

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahlab Blida 1  
Faculté des sciences  
Département de Mathématiques

---



*Mémoire*

*Présenté pour l'Obtention du Diplôme de Master*

*En : MATHÉMATIQUES*

*Spécialité : Modélisation Stochastique et Statistique*

*par : Derouiche Sihem*

*THEME*

---

**Analyse d'un système multiserveur avec rappels et avec pertes  
par la méthode des martingales**

---

*Devant le jury composé de :*

M <sup>me</sup> : Dahmane Zineb	MAA,	à U.S.D.Blida1	président
M <sup>me</sup> : Oukid Houria	MCB,	à U.S.D.Blida1	Encadreur
M <sup>me</sup> : Boukoftane Amina	MAA,	à U.S.D.Blida1	Examinatrice

Année universitaire 2020/2021

## Remerciements

Tout d'abord, Je tiens à remercier vivement *M<sup>me</sup>* OUKID Houria pour m'avoir confié ce sujet de mémoire, pour m'avoir encadré durant ces mois avec beaucoup de patience, de disponibilité et de professionnalisme. Ce fut très sincèrement un réel plaisir de travailler à ses côtés pendant ces mois et pour m'avoir ainsi permis de réaliser ce mémoire.

Je souhaite remercier Vyacheslav Abramov pour toute l'aide qu'il m'a apporté.

Je tiens également à exprimer ma gratitude au président du jury *M<sup>me</sup>* Dahmane Zineb pour nous avoir consacré de son temps en nous faisons l'honneur d'accepter de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également à *M<sup>me</sup>* Amina Boukoftane, de m'avoir honoré en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Je tiens également à remercier ma famille, tous mes professeurs, et tous mes amis(es).

## Dédicaces

Avec ma gratitude et tout mon amour je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mon cher frère Mohamed pour pour l'aide que il m'as apportée. Il m'as soutenu, réconforté et encouragé,

A ma chère sœur Amina pour son encouragement permanent, et son soutien moral.

A ma famille et toutes les personnes que j'aime ,

Mes bien chères amies : Aicha, Khaoila, Hadjer ,

Ce travail est aussi dédié à la mémoire de Mes grand-pères.

Merci d'être toujours là pour moi.

## Résumé

Les martingales constituent une classe très importante de processus stochastiques pour laquelle les propriétés sont basées sur celles de l'espérance mathématique conditionnelle. L'interprétation de ce processus stochastique est intéressante. En effet la valeur d'une martingale peut changer ; Cependant, ses espérances restent constantes dans le temps. Plus important, l'espérance d'une martingale n'est pas affectée par l'échantillonnage aléatoire (optional sampling).

Parmi les principales approches introduites ces dernières années en théorie des files d'attente, on trouve la méthode des martingales. L'avantage de cette approche est de permettre de formuler et d'analyser des problèmes plus généraux, en étudiant une extension plus large, que les méthodes traditionnelles.

Dans ce travail, nous utilisons la décomposition de Doob-Meyer des semi martingales pour analyser un système multiserveur non-markovien avec rappels et avec pertes. Nous considérons d'abord le problème général où le processus d'arrivée est un processus ponctuel, nous obtenons les équations de la distribution du nombre de clients dans le système. Ensuite nous considérons le cas où le processus ponctuel est un processus de Poisson. Nous terminons notre travail par des exemples numériques.

## Abstract

Martingales are a very important class of stochastic processes for which the properties are based on those of the conditional mathematical expectation. The interpretation of this stochastic process is interesting. Indeed, the value of a martingale can change; however, its expectations remain constant over time. More importantly, the expectation of a martingale is not affected by optional sampling.

Among the main approaches introduced in recent years in queueing theory, we find the martingale method. The advantage of this approach is that it allows to formulate and analyze more general problems, by studying a larger extension, than the traditional methods.

In this work, we use the Doob-Meyer decomposition of semimartingales to analyze a non-Markovian multiserver system with recalls and with losses. We first consider the general problem where the arrival process is a point process, we obtain the equations of the distribution of the number of customers in the system. Then we consider the case where the point process is a Poisson process. We conclude our work with numerical examples.

## ملخص

تشكل مقارنة مارتينجال (Martingales) فئة مهمة جداً من العمليات العشوائية التي تعتمد خصائصها على التوقعات الرياضية الشرطية.

تفسير هذه العملية العشوائية مثير للاهتمام، حيث يمكن أن تتغير قيمة مارتينجال في الواقع ومع ذلك تبقى آماله ثابتة مع مرور الوقت. الأهم يكمن في أن توقع مارتينجال لا يتأثر بعشوائية العينات. من بين الطرق الرئيسية التي تم تقديمها في السنوات الأخيرة في نظرية قائمة الانتظار، نجد طريقة مارتينجال. تسمح هذه الإستراتيجية بصياغة وتحليل مشاكل عامة على نطاقات أوسع مما تسمح به الطرق التقليدية. في هذه المذكرة، نستخدم تفكيك Doob-Meyer لشبه مارتينجال لتحليل نظام متعدد الخوادم غير ماركوفي، مع عمليات الطلب المتكرر والخسائر. نعتبر أولاً المشكلة العامة بحيث تكون عملية الوصول نقطية فنحصل على معادلات توزيع عدد العملاء في النظام. ثم نعتبر الحالة التي تكون فيها العملية نقطية هي عملية بواسون (Poisson) وننهي بعدها عملنا بأمثلة رقمية.

# Table des matières

Table des matières	8
Introduction générale	11
<b>1 Systèmes de files d'attente avec rappels</b>	<b>14</b>
1.1 introduction . . . . .	14
1.2 Description du modèle . . . . .	15
1.3 Exemples d'applications de modèles de files d'attente avec rappels . . . . .	16
1.3.1 Faire des réservations . . . . .	17
1.3.2 Réseaux de commutation par paquets . . . . .	17
1.4 Modèles Markoviens . . . . .	18
1.4.1 Système M/M/n avec rappels . . . . .	18
1.5 Modèles semi- Markoviens . . . . .	20
1.5.1 Système M/G/1 avec rappels . . . . .	20
1.6 Conclusion . . . . .	23
<b>2 MARTINGALES À TEMPS DISCRET</b>	<b>24</b>
2.1 introduction . . . . .	24
2.2 Quelques définitions et concepts de base . . . . .	24
2.2.1 filtration . . . . .	24
2.2.2 les martingales . . . . .	25
2.2.3 Exemples [16] . . . . .	25
2.2.4 Temps d'arrêt . . . . .	26
2.2.5 L'utilisation du temps d'arrêt en martingale . . . . .	26

2.2.6	Décomposition . . . . .	27
2.2.7	Convergence des martingales . . . . .	27
2.3	conclusion . . . . .	28
<b>3</b>	<b>ANALYSE D'UN SYSTEME MULTISERVEURS AVEC RAPPELS ET PERTES</b>	<b>29</b>
3.1	Description du modèle . . . . .	29
3.2	Décomposition en semimartingale du processus de longueur de file d'attente . . . . .	30
3.3	Renormalisation du processus de longueur de file d'attente	31
3.4	Analyse des distributions limites de longueur de file d'attente	33
3.5	Exemples numériques . . . . .	44
3.5.1	Exemple 1 . . . . .	45
3.5.2	Exemple 2 . . . . .	46
3.6	Conclusion . . . . .	47
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>



# Table des figures

1.1	Schéma descriptif d'une file d'attente avec rappels. . . . .	16
-----	--	----

## Liste des tableaux

- 3.1 Les valeurs de  $P_{i,j}$  pour le système M/M/2/2 avec rappels 46
- 3.2 Les valeurs de  $P_{i,j}$  pour le système M/M/3/3 avec rappels . 47

## Introduction générale

La théorie des files d'attente (Queueing Theory) est de plus en plus utilisée pour soutenir l'amélioration et le perfectionnement de la structure organisationnelle dans divers domaines d'activité industrielle.

Grâce aux études de nombreux scientifiques de valeur tels que Erlang(1907), Kendall(1953), Pollaczek(1930), Kolmogorov la théorie a été enrichie par la présentation de résultats importants et de divers domaines d'application.

Au cours des premières années, le problème de base traité était de déterminer et calculer des mesures de performance, tels que le nombre moyen de clients, le temps d'attente moyen dans la file et le temps de service moyen. D'autre part, dans les années suivantes, la théorie a progressé dans l'analyse de la minimisation du temps et des pertes de travail, et la détermination du temps de travail interrompu. En d'autres termes, l'optimisation des performances du système en améliorant la qualité de service et en obtenant un excellent service est devenue l'un des enjeux les plus importants de ces dernières années. De plus, dans le développement des systèmes de production, de communication et informatiques, des modèles de files d'attente plus proches des nouveaux systèmes réels ont été introduits et testés.

D'autres systèmes réels de plus en plus complexes émergent, tel que les systèmes téléphoniques, l'abonné réitère son appel en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à ce que la communication soit obtenue.

« Attendre » est la tâche la plus désagréable de la vie moderne. Ainsi, plusieurs situations d'attente ont des caractéristiques dont les clients doivent rappeler pour obtenir des services. Entre les rappels successifs, le client en question se trouve en orbite. Depuis, ce phénomène de répétition de demandes du service a incité plusieurs chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à un modèle avec rappels.

Parmi les premières contributions sérieuses sur les modèles d'attente avec rappels, on trouve celle de Cohen (1957) [7]. Les progrès récents dans ce

domaine sont résumés dans les articles de synthèse de Yang et Templeton [17], Falin (1990) [9], A. Aïssani (1994)[3] et dans la monographie d'Artaejo et Gómez (2008) [4].

Dans ce mémoire, nous proposons une analyse stochastique du système de files d'attente, à travers la méthode des martingales. Le système de file d'attente multi-serveurs avec rappels et perte est considéré pour illustrer notre application. Cette méthode nous a permis de déterminer le système d'équations de ce système.

La théorie des martingales est issue de la recherche sur les jeux : elle simule d'une part l'aléatoire du phénomène, mais aussi son évolution dans le temps. Elle est apparue dans l'article de L. Bachelier en 1900 mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P.Levy et J.L.Doob [8].

Comparé au nombre total des publications dans la littérature, pourtant sur la théorie des files d'attente, celles utilisant les martingales, sont largement inférieures.

Citons quelques articles :

Bacelli (1986)[5], Abramov(2006,2007) ([1],[2]), H.Oukid (2019)([11], [12])

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés, en particulier, aux articles de Abramov et la thèse de H.Oukid. L'analyse des distributions limites de longueur de la file d'attente d'un système multiserveur avec rappels et avec pertes a abouti au système d'équations de système mentionné précédemment.

Ce mémoire contient : une introduction, trois chapitres et une conclusion.

Le premier chapitre présente des définitions et des concepts relatifs aux systèmes de files d'attente avec rappels, on a exposé les résultats concernant

les systèmes markoviens et semi markoviens, avec leurs caractéristiques et propriétés.

Nous présentons dans le deuxième chapitre la théorie des martingales à temps discret, essentiellement le théorème de convergence et d'arrêt. La référence essentielle pour ce chapitre est le livre de David Wiliam [16].

Dans le dernier chapitre, nous utilisons la décomposition de Doob-Meyer des semimartingales pour analyser un système de files d'attente multiserveurs avec rappels et perte. Tout d'abord nous considérons le problème lorsque le processus d'arrivés est ponctuel ensuite nous considérons le cas ou le processus ponctuel est un processus de poisson. La référence pour ce chapitre est la thèse de H.Oukid [12] .

# Chapitre 1

## Systemes de files d'attente avec rappels

### 1.1 introduction

Les systemes de file d'attente avec rappels ou repetitions d'appels (Retrial Queues dans la terminologie anglo-saxonne) ont les caracteristiques suivantes : les clients arrivent a un systeme et trouvent tous les serveurs occupes, quittent le systeme en permanence ou rappellent de maniere aleatoire plus tard. Les clients en attente d'un rappel sont dits « en orbite ».

Les files d'attente avec rappels ont ete largement utilisees pour modeliser de nombreux problemes dans le domaine de telecommunication et les situations quotidiennes. Plusieurs articles de synthese resument les derniers developpements dans le domaine par exemple : les monographies de Falin et Templeton (1997) [10], Artalejo et Gomez(2008) [4]

Ce chapitre fournit une introduction aux connaissances fondamentales des files d'attente avec rappels. Nous commencons par decrire le systeme et nous donnons quelques exemples modelises par ce genre de systemes, puis nous decrivons en particulier les systemes de files d'attente M/M/n et M/G/1 avec rappels.

## 1.2 Description du modèle

Un système d'attente avec rappels (Retrial Queue) est un système composé de  $s$ , ( $s \geq 1$ ) serveurs identiques et indépendants, d'un buffer (espace d'attente) de capacité  $(m-s)$ , ( $m \geq s$ ) et d'une orbite de capacité finie ou infinie. A l'arrivée du client, s'il y a un ou plusieurs serveurs inactifs et en bon état, le client sera servi immédiatement et quitte le système. Sinon, s'il y a une position d'attente libre dans la file, le client rejoindra cette position. D'autre part, si le client arrive et constate que tous les serveurs et toutes les positions d'attente dans la file sont occupés, il peut quitter le système définitivement avec la probabilité  $1 - H_0$ , ou entrer en orbite avec une probabilité  $H_0$  et devenir une source d'appels secondaire, et essaiera après un temps aléatoire sa chance. Chaque client de l'orbite, également appelé client secondaire, doit rappeler le service à intervalles selon une loi de probabilité.

L'orbite peut être finie ou infinie. Dans le cas d'une orbite à capacité limitée, si elle est pleine, les clients qui constatent que tous les serveurs et positions d'attente sont occupés seront contraints de quitter le système définitivement sans être servis, on parle alors d'un système avec perte.

Pour représenter un modèle de files d'attente avec rappels, on utilise la notation étendue de Kendalll suivante

A / B / S / N / O / H.

La signification de chacun de ces symboles est :

- A : décrit la distribution des temps des inter-arrivées des clients ;
- B : décrit la distribution du temps de service de chaque client ;
- S : nombre de serveurs ;
- N : capacité du système ;
- O : capacité de l'orbite ;
- H : fonction de persévérance qui permet de définir le comportement du client devant une situation de blockage (serveurs occupés) ;

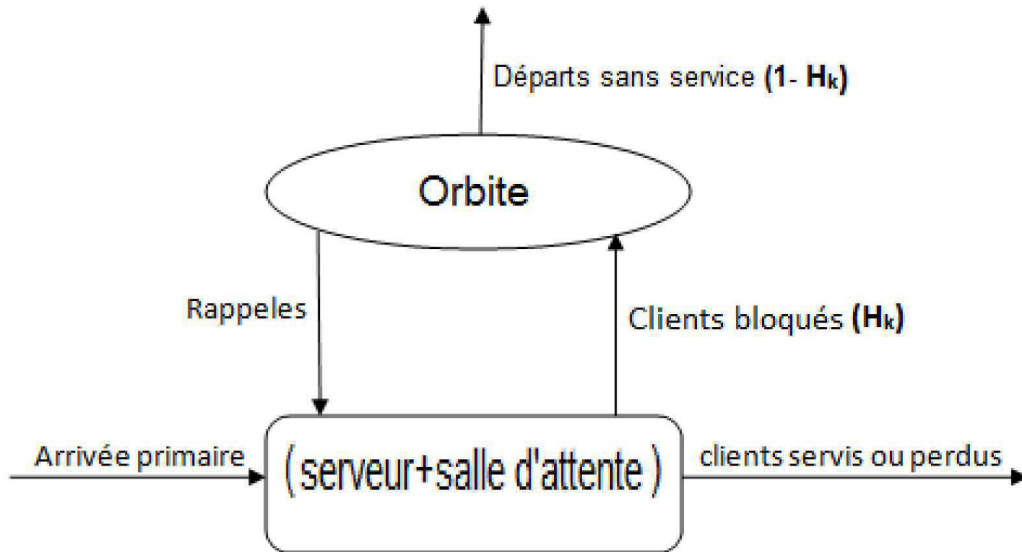


FIGURE 1.1 – Schéma descriptif d'une file d'attente avec rappels.

$H$  peut être décrite par un vecteur  $H = (H_0, H_1, H_2, \dots, H_k)$ , où  $H_k$  est la probabilité qu'après la  $k^{\text{ème}}$  tentative échouée, un abonné rappelle pour la  $(k + 1)^{\text{ème}}$  fois. Lorsque les trois derniers éléments ne sont pas mentionnés, il est sous-entendu que la capacité du système et la source de clients (la taille de la population) sont infinis et que  $H_j = 1$  pour tout  $j$ .

Le schéma général d'un système d'attente avec rappels est donné par la figure suivante :

### 1.3 Exemples d'applications de modèles de files d'attente avec rappels

La file d'attente avec rappels émerge naturellement comme modèle de nombreux problèmes dans les télécommunications, les réseaux informatiques, les systèmes informatiques et la vie quotidienne.

Dans cette section, nous donnons quelques exemples de problèmes qui peuvent être modélisés comme des files d'attente avec rappels (extraits de l'article de Yang et Templeton 1987 [17]).



### 1.3.1 Faire des réservations

Prenons l'exemple d'un restaurant dans lequel la plupart des réservations sont faites par téléphone. Il n'y a qu'une seule ligne qui est dédiée à répondre aux demandes de réservation. Normalement, si un client téléphone au restaurant et trouve la ligne occupée, il réessaie le numéro après une certaine période de temps aléatoire avec la probabilité  $H_k$  s'il s'agit du  $k^{\text{ème}}$  essai infructueux.

Dans la pratique, nous avons  $H_k < 1$ .

Cet exemple peut être modélisé avec une file d'attente M/G/1, avec rappel et perte. Considérant que le processus d'arrivée des appels est poissonnien.

### 1.3.2 Réseaux de commutation par paquets

Considérons un réseau de communications d'ordinateurs dans lequel on trouve un ensemble d'interfaces IMPs (Interface Message Processors) reliées entre elles par des câbles. Un ordinateur principal est connecté à l'une de ces interfaces. Si l'ordinateur veut envoyer un message à un autre ordinateur principal, il doit en premier lieu envoyer le message avec l'adresse de destination à l'interface à laquelle il est connecté. L'interface à son tour envoie le message à l'ordinateur destinataire directement si elle y est connectée, ou indirectement via d'autres interfaces. Considérons une interface à laquelle un ordinateur principal est connecté. Les messages arrivent de l'extérieur selon un processus aléatoire. Après la réception du message, l'ordinateur l'envoie immédiatement à son interface. S'il y a un tampon libre, le message est accepté. Dans le cas contraire, le message est rejeté et l'ordinateur doit réessayer une autre fois après une période de temps. S'il existe des tampons libres, le message rejeté sera stocké dans un tampon de l'ordinateur principal. Dans le cas contraire, le message est considéré comme perdu. On peut poser les questions suivantes :

○ Quelles sont les probabilités pour qu'un message soit rejeté par l'interface et par l'ordinateur principal ?

○ Quel est le nombre moyen de messages dans le tampon de IMP ?

○ Quel est le nombre moyen de messages dans le tampon de l'ordinateur principal ?

○ Quel est le temps d'attente d'un message dans le tampon de l'ordinateur principal ?

Le problème présenté peut être modélisé comme un système avec rappels à serveur unique (interface IMP) possédant des tampons (positions d'attente). Le nombre de tampons de l'ordinateur principal constitue la capacité de l'orbite.

## 1.4 Modèles Markoviens

Les modèles markoviens sont des systèmes où les inter-arrivés primaires, les durées de service et les temps inters rappels sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées .

### 1.4.1 Système M/M/n avec rappels

On considère un système de files d'attente avec rappels sans positions d'attente.

Le service est assuré par  $n$  serveurs ( $n \geq 1$ ). Les clients primaires arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Les durées de service suivent une loi exponentielle de taux  $\mu$ . Les temps entre deux rappels consécutifs sont également exponentiels de paramètre  $\nu$ .

L'état du système peut être décrit par le processus Markovien  $\{C(t), R(t)\}$ , d'espace d'états  $S = \{0, 1, \dots, n\} \times \mathbb{N}$ .

Où  $C(t)$  est le nombre de clients en cours de service à la date  $t$  et  $R(t)$  est le nombre de clients en orbite l'instant  $t$ .

Les conditions d'existence d'un régime stationnaire ont été établies par Falin [10]. Dans ce cas. les probabilités stationnaires

$$P_{ij} = P_{ij}(t) = P(C(t) = i, R(t) = j), i = 0, \dots, n, j \geq 0.$$

Les probabilités de transitions à l'état stationnaire sont données par :

Pour  $0 \leq i \leq n - 1$

$$P_{ij}(kl) = \begin{cases} \lambda & si(k, l) = (i+1, j), \\ i\mu & si(k, l) = (i-1, j), \\ j\nu & si(k, l) = (i+1, j-1), \\ -(\lambda + i\mu + j\nu) & si(k, l) = (i, j), \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour  $i = n$

$$P_{nj}(kl) = \begin{cases} \lambda & si(k, l) = (n, j+1), \\ n\mu & si(k, l) = (n-1, j), \\ -(\lambda + n\mu) & si(k, l) = (n, j), \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans le cas où Le service est assuré par un seul serveur c.à.d  $n = 1$ . sous la condition  $\rho < 1$ . les probabilités stationnaires existent et sont données par [10] .

$$P_{0j} = \frac{p^j}{j! \nu^j} \prod_{i=0}^{j-1} (\lambda + i\nu)(1 - \rho)^{1 + \frac{\lambda}{\nu}} \quad (1.3)$$

$$P_{1j} = \frac{p^{j+1}}{j! \nu^j} \prod_{i=0}^j (\lambda + i\nu)(1 - \rho)^{1 + \frac{\lambda}{\nu}} \quad (1.4)$$

de fonctions génératrices

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0n} = (1 - \rho) \left( \frac{1 - \rho}{1 - \rho z} \right)^{\frac{\lambda}{\nu}} \quad (1.5)$$

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n} = \rho \left( \frac{1 - \rho}{1 - \rho z} \right)^{\frac{\lambda}{\nu}} \quad (1.6)$$

Toutes les mesures de performance s'obtiennent en utilisant les fonctions génératrices (voir par exemple [10] ).

## 1.5 Modèles semi- Markoviens

### 1.5.1 Système M/G/1 avec rappels

Le modèle M/G/1 avec rappel est le modèle le plus étudié par les experts. Il existe une abondante littérature sur ses différentes caractéristiques (voir par exemple [10], [17]). Soit  $\lambda$ , le taux du flux poissonnien des appels primaires. La durée de service est de loi générale, de distribution  $B(x)$  et de transformée de Laplace-Stieltjes  $B^*(s)$ . La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre  $\nu$ .

Le premier résultat sur le système M/G/1 avec rappels a été obtenu, en utilisant la méthode de la variable auxiliaire. Ils ont obtenu les probabilités d'états et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système.

L'état du système peut-être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} R(t) & \text{si } S(t) = 0, \\ \{S(t), R(t), \xi(t)\} & \text{si } S(t) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Où  $R(t)$  est le nombre de clients en orbite à la date  $t$  et  $\xi(t)$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $R^+$  et désignant :

- La durée de service écoulé à la date  $t$ .
- La durée de service résiduelle à la date  $t$ .

### Chaîne de Markov induite

Ce paragraphe introduit une technique qui permet d'étudier des processus qui ne sont pas forcément markoviens. Cette technique a été utilisée pour la première fois par Choo et Conolly [6].

Pour tout  $n \geq 0$ . soit  $X_i$  la chaîne de Markov induite aux instants de départs. où  $X_i = X_{t_i}$  est le nombre de clients dans le système juste après le  $i^{\text{ème}}$  départ .

Il est clair que :

$$X_{i+1} = X_i + A_{i+1} - \delta_{X_i} \quad (1.8)$$

où  $A_i$  est le nombre de clients qui arrivent pendant le service du  $i^{\text{ème}}$  client.  $\{A_n, n \geq 0\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi donnée par

$$P(A_i = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots; n \geq 1 \quad (1.9)$$

de fonction génératrice

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(A_n = k) = B^*(\lambda - \lambda z), \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (1.10)$$

et de moyenne  $E[A_i] = \rho = \lambda\beta_1$ .

$\delta_{X_t}$  est la variable de Bernoulli définie par :

$$\delta_{X_t} = \begin{cases} 1 & \text{si le } (i+1)^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.11)$$

La distribution conditionnelle de  $\delta_{X_t}$  est donnée par :

$$P\{\delta_{X_n} = 0 / X_n = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + k\nu}, \quad (1.12)$$

$$P\{\delta_{X_n} = 1 / X_n = k\} = \frac{k\nu}{\lambda + k\nu}. \quad (1.13)$$

## Distribution stationnaire de l'état du système

Le premier résultat sur le système M/G/1 avec rappels a été obtenu en utilisant la méthode des variables auxiliaires.

Notons la distribution stationnaire de l'état du système par :

$$p_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 0, R(t) = n\}$$

$$p_{1n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P\{C(t) = 1, \xi(t) < x, R(t) = n\}$$

Les fonctions génératrices partielles correspondantes sont données par :

$$\begin{aligned} p_0(z) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0n} \\ &= (1 - \rho) \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - k(u)}{k(u) - u} du\right\}, \\ p_1(z, x) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}(x) \\ &= \lambda \frac{1 - z}{k(z) - z} p_0(z) [1 - B(x)] e^{-(\lambda - \lambda z)x}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Si dans le cas  $C(t) = 1$  nous ignorons le temps de service écoulé  $\xi(t)$ , alors pour les probabilités  $p_{1n} = P\{C(t) = 1, R(t) = n\}$  nous avons

$$\begin{aligned} p_1(z) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n} \\ &= \frac{1 - k(z)}{k(z) - z} p_0(z). \end{aligned} \tag{1.15}$$

## Caractéristiques moyennes

Les caractéristiques du modèle M/G/1 avec rappels sont :

Nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}. \tag{1.16}$$

Nombre moyen de clients en orbite :

$$\bar{n}_0 = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}. \tag{1.17}$$

Temps moyen d'attente d'un client :

Pour trouver le temps moyen d'attente  $\bar{w}$ , on utilise la formule de Little  $\bar{n} = \bar{w}\lambda$ . On aura :

$$\bar{w} = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}. \quad (1.18)$$

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue et introduit les concepts et techniques de base de la théorie des files d'attente avec rappels.

Nous avons présenté quelques modèles particuliers tel que les systèmes M/M/n et M/G/1 avec rappels, et nous avons déterminé leurs caractéristiques essentielles, telles que le nombre moyen de clients dans le système, le nombre moyen de clients en orbite et le temps d'attente moyen d'un client.

Veillez noter que les systèmes avec rappels sont utilisés pour modéliser et évaluer les performances de différents systèmes réels. Au cours des deux dernières décennies, les chercheurs se sont intéressés à la modélisation des systèmes téléphoniques à temps discret et des réseaux informatiques.

# Chapitre 2

## MARTINGALES À TEMPS DISCRET

### 2.1 introduction

Les martingales ont joué un rôle important dans la recherche sur le hasard au 20e siècle. Jean Ville a inventé les martingales dans les années 1930 [13] pour améliorer le concept de «collectif» de Richard von Mises[15], et Claus-Peter Schnorr a produit l'algorithme des martingales dans les années 1970 pour faire avancer la recherche sur l'aléatoire algorithmique. Le terme martingale vient de la théorie des jeux, il fait référence à la stratégie consistant à déterminer la victoire dans un jeu équitable (comme un tirage au sort).

### 2.2 Quelques définitions et concepts de base

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace de probabilité.

#### 2.2.1 filtration

Nous nous intéresserons aux phénomènes liés au temps. L'information connue à la date  $t$  est collectée dans une tribu  $\mathfrak{F}_t$ , qui est l'information à la date  $t$ .

#### Définition 2.2.1 .

• On appelle filtration sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  toute suite croissante  $(\mathfrak{F}_n)_{n \geq 0}$  de sous-tribus de  $\mathfrak{F}$  :  $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}_n$



- On dit qu'un processus  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  est adapté à une filtration  $(\mathfrak{S}_n)_{n \geq 0}$ , si  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n$  est  $\mathfrak{S}_n$ -mesurable
- si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un processus stochastique défini sur  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$  alors  $\mathfrak{S}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$

## 2.2.2 les martingales

### Définition 2.2.2 .

Un processus  $X$  est une martingale (par rapport à  $(\mathfrak{S}_n, P)$ ) si :

1.  $X$  est adapté à la filtration  $(\mathfrak{S}_n)_{n \geq 0}$ ,
2.  $E(|X_n|) < \infty, \forall n$ ,
3.  $E[X_n | \mathfrak{S}_{n-1}] = X_{n-1}$ , pour  $(n \geq 1)$ .

Une sur-martingale (relative à  $(\mathfrak{S}_n, P)$ ) est définie de façon similaire, sauf que (3) est remplacé par

$$E[X_n | \mathfrak{S}_{n-1}] \leq X_{n-1}, \text{ pour } (n \geq 1),$$

et une sous-martingale est définie avec (3) remplacé par

$$E[X_n | \mathfrak{S}_{n-1}] \geq X_{n-1}, \text{ pour } (n \geq 1).$$

### 2.2.3 Exemples [16]

1. Jeux équitables et déloyaux : Pensez maintenant à  $X_n - X_{n-1}$  comme vos gains nets par unité de mise dans le jeu  $n$  ( $n > 1$ ) dans une série de jeux, joués aux temps  $n = 1, 2, \dots$ . Il n'y a pas de jeu au temps 0.

Dans le cas de la martingale,

$$(a) E[X_n - X_{n-1} | \mathfrak{S}_{n-1}] = 0, \text{ (la série de jeux est équitable),}$$

et dans le cas des sur-martingales,

$$(b) E[X_n - X_{n-1} | \mathfrak{S}_{n-1}] \leq 0, \text{ (la série de jeux est défavorable pour vous),}$$

Veillez noter que (a) [respectivement (b)] donne un moyen utile de formuler la propriété martingale [Sur-Martingale] de  $X$ .

2. Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et intégrable,  $X_0$  une variable aléatoire donnée indépendante de  $(Y_n)_n$ , alors  $S_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n))$ .

### 2.2.4 Temps d'arrêt

Le concept de temps d'arrêt joue un rôle central dans l'analyse des processus aléatoires. C'est le vrai concept du temps, pour le développement mathématique et la modélisation.

**Définition 2.2.3** Une variable aléatoire  $T$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots; \infty\}$  est un temps d'arrêt si

$$\{T \leq n\} = \{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathfrak{F}_n, \forall n \leq \infty,$$

**Proposition 2.2.1** Soient  $T$  et  $S$  deux temps d'arrêt, alors  $T+S$  et  $\inf(T, S)$  notée  $T \wedge S$  et  $\sup(T, S)$  notée  $T \vee S$  sont des temps d'arrêt.

### 2.2.5 L'utilisation du temps d'arrêt en martingale

**Théorème 2.2.1 (Théorème d'arrêt)**

Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  une martingale, et soient  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêts bornés avec  $S \leq T$ ,

alors  $X_S$  et  $X_T$  sont intégrables et on a avec probabilité égale à 1

$$X_S = E(X_T / \mathfrak{F}_S). \tag{2.1}$$

**Proposition 2.2.2** Soit  $T$  un temps d'arrêt pour un processus stochastique  $\{X_n\}$ ,

1. Si  $\{X_n\}$  est une martingale, alors  $(X_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  l'est aussi.
2. Si  $\{X_n\}$  est une sur-martingale, alors  $(X_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  l'est aussi.

3. Si  $\{X_n\}$  est une sous-martingale, alors  $(X_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  l'est aussi.

Les temps d'arrêts peuvent être considérés comme le moment où un événement donné se produit. S'il a la valeur  $T = \infty$ , alors l'événement ne se produit jamais.

Par exemple, on peut s'intéresser à la première fois que la valeur d'une séquence aléatoire connue pour être une martingale est 6. nous considérons la martingale  $\{X_n, n \geq 0\}$  et une variable aléatoire  $T$  qui est définie par

$$T = \begin{cases} \inf_{n \geq 0} \{n | X_n = 6\} & \text{si } X_n = 6 \text{ pour certains } n \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

### 2.2.6 Décomposition

On décompose une sous-martingale en la somme d'une martingale et d'une suite croissante de variables aléatoires :

#### **Théorème 2.2.2 (décomposition de Doob)**

Toute sous-martingale intégrable  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  peut s'écrire d'une manière unique comme la somme des sous-martingales intégrables  $(M_n, n \in \mathbb{N})$  et un processus croissant  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  soit :

$$X_n = M_n + A_n \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

L'unicité de la décomposition s'écrit de la même manière, et notons que si une telle décomposition se produit, il faut avoir

$$E(X_{n+1} - X_n | \mathfrak{F}_n) = A_{n+1} - X_n,$$

ce qui caractérise  $A_n$  si l'on sait que  $A_0 = 0$ .

### 2.2.7 Convergence des martingales

#### **Théorème 2.2.3 (Théorème de Doob) :**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une surmartingale relative à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E|X_n| < \infty$$

Alors la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers une variable  $X \in L^1$

**Théorème 2.2.4** *Toute surmartingale positive  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement. On outre, la limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty (p.s)$$

*vérifie l'inégalité :*

$$E(X_\infty / \mathcal{F}_n) \leq X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## 2.3 conclusion

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement la définition et les résultats de base de la théorie des martingales, ainsi que les théorèmes de base de la théorie, à savoir les théorèmes de convergence et d'arrêt.

## Chapitre 3

# ANALYSE D'UN SYSTEME MULTISERVEURS AVEC RAPPELS ET PERTES

### 3.1 Description du modèle

Considérons un système de file d'attente multiserveur avec  $n$  serveurs ayant la structure suivante :

- Le processus d'arrivée  $A(t)$  est un processus ponctuel, dont les incréments forment une séquence strictement stationnaire et ergodique .
- Les durées de service et les temps inter-rappels sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées.
- Il y a  $n$  serveurs, et un client qui arrive occupe l'un des serveurs libres.
- L'orbite a  $m$  espaces d'attente.
- Si, à son arrivée, les serveurs sont occupés, mais que la file d'attente secondaire, l'orbite, a au moins un espace libre, alors le client occupe l'orbite et tente de plus en plus d'occuper un serveur.
- Un client qui, à son arrivée, trouve tous les serveurs occupés et l'orbite occupée quitte définitivement le système.
- Soit  $Q_1(t)$  le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant  $t$ , qui coïncide avec le nombre de serveurs occupés à l'instant  $t$ , et  $Q_2(t)$  le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ .

- Soit  $Q_3(t)$  le nombre de pertes jusqu'au moment  $t$ .
- Les clients sont servis par l'un des  $n$  serveurs inactifs; les temps de service sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, indépendantes du processus d'arrivée.
- Le nombre de clients dans les systèmes est toujours limité.

### 3.2 Décomposition en semimartingale du processus de longueur de file d'attente

On peut utiliser la décomposition de Doob Meyer de semimartingale (voir par exemple Liptser, et Shiriyayev [14]) et la méthode d'Abramov [1] pour obtenir une représentation pour les processus stochastiques de la longueur de la file d'attente sous forme de martingale. Notons le saut du processus  $I_{i,j}(t)$  par  $\Delta I_{i,j}(t)$  ainsi que les sauts des processus  $A(t)$  par  $\Delta A(t)$ ,  $\Delta \pi_k^{(1)}(t)$  est un saut du  $k$ ème processus de Poisson avec des taux  $\mu, \nu$ .

Notons :

$$\Pi_i^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^i \pi_k^{(1)}(t) ,$$

et

$$\Pi_j^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^j \pi_k^{(2)}(t) .$$

$$Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t) = A(t) - C(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

avec

$$C(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n I\{Q_1(s-) \geq i\} d\Pi_i^{(1)}(s), \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

en tenant compte du fait que  $A(t)$  et  $C(t)$  sont des semi-martingales, alors ces processus peuvent être réécrits en utilisant la décomposition de Doob-Meyer comme suit :

$$A(t) = \hat{A}(t) + M_A(t) \quad (3.3)$$

$$C(t) = \hat{C}(t) + M_C(t). \quad (3.4)$$

où  $M_A(t)$  et  $M_C(t)$  sont des martingales locales de carré intégrables.  $\hat{A}(t)$  et  $\hat{C}(t)$  les compensateurs (processus croissant prévisible) des processus  $A(t)$  et  $C(t)$  respectivement, admettant la représentation suivante :

$$\hat{A}(t) = \int_0^t X(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

$$\hat{C}(t) = \int_0^t Q_1(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\text{où } X = \{X(t) : t \geq 0\}$$

sont les intensités stochastiques des processus ponctuels  $A$  et  $C$  respectivement adaptés à la filtration  $\mathfrak{F}$ . En vertu de l'équation (3.3), (3.4) et l'équation (3.1), le processus  $Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)$  peut être réécrit, en utilisant la décomposition de Doob-Meyer des semimartingales comme suit :

$$Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t) = \hat{A}(t) - \hat{C}(t) + M_A(t) - M_C(t). \quad (3.7)$$

### 3.3 Renormalisation du processus de longueur de file d'attente

Dans cette section, nous étudions les processus de longueur de file d'attente normalisée.

Pour tout processus  $X(t)$ , pour  $t > 0$ , sa normalisation est exprimée en lettres minuscules, donc  $x(t) = X(t)/t$ . Ainsi  $q_1(t) = \frac{1}{t}Q_1(t)$ ,  $q_2(t) = \frac{1}{t}Q_2(t)$ ,  $q_3(t) = \frac{1}{t}Q_3(t)$ ,  $m_A(t) = \frac{1}{t}M_A(t)$  et  $m_C(t) = \frac{1}{t}M_C(t)$ .

L'équation (3.7) s'écrira alors sous la forme :

$$q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) = \frac{1}{t}\hat{A}(t) - \frac{1}{t}\hat{C}(t) + m_A(t) - m_C(t) \quad (3.8)$$

ou encore

$$q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(s)ds - \frac{1}{t} \int_0^t Q_1(s)ds + m_A(t) - m_C(t) \quad (3.9)$$

Étudions maintenant l'équation (3.9) quand  $t \rightarrow \infty$ . Plus précisément, trouvons  $P \lim$  de  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ , où  $P \lim$  désigne la limite en probabilité.

Montrons maintenant que  $P \lim_{t \rightarrow \infty} m_A(t) = 0$ . En appliquant l'inégalité de Lengart-Rebolledo [[14], p66], pour tout  $\delta$  positif, nous obtenons

$$\begin{aligned} P\{|M_A(t)| > \delta\} &\leq P\{\sup_{0 \leq s \leq t} |m_A(s)| > \delta\} \\ &= P\{\sup_{0 \leq s \leq t} |M_A(s)| > \delta t\} \\ &= P\{\sup_{0 \leq s \leq t} |A(s) - \hat{A}(s)| > \delta t\} \\ &\leq \frac{\epsilon}{\delta^2} + P\{\frac{A(t)}{t} > \epsilon t\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Puisque  $\epsilon$  est arbitraire, les deux termes de la partie droite de l'équation (3.10) converge vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . et de plus  $P \lim_{t \rightarrow \infty} |m_A(t)| = 0$ .

Par conséquent le terme

$$\frac{1}{t}[\hat{A}_i(t) - A_i(t)] \quad (3.11)$$

converge en probabilité vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Cela signifie que les deux termes  $\frac{1}{t}\hat{A}(t)$  et  $\frac{1}{t}A(t)$  ont la même limite en probabilité lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Notons, que par analogie à (3.10) nous avons le même résultat que pour le processus  $C_i(t)$  :

$$\frac{1}{t}[\hat{C}_i(t) - C_i(t)] \quad (3.12)$$

converge en probabilité vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . donc  $P \lim_{t \rightarrow \infty} |m_C(t)| = 0$ .

En suite, en appliquant le théorème de la convergence dominée. nous



obtenons

$$\begin{aligned} P \lim_{t \rightarrow \infty} q_3(t) &= \lambda - \mu P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_1(s) ds \\ &= \lambda - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu}{t} E \int_0^t Q_1(s) ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.4 Analyse des distributions limites de longueur de file d'attente

Dans cette section, nous allons introduire les équations liées aux limites :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t I\{Q_1(s^-) = i, Q_2(s^-) = j\} dA(s), i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.14)$$

basé sur la décomposition de Doob-Meyer de la fonction indicatrice du processus de longueur de file d'attente.

Dans ce qui se suit, on introduit le processus

$$I_{i,j}(t) = I\{Q_1(t) = i, Q_2(t) = j\}, i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

En prenant en considération que  $I_{-1,j}(t) \equiv 0$  et  $I_{i,-1}(t) \equiv 0$ .

Ainsi, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.4.1** *Soit  $A(t)$  un processus ponctuel à accroissement strictement stationnaire et ergodique, nous avons le système d'équations suivant :*

*Pour  $i = 0, \dots, n - 1, j = 0, \dots, m - 1$*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i,j}(s^-) - I_{i-1,j}(s^-)] dA(s) \\ &= \mu(i+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P\{Q_1(s) = i+1, Q_2(s) = j\} ds \\ & \quad - \mu i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\} ds \\ &+ \nu(j+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P\{Q_1(s) = i-1, Q_2(s) = j+1\} ds \\ & \quad - \nu j \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\} ds \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour  $i = 0, \dots, n - 1, j = m$

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i,m}(s^-) - I_{i-1,m}(s^-)] dA(s) \\
&= \mu(i+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i+1, Q_2(s) = m\} ds \\
&\quad - \mu i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = m\} ds \\
&\quad - \nu m \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = m\} ds \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Pour  $i = n, j = 0, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{n,j}(s^-) - I_{n-1,j}(s^-) - I_{n,j-1}(s^-)] dA(s) \\
&= -\mu n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n, Q_2(s) = j\} ds \\
&\quad + \nu(j+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n-1, Q_2(s) = j+1\} ds \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Pour  $i = n, j = m$

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{n-1,m}(s^-) + I_{n,m-1}(s^-)] dA(s) \\
&= \mu n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n, Q_2(s) = m\} ds \tag{3.19}
\end{aligned}$$

**Démonstration** . Nous avons les équations suivantes

pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1, j = 0, 1, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned}
& I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t) = Q_2(t^-) = j\} = I_{i-1,j}(t^-) \Delta A(t) \\
& \quad + I_{i+1,j}(t^-) \Delta \Pi_{i+1}^{(1)}(t) + I_{i,j}(t^-) [1 - \Delta A(t) - \Delta \Pi_i^{(1)}(t) - \Delta \Pi_j^{(2)}(t)]. \\
& I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t^-) \neq Q_2(t) = j\} = I_{i-1,j+1}(t^-) \Delta \Pi_{j+1}^{(2)}(t) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1, j = m$

$$I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t) = Q_2(t^-) = m\} = I_{i-1,m}(t^-) \Delta A(t)$$

$$+I_{i+1,m}(t^-)\Delta\Pi_{i+1}^{(1)}(t) + I_{i,m}(t^-)[1 - \Delta A(t) - \Delta\Pi_i^{(1)}(t) - \Delta\Pi_m^{(2)}(t)] \quad (3.21)$$

pour  $i = n, j = 0, 1, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned} I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = n, Q_2(t) = Q_2(t^-) = j\} &= I_{n-1,j}(t^-)\Delta A(t) \\ &+ I_{n,j}(t^-)[1 - \Delta A(t)][1 - \Delta\Pi_n^{(1)}(t)] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t) = Q_2(t^-) \neq j\} &= I_{n,j-1}(t^-)\Delta A(t) \\ &+ I_{n-1,j+1}(t^-)\Delta\Pi_{j+1}^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

pour  $i = n, j = m$

$$\begin{aligned} I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = n, Q_2(t) = Q_2(t^-) = m\} &= I_{n-1,m}(t^-)\Delta A(t) \\ &+ I_{n,m}(t^-)\Delta A(t) + I_{n,m}(t^-)[1 - \Delta A(t) - \Delta\Pi_n^{(1)}(t)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t) = Q_2(t^-) \neq m\} = I_{n,m-1}(t^-)\Delta A(t) \quad (3.25)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \Delta I_{i,j}(t) &= I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t) = Q_2(t^-) = j\} \\ &+ I\{Q_1(t^-) + \Delta Q_1(t) = i, Q_2(t^-) \neq Q_2(t) = j\} - I_{i,j}(t^-), \quad i = 0, 1, \dots, n; \\ & \quad \quad \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque

$$\sum_{s \leq t} \Delta I_{i,j}(s) = I_{i,j}(t) - I_{i,j}(0) \quad (3.27)$$

les sauts de  $A(t)$  et  $D(t)$  sont disjoints. D'après (3.26) – (3.27), le processus  $I_{i,j}(t)$  peut être représenté comme suit :

pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1, j = 0, 1, \dots, m - 1$

$$I_{i,j}(t) = I_{i,j}(0) + \int_0^t I_{i-1,j}(s^-) dA(s)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t I_{i+1,j}(s^-) d\Pi_{i+1}^{(1)}(s) + \int_0^t I_{i-1,j+1}(s^-) d\Pi_{j+1}^{(2)}(s) \\
& - \int_0^t I_{i,j}(s^-) dA(s) - \int_0^t I_{i,j}(s^-) d\Pi_i^{(1)}(s) - \int_0^t I_{i,j}(s^-) d\Pi_j^{(2)}(s). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n-1, j = m$

$$\begin{aligned}
I_{i,m}(t) &= I_{i,m}(0) + \int_0^t I_{i-1,m}(s^-) dA(s) + \int_0^t I_{i+1,m}(s^-) d\Pi_{i+1}^{(1)}(s) \\
& - \int_0^t I_{i,m}(s^-) dA(s) - \int_0^t I_{i,m}(s^-) d\Pi_i^{(1)}(s) - \int_0^t I_{i,m}(s^-) d\Pi_m^{(2)}(s). \quad (3.29)
\end{aligned}$$

pour  $i = n, j = 0, 1, \dots, m-1,$

$$\begin{aligned}
I_{n,j}(t) &= I_{n,j}(0) + \int_0^t I_{n-1,j}(s^-) dA(s) + \int_0^t I_{n,j-1}(s^-) dA(s) \\
& + \int_0^t I_{n-1,j+1}(s^-) d\Pi_{n-1}^{(2)}(s) - \int_0^t I_{n,j}(s^-) dA(s) - \int_0^t I_{n,j}(s^-) d\Pi_n^{(1)}(s). \quad (3.30)
\end{aligned}$$

pour  $i = n, j = m$

$$\begin{aligned}
I_{n,m}(t) &= I_{n,m}(0) + \int_0^t I_{n-1,m}(s^-) dA(s) + \int_0^t I_{n,m-1}(s^-) dA(s) \\
& - \int_0^t I_{n,m}(s^-) d\Pi_n^{(1)}(s). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

En appliquant la décomposition semi-martingale de Doob-Meyer, à partir de (3.28) à (3.31), on obtient

pour  $i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned}
I_{i,j}(t) &= I_{i,j}(0) + \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
& + \mu(i+1) \int_0^t I_{i+1,j}(s) ds - \mu i \int_0^t I_{i,j}(s) ds \\
& + \nu(j+1) \int_0^t I_{i-1,j+1}(s) ds - \nu j \int_0^t I_{i,j}(s) ds + M_{i,j}(t), \quad (3.32)
\end{aligned}$$

avec la martingale locale de carrée intégrable

$$M_{i,j}(t) = \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] dM_A(s) - \int_0^t I_{i,j}(s^-) dM_{\Pi_i^{(1)}}(s)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t I_{i+1,j}(s^-) dM_{\Pi_{i+1}^{(1)}}(s) - \int_0^t I_{i,j}(s^-) dM_{\Pi_j^{(2)}}(s) . \\
& \quad + \int_0^t I_{i-1,j+1}(s^-) dM_{\Pi_{j+1}^{(2)}}(s) .
\end{aligned}$$

Nous pouvons la réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}
M_{i,j}(t) &= \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d[A(s) - \hat{A}(s)] \\
&\quad - \int_0^t I_{i,j}(s^-) d[\hat{\Pi}_i^{(1)}(s) - \mu i s] \\
&+ \int_0^t I_{i+1,j}(s^-) d[\hat{\Pi}_{i+1}^{(1)}(s) - \mu(i+1)s] - \int_0^t I_{i,j}(s^-) d[\hat{\Pi}_j^{(2)}(s) - \nu j s] \\
&\quad + \int_0^t I_{i-1,j+1}(s^-) d[\hat{\Pi}_{j+1}^{(2)}(s) - \nu(j+1)s],
\end{aligned}$$

et pour  $i = 0, 1, \dots, n-1, j = m$

$$\begin{aligned}
I_{i,m}(t) &= I_{i,m}(0) + \int_0^t [I_{i-1,m}(s^-) - I_{i,m}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
&\quad + \mu(i+1) \int_0^t I_{i+1,m}(s) ds - \mu i \int_0^t I_{i,m}(s) ds \\
&\quad - \nu m \int_0^t I_{i,m}(s) ds + M_{i,m}(t), \tag{3.33}
\end{aligned}$$

avec la martingale locale de carrée intégrable

$$\begin{aligned}
M_{i,m}(t) &= \int_0^t [I_{i-1,m}(s^-) - I_{i,m}(s^-)] dM_A(s) - \int_0^t I_{i,m}(s^-) dM_{\Pi_i^{(1)}}(s) \\
&\quad + \int_0^t I_{i+1,m}(s^-) dM_{\Pi_{i+1}^{(1)}}(s) - \int_0^t I_{i,m}(s^-) dM_{\Pi_m^{(2)}}(s) .
\end{aligned}$$

pour  $i = n, j = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned}
I_{n,j}(t) &= I_{n,j}(0) + \int_0^t [I_{n-1,j}(s^-) + I_{n,j-1}(s^-) - I_{n,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
&\quad - \mu n \int_0^t I_{n,j}(s) ds + \nu(j+1) \int_0^t I_{n-1,j+1}(s) ds + M_{i,m}(t), \tag{3.34}
\end{aligned}$$

avec la martingale locale de carrée intégrable

$$\begin{aligned}
M_{n,j}(t) &= \int_0^t [I_{n-1,j}(s^-) + I_{n,j-1}(s^-) - I_{n,j}(s^-)] dM_A(s) \\
&\quad - \int_0^t I_{n,j}(s^-) dM_{\Pi_n^{(1)}}(s) + \int_0^t I_{n-1,j+1}(s^-) dM_{\Pi_{j+1}^{(2)}}(s) .
\end{aligned}$$

pour  $i = n, j = m$

$$\begin{aligned} I_{n,m}(t) &= I_{n,m}(0) + \int_0^t [I_{n-1,m}(s^-) + I_{n,m-1}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ &\quad - \mu n \int_0^t I_{n,m}(s) ds + M_{n,m}(t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec la martingale locale de carrée intégrable

$$\begin{aligned} M_{n,m}(t) &= \int_0^t [I_{n-1,m}(s^-) + I_{n,m-1}(s^-)] dM_A(s) \\ &\quad - \int_0^t I_{n,m}(s^-) dM_{\Pi_n^{(1)}}(s). \end{aligned}$$

Ensuite en passant à la limite quand  $t$  tend vers l'infini de (3.32) à (3.35).

Étudions d'abord le cas  $i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1$ .

D'après (3.32), nous avons

$$\begin{aligned} P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (I_{i,j}(t) - I_{i,j}(0)) &= P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ &+ P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(i+1)}{t} \mu \int_0^t I_{i+1,j}(s) ds - P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{t} \mu \int_0^t I_{i,j}(s) ds \\ &+ P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(j+1)}{t} \nu \int_0^t I_{i-1,j+1}(s) ds - P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j}{t} \nu \int_0^t I_{i,j}(s) ds \\ &\quad + P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_{i,j}(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

En utilisant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée, nous obtenons

$$\begin{aligned} &P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d\hat{A}(s). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Laissez nous réécrire la partie droite du (3.37) comme suit :

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] dA(s) \end{aligned}$$

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d[A(s) - \hat{A}(s)]. \quad (3.38)$$

En tenant compte du fait que  $\frac{1}{t}A$  et  $\frac{1}{t}\hat{A}$  ont la même limite en probabilité, nous concluons que le terme

$$\begin{aligned} & P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d[A(s) - \hat{A}(s)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I\{Q_1(s^-) = i-1, Q_2(s^-) = j\} \\ & \quad - I\{Q_1(s^-) = i, Q_2(s^-) = j\}] d[A(s) - \hat{A}(s)], \end{aligned} \quad (3.39)$$

tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

De la combinaison (3.37) , (3.38) et (3.39), nous obtenons

$$\begin{aligned} & P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ &= P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,j}(s^-) - I_{i,j}(s^-)] dA(s) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I\{Q_1(s^-) = i-1, Q_2(s^-) = j\} \\ & \quad - I\{Q_1(s^-) = i, Q_2(s^-) = j\}] dA(s). \end{aligned} \quad (3.40)$$

notons que, par analogie, nous avons

$$P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{t} \mu \int_0^t I_{i,j}(s) ds = \mu i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\} ds \quad (3.41)$$

De même

$$P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j}{t} \nu \int_0^t I_{i,j}(s) ds = \nu j \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\} ds \quad (3.42)$$

aussi,

$$P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{i,j}(t)}{t} = 0. \quad (3.43)$$

Le côté gauche de (3.36) est égal à zéro.

Ainsi, pour  $i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1$ , nous avons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i,j}(s^-) - I_{i-1,j}(s^-)] dA(s) \\
&= \mu(i+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i+1, Q_2(s) = j\} ds \\
&\quad - \mu i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\} ds \\
&+ \nu(j+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i-1, Q_2(s) = j+1\} ds \\
&\quad - \nu j \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\} ds
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas  $i = 0, 1, \dots, n-1, j = m$ . Nous avons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (I_{i,m}(t) - I_{i,m}(0)) &= P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,m}(s^-) - I_{i,m}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
+ P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(i+1)}{t} \mu \int_0^t I_{i+1,m}(s) ds &- \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{t} \mu \int_0^t I_{i,m}(s) ds - \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{t} \nu \int_0^t I_{i,m}(s) ds \\
&+ \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{i,m}(t)}{t}, \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Le terme du côté gauche de (3.44) est égal à zéro. Par conséquent, en réécrivant (3.44) de façon similaire à (3.40), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{i-1,m}(s^-) - I_{i,m}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i-1,m}(s^-) - I_{i,m}(s^-)] dA(s)
\end{aligned}$$

De même que pour (3.41) et (3.42) on a :

$$\mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{t} \mu \int_0^t I_{i,m}(s) ds = \mu i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = m\} ds \text{ et}$$

$$\mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{t} \nu \int_0^t I_{i,m}(s) ds = \nu m \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = m\} ds$$

et de manière similaire à (3.43) on a :



$$\mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{i,m}(t)}{t} = 0.$$

Ainsi, pour  $i = 0, \dots, n-1, j = m$  on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{i,m}(s^-) - I_{i-1,m}(s^-)] dA(s) \\ &= \mu(i+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i+1, Q_2(s) = m\} ds \\ & \quad - \mu i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = m\} ds \\ & \quad - \nu m \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = m\} ds \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas  $i = 0, 1, \dots, n, j = m-1$ . Nous avons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (I_{n,j}(t) - I_{n,j}(0)) &= P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{n-1,j}(s^-) + I_{n,j-1}(s^-) - \\ & I_{n,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ & - P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{t} \mu \int_0^t I_{n,j}(s) ds + \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j+1}{t} \nu \int_0^t I_{n-1,j+1}(s) ds \\ & \quad + \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{i,m}(t)}{t}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

Le terme du côté gauche de (3.45) est égal à zéro. Par conséquent, en réécrivant (3.45) de manière analogue aux cas précédents on trouve :

$$\begin{aligned} & P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{n-1,j}(s^-) + I_{n,j-1}(s^-) - I_{n,j}(s^-)] d\hat{A}(s) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [[I_{n-1,j}(s^-) + I_{n,j-1}(s^-) - I_{n,j}(s^-)] dA(s) \\ & \quad P \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{t} \mu \int_0^t I_{n,j}(s) ds \\ &= \mu n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n, Q_2(s) = j\} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j+1}{t} \nu \int_0^t I_{n-1, j+1}(s) ds \\
&= \nu(j+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n-1, Q_2(s) = j+1\} ds \\
& \quad \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{i,m}(t)}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour  $i = n, j = 0, \dots, m-1$ , on a ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [I_{n,j}(s^-) - I_{n-1,j}(s^-) - I_{n,j-1}(s^-)] dA(s) \\
&= -\mu n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n, Q_2(s) = j\} ds \\
&+ \nu(j+1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n-1, Q_2(s) = j+1\} ds
\end{aligned}$$

Maintenant, considérons le dernier cas  $i = n, j = m$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (I_{n,m}(t) - I_{n,m}(0)) &= \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{n-1,m}(s^-) + I_{n,m-1}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
& - n \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mu \int_0^t I_{n,m}(s) ds + \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{n,m}(t)}{t}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

de manière analogue aux cas précédents, en réécrivant (3.46) sous la forme :

nous avons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [I_{n-1,m}(s^-) + I_{n,m-1}(s^-)] d\hat{A}(s) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [[I_{n-1,m}(s^-) + I_{n,m-1}(s^-)] dA(s) \\
& \quad n \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mu \int_0^t I_{n,m}(s) ds \\
&= \mu n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n, Q_2(s) = m\} ds \\
& \quad \mathbb{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{n,m}(t)}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour  $i = n, j = m$ , on a ce qui suit :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t I_{n-1,m}(s^-) dA(s) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t I_{n,m-1}(s^-) dA(s) \\ & = \mu n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P\{Q_1(s) = n, Q_2(s) = m\} ds \end{aligned}$$

Le théorème est prouvé.

### Corolaire 3.4.1 .

*Si  $A(t)$  est un processus de Poisson avec un taux  $\lambda$ . le temps de service et le temps inter-rappels sont exponentiels de paramètres  $\mu$  et  $\nu$  respectivement, alors nous avons le système d'équations linéaires et homogènes suivant.*

*pour  $i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1$*

$$(\lambda + i\mu + j\nu)P_{i,j} = \lambda P_{i-1,j} + (i+1)\mu P_{i+1,j} + (j+1)\nu P_{i-1,j+1}. \quad (3.47)$$

*pour  $i = 0, \dots, n-1, j = m$*

$$(\lambda + i\mu + m\nu)P_{i,m} = \lambda P_{i-1,m} + (i+1)\mu P_{i+1,m}. \quad (3.48)$$

*pour  $i = n, j = 0, \dots, m-1$*

$$(\lambda + n\mu)P_{n,j} = \lambda P_{n-1,j} + \lambda P_{n,j-1} + (j+1)\nu P_{n-1,j+1}. \quad (3.49)$$

*pour  $i = n, j = m$ ,*

$$(n\mu)P_{n,m} = \lambda P_{n-1,m} + \lambda P_{n,m-1}. \quad (3.50)$$

*Dans (3.47)-(3.50), nous utilisons la notation*

$$P_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Q_1(s) = i, Q_2(s) = j\}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, m-1.$$

**Démonstration** *Lorsque  $A(t)$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , le compensateur  $\hat{A}(t) = \lambda t$ . La décomposition semimartingale du processus*

de Poisson  $A(t)$  donne

$$A(t) = \lambda t + M_A(t). \quad (3.51)$$

la preuve de ce corollaire est basée sur la relation suivante pour  $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{I}\{Q_1(s-) = i, Q_2(s-) = j\} dA(s) = \lambda P_{i,j} \quad (3.52)$$

En substituant la représentation (3.51) pour (3.52), nous obtenons pour  $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$  :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{I}\{Q_1(s-) = i, Q_2(s-) = j\} dA(s) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s-) = i, Q_2(s-) = j\} ds \\ &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{I}\{Q_1(s-) = i, Q_2(s-) = j\} dM_A(s). \end{aligned}$$

Le premier terme du côté droit est égal à  $\lambda P_{i,j}$  et le second terme est égal à 0. Par conséquent, le corollaire est prouvé.

### 3.5 Exemples numériques

Notre objectif est de calculer la proportion de pertes pour deux systèmes, avec  $\lambda = 2, \mu = 1, \nu = 1, m=2$ .

la probabilité de perte est donnée par (Abramov [2]) :

$$f = \frac{\text{p-}\lim_{t \rightarrow \infty} q_3(t)}{\text{p-}\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)} = \frac{1}{\lambda} \text{P-}\lim_{t \rightarrow \infty} q_3(t). \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{aligned} & \text{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} q_3(t) = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) = n\} ds \\ & - \nu \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}\{Q_1(s) \neq n, Q_2(s) = 1\} ds\} \\ &= \text{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} q_3(t) = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{Q_1(t) = n\} \\ & - \nu \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{Q_1(t) \neq n, Q_2(t) = 1\}\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$= 1.$$

### 3.5.1 Exemple 1

Le premier système est le système M/M/2/2 avec rappels On résout le système (3.47)-(3.50) donné par le corollaire 3.4.1 on trouve :

TABLE 3.1 – Les valeurs de  $P_{i,j}$  pour le système M/M/2/2 avec rappels

$(i,j)$	$P_{i,j}$
(0,0)	0.1333
(1,0)	0.2667
(0,1)	0.06667
(1,1)	0.2
(0,2)	0.8
(1,2)	0.5333
(2,0)	0.16304
(2,1)	0.2989
(2,2)	0.53804

nous utilisons les résultats de la Table 3.1 et nous utilisons également (3.53) et (3.54), On trouve la probabilité de perte : 0,86667.

### 3.5.2 Exemple 2

Le second système est le système M/M/3/3 avec  $\lambda = 2, \mu = 1, \nu = 1$  m=3. faisant les calculs de manière similaire au cas précédent on trouve :

TABLE 3.2 – Les valeurs de  $P_{i,j}$  pour le système M/M/3/3 avec rappels

$(i,j)$	$P_{i,j}$
(0,0)	0.2301
(1,0)	0.4601
(2,0)	0.4026
(0,1)	0.11502
(1,1)	0.3451
(2,1)	0.4025
(0,2)	0.0411
(1,2)	0.1644
(2,2)	0.1295
(0,3)	0.6138
(1,3)	0.0304
(2,3)	0.0653
(3,0)	0.1726
(3,1)	0.5504
(3,2)	0.14002
(3,3)	0.1369

Et on trouve la probabilité de perte : 0.5686

Nous remarquons que la probabilité de perte du système M/M/3/3 est inférieure à celle de système M/M/2/2.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons analysé le système de file d'attente multi-serveurs avec rappels et avec perte à l'aide de la théorie des martingales. Nous avons obtenu les équations de ce système, puis nous avons simplifié les équations en d'autres équations, similaires aux équations du modèle multi-serveur de Markov, Cette étude théorique est soutenue par une illustration numérique.

# Conclusion

Cette étude met en évidence l'intérêt et les applications de la méthode des martingales pour l'analyse des systèmes de files d'attente avec rappels. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au système multiserveur non-markovien avec rappels et avec pertes.

Dans un premier temps, nous avons rappelé des résultats connus sur les systèmes d'attente avec rappels. Nous avons ensuite présenté un bref aperçu des définitions et des résultats élémentaires concernant la théorie des martingales.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude d'un système multiserveur non-markovien avec rappels et avec pertes où à l'arrivée d'un client, si l'un des serveurs est libre, le client sera pris en charge immédiatement, dans le cas contraire, s'il trouve tous les serveurs occupés et l'orbite pleine, le client est perdu. Nous avons utilisé la décomposition de Doob-Meyer des semi martingales pour obtenir une représentation sous la forme d'une martingale du processus stochastiques et les équations de la distribution du nombre de clients dans le système. D'abord, nous avons considéré le problème général où le processus d'arrivée est un processus ponctuel, ensuite nous nous sommes intéressés au cas où le processus ponctuel est un processus de Poisson.

Nous avons terminé ce travail par des exemples numériques.

Les résultats obtenus dans ce mémoire, permettent d'envisager de nou-



velles perspectives de recherche, on peut citer :

- Etude d'autres processus aléatoires via les martingales à temps continu.
  
- Une analyse par simulation statistique d'un système multiserveur avec rappels où des temps de services et de rappels sont des processus ponctuels au lieu de distribution exponentielle généralement utilisé dans la littérature.

# Bibliographie

- [1] V. M. ABRAMOV – « Analysis of multiserver retrial queueing system : A martingale approach and an algorithm of solution », *Annals of Operations Research* **141** (2006), no. 1, p. 19–50.
- [2] — , « Multiserver queueing systems with retrials and losses », *The ANZIAM Journal* **48** (2007), no. 3, p. 297–314.
- [3] A. AÏSSANI – « A survey on retrial queueing models », *Actes des Journées Statistiques Appliquées, USTHB, Alger* (1994), p. 1–11.
- [4] J. R. ARTALEJO & A. GÓMEZ-CORRAL – *Retrial queueing systems : A computational approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [5] F. BACCELLI & A. MAKOWSKI – « Direct martingale arguments for stability : the  $m|g|1$  case », *Systems & control letters* **6** (1985), no. 3, p. 181–186.
- [6] Q. H. CHOO & B. CONOLLY – « New results in the theory of repeated orders queueing systems », *Journal of applied Probability* **16** (1979), no. 3, p. 631–640.
- [7] J. COHEN – « Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls », *Philips Telecommunication Review* **18** (1957), no. 2, p. 49–100.
- [8] J. DOOB – « Measure theory, springer-verlag, new york, 1994 ».
- [9] G. FALIN – « A survey of retrial queues », *Queueing systems* **7** (1990), no. 2, p. 127–167.
- [10] G. FALIN & J. TEMPLETON – « Retrial queues. 1997 », *Chapman&Hall, London*.

- [11] H. OUKID – « Analyse des systèmes de files d’attente avec rappels pour la méthode des martingales. », Thèse, Université de Tizi Ouzou-Mouloud Mammeri.
- [12] — , « méthode des martingales dans les problèmes de files d’attente. », Thèse, Université de saad dahleb blida 1.
- [13] H. PIAGGIO – « Étude critique de la notion de collectif. by j. ville. pp. 144. 75 francs. 1939. monographies des probabilités, calcul des probabilités et ses applications, publiées sous la direction de m. émile borel, fascicule iii.(gauthier-villars, paris) », *The Mathematical Gazette* **23** (1939), no. 257, p. 490–491.
- [14] L. R. SH & A. SHIRYAYEV – « Theory of martingales », *Mathematics and its Applications. Kluwer, Dordrecht* (1989).
- [15] P. A. SZAFARZ – « Richard von mises : L’échec ? on ; une axiomatique », *Dialectica* **38** (1984), no. 4, p. 311–317.
- [16] D. WILLIAMS – *Probability with martingales*, Cambridge university press, 1991.
- [17] T. YANG & J. G. C. TEMPLETON – « A survey on retrial queues », *Queueing systems* **2** (1987), no. 3, p. 201–233.