulement à bulles

La phase gazeuse de l'écoulement est répartie sous forme des bulles dispersées dans le liquide qui constitue la phase continue, les dimensions des bulles sont petites en comparaison avec le diamètre de conduite. Ce régime n'apparaît pas pour de faibles vitesses superficielles de gaz.

2) Écoulements à poches

En augmentant le débit du gaz, les bulles fusionnent pour donner lieu à des poches séparées par des bouchons de liquide des sections voisines et de celles de la conduite.

3) Écoulement annulaire

La phase liquide circule comme un film près de la paroi du tube avec ou sans bulles. Cette phase est aussi présente sous une forme dispersée, dans la phase gazeuse qui s'écoule dans le centre de tube.

4) Écoulement à forte coalescence :

L'écoulement à poche peut mener à des instabilités. Dans cette situation la forme du bouchon est très irrégulière, avec une interface instable et allongée.

5) Écoulement dispersé :

La phase liquide se présente comme des petites gouttes dispersées dans la phase gazeuse continue, le liquide mouille la paroi de la conduite. Généralement l'écoulement dispersé n'est pas obtenu pour les conditions adiabatiques, où même une petite quantité de liquide est généralement présente.

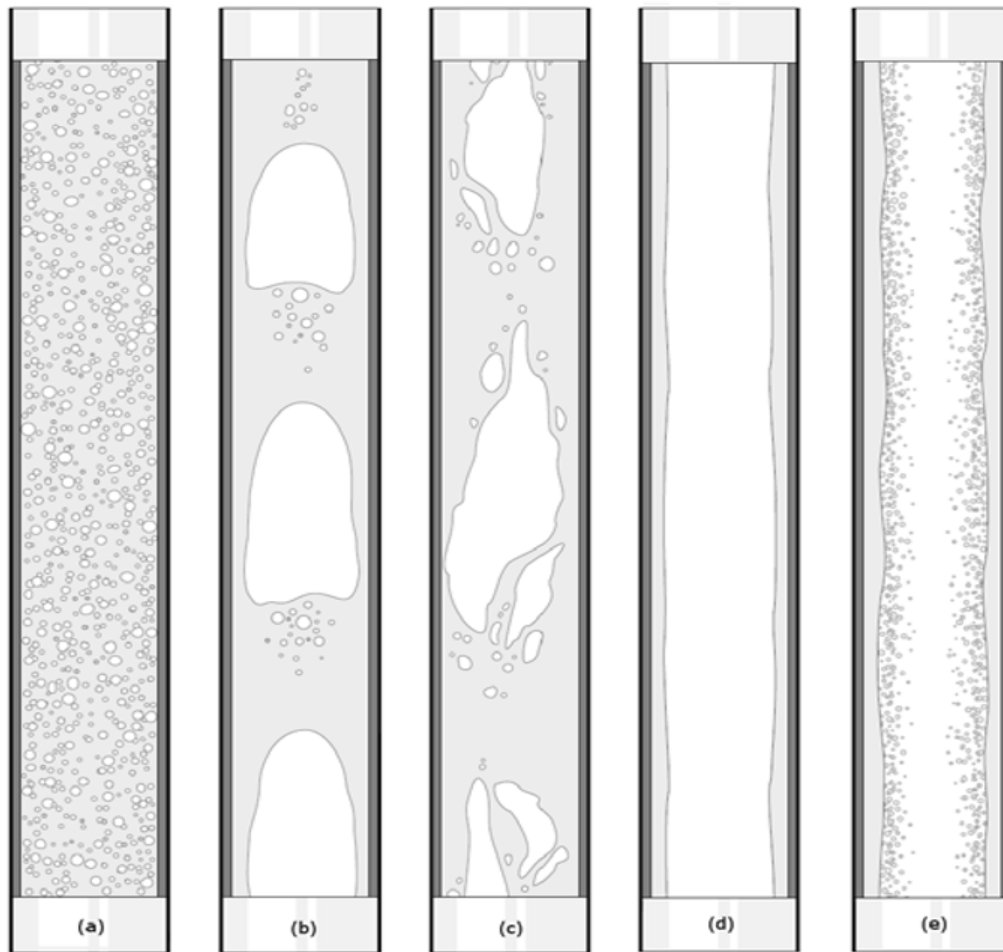


Figure I.5 Régimes d'écoulements dans une conduite verticale : a) écoulement à bulles dispersées, b) écoulements à poches (bulles de Taylor), c) (churn flow) écoulements pulsatile, d) écoulement annulaire, e) écoulement annulaire à gouttelettes

4-2-Régimes d'écoulements dans les conduites horizontales :

En ce qui concerne les tubes horizontaux, le nombre de configuration d'écoulement augmente, la gravité rompant la symétrie radiale.[3]

1) Ecoulements à bulles

Il s'agit tout comme dans le cas de l'écoulement verticale, de bulles dispersées dans la phase liquides ; cependant la gravité à tendance à rassembler les bulles au sommet de tube.

2) Ecoulement à poches

Cet écoulement, ainsi que l'écoulements à bouchons, est intermittent. Les bulles de gaz sont plus grosses tandis que les poches de liquide contiennent des nombreuses petites bulles.

3) Ecoulement à bouchons :

Cette configuration est caractérisée par des bulles en forme d'ogives comme pour les écoulements verticaux, cependant les bulles se déplacent dans la partie supérieure du tube.

4) Ecoulement stratifié :

Dans cette configuration, obtenue pour de faibles débits gazeux, le liquide s'écoule dans la partie inférieure du tube et le gaz dans la partie supérieure. L'interface est lisse.

5) Ecoulement à vagues

Une augmentation de la vitesse de la phase gazeuse provoque l'apparition de vagues à l'interface liquide-gaz.

6) Ecoulement annulaire

Cette configuration est identique à celle rencontrée pour les tubes verticaux. La gravité tend à rendre le film liquide plus épais dans la partie inférieure du tube, phénomène qui disparaît lorsque la vitesse du gaz augmente.

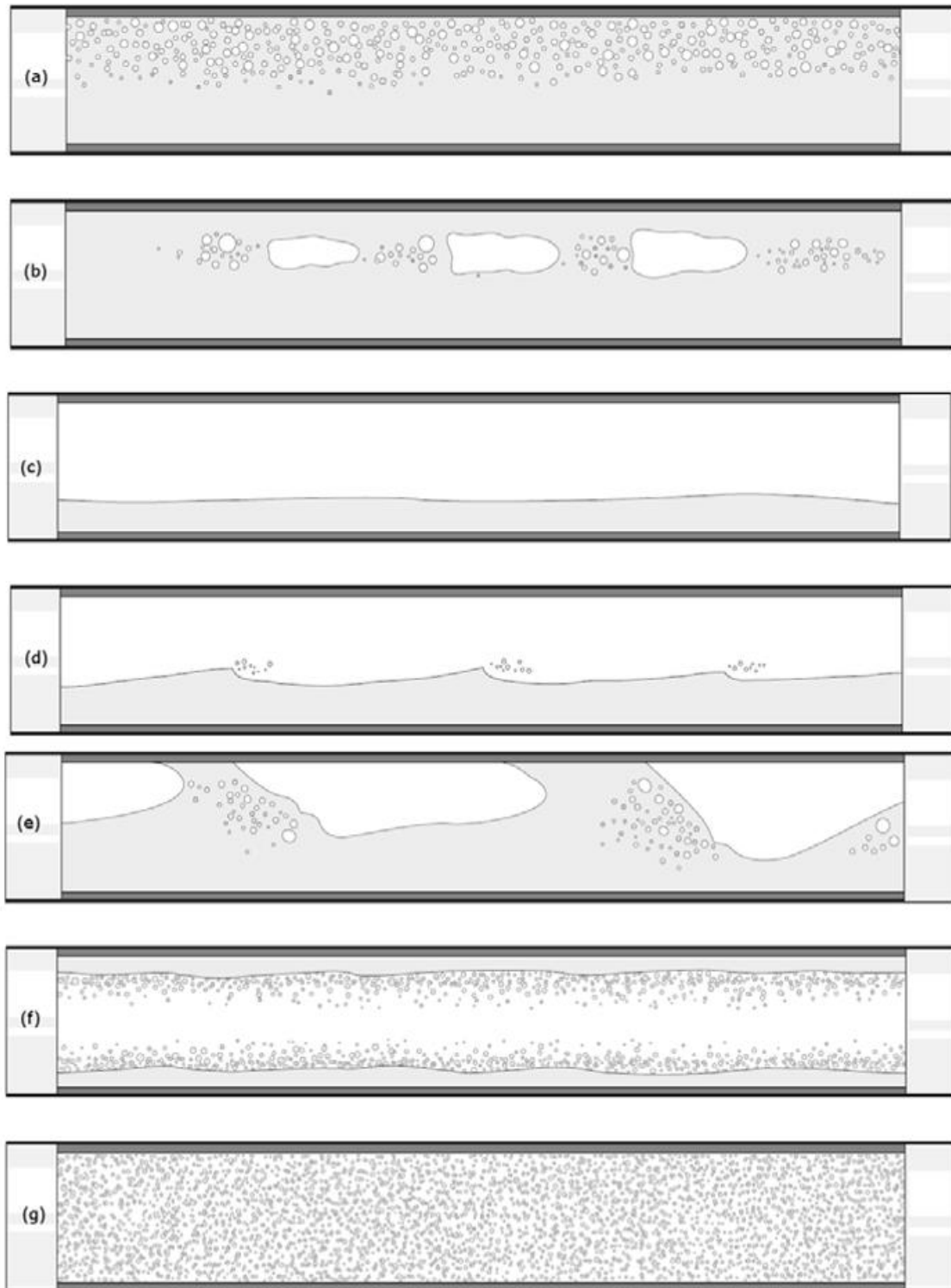


Figure I.6 Régimes d'écoulements dans une conduite horizontale : a) écoulement à bulles dispersées, b) écoulements à poches, c) écoulements stratifié, d) écoulement stratifié à vagues, e) écoulements à bouchons (slug flow), f) écoulement annulaire, g) écoulement à gouttelettes dispersées

4-3-Transition entre les écoulements :

La transition entre l'écoulement à bulles et l'écoulements à poches se produit à cause du processus de coalescence des bulles, mais les fluctuations dues à la turbulence augmentent avec le débit et conduisent à une forte probabilité de destruction des bulles. L'équilibre entre les deux processus définit les conditions de transition pour chaque débit et pression.

La transition vers l'écoulement annulaire est calculée en évaluant la vitesse minimale de la phase gazeuse capable de résister aux gouttelettes avec des dimensions admissibles maximales dans les conditions spécifiques. En fait, avec les valeurs faibles de la vitesse de la phase gazeuse, la coalescence des gouttes peut avoir lieu et conduit à un écoulement à forte coalescence-poches (Fig.I.7).[1]

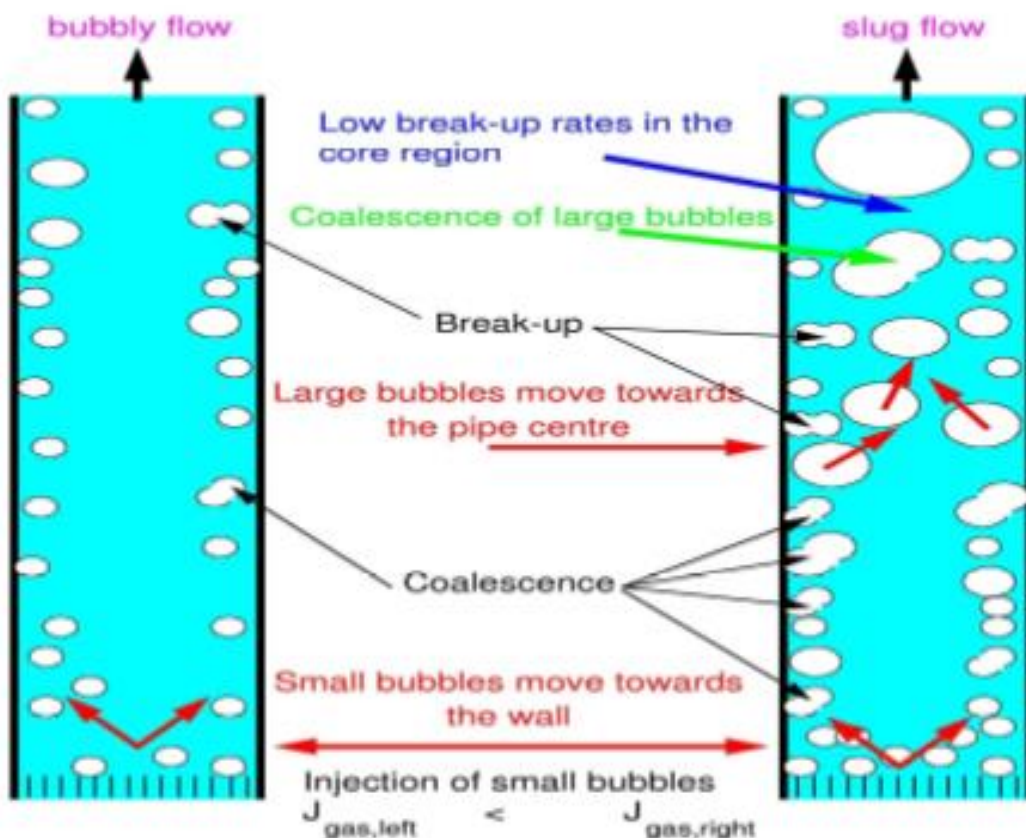


Figure I.7 Processus de la coalescence de la bulle et fluctuation [2]

5-Problématiques traités dans l'écoulements diphasiques

Les problématiques étudiés dans l'ingénierie qui présentent un aspect diphasique sont nombreuses et chacune d'elles a des applications industrielles diverses.

5-1- La cavitation

La cavitation est le phénomène de vaporisation des liquides soumis à de fortes dépressions qui sont généralement dues à l'augmentation de leur vitesse d'écoulement. Elle se produit le plus souvent dans les machines hydrauliques telles que les hélices de bateau, les indicateurs, ou encore les venturis. Les conséquences de la cavitation sont en générale néfastes. Elle est à l'origine de l'érosion des hélices et des aubes de turbines. Elle génère du bruit et provoque des chutes des performances.

5-2-L'atomisation :

L'atomisation (spray en anglais) est l'écoulement d'un liquide en petites gouttelettes à l'aide d'un dispositif d'injection. On trouve ces procédés dans les aérosols ou encore l'injection de carburant dans les cylindres afin d'améliorer le taux de combustion du carburant.

5-3-Ecoulement à surface libre

La caractéristique commune de ces écoulements est l'existence d'une interface liquide gaz. Plusieurs phénomènes sont liés à cette interface comme l'échange de masse et de chaleur et les interactions dynamiques entre les deux phases. Un exemple d'application est la prédiction de la hauteur des vagues suivant la vitesse du vent.

5-4-l'ébullition :

Cette problématique englobe les phénomènes d'équilibre liquide-gaz, d'évaporation et de dégazage et de nucléation (la nucléation est le procédé de formation des bulles de gaz dans le liquide).

6-Notions fondamentales des écoulements diphasiques

On donne une description de quelques notions fondamentales des écoulements diphasiques

6-1-Définition d'une phase

Une phase est une définition thermodynamique de l'état de la matière, qui peut être solide, liquide ou gaz. Dans la terminologie générale, une phase est continue si elle occupe continuellement les régions connectées de l'espace et elle est dispersée si elle occupe des régions déconnectées. La phase continue peut-être gazeuse ou liquide. La phase dispersée est formée de particules, la particule peut être fluide ou solide. Les particules fluides formées par une phase gazeuse sont appelées bulles ; alors qu'on ne parle de gouttes que si les particules fluides sont formées par une phase liquide.[3]

6-2- phénomènes de surface

L'interface est une zone de faible épaisseur, où les grandeurs physiques subissent une discontinuité ou saut. A l'échelle moléculaire, une interface liquide-gaz correspond à une zone de transition où la densité passe progressivement d'une valeur moyenne dans le liquide à une valeur moyenne dans le gaz. La taille de la zone de transition est de l'ordre de quelques libre parcours moyen des molécules. En générale, on utilise la notion d'interface pour évoquer la surface de séparation qui existe entre deux phases (au sens thermodynamique du terme). L'interface a alors pour origine la discontinuité des forces intermoléculaires entre les deux phases. Ce saut de densité, qui est présent aussi près des bulles d'air et des gouttelettes d'eau, présente un défi de stabilité numérique, lors de la résolution des équations de l'écoulement due à la présence de la densité dans plusieurs termes des équations de Navier-Stokes.[4]

En effet, les phénomènes physiques intervenant dans cette zone doivent être bien connus, pour prédire correctement les conditions de saut de la vitesse de propagation de l'interface.

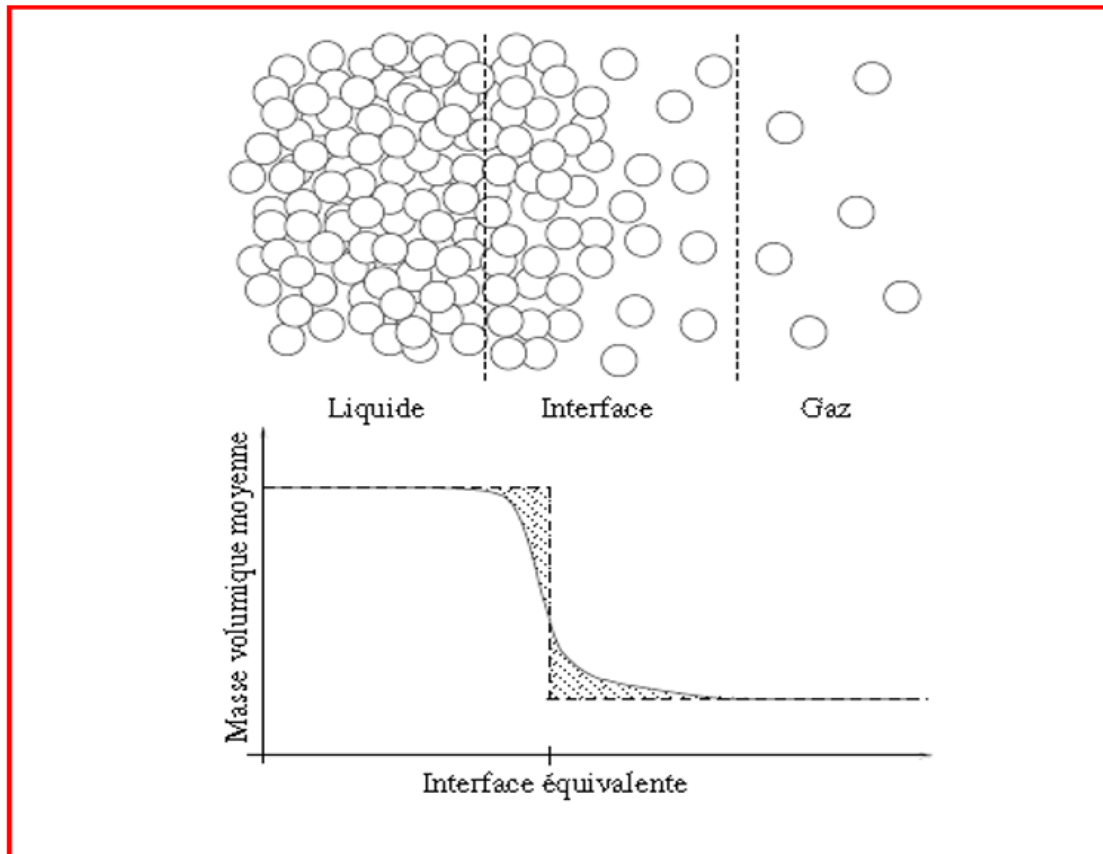


Figure I.8 Représentation de l'interface [2]

6-2-1-Tension interfaciale :

Interface fluide/fluide

L'interface entre deux fluides est une zone où les concentrations de chacune des espèces varient très rapidement sur une faible distance.

La tension interfaciale σ_{ij} est définie comme la force exercée par unité de longueur pour séparer la substance i de la substance j d'une surface unitaire.

La tension superficielle d'une substance i et sa propre valeur σ_i est définie par :

$$\sigma_i = F/A$$

F est l'énergie libre de système et A est l'aire de l'interface, généralement fonction de la température, de la pression et éventuellement des concentration constituant C_i .

La tension interfaciale σ_{ij} est reliée aux tension superficielles σ_i et σ_j des substance i et j par la relation du **Dupré** :

$$w_{ij} = \sigma_i + \sigma_j - \sigma_{ij}$$

w_{ij} représente le travail d'adhésion qu'il faut fournir par unité de surface pour séparer l'interface i/j en deux interfaces $i/vapeur$ et $j/vapeur$. Ce travail permet de quantifier l'affinité des substances l'une par rapport à l'autre.



Figure I.9 Schématisation du travail d'adhésion

6-2-2-Equilibre mécanique entre phases (pression capillaire)

De part et d'autre de l'interface séparant deux fluides non-miscible, apparait des différences de pression fonction de la tension interfaciale et de la courbure. L'équilibre entre les forces de pression et de surface obéit à la loi de Laplace :

$$P_{int} - P_{ext} = k\sigma$$

Où P_{int} et P_{ext} sont respectivement les pressions dans la phase non-miscibles et la phase mouillante.

La discontinuité de pression à l'interface ($P_{int} - P_{ext}$) est appelée pression capillaire.

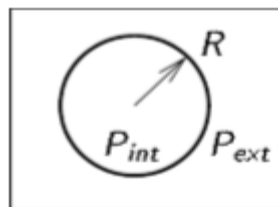


Figure I.10 Particule fluide sphérique

k est la courbure moyenne de la surface, c'est-à-dire la somme des deux courbures principale

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux au point considéré de l'interface à l'équilibre ; ils peuvent être positifs ou négatifs suivant que la surface est concave ou convexe.

7- Les force fondamentales d'un écoulement diphasique

Les forces importantes d'un écoulement diphasique sont :

- La force de pression agit sur les éléments de surface, et a tendance à accélérer le fluide dans la direction du gradient de pression.
- La force d'inertie : est une force de volume qui agit de manière à maintenir la direction et l'intensité du mouvement inchangés.
- La force de viscosité : agit sur l'élément de surface et a tendance à rendre le champ d'écoulement uniforme et à réduire les différences de vitesse.
- La force de gravité : a tendance à accélérer le fluide dans la direction du champ de pesanteur.
- La force de flottabilité est liée à la force de la gravité. C'est la différence entre la force de pesanteur et la force d'Archimède. Elle représente l'action nette de la gravité quand la densité n'est pas uniforme. Dans l'écoulement diphasique, la non-uniformité de la densité est due à la présence des deux phases.
- La force de tension superficielle : agit sur une ligne ou un élément de courbe et a tendance à minimiser l'aire de la surface d'interface. La force de tension de surface est spécifique aux écoulements gaz-liquide ou liquide-liquide.

8-les paramètres descriptifs des écoulements diphasiques

Pour simplifier, on suppose un écoulement liquide-gaz dans une conduite cylindrique de volume V . On note la vitesse moyenne dans la phase liquide u_L et dans la phase gazeuse u_G . Le volume total occupé par la phase liquide V_L et par la phase gazeuse V_G , on considère un écoulement 1D avec la variable x suivant la longueur de la conduite. On définit les sections de passage pour chaque fluide ($A_L(x)$; $A_G(x)$) .[3] on a :

a) **Le taux de présence :**

Le taux de présence de la phase k (L ou G) dans une section de passage (A) est un paramètre sans dimension défini par :

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A}$$

On utilise en générale la dénomination simplifiée suivante

- **Le taux de vide :**

C'est le rapport, dans une section plane perpendiculaire à l'écoulement, entre la surface occupée par le gaz et la surface de la section

$$\alpha = \frac{A_G}{A} = \frac{A_G}{A_L + A_G}$$

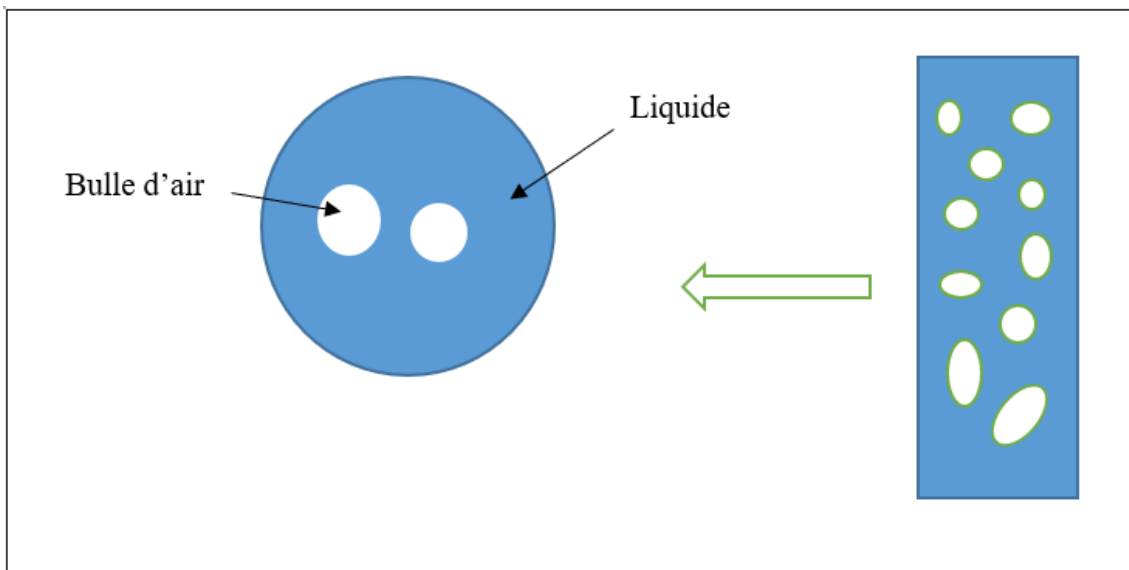


Figure I.11 Visualisation de vide

- Le taux de plein

$$1 - \alpha = \frac{A_L}{A} = \frac{A_L}{A_L + A_G}$$

b) Vitesse et débits massiques :

Les débits massiques (kg/s) sont calculés en utilisant le taux de présence

$$\dot{m}_L = A_L \rho_L u_L = (1 - \alpha) A \rho_L u_L$$

$$\dot{m}_G = A_G \rho_G u_G = \alpha A \rho_G u_G$$

D'où le débit massique totale :

$$\dot{m} = \dot{m}_G + \dot{m}_L = A[\rho_G u_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L u_L]$$

c) Vitesse et débits volumiques

Les débits volumiques (m^3/s) de chaque phase sont donnés par :

$$q_L = A_L u_L = (1 - \alpha) A u_L$$

$$q_G = A_G u_G = \alpha A u_L$$

D'où le débit volumique totale :

$$q = u_L + u_G = A[(1 - \alpha)u_L + \alpha u_G]$$

Le terme $(1 - \alpha)u_L$ représente la vitesse superficielle de la phase liquide

Le terme αu_G représente la vitesse superficielle de la phase gazeuse.

d) Qualité, titre massique et fraction volumique :

Si les deux vitesses sont de même signe il est intéressant d'introduire la notion de titre massique dite aussi qualité qui correspond au rapport entre le débit gazeux et le débit total :

$$X = \frac{\dot{m}_G}{\dot{m}} = \frac{A \alpha \rho_G u_G}{A[\rho_G u_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L u_L]} = \frac{\alpha \rho_G u_G}{\rho_G u_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L u_L}$$

Chapitre I : Généralité et Notions Fondamentales

- La fraction massique du gaz est donnée par

$$Y_G = \frac{\dot{m}_G}{\dot{m}} = \frac{\alpha \rho_G}{\rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L}$$

On peut exprimer le taux de vide par la fraction massique ou par le titre massique

$$\alpha = \frac{Y_G \rho_L}{(1 - Y_G) \rho_G + Y_G \rho_L}$$

$$\alpha = \frac{X \rho_L}{(1 - X) \rho_G S + X \rho_L}$$

Avec $S = \frac{u_G}{u_L}$

Par définition **S** désigne le glissement entre les deux phases

e) Titre thermodynamique

Dans le cas où l'on traite le changement de phase, il est pratique d'introduire l'enthalpie spécifique moyenne dans une section notée \bar{h} tel que son produit par le débit massique total de l'écoulement

$$\dot{m} \bar{h} = \dot{m}_G h_G + \dot{m}_L h_L$$

$$\bar{h} = X h_G + (1 - X) h_L$$

Dans un écoulement liquide-vapeur, la phase gazeuse est entièrement constituée de la vapeur correspondant au liquide. Pour caractériser la quantité de vapeur résultant de changement de phase, on introduit le titre massique X^*

$$X^* = \frac{\bar{h} - h_{L \text{ sat}}}{h_V - h_{L \text{ sat}}} = \frac{\bar{h} - h_{L \text{ sat}}}{L_V}$$

f) La densité de mélange

La densité de mélange est définie par la relation suivant

$$\rho = \alpha \rho_G + (1 - \alpha) \rho_L$$

9-Nombres adimensionnels

Avant d'entamer une simulation numérique d'écoulement diphasique, il est utile d'avoir une idée sur la grandeur des différentes forces impliquées. La voie la plus appropriée pour identifier les forces dominantes des forces qui peuvent être négligées est d'avoir recours aux nombres adimensionnels, qui représente le rapport entre deux forces. A partir des forces fondamentales mentionné ci-dessus, cinq groupe adimensionnels indépendants peuvent être traité [5] :

- Le nombre de Reynolds : qui représente le rapport entre la force de viscosité et l'inertie :

$$Re = \frac{\rho Lu}{\mu}$$

- Le nombre de Froude : qui caractérise le rapporte entre la force de gravité et de l'inertie

$$Fr = \frac{u^2}{gL}$$

- Le nombre d'Euler : qui représente le rapport entre la force de gradient de pression et l'inertie :

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho u^2}$$

- Le nombre de Weber : qui représente le rapporte entre la force d'inertie et de la tension de surface :

$$We = \frac{\rho Lu^2}{\sigma}$$

- Le nombre Eötvös (Bonde) : qui représente le rapporte entre la force de flottabilité et de la tension de surface :

$$Eo = \frac{\Delta P g L^2}{\sigma}$$

On peut déduire d'autre nombres adimensionnels de ces Cinq groupes. Par exemple :

- Le nombre de capillarité : qui représente le rapporte entre les forces visqueuses et de tension superficielle, et est utilisé pour caractériser l'atomisation des liquides. On le définit de la manière suivante :

$$Ca = \frac{u \cdot \mu}{\sigma}$$

En utilise un nombre capillaire faible, on s'assure de la prédominance des forces de tension de surface sur les forces visqueuses.

- Un nombre utile pour les écoulements gaz-liquide et liquide-liquide est le nombre de Morton qui implique la densité et la viscosité de la phase continue et qui est défini par : $Mo = g \cdot \mu_l^4 \cdot \frac{(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2 \cdot \sigma^3}$

Pour un écoulement diphasique et isotherme, le nombre de Morton est constant. Pour des fluides réels, sa valeur varie de 10^{-14} pour des bulles dans un liquide métallique à 10^8 pour le cas des bulles dans des huiles visqueuses.

Chapitre I : Généralité et Notions Fondamentales

Pour le cas des bulles de gaz dans l'eau, le nombre de Morton est de $2,48 \cdot 10^{-11}$.

Chapitre II

1-Introduction

La dynamique des fluides numérique (computational fluid dynamics CFD) est une technique appropriée pour étudier un large spectre d'écoulements multiphasiques. En particulier, le suivi d'interface et la modélisation de la discontinuité des propriétés ont été les principaux défis dans les écoulements diphasiques. Plusieurs modèles mathématiques et numériques ont été développés pour mieux comprendre les écoulements interfaciaux dans diverses applications scientifiques et industrielles. Ces modèles peuvent être classés en deux groupes dans lesquels des grilles fixes et mobiles ont été utilisées. Pour les méthodes des grilles mobiles l'interface est traitée comme une frontière qui sépare le domaine principal en sous-domaine. Pour les grilles fixes, tout le domaine de calcul est résolu sous la forme d'un fluide de mélange dont les phases se distinguent par une fonction d'indicateur scalaire, les méthodes de grilles fixes incluent la méthode suivie de front lagrangienne proposée par Unverdi et Tyggvason, et les méthodes de capteur de l'interface eulérienne telles que le volume de fluide (VOF), Level Set, champ de phase et le plus récent le moment de fluide (MOF).

Chacune de ces méthodes bien connues, a ses avantages et ses inconvénients. Les méthodes couplées présentent certains avantages par rapport aux méthodes traditionnelles. Par exemple la méthode VOF couplée à Level Set (CLSVOF) est conservatrice de la masse comme VOF et lisse à l'interface comme la méthode LS, un couplage de LS-MOF (CLSMOF) a également été proposé récemment pour incorporer les avantages du MOF et Level Set pour la reconstruction d'interface

2-Motivation

Bien que des nombreuses méthodes fiables ont été développées pour simuler des systèmes diphasiques, les chercheurs sont toujours à la recherche des nouvelles techniques pour améliorer la précision et la stabilité de la simulation, et diminuer le coût de calcul. Il y a des avantages et des inconvénients avec chaque méthode proposée. Par exemple, la méthode VOF a reporté une vitesse parasitée élevée à l'interface en raison de la transition nette de fraction volumique. Réduire ces erreurs de simulation est un défi pour les chercheurs en numérique. En outre, la méthode Level Set montre des problèmes considérables de conservation de masse qui doivent être traités. Par conséquent, les chercheurs s'intéressent aux méthodes de couplage pour affiner les algorithmes de résolutions.

3-Méthode de suivi et capteur d'interface

Pour qu'un modèle numérique soit capable de simuler avec fidélité les écoulements à interfaces, il doit répondre à certains nombres de critères de :

- Conservation de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie.
- Stabilité et d'efficacité.
- Représentation de l'interface du fluide.
- Mouvement de l'interface dans le temps.
- Traitement des cellules de calcul partiellement remplies.
- Couplage des conditions au niveau d'interface avec les équations de mouvement.

3-1-Méthode de suivi d'interface (Interface Tracking method)

Il y a eu des nombreux développements dans le domaine de suivi de l'interface, mais il y a encore des restrictions utilisées à chacun d'entre eux. Dans cette catégorie, l'interface est représentée et suivi explicitement en la marquant avec des marqueurs, ou en l'attachant à un maillage de surface en mouvement avec l'interface (maillage mobile). La reconnexion de cet ensemble de marqueurs permettra de reconstruire la géométrie de l'interface.[8]

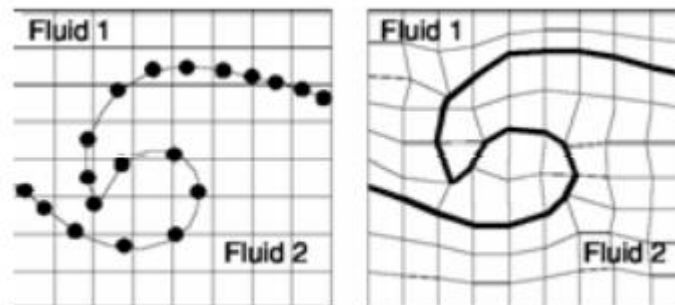


Figure II.1 principe de la méthode du suivi d'interface

Le plus souvent les méthodes de suivi d'interface utilisent la formulation lagrangienne eulérienne arbitraire (ALE) qui peut être considéré comme une généralisation des approches lagrangiennes et eulérienne. Dans la description de la méthode ALE, on traite le maillage de calcul comme un référentiel en mouvement avec une vitesse arbitraire \mathbf{w} .

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

Trois cas sont possible selon la valeur de w :

- $w = 0$: le référentiel est fixe, ce qui correspond à la description eulérienne
- $w = u$: le référentiel est en mouvement avec la même vitesse du fluide u , ce qui correspond à la description lagrangienne
- $w \neq 0 ; w \neq u$: le référentiel est en mouvement avec une vitesse déférente de la vitesse du fluide, c'est la formulation ALE

Généralement, pour une méthode de suivi de l'interface sur une grille fixe est marquée avec un ensemble de particules connectées sans masse (marqueur), les vitesses locales étant utilisées pour l'advection de ces particules de manière lagrangienne.

La méthode est sensible à la distance entre les particules. Quand les particules sont éloignées, l'interface n'est pas bien résolue. S'ils sont trop près, les fluctuations locales dans les nouvelles positions de particules peuvent générer une très forte courbure ayant pour résultat l'augmentation de l'intensité des forces de tension de surface. Les particules de l'interfaces ne retenant plus leur position au cours de temps avec le déplacement de la surface, il est donc nécessaire d'ajouter ou de supprimer des particules dynamiquement.

L'avantage des méthodes de suivi est la détermination précise de l'interface par la position de la grille de surface, et une implémentation facile des conditions à l'interface. En plus, la courbure peut être bien approchée, ce qui permet de prendre en compte l'effet de la tension de surface et de déduire la diffusion numérique. L'inconvénient de ces méthodes est que les écoulements avec forte déformations d'interface telles que la fragmentation et la coalescence des bulles ne peuvent être simulés qu'après utilisation d'algorithmes supplémentaires complexes et coûteux.[2]

Cet inconvénient est largement amplifié sur des simulations 3D. De nombreux travaux ont été effectués sur le sujet afin de corriger cette défaillance, mais parfois aux prix de d'altération d'autres qualités de ces algorithmes.

Parmi les algorithmes qui utilisant ce type de représentation on cite principalement la méthode Front Tracking et BIM [2]

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

3-1-1-Méthode BIM (Boundary Integral Method)

La méthode BIM introduite par Rosenhead peut être précisée dans la modélisation des écoulements à interfaces de topologie relativement régulière. Dans cette approche, l'interface est suivie explicitement, mais la solution dans le domaine est déduite uniquement de l'information que possèdent les points discrets le long de l'interface.

Une caractéristique avantageuse de BIM est la réduction du problème d'écoulement d'une dimension, puisque la formulation implique des quantités définies uniquement sur l'interface. Un autre avantage avec cette méthode est son potentiel pour des solutions extrêmement précises si la topologie de l'écoulement est constituée par des interfaces régulières.

Les inconvénients majeurs sont le développement de quadrature exacts des intégrales avec des kernels singuliers (particulièrement en 3D) et de besoin d'une intervention locale au niveau de l'interface en cas de changement topologiques.[2]

3-1-2-Méthode Front Tracking

L'idée principale derrière la méthode FT est l'utilisation des deux grilles. Une grille eulérienne avec un maillage de différences finies est utilisée pour résoudre les équations de l'écoulement. L'autre grille est le maillage de l'interface discrétisée pour suivre l'interface explicitement et le calcul de la force de tension de surface qui est transférée au maillage de différences finies via une fonction delta discrète. La méthode FT a été proposée par Richtmyer et Morton en premier lieu et développée par la suite par Guillaume et Al.

Une approche similaire a été développée par Unverdi et Tyggvason. Ils ont combiné une grille en mouvement pour la description de l'interface avec une autre grille fixe pour le calcul de l'écoulement. L'interface est représentée par des marqueurs lagrangien qui sont raccordés pour former un front qui coïncide et bouge à travers un maillage eulérien fixe.[8]

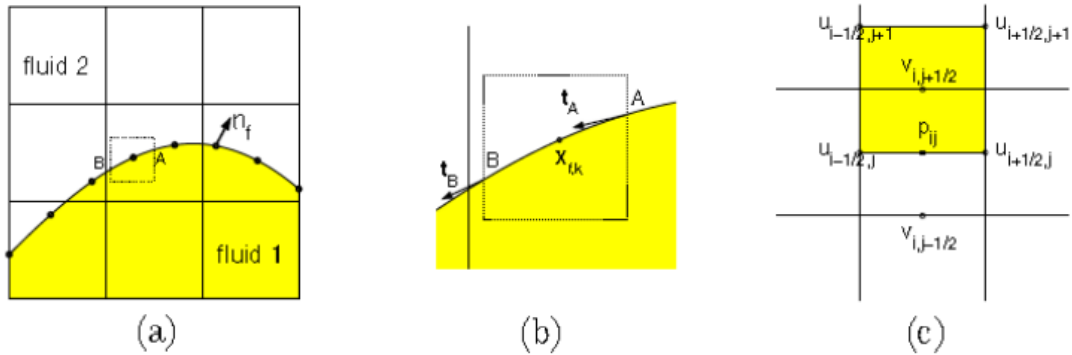


Figure II.2 : (a) l'idée de base de la méthode Front Tracking. (b) volume de contrôle de la sub-grille. (c) volume de contrôle de maillage eulérien [3]

Torres et Brackbill ont développé une méthode de suivi de front qui élimine le besoin de connectivité. Ils ont utilisé ce qu'ils ont appelé la méthode de Point Set pour construire une fonction de Heaviside sur une grille fixe à partir d'un ensemble de points d'interface déconnectés, cette fonction est calculée en plusieurs étapes. Premièrement, on introduit une fonction approximative d'indicateur dont sa valeur est égale à l'unité dans les cellules qui contiennent des points d'interface déconnecté. On résout une équation de Laplace pour cette fonction pour distinguer clairement entre les cellules intérieures et extérieures. Deuxièmement, une nouvelle fonction d'indicateur lissée est calculée par interpolation par l'utilisation d'un produit de tenseur de B-spline monodimensionnel. Finalement, on calcule une correction de cette fonction lissée pour les valeurs de la fonction d'indicateur coïncident avec l'interface, les normales et les courbures aux point d'interfaces sont calculées de la même façon que dans la méthode Level Set en utilisant le gradient de cette fonction d'indicateur.

Pour déterminer la région de surface nécessaire pour le calcul de la tension de surface, on construit un élément circulaire autour de chaque point d'interface, la région pondérée par un B-spline de ce cercle est divisée par le nombre des points interfaciales dont la distance jusqu'au centre est inférieure au rayon d'un cercle spécifiée.

La reconstruction d'interface périodique dans cette méthode est accomplie en utilisant un maillage auxiliaire raffiné et en explorant de ce maillage au contour d'interface de la fonction d'indicateur.

3-2-Méthode de capteur d'interface (ou de suivi de volume) (Interface Capturing Method) :

Dans cette deuxième catégorie de méthodes, les fluides sont marqués par des particules sans masse ou par une fonction d'indicateur. La particularité de ces méthodes est la considération de l'interface comme un champ scalaire, qui sera transporté par le champ de vitesse grâce à une équation de transport.

L'application des méthodes de capture d'interface exige des considérations spéciales durant le calcul de la tension de surface. Comme la courbure est donnée par la deuxième dérivée d'une fonction discontinue, plusieurs approches ont été développées pour un calcul exact de la tension de surface.

Un algorithme de capture d'interface doit :

- Conserver la masse globalement et localement
- Maintenir au minimum une précision de deuxième ordre (pour le temps et l'espace)
- Maintenir la largeur de discontinuité de l'interface aussi faible que possible
- Être topologiquement robuste

Les premières méthodes dans cette catégorie étaient l'approche MAC (Mark And Cell) où les particules marqueurs sont advectées pour chaque fluide et la méthode VOF où une fonction de marqueur est utilisée pour le transport des fluides. Les deux difficultés principales avec l'utilisation des méthodes des capteurs sont la conservation de l'épaisseur de l'interface et le calcul exact des forces de la tension de surface. Dans ce qui suit on présente les principales méthodes utilisées actuellement.[1]

3-2-1-Méthode volume de fluide (VOF)

La méthode VOF (volume of fluid) introduit par Nichols et Hirt, spécialement conçue pour la simulation des écoulements diphasiques, est basée sur le principe de conservation de la masse. La distribution de fraction volumique de liquide (ou gaz) est répartie dans le domaine de calcul sur un maillage fixe, puis elle est transportée par le champ de vitesse. La méthode comptabilise la fraction volumique d'une phase prise comme référence dans chaque cellule de maillage. La fraction ou volume de fluide est propagée implicitement de proche en proche.[8]

Les techniques VOF ont connu un développement intense, en parallèle avec le développement rapide des méthodes de simulation des écoulements avec interface,

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

incluant la méthode des frontières immergées (ou marqueurs) et la méthode de ligne de niveau (Level Set).

L'amélioration des méthodes VOF est toujours une direction de recherche active, les perspectives récentes concernent la mise en œuvre de méthode VOF de haute précision dans un cadre de maillage adaptif.

L'algorithme VOF est divisé en deux parties, une étape de reconstruction de l'interface et une autre de propagation. Dès la reconstruction de l'interface, le mouvement de cette dernière est modélisé par un algorithme d'advection approprié. La reconstruction explicite permet aux flux d'être mieux estimés et qui donne une masse exacte avec une interface non diffuse. L'algorithme de la méthode VOF se résume en une :

- Détermination d'une fonction de couleur α définie tel que ;
 - $\alpha=1$ on a seulement la présence de la phase 1
 - $\alpha=0$ on a seulement la présence de la phase 2
 - $0 < \alpha < 1$ on a la présence de l'interface
- Résolution de l'équation de transport, la fraction α est gouvernée par l'équation de l'advection :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u(\nabla \alpha) = 0$$

Une seule équation de bilan de quantité de mouvement est écrite pour tout le domaine, et le champ de vitesse qui calculé est ensuite partagé entre les deux phases. L'équation de quantité de Navier-Stokes incompressible s'écrit (en régime laminaire) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uu) = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + \mu \nabla^2 u)$$

Avec :

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2$$
$$\mu = \frac{\alpha \rho_1 u_1 + (1 - \alpha) \rho_2 u_2}{\rho}$$

- La première partie de l'algorithme, c'est-à-dire la position de l'interface consiste en un outil permettant le calcul exact de l'évolution de la fonction α . Plusieurs approches ont été utilisées, le point critique de cette étape est la discrétisation du terme convectif de l'équation d'advection. Le problème vient de fait que l'interface est représentée par une discontinuité dans les valeurs de la fraction volumique α . En effet, si des schémas classiques d'ordre élevé sont utilisés, des oscillations non physiques

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

apparaîtront près de l'interface, et si des schémas d'ordre inférieur sont utilisés, la diffusion numérique sera introduite. Le raffinement de la grille et l'utilisation des schémas numériques de haute résolution sont donc des paramètres importants pour une résolution exacte de l'interface.

- Utilisation de la dépendance linéaire de la fonction α pour le calcul de la densité et la viscosité.

Dans la pratique, les stratégies de résolution les plus connues dans l'utilisation de la méthode VOF englobant :

✚ Pour la formulation explicite :

- L'utilisation de la reconstruction géométrique ou le schéma donneur-accepteur
- Réduction du pas de temps si le problème de convergence survient
- Résolution de la méthode VOF une fois par pas de temps

✚ Pour la formulation implicite :

- On utilise souvent le schéma de différence QUICK ou de second ordre pour l'équation VOF

Durant la reconstruction de l'interface, un compromis entre la précision de la position de l'interface et le coût de calcul devra être maintenu. Les méthodes de reconstruction actuelle sont généralement un développement de deux principales techniques de base à savoir, l'algorithme SLIC et PLIC.

3-2-1-1-Méthode SLIC (simple linear interface calculation)

La méthode VOF originale introduit par Nichols et Hirt n'inclut aucune reconstruction explicite de l'interface.

En utilisant la méthode SLIC développée par Noh et Woodward, l'interface se compose seulement des segments de droit qui sont construits de manière parallèle ou verticale aux axes de l'équation.

Avec cette approche, il existe des discontinuités au niveau de l'interface. Pour pallier à cette discontinuité, une fonction de hauteur local a été introduite. Pour la méthode VOF originale sans fonction de hauteur, les valeurs de la fraction volumique sont arrondies à la fin de l'algorithme d'advection (les valeurs au-dessous de zéro sont réinitialisées à zéro

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

et les valeurs au-dessous de un sont réinitialisées à un) emmenant à des pertes significatives dans la masse liquide.

Pour définir la fonction de hauteur local, l'orientation de l'interface est en premier déterminée (horizontale ou verticale) selon les valeurs de la fraction volumique dans le bloc de cellules avoisinantes. Après cela la hauteur local (horizontale ou verticale) dans chaque ligne ou colonne dans ce bloc est déterminée par la sommation des fractions volumiques.

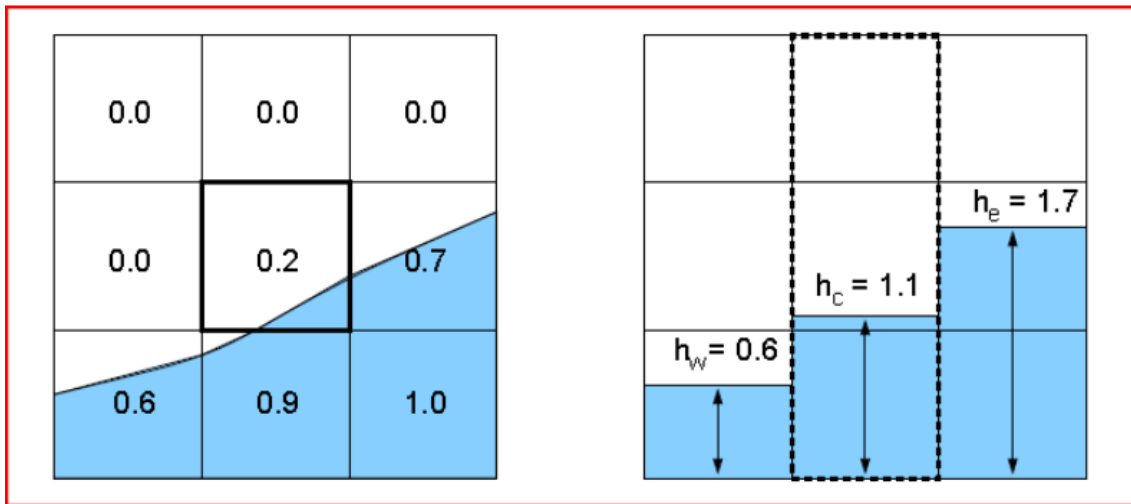


Figure II.3 : construction de la hauteur locales dans un bloc 3x3 pour une cellule centrale [2]

Cette méthode a été aussi appliquée pour les écoulements dont la force de la tension de surface est dominante. La méthode vise la représentation de la tension de surface et la courbure de l'interface.[2]

3-2-1-2-Méthode PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation)

Avec le calcul d'interface affine par morceaux PLIC, l'interface n'est pas construite comme une ligne horizontale ou verticale, mais comme une ligne droite avec une pente constant. En 3D, l'interface est représentée par des plan obliques. En utilisant la méthode PLIC introduite par Young, il y a toujours des discontinuités. Dans la reconstruction par l'approche PLIC, l'interface réelle est approchée par un ligne droite perpendiculaire au vecteur normale de l'interface est déterminé via le gradient de la fraction volumique dans cellules avoisinantes.

En plus des méthodes SLIC et PLIC, il y a plusieurs possibilités de reconstruction de l'interface. En basant sur la méthode PLIC, il est possible par exemple d'utiliser

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

l'interpolation parabolique, l'interpolation cubic-spline ou d'autres méthodes d'interpolation d'ordre élevé pour rendre l'interface lisse.

La méthode CIP (constrained interpolation profile) calcule l'advection de l'interface non seulement sur l'équation de transport de la fraction de fluide, mais aussi l'équation de son gradient spatial. Cela signifie que l'interface est gardée pointue comme dans d'autres méthodes, la forme d'interface est courbée, selon la direction de déplacement de l'interface.

Dans le but de transporter la fonction 'C' avec un minimum d'erreurs numériques, un nouvel algorithme a été proposé. Dans ce modèle, la position de l'interface est déterminée par le calcul des flux volumiques du fluide sur le maillage fixe par éléments et la mise à jour des valeurs de 'C' en utilisant le schéma donateur-accepteur.

Dans l'article « Numerical simulation of free surface flows », on trouve une autre variante de la méthode VOF. Le modèle mathématique est celui de VOF et la fraction volumique du liquide est utilisée pour déterminer la position de l'interface. Cependant, le traitement numérique du modèle est différent : un algorithme de Splitting est utilisé pour découpler les phénomènes d'advection et diffusion.

Les phénomènes d'advection (en incluant le mouvement de la fraction volumique de liquide et le mouvement du liquide) sont résolus en utilisant une grille fixe structurée de cellules rectangulaires et d'une méthode caractéristique avancée. D'autre part, les phénomènes de diffusion sont résolus en utilisant des techniques des éléments finis sur un maillage fixe non structurée. Ainsi, la méthode profite des avantages des grilles structurées pour résoudre les phénomènes d'advection et profite des éléments finis pour résoudre les phénomènes de diffusion. Il est à signaler que le traitement numérique de termes advectifs est différent de celui suivi dans des méthodes VOF. Ce modèle utilise une méthode caractéristique avancée au lieu des volumes finis (VF), la méthode est inconditionnellement instable.

D'autres auteurs ont utilisé une méthode semi-lagrangienne pour la simulation des écoulements diphasiques complexes en 3D. Les équations de Navier Stokes sont résolues séparément dans les deux fluides en utilisant une méthode de pseudo-compressibilité même avec un rapport de densité élevé. Le suivi d'interface est accompli par la méthode SL-VOF (Segment lagrangien-volume of fluid) [10]

3-2-2-Formalisme de la méthode Level Set

3-2-2-1-Motivation et principe de base :

La base de formalisme de la méthode Level Set ont été proposé par Osher et Al.(1988). Cette méthode inspirée des travaux précédents de Séthien sur la propagation de front de flamme a été motivée par la difficulté numérique de représenter une structure de la forme arbitraire de dimension N , dans un domaine de dimension $N+1$.

Cette 1^{ère} ébauche appelée PSC ‘Propagation of surface under couverture’ permettait de suivre le mouvement d’une interface transportée par un champ de vitesse quelconque, ou dépendant de la courbure locale du front. Partant du constat que les méthodes de marqueur étaient déficientes lors des changements topologiques, et que les méthodes VOF avaient des propriétés algébriques limitées, les auteurs proposèrent une formalisme eulérien plus général, en associant au mouvement de l’interface une équation de transport une fonction. Si cette méthode a été introduit la 1^{ère} fois par Osher et Al, pour décrire la propagation d’une interface grâce à une telle équation de transport, l’idée est beaucoup plus ancienne. Dans son livre ‘Markstein 1964’ décrit déjà une démarche similaire dans le cadre de la caractérisation d’un front de flamme.[11]

La position du front est alors représentée par la ligne de niveau zéro de cette fonction. Toutes les valeurs de cette fonction situées d’un même côté de l’interface, sont de même signe. Celles situées de l’autre côté sont de signe opposé.

Etant donné, une interface Γ , la méthode Level Set consiste à introduire une fonction continue $\phi(x, t)$, dont la courbe de niveau zéro représente l’interface,[11] c’est-à-dire :

$$\Gamma = \{x | \phi(x, t) = 0\} \quad (2.1)$$

La relation suivante est également représentée :

$$\frac{d\phi(x, t)}{dt} |_{x \in \Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

Par extension on généralise cette fonction à l’ensemble des lignes de niveau définie par :

$$\Gamma_k = \{x | \phi(x, t) = C_k\} \quad (2.3)$$

Et on obtient :

$$\frac{d\phi(x, t)}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

D’où l’équation aux dérivées partielles :

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

On peut écrire cette équation sous forme suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad (2.6)$$

Le formalisme ainsi obtenu s'inscrit dans la cadre générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles, pour lesquels des phénomènes de propagation d'interface doivent être décrits.[10]

A partir de la 1^{ère} ébauche on peut déjà effectuer certaines remarques :

- Les propriétés algébriques remarquables de la méthode sont évidentes. En effet, le vecteur normal à l'interface peut être calculé facilement grâce à la fonction ϕ :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2.7)$$

On peut déduire aisément la courbure de l'interface

$$\kappa(\phi) = -\nabla \cdot \mathbf{n} \quad (2.8)$$

Les vecteurs unitaires tangentes à l'interface peuvent également être calculés en créant une base orthonormale avec le vecteur \mathbf{n} .

- L'équation (2.2) est une équation exacte qui doit être représentée pour que l'interface se propage à la bonne vitesse, en revanche son extension (2.5) est un raccourci commode qui permet de suivre le mouvement d'un objet de dimension N et de forme arbitraire sur un maillage structuré de dimension N+1, ce qui est particulièrement intéressant du point de vue de la résolution numérique. Néanmoins, un certain nombre d'interrogations peut être soulevé. L'équation (2.2) suppose que l'on connaisse la vitesse de la propagation de la ligne de niveau zéro grâce à des considérations physiques, en revanche la vitesse des autres lignes des niveaux ne peut être connue à partir de considérations physiques puisque ces lignes n'ont pas des réalités physiques. En revanche, il est important que notre fonction ϕ reste continue dans tout le domaine afin que les propriétés algébriques de la méthode restent intéressantes. Ainsi, nous verrons par la suite que l'extension (2.5) pose en générale un certain nombre des problèmes quant à la cohérence des lignes de niveau, et que des algorithmes supplémentaires doivent être mis en œuvre pour

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

calculer des extensions de la vitesse de l'interface ou pour renormaliser les lignes des niveaux

- Le fait que ce soit la ligne de niveau zéro qui représente l'interface n'est pas anodin. En effet, lors de changements topologiques où deux interfaces vont être en contact, la fonction ϕ sera égal à $\phi_1 + \phi_2$. La seule valeur pour laquelle on aura $\phi = \phi_1 = \phi_2$ est zéro
- On constate également que la méthode peut être généralisée à N dimension sans contrainte particulière.[11]

3-2-2-2-Résolution numérique de l'équation de transport

L'expérience numérique pratique montre que les schémas de discrétisation pour l'équation de transport doivent avoir un ordre de convergence ainsi qu'une précision suffisamment élevée pour obtenir des résultats convenables. L'analyse bibliographique nous permet de voir que la majorité des auteurs utilisent le schéma WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory, présenté par Jiang) de 5^{ème} ordre pour atteindre de meilleurs résultats. Pour ce type de schéma, l'ordre de convergence peut être plus ou moins élevé en fonction de nombre de point discrets que l'on utilise sur le stencil. Plus le nombre est grand plus l'ordre de convergence des problèmes est plus grand.

Dans ce qui suit, nous décrivons les schémas numérique employés pour la discrétisation de l'équation de transport.

a-Maillage et discrétisation

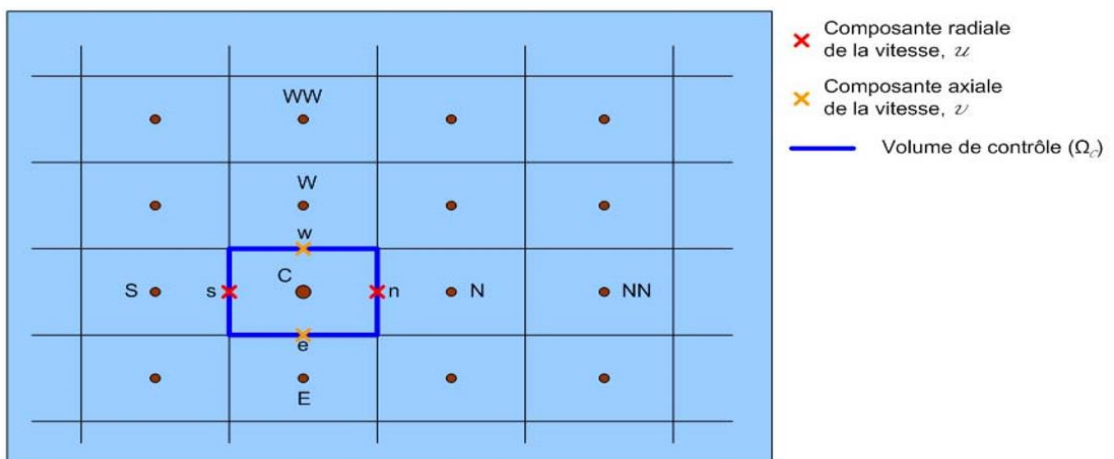


Figure II.4 : volume de contrôle Ω_C associé à la discrétisation de l'équation de transport de la fonction Level-Set en 2D. [11]

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

Par souci de simplicité de mise en place des schémas numérique, nous avons choisi un maillage cartésien uniforme. La fonction Level Set est définie sur le volume de control comme présenté dans la figure

Le centre de cellules est repéré par le couple des coordonnées (x_c, y_c) tel que

$$x_c = \frac{1}{2}(x_s + x_n) \quad ; \quad y_c = \frac{1}{2}(y_e + y_w) \quad (2.9)$$

Les pas d'espace respectifs Δx_c et Δy_c sont définis de la façon suivante :

$$\Delta x_c = x_n - x_s \quad ; \quad \Delta y_c = y_w + y_e \quad (2.10)$$

La fonction Level Set est définie au centre de la maille C sur le volume de contrôle Ω_c tandis que les composantes de la vitesse u et v sont localisées sur les faces de cellules

Nous allons maintenant présenter la discrétisation de l'équation de transport par la méthode de volume finis en 2D. En intégrant cette équation sur le volume de contrôle Ω_c on obtient :

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega_c + \int_{\Omega_c} \nabla \cdot G d\Omega_c = 0 \quad (2.11a)$$

$$G = u\phi \quad (2.12b)$$

La théorème de Green-Ostrogradski nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega_c + \int_{S_c} \nabla \cdot n dS_c = 0 \quad (2.13)$$

$$(\phi_c^{k+1} - \phi_c^k) \frac{\Delta x_c \Delta y_c}{\Delta t} + (G_n^k - G_s^k) \Delta x_c + (G_w^k - G_e^k) \Delta y_c = 0 \quad (2.14)$$

Où G est le flux de convection discrétisé sur chaque face du volume de contrôle Ω_c . Les indices n, s, w, e, indiquent la discrétisation de flux G et des composantes de la vitesse u et v , alors que les indices N, S, E, S et C indiquent les positions de la fonction ϕ . Le calcul du flux G dépend de choix de schéma de discrétisation en espace.

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

b-Déscription temporelle :

La discrétisation de notre équation est explicite. Ainsi, un critère sur le pas de temps est nécessaire pour assurer la stabilité des calculs. Pour ce type d'équation nous pouvons obtenir la stabilité en utilisant la condition CFL

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > |u| \rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x}{\max\{|u|\}} \quad (2.15)$$

Cette condition peut également être interprétée comme une condition qui interdit à une courbe caractéristique de la solution d'« avancer » de plus d'une maille Δx pendant un intervalle de temps Δt . Finalement nous utilisons la relation suivante :

$$\Delta t = cfl \frac{\Delta x}{\max\{|u|\}} \quad (2.16)$$

Où cfl est un nombre compris entre 0 et 1, appelé nombre de Courant-Friedrichs-Lewy, qui peut varier suivant les schémas numériques utilisés.

En général, la discrétisation temporelle d'équation de transport pose moins de difficultés que la discrétisation spatiale. En effet, les méthodes les plus couramment utilisées pour les EDO s'adaptent très bien à la discrétisation temporelle des EDP. Dans cette section, nous allons décrire différents schémas d'intégration en temps.[7]

b-1-Schéma d'Euler explicite :

L'équation de transport s'écrit sous la forme EDO :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = L(\phi) \quad (2.17)$$

Où $L(\phi)$ représente le terme d'Advection de l'équation de transport $u \cdot \nabla \phi$

En appliquant le schéma d'Euler explicite à l'équation de transport on obtient :

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \cdot L(\phi^n) \quad (2.18)$$

Le schéma d'Euler est utilisé pour sa simplicité d'implémentation et son faible coût en temps de calcul, ce schéma s'avère insuffisant pour des simulations complexes.

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

b-2-Schéma à points multiples (Adams-Bashforth)

Le principe de schéma est d'obtenir une dérivée d'ordre supérieur à 1 en utilisant les valeurs du second membre à des instants antérieurs au temps. Le schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 est un exemple. Son application conduit à la discrétisation temporelle suivante :

$$\varnothing^{n+1} = \varnothing^n - \frac{\Delta t}{2} [3L(\varnothing^n) - L(\varnothing^{n-1})] \quad (2.19)$$

Des schémas d'ordre plus élevé peuvent être dérivés, néanmoins le schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 est le plus couramment utilisé.

b-3-Schéma à pas multiples (Range-Kutta) :

Très souvent utilisé, le schéma Range-Kutta (RK) offre un très bon compromis entre la stabilité numérique et la précision. Afin d'obtenir la valeur finale \varnothing^{n+1} , une ou plusieurs valeurs intermédiaires doivent être calculées au cours d'un pas de temps. Chaque évolution intermédiaire du schéma peut être augmentée en augmentant le nombre de pas intermédiaires. Nous donnons ici la démarche qui permet d'obtenir la discrétisation d'ordre 2 et 3 :

RK-2 :

$$1^{\text{ère}} \text{ pas} : \varnothing^{n+1} = \varnothing^n - \Delta t. L(\varnothing^n)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ pas} : \varnothing^{n+2} = \varnothing^{n+1} - \Delta t. L(\varnothing^{n+1})$$

$$\text{Résultat} : \varnothing^{n+1} = \frac{\varnothing^n + \varnothing^{n+2}}{2}$$

RK-3 :

$$1^{\text{ère}} \text{ pas} : \varnothing^{n+1} = \varnothing^n - \Delta t. L(\varnothing^n)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ pas} : \varnothing^{n+2} = \varnothing^{n+1} - \Delta t. L(\varnothing^{n+1}) \quad ; \quad \varnothing^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3\varnothing^n + \varnothing^{n+2}}{4}$$

$$3^{\text{ème}} \text{ pas} : \varnothing^{n+\frac{3}{2}} = \varnothing^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t. L(\varnothing^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\text{Résultat} : \varnothing^{n+1} = \frac{\varnothing^{n+2} + 3\varnothing^{n+\frac{3}{2}}}{4}$$

En suivant la procédure exposée ci-dessus on voit que le schéma de RK d'ordre n peut être décomposé en une succession de n pas d'Euler avec des pondérations à chaque pas.

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

L'inconvénient majeur lié à l'utilisation de ce type de schéma est une augmentation importante du temps de calcul à chaque itération (un R-K_2 est deux fois plus coûteux en temps de calcul qu'un schéma d'Euler ou un schéma A-B, le R-K_3 est trois fois plus coûteux) [7]

c-Discretisation spatiale :

Nous présentons à présent différents schémas numériques adaptés à la discrétisation des dérivées spatiales de l'équation (2.5)

Tous les schémas étudiés dans ce travail sont des schémas de type différences finies adaptés à des maillages cartésiens. Par souci de simplicité nous allons raisonner en 2D, mais l'extension des différentes formulations au cas 3D est immédiate. De même, nous donnons la relation permettant de calculer les dérivées premières suivant x, mais on peut généraliser le raisonnement pour calculer les dérivées suivant x et z.

c-1-Schéma ENO3

Dans (Shu & Al, 1988) les auteurs introduisent des polynômes d'interpolation ENO pour la solution numérique de loi de conservation. L'idée de base est d'utiliser un stencil d'interpolation adaptatif qui obtient automatiquement les informations provenant de la région où la solution est localement la plus lisse. Ces schémas ont ensuite été appliqués avec succès sur des problèmes à suivi d'interface (Osher & Al, 1988)

La procédure à suivre pour calculer $\phi_{i+\frac{1}{2}j}$ est la suivante :

-Upwind :

$$\begin{cases} k_1 = i & \text{si } \phi_{i+\frac{1}{2}j} > 0 \\ k_1 = i + 1 & \text{si } \phi_{i+\frac{1}{2}j} \leq 0 \end{cases}$$

-schéma d'ordre 1

$$\phi_{i+\frac{1}{2}j} = \phi_{k_1j}$$

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

-schéma d'ordre 2

$$c = \begin{cases} a = \frac{\phi_{k_1 j} - \phi_{k_1 - 1 j}}{\Delta x} & \text{si } |a| \leq |b| \\ b = \frac{\phi_{k_1 + 1 j} - \phi_{k_1 j}}{\Delta x} & \text{autrement} \end{cases}$$

$$k_2 = \begin{cases} k_1 + 1 & \text{si } |a| \leq |b| \\ k_1 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}j}^{(2)} = \phi_{i+\frac{1}{2}j}^{(1)} + \frac{\Delta x}{2} c (1 - 2(k_2 - i))$$

-schéma d'ordre 3

$$c = \begin{cases} a = \frac{\phi_{k_2 - 1 j} - 2\phi_{k_2 j} + \phi_{k_2 + 1 j}}{(\Delta x)^2} & \text{si } |a| \leq |b| \\ b = \frac{\phi_{k_1 j} - 2\phi_{k_2 + 1 j} + \phi_{k_2 + 2 j}}{(\Delta x)^2} & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}j}^{(3)} = \phi_{i+\frac{1}{2}j}^{(2)} + \frac{(\Delta x)^2}{2} c (3(k_2 - i)^2 - 1)$$

Finalement on obtient l'algorithme suivant si on utilise un schéma d'Euler pour l'intégration en temps

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - dt \left(u_{ij} \frac{\left(\phi_{i+\frac{1}{2}j}^{n(3)} - \phi_{i-\frac{1}{2}j}^{n(3)} \right)}{\Delta x} - v_{ij} \frac{\left(\phi_{ij+\frac{1}{2}}^{n(3)} - \phi_{ij-\frac{1}{2}}^{n(3)} \right)}{\Delta y} \right)$$

La généralisation des schémas ENO à des précisions supérieures à l'ordre 3 est tout à fait possible.

c-2-Schéma WENO5 :

Dans le but d'améliorer les pertes de masse avec la méthode Level Set, Jean Luc Estevalzes a proposé une forme légèrement modifiée de ce schéma WENO5 qui apporte une amélioration importante aux pertes de masse et à la résolution des structures fines. L'idée de base de ce schéma est d'appliquer les procédures de lissage et de la pondération non pas sur la dérivée mais sur la variable à discrétiser.[10]

L'algorithme est le suivant :

Chapitre II : Méthodes de simulation numérique

$$a_1^- = \phi_{i+3j} \quad a_1^+ = \phi_{i-2j} \quad b_1^- = \phi_{i-2j} \quad b_1^+ = \phi_{i-3j}$$

$$a_2^- = \phi_{i+2j} \quad a_2^+ = \phi_{i-1j} \quad b_2^- = \phi_{i-1j} \quad b_2^+ = \phi_{i-2j}$$

$$a_3^- = \phi_{i+1j} \quad a_3^+ = \phi_{ij} \quad b_3^- = \phi_{ij} \quad b_3^+ = \phi_{i-1j}$$

$$a_4^- = \phi_{ij} \quad a_4^+ = \phi_{i+1j} \quad b_4^- = \phi_{i+1j} \quad b_4^+ = \phi_{ij}$$

$$a_5^- = \phi_{i-1j} \quad a_5^+ = \phi_{i+2j} \quad b_5^- = \phi_{i+2j} \quad b_5^+ = \phi_{i+1j}$$

On ne donne ici que la procédure pour calculer ϕ^{--} , on utilise le même algorithme pour calculer ϕ^{-+} en remplaçant les variables $a_i^{-/+}$ par les variables $b_i^{-/+}$.

Pour calculer ϕ^{-+} il est nécessaire de redéfinir toutes les variables intermédiaires que nous allons utiliser pour calculer ϕ^{--} .

On définit les variables suivantes

$$S_1^\pm = 13(a_1^\pm - 2a_2^\pm + a_3^\pm)^2 + 3(a_1^\pm - 4a_2^\pm + 3a_3^\pm)^2$$

$$S_2^\pm = 13(a_2^\pm - 2a_3^\pm + a_4^\pm)^2 + 3(a_2^\pm - a_4^\pm)^2$$

$$S_3^\pm = 13(a_3^\pm - 2a_4^\pm + a_5^\pm)^2 + 3(3a_3^\pm - 4a_4^\pm + a_5^\pm)^2$$

$$R_1^\pm = \frac{a_1^\pm}{3} - \frac{7a_2^\pm}{6} + \frac{11a_3^\pm}{6} \quad P_1^\pm = \frac{1}{(\epsilon + S_1^\pm)^2}$$

$$R_2^\pm = -\frac{a_2^\pm}{6} + \frac{5a_3^\pm}{6} + \frac{a_4^\pm}{3} \quad \text{La pondération : } P_2^\pm = \frac{3}{(\epsilon + S_2^\pm)^2}$$

$$R_3^\pm = \frac{a_3^\pm}{3} + \frac{5a_4^\pm}{6} - \frac{a_5^\pm}{6} \quad P_3^\pm = \frac{3}{(\epsilon + S_3^\pm)^2}$$

La variable que l'on souhaite dériver est lissée en utilisant la relation suivante

$$\phi_{i \pm \frac{1}{2}j}^{WENO-} = \frac{P_1^\pm R_1^\pm + P_2^\pm R_2^\pm + P_3^\pm R_3^\pm}{P_1^\pm + P_2^\pm + P_3^\pm} \text{ En remplaçant les variables de } a_i^{-/+} \text{ définies au début par les}$$

variables $b_i^{-/+}$ et en répétant la procédure de manière similaire nous pouvons déterminer

$$\phi_{i \pm \frac{1}{2}j}^{WENO+}$$

3-3-Couplage de la méthode Level Set/VOF (CLSVOF)

Une propriété commune de méthode VOF et Level set est qu'on a besoin d'un seul champ scalaire supplémentaire pour la représentation de l'interface. L'avantage de la méthode Level Set est que l'interface est représentée comme une surface continue et aucune reconstruction ultérieure n'est nécessaire. D'autre part, l'inconvénient de cette méthode est que la fonction Level Set doit être réinitialisé dans chaque pas de temps, ce qui mène à des problèmes de conservation de masse. La VOF, elle, permet d'assurer la conservation de la masse à chaque itération, chose que ne fait pas la méthode Level-Set. La possibilité de réduire cet inconvénient est de coupler les deux méthode VOF et Level Set.

La méthode CLSVOF a été introduite par Bourlioux, Sussman et Al. Cette méthode bénéficie à la fois des avantages de la méthode Level-Set et de ceux de la méthode VOF. La masse est bien conservée et les propriétés géométriques peuvent être facilement calculées. Malheureusement, en dépit de ces avantages importants, la mise en œuvre de cette méthode reste difficile ; en particulier, l'algorithme de reconstruction de la méthode VOF est complexe et toujours nécessaire pour la méthode CLSVOF. [10]

Chapitre III

1- Introduction

Les instabilités hydrodynamiques occupent une place de choix en mécanique des fluides. Depuis Osborne Reynolds et G. I Taylor, en effet on sait que la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent est due au caractère instable de l'état laminaire vis-à-vis de certaines classes de perturbations qu'elles soient infinitésimales ou d'amplitudes finies.

La théorie de l'instabilité hydrodynamique porte essentiellement sur les écoulements cisailés, quasi parallèles ou parallèles, tels que la couche de mélange, les jets, l'écoulement de Poiseuille dans un canal...

L'objectif de l'analyse de la stabilité est de déterminer dans quel domaine des paramètres une solution particulière des équations de Navier-Stokes est effectivement observable.

Un écoulement est dit stable si et seulement s'il est stable vis-à-vis de toute perturbation. Certains écoulements sont instables vis-à-vis de perturbations infinitésimales. Dans la pratique, il existe toujours un bruit de fond et ce type de solution bifurque toujours vers un autre état. D'autres écoulements stables vis-à-vis de toute perturbation infinitésimale, sont instables dès que l'amplitude des perturbations est supérieure à un certain seuil. Dans ce cas, pour le même domaine de paramètres, il existe deux solutions différentes observables. Le choix fait par le système entre les deux états possibles sera alors conditionné par son histoire. Pour le premier type d'écoulement on dira qu'il est instable aux perturbations infinitésimales ou encore linéairement instable. Pour le deuxième type on parlera d'instabilité aux amplitudes finies, ou bien d'instabilité non-linéaire.

2- Approche phénoménologique de la notion d'instabilité

Les instabilités sont des phénomènes très courant que l'on rencontre dans des domaines variés tels que la mécanique (l'hydrodynamique, l'aérodynamique ...), la chimie ou la physique. Elles sont le fondement de processus variés et complexes tel que la formation des nuages, des vagues, la nucléation ou formation des étoiles...

De manière générale, une instabilité est définie pour un équilibre donné. On parlera d'équilibre lorsqu'un système est dans un état qui n'évalue pas au cours de temps (état stationnaire). La stabilité d'un équilibre s'étudie en modifiant (de manière plus ou moins forte) l'état de système initialement en équilibre. Si quel que soit la perturbation, le système s'éloigne de l'équilibre, on parlera d'équilibre inconditionnellement instable. Si au contraire, le système rejoint l'équilibre pour toutes les perturbations on parlera d'équilibre inconditionnellement stable.[12]

Pour une approche compréhensive aisée, on a coutume d'illustrer la notion par un certain nombre de configuration familières telle que celle présenté dans l'exemple qui suit.

On considère une bille posée sur un support solide dont la forme est respectivement l'une des deux formes sur le schéma.

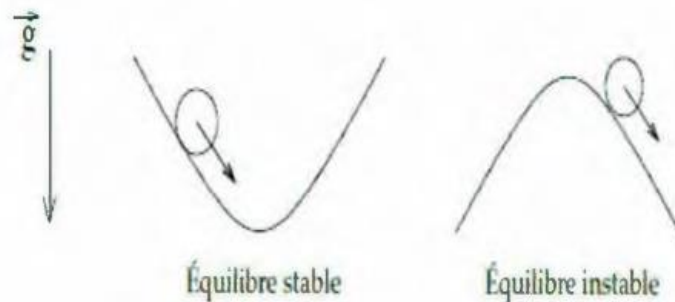


Figure III.1 : différents états de stabilité de l'équilibre d'une bille sur un support courbe

Pour la 1^{ère} forme en « U » la position au fond de « U » est en état d'équilibre en ce sens que la bille, posée et abandonnée précisément en ce point, ne bougera pas et y demeurera indéfiniment

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Cette position d'équilibre a ceci de particulier que, quel que soit l'endroit où la bille est initialement placée ou encore en écartant la bille de cette position, elle rejoindra forcément la fond de « U » : on parle alors d'un équilibre stable.

Pour ce qui est la 2^{ème} situation (forme en n), le sommet du support est aussi un point d'équilibre. Cependant, si l'on pose la bille ailleurs qu'en ce point, elle s'y éloignera. De même, à partir de ce point d'équilibre, si l'on décale ne serait que très légèrement, elle s'en éloignera tout aussi bien : on parle dans ce cas-ci d'équilibre instable (inconditionnellement).

La situation illustrée par la figure pour fixer les idées sur la notion d'instabilité, même si de prime abord semblent décrire le comportement d'un solide, il n'en demeure pas moins qu'elles traduisent aussi le comportement des fluides, car rappelons-nous que ce n'est qu'une question d'échelle. Spécifiquement, les instabilités trouvent dans le domaine de la mécanique des fluides un champ d'application particulièrement élaboré.

Nous allons dans ce qui suit nous intéresser spécialement à l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz.

3- Types d'instabilités

a- Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau



Figure III.2 : instabilité de Rayleigh-Plateau

b-Instabilité de Von Karman



Figure III.3 : instabilité de Von-Karman

c-Instabilité de Rayleigh-Bénard



Figure III.4 : Instabilité Rayleigh-Bénard

d-Instabilité de Taylor-couette



Figure III.5 : Instabilité de Taylor-couette

4-Instabilité de Kelvin Helmholtz

4-1-Historique :

Les instabilités de Kelvin-Helmholtz sont théorisées au 19^{ème} siècle par les deux physiciens dont elles portent le nom. Elles sont observées en premier lieu par H. V. Helmholtz et constituent le sujet de son article « Uber discontinuierliche Flussigkeitsbewegungen » publié en 1868. Le problème exploré initialement par Helmholtz était en fait la création des vagues à la surface de l'océan. Il avait en effet remarqué que les vagues ne se forment qu'à partir d'un vent de quatre nœuds, et avait essayé d'en expliquer la raison. William Thomson, mieux connu sous le nom de Lord Kelvin, publie sa propre théorie et complète celle de son homologue en 1871, dans son ouvrage intitulé par « Hydrokinetic solution and observations ».

Ces deux scientifiques mettent également au point un dispositif expérimental afin d'observer ces instabilités en laboratoire.[13]

4-2-Mise en perspectives :

Les instabilités KH constituent un phénomène excessivement répandu ; on peut les observer dans la plupart des environnements fluides, aussi bien naturels qu'artificiels. La prédiction du climat par exemple est un domaine où la compréhension des phénomènes tels que les KHI a son importance. En effet, le ciel est une zone où se forment de très nombreuses KHI à l'interface entre les courants atmosphériques, bien qu'elles ne soient visibles que lorsque le processus se produit au niveau d'un nuage. Par ailleurs, il est particulièrement important pour la bonne circulation des avions de pouvoir repérer la présence de KHI.

Dans le milieu de l'aéronautique on intègre les instabilités de KH dans la catégorie des turbulences en air clair, que ne sont pas détectables visuellement car elles n'ont pas lieu dans des zones nuageuse. Il existe aujourd'hui plusieurs types de radars, notamment les radars à effet de Doppler-Fizeau et les profileurs vent, capable de détecter ces instabilités à proximité des aéroports, et utilisés afin d'assurer davantage de sécurité lors de décollages et de atterrissages.

Il existe aussi des instabilités dans les océans, ainsi qu'en témoigne l'article intitulé par « familiarly curved deep and waves » publié en 2010 par Luis Gostiaux et Hans Van Haren. Celles-ci ont pu être détectées grâce à des capteurs de température à très haute

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

résolution. Leur présence dans les profondeurs océanique modifie localement les courants. Intégrer le phénomène des KHI dans certains modèles numériques de prédiction des courants marins pourrait donc permettre d'améliorer la précision de calculs. De tels modèles numériques permettent par exemple de prévoir la façon dont les polluants circulent et se dispersent dans l'océan, ou encore comment peuvent évoluer les températures océaniques.

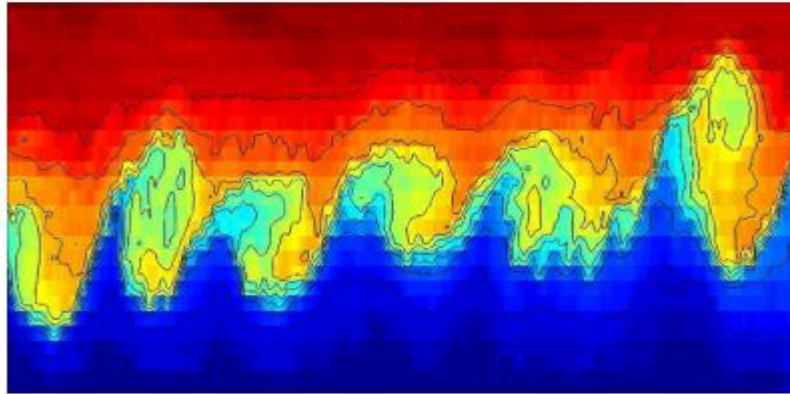


Figure III.6 : Image des températures au fond de l'océan, révélant la présence de KHI [14]

En outre les KHI sont également observables à l'échelle du système solaire : on trouve sur Saturne ou Jupiter, dont l'atmosphérique sont extrêmement turbulentes, ou encore à la surface du soleil, à l'interface entre des plasma plus ou moins dense.

En fin, les problématiques d'instabilités dans les fluides existent très certainement dans des nombreux procédés techniques mettant en jeu des fluides par exemple des réacteurs d'avion, des moteurs, des turbines.[14]

4-3-Développement d'équations de perturbation :

Etudions le mouvement de la surface de discontinuité situé à $y=0$ à l'état non perturbé. Supposons que les couches ont une profondeur infinie et que l'interface à une épaisseur nulle. Soient U_1 et ρ_1 être la vitesse et la densité de l'état de base dans la couche supérieure du plan (x, y) et U_2 et ρ_2 celles de la couche inférieure.[15]

Considérons les équations qui régissent l'écoulement, y compris toute perturbation. L'écoulement au-dessous de la nappe tourbillonnaire a un potentiel de vitesse ϕ_1 et qu'en dessous de la nappe un potentiel ϕ_2 . Si les écoulements sont considérés comme incompressibles et irrotationnels (potentiels), alors ils satisfont :

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad \text{Et} \quad \nabla^2 \phi_2 = 0 \quad (3.1)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Avec comme conditions aux limites

$$\begin{aligned} \nabla\phi_1 &= U_1 \quad \text{comme } y \rightarrow +\infty \\ \nabla\phi_2 &= U_2 \quad \text{comme } y \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces conditions nécessitent que la perturbation s'atténue loin de l'interface. Supposons qu'en raison d'une perturbation, l'interface se déformée et est décrite par l'équation $y = \eta(x, t)$. L'interface perturbée peut également être représentée par une équation paramétrique de la forme $f(x, y, t) = 0$.

Comme $y - \eta(x, t) = 0$ en tout point (x, y) sur l'interface et à tout instant t , il est clair que

$$f(x, y, t) = y - \eta(x, t) \quad (3.3)$$

Si l'interface se déplace avec une vitesse \bar{V}_{int} , la conditions cinématique à l'interface est donnée par :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{V}_{int} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.4)$$

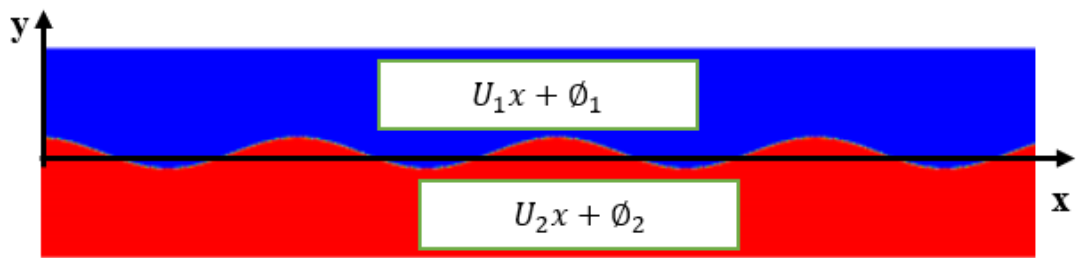


Figure III.7 : instabilité de Kelvin-Helmholtz : état initial perturbé

En utilisant (3.3), l'équation (3.4) peut être écrite comme :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\eta \quad \text{à } y = \eta(x, t) \quad (3.5)$$

Où v_η est la composante verticale de la vitesse du fluide à l'interface. L'équation (3.5) est la condition aux limites cinématique qui indique que l'interface se déplace vers le haut ou vers le bas avec une vitesse égale à la composante verticale de la vitesse du fluide.

En considérant les particules juste au-dessus de l'interface, la condition aux limites cinématiques nécessite

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_1 - u'_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v'_1 \quad \text{à } y = \eta(x, t) \quad (3.6)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Où u'_1 et v'_1 sont les composants de la vitesse perturbé dans les directions x et y respectivement.

Comme l'écoulement de base est dans la direction x, nous avons : $v'_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$. Par conséquent,

l'équation précédente peut être réarrangée comme suit :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_1 - u'_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{à } y = \eta(x, t) \quad (3.7)$$

Un argument similaire peut être avancé pour la couche inférieure, ce qui donne :

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_2 - u'_2) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{à } y = \eta(x, t) \quad (3.8)$$

Ceci fournit une condition aux limites pour ϕ_1 et ϕ_2 , la condition aux limites dynamique est dérivée de l'équation de Bernoulli instationnaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + gy = C(t) \quad (3.9)$$

Puisque (3.9) est valable des deux côtés de la surface, on a :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(\nabla \phi_1)^2}{2} + gy = C_1 \quad (3.10.a)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{(\nabla \phi_2)^2}{2} + gy = C_2 \quad (3.10b)$$

La condition à l'interface exige que la pression soit continue à travers l'interface (si la tension superficielle est négligée). C'est-à-dire $p_1 = p_2$ à l'interface et donc pour $y = \eta$ on a

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_1)^2}{2} - C_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_2)^2}{2} - C_2 \right) \quad (3.11)$$

Les équation (3.1), (3.2), (3.7), (3.8) et (3.11) régissent le mouvement non visqueux d'une interface de glissement et les écoulements de part et d'autre.

Les écoulements de base U_1 et U_2 satisfont le problème à $\eta = 0$, et la condition aux limites dynamiques réduit alors à :

$$\rho_1 \left(\frac{1}{2} U_1^2 - C_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{1}{2} U_2^2 - C_2 \right) \quad (3.12)$$

L'écoulement est décomposé en un état de base et en un état perturbé. Ainsi, les potentiels sont réécrits :

$$\phi_1 = U_1 x + \phi'_1 \quad (3.13a)$$

$$\phi_2 = U_2 x + \phi'_2 \quad (3.13b)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Où ϕ'_1 et ϕ'_2 représentent l'écoulement perturbé de base des courants uniformes de fluide. Lorsque ces relations sont substituées dans l'équation (3.1), nous trouvons que :

$$\nabla^2 \phi'_1 = 0 \quad \nabla^2 \phi'_2 = 0 \quad (3.14)$$

Alors que l'équation (3.2) montre que les perturbations s'annulent à l'infini :

$$\nabla^2 \phi'_1 = 0 \text{ comme } y \rightarrow +\infty \quad (3.15a)$$

$$\nabla^2 \phi'_2 = 0 \text{ comme } y \rightarrow -\infty \quad (3.15b)$$

Les conditions de surface (3.7) et (3.8) peuvent être linéarisées en appliquant la condition aux limites à $y = 0$ au lieu de $y = \eta$ et en supprimant les termes quadratiques :

$$\frac{\partial \phi'_1}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{à } y = 0 \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial \phi'_2}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{à } y = 0 \quad (3.16b)$$

En introduisant la décomposition (3.13a) et (3.13b) dans les conditions aux limites dynamiques (3.10a) et (3.10b), et en exigeant que $p_1 = p_2$ à $y = \eta$, le réarrangement de l'équation (3.10.a) permet d'obtenir une condition à l'interface :

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_1 x + \phi'_1) + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} [\nabla (U_1 x + \phi'_1)^2] + g \eta = C_1 \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (U_1 x + \phi'_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} (U_1 x + \phi'_1) \right)^2 \right] + g \eta = C_1 \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \left[\left(U_1 + \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial y} \right) \right] + g \eta = C_1 \quad (3.17c)$$

La linéarisons de la dernière équation donne :

$$\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \left(U_1^2 + 2U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} \right) + g \eta = C_1 \quad (3.18)$$

En résolvant pour la pression :

$$-p_1 = \rho_1 \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + \frac{1}{2} U_1^2 + U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} + g \eta - C_1 \right) \quad (3.19)$$

Une transformation similaire peut être faite pour l'équations (3.10.b), ce qui permet d'écrire :

$$-p_2 = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + \frac{1}{2} U_2^2 + U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} + g \eta - C_2 \right) \quad (3.20)$$

Comme $p_1 = p_2$ à $y = \eta$ les deux équations précédentes peuvent être combinées et la relation d'écoulement permanent (3.12) est substituée pour obtenir :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} + g \eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} + g \eta \right) \text{ à } y = 0 \quad (3.21)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Le problème mathématique pour η , φ'_1 et φ'_2 se compose des équations (3.14) et (3.15a) et (3.15b)

4-4-Analyse en modes normaux :

On peut résoudre les trois équations linéaires (3.16a), (3.16b) et (3.21) et déterminer les fonctions η , φ'_1 et φ'_2 à partir de laquelle on tire la condition de stabilité du système. Tous les coefficients de trois équations sont des constantes, et nous pouvons donc effectuer l'analyse en mode normale.

L'écoulement a été divisé en un écoulement de base stable et une perturbation dépendante de temps. La perturbation peut être représentée par une composition des modes normaux suivants :

$$\eta = \hat{\eta} e^{ik(x-ct)} \quad (3.22)$$

$$\varphi'_1 = \hat{\varphi}_1(y) e^{ik(x-ct)} \quad (3.23a)$$

$$\varphi'_2 = \hat{\varphi}_2(y) e^{ik(x-ct)} \quad (3.23b)$$

Où k est réel, $c = c_r + c_i$ est une vitesse d'onde complexe.

Noter que η est l'amplitude originale du déplacement de l'interface et est une constante. C 'est une mesure de la magnitude des perturbations. Lorsque $c_i > 0$, ce déplacement est instable et croit de façon exponentielle dans le temps.

La substitution des modes normaux (3.23a), (3.23b) dans l'équations de Laplace (3.14) nous permet de déterminer les formes des fonctions d'amplitude de $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$. Par exemple, $\nabla^2 \varphi'_1 = 0$ donne :

$$\nabla^2 (\hat{\varphi}_1 e^{ik(x-ct)}) = 0 \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{\varphi}_1 e^{ik(x-ct)}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\hat{\varphi}_1 e^{ik(x-ct)}) = 0 \quad (3.24b)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial x^2} (e^{ik(x-ct)}) + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial y^2} (e^{ik(x-ct)}) = 0 \quad (3.24c)$$

$$-k^2 \hat{\varphi}_1 (e^{ik(x-ct)}) + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial y^2} (e^{ik(x-ct)}) = 0 \quad (3.24d)$$

$$e^{ik(x-ct)} \left[\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial y^2} - k^2 \hat{\varphi}_1 \right] = 0 \quad (3.24e)$$

$$\frac{d^2 \hat{\varphi}_1}{dy^2} = k^2 \hat{\varphi}_1 \quad (3.24f)$$

L'équations ci-dessus est une ODE homogène du second ordre avec des coefficients constants, et sa solution générale est :

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

$$\widehat{\phi}_1 = Ae^{-ky} + Ce^{ky} \quad (3.25)$$

Et de la même manière $\nabla^2 \phi'_2 = 0$ donne :

$$\widehat{\phi}_2 = De^{-ky} + Be^{ky} \quad (3.26)$$

Où A, B, C et D sont des constants d'intégration. On voit que pour satisfaire les conditions aux limites (3.15a) et (3.15b) les constantes C et D doivent être nulles. Par conséquent, les amplitudes sont de la forme :

$$\widehat{\phi}_1 = Ae^{-ky} \quad (3.27a)$$

$$\widehat{\phi}_2 = Be^{ky} \quad (3.27b)$$

Substitution de l'équation (3.17a) et (3.27b) dans l'équation (3.23a) et (3.23b) pour les modes normaux pour ϕ'_1 et ϕ'_2 donne :

$$\phi'_1 = Ae^{-ky} e^{ik(x-ct)} \quad (3.28a)$$

$$\phi'_2 = Be^{ky} e^{ik(x-ct)} \quad (3.28b)$$

La substitution des modes normaux (3.22) et (3.28a) et (3.28b) dans les conditions cinématiques d'interface (3.15) donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} (Ae^{-ky} e^{ik(x-ct)}) = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\eta} e^{ik(x-ct)}) + U_1 \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\eta} e^{ik(x-ct)}) \quad (3.29a)$$

$$kAe^{-ky} e^{ik(x-ct)} = -ikc\hat{\eta} e^{ik(x-ct)} + ikU_1 \hat{\eta} e^{ik(x-ct)} \quad (3.29b)$$

$$Ae^{-ky} = -i\hat{\eta}(U_1 - c) \quad (3.29c)$$

L'équation ci-dessus, lorsqu'elle est évaluée à $y = 0$ fournit une équation pour A. une équation similaire pour B peut également être obtenu en utilisant la même procédure ci-dessus. Ainsi, nous avons :

$$A = -i\hat{\eta}(U_1 - c) \quad (3.30a)$$

$$B = i\hat{\eta}(U_2 - c) \quad (3.30b)$$

L'équation final est obtenue en substituant l'équation (3.22) et (3.28a) et (3.28b) dans la condition à l'interface dynamique (équation Bernoulli). Cela donne :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} + g \eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} + g \eta \right) \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 e^{ik(x-ct)} (-ikcAe^{-ky} + ikU_1 Ae^{-ky} + g\hat{\eta}) \\ = \rho_2 e^{ik(x-ct)} (-ikcBe^{ky} + ikU_1 Be^{ky} + g\hat{\eta}) \end{aligned} \quad (3.31b)$$

à $y = 0$

$$\rho_1 [ikA(U_1 - c) + \hat{\eta}] = \rho_2 [ikB(U_2 - c) + \hat{\eta}] \quad (3.32)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

La substitution des expressions de A et B donne :

$$\rho_1[k(U_1 - c)^2\hat{\eta} + g\hat{\eta}] = \rho_2[k(U_2 - c)^2\hat{\eta} + g\hat{\eta}] \quad (3.33)$$

Après réarrangement :

$$\rho_1k(U_1 - c)^2 + \rho_2k(U_2 - c)^2 = g(\rho_2 - \rho_1) \quad (3.34)$$

L'équation (3.34) donne la relation au valeurs propres pour $c(k)$. La résolution de cette équation pour la vitesse d'onde complexe donne :

$$c = c_r + ic_i = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[\frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \rho_1 \rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.35)$$

On peut voir que la vitesse d'onde c est réelle ($c_i = 0$) si le terme dans la racine carrée est positif. Par conséquent, les deux solutions sont neutres stable si :

$$\begin{aligned} \frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} &\geq \rho_1 \rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 \\ k &\leq \frac{g}{\rho_1 \rho_2} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(U_1 - U_2)^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ce qui donne les ondes stables du système. D'autre part, l'écoulement (solution) est instable si $c_i > 0$. Autrement dit

$$k > \frac{g}{\rho_1 \rho_2} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(U_1 - U_2)^2} \quad (3.37)$$

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{g}{k} \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{\rho_1 \rho_2} \quad (3.38)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec λ : la longueur d'onde

L'équation (3.35) montre que pour chaque solution amplifiée (instable), il existe une solution amortie (stable) associée. Ce comportement est dû fait que les coefficients de l'équation différentielle de perturbation et les conditions aux limites sont tous réels. Si $U_1 \neq U_2$ alors on peut toujours trouver un k suffisamment grand qui satisfait à la condition d'instabilité.

Comme toutes les longueurs d'onde doivent être admises dans une analyse d'instabilité, on peut dire que l'écoulement est toujours instable aux ondes courtes si $U_1 \neq U_2$.

5-Instabilité de Rayleigh Taylor

5-1-Introduction

L'instabilité de Rayleigh Taylor (RTI), nommée en hommage aux physiciens britanniques Lord Rayleigh et G. I. Taylor est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes, qui résulte de la poussée du fluide le plus lourd sur le plus léger (l'accélération dans le cas d'un système dynamique ou la gravité pour un système initialement statique est dirigée vers la phase légère).[17]

5-2-Phénoménologie :

Considérons deux fluides non miscibles, et placés l'un au-dessus de l'autre (le plus lourd placé au-dessus du plus léger) et tous deux soumis à la pesanteur terrestre. L'équilibre est instable à la moindre perturbation : toutes perturbation va s'amplifier et libérer de l'énergie potentielle, le fluide le plus lourd gagnant progressivement la moitié inférieure sous l'effet du champ de gravitation, et le fluide léger passant au-dessus. Cette perturbation est connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Taylor.[18]

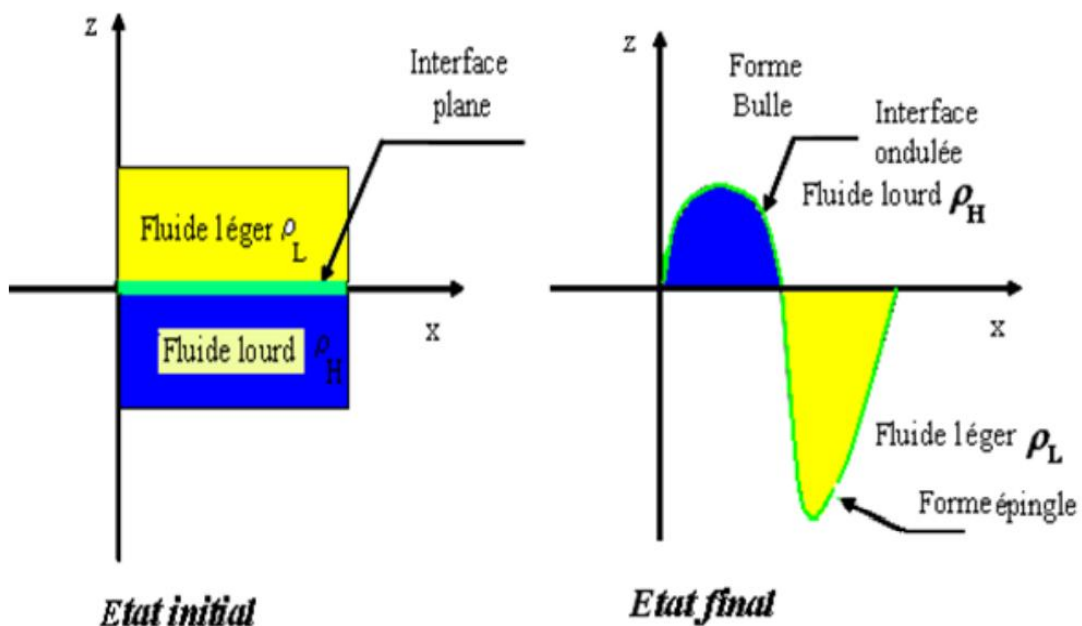


Figure III.8 : principe de déclenchement de l'instabilité de Rayleigh Taylor [18]

5-3-Principe de la machine d'Atwood :

Pour faire l'analogie de cette instabilité on s'appuie sur un modèle connu de la mécanique de solide expérience de la machine d'Atwood.

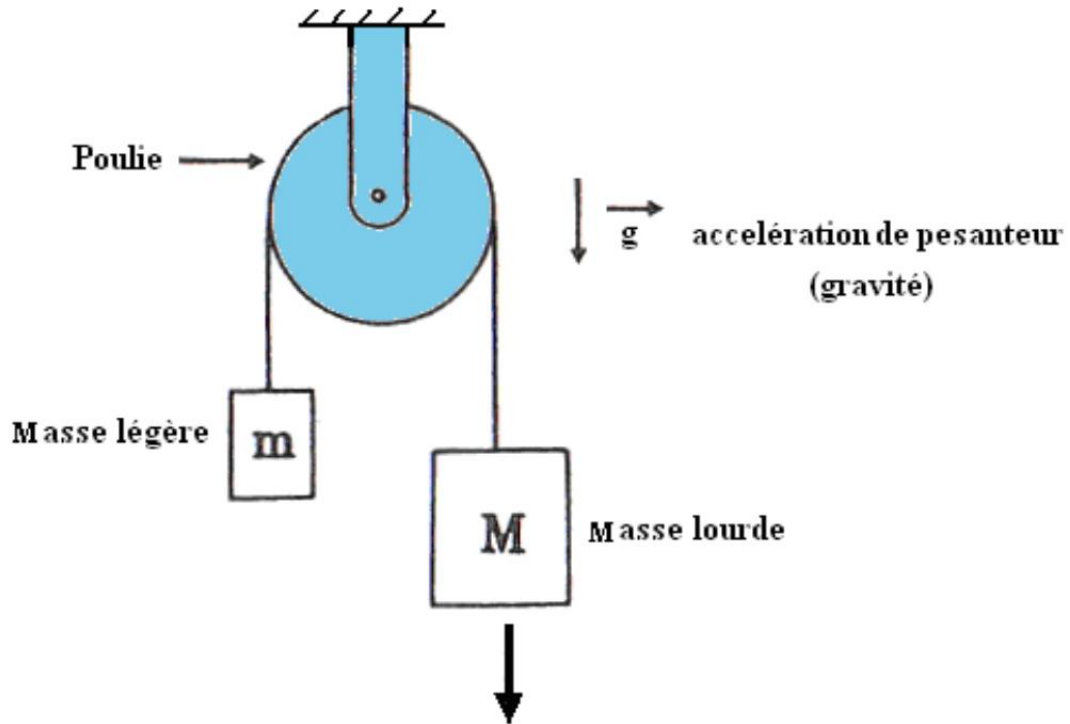


Figure III.9 : modèle de caractérisation d'une d'instabilité en dynamique du solide par la machine d'Atwood [18]

Le déplacement des deux masses différentes M et m dans le sens des aiguilles d'une montre sous l'effet de gravité est contrôlé par un paramètre caractéristique appelé le nombre d'Atwood At qui est défini comme suit :

$$At = \frac{M - m}{M + m} \quad (3.39)$$

On suppose que M est la masse lourde et m est la masse légère de sorte que $M > m$.

On peut également définir At par le rapport de densité :

$$At = \frac{\rho_H - \rho_L}{\rho_H + \rho_L} \quad (3.40)$$

Dans les conditions de la chute libre de corps, l'accélération naturelle est $a=g$ avec g est l'accélération de pesanteur.

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Dans ce cas, on peut définir l'accélération a au moyen de nombre At dans le cas de la machine Atwood de façon que :

$$a = At \cdot g$$

Par conséquent, At apparait comme un paramètre permettant de moduler l'importance du phénomène d'accélération selon la valeur fixée dans l'intervalle $0 \leq At \leq 1$.

On distingue trois cas possibles lors du mouvement relatif au déplacement des deux masses :

- **Cas 1** : lorsque $At = 0$, correspondant à l'égalité de masse $M=m$ et telle que l'accélération s'annule $a=0$, on est alors en situation d'équilibre statique.
- **Cas 2** : lorsque $At = 1$, cette situation correspondant à la masse $m=0$. Dans ces conditions l'accélération a est maximale et est telle que $a=g$, on est en chute libre des corps
- **Cas 3** : lorsque $0 < At < 1$, on est dans une situation où l'on peut contrôler le phénomène d'accélération qui peut engendrer sous certain condition un processus analogue à RTI.

5-4-Modélisation de l'instabilité interfaciale

Le modèle utilisé pour décrire les ondes de surfaces au repos repose sur les équations d'Euler en incompressible.

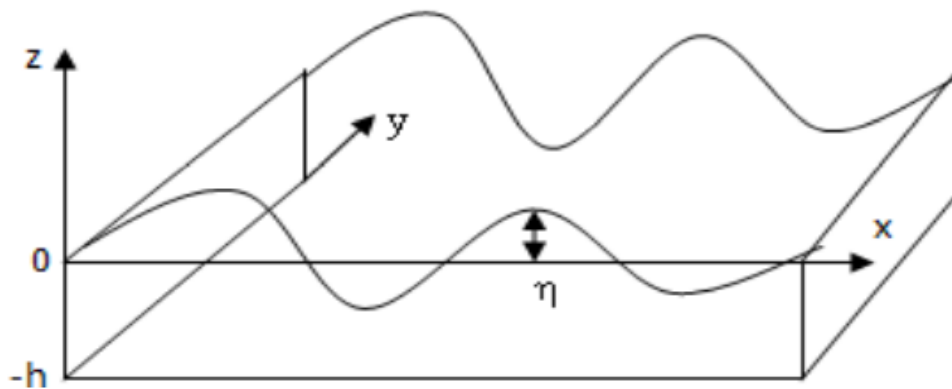


Figure III.10 : Onde à surface libre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{U} = 0 \\ \rho_0 \frac{d\bar{U}}{dt} = -\overline{\operatorname{grad} P} - \rho_0 g \bar{e}_z \end{cases} \quad (3.41)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Avec les conditions aux limites

$$\frac{df}{dt} = \gamma - \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad (3.42)$$

Et $P = P_a$ sur la surface libre d'équation $f(x, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ et $\gamma = 0$ sur le fond plat d'équation $z = -h$.

L'élévation de la surface libre η est donnée, la pression atmosphérique P_a est supposée constante et la profondeur de la couche fluide au repos est h .

En imposant la condition aux limites $P = P_a$, on néglige la tension superficielle qui aurait pour effet d'ajouter à P_a le terme $\sigma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$, où σ est la tension de surface et R_1 et R_2 les deux rayons de courbure dans deux plans orthogonaux quelconques contenant la normale à la surface libre. Cet effet n'intervient qu'aux petites échelles.

On suppose que l'écoulement est irrotationnel :

$$\overline{rot} \vec{U} = 0 \quad (3.43)$$

Ce qui permet d'écrire le champ de vitesse sous forme

$$\vec{U} = \overline{grad} \phi \quad (3.44)$$

Le système d'équation se met alors sous la forme

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \overline{grad} \left[\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \rho_0 (\overline{grad} \phi)^2 + P_a + \rho_0 g z \right] = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Avec les conditions aux limites associées

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\phi}{dz} \quad (3.46)$$

Et $P = P_a$ pour $z=\eta$ et $\frac{d\phi}{dz} = 0$

Comme ϕ est défini à une fonction du temps $C(t)$ arbitraire près, on peut choisir P_a comme constante d'intégration du gradient. On élimine alors, la pression grâce à la relation :

$$P = P_a - \rho_0 g z - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \rho_0 (\overline{grad} \phi)^2 = -g\eta \quad (3.47)$$

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

La pression étant ainsi éliminée, on doit résoudre l'équation $\Delta\phi = 0$ dans tout le fluide avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\phi}{dz} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2}\rho_0(\overline{grad\phi}) = -g\eta \quad (3.49)$$

Pour $z=-h$, $z=\eta$ et $\frac{d\phi}{dz} = 0$

5-5-Relation de dispersion interfaciale

Cette relation est très recherchée afin de caractériser les conditions d'apparition de l'instabilité de Rayleigh Taylor.

On donne, ici, un aperçu de calculs permettant d'établir la relation de dispersion liant les caractéristiques de l'instabilité.

On linéarise autour l'état de base $\vec{U} = 0$, $\eta=0$ et $P_0(z) = P_a - \rho_0gz$ en posant

$$P = P_0 + \bar{P}$$

La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations et à l'obtention des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial z} & \text{si } z = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\eta & \text{si } z = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 & \text{si } h = -h \end{array} \right. \quad (3.50)$$

En éliminant η , on doit alors résoudre : $\Delta\phi = 0$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{si } z = -h \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Une fois le potentiel des vitesses ϕ connu, la pression s'en déduit à l'aide de la relation :

$$\bar{P} = -\rho_0 \frac{d\phi}{dt} \quad (3.52)$$

On cherche des solutions sous la forme

Chapitre III : les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

$$\phi = \phi(z)e^{(ik_1x - ik_2y - i\gamma t)} \quad (3.53)$$

On note $k^2 = k_1^2 + k_2^2$

Le système précédent devient alors

$$\phi'' - k^2\phi = 0 \quad (3.54)$$

Avec les conditions suivantes

$$-\gamma^2\phi(0) + g\phi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi'(h) = 0 \quad (3.55)$$

Les solutions de base sont de la forme

$$\phi = \phi_1 e^{kz} + \phi_2 e^{-kz} \quad (3.56)$$

Et doivent satisfaire

$$(\gamma^2 - gk)\phi_1 + (\gamma^2 - gk)\phi_2 = 0 \quad (3.57)$$

Ce système linéaire admet des solutions non nulles lorsque son déterminant est nul. Ce qui conduit à la relation de dispersion $\gamma^2 = gk \cdot \tanh(kh)$

Et si $\gamma \geq 0$ on a

$$\gamma = \sqrt{gk \cdot \tanh(kh)} \quad (3.58)$$

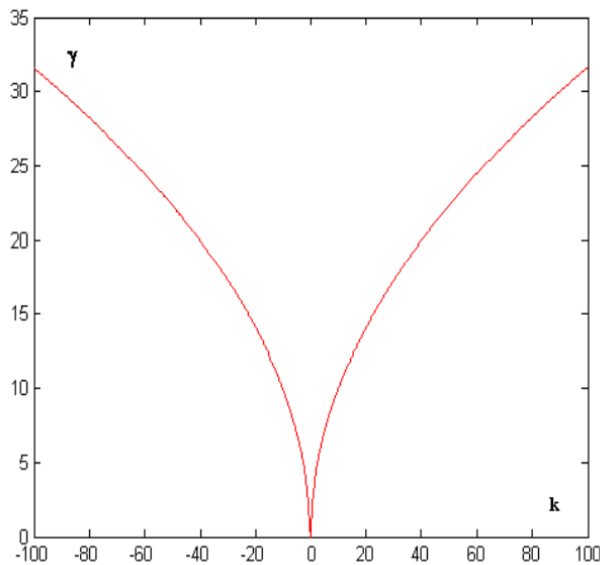


Figure III.11 : Relation de dispersion des ondes de surface



Chapitre IV

1-Introduction

Dans cette partie, on a étudié numériquement l'instabilité bidimensionnelle de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor entre deux couches fluides (air/vapeur d'eau dans KHI et eau/huile dans RTI). Trois méthodes sont appliquées pour capturer le mouvement libre de l'interface, à savoir la méthode VOF (volume of fluid), la méthode Level Set et la méthode CLSVOF (couplage Level set /VOF).

Les trois méthodes sont très populaires et disponibles dans les outils commerciaux de dynamique des fluides numériques. Les résultats obtenus sont en bon accord avec la théorie de la stabilité. L'application de ces trois méthodes est comparée, et les avantages et inconvénients sont mis en évidence.

2-Procédure de travail :

1-Position de problème : il est très important de comprendre autant que possible le sujet du problème afin de le définir exactement et de pouvoir se lancer dans la simulation sans erreur.

2-Génération de la géométrie : la géométrie est construite à l'aide de deux outils : CFD ANSYS 2020R1 et COMSOL Multiphasiques 5.6.

3-Génération de maillage : l'espace continu du domaine des deux fluides est divisé en cellules discrètes suffisamment petites.

4-spécification du domaine : les spécifications du domaine définissent les propriétés physiques des fluides utilisés à l'étude de KHI et RTI, les modèles des écoulements, les conditions aux limites et les conditions initiales.

5-Calcul de la solution numérique : quand toutes les informations exigées pour la simulation ont été spécifiées, le logiciel exécute alors les calculs itératifs.

5-Analyse de résultat : après avoir obtenu la solution numérique demandée, l'utilisateur peut alors procéder à leur analyse afin de vérifier que la solution est satisfaisante ce qui valide les données de domaine. Si les résultats obtenus sont inacceptables (n'est pas bonne) la source d'erreur possible doit être identifiée. Ces erreurs peuvent provenir des spécifications de domaine incorrectes, d'une qualité pauvre de maillage ou d'une erreur conceptuelle dans la formulation du problème.

3-Effet de maillage sur les deux instabilités

La génération de maillage est une phase très importante de l'analyse des phénomènes des instabilités dans les écoulements diphasiques due au mouvement libre d'interface, vu son influence sur la solution ou bien les résultats obtenus.

Pour que les résultats de simulation dans les phénomènes étudiés soient suffisamment précis, on a lancé la simulation une première fois avec un maillage grossier. Ce que nous avons remarqué, c'est que l'épaisseur d'interface varie en fonction de la qualité et de précision de maillage. Si la précision de maillage est faible au niveau d'interface, l'épaisseur augmente progressivement au cours de la simulation. Après quelques essais, nous avons validé le maillage de géométrie du KHI à (160*1000) avec 161161 nœuds et 0.84 de qualité. Pour la géométrie de RTI, le maillage utilisé est de type quadratique avec 0.009 taille des éléments, 151000 nœuds et une qualité de l'ordre de 0.87.

Les résultats obtenus lorsque le maillage est plus grand que le validé sont presque les mêmes. Alors, la qualité du maillage a un sérieux impact sur la convergence, la précision de la solution et surtout sur le temps de calcul.

« Une bonne qualité de maillage est la clé de bons résultats »

4-Instabilité de Kelvin Helmholtz

4-1-Position de problème

On considère deux fluides superposés qui sont incompressibles, non visqueux et non miscibles, de vitesse d'écoulement différentes.

Dans l'écoulements de base instationnaire que l'on considère, les deux fluides de densité respectivement ρ_1 et ρ_2 , se déplacent à vitesses constantes, horizontales et uniformes U_1 et U_2 . Les deux fluides sont séparés par une frontière matérielle ou interface initialement perturbée.

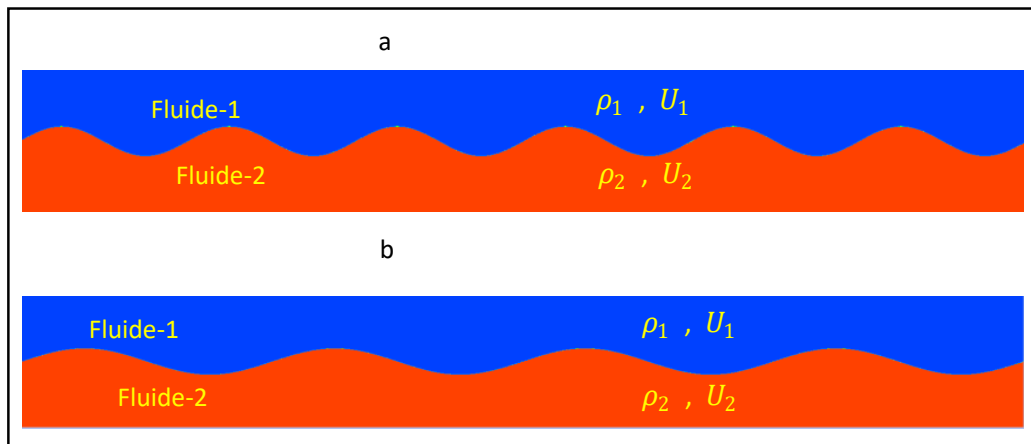


Figure IV.1 : Représentation géométrique de KHI (a) cas 1. (b) cas 2

4-2-Modèle et sa résolution

Considérons la simulation de deux fluide (air – vapeur d'eau) initialement à l'état perturbé, sur un maillage bidimensionnel (avec une précision à l'interface, la partie qui nous intéresse). La configuration de départ est donnée par la figure. Les dimensionnements des deux géométries sont mis en évidence (Tableau 1)

a-Géométries

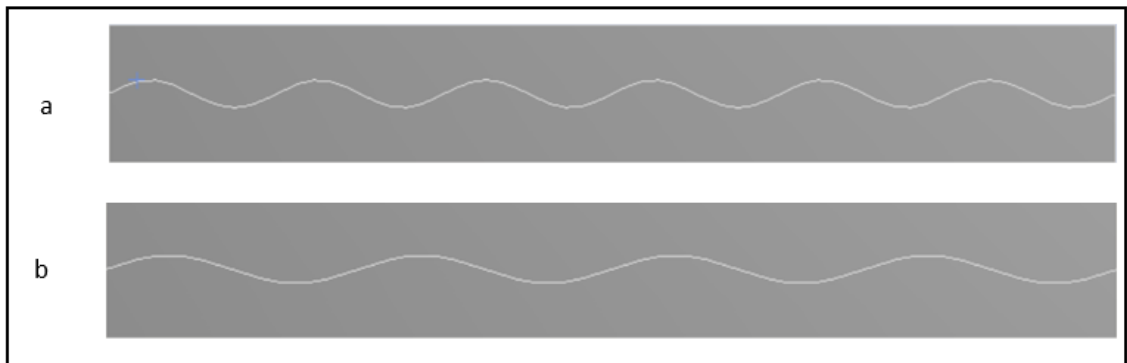


Figure IV.2 : Géométries des deux cas de KHI

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

Les dimensionnes des deux géométries sont données dans le tableau ci-dessus

Cas	Longueur (m)	Hauteur (m)	Amplitude (m)	Périodique	Longueur d'onde (m)
Cas 1	7.54	1	0.1	0.2	1.256
Cas 2	7.54	1	0.1	0.3	1.885

Tableau IV.1 : dimensions des deux géométries

b-Maillage

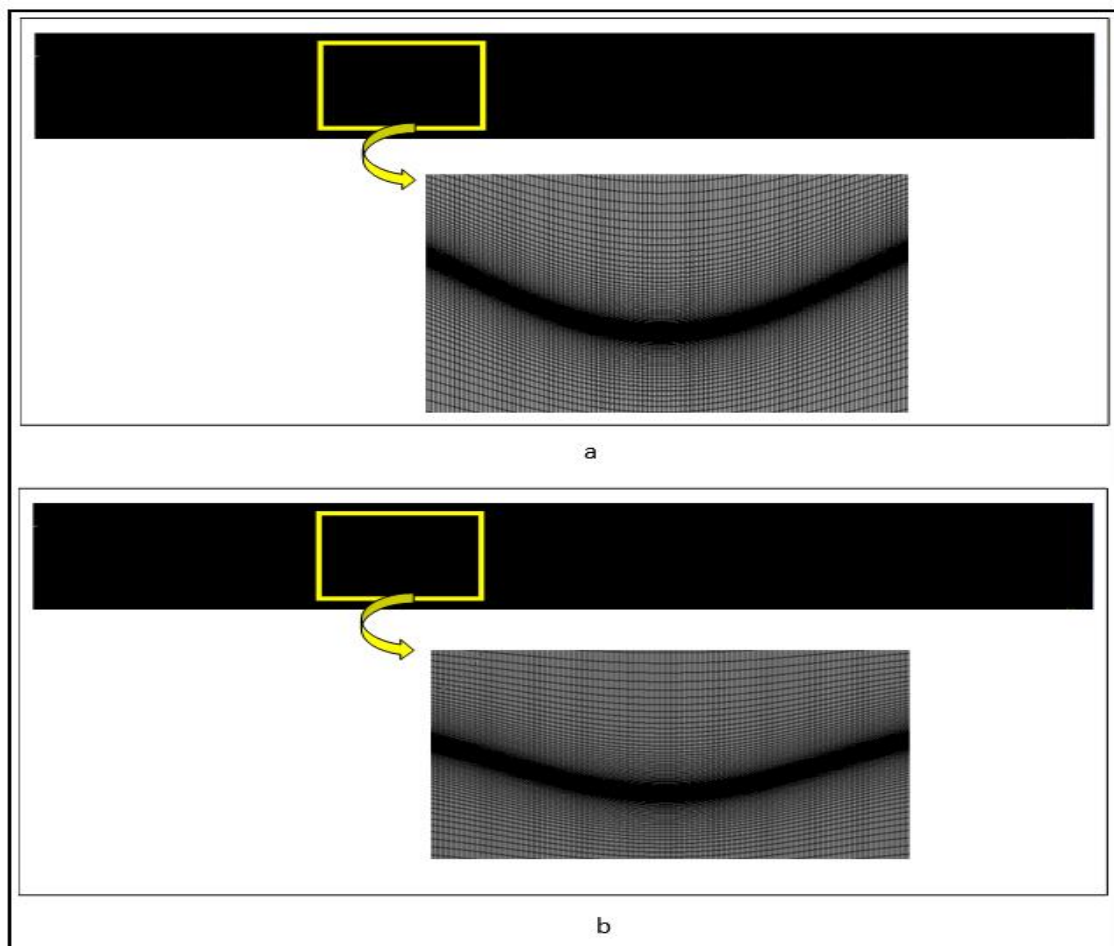


Figure IV.3 : maillage des géométries (a) cas 1 (b) cas 2

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

4-3-Simulation

Les simulations de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz a été réalisé à l'aide des logiciels ANSYS 2020R1 et COMSOL Multiphasiques 5.6. Ces simulations ont considéré un volume d'air reposant au-dessus d'un volume de vapeur d'eau. Les paramètres physiques des deux fluides dans les deux cas de KHI sont mentionnés dans le tableau suivantes :

Cas	Fluide	La masse volumique (kg/m^3)	Viscosité ($kg/m.s$)	Vitesses (m/s)	Tension de surface (N/m)
Cas 1	Air	1.225	1.7894e-5	4	0.004
		1.111		5	0.0035
	Vapeur d'eau	0.5542	1.34e-5	1	
		0.350		0.5	
Cas 2	Air	1.225	1.7894e-5	6	0.004
	Vapeur d'eau	0.5542	1.34e-5	3.5	

Tableau IV.2 : Paramètre physiques des fluides dans la simulation de Kelvin-Helmholtz

La fonction de contour dans l'onglet graphique et animations ont été utilisées pour fournir une visualisation de la fraction de volume (la fraction volumique de la vapeur d'eau) pendant que le solveur exécute la simulation, fournissant un film de simulation.

Les paramètres généraux choisis dans les outils de simulation étaient un solveur basé sur la pression avec une formulation de vitesse absolue pour une étude instationnaire (transitoire) dans l'espace 2D.

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

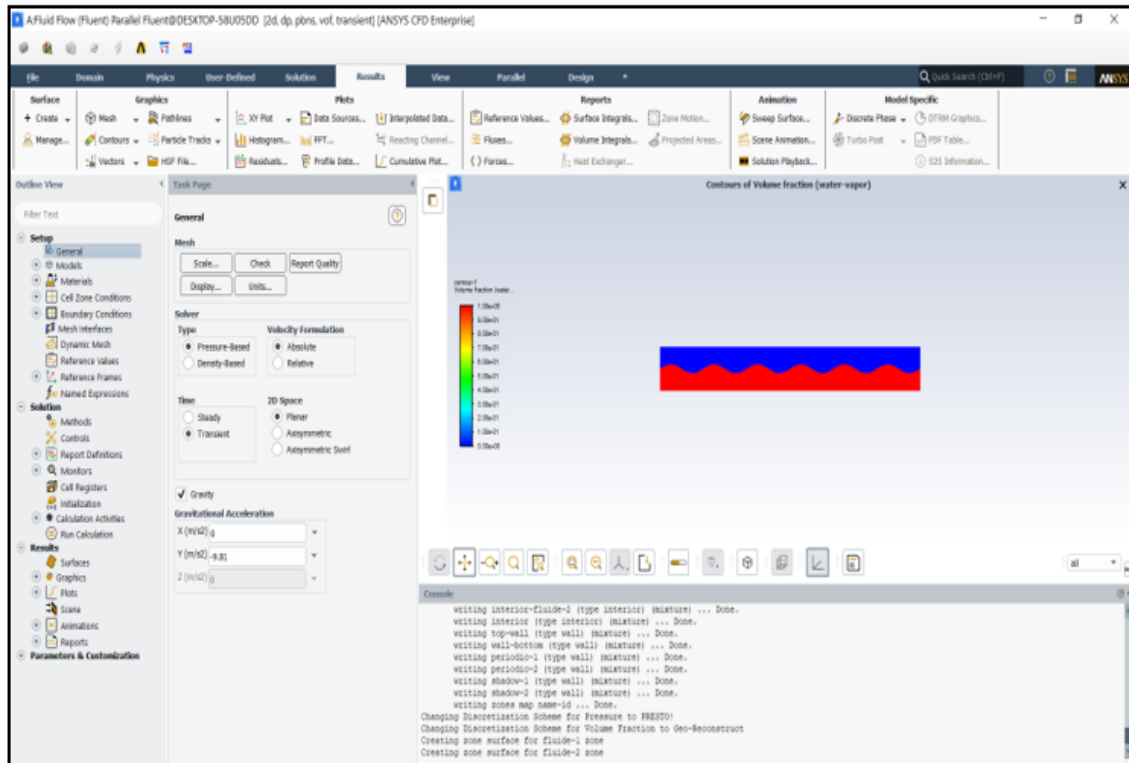


Figure IV.4 : modèle ANSYS Fluent 2020 R1

Le modèle multiphasique utilisé dans Fluent était un modèle de volume de fluide (VOF) avec deux phase eulériennes et de paramètres par défaut pour les paramètres de fraction volumique. La phase primaire a été fixé à l'air et la phase secondaire était la vapeur d'eau.

L'accélération gravitationnelle a été définie dans les paramètres généraux de Fluent (et COMSOL) avec une composante Y de $-9.81 m/s^2$. (Figure 2)

Dans le modèle multiphasique, la méthode CLSVOF a été sélectionnée pour "coupled Level Set + VOF" et les mêmes étapes que dans la méthode VOF ont été conservées pour la simulation.

La simulation a été exécuté avec un pas de temps de 0.001s pour 800 pas de temps pour un totale de 0.8s

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

Le modèle multiphasique utilisé dans le logiciel COMSOL était un modèle Level Set avec deux phases eulériennes.

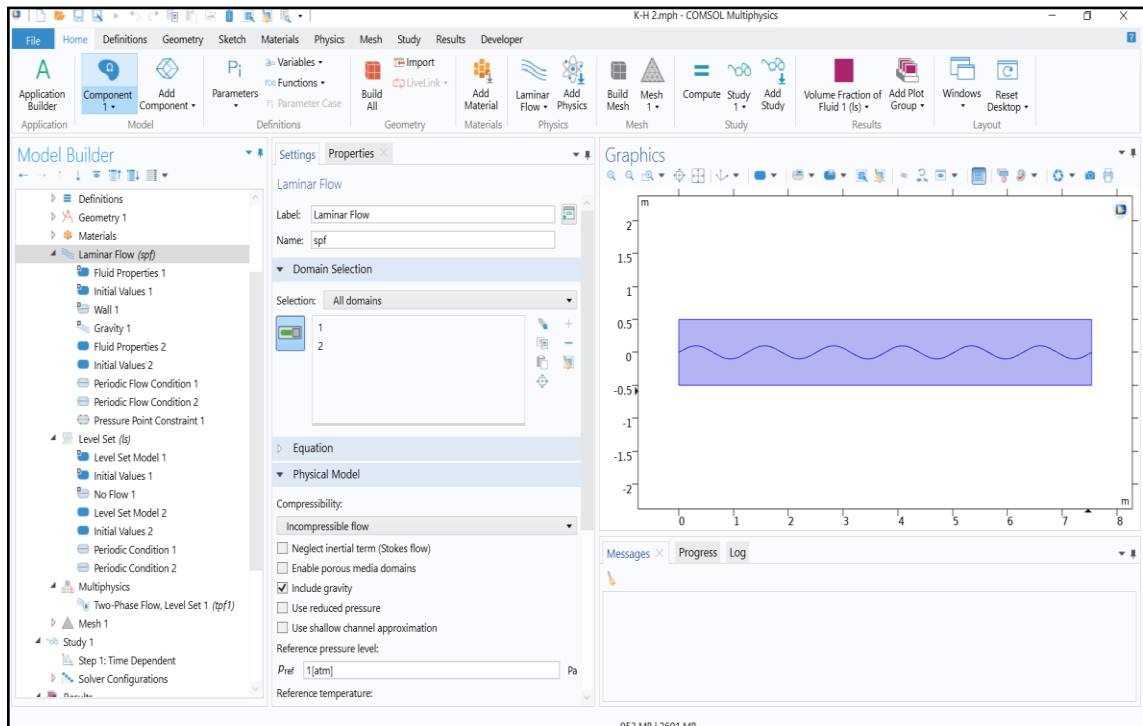


Figure IV.5 : modèle COMSOL multiphasique

La simulation a été exécuté avec un pas de temps de 0.01s pour un totale de 0.8s

4-4-Résultats et discussion

4-4-1-l'effet du vitesses et la longueur d'onde

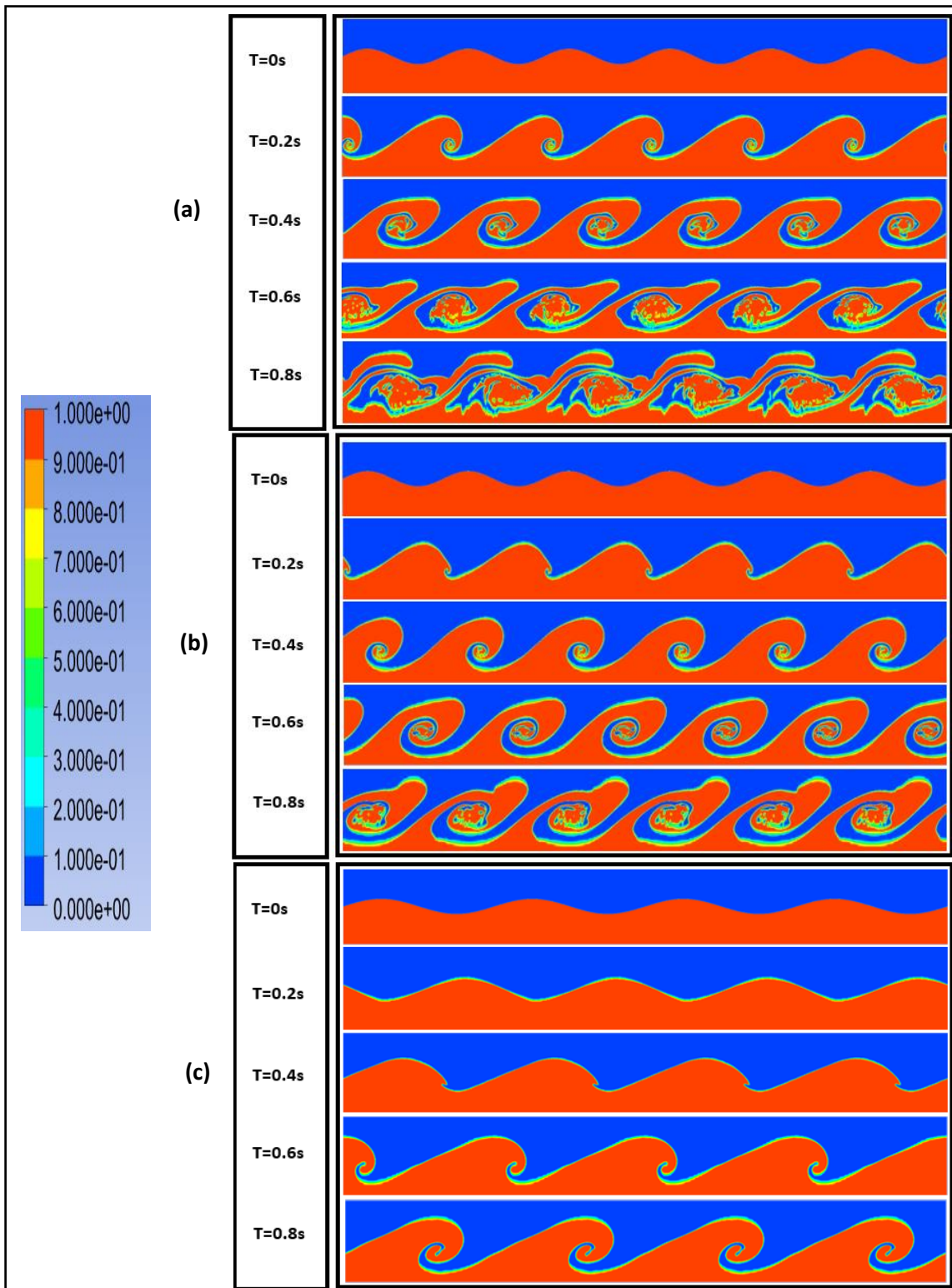


Figure IV.6 : simulation de KHI avec différentes vitesses par la méthode VOF (a) 5 m/set 0.5 m/s

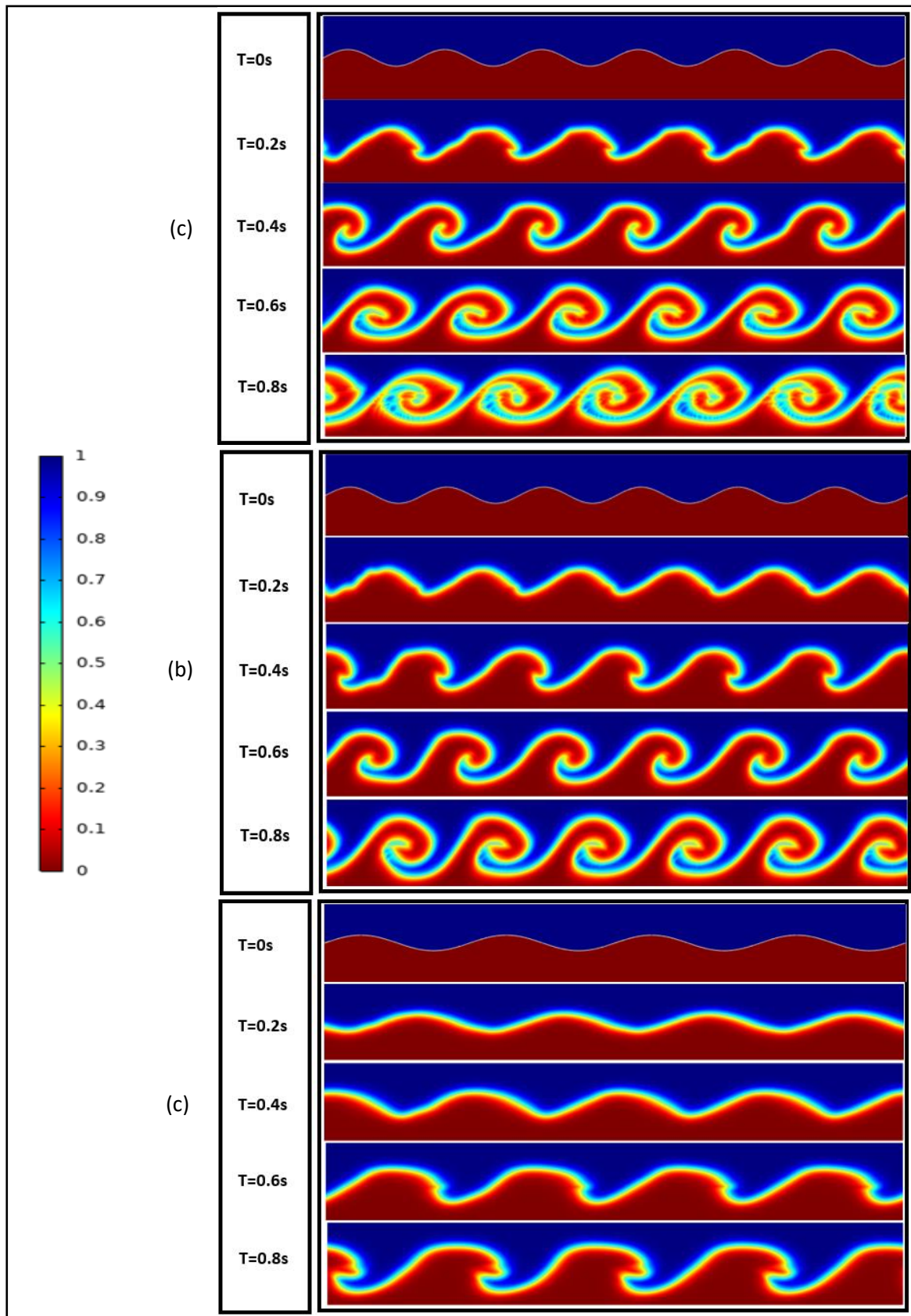


Figure IV.7 : simulation de KHI avec différentes vitesses par la méthode LS (a) 5 m/set 0.5 m/s
(b) 4 m/s et 1 m/s (c) 6 m/s et 3.5 m/s

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

Les figures montrent un instantané du fluide pour des différentes vitesses. La simulation laisse apparaître que pour une différence de vitesse plus grande le déclenchement de phénomènes est plus rapide et les vorticités des KHI sont plus grandes. Ceci met donc en évidence qu'une grande différence de vitesse est un phénomène déstabilisant. Ces résultats confortent la modélisation du phénomène cité plus haut, ainsi que la relation de dispersion.

Dans le cas 2 le déclenchement du phénomène de KHI est plus lente que dans le cas 1. C'est l'effet de la longueur d'onde. Il est donc visible que lorsque la longueur d'onde est plus grande l'évolution du phénomène est plus lent.

4-4-2-Effet de différence de densité

Dans ce qui suit nous avons interprété les résultats des simulations de le premier cas de KHI pour des densité différentes.

Les figures montrent un instantané de l'évolution du fluide pour des différentes de densité décroissante. La simulation met en évidence qu'une différence de densité plus faible augmente l'amplitude de l'instabilité. Une faible différence de densité est donc un paramètre déstabilisant. Il est aussi visible que pour une grande différence de densité, le déclenchement de phénomène est plus lent. Alors, on peut dire qu'un fluide un peu moins dense qu'un autre subira une poussée vers le haut d'autant plus faible que l'écart en densité est faible.

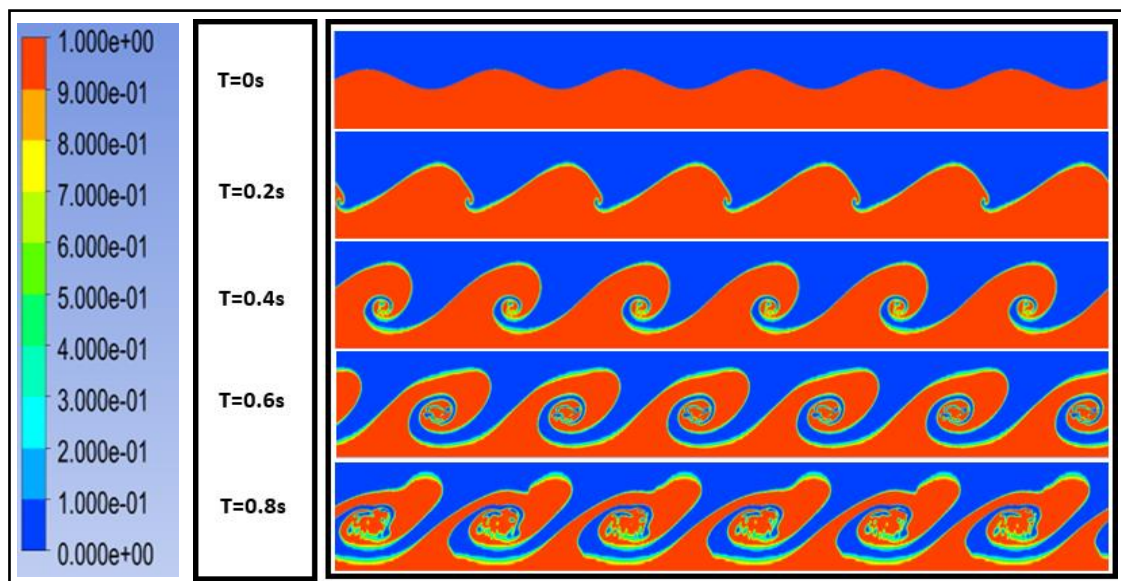


Figure IV.8 : simulation de KHI avec $\rho_1=1.225 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.5542 \text{ kg/m}^3$ par la méthode VOF

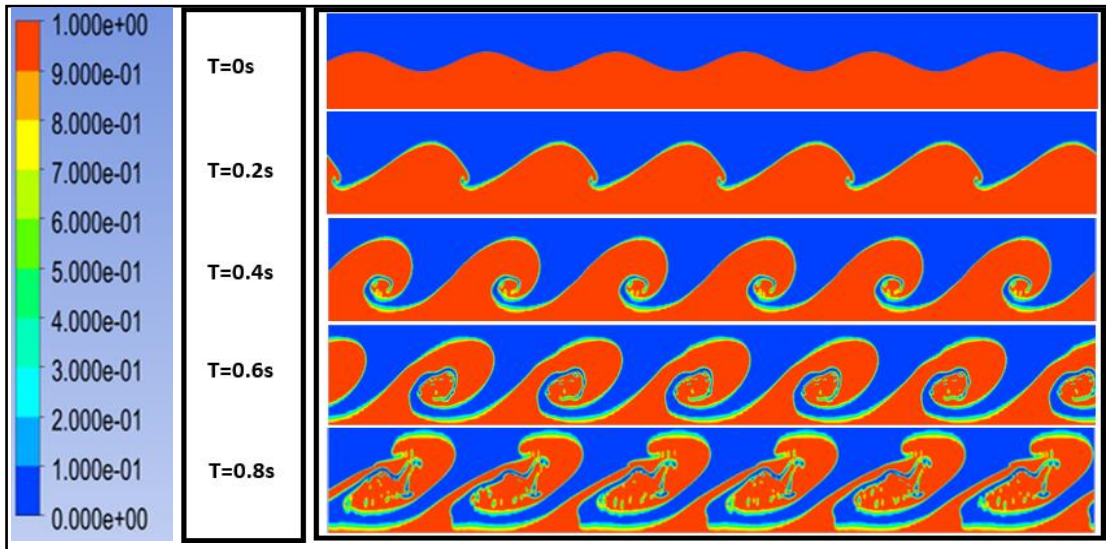


Figure IV.9 : simulation de KHI avec $\rho_1=1.111 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.350 \text{ kg/m}^3$ par la méthode VOF

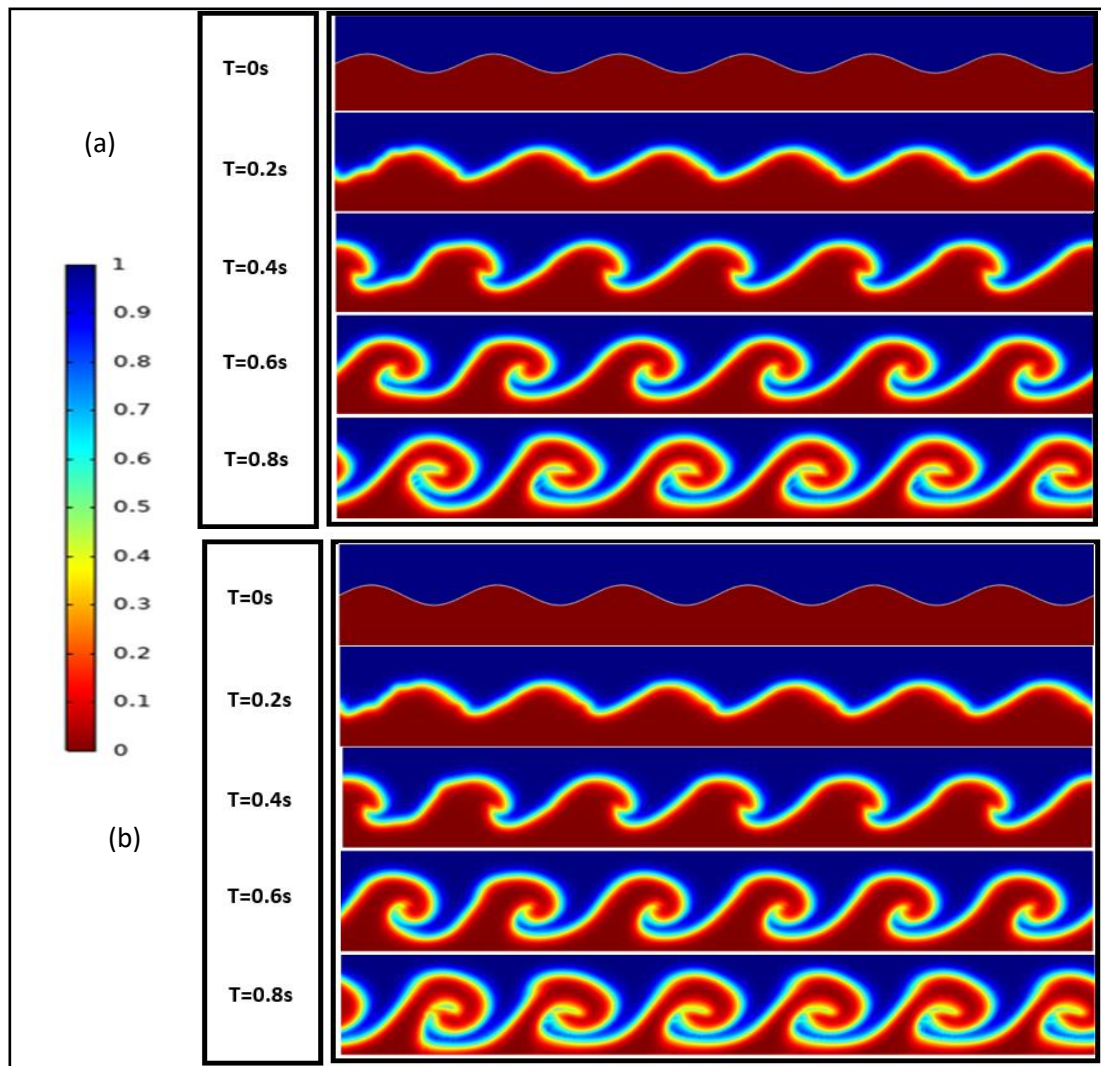


Figure IV.10 : simulation de KHI par la méthode LS (a) $\rho_1=1.225 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.5542 \text{ kg/m}^3$

(b) $\rho_1=1.111 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2=0.350 \text{ kg/m}^3$

4-4-3-Effet du Tension de surface :

Les figures montrent une évolution du fluide pour des différentes valeurs de tension de surface. Nous avons initialisé des simulations avec des valeur de tension de surface proche de 0.1N/m, les résultats obtenus par ces valeurs ne sont pas acceptables. Après une diminution de la valeur jusqu'à 0.004 N/m, le phénomène a été déclenché lentement. Le diamètre des vortex devient plus faible par rapport au phénomène sans tension de surface. Il est visible que pour des faibles valeurs du tension de surface, l'évolution de phénomène est plus faible qu'en leur absence. Donc, la tension de surface est aussi un paramètre déstabilisant.

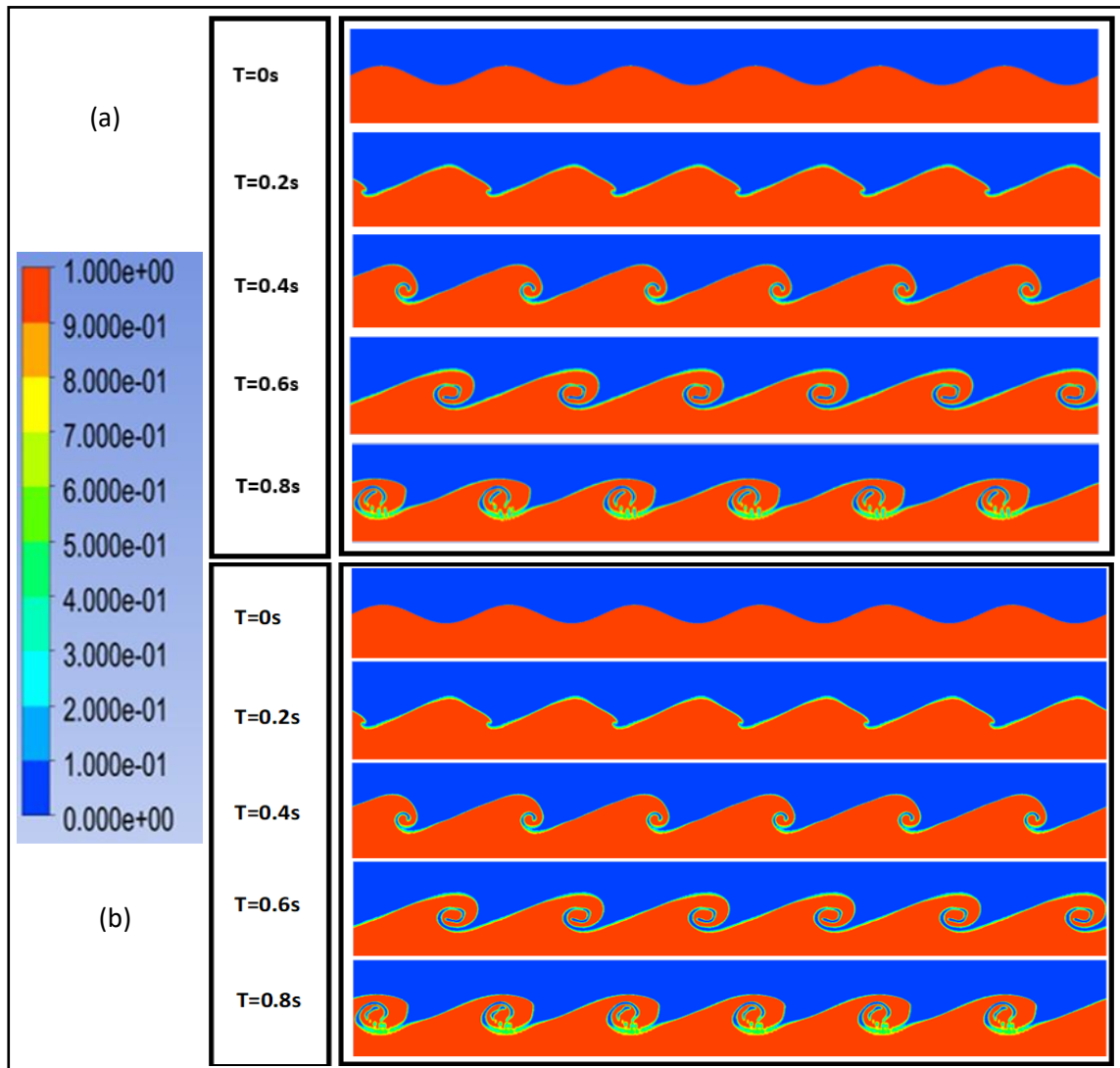


Figure IV .11 : simulation de KHI avec Tension de surface (a) $T_s=0.004\text{N/m}$ (b) $T_s=0.0035\text{ N/m}$ par la méthode VOF

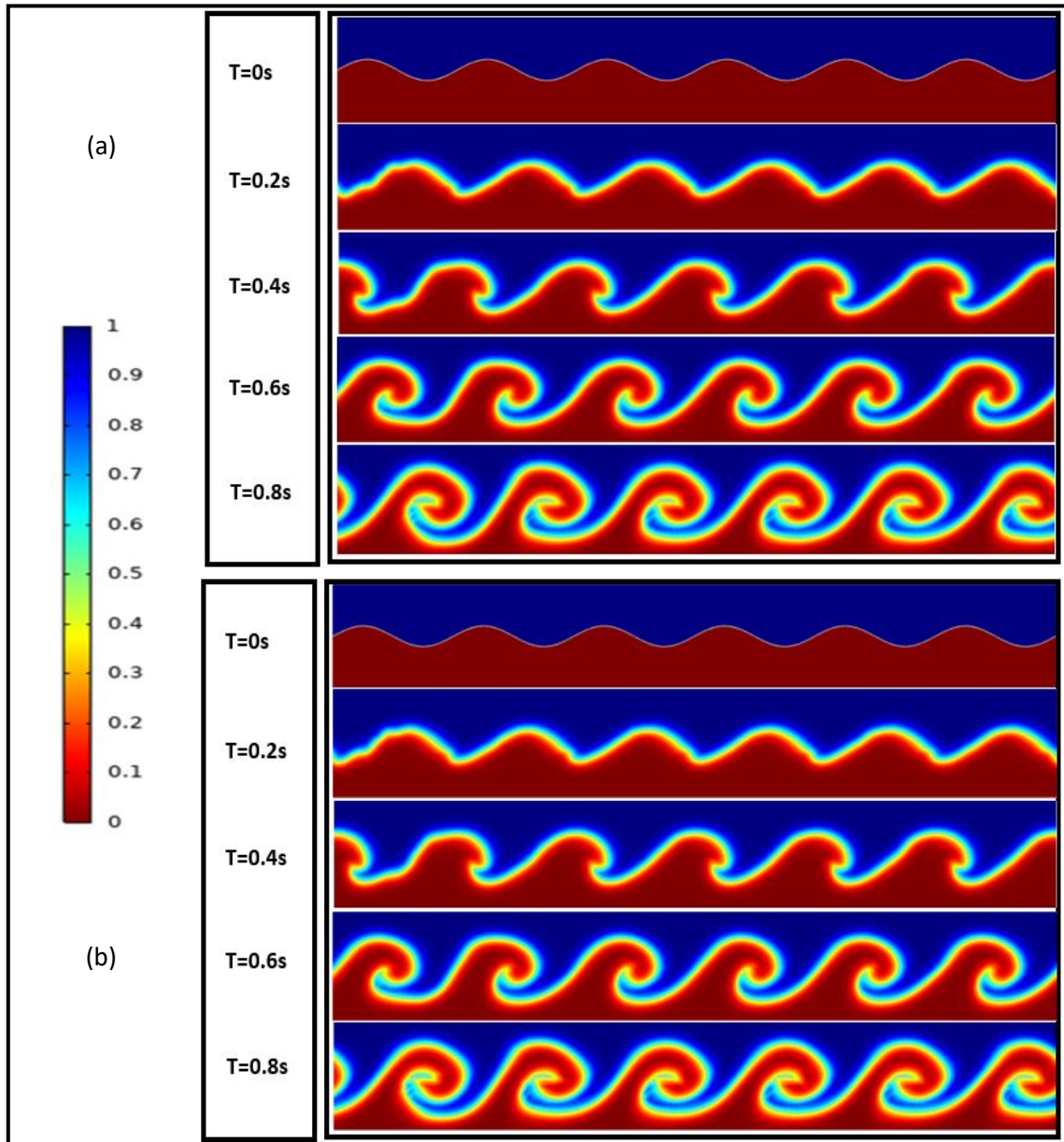


Figure IV .12 : simulation de KHI avec Tension de surface (a) $T_s=0.004\text{N/m}$ (b) $T_s=0.0035\text{ N/m}$ par la méthode LS

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

4-4-4-Etude comparative

Selon les résultats de la simulation et l'étude théorique du phénomène d'instabilité Kelvin Helmholtz, Le tableau ci-dessous résume les avantages et les inconvénients des deux méthodes VOF et LS :

Méthode	Avantages	Inconvénients
VOF	<ul style="list-style-type: none">-localisation explicite de l'interface-bonne conservation de la masse-efficacité en 2D	<ul style="list-style-type: none">-utilisation d'algorithme de reconstruction consommateur et compliqués en 3D-précision dépendante de maillage-application industrielle limitée
Level Set	<ul style="list-style-type: none">-localisation explicite de l'interface-traitement automatique des changements de topologie	<ul style="list-style-type: none">-mauvaise conservation de la masse-utilisation d'algorithme de réinitialisation de la fonction distance-application industrielle limitée

Tableau IV.3 : Etude comparative de méthode VOF et Level Set (LS)

La possibilité de réduire les inconvénients mentionnés dans le tableau est de coupler les deux méthodes VOF et Level Set (CLSVOF).

La simulation par cette méthode (CLSVOF) a été fait en l'absence et en présence de la tension de surface.

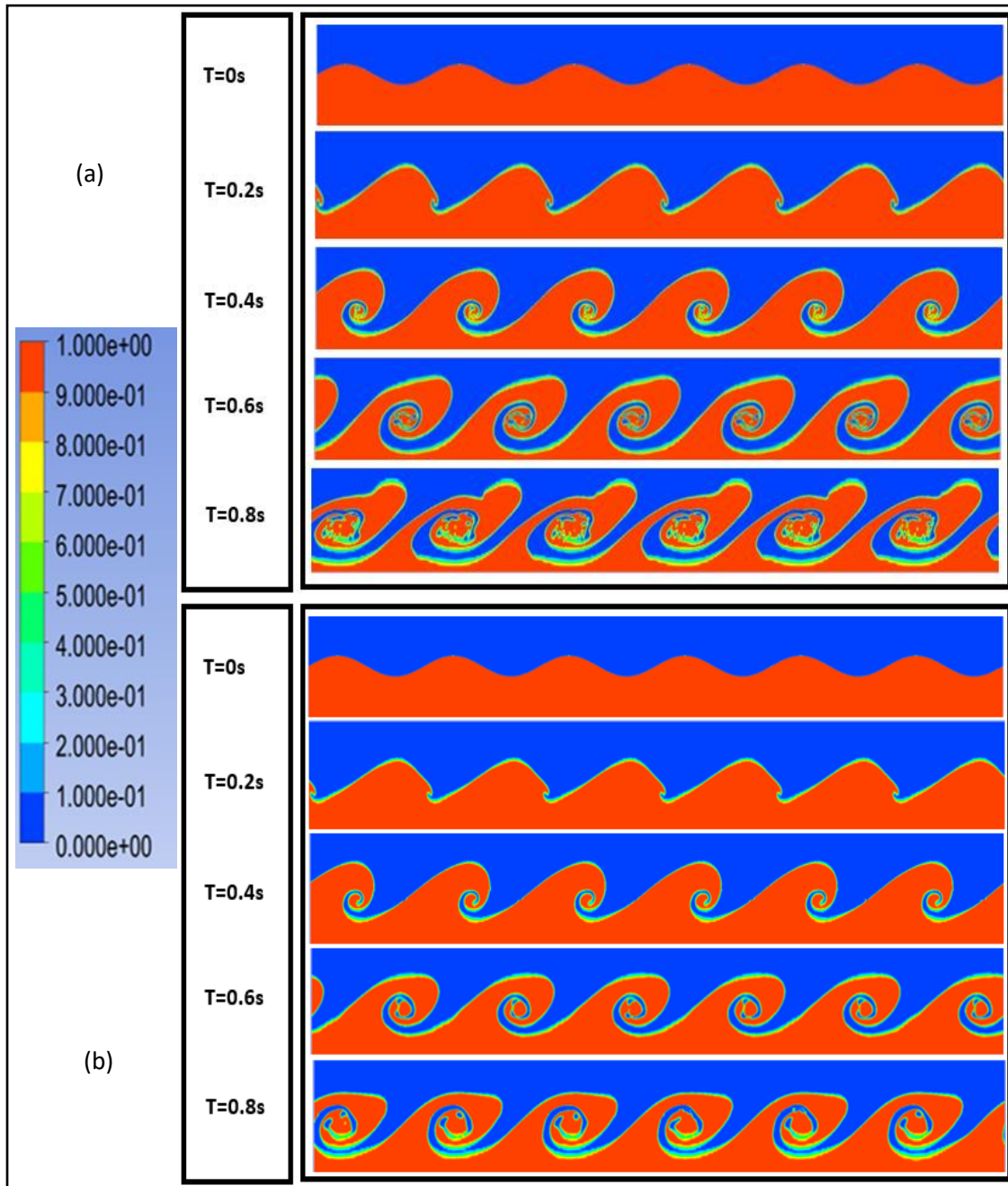


Figure IV.13 : simulation de KH par la méthode CLSVOF (a) sans Tension de surface
(b) avec Tension de surface 0.004 N/m

5-Instabilité de Rayleigh Taylor :

5-1-Proposition de problème :

En considère le problème classique d'instabilité Rayleigh -Taylor qui consiste en un fluide lourd (l'eau) reposant sur un fluide léger (huile) dans le champ gravitationnel,



Figure IV.14 : Représentation géométrique de RTI

5-2-Génération de géométrie :

Nous avons choisi l'eau et huile comme des matériaux dans la simulation. Pour la dimension de la géométrie, nous avons considéré une enceinte d'une longueur de 1m et d'une hauteur de 5m.

La géométrie est essentiellement divisée en deux parties superposées de 1.5 m² pour la partie haute et 2.5 m² pour la partie basse. La phase primaire est « eau » et la phase secondaire « huile ».

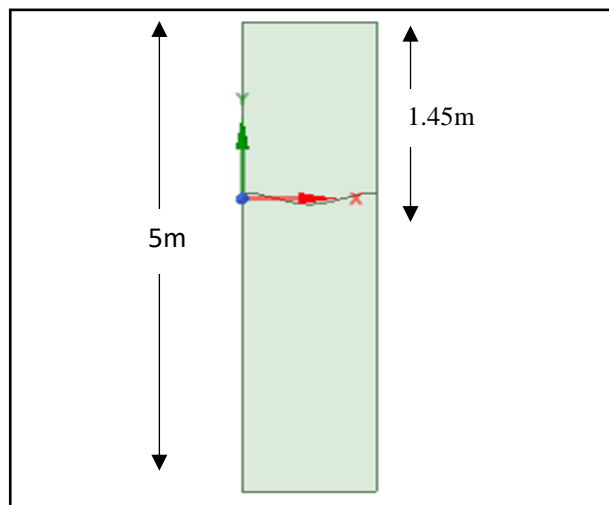


Figure IV.15 : Géométrie de l'instabilité RT

5-3-Génération de maillage :

Nous avons choisi le maillage structuré dans cas pour ces avantages

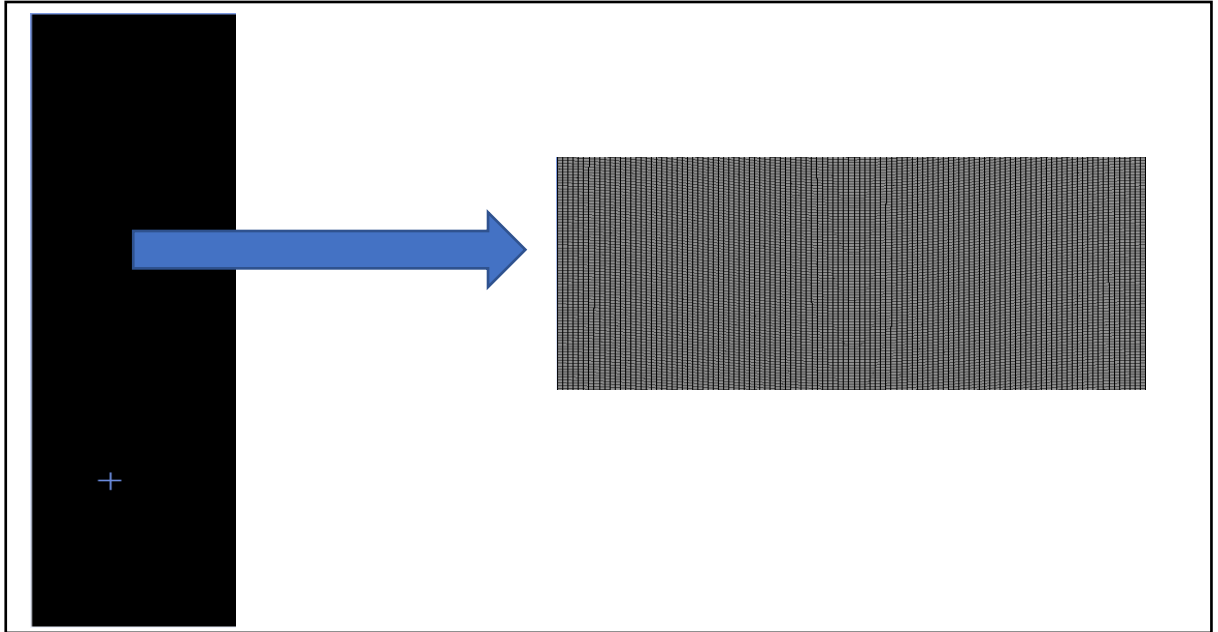


Figure IV.16 : maillage d'instabilité RT

5-4-Simulation :

L'idée est que le fluide dense sera en haut et le fluide le plus léger en bas et en raison de la gravité, il y aura une instabilité à leur interface, qui sera calculé en utilise deux méthode, Level set et VOF a l'aide de deux logiciels ANSYS 2020R1 et COMSOL Multiphasiques 5.6.

Les paramètres des deux fluides dans deux cas dans sur le tableau suivant :

Cas	Fluide	La masse volumique (kg/m^3)	Viscosité (kg /m. s)	Tension de surface (N/m)	Nombre d'Atwood	Méthode de simulation
Cas 1	Eau	998.2	0.001003	0.15	0.249	-VOF -Level Set -CLSVOF
	Huile	600	0.002			
Cas 2	Eau	600	0.001003	0.15	0.5	-VOF -Level Set -CLSVOF
	Huile	200	0.002	0.3		

Tableau IV.4 : Paramètre de simulation de Rayleigh-Taylor

5-5-Résultat et Discussion :

5-5-1-Effet de nombre d'Atwood :

Dans ce cas on a simulé l'instabilité de RT sans tension de surface et on a changé la valeur de la masse volumique.

Cas 1 :

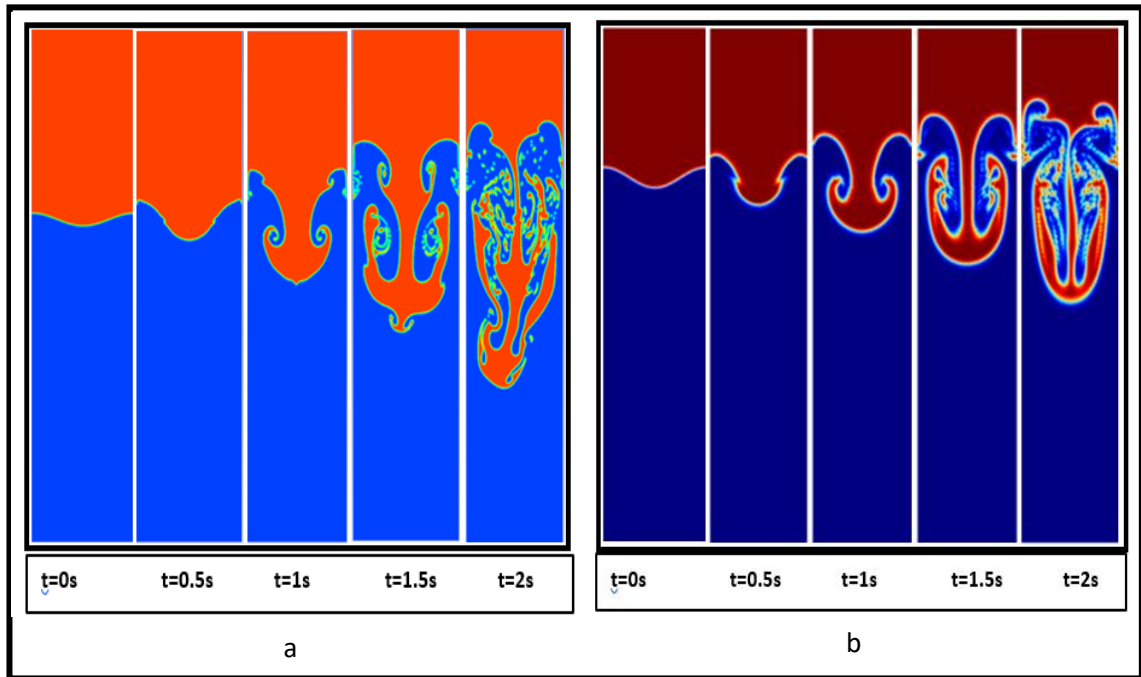


Figure IV.17 : cas 1 sans tension de surface (a) méthode VOF (b) méthode Level Set

Cas1 CLSVOF :

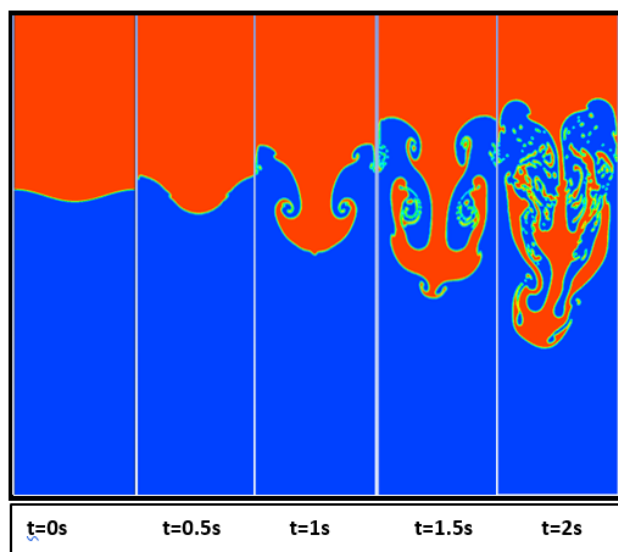


Figure IV.18 : cas 1 sans tension de surface CLSVOF

Cas 2 (sans tension de surface) :

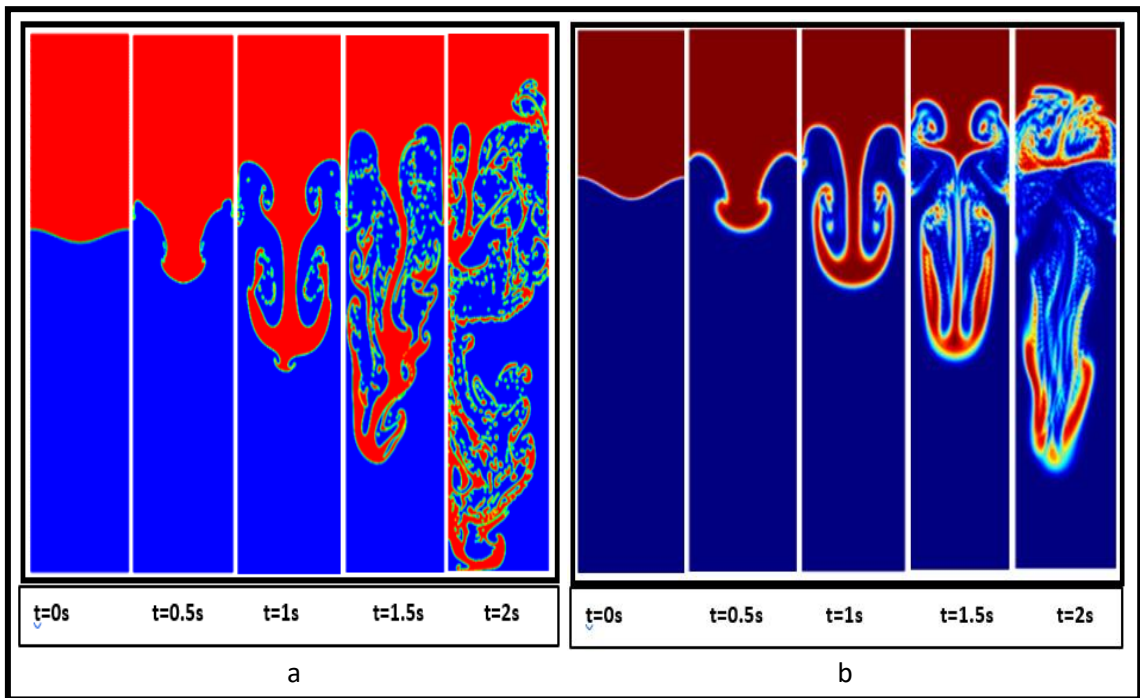


Figure IV.19 : cas 2 sans tension de surface (a) méthode VOF (b) méthode Level Set

Cas 2 sans tension (CLSVOF) :

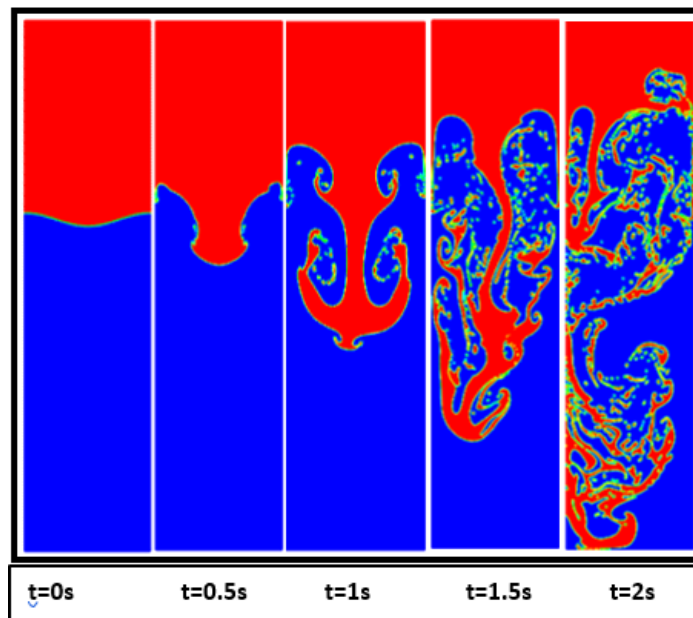


Figure IV.20 : cas 2 sans tension de surface CLSVOF

Chapitre IV : Simulation, Résultats et Discussion

-Pour un nombre d'Atwood (0.249) , l'écoulement d'instabilité RT prennent la forme d'une bulle très petite et asymétrique de fluide et l'instabilité prend beaucoup de temps pour se produire

-lorsque le nombre d'Atwood augment (0.5), la hauteur de la bulle augmente plus rapidement

- la forme de la bulle est moins symétrique, elle se produit également très rapidement à un taux d'accélération qui conduit à un taux de croissance non linéaire.

Conclusion :

Le nombre d'Atwood est un paramètre important dans l'instabilité de Rayleigh-Taylor, la distance de pénétration de la bulle de fluide lourd dans le fluide léger varie en fonction de l'échelle de temps et de la masse volumique.

5-5-2-Effet de tension de surface :

Cas 1 : (avec tension de surface) :

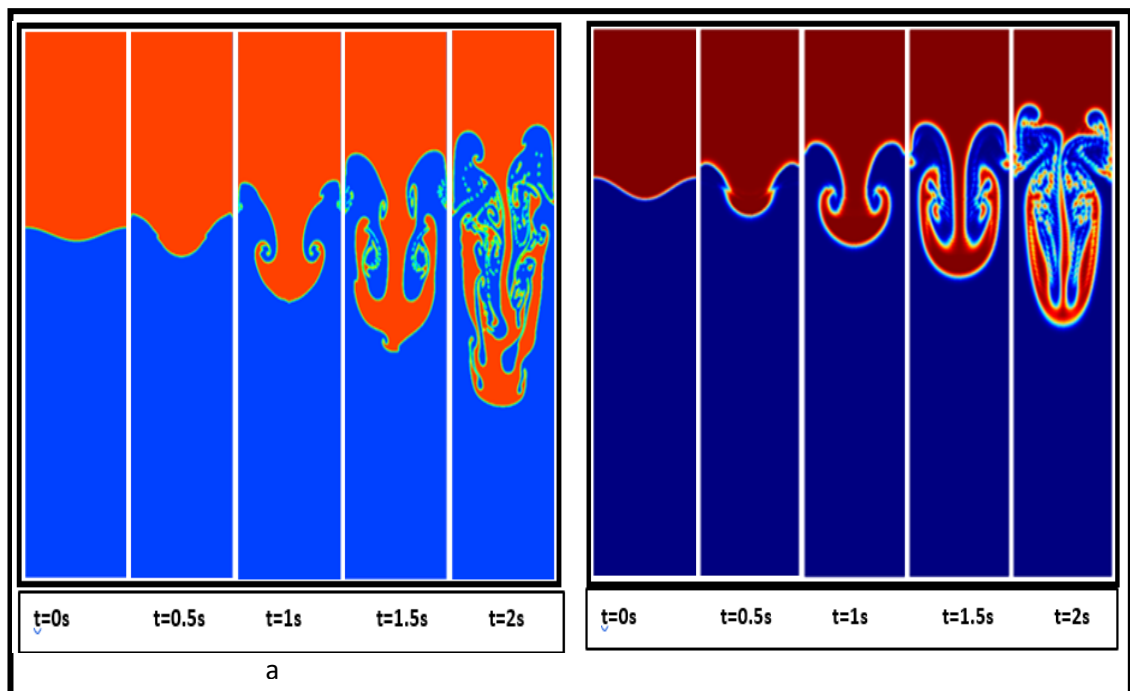


Figure IV.21 : cas 1 avec tension 0.15 N/m de surface (a) méthode VOF (b) méthode Level Set

Cas 1 avec tension (CLSVOF) :

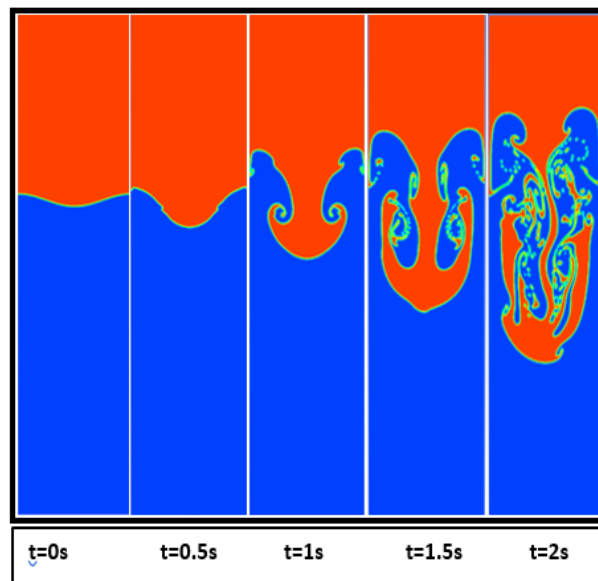


Figure IV.22 : cas 1 avec tension 0.15 N/m de surface CLSVOF

Cas 2 :

Nous avons changé maintenant la valeur de tension de surface et on a gardé la même valeur de viscosité.

Cas 2 : (avec tension de surface) :

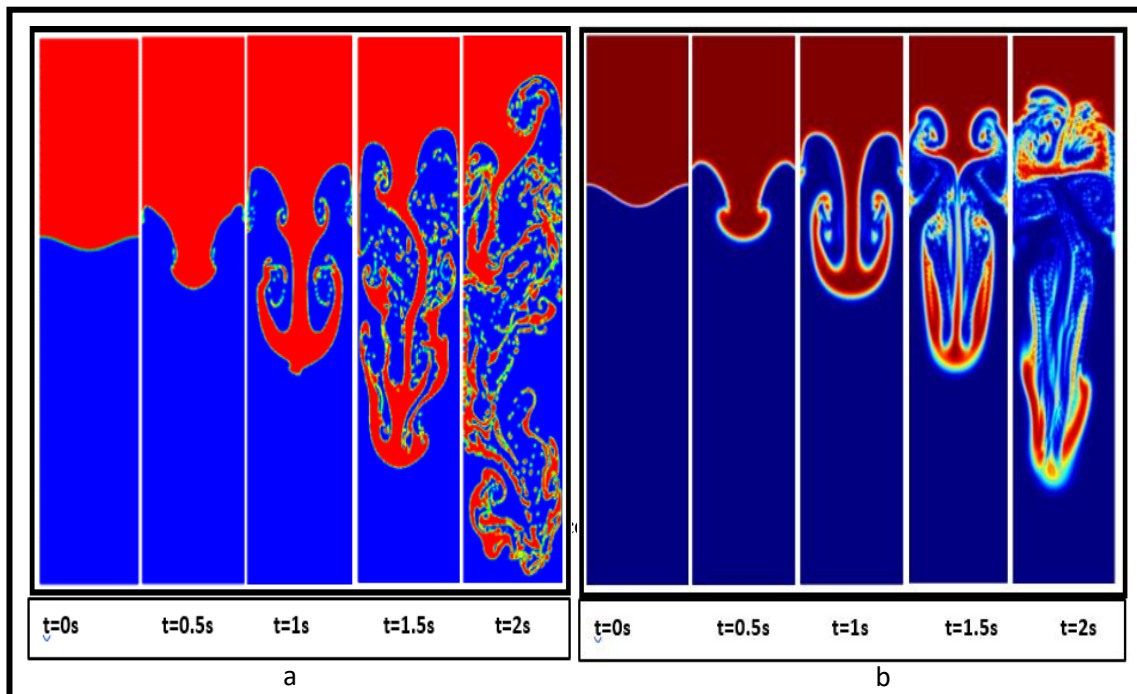


Figure IV.23 : cas 2 avec tension de surface 0.15 N/m (a) méthode VOF (b) méthode Level Set

Cas 2 (CLSVOF) :

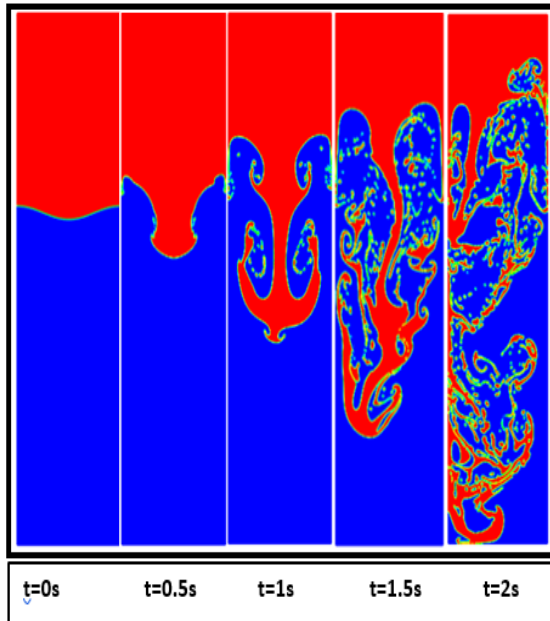


Figure IV.24 : cas 2 avec tension 0.15 N/m de surface CLSVOF

Cas 2

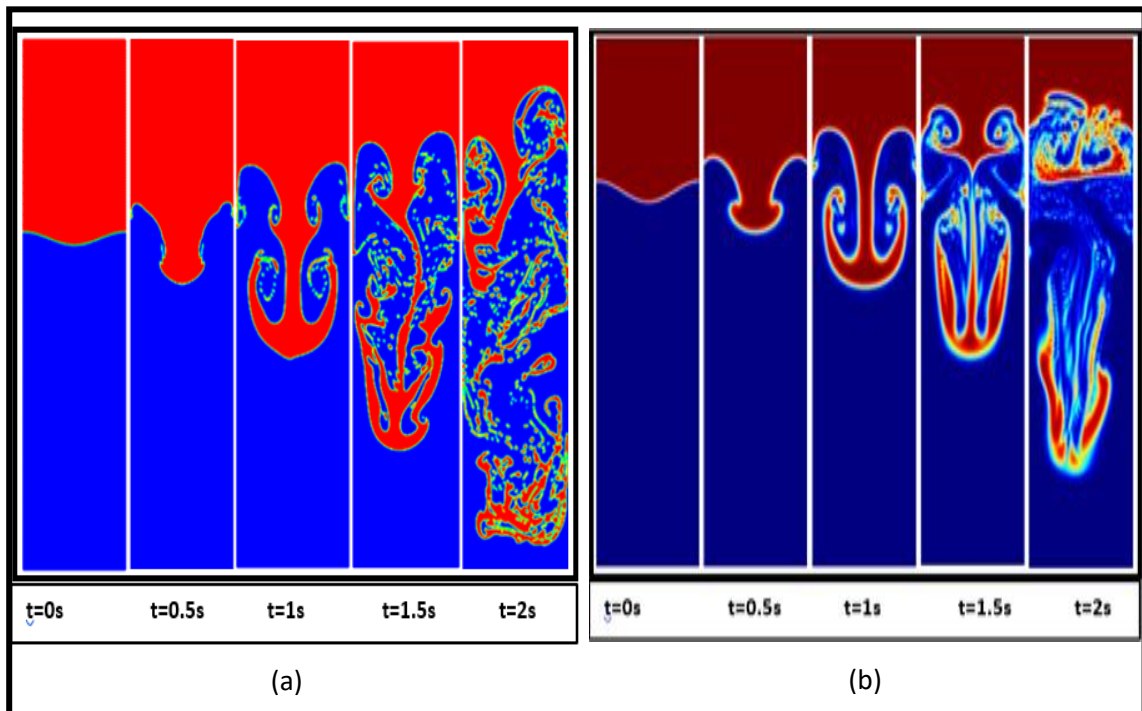


Figure IV.25 : cas 2 avec tension de surface 0.3 N/m (a) méthode VOF (b) méthode Level Set

Cas 2 avec tension 0.3 (CLSVOF) :

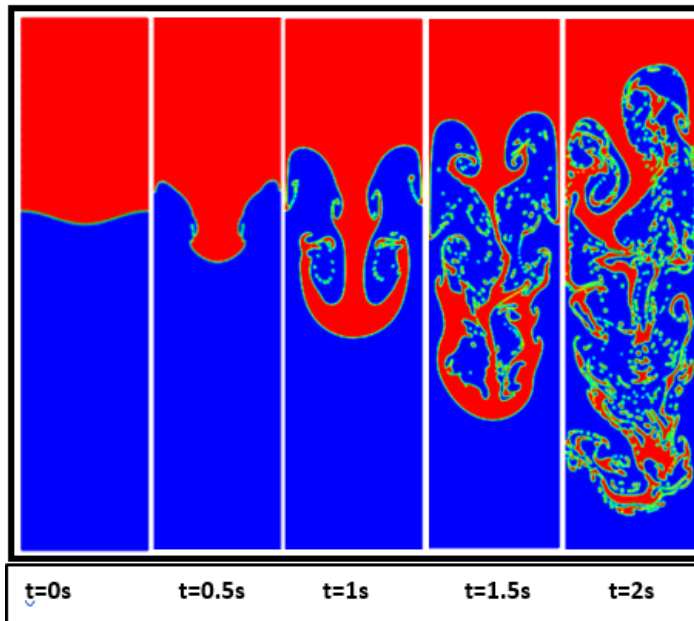


Figure IV.26 : cas 2 avec tension de surface 0.3 N/m CLSVOF

Il semble clair, d'après les résultats actuels, que l'inclusion (ou bien la présence) de tension superficielle a un effet sur l'évolution de phénomène RTI et permet de suivre le mouvement de l'interface pendant de plus longues périodes de temps.

Conclusion générale

Conclusion générale :

Le développement de techniques numériques pour le suivi d'interface en mécanique des fluides est un sujet de recherche qui reste particulièrement ouvert.

L'objectif principal de notre travail était la comparaison des méthodes de suivi l'interface (VOF, Level Set et CLSVOF) dans les écoulements diphasiques. Ce travail est basé sur l'étude de deux d'instabilités KHI et RTI. Afin de répondre à cet objectif, on a présenté d'abord les résultats de simulation (instabilité de Kelvin Helmholtz et RTI) par les méthodes VOF, Level Set, on a remarqué que la méthode VOF conserve la masse mais ne permet pas un bon suivi de l'interface, la méthode de Level Set était la plus efficace mais qu'il y avait une perte de la masse, c'est la raison d'appliquer la méthode CSLVOF, qui garde les avantages des deux méthodes tout en supprimant les inconvénients.

Globalement, les résultats qu'on obtenu par la simulation de KHI et RTI sont en accord avec les études théoriques et de travaux de simulation antérieurs.

Bibliographie

Bibliographie

Bibliographie

- [1] BOUAFIA Halima « Etude et simulation numérique du comportement structural des bulle », PhD thèse 2017
- [2] BOUARAB Samia « simulation numérique des écoulements diphasiques à l'aide de schémas Hydrice de capture et de suivi d'interface », PhD thèse 2011
- [3] Cours écoulements diphasiques MITDH, Université des Frères Mentouri Constantine
- [4] St-Julien de Peyrolais, « une introduction aux écoulements diphasiques » le 1^{er} août 2002.
- [5] M.M. Awad, « An overview of heat transfer phenomena » Ch. 11 « Two Phase-Flow » 2012
- [6] Majid Haghshenas, « numerical study of interfacial flow using algebraic coupled level set-volume of fluid (a-clsvof) method » 2018
- [7] Sébastien Tanguy. « Développement d'une méthode de suivi d'interface. Applications aux écoulements diphasiques. Modélisation et simulation ». Université de Rouen, 2004. Français.
- [8] Marion Capuano « Simulations numériques d'écoulements diphasiques compressibles, visqueux et conductifs à l'aide de schémas aux différences finies centrées d'ordre élevé » 2018
- [9] Merrouche Djemai, « simulation d'un écoulement diphasique ascendant à poche dans un conduite verticale » université M. Bougara, Boumerdès 2003
- [10] Kateryna VORONETSKA « Simulation numérique directe des écoulements à phases dispersées » 2012
- [11] Paul Vigneaux. « Méthodes Level Set pour des problèmes d'interface en micro-fluidique ». Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007. Français.
- [12] KOFFI ADJOUA STANILLE « étude de la stabilité d'écoulements polyphasiques stratifiés soumis à un gradient thermique » 2014
- [13] E. L. Koschmieder « Instabilities in Fluid Dynamics »

Bibliographie

- [14] Samy ARABI, Solène DOUBLET, Florent HAFFNER, Lorraine GHEERBRANT, Sophie ROUSSEL, Flavien TETARD, « Kelvin-Helmholtz Instabilities » 2015
- [15] A. Salih « Kelvin–Helmholtz Instability » Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram – November 2010 –
- [16] Chandrashekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover Publications, New York (1981).
- [17] Gamal Abd-Allah Ahmed Alsayed Ahmed Hoshoudy (G. A. Hoshoudy) , Review Article On « Kelvin -Helmholtz and Rayleigh-Taylor Instabilities » 2019
- [18] HARHAD Wafia « études théorique et expérimentale de l’instabilité de Rayleigh Taylor » 2009
- [19] D. J. TRITTON « Physical Fluid Dynamics » 1977
- [20] Luka Štrubelj, Iztok Tiselj « CFD Simulation of Kelvin-Helmholtz Instability » 2005
- [21] Olivier THUAL « Instabilités hydrodynamiques » version du 1^{er} mai 2016
- [22] François Charru « Instabilités hydrodynamiques » 2007
- [23] Cours de DEA de Mécanique Filière 2, UPMC. Introduction à l'Instabilité Hydrodynamique. P.-Y. Lagrée & M. Rossi. Ch.3 « Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec effet de gravité et de tension superficielle »
- [24] Jean-Michel FITREMANN « Écoulements diphasiques Lois générales »
- [25] N. DJATI, R. KNIKKER, S. XIN, E. ALBIN « Etude comparative des méthodes de suivi d’interface pour les écoulements diphasiques »
- [26] Bilger C, Aboukhedr M, Vogiatzaki K, Cant R. S. « Evaluation of two-phase flow solvers using Level Set and Volume of Fluid methods »
- [27] Marc Rabaud, « INSTABILITÉS HYDRODYNAMIQUES » NOTES DE COURS 2020/2021 M2 DFE. Université Paris-Saclay
- [28] Luka Štrubelj, Iztok Tiselj » NUMERICAL SIMULATION OF RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY WITH TWO-FLUID MODEL AND INTERFACE SHARPENING » 2008

Annexe

Annexe

Annexe A : Tableau récapitulatif des principaux résultats à caractère théorique et expérimental sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor

Auteur	Année	Nature de travaux	Observation
L. Rayleigh	1883	Analytique	Formulation du problème et solution élémentaire approchée : $\gamma_R = \sqrt{(A g k)}$
G.I. Taylor	1950	Théorique et expérimental	Evaluation du taux de croissance
D.J Lewis	1950	Expérimental	Mise en évidence de trois étapes d'évolutions de l'instabilité. Fluides utilisés : eau et benzène ; glycérine et air
E. Fermi et J. Von Neumann	1960	Analytique	Modélisation empirique non linéaire
Emmons chang et Watson	1960	Expérimental	Les résultats obtenus concernant essentiellement le taux de croissance de l'instabilité de Rayleigh- Taylor et le phénomène de compétition entre bulles qui se traduit par la croissance des grandes bulles au détriment des petites. Fluides utilisés : tétrachlorure de carbone et air
S.Chandrasekhar	1961	Analytique	Analyse en modes normaux en hydrodynamique et magnétohydrodynamique

Annexe

Bart J.Daly	1966	Numérique	Effet du rapport de densité sur l'évolution non linéaire de l'instabilité (I R T).
D.H.Sharp	1984	Numérique	Déduction de quatre étapes d'évolution de l'instabilité de Rayleigh Taylor. Le premier modèle statistique de la fusion des bulles proposés D. H. Sharp suppose que deux bulles voisines fusionnent si la différence de hauteur entre les deux est supérieure au rayon de la plus petite
J.W. Jacobs et I. Catton	1987	Théorique	Effet de géométrie sur l'évolution non linéaire de l'instabilité de Rayleigh - Taylor
J.W. Jacobs et I. Catton	1987	Expérimental	L'effet de géométrie à trois dimensions de la partie non linéaire de l'instabilité de Rayleigh -Taylor
A.Lange	1988	Expérimental (Roll-over)	Analyse spectrale par DFT. Détermination du taux de croissance (variation de la dimension du sable). Matériau utilisé : sable et eau
F.F Abdellal	2004	Expérimental et numérique	Injection dans des parois poreuses, déduction de la morphologie des bulles (dispositif en position horizontal et incliné). Fluides utilisés : Glycérol ; eau ; Plond et ; flibe (LIF-Bef2)
Xi. Li A	2007	Expérimental (Roll-over)	La position et la vitesse du centre ont été calculées, leurs profils sont des paramètres pour caractériser le mélange. Le centre de gravité associé

Annexe

			<p>au champ de concentration se déplace à une vitesse proportionnelle à la racine carrée de la force de flottabilité.</p> <p>Solution utilisée : Eau pure et eau salée</p>
--	--	--	--