

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB DE BLIDA 1

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du Diplôme de MASTER

Spécialité : **Modélisation Stochastique et Statistique**

Thème

Résolution numérique de l'équation intégral de la probabilité de ruine en temps infini, cas du mélange de distribution Exponentielles des remboursements

Présenté par :

-HAMMADACHE KAWTHER

-MESSAOUDENE FATIHA

Soutenu le 02 Octobre 2021, devant le jury composé de :

Président : Mr. TAMI OMAR *M.C.B* Université Blida1

Examineur : Mr. FRIHI REDHOUANE *M.A.A* Université Blida1

Promoteur : Mr.LAIDI MOHAMED *M.C.B* *ENST*

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord, nous tenons à remercier Dieu,
De nous avoir donné la santé, la volonté et la patience
pour mener à terme notre formation de master et pou-
voir réalisé ce travail de recherche.*

*Nous tenons à exprimer nos profonds remerciements
à notre encadreur Mr LAIDI*

*qui nous a fourni le sujet de ce mémoire et nous
a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la
confiance qu'il nous a témoignés tout au long de ce
travail.*

*Nous tenons à gratifier aussi les membres jury
pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en ac-
ceptant d'examiner notre travail.
Enfin, on adresse nos sincères sentiments de grati-
tudes et de reconnaissances a toutes les personnes qui
ont participé de près ou de loin à*

la réalisation de ce travail

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A nos très chers parents

Pour leur amour et leurs sacrifices

*A nos frères et nos sœurs et nos petite
famille*

Pour leur soutient et leurs encouragement

*A toutes les personnes qui nous ont aidé de
prés ou de loin.*

**Messaoudene Fatiha
Hammadache Kawthar**

ملخص

خطر افلاس شركات التامين مشكل كبير لذلك من الضروري أخذها بعين الإعتبار و توقع الإفلاس من خلال حساب احتمالية وقوعه. لقد درسنا في اطروحتنا احتمالية الإفلاس في حالة زمنية لا نهائية لمزيج تسديد التوزيعات الأسية.

Résumé

Le risque de faillite des sociétés d'assurances est un problème primordial. par conséquent, il est impératif de la prendre en compte et anticiper la faillite en calculant la probabilité de ruine. Dans notre mémoire, nous avons étudié la probabilité de ruine en temps infini. cas du mélange de distributions Exponentielles des remboursements.

Abstract

The risk of insurance companies is a major problem. therefore, it is imperative to take it into account and anticipate failure by calculating the probability of ruin. In our paper, we have studied the probability of ruin in infinite time case of the mixture of exponential distributions repayments.

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	7
1 Outils Préliminaires	9
1.1 Lois de probabilités	9
1.2 Variable aléatoire discrète	9
1.2.1 Loi équirépartie	10
1.2.2 Loi Bernoulli	10
1.2.3 Loi Binomiale	10
1.2.4 Loi Géométrique	11
1.2.5 Loi de Poisson	12
1.3 Variable aléatoire absolument continue	13
1.3.1 Loi Uniforme	13
1.3.2 Loi Normale	14
1.3.3 Loi Gamma	15
1.3.4 Loi Exponentielle	16
1.3.5 Mélange de lois exponentielles	17
1.4 Complément sur la transformée de Laplace	18
1.4.1 Transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive	19
1.5 Quelques notions sur les processus aléatoires	19
1.5.1 Processus stochastiques	20
1.5.2 Processus Stationnaires :	20
1.5.3 Processus à accroissements indépendants	20
1.5.4 Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogène	20
1.5.5 Processus de Poisson	21

1.5.6	Processus de Poisson composé	22
1.5.7	Lien entre processus de Poisson et la loi exponentielle	22
1.5.8	Processus Gaussien	23
1.5.9	Processus et fonction de renouvellement :	23
1.5.10	Équations de renouvellement	25
1.5.11	Solution des équations de renouvellement	25
1.5.12	Théorème de renouvellement	26
1.6	Queues de distributions	27
1.6.1	Distributions à Queues Légères	27
1.6.2	Distributions à Queues Lourdes	27
1.6.3	Exemples des distributions à queues légères et lourdes	29
1.7	Équations intégrales	30
1.7.1	Équation intégrale de Fredholm et sa classification	31
1.7.2	Équation intégrale de Volterra et sa classification	32
2	Probabilité de ruine	34
2.1	Modèle de risque	34
2.2	Le modèle individuel et le modèle collectif	35
2.2.1	Modèle individuel	35
2.2.2	Modèle collectif	35
2.3	Modèle classique de la Théorie de ruine	36
2.3.1	Processus de réserve et surplus	36
2.3.2	Hypothèses du modèle Cramér-Lundberg	38
2.3.3	Probabilité de ruine	39
2.3.4	Lien entre probabilité de ruine et les équations intégrales différentielles	41
2.3.5	Coefficient de sécurité	41
2.3.6	Modèle de Lundberg ou P/P	42
2.3.7	Bornes d'une probabilité de ruine	42
2.4	Modèle de Sparre-Anderson	43
2.5	Processus de risque de queue sous-exponentielle	44
2.5.1	Condition de stationnarité	45
2.6	Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini	45
2.7	Calcul de la probabilité de ruine à horizon fini	45

2.8	Coefficient d'ajustement	46
2.9	Ajustement du mélange de distribution exponentielle	48
2.10	Intégration de produits	48
2.10.1	Intégration de produit pour le calcul de la probabilité de ruine pour un mélange de trois exponentiellement	52
3	Exemples d'application	53
3.1	Calcul analytique de $\psi(x)$	55
3.1.1	Cas général	55
3.1.2	Calcul de la probabilité exacte de ruine pour un mé- lange de distributions exponentielles	56
3.1.3	Expression exacte de la probabilité de ruine en cas de mélange de trois exponentielles	58
3.1.4	Calcul des poids lorsque la gravité de la réclamation est un mélange de trois exponentielles	62
3.2	Calcul numérique et représentation graphique	62
3.3	Conclusion général	67
	ANNEXE	68
	BIBLIOGRAPHIE	77

Table des figures

1.1	Fonction de masse de loi Binomiale.	11
1.2	Fonction de répartition de loi Binomiale.	11
1.3	Fonction de masse de loi Géométrique.	12
1.4	Fonction de répartition de loi Géométrique.	12
1.5	Fonction de distribution de loi de Poisson.	12
1.6	Fonction de densité de loi Uniforme.	14
1.7	Fonction de répartition de loi Uniforme.	14
1.8	Fonction de densité de loi Normale.	15
1.9	Fonction de répartition de loi Normale.	15
1.10	Fonction de densité de loi Gamma.	16
1.11	Fonction de répartition de loi Gamma.	16
1.12	Fonction de répartition de loi exponentielle.	17
1.13	Fonction de densité de loi exponentielle.	17
2.1	Évaluation de la réserve et de surplus.	37
2.2	La simulation de ce processus de dix trajectoires.	38
2.3	Description du modèle de base en assurance.	39
2.4	Coefficient d'ajustement.	47
3.1	Fonction de répartition des montants de réclamation.	63
3.2	probabilité de ruine en fonction de capitale initial.	64
3.3	probabilité de ruine en fonction de capitale initial.	64
3.4	Les trois approximations de la probabilité de ruine	65

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'accent a toujours été mis sur la compréhension de la modélisation statistique de l'assurance.

L'un des principaux défis d'un actuaire est de décrire l'incertitude liée à la réclamation des arrivées et dans le schéma de gravité des sinistres à travers certains modèles de probabilité avec l'objectif de l'évaluation des risques.

L'évaluation des risques conduit à un contrôle systématique des réserves de l'entreprise constituant ainsi l'un des principaux ingrédients de la gestion des risques.

Les estimations des montants des sinistres individuels (gravité des sinistres) se font sous l'hypothèse que pour un contrat particulier à tout moment, il existe une distribution de probabilité régissant, le montant de la perte pour tout événement de perte survenant à ce moment-là.

La modélisation des sinistres dans le domaine de l'assurance traite de la construction de modèles probabilistes et des techniques statistiques pour estimer et tester les paramètres du modèle qui décrivent deux composantes vitales impliquant une incertitude dans le domaine d'assurance, à savoir le schéma d'arrivée des sinistres et le montant de chaque sinistre (gravité des sinistres).

Une bonne introduction au sujet de l'ajustement d'une distribution des pertes est donnée dans Hogg et Klugman (1984).

Le but premier de la Théorie de ruine est de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, et ainsi d'évaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette

probabilité de ruine suffisamment faible.

Le premier chapitre, étant consacré aux rappelles de quelques lois usuelles de probabilité, et a des définitions de certain processus aléatoires et leur caractéristiques et enfin des généralités sur les queues de distribution et les équations des intégrales.

Le deuxième chapitre traite la partie Théorique de la probabilité de ruine en cas d'horizons fini et infini pour le modèle classique et le modèle de Sparre-Anderson.

Le troisième chapitre traitera la partie numérique.
Certain s'intéresse à ce problème, mais dans un cadre plus particulier, qui est le calcul numérique de probabilité de ruine dans le cas de mélange de lois exponentielles et dont l'horizon infini.
Pour parvenir à étudier ce sujet, on l'a traiter trois chapitres.

Outils Préliminaires

1.1 Lois de probabilités

Les lois de probabilités sont des objets mathématiques qui permettent aux statisticiens de fabriquer des modèles pour décrire des phénomènes où le hasard intervient. Une loi de probabilité est une distribution théorique de fréquences.

Soit Ω un ensemble muni d'une probabilité P .

Une variable aléatoire X est une application définie sur Ω dans \mathbb{R} . X permet de transporter la loi P en la loi P' définie sur $\Omega' = X(\Omega)$.

On a $P'(x_j) = P(X^{-1}(x_j)) = P(X = x_j)$.

La loi P' est appelée loi de X .

Le livre de Distributions statistiques et lois de probabilité ([9]) interprète plus de détails sur les notions de probabilités

1.2 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète X est une application dont la valeur est la valeur du caractère discret étudié, c'est à dire le résultat d'une épreuve. Si X prend n valeurs x_1, \dots, x_n , on définit :

- m la moyenne ou, $E(X)$ l'espérance de X par :

$$m = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

- μ_2 le moment d'ordre 2 par :

$$\mu_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i)$$

- $Var(X)$ la variance de X par :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 P(X = x_i) = E(X^2) - E(X)^2$$

- σ l'écart type par :

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

1.2.1 Loi équirépartie

La variable aléatoire X suit une loi équirépartie si X a pour valeurs x_0, x_1, \dots, x_{k-1} et si $P(X = x_j) = \frac{1}{k}$ pour tout $j = 0 \dots (k-1)$ On a :

- $\mu = E(X) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x_j$
- $\sigma^2 = \sigma^2(X) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x_j^2 - \mu^2$

1.2.2 Loi Bernoulli

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de probabilité p , si X vaut 1 ou 0 avec les probabilités respectives p et $1 - p$.

On a alors :

- $E(X) = p,$
- $E(X^2) = p,$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$

1.2.3 Loi Binomiale

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n, p)$, veut dire que X est égale au nombre d'obtenus dans une série de n épreuves de Bernoulli de probabilité p . La variable aléatoire X peut donc prendre $n + 1$ valeurs :

$0, 1, \dots, n$.

La loi Binomiale $B(n, p)$ est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

On a :

- $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, pour $0 \leq k \leq n$,
- $E(X) = np$,
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

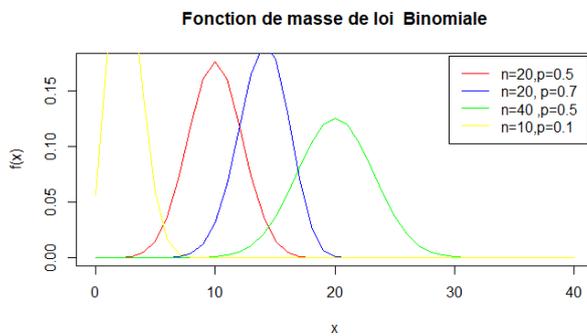


FIGURE 1.1 – Fonction de masse de loi Binomiale.

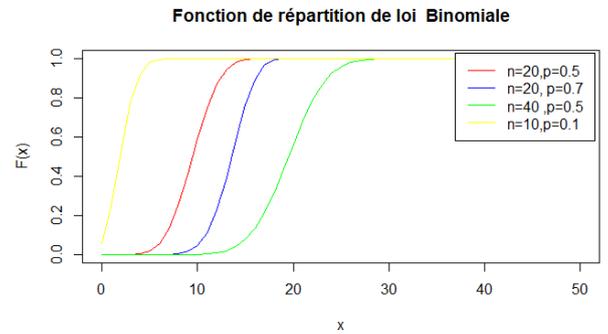


FIGURE 1.2 – Fonction de répartition de loi Binomiale.

1.2.4 Loi Géométrique

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si $E = \mathbb{N}^* = 1, 2, \dots$ et :

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

On peut vérifier que $E(X) = \frac{1}{p}$ et $Var(x) = \frac{1 - p}{p^2}$.

La variable aléatoire X représente, dans ce cas, le nombre d'épreuves de Bernoulli pour obtenir un succès pour la première fois, c'est à dire le succès à la $n^{\text{ième}}$ tentative.

On peut considérer une modification du modèle précédent en posant $Y = X - 1$ qui représente le nombre d'échecs avant d'obtenir le premier succès, dans ce cas nous avons $E = \mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$,

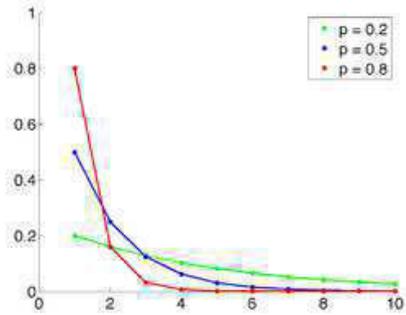


FIGURE 1.3 – Fonction de masse de loi Géométrique.

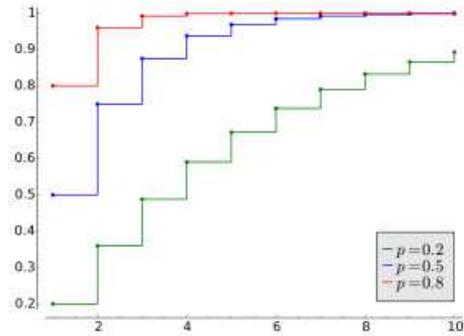


FIGURE 1.4 – Fonction de répartition de loi Géométrique.

- $P(X = n) = (1 - p)^n p$
- $E(X) = \frac{1 - p}{p}$
- $Var(x) = \frac{1 - p}{p^2}$.

1.2.5 Loi de Poisson

Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre réel $\lambda > 0$, si $E = \mathbb{N}$ et :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Parmi les caractéristiques de cette loi nous avons : $E(X) = Var(X) = \lambda$.

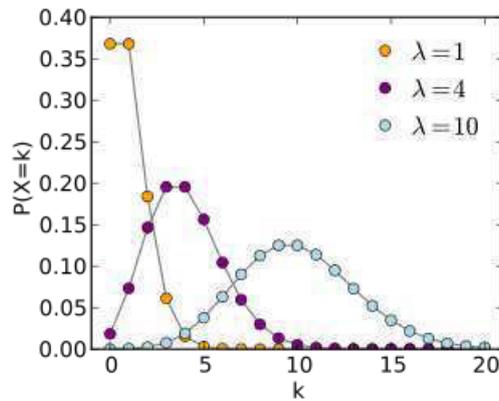


FIGURE 1.5 – Fonction de distribution de loi de Poisson.

Sous certaines hypothèses de nature mathématiques, la loi de poisson est utilisée pour décrire le nombre d'apparitions d'un certain événement dans un intervalle de temps fixé ou dans un domaine spatial fixé.

1.3 Variable aléatoire absolument continue

Une variable aléatoire X est absolument continue si il existe $f(x)$ telle que sa fonction de répartition $F(x)$ est égale à :

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

La fonction $f(x)$ est appelée densité de probabilité et on a : $f(x) = F'(x)$.

L'espérance mathématique ou moyenne de x est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

La variance de X est :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt.$$

L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

1.3.1 Loi Uniforme

On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un segment $[a, b]$ si sa densité de probabilité $f(x)$ est une constante C sur $[a, b]$ et est nulle en dehors du segment $[a, b]$. On a donc : $C = \frac{1}{b-a}$ puisque $\int_a^b Cdt = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } a \leq x < b, \\ 1 & \text{pour } x \geq b. \end{cases}$$

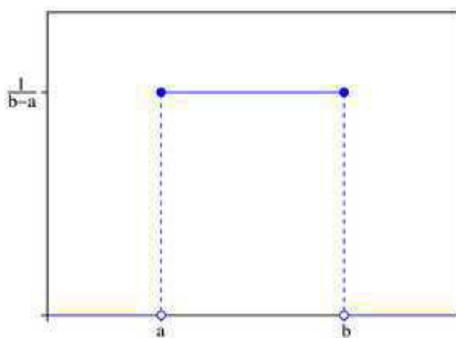


FIGURE 1.6 – Fonction de densité de loi Uniforme.

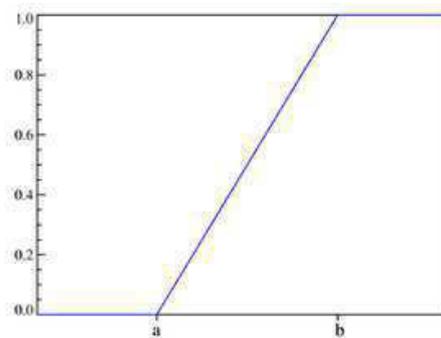


FIGURE 1.7 – Fonction de répartition de loi Uniforme.

- Espérance $E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt = \frac{a+b}{2}$,
- Variance et Écart type : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X) = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$.

1.3.2 Loi Normale

La variable aléatoire X suit une loi Normale ou loi de Gauss de paramètres μ , σ ($\sigma > 0$) si :

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(t) dt,$$

où

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

est la densité de probabilité.

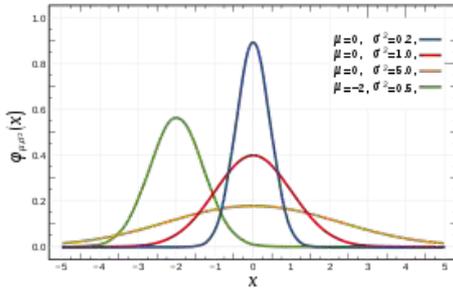


FIGURE 1.8 – Fonction de densité de loi Normale.

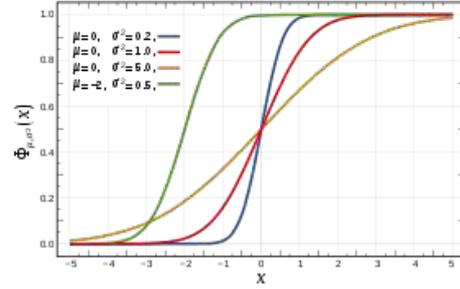


FIGURE 1.9 – Fonction de répartition de loi Normale.

On note cette loi $N(\mu, \sigma)$, on a :

- $E(X) = \mu$,
- $\sigma(X) = \sigma$. On dit que $N(0, 1)$ est la loi normale centrée réduite.
- Si X suit la loi $N(0, 1)$ alors :

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Si X suit la loi $N(\sigma, \mu)$ alors $\frac{x - \mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0, 1)$.

1.3.3 Loi Gamma

Pour α et β des réels strictement positifs, la variable aléatoire X suit une loi Gamma si sa densité est la forme :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad x > 0.$$

La fonction de distribution est :

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta x} u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

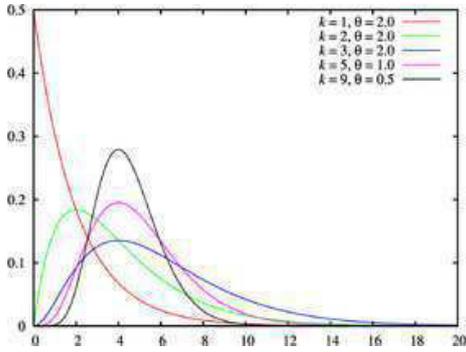


FIGURE 1.10 – Fonction de densité de loi Gamma.

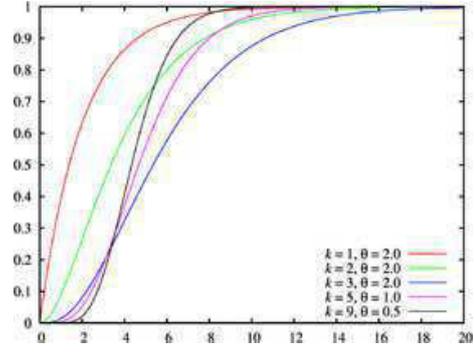


FIGURE 1.11 – Fonction de répartition de loi Gamma.

Les moments d'ordre k , $E(X^k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\beta^k \Gamma(\alpha)}$. En particulier,

- $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$,
- $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

1.3.4 Loi Exponentielle

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sa fonction de répartition ou fonction de distribution est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

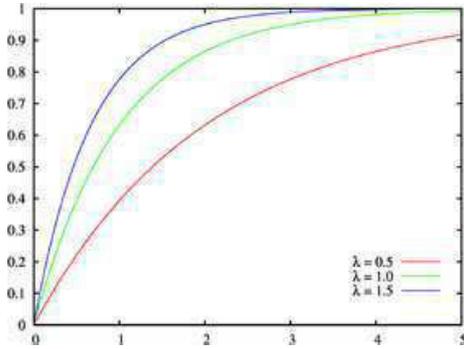


FIGURE 1.12 – Fonction de répartition de loi exponentielle.

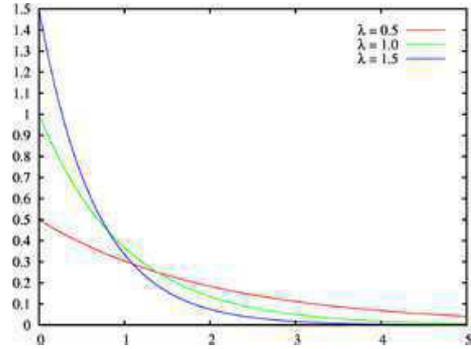


FIGURE 1.13 – Fonction de densité de loi exponentielle.

On a :

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$,
- $Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$,
- $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Certaines propriétés de base pour les distributions de lois usuelles se trouvent dans le livre de Saporta, Gilbert ([14]) Nous nous intéressons dans notre travail à cette loi et en particulier au mélange de lois exponentielles que nous abordons dans le paragraphe suivant

1.3.5 Mélange de lois exponentielles

Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ une série de poids non négatifs satisfaisant $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Soient $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ une suite de fonctions de répartition de lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

La fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i F_i(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i \{1 - \exp(-\lambda_i x)\}$$

est appelée mélange de n distributions exponentielles.

Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i \exp(-\lambda_i x).$$

La transformée de Laplace du mélange de lois exponentielles est donnée par :

$$l(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}.$$

Le moment d'ordre k est donné par :

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{k!}{\lambda_i^k},$$

En particulier, on obtient :

$$E[X] = \sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i^{-1}$$

et

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \frac{2}{\lambda_i^2} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i^{-1} \right)^2$$

1.4 Complément sur la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil analytique fréquemment utilisé dans l'étude des variables aléatoires et des processus aléatoires. Nous trouverons de nombreuses opportunités d'application de cet outil dans la suite.

En particulier, il sera intéressant de l'étude des processus de renouvellement, pour résoudre certaines équations fonctionnelles ou équations différentielles.

Définition 1.4.1 *La définition de la transformée de Laplace de certaines fonctions de \mathbb{R}_+ est donnée par la suite, et avant cela, commençons par définir d'ordre exponentiel.*

Définition 1.4.2 Une fonction continue f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} est d'ordre exponentiel s'il existe $\alpha > 0, t_0 > 0$ et $M > 0$ tel que, pour tout $t > t_0$,

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

La transformée de Laplace est définie comme un opérateur "intégral" sur l'ensemble des fonctions d'ordre exponentiel.

Définition 1.4.3 On appelle transformée de Laplace d'une fonction f d'ordre exponentiel la fonction Lf définie par :

$$\forall s > \alpha, Lf(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

1.4.1 Transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive

Pour une variable aléatoire réelle positive X admettant une densité de probabilité $f_X(x)$, la transformée de Laplace est une notion voisine de la fonction caractéristique. Il s'agit en fait de la transformée de la densité.

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, L_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx.$$

Cette fonction est à valeurs réelles donc plus facile à manipuler sur le plan théorique que la fonction caractéristique. Notons que les calculs à effectuer sont identiques dans les deux cas.

1.5 Quelques notions sur les processus aléatoires

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace).

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la Théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Ceux qui sont intéressés au plus de détail sur les processus se réfèrent ([5]).

1.5.1 Processus stochastiques

Définition 1.5.1 *Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une suite de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilité (Ω, F, P) .*

La variable X_t représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté E .

1.5.2 Processus Stationnaires :

Définition 1.5.2 *Un processus stochastique $X=(X_t)_{t \in T}$ est dit stationnaire au sens strict si sa loi de probabilité est invariante par translation i.e.,*

$(X_{t_1}, X_{t_2} \dots X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, X_{t_n+s})$ ont la même loi, $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n, s \in T$.

Définition 1.5.3 *Un processus stochastique est dit stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si :*

- $E(X(t))=m < \infty$ indépendant de t ,
- $Var(X(t))=\sigma^2 < \infty$ indépendant de t ,
- $Cov(X(t), X(s))$ ne dépend que de la différence $|t - s|$.

1.5.3 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.5.4 *Un processus X est dit à accroissements indépendants si :*

$\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$, les variables aléatoires

$(X_{t_1} - X_{t_0}), (X_{t_2} - X_{t_1}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.

1.5.4 Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogène

Définition 1.5.5 *Un processus $(x_t)_{t \in T}$ est dit homogène dans le temps si la loi de $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend que de $s, \forall t$.*

Définition 1.5.6 { *Processus de comptage* }

Un processus stochastique $N = (N_t)_{t \in T} = \mathbb{R}_+$ est dit processus de comptage ou processus de dénombrement si :

1. $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, N(0) = 0.$
2. si $S < t$ alors $N(s) \leq N(t),$

où $N(t) - N(s)$, représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[s, t]$.

Un des processus de comptage le plus utilisé est le processus de Poisson.

1.5.5 Processus de Poisson

Définition 1.5.7 Un processus de comptage est dit processus de Poisson si :

$$P(N_{dt} = k) = \begin{cases} o(dt) & \text{si } K \geq 2 \\ \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } K = 2 \\ 1 - \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

où $o(dt)$ est une fonction tendant plus vite vers 0 que l'identité, i.e., telle que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} o(dt)/t = 0$$

Le coefficient λ est dit taux du processus ou intensité du processus.

On note $P(N_t = k) = P_k(t)$

Remarque 1.5.1 Le processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants et à accroissements stationnaires.

Proposition 1.5.1 Si $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, alors

$$P_k(t) = e^{-(\lambda t)} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$$

N_t est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt .

1.5.6 Processus de Poisson composé

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- $(N(t); t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ .
- X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de distribution commune F .
- La suite aléatoire $(X_t)_{t \geq 1}$ et le processus $(N(t); t \geq 0)$ sont indépendants. Le processus aléatoire $(S(t); t \geq 0)$, défini par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

est appelé processus de Poisson composé d'intensité λ de distribution F .

On obtient également par conditionnement sur N les premiers moments de S .

Proposition 1.5.2 : "Identité de Wald "

- $E[S(t)] = E(N(t))E(X(t))$
- $Var[S(t)] = Var(X(t))E(N(t)) + E^2(X(t))Var(N(t))$

Preuve :(voir l'ANNEXE)

1.5.7 Lien entre processus de Poisson et la loi exponentielle

On considère un processus de Poisson $N(t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de taux λ .

Soit τ_i le temps de réalisation du $i^{\text{ième}}$ évènement.

On pose

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_1 = \tau_1, & \tau_0 = 0 \\ T_2 = \tau_2 - \tau_1, & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, & \forall n \geq 1. \end{array} \right.$$

le temps séparant la réalisation du $n^{\text{ième}}$ évènement du $(n-1)^{\text{ième}}$ évènement.

Proposition 1.5.3 *Les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ .*

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 1.5.3.

Proposition 1.5.4 *Posons $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$, alors S_n suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$ où S_n est le temps de réalisation du $n^{\text{ième}}$ évènement.*

1.5.8 Processus Gaussien

Un processus aléatoire est dit Gaussien si tous les vecteurs fini dimensionnelles extraits sont Gaussiens.

1.5.9 Processus et fonction de renouvellement :

Définition 1.5.8 *:(Processus ponctuel) Un processus ponctuel sur $]0; +\infty[$ est une suite $(S_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires réelles, définie sur un même espace de probabilité (Ω, θ, P) , telle que :*

$0 < S_1(\omega) < S_2(\omega) < \dots < S_k(\omega) < \dots$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$

Soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$.

Un processus de renouvellement est un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ représentant les instants d'occurrence d'un évènement tel que les durées inter-occurrence successives sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de fonction de répartition F .

Un tel processus peut être défini autrement par :

- la suite (X_n) des durées entre les occurrences successives,
- la suite (T_n) des instants d'occurrences :

$$\forall n \geq 0, (N_t \geq n) = (T_n \leq t) \dots \dots \dots (1.1)$$

T_n est le temps de réalisation du $n^{\text{ième}}$ évènement.

- le processus de comptage $(N_t; t \geq 0)$ où N_t représente le nombre d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$.

En effet, on passe du processus de comptage aux instants d'occurrence par la relation suivante :

$$\forall n \geq 0, (N_t \geq n) = (T_n \leq t)$$

En premier lieu, nous cherchons à caractériser la loi de la variable T_n .

Soit F_n la fonction de répartition de la variable T_n .

Bien entendu, nous avons :

$$F_1 = F$$

et

$$T_n = T_{n-1} + X_n$$

Nous avons la formule suivante

$$F_2(x) = \int_0^\infty F(x-y)dF(y) = \int_0^x F(x-y)dF(y)$$

De même, nous pouvons écrire

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-y)dF(y).$$

De la relation (1.1), nous obtenons la loi de la variable N_t pour tout $t \geq 0$.

En effet, nous avons

$$\forall n \geq 0, P(N_t \geq n) = F_n(t)$$

L'espérance de la variable N_t définit une grandeur particulièrement importante appelée fonction de renouvellement.

Définition 1.5.9 *On appelle fonction de renouvellement, la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :*

$$\forall t \geq 0, m(t) = E[N_t].$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 1.5.5 ([1])

$$\forall t \geq 0, m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$$

Preuve (voir l'ANNEXE)

Remarque 1.5.2 *La fonction de renouvellement est donc définie comme une somme de fonctions de répartition. Cela lui confère un certain nombre de propriétés immédiates.*

En particulier, la fonction m est croissante, continue à droite et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = +\infty$$

Puisque les T_n sont positives, nous avons $m(0) = 0$.

Enfin, il est utile de remarquer que $m(t)$ est bien définie.

1.5.10 Équations de renouvellement

Proposition 1.5.6 *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et de fonction de renouvellement m alors,*

$$\forall t \geq 0, m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x)$$

preuve (voir l'ANNEXE)

1.5.11 Solution des équations de renouvellement

Soit F une fonction de répartition définie sur \mathbb{R}_+ et telle que $F(0) = 0$. On appelle équation de renouvellement associée à F , toute équation intégrale de la forme

$$\forall t \geq 0, A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x)$$

ou A est une fonction inconnue et a une fonction définie sur \mathbb{R}_+ donnée.

Théorème 1.5.1 *Si a est une fonction bornée définie sur \mathbb{R}_+ , l'équation de renouvellement associée à F*

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \forall t \geq 0$$

admet une solution unique, bornée sur tout intervalle fini, donnée par

$$\forall t \geq 0, A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dm(x)$$

où m est une fonction de renouvellement.

Proposition 1.5.7 On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que

$$E[X_1] = \int_0^\infty x dF(x) < \infty,$$

alors

$$E[T_{N_t+1}] = E[X_1](1 + E[N_t]).$$

Preuve (voir l'ANNEXE)

1.5.12 Théorème de renouvellement

Le théorème de renouvellement précise le comportement asymptotique de la solution d'une équation de renouvellement

$$\forall t \geq 0, A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dm(x)$$

Théorème 1.5.2 Soient a une fonction monotone sur \mathbb{R}_+

$$\int_t^\infty a(t)dt < \infty$$

et F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$. Posons

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x)$$

La solution de l'équation de renouvellement

$$\forall t \geq 0, A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dm(x)$$

vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty a(t)dt, & \mu < \infty; \\ 0, & \mu = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.5.8

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Théorème 1.5.3 (Théorème élémentaire de renouvellement)

On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que :

$$\int_0^{\infty} x dF(x) < \infty,$$

alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]}$$

Preuve (voir l'ANNEXE)

1.6 Queues de distributions

1.6.1 Distributions à Queues Légères

Définition 1.6.1 Une distribution $F_X(x)$ est dite à queue légère, s'il existe des constantes $a, b > 0$, telle que :

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \leq ae^{-bx}$$

où d'une manière équivalente :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } M_X(r) < \infty$$

avec $M_X(r) = E(e^{rX})$.

1.6.2 Distributions à Queues Lourdes

Les distributions à queues lourdes sont des distributions qui ont des queues non exponentiellement bornées, i.e. qui ont des queues plus lourdes que celles des distributions exponentielles.

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$.

Notons $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $\bar{F}(x)$ est dite fonction de queue.

Définition 1.6.2 Une distribution $F_X(x)$ est dite à queue lourde si pour tout $a, b > 0$, on a :

$$\bar{F}_X(x) > ae^{-bx}$$

où d'une manière équivalente, si

$$\forall r > 0, M_X(r) = \infty.$$

Remarque 1.6.1 Il y a trois sous-classes importantes de distributions à queue lourde, les distributions à queue épaisse, les distributions à longue queue et les distributions sous-exponentielles. Dans la pratique, toutes les distributions à queue lourde couramment utilisées appartiennent à la classe sous-exponentielle.

1. Distribution à Queue épaisse

Définition 1.6.3 Une distribution F est dite à queue lourde ou à queue épaisse si sa fonction de répartition vérifie :

$$E(e^{\lambda x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} dF(x) = \infty, \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Si non la loi est dite à queue légère ou à queue fine.

2. Distribution à Queue Longue

Définition 1.6.4 Une distribution F est dite à queue Longue ou possédant une longue traîne si le support de sa fonction de répartition n'est pas majoré et si pour tout $x, y \geq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1, \bar{F}(x) > 0.$$

3. Distribution à Queue Sous-exponentielle

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon d'une variable aléatoire X positive de répartition F tel que $F(x) < 1, \forall x > 0$.

On note $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, la queue de F et

$\bar{F}^{n*}(x) = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)$ la queue de n produit de

convolution de F .

F est dite Sous-exponentielle et on la note par S si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} = n$, pour $n \geq 2$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1+X_2+\dots+X_n > x)}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)} = 1$, pour $n \geq 2$.

Le classement de queue est obtenue pour des catégories particuliers de distribution, dans la suite une discussion de classe donnée dans Werner et Upper ([16]), et pour plus de détail sur ces interrelation on se réfère a Embrechts et Omev , Kluppelberg ([1]), et El-adlouni et Al ([7]).

1.6.3 Exemples des distributions à queues légères et lourdes

Distributions à queues légères

Nom	Paramètres	Densité
Exponentielle	$\lambda > 0$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Gamma	$\alpha, \beta > 0$	$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
Weibull	$\lambda > 0, r \geq 1$	$f_X(x) = \lambda r x^{r-1} e^{-\lambda x^r}$
Mélange exponentiel	$\lambda_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$	$f_X(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}$

Distribution à Queues Lourdes

Nom	Paramètres	Densité
Weibull	$\beta > 0, 0 < r < 1$	$f_X(x) = \beta r x^{r-1} e^{-\beta x^r}$
Log-normal	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
Pareto	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha}{\lambda+x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
Burr	$\alpha > 0, \lambda > 0, r > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha r \lambda^\alpha x^{r-1}}{(\lambda+x^r)^{\alpha+1}}$

Nous avons constaté que les équations de renouvellement sont des équations intégrales. Pour cette raison nous consacrons le paragraphe suivant à donner quelques notions sur ces derniers.

1.7 Équations intégrales

Définition 1.7.1 Une équation intégrale est une équation dans laquelle une inconnue la fonction apparaît sous un ou plusieurs signes d'intégration. Il peut se produire également d'autres termes dans les équations intégrales. Par exemple, dans le rectangle $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ les éléments suivants sont des équations intégrales :

$$y(x) = \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (1.1)$$

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (1.2)$$

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)[y(t)]^2 dt \quad (1.3)$$

$$y(x) = \int_a^b \int_a^b K(x, s, t)y(s)y(t)dsdt, \quad a \leq s \leq b \quad (1.4)$$

Dans chacune des équations ci-dessus, $y(x)$ est une fonction inconnue tandis que $f(x)$, $K(x, t)$ et $K(x, s, t)$ sont des fonctions connues (réelles ou complexes) et a et b sont des constantes. Les équations intégrales (1.1) et (1.2) peuvent également être placées dans la forme suivante :

$$L[y(x)] = f(x) \quad (1.5)$$

où l'expression $L[y(x)]$ est linéaire au sens où

$$L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)] = c_1[Ly_1(x)] + c_2[Ly_2(x)] + \dots + c_n[Ly_n(x)]$$

pour des constantes arbitraires c_1, c_2, \dots, c_n .

Ainsi, les équations intégrales (1.1) et (1.2) peuvent être réécrites comme suit :

$$L(x) = \int_a^b K(x, t)y(t)dt; \quad a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad a \leq t \leq b$$

et

$$L(x) = y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t)dt; \quad a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad a \leq t \leq b$$

Remarque 1.7.1 *Les équations intégrales sont toutes des équations intégrales non singulières et beaucoup doivent être classés en équations intégrales linéaires et non linéaires.*

Pour plus de détails sur les équations linéaires et non linéaires voir l'Annexe

1.7.1 Équation intégrale de Fredholm et sa classification

L'équation intégrale linéaire la plus générale est la forme

$$g(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (1.6)$$

où la limite supérieure d'intégration b est fixée, les fonctions $f(x), g(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions connues, tandis que $y(x)$ est une fonction inconnue à déterminer et λ est un réel non nul ou paramètre complexe, est appelé comme le type le plus général de Fredholm équation intégrale. Il est également appelé équation intégrale de Fredholm du troisième type.

Les cas particuliers suivants du type le plus général de L'équation intégrale de Fredholm (1.1) présente un intérêt majeur :

1.Équation intégrale de Fredholm de premier type

En posant $g(x) = 0$ dans l'équation intégrale (1.6), on obtient :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt = 0 \quad (1.7)$$

qui s'appelle l' équation intégrale de Fredholm du premier type.

2.Équation intégrale de Fredholm de deuxième type

En posant $g(x) = 1$ dans l'équation intégrale (1.6), on obtient :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (1.8)$$

qui s'appelle l' équation intégrale de Fredholm du deuxième type.

3.Équation intégrale homogène de Fredholm

En prenant $f(x) = 0$ dans l'équation intégrale (1.8), on obtient :

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (1.9)$$

qui s'appelle l'équation intégrale homogène de Fredholm de l'équation intégrale de Fredholm du deuxième type ou simplement homogène.

Remarque 1.7.2 : *Une équation intégrale de Fredholm qui n'est pas homogène est connue sous le nom de équation intégrale de Fredholm inhomogène ou non homogène. .*

1.7.2 Équation intégrale de Volterra et sa classification

L'équation intégrale linéaire la plus générale de la forme suivante :

$$g(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (1.10)$$

où la limite supérieure d'intégration x est variable, les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $k(x, t)$ sont des fonctions connues tandis que $y(x)$ est une fonction inconnu à déterminer et λ est un paramètre réel ou complexe non nul, est appelé le type général d'équation intégrale de Volterra. C'est aussi appelée « équation intégrale de Volterra du troisième type.

Les cas particuliers suivants de l'équation intégrale de Volterra (1.10) sont d'intérêt principal :

1.Équation intégrale de Volterra de premier type

En posant $g(x) = 0$ dans l'équation intégrale (1.10), on obtient :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt = 0 \quad (1.11)$$

qui est appelée équation intégrale de Volterra du premier type».

2.Équation intégrale de Volterra de deuxième type

En posant $g(x) = 1$ dans l'équation intégrale (1.10), on obtient :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (1.12)$$

qui est appelée équation intégrale de Volterra du second type.

3.Équation intégrale homogène de Volterra

En posant $f(x) = 0$ dans l'équation intégrale (1.12), on obtient :

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (1.13)$$

qui est appelée équation intégrale homogène de Volterra de deuxième type »
ou simplement« équation intégrale homogène de Volterra.

Remarque 1.7.3 : *Une équation intégrale de Volterra qui n'est pas homogène est appelée équation intégrale de Volterra non homogène.*

Cette classification des équations intégral vient de Jerry, Abdul ([8])

Probabilité de ruine

Introduction

La Théorie de la probabilité de ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance.

Il s'agit de l'étude mathématique de modèles statistique et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance.

Dans ce chapitre on abordera deux modèles classiques de la Théorie de ruine très utilisés en mathématiques actuarielles : le modèle de Cramér-Lundberg qui est fondé sur un processus de Poisson et celui de Sparre-Andersen est fondé sur un processus de renouvellement.

2.1 Modèle de risque

Le modèle classique de la Théorie de ruine représente l'évaluation du résultat d'une compagnie d'assurances au cours de temps. Ce modèle est représenté par le processus de risque ou de réserve et $\{R(t); t \geq 0\}$ donné par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

où

- $R(0) = u$ est le capital initial ou la réserve .

- c représente le flux des primes généré par le portefeuille à l'instant t .
- Le montant total des sinistres au temps $t \geq 0$ est représenté par le processus stochastique $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, on le modélise par l'un des modèle suivant, individuel ou collectif.

2.2 Le modèle individuel et le modèle collectif

2.2.1 Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge total générée par les sinistres individu par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant n contrats est définie par la formule :

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^n I_i X_i$$

avec :

- n est le nombre d'assurés ou l'effectif de portefeuille de l'assurance.
- I_i indiquant si l'assuré a subit un sinistre sur la période donnée.
- X_i variable aléatoire positive indépendante de I_i , représente le montant de $i^{\text{ième}}$ sinistre.

Ce modèle est souvent utilisé en assurance santé lorsqu'on considère un groupe de n employés d'une entreprise où il est difficile de modéliser les pertes par les variables de même loi. En effet chaque employé à une couverture différente (en fonction de leur salaire) et comportement différent (les dépenses dépendent notamment de l'âge des employés).

2.2.2 Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subit par un portefeuille vue, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre.

Tout assuré confondu, la charge totale est définie par :

$$S^{coll} = \sum_{i=1}^n X_i$$

où

- $N(t)$ est une variable aléatoire dans \mathbb{N} .
- X_i est une variable aléatoire dans \mathbb{R} , et indépendant de $N(t)$.

2.3 Modèle classique de la Théorie de ruine

Le modèle classique de la Théorie de ruine représente l'évaluation du résultat compagnie d'assurances au cours du temps. Le modèle de Filip Landberg, et Hald Cramer en 1903, est proposé comme premier modèle modélisant la richesse de l'assurance. Ce modèle est dit de poisson composé ou aussi dit de Cramer-Ladberg.

2.3.1 Processus de réserve et surplus

Le modèle classique de ruine est celui de Cramer-landberg ou P/G , et connu comme la base fondamentale de risque. La notation P/G , emprunté de la Théorie des files d'attentes fournit l'information au sujet des loi des arrivées et des montants des réclamations des sinistres.

La lettre G signifie Général et P signifie Poisson.

Un processus de réserve $\{R(t); t \geq 0\}$ et $u = R(0)$ est la réserve initiale, on fait les hypothèses suivante :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a positives *i.i.d* égales aux temps inter-arrivée des sinistres.
 - $\sigma = \sum_{i=1}^n T_i$ instant d'occurrence du $n^{\text{ième}}$ sinistre.
 - $N_t = \max\{n \in \mathbb{N}, \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in \mathbb{N}, \sigma_{n+1} \geq t\}$ processus de comptage égal au nombre de sinistre jusqu'au temps t .
 - $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de v.a positives *i.i.d* égales aux montants des sinistres, on notera F_X leur fonction de réparation, f_X leur densité.
- μ est la moyenne de la répartition de la gravité des sinistres.
- c flux de prime générée par unité de temps.

Ce qui donne

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$$

on définit également le processus de surplus $\{S_t, t \geq 0\}$ qui représente la perte totale à :

$$S(t) = u - R(t)$$

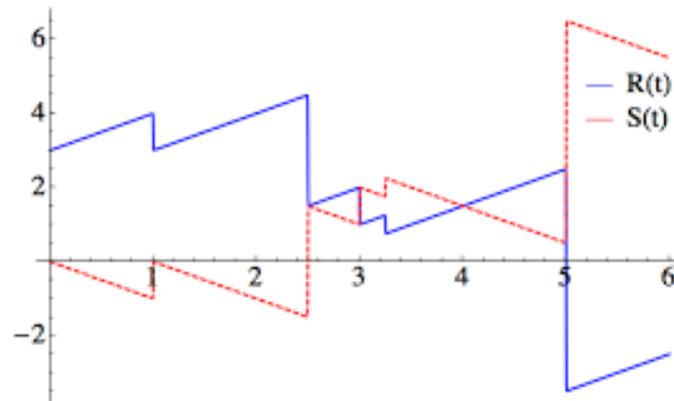


FIGURE 2.1 – Évaluation de la réserve et de surplus.

La figure suivante montre la simulation de ce processus de dix trajectoires possible :

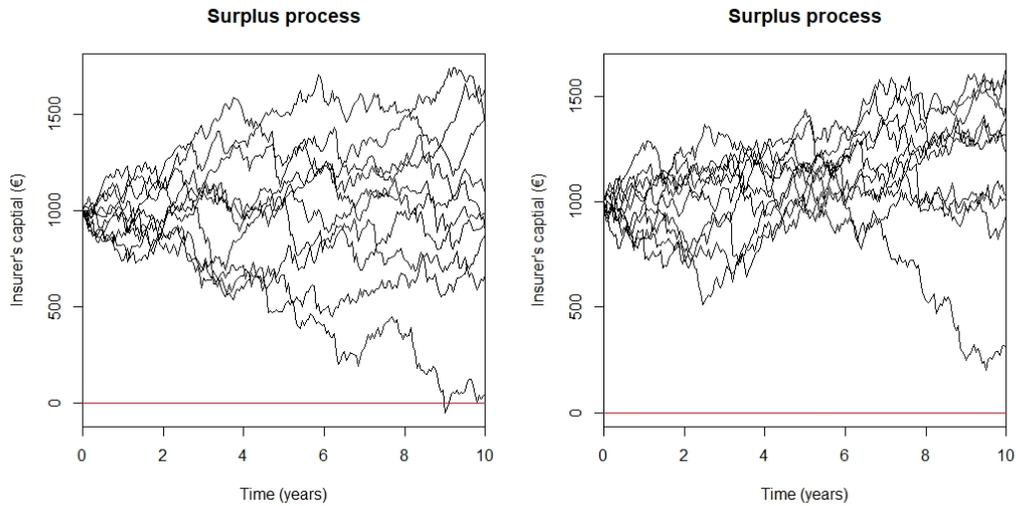


FIGURE 2.2 – La simulation de ce processus de dix trajectoires.

Pour le coté gauche de la figure on peut constater qu'il a une ruine pour un seul cas parmi les dix, ce qui veut dire que on peut estimer la probabilité de ruine.

Donc cette remarque là peut nous servir au calcul de probabilité de ruine Par simulation.

2.3.2 Hypothèses du modèle Cramèr-Lundberg

Les hypothèses de ruine de Cramèr-Lundberg sont :

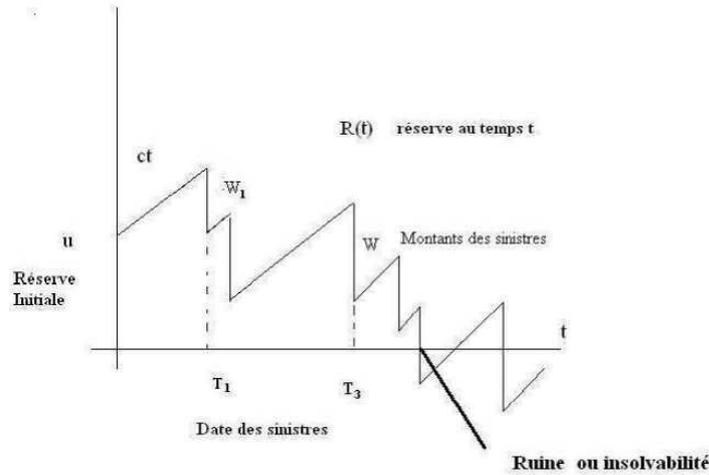


FIGURE 2.3 – Description du modèle de base en assurance.

- $u > 0$ est la réserve initiale de la compagnie d'assurance.
Une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial, qui augmente régulièrement grâce aux cotisations des assurés, mais diminue ponctuellement lors des remboursements de sinistres.
- $c > 0$ le taux de cotisation reçues continuellement dans le temps (c est appelé temps instantané de prime) supposant que la prime reçue par l'assureur est linéaire en fonction du temps.
C.à.d $p(t) = ct$ est la prime reçue sur l'intervalle de temps $[0; t[$. Il est appelé taux instantané de prime.
- $N(t)$ est un processus de poisson homogène d'intensité λ , il modélise le nombre des sinistres jusqu'à l'instant t .

2.3.3 Probabilité de ruine

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine.

Définition 2.3.1 (*Le temps de ruine*)

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0; R_t \leq 0\} = \inf\{t \geq 0; S_t \leq u\}$$

est le premier instant où le processus de réserve devient négatif ou de manière équivalente le processus de surplus excède le niveau u .

La probabilité de ruine peut ainsi être définie à travers le moment de la ruine. En effet, si on observe la ruine pour le processus $R(t)$ c'est que τ existe et est fini. Par contre, si on n'observe pas de ruine, alors τ n'existe pas, ou encore $\tau = \infty$.

Soit

$$L = \sup_{0 \leq t \leq T} \{S_t\}$$

et

$$L_T = \sup_{0 \leq t \leq T} \{S_t\}$$

(Voir le livre de probabilité de ruine de Asmussen, Soren and Albrecher, Hansjorg 2010, le premier chapitre[4])

Définition 2.3.2 La probabilité de ruine à horizon de temps infini notée ψ , est définie par :

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = P(L > u)$$

Définition 2.3.3 La probabilité de ruine à horizon de temps finie est défini par

$$\psi(u) = P(\inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 : R(0) = u)$$

La relation entre ces deux probabilités de ruine est donnée par :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi(u, T) = \psi(u)$$

Définition 2.3.4 La probabilité complémentaire ou probabilité de non-ruine, notée est définie par :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

$$\phi(u) = 1 - \psi(u, T)$$

avec

$$\phi(u) = \int_0^\infty \left(\int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x) dF_X \right)$$

La solution de cette formule est obtenue en conditionnant sur le temps et le montant du premier sinistre.

2.3.4 Lien entre probabilité de ruine et les équations intégrodifférentielles

On a :

$$\psi(u) = P(L > u, R(0) = u)$$

alors

$$\begin{aligned} \phi(u) &= P(\sup_{n \geq 1} S_n \leq u) \\ &= P(S_n \leq u, n \geq 1) \\ &= P(S_n - S_1 \leq u - S_1, S_1 \leq u, n \geq 2) \\ &= P(S_n - S_1 \leq u - (x - ct), S_1 \leq u, n \geq 2) \\ &= P(S_1 \leq u)P(S_n - S_1 \leq u - (x - ct)/S_1 \leq u, n \geq 2) \\ &= \int_0^\infty P(S_n - S_1 \leq u - (x - ct)/S_1 \leq u, n \geq 2) f_{s_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty P(S_n \leq u - x + ct/S_1 \leq u, n \geq 1) f_{s_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty f_{s_1}(t) \int_0^{u+ct} \phi(u - x + ct) dF_X(x) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_{s_1}(t) \phi(u - x + ct) dF_X(x) dt \end{aligned}$$

2.3.5 Coefficient de sécurité

Soit un processus $\{Y_t; t \geq 0\}$ défini par :

$$Y_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Le risque moyen sur une intervalle $[0, t]$ est égale à :

$$E[Y_t] = ct - \mu E[N_t] = (c - \lambda\mu)t$$

nous appelons $(c - \lambda\mu)$ le coefficient de sécurité .

Définition 2.3.5 Notons par

$$\theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

θ est dit coefficient de sécurité relatif.

Proposition 2.3.1 *le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il apparaît prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour qu'en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux administrations payées par la compagnie d'assurance.*

En effet, nous avons les propriétés suivantes :

- *si $\theta > 0$, cela garantit d'après la loi forte des grands nombres que le processus de réserve tend presque sûrement vers $+\infty$ et que $\phi(u) < 1$. L'activité est dite dans ce cas "rentable".*
- *si $\theta < 0$ alors $R(t)$ tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers ∞ et par conséquent $\phi(u) = 1$*

2.3.6 Modèle de Lundberg ou P/P

Un cas particulier de modèle de risque classique est le modèle de Lundberg appelé aussi modèle P/P. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est-à-dire :

$$F_X(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}y}$$

où F_X est la fonction de répartition de la variable aléatoire X qui génère le montant de réclamations.

2.3.7 Bornes d'une probabilité de ruine

Dans cette section on rappelle un résultat classique sur les bornes d'une probabilité de ruine.

Ce résultat concerne l'inégalité de Lundberg donnée dans le théorème ci-dessous qui garantit que quel que soit le capital initial u , la probabilité de ruine est bornée supérieurement par une fonction décroissante exponentiellement.

Théorème 2.3.1 *La probabilité de ruine sur horizon infini satisfait l'inégalité :*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

La preuve de ce Théorème vous pouvez consulter la référence ([13]) et ([5])

2.4 Modèle de Sparre-Anderson

Le modèle de Sparre-Anderson a étendu le modèle classique en 1957 en permettant aux temps d'inter-arrivées des réclamations d'avoir de fonction de distribution arbitraires (Voir [3]).

soit $R(t)$ le capitale d'une compagnie d'assurances à l'instant t défini par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

- u est capital initial.
- $N(t)$ dans ce modèle est décrit par un processus de renouvellement.
- X_i est montant du $i^{\text{ième}}$ sinistre.

τ_i le temps de réalisation du $i^{\text{ième}}$ sinistre et posons $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i \geq 1$ avec $\tau_0 = 0$.

Les T_i représentent les inter-arrivées. Les $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de fonction de répartition commune F et de fonction de densité f . $\{T_j, j \in \mathbb{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires continues de fonction de répartition K et de fonction de densité k . On suppose que

- T_i sont indépendants de X_i .
- $E(cT_i) - E(X_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$

Par conséquent, on obtient :

$$E\left(\sum_{i=1}^n cT_i - X_i\right) > 0$$

d'où de l'équation $R(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} R\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) &= u + \sum_{i=1}^n cT_i - \sum_{i=1}^n X_i \\ &= u + \sum_{i=1}^n (cT_i - X_i) \end{aligned}$$

Théorème 2.4.1 ([3]) *Le coefficient d'ajustement R satisfait l'équation suivante :*

$$E(e^{-R(cT_i - X_i)}) = E(e^{-RcT_i})E(e^{RX_i}) = 1$$

Théorème 2.4.2

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

pour plus la preuve de ce Théorème vous pouvez consulter la référence ([13])

2.5 Processus de risque de queue sous-exponentielle

Considérons le modèle de risque classique, on s'intéresse au cas où X_i ont des queues lourdes. Une fonction de distribution B est une sous exponentielle *i.e* $B \in S$ si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(X_1 + X_2 > x)}{P(\max(X_1, X_2) > x)} = 1$$

où X_1 et X_2 sont des v.a *i.i.d* avec une fonction de distribution B .

notons $B(x) = P(X_1 \geq x)$ et supposons que $E(X_1) < \infty$, et on défini :

$$B_0(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{B}(y) dy$$

Goldie et Resnick (1988) ont montré que si $B \in S$ est satisfait certaines conditions de lissage, alors B appartient au domaine d'attraction maximum de la distribution Frecht ou la distribution de Gumbel.

2.5.1 Condition de stationnarité

$T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ est la durée de l'intervalle de temps entre deux heures d'arrivée consécutives du processus ponctuel τ_{i-1} et τ_i .

Si T_i sont *i.i.d* avec une moyenne $E[T_1]$ alors N_t est un processus de renouvellement et assume la condition habituelle de :

$$\rho = \frac{E[X_1]}{cE[T_1]} < 1$$

Dans ce cas, on a :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{B_0(u)} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

avec $\psi(u) = P(\tau_u < \infty)$ est la probabilité de horizon infinie.

2.6 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini

Le Théorème suivant fournit une expression de la probabilité de ruine à horizon infini ψ dans le cas de modèle de risque classique.

Théorème 2.6.1 *Pour tout $u \geq 0$,*

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u) \quad (2.1)$$

où $\overline{(F_Z^s)^{*n}} = 1 - (F_Z^s)^{*n}$ et $(F_Z^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ième}}$ convolution de (F_Z^s) tel que

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_Z(y)) dy, x \geq 0$$

(Voir Calcul de probabilité de ruine [15]).

2.7 Calcul de la probabilité de ruine à horizon fini

Contrairement au cas infini, il n'y a pas de formule générale pour la probabilité de ruine à horizon fini comme l'équation(2.1). Dans la littérature,

nous ne trouvons qu'une équation intégral-différentielle qui satisfait la probabilité de non-ruine $\phi(u, T)$. Un résultat explicite est connu uniquement pour des réclamation exponentielles (modèle de Lundberg ou P/P), et même dans ce cas, une intégration numérique est nécessaire.

On se réfère Le Théorème d'alternative de la probabilité de ruine à horizon fini $\psi(u, T)$ pour des montants à réclamations exponentiels à l'article ([15]).

Théorème 2.7.1 *Supposons que $F_Z(x) = 1 - e^{-\delta x}$ pour tout $x \geq 0$.*

Alors

$$\psi(u, T) = \frac{1}{r} e^{-(r-1)r^{-1}\delta u} - e^{-\delta u - (1+r)T} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\delta u, \lambda T, y) dy,$$

où $r = \frac{\delta c}{\lambda}$
et

$$g(\omega, s, y) = 2\sqrt{r} \frac{e^{(2\sqrt{r}s + \omega/\sqrt{r}) \cos y}}{1 + r - 2\sqrt{r} \cos y} \left(\sin y \sin\left(y + \frac{\omega}{\sqrt{r}} \sin y\right) \right)$$

2.8 Coefficient d'ajustement

Le coefficient d'ajustement (appelé aussi exposant de Lundberg) joue un rôle clé dans le calcul de la probabilité de ruine dans le cas de réclamations ([12]).

Soit

$$\gamma = \sup_r M_{X_i}(r) < \infty$$

On considère des sinistres X_i dont la loi est de type de Cramér, *i.e.*,

$$\exists r > 0, \text{ tel que } M_{X_i}(r) = E(e^{rX_i}) < +\infty$$

Définition 2.8.1 *Soit R l'unique solution strictement positive de l'équation*

$$\lambda M_{X_i}(R) = \lambda + cR, \quad R < \gamma \tag{2.2}$$

R est le coefficient d'ajustement appelé aussi exposant de Lundberg.

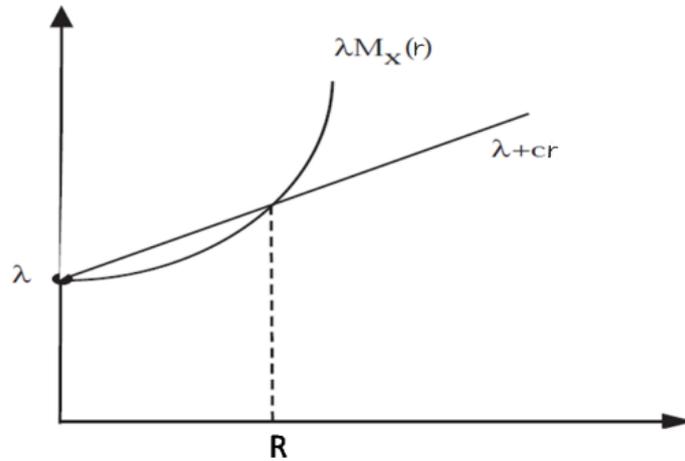


FIGURE 2.4 – Coefficient d'ajustement.

Remarque 2.8.1 *Il est clair que $R = 0$ est toujours solution de l'équation (2.2). Cette équation a une solution unique (pour autant qu'elle existe) puisque M_X est croissante et convexe ($M_X''(r) = E(X^2 e^{rX})$) où M_X'' désigne la dérivée seconde de M_X .*

Remarque 2.8.2 *Si X suit une loi exponentielle de paramètre $(\frac{1}{\mu})$, alors $M_X(r) = \frac{1}{1 - \mu r}$ et R est solution de*

$$1 + (1 + \theta)\mu R = \frac{\lambda}{1 - \mu R}$$

Cette équation admet comme racine positive :

$$R = \frac{c - \lambda\mu}{c\mu}$$

Nous utiliserons la procédure ci-dessus pour trouver l'expression exacte de la probabilité de ruine ultime pour le mélange de distribution exponentielle. En particulier, on obtiendra exactement l'expressions de la probabilité de ruine ultime lorsque la distribution de la gravité des sinistres est considérée comme le mélange de deux exponentielles et le mélange de trois exponentielles qui ont été ajustés à nos données. (on à n exponentielles) ([6]).

2.9 Ajustement du mélange de distribution exponentielle

La fonction de survie du mélange de distribution exponentielle est complètement monotone et par conséquent satisfait l'exigence d'un modèle qui assurerait la régularité dans le montage (Keatinge,1999).

Un mélange de distribution exponentielle a un taux d'échec décroissant qui est une caractéristique souhaitable d'un modèle de perte. La fonction de densité de probabilité d'un mélange de n distributions exponentielles est donnée par

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i e^{-\lambda_i x} \quad (2.3)$$

où $x > 0, \lambda > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ désigne une série de poids non négatifs satisfaisant $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$

On se réfère par ([2])

Cas particulier

- Si $n = 2$ la fonction de densité de probabilité d'un mélange de deux distributions exponentielle est donnée par :

$$f(x) = \omega_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \omega_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \quad (2.4)$$

où $x > 0, \lambda > 0$ pour $i = 1, 2$ et $\sum_{i=1}^2 \omega_i = 1$

- Si $n = 3$ la fonction de densité de probabilité d'un mélange de deux distributions exponentielle est donnée par :

$$f(x) = \omega_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \omega_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} + \omega_3 \lambda_3 e^{-\lambda_3 x} \quad (2.5)$$

avec $x > 0, \lambda > 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1$

2.10 Intégration de produits

L'intégration de produit qui était traditionnellement utilisée pour résoudre numériquement l'intégrale de Volterra, l'équation du deuxième type

(Delves et Mohamed 1989) peut également être utilisée pour calculer probabilités de ruine, En particulier en traitant des distributions de gravité des sinistres à queue lourde (Ramsay et Usabel 1997).

Pour calculer numériquement la probabilité de ruine en temps infini, il faut résoudre cette équation intégrale (Gerber, 1979)

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x \psi(x-y)\{1-F(y)\}dy + \frac{\lambda}{c} \int_x^\infty \{1-F(y)\}dy \quad (2.6)$$

où $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$, $c = \lambda\mu(1+\theta)$ et $p = \int_x^\infty \{1-F(y)\}dy$

qui peut être aussi se mettre sous la forme d'une équation intégrale de Volterra du deuxième type.

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \left\{ A(u) + \int_0^u K(u,t)\psi(t)dt \right\}, u \geq 0 \quad (2.7)$$

on mettant $A(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \{1-F(y)\}dy$ et $K(u,t) = \frac{1-F(u-t)}{\mu}$, $0 \leq t \leq u$.

L'approche précédente du calcul numérique de $\psi(u)$ était basée sur la discrétisation de la distribution sous-jacente de la gravité des sinistres, puis en calculant $\psi(u)$ récursivement sur la base de certains conditions initiales.

Cependant, l'un des principaux inconvénients des schémas récursifs est qu'ils sont lent et moins précis parce que la règle de quadrature employée dans les schémas récursifs est généralement de l'ordre bas.

La méthode d'intégration de produit telle que justifiée par Ramsay et Usabel (1997) est relativement plus rapide et plus précise.

Dans cet partie, nous allons utiliser la méthode d'intégration du produit pour calculer numériquement la probabilité de ruine ultime dans le cas de notre mélange ajusté de trois exponentielles et le mélange de deux exponentielles.

Il doit être noté que l'équation (2.7) donne lieu à l'équation (2.6) comme un cas particulier.

D'où le processus d'exécution de cette équation conduira à la solution numérique de (2.6) à laquelle nous nous sommes intéressé et cela a été exécuté par la méthode d'intégration de produit.

L'équation intégrale de Volterra du second type est donnée par :

$$X(s) = Y(s) + \int_a^s K(s, t)X(t)dt, a \leq s \leq b \quad (2.8)$$

où $K(s, t)$ est le noyau (connu) et $X(t)$ est la fonction inconnue à déterminer. Si $K(s, t)$ ou l'une de ses dérivées d'ordre inférieur se comporte mal dans l'un de ses arguments, les formules d'intégration de Newton Côtes peuvent produire des résultats inexacts ou converge lentement.

Pour faire face à de telles situations, lorsque $K(s, t)$ se comporte mal, Delves et Mohamed (1989) et Linz (1985) recommande l'utilisation de l'intégration de produit.

On factorise d'abord $K(s, t)$ comme

$$K(s, t) = P(s, t)\overline{K}(s, t)$$

où $\overline{K}(s, t)$ est une fonction qui se comporte bien et peut être approché avec précision par un polynôme d'interpolation de Langrange.

L'intervalle $[a, b]$ est divisé en n sous-intervalles $\{h_i\}$ où $h_i = s_{i+1} - s_i$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ et $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$.

Une règle de quadrature de la forme

$$\int_a^{s_i} P(s_i, t)\overline{K}(s, t)X(t)dt = \sum_{j=0}^i \omega_{ij}\overline{K}(s_i, t)X(t_j), \quad (2.9)$$

en mettant $t_i = s_i$ pou $i = 0, 1, 2, \dots, n$ est utilisé pour approximer l'intégrale apparaissant dans (2.8).

Les poids sont déterminés en s'assurant que la règle de l'équation (2.9) soit exacte lorsque $\overline{K}(s, t)X(t)$ est un polynôme en t de degré inférieur ou égale à d .

En gros, $\overline{K}(s, t)X(t)$ est approximé par une règle de quadrature (un polynôme de certains degré par le développement de Taylor) et ensuite il est introduit avec $P(s_i, t)$, dans former l'intégrante de :

$$\int_a^{s_i} P(s_i, t)\overline{K}(s, t)X(t)dt$$

et une fois évalué, il aboutirait à une somme de la forme ;

$$\sum_{j=0}^i \omega_{ij}\overline{K}(s_i, t)X(t_j)$$

ω_{ij} sont les poids des termes de cette série sont-ils déterminés par identifier les coefficients dans la règle de quadrature.

On suppose que les moments μ_{ij} existent car cela est nécessaire pour l'application de la méthode d'intégration de produit et pour chaque i , les moments μ_{ij} peuvent être calculés comme :

$$\mu_{ij} = \int_a^{s_i} t^j P(s, t) dt, j = 0, 1, \dots, d \quad (2.10)$$

Aussi si $y = f(x)$ est une fonction de x et $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f$ alors par la formule d'interpolation de Langrange, nous avons

$$f(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (2.11)$$

et en remplaçant $y_0 = \bar{K}(s_i, t_j)X(t_j)$ et $y_1 = \bar{K}(s_i, t_{j+1})X(t_{j+1})$ on a

$$\bar{K}(s, t)X(t) = \frac{t_{j+1} - t}{h_j} \bar{K}(s_i, t_j)X(t_j) + \frac{t - t_j}{h_j} \bar{K}(s_i, t_{j+1})X(t_{j+1}). \quad (2.12)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_a^{s_i} P(s_i, t) \bar{K}(s, t) X(t) dt &= \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(s_i, t) \left\{ \frac{t_{j+1} - t}{h_j} dt \bar{K}(s_i, t_j) X(t_j) + \bar{K}(s_i, t_{j+1}) X(t_{j+1}) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^i \omega_{ij} \bar{K}(s_i, t_j) X(t_j), \end{aligned} \quad (2.13)$$

où :

$$\begin{aligned} \omega_{i0} &= \int_{t_0}^{t_1} P(s_i, t) \frac{t_1 - t}{h_0} dt, j = 0 \\ \omega_{ii} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(s_i, t) \frac{t - t_{i-1}}{h_{i-1}} dt, j = i \end{aligned}$$

Et

$$\omega_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(s_i, t) \frac{t_{j+1} - t}{h_j} dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} P(s_i, t) \frac{t - t_{j-1}}{h_{j-1}} dt, j = 1, 2, \dots, i - 1$$

Présentation de deux nouvelles variables :

$$v_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - t) P(s_i, t) dt$$

et

$$c_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(s_i, t) dt$$

Les poids peuvent être mis sous la forme :

$$\omega_{i0} = \frac{v_{i0}}{h_0}, \omega_{ij} = \frac{v_{ij}}{h_j} + c_{ij} - \frac{v_{i,j-1}}{h_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \text{ et } \omega_{ii} = c_{i,i-1} - \frac{v_{i,i-1}}{h_{i-1}}.$$

Et finalement, l'estimation de X est donnée par $\widehat{X}_n(s_n)$ où $\widehat{X}_n(s_i)$ qui sont obtenus récursivement par

$$\widehat{X}_n(s_i) = y(s_i) + \sum_{j=0}^i \omega_{ij} \overline{K}(s_i, t) X(t_j) \widehat{X}_n(t_j), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

avec $\widehat{X}_n(s_0) = y(a)$.

Et Pour accélérer la convergence, nous avons utilisé la technique d'extrapolation de Richardson.

2.10.1 Intégration de produit pour le calcul de la probabilité de ruine pour un mélange de trois exponentiellement

Nous avons utilisé l'intégration de produits pour calculer la probabilité ultime de ruine pour le mélange de trois exponentielles et mélange de deux revendications à distributions exponentielles ayant une valeur illustrative de θ comme $\theta = 0.3$

on a :

$$F(t) = 1 - (\omega_1 e^{-\lambda_1 t} + \omega_2 e^{-\lambda_2 t} + \omega_3 e^{-\lambda_3 t}),$$

et

$$K(u, t) = \frac{1 - F(u - t)}{\mu(1 + \theta)} = \frac{\omega_1 e^{-\lambda_1(u-t)} + \omega_2 e^{-\lambda_2(u-t)} + \omega_3 e^{-\lambda_3(u-t)}}{\mu(1 + \theta)}$$

Comme pour cette distribution, tous les moments $\mu_{i,j}$ existent pour tout s fini, l'intégration de produits peut être utilisée.

Donc

$$P(s, t) = K(s, t)$$

$$\overline{K}(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemples d'application

Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à un modèle exponentiel mixte qui est un modèle largement utilisé pour modéliser la gravité des sinistres.

Le fait qu'un modèle exponentiel mixte en tant que modèle de gravité des sinistres conduit à une traçabilité mathématique dans le calcul de certaines des grandeurs actuarielles d'intérêt comme la probabilité de ruine, les moments de temps de ruine, fonction de probabilité du nombre de sinistres jusqu'à ruine ...etc, en a fait l'un des modèles le plus largement utilisés pour modéliser la gravité des sinistres en actuariat.

Le référence Keatinge (1999) explique pourquoi un mélange de distribution exponentielle est un choix pour la modélisation actuarielle.

Peut-être, à partir du point de montage de la distribution, c'est le mélange de distribution exponentielle qui, parmi tous les autres modèles potentiels de modélisation de la gravité des sinistres, fournit l'équilibre optimal entre la qualité de l'ajustement et le lissage des données.

Nous présentons les objectifs suivants du travail énoncés dans ce document

- ajuster un mélange de deux exponentielles et un mélange de trois exponentielles à un ensemble d'assurance, et les données de réclamation à l'aide de la méthode de Newton-Raphson à paramètres multiples et pour tester la qualité de l'ajustement pour ces modèles.

- Pour dériver une expression exacte de la probabilité de ruine ultime pour le mélange de deux et le mélange de trois exponentielles utilisant la fonction génératrice des moments de l'agrégat maximal variable aléatoire de perte.
- Calculer la probabilité de ruine ultime pour ces modèles en utilisant une approche numérique à savoir la méthode d'intégration des produits.

3.1 Calcul analytique de $\psi(x)$

3.1.1 Cas général

Soit N une variable aléatoire de comptage, de fonction de probabilités :

$$p_n = P(N = n); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et de queue de probabilités :

$$a_n = P(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dans un contexte d'assurance, N représente souvent le nombre de sinistres. Soit Y_1, Y_2, \dots une suite de variables aléatoires positives, indépendantes distribuées, et indépendantes de N , de distribution commune $P(y) = P(Y \leq y)$, $y \geq 0$, ou Y est un Y_i arbitraire.

On appelle $\{p_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ la distribution du nombre de sinistres et $P(y), y \geq 0$ la distribution du montant de sinistre individuel.

Soit $P^{*n}(y) = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \leq y)$ pour $n = 1, 2, \dots$ le produit de la $n^{\text{ième}}$ convolution et $\overline{P^{*n}}(y) = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n > y)$ la queue de distribution correspondante.

L'intérêt ici est la somme aléatoire $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ (avec $S = 0$ si $N = 0$) qui représente le montant cumulé des sinistres. La fonction de distribution de S est $G(x) = P(S \leq x)$, est une distribution composée. Il est facile de voir que :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

ou $P^{*0}(x) = 1$ et par conséquent :

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \overline{P^{*n}}(x), \quad x \geq 0$$

En général, l'évaluation de la distribution queue $\overline{G}(x)$ est difficile à cause des convolutions.

Une approche utilisée est l'identification de la transformée de Laplace de S :

$$E(e^{-rS}) = \tilde{P}\{E(e^{-rY})\}$$

ou $\tilde{P}(z)$ est la fonction génératrice des probabilités de N ;

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z) &= E(z^N) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n. \end{aligned}$$

Si la distribution du montant de sinistre $P(y)$ est conservée (stable) par convolution, on obtient des simplifications, et ainsi on aura une expression explicite de la probabilité de ruine. Ce qui suit traite ce cas de figure et qui est le mélange de distributions exponentielles.

3.1.2 Calcul de la probabilité exacte de ruine pour un mélange de distributions exponentielles

La variable aléatoire de perte globale maximale est définie comme :

$$L = \max_{t \geq 0} \{\omega(t) - ct\} \tag{3.1}$$

c'est le maximum de l'excédent des sinistres cumulés sur la prime reçue. Encore une fois, puisque $\omega(t) - ct = 0$, pour $t = 0$ il s'ensuit que $L \geq 0$. Pour obtenir la fonction de distribution de L , nous procédons comme suit :

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= P\{u(t) \geq 0 \ \forall t\} \text{ (par définition)} \\ &= P\{u + ct - w(t) \geq 0, \quad \forall t\} \\ &= P\{w(t) - ct \leq u, \quad \forall t\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Mais $w(t) - ct \leq u, \quad \forall t$ est équivalent à $\max_{t \geq 0} \{\omega(t) - ct\} \leq u$ et donc, cette dernière est équivalente à :

$$1 - \psi(u) = P\{L \leq u\}, u \geq 0 \tag{3.3}$$

Le complément de la probabilité de ruine ultime peut être interprété comme la fonction de distribution de L .

En mettant $u = 0$ on obtient :

$$1 - \psi(0) = P(L \leq u) = P(L = 0), \text{ puisque } L \geq 0.$$

Ceci nous amène à conclure que la distribution de L est de type mixte avec une masse ponctuelle de $1 - \psi(0)$ à l'origine avec la probabilité restante distribuée de façon continue sur les valeurs positives de L , on a :

$$M_L(r) = E(e^{rL}) = e^{r0}P(L = 0) + \int_0^\infty e^{ru} f_L(u) du \quad (3.4)$$

avec

$$f_L(u) \frac{d(1 - \psi(u))}{du} = -\frac{d\psi(u)}{du} = -\psi'(u) \quad (3.5)$$

utilisant cette dernière fonction en (3.4) on obtient :

$$M_L(r) = 1 - \psi(0) + \int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du \quad (3.6)$$

On sait que aussi

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta} \quad (3.7)$$

D'où,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du \quad (3.8)$$

Et d'après la formule de Bowers (1998), la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire de perte globale maximale L est :

$$M_L(r) = \frac{\theta \mu r}{1 + (1 + \theta) \mu r - M_x(r)} \quad (3.9)$$

avec $M_x(r)$ est la fonction génératrice des moments de la distribution sous-jacente de la gravité des sinistres. Cela peut aussi être mis sous la forme :

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \left\{ \frac{\theta [M_X(r) - 1]}{1 + (1 + \theta) \mu r - M_X(r)} \right\} \quad (3.10)$$

En comparant (3.8) et (3.10), on obtient :

$$\int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du = \frac{1}{1 + \theta} \left\{ \frac{\theta [M_X(r) - 1]}{1 + (1 + \theta) \mu r - M_X(r)} \right\} \quad (3.11)$$

Cette formule est utilisée pour trouver l'expression exacte de $\psi(u)$ pour une famille de répartitions de montant de réclamation. ([10])

L'une de ces distributions de gravité des sinistres est le mélange de distributions exponentielles .

Pour le mélange de distribution exponentielle dont la fonction de densité de probabilité est donnée par (3.8), la fonction génératrice des moments est donné par :

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i - r}$$

En remplaçant l'expression par $M_X(r)$ dans la formule (3.11) , le résultat est une fonction rationnelle de r , qui en appliquant la méthode de la fraction partielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du = \sum_{i=1}^n \frac{C_i R_i}{R_i - r}$$

avec ($i = 1, 2, \dots, n$) où C_i sont des constantes et R_i sont les racines positives du l'équation de Lundberg, la seule fonction qui satisfasse cela et pour $\psi(\infty) = 0$ est $\psi(u) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R_i u}$ qui est l'expression de probabilité de ruine pour un mélange de n exponentielles.

3.1.3 Expression exacte de la probabilité de ruine en cas de mélange de trois exponentielles

Comme on a indiqué dans la fin de deuxième chapitre, la fonction de densité de probabilité du mélange de trois distributions exponentielles est donné par :

$$f(x) = \omega_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \omega_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} + \omega_3 \lambda_3 e^{-\lambda_3 x} \quad (3.12)$$

(Voir l'article de Nath et Das [10]) avec $x > 0$, $\lambda, \omega > 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1$, et sa moyenne est donnée par

$$\mu = \frac{\omega_1}{\lambda_1} + \frac{\omega_2}{\lambda_2} + \frac{\omega_3}{\lambda_3}.$$

Sa fonction génératrice de moment est donnée par :

$$M_X(r) = \frac{a_1 r^2 + b_1 r + k_1}{(\lambda_1 - r)(\lambda_2 - r)(\lambda_3 - r)}$$

où

$$a_1 = \omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3,$$

$$b_1 = -\{\omega_1\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \omega_2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3) + \omega_3\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)\} \text{ et}$$

$$k_1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Et même :

$$(\lambda_1 - r)(\lambda_2 - r)(\lambda_3 - r) = a_2r^3 + b_2r^2 + c_2r + d_2$$

avec $a_2 = -1$,

$$b_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$c_2 = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3),$$

et $d_2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Par conséquent

$$M_X(r) - 1 = \frac{a_3r^3 + b_3r^2 + c_3r + d_2}{(\lambda_1 - r)(\lambda_2 - r)(\lambda_3 - r)} \quad (3.13)$$

où :

$$a_3 = -a_2,$$

$$b_3 = a_1 - b_2,$$

$$c_3 = b_1 - c_2,$$

$$d_3 = 0.$$

Aussi on a :

$$1 + (1 + \theta)\mu r - M_X(r) = \frac{a_4r^4 + b_4r^3 + c_4r^2 + d_4r^2 + e_4}{(\lambda_1 - r)(\lambda_2 - r)(\lambda_3 - r)} \quad (3.14)$$

où

$$a_4 = a_2(1 + \theta)\mu,$$

$$b_4 = a_2 + b_2(1 + \theta)\mu,$$

$$c_4 = b_2 + c_2(1 + \theta)\mu - a_1,$$

$$d_4 = c_2 + d_2(1 + \theta)\mu - b_1 \text{ et } e_4 = 0.$$

D'où

$$\frac{1}{1 + \theta} \left\{ \frac{\theta[M_X(r) - 1]}{1 + (1 + \theta)\mu r - M_X(r)} \right\} = \frac{1}{1 + \theta} \left\{ \frac{a_3r^2 + b_3r + c_3}{a_4r^3 + b_4r^2 + c_4r + d_4} \right\} \quad (3.15)$$

Ce qui implique :

$$\frac{1}{1+\theta} \left\{ \frac{\theta[M_X(r) - 1]}{1 + (1+\theta)\mu r - M_X(r)} \right\} = \frac{C_1 R_1}{R_1 - r} + \frac{C_2 R_2}{R_2 - r} + \frac{C_3 R_3}{R_3 - r} \quad (3.16)$$

avec $R_1, R_2,$ et R_3 sont les racines de l'équation de Lundberg.

Par conséquent, R_1, R_2 et R_3 sont les racines de l'équation cubique $a_4 r^3 + b_4 r^2 + c_4 r + d_4 = 0$.

Ensuite

$$\frac{1}{1+\theta} \left\{ \frac{a_3 r^2 + b_3 r + c_3}{a_4 r^3 + b_4 r^2 + c_4 r + d_4} \right\} = \frac{1}{1+\theta} \left\{ \frac{a_3 r^2 + b_3 r + c_3}{k(R_1 - r)(R_2 - r)(R_3 - r)} \right\} \quad (3.17)$$

où k en doit être déterminé de telle sorte que $(R_1 - r)(R_2 - r)(R_3 - r) = a_4 r^3 + b_4 r^2 + c_4 r + d_4$

ainsi donnant : $k = -a_4$

On aura :

$$\frac{a_3 r^2 + b_3 r + c_3}{k(R_1 - r)(R_2 - r)(R_3 - r)} = \frac{M_1}{R_1 - r} + \frac{M_2}{R_2 - r} + \frac{M_3}{R_3 - r} \quad (3.18)$$

$M_i, i = 1, 2, 3$ doivent être déterminés par la méthode des fractions partielles.

Ainsi :

$$M_1 = \frac{a_3 R_1^2 + b_3 R_1 + c_3}{k(R_2 - R_1)(R_3 - R_1)},$$

$$M_2 = \frac{a_3 R_2^2 + b_3 R_2 + c_3}{k(R_1 - R_2)(R_3 - R_2)},$$

$$M_3 = \frac{a_3 R_3^2 + b_3 R_3 + c_3}{k(R_1 - R_3)(R_2 - R_3)}.$$

Ainsi, en reformulant (3.16), on aura :

$$\frac{1}{1+\theta} \left\{ \frac{\theta[M_X(r) - 1]}{1 + (1+\theta)\mu r - M_X(r)} \right\} = \frac{C_1 R_1}{R_1 - r} + \frac{C_2 R_2}{R_2 - r} + \frac{C_3 R_3}{R_3 - r} \quad (3.19)$$

avec : $C_i = \frac{\theta}{1+\theta} \frac{M_i}{R_i}, i = 1, 2, 3$

Par conséquent, la probabilité de ruine ultime en cas de mélange de trois exponentielles est donnée par :

$$\psi(u) = C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u} + C_3 e^{-R_3 u} \quad (3.20)$$

De même, l'expression de la probabilité exacte de ruine pour le mélange de deux distributions exponentielles peut être dérivée comme suit :

$$M_X(r) = \frac{a_1 r + b_1}{a_2 r^2 + b_2 r + c_2}$$

avec :

$$a_1 = -(\omega_1 \lambda_1 + \omega_2 \lambda_2),$$

$$b_2 = \lambda_1 \lambda_2,$$

$$a_2 r^2 + b_2 r + c_2 = (\lambda_1 - r)(\lambda_2 - r),$$

où

$$a_2 = 1,$$

$$b_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \text{ et}$$

$$c_2 = \lambda_1 \lambda_2$$

$$M_X(r) = \frac{a_3 r^2 + b_3 r}{a_2 r^2 + b_2 r + c_2}$$

Nous mettons : $a_3 = -a_2$ et $b_3 = a_1 - b_2$

De nouveau :

$$1 + (1 + \theta)\mu r - M_X(r) = \frac{a_4 r^3 + b_4 r^2 + c_4 r + d_4}{a_2 r^2 + b_2 r + c_2}$$

où $a_4 = a_2(1 + \theta)\mu$, $b_4 = a_2 + (1 + \theta)\mu b_2$, $c_4 = b_2 + (1 + \theta)\mu c_2 - a_1$ et $d_4 = 0$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{1 + \theta} \left\{ \frac{\theta[M_X(r) - 1]}{1 + (1 + \theta)\mu r - M_X(r)} \right\} = \frac{C_1 R_1}{R_1 - r} + \frac{C_2 R_2}{R_2 - r}$$

où R_1 et R_2 sont les racines de l'équation quadratique $a_4 r^2 + b_4 r + c_4 = 0$,

avec $C_1 = \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{M_1}{R_1}$, $C_2 = \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{M_2}{R_2}$

Et de même $M_1 = \frac{a_3 R_1 + b_3}{k(R_2 - R_1)}$ et $M_2 = \frac{a_3 R_2 + b_3}{k(R_1 - R_2)}$ avec $k = a_4$

Par conséquent, la probabilité de ruine ultime en cas de mélange de deux exponentielles est donnée par :

$$\psi(u) = C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u} \tag{3.21}$$

3.1.4 Calcul des poids lorsque la gravité de la réclamation est un mélange de trois exponentielles

Les poids sont donnés par

$$v_{ij} = \frac{1}{\mu(1 + \theta)} \left\{ t_{j+1} M_1 + M_2 \right\}$$

avec

$$M_1 = \frac{\omega_1 e^{-\lambda_1 u}}{\lambda_1} \left\{ e^{\lambda_1 t_{j+1}} - e^{\lambda_1 t_j} \right\} + \frac{\omega_2 e^{-\lambda_2 u}}{\lambda_2} \left\{ e^{\lambda_2 t_{j+1}} - e^{\lambda_2 t_j} \right\} + \frac{\omega_3 e^{-\lambda_3 u}}{\lambda_3} \left\{ e^{\lambda_3 t_{j+1}} - e^{\lambda_3 t_j} \right\}$$

$$M_2 = \frac{\omega_1 e^{-\lambda_1 u}}{\lambda_1} \left\{ (t_{j+1} e^{\lambda_1 t_{j+1}} - t_j e^{\lambda_1 t_j}) - \frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t_{j+1}} - e^{\lambda_1 t_j}) \right\} + \frac{\omega_2 e^{-\lambda_2 u}}{\lambda_2} \left\{ (t_{j+1} e^{\lambda_2 t_{j+1}} - t_j e^{\lambda_2 t_j}) - \frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t_{j+1}} - e^{\lambda_2 t_j}) \right\} + \frac{\omega_3 e^{-\lambda_3 u}}{\lambda_3} \left\{ (t_{j+1} e^{\lambda_3 t_{j+1}} - t_j e^{\lambda_3 t_j}) - \frac{1}{\lambda_3} (e^{\lambda_3 t_{j+1}} - e^{\lambda_3 t_j}) \right\}$$

et

$$c_{ij} = \frac{1}{\mu(1 + \theta)} \left\{ \frac{\omega_1 e^{-\lambda_1 u}}{\lambda_1} \left\{ e^{\lambda_1 t_{j+1}} - e^{\lambda_1 t_j} \right\} + \frac{\omega_2 e^{-\lambda_2 u}}{\lambda_2} \left\{ e^{\lambda_2 t_{j+1}} - e^{\lambda_2 t_j} \right\} + \frac{\omega_3 e^{-\lambda_3 u}}{\lambda_3} \left\{ e^{\lambda_3 t_{j+1}} - e^{\lambda_3 t_j} \right\} \right\}$$

Des expressions similaires peuvent être dérivées pour les poids du mélange de deux exponentielles.

3.2 Calcul numérique et représentation graphique

Dans cette partie, on va s'intéresser au calcul approché de la probabilité de ruine. Pour cela, on commence par la discrétisation de la fonction de répartition des montants de réclamation dans le modèle classique, et ça en utilisant des méthodes prédéfinies dans le package actuar qu'utilise le logiciel R et qui sont :

- Méthode Lower.
- Méthode Upper.

— Méthode Unbiased.

La figure suivante représente cette discrétisation :

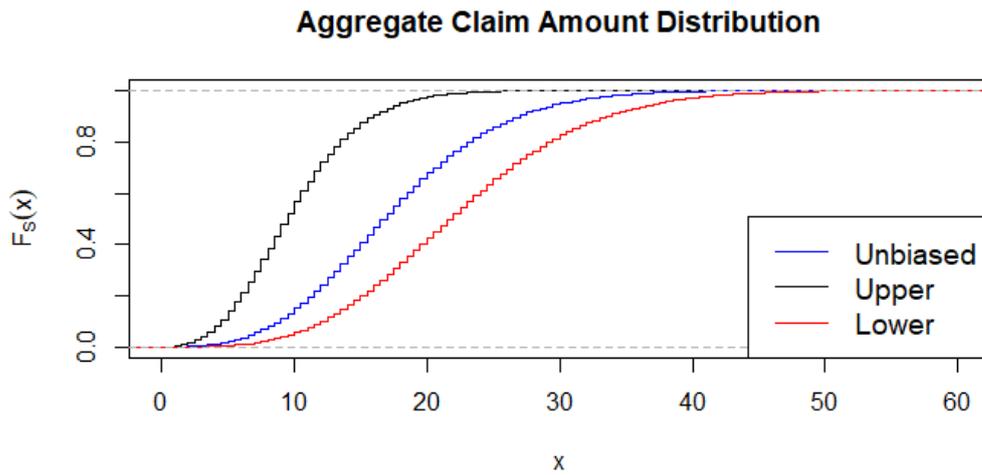


FIGURE 3.1 – Fonction de répartition des montants de réclamation.

De même utilisant les méthodes que nous avons rappelé précédemment pour calculer la valeur approché de probabilité de ruine, pour un mélange de deux exponentielle et de trois exponentielle.

Pour le mélange de deux exponentielle on obtient les graphe suivant :

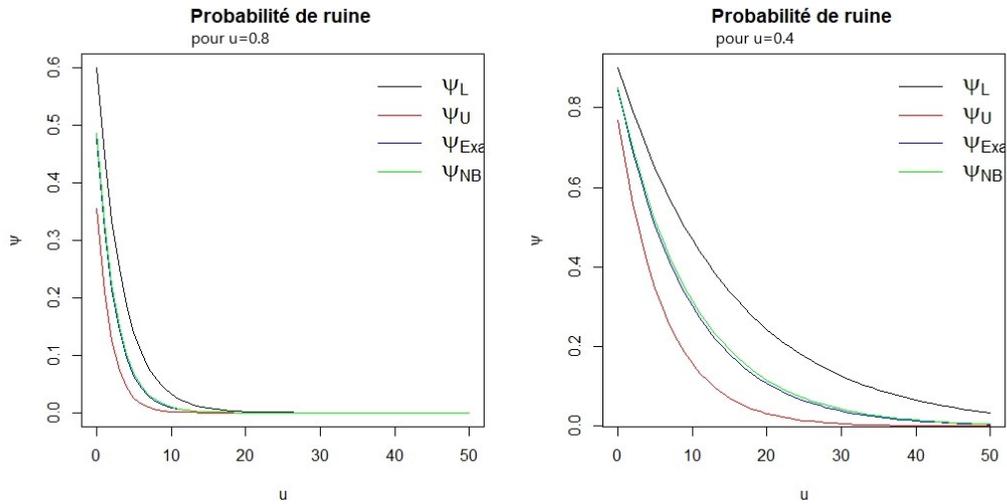


FIGURE 3.2 – probabilité de ruine en fonction de capitale initial.

Le mélange de trois exponentielles donne la figure suivante :

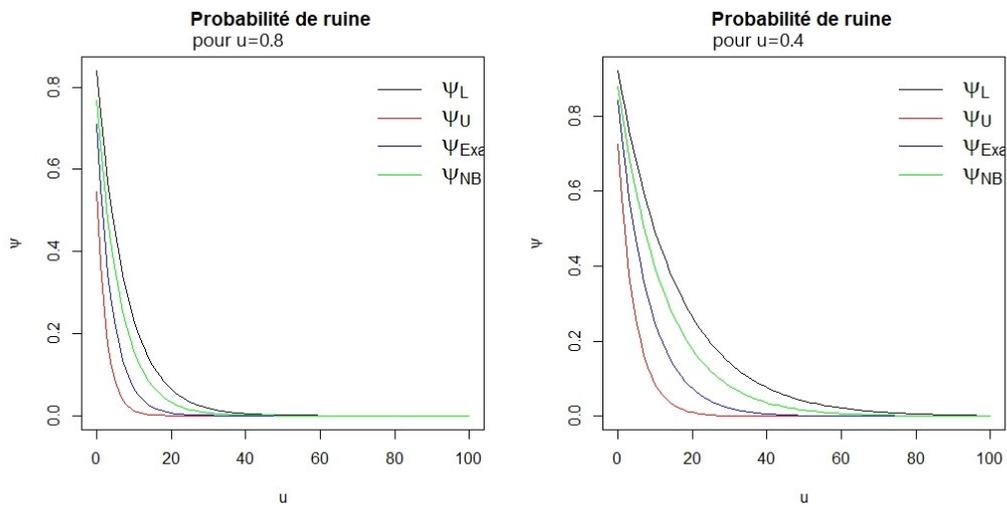


FIGURE 3.3 – probabilité de ruine en fonction de capitale initial.

On peut remarquer que la discrétisation de probabilité de ruine vers le 0 est plus rapide quand le capital initial est plus grand.

Maintenant on va essayé de calculer la valeur exacte de la probabilité de ruine, exactement pour le mélange de trois exponentielles donnant un exemple qui est résolu par les méthodes cité précédemment, cet exemple là est pour :

- $c=10$,
- $\lambda = 3$,
- $\lambda_1 = 1$,
- $\lambda_2 = 2$,
- $\lambda_3 = 3$,
- $\omega_1 = 0.4$,
- $\omega_2 = 0.1$,
- $\omega_3 = 0.5$.

ces paramètres donne le graphique suivant

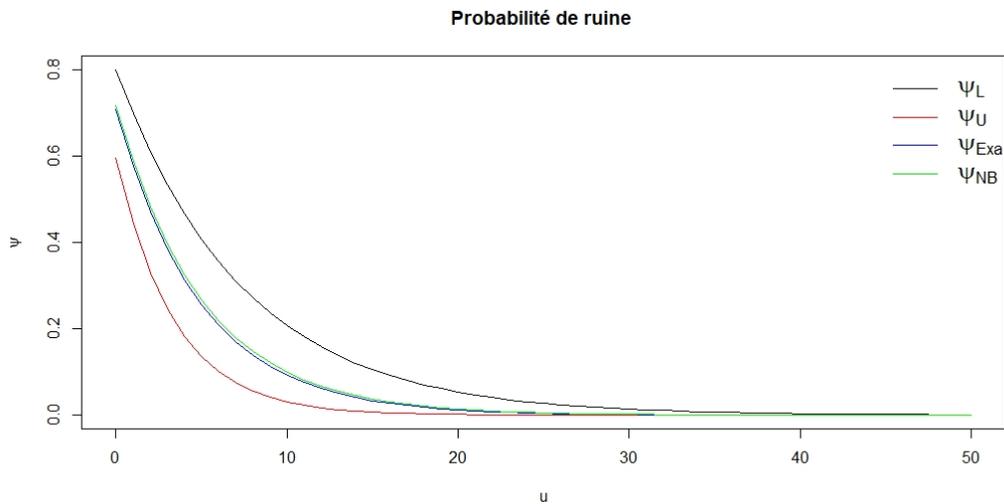


FIGURE 3.4 – Les trois approximations de la probabilité de ruine

A la fin, comparant les résultats obtenu de la solution approché et la solution exacte par ce tableau :

	lower	unbiased	exacte	upper
1	0.999955	0.999618	0.999585	0.999888
2	0.994014	0.861016	0.855819	0.978709
3	0.944185	0.434031	0.424896	0.848356
4	0.799931	0.126618	0.121842	0.590680
5	0.575116	0.024318	0.023016	0.322313
6	0.345667	0.003411	0.003178	0.140254
7	0.174788	0.000375	0.000345	0.050059
8	0.075441	0.000034	0.000031	0.015056
9	0.028241	0.000003	0.000002	0.003904
10	0.009308	0.000000	0.000000	0.000890
11	0.002737	0.000000	0.000000	0.000181

On peut remarque que la méthode unbiased est la meilleur pour approxi-
mée la probabilité de ruine selon ces résultats.

3.3 Conclusion général

Dans ce travail on a étudié les probabilités de ruine dans le cas de mélange de lois exponentielles pour un horizon infini.

Un travail qui nous a poussé a touché plusieurs notions intermédiaire dont les équations intégrales qui nécessitent un calcul généralement numérique.

O a opté quelques méthodes, nous voyons les plus simples pour y parvenir.

Ces dernières sont les méthodes Upper, Lower et Unbiased.

Nous avons remarqué qu'elles sont simple a interpreter et donnent de bonne resultat pour approximer la probabilité de ruine.

On a pu remarqué aussi qu'il y a une relation étroite entre le capital initial et la décroissance exponentielle de la probabilité de ruine (plus le capital est grand plus la probabilité est petite).

Nous pouvons conclure

- La méthode Unbiased est la meilleure pour approcher une probabilité de ruine
- La probabilité de ruine pour un mélange de loi exponentielle décroît rapidement vers 0, du le fait que la loi exponentielle est à queue légère. Le problème est donc : que se passe t-il si la queue de distribution est lourde?, ce travail est en perspective.
- On trai un travail perspectif, aussi et de calculer la probabilité de ruine par simulation.

ANNEXE

La méthode de Newton-Raphson : La situation multi-paramètres

L'une des méthodes les plus utilisées pour l'optimisation dans la situation multi-paramètres en statistique est la méthode Newton-Raphson qui ([11]) est brièvement décrite et donnée ci-dessous :

Supposons que $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$ est un vecteur p (disons des paramètres inconnus et la log-vraisemblance de la distribution impliquant θ est donnée par $l(\theta, x)$).

alors les MLE sont obtenus en résolvant les équation

$$l'(\theta, x) = 0.$$

définissons maintenant ce que l'on appelle la matrice de gradient est donnée par

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial l}{\partial \theta_p} \end{pmatrix},$$

est la matrice hessienne est donnée par

$$J(\theta) = (J_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p} \text{ où } J_{ij} = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

alors la relation itérative pour la méthode multi-paramètres de Newton-Raphson est donnée par

$$\theta^{(S+1)} = \theta^{(S)} + [J(\theta^{(S)})]^{-1} s(\theta^{(S)}),$$

Où $\theta^{(S)}$ est la valeur estimée de θ à la S^{th} itération. L'itération est effectuée jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de différence significative entre $\theta^{(S)}$ et $\theta^{(S+1)}$.

Preuve de la Proposition : "Identité de Wald" 1.5.6

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E[E[X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_{N(t)}(t)/N(t) | N(t) = k]] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_{N(t)}(t)/N(t) | N(t) = k] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_k(t)] / P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^k X_i(t)] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k E[X(t)] P[N(t) = k] \\ &= E[X(t)] \sum_{k=0}^{\infty} k P[N(t) = k] \\ &= E[X(t)] E[N(t)] \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E[S(t)] = E[X(t)] E[N(t)]$$

$$\begin{aligned} Var[S(t)] &= E[S^2(t)] - E^2[S(t)] \\ &= E[(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t))^2] - (E[X(t)] E[N(t)])^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[E[(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t))^2/N(t) = k]] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [E[(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t))^2/N(t) = k]] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [E[(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t))^2]P[N(t) = k]] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [Var(\sum_{i=1}^k X_i(t)) + E^2(\sum_{i=1}^k X_i(t))]P[N(t) = k] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [kVar[X(t)] + k^2E^2]P[N(t) = k] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [kVar[X(t)]P[N(t) = k] + \sum_{k=0}^{\infty} k^2E^2]P[N(t) = k] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= Var[X(t)]E[N(t)] + E^2[X(t)]E[(N(t))^2] - E^2[X]E^2[N] \\
&= Var(X)E[N] + E^2[X(t)]Var[N(t)]
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$Var[S(t)] = Var(X)E[N(t)] + E^2[X(t)]Var[N(t)]$$

Preuve de la Proposition 1.5.9

Nous avons pour tout $m \leq n$

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-m}(t-y)dF_m(y)$$

Comme F_{n-m} est croissante,

$$\forall y \leq t, F_{n-m}(t-y) \leq F_{n-m}(t)$$

Nous pouvons écrire :

$$\forall 1 \leq m \leq n-1, F_n(t) \leq F_{n-m}(t)F_m(t)$$

De même, pour tout : $r \geq 1$ et $0 \leq k \leq r - 1$

$$F_{nr+k}(t) \leq F_{(n-1)r+k}(t)F_r(t) \leq F_k(t)[F_r(t)]^n$$

Pour tout $t \geq 0$, il existe un $r \geq 1$ tel que $F_r(t) < 1$. Ce qui implique que la série converge au moins aussi vite qu'une série géométrique.

preuve de la Proposition 1.5.10

En conditionnant à l'instant de première occurrence du processus. Soit $t > 0$, nous avons,

$$m(t) = E[E[N(t) / X_1]]$$

Or,

$$E[N(t) / X_1 = x] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ 1 + m(t - x) & \text{si } t \geq x. \end{cases}$$

En intégrant, nous obtenons

$$m(t) = \int_0^\infty E[N(t) / X_1 = x] dF(x) = \int_0^t (1 + m(t - x)) dF(x)$$

Ce qui donne

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t - x) dF(x)$$

Preuve de la Proposition 1.5.11

Posons $A(t) = E[T_{N_t+1}]$ En conditionnant par l'instant de première occurrence du processus, on a

$$E[T_{N_t+1} / X_1 = x]$$

Après intégration,

$$A(t) = \int_0^t (x + A(t - x)) dF(x) + \int_t^\infty x dF(x) = E[X_1] + \int_0^t A(t - x) dF(x)$$

D'après la proposition

$$A(t) = E[X_1] + E[X_1] \int_0^t dm(t) = E[X_1](1 + m(t))$$

Ce qui donne

$$A(t) = E[T_{N_t+1}] = E[X_1](1 + E[N_t])$$

Preuve de la Proposition 1.5.12

La démonstrations se fait en deux étapes.

Étape 1

La relation $T_{N(t)+1} > t$ est toujours vérifiée. D'après la proposition nous avons

$$\forall t \geq 0, E[X_1](1 + m(t)) > t$$

Ceci implique

$$\forall t \geq 0, \frac{m(t)}{t} > \frac{1}{E[X_1]} - \frac{1}{t}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{E[X_1]}$$

Étape 2

Il s'agit de démontrer que l'on peut "inverser" L'inégalité précédente. Pour ce faire,choisissons un réel $\alpha > 0$ et posons

$$\forall i \geq 1, X_i^\alpha = \min(\alpha, X_i)$$

Considérons le processus de renouvellement associé à la fonction de répartition des X_i^α .Notons m^α la fonction de renouvellement correspondante.Du fait que

$$\begin{aligned} X_1^\alpha &\leq \alpha \\ m(t) &\leq m^\alpha(t) \end{aligned}$$

et

$$E[T_{N^{\alpha}(t)+1}^{\alpha} \leq t + \alpha$$

Ceci implique que

$$E[X_1^{\alpha}](1 + m(t)) \leq t + \alpha$$

et

$$\frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{E[X_1^{\alpha}]} + \frac{\alpha}{t} \left(\frac{1}{E[X_1^{\alpha}]} - 1 \right)$$

En faisant tendre α vers l'infinie dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{m(t)}{t} \leq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{E[X_1^{\alpha}]} = \frac{1}{E[X_1]}$$

Les inégalités obtenues aux étapes 1 et 2 montrent que la limite existe et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]}$$

Équation intégrale linéaire et non linéaire 1.7.1

L'équation intégrale non singulière du type (1.5), où $L[y(x)]$ est une expression linéaire dans laquelle $y(x)$ apparaît sous un ou plus de signes d'intégration sont appelés comme une équation intégrale linéaire .

Dans en d'autres termes, une équation intégrale est dite linéaire si elle n'est que linéaire des opérations y sont effectuées sur la fonction inconnue. Un non-équation intégrale singulière qui n'est pas linéaire est connue sous le nom de non-équation intégrale linéaire .

Ainsi, les équations(1.1) et (1.2) données ci-dessus sont des intégrales linéaires équations tandis que les équations (1.3) et (1.4) sont des équations intégrales non linéaires.

Équations intégrales linéaires de la forme (1.1), où l'inconnu la fonction apparaît sous le signe de l'intégration et nulle part ailleurs dans le équation, sont appelées équations intégrales du premier type . Ceux de la form (1.2), où la fonction inconnue apparaît à la fois sous le signe de l'intégration et ailleurs dans l'équation sont appelées intégrales équations du second type . La fonction $k(x, t)$ apparaissant dans les équations (1.1) et (1.2), est connu

comme le noyau de l'équation intégrale définie dans le rectangle $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$.

Les différents noms ont été utilisés dans différentes langues pour le mot noyau. Les noms de noyau suivants sont populaires et plus communs :

- (i) Noyau en français
- (ii) Kern en allemand
- (iii) Nucleo en italien

L'équation intégrale est complètement spécifiée en donnant le interval $[a, b]$, le noyau $k(x, t)$ et la fonction $f(x)$. Si nous prenons $f(x) = 0$ dans (1.2), nous obtenons l'intégrale homogène équation du deuxième type comme donnée ci-dessous :

$$y(x) = \int_a^b K(x, t)y(t)dt; a \leq x \leq b, a \leq t \leq b \quad (22)$$

Lorsque les équations intégrales (1.2) et (22) sont considérées simultanément, l'équation (22) est appelée comme l'homogène, équation intégrale associée à l'équation intégrale (1.2). Il est souvent pratique d'introduire un paramètre λ dans une intégrale équation du second type, qui prend alors la forme suivante :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt; a \leq x \leq b, a \leq t \leq b \quad (23)$$

La constante λ peut également être incorporée dans le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale (23). Cependant, nous pouvons obtenir des informations utiles en étudiant ce qui se passe quand on laisse λ varier dans le complexe-plane. Si $K(x, t) = 0$ lorsque $x < t$, alors l'équation intégrale (23) peut être écrit comme :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (24)$$

avec une limite supérieure d'intégration variable. Cependant, le type le plus général d'équation intégrale linéaire peut être mis sous la forme suivante :

$$g(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (25)$$

où la limite supérieure d'intégration peut être soit variable x soit fixe b . Les fonctions $f(x), g(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions connues alors que $y(x)$ est

à déterminer ; λ est un paramètre réel ou complexe non nul.

Rappelons que la fonction $K(x, t)$ est connue comme le noyau de l'équation d'intégrale .

Les cas particuliers suivants du type le plus général de linéaire L'équation intégrale (25) présente un intérêt principal.

Équation intégrale linéaire de premier type

Le type le plus général d'équation intégrale linéaire est donné par

$$g(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a K(x, t)y(t)dt \quad (26)$$

Si nous prenons $g(x) = 0$ alors l'équation intégrale (26) se réduit à

$$f(x) + \lambda \int_a K(x, t)y(t)dt = 0 \quad (27)$$

qui est appelée équation intégrale linéaire de premier type .

Équation intégrale linéaire de deuxième type

Si nous prenons $g(x) = 1$, alors l'équation intégrale (26) se réduit à

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a K(x, t)y(t)dt \quad (28)$$

qui est appelée équation intégrale linéaire de deuxième type .

Équation intégrale linéaire de troisième type

Si $g(x)$ est différent de zéro et un, alors l'équation intégrale (26) lui-même est appelé équation intégrale linéaire de troisième type. Plus d'informations de trouve toujours sur le livre de Jerry, Abdul ([8])

Bibliographie

- [1] Distributions sous-exponentielles et queues intégrées. *Journal des probabilités appliquées*, 25 :132–141.
- [2] Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance d'une distribution de mélange. In *Distributions statistiques dans le travail scientifique*, pages 95–109.
- [3] E Sparre Andersen. Sur la théorie collective du risque en cas de contagion entre sinistres. *Bulletin de l'Institut de Mathématiques et de ses Applications*, 12 :275–279.
- [4] Soren Asmussen and Hansjorg Albrecher. *Ruin probabilities*, volume 14. World scientific, 2010.
- [5] Houria Bouziane. *Calcul et estimation d'une probabilité de ruine*. PhD thesis, ummto, 2011.
- [6] Paweł et Weron Aleksander Burnecki, Krzysztof et Miśta. Ruiner les probabilités en temps fini et infini. In *Outils statistiques pour la finance et l'assurance*, pages 341–379.
- [7] Bernard et Ouarda Taha BMJ El Adlouni, S et Bobée. À la queue des distributions d'événements extrêmes en hydrologie. *Journal d'hydrologie*, 355 :16–33.
- [8] Abdul Jerri. *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley & Sons, 1999.

- [9] Bruno Leclerc. *Distributions statistiques et lois de probabilité*. De Gruyter Mouton, 2017.
- [10] Dilip C Nath and Jagriti Das. Modeling of claim severity through the mixture of exponential distribution and computation of its probability of ultimate ruin. *Thailand Statistician*, 15(2) :128–148, 2017.
- [11] François Peyraut and Nadia Labed. Préservation de l’orientation et convergence de newton-raphson avec le modèle hyperélastique compressible de blatz-ko. *Revue Européenne des Eléments*, 10(5) :595–605, 2001.
- [12] Hanspeter et Schmidt Volker et Teugels Jozef L Rolski, Tomasz et Schmidli. *Processus stochastiques pour l’assurance et la finance*, volume 505.
- [13] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, and Jozef L Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*, volume 505. John Wiley & Sons, 2009.
- [14] Gilbert Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.
- [15] L Tlilane, H Allaoua, Z Benouaret, and D Aissani. Quelques méthodes d’approximation des probabilités de ruine et application au modele de lundberg. *Actes du—MOSIM*, 2016.
- [16] Christian Werner, Thomas et Upper. Variation dans le temps du comportement de queue des retours à terme sur bunds. *Disponible au SSRN 362320*.