



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

Département de Construction Aéronautique



01/2/2017
EM

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de MASTER en Aéronautique

Spécialité : *Structure Avion*

*Etude de l'effet de l'effort tranchant sur la flexion simple
des poutres et Application sur les profils d'aile*

Présenté par :

- Melle. NASRI Ouidad
- Mr. MAZOUZ Mohamed Abdelaziz

Dirigé par :

Mr. KIRAD Abdelkader

Promotion 2017

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord, on souhaite manifester notre sincères remerciements à **ALLAH** le tout puissant qui nous a donné la force, la patience, le courage, la volonté et la santé durant toutes ces années d'étude pour aller jusqu'au bout de ce travail.*

Avant de présenter ce modeste travail, on tient à remercier sincèrement toutes les personnes qui ont contribuées à la réalisation de ce mémoire, plus particulièrement .

*Notre promoteur monsieur **KIRAD Abdelkader** Pour nous avoir fait l'honneur de nous encadrer et Pour avoir suivi et diriger notre travail, on a apprécié ses conseils. Nous remercions également Mr **SALHI Marouane**.*

Nos sincères remerciements vont aussi à toutes les enseignants qui nous suivis durant notre cycle d'études, particulièrement les enseignants de l'institut d'aéronautique.

Nous tenons à remercier les membres du jury, pour l'honneur d'acceptaient d'évaluer notre travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en témoignage de ma reconnaissance. De mon cœur, et de mon profond respect :

A ma très chère mère Ziloukha qui a sacrifié sa noble existence pour bâtir la mienne, et qui est pour moi le symbole du courage et du sacrifice.

A mes chers frères Riad et Dani et mes très chères sœurs Souhila, Wassila et Sara.

A mon binôme Mazouz Abdelaziz que j'apprécie beaucoup ainsi qu'à toute sa famille.

A mes amis Yasser et Nesrine pour leurs soutiens.

A tous mes collègues de l'Université de Blida.

Je le dédie enfin a tous mes amis et ceux qui me sont cher.

NASRI

Ouidad

Je dédie cette thèse à ...

A Mes Très Chers Parents

Tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que je vous porte, ni la profonde gratitude que je vous témoigne pour tous les efforts et les sacrifices que vous n'avez jamais cessé de consentir pour mon instruction et mon bien-être.

C'est à travers vos encouragements que j'ai opté pour cette profession, et c'est à travers vos critiques que je me suis réalisée.

J'espère avoir répondu aux espoirs que vous avez fondés en moi. Je vous rends hommage par ce modeste travail en guise de ma reconnaissance éternelle et de mon infini amour.

Vous résumez si bien le mot parents qu'il serait superflu d'y ajouté quelque chose.

Que Dieu tout puissant vous garde et vous procure santé, bonheur et longue vie pour que vous demeuriez le flambeau illuminant le chemin de vos enfants.

A mes très chers frères MOUNIME et MALEK

A ma très chères sœur MARWA

Je ne peux exprimer à travers ses lignes l'expression de ma profonde gratitude pour votre soutien, encouragements, durant les moments difficiles. Puisse la fraternité nous unissent à jamais.

A mon binôme NASRI OUIDAD

Que j'apprécie beaucoup ainsi qu'à toute sa famille

A tous mes amis les plus proches et les plus loins

Mazouz Abdelaziz

Résumé du travail

Il y'a plusieurs méthodes couramment utilisées pour évaluer la flèche d'une poutre sous l'effet des charges extérieures ; cette flèche représente adéquatement le déplacement latéral des poutres. Cependant, pour les poutres courtes, où la dimension longitudinale est assez petite par rapport aux dimensions transversales, l'effet de l'effort tranchant sur la flèche n'est pas négligeable et cette dernière dépend d'un certain coefficient qui s'appelle coefficient de forme énergétique. Le travail actuel consiste à élaborer un programme numérique permettant de calculer ce coefficient qui dépend de la forme de la section.

La validation des résultats sur le coefficient de forme énergétique est faite avec une section circulaire vu l'existence du résultat exact théorique dans la littérature.

Mots clés : profil d'aile, moment d'inertie, effort tranchant, moment fléchissant, coefficient de forme énergétique, flèche, et erreur de calcul.

ملخص العمل

هناك العديد من الأساليب المستخدمة عادة لتقييم انحراف العارضة تحت تأثير العوامل الخارجية . ويمثل هذا السهم بشكل كاف التشريد الجانبي للحزم، ولكن بالنسبة لحزم قصيرة حيث البعد الطولي صغير نسبياً بالنسبة إلى الأبعاد الأخرى، فإن تأثير قوة القص على الطفرة لا يمكن إهماله، وهذا الأخير يعتمد على معامل معين يسمى معامل الحالة الطاقوي . ويتمثل هذا العمل الحالي بعداد برنامج رقمي يسمح بحساب هذا المعامل الذي يعتمد على شكل المقطع . يتم التحقق من نتائج معامل الحالة الطاقوي اعتماداً على نتائج المقطع الدائري بالنظر إلى وجودها في البحوث العلمية.

الكلمات الرئيسية: شكل الجناح، لحظة القصور الذاتي، قوة القص، عزم الانحناء، معامل الطاقة، السهم، وخطأ الحساب.

Abstract

There are several commonly used methods for assessing the deflection of a load beam; this arrow adequately represents the lateral displacement of the beams. However, for short beams where the longitudinal dimension is rather small in relation to the transverse dimension, the effect of the shear force on the deflection is not negligible, it depends on a certain coefficient called energy coefficient of form. The present work consists in elaborating a numerical program allowing to calculate this coefficient which depends on the form of the section.

The validation of the results on the energy form coefficient is done with the circular section seeing that the exact theoretical results exist in the literature.

Key words: wing profile, moment of inertia, shear force, bending moment, energy coefficient, deflection of beam, and calculation error.

Table de matière

Remerciement

Dédicace

Résumé

Table de matière

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des Nomenclatures

Introduction générale 1

Chapitre I : Génération sur les profils d'aile

I.1 Introduction	2
I.2 Qu'est-ce qu'un profil ?	2
I.2.1 Définition géométrique du profil	2
I.2.2 Définition Aérodynamique du profil	3
I.3 Les caractéristiques d'un profil	3
I.3.1 Les caractéristiques géométriques d'un profil 3	4
I.3.2 Les caractéristique Aérodynamique du profil	5
I.3.3 Quelques caractéristiques.....	6
I.4 Les principaux types du profil	6
I.4.1 Selon l'épaisseur	6
I.4.2 Selon l'écoulement	6
I.4.3 Selon la forme	6
I.4.3.1 Biconvexe	7
I.4.3.1.1 Symétrique	7
I.4.3.1.2 Dissymétrique	8
I.4.3.2 Plan convexe	9
I.4.3.3 Creux	10
I.4.3.3.1 Classique	10
I.4.3.3.2 Profil Jedelsky	10
I.4.3.4 Double courbure	11
I.4.3.5 Supercritique	12
I.4.3.6 Circulaire	13
I.4.3.7 Rectangulaire	14

I.5 Désignation d'un profil	14
I.6 Profil NACA	14
I.6.1 Famille de profils à quatre chiffres	15
I.6.1.1 Profil symétrique 00ee	15
I.6.1.2 Profil cambré	16
I.6.2 Famille de profils à cinq chiffres	17
I.6.3 Famille de profils laminaires (série 6)	18
I.6.4 Série 1	19
I.6.5 Série 7	19
I.6.6 Série 8	20
I.7 Le choix du profil	20

Chapitre II : Résistance des matériaux

II-1 Introduction	23
II.2 Les caractéristiques géométriques des formes	23
II.2.1 Centre de gravité	23
II.2.2 Moment statique	25
II.2.3 Moment quadratique (moment d'inertie des sections)	26
II.2.4 Moment d'inertie polaire	27
II.2.5 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge).....	28
II.3 Flexion Simple	28
II.3.1 Hypothèse de calcul	28
II.3.2 Etude de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M	29
II.3.2.1 Convention de signes	29
II.3.2.2 Diagrammes	30
II.3.3 Relations différentielles d'équilibre.....	31
II.3.3.1 Démonstration	31
II.3.4 Démarche à suivre pour tracer les diagrammes de T et de M	32
II.3.5 Contrainte due à un moment fléchissant constant (flexion pure)	32
II.3.5.1. Relation entre la contrainte et la déformation	34
II.3.5.2. Equilibre	35
II.3.5.3 Expression de la contrainte normale	35
II.3.6 Contrainte due à l'effort tranchant (FLEXION SIMPLE)	37
II.3.6.1 Résolution	38

II.4 Méthodes énergétiques)	40
II.4.1 Energie de déformation concernant des cas particuliers	40
II.4.1.1 Premier cas particulier : la tension	41
II.4.1.2 Deuxième cas particulier : la flexion	41
II.4.1.3 Troisième cas particulier : La torsion	41
II.4.2 Théorème de CASTIGLIANO	41
II.4.3.1 Application aux systèmes isostatiques	43
II.4.2.2 Application aux systèmes hyperstatiques	44
II.4.3 Effets de l'effort tranchant.....	44
II.5 Flèche sous l'effet de l'effort tranchant	45
II.6 conclusion	46

Chapitre III : Eléments finis

III.1 Introduction	47
III.2 Elément de poutre (sans l'effet de l'effort tranchant)	47
III.2.1 Définition	47
III.2.2 Discrétisation	48
III.2.3 Loi de comportement.....	49
III.2.4 Détermination de la matrice de rigidité $[K]$ en coordonnées locales	49
III.2.4.1 L'interprétation physique des fonctions $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ et $N_4(x)$	51
III.2.4.2 Relation entre déformation et déplacement verticale	53
III.2.4.3 Relation entre contrainte et déplacement	54
III.2.4.4 Relation entre charge nodale et déplacement nodaux	55
III.2.5 Les efforts tranchants (T) et les moments fléchissant (M) au nœud 1 et 2 sans chargement extérieur	57
III.2.6 Assemblage des matrices de rigidité des.....	57
III.3 Elément de poutre (avec l'effet de l'effort tranchant).....	58
III.4 Conclusion	60

Chapitre IV : Applications et résultats

IV.1 Introduction	61
IV.2 L'organigramme	61
IV.3 Cas-test (exemple d'application).....	65
IV.3.1 Calcul de coefficient de forme énergétique K_e	68

IV.3.1.1 Par la méthode RDM	68
IV.3.1.2 Par la méthode numérique	69
IV.3.1.3 Calcul d'erreur	69
IV.3.2 calcul de déplacement	70
IV.3.2.1 Par la méthode classique	70
IV.3.2.1.1 Sans l'effet de l'effort tranchant	70
IV.3.2.1.2 Avec l'effet de l'effort tranchant.....	71
IV.3.2.2 Par la méthode des éléments finis	72
IV.3.2.2.1 Sans l'effet de l'effort tranchant	73
IV.3.2.2.2 Avec l'effet de l'effort tranchant	74
IV.4 Application aux profils symétriques	77
IV.4.1 Application au profil NACA 0012.....	77
IV.4.2 Application au profil NACA0024.....	78
IV.4.3 Application au profil NACA0044	79
IV.4.4 Interprétation des résultats	80
Conclusion et perspective	81

Référence

Annexe

Liste des figures

Figure I-1 : Section vertical de l'aile.....	2
Figure I-2 : Les caractéristiques géométriques d'un profil	4
Figure I-3 : Les caractéristiques aérodynamiques du profil d'aile d'avion.....	5
Figure I-4 : Familles de profils d'aile.....	6
Figure I-5 : Profil biconvexe symétrique.....	7
Figure I-6 : Exemple d'un profil biconvexe symétrique.....	7
Figure I-7 : profil biconvexe dissymétrique.....	8
Figure I-8 : Exemple d'un profil biconvexe dissymétrique.....	8
Figure I-9 : profil plan convexe.....	9
Figure I-10 : Exemple d'un profil plan convexe (Clark YH win groot of a Yak-18T).....	9
Figure I-11 : profil creux classique.....	10
Figure I-12 : profil creux Jedelsky.....	10
Figure I-13 : Profil double courbure.....	11
Figure I-14 : Le Northrop B-2 <i>Spirit</i> , avion bombardier emblématique des ailes volantes..	11
Figure I-15 : Profil supercritique.....	12
Figure I-16 : Exemple du profil supercritique (A310).....	13
Figure I-17 : Profil circulaire.....	13
Figure I-18 : Profil rectangulaire.....	14
Figure I-19 : Profil symétrique de la famille du profil à quatre chiffres.....	15
Figure I-20 : Caractéristiques géométriques d'un profil cambré.....	17
Figure II-1 : La position de centre de gravité.....	24
Figure II-2 : Position de centre de gravité d'une section composée.....	25
Figure II-3 : Exemple d'une feuille reposant sur deux appuis.....	27
Figure II-4 : Les coordonnées polaires d'un élément de surface ds.....	27

Figure II-5 : Illustration de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M sur une section quelconque.....	29
Figure II-6 : Convention de signes relative à l'effort tranchant T	30
Figure II-7 : Convention de signes relative au moment fléchissant M	31
Figure II-8 : Equilibre différentiel d'un élément de poutre.....	32
Figure II-9 : Géométrie de la déformation d'une poutre en flexion pure ($M>0$).....	33
Figure II-10 : Etude de la déformation d'élément ABDE de la poutre.....	34
Figure II-11 : Contrainte agissant sur une surface élémentaire de la section droite.....	35
Figure II-12 : Répartition des contraintes en flexion pure ($M>0$).....	37
Figure II-13 : Étude de la contrainte de cisaillement produite à une section longitudinale ($y=y'$) sous l'effet de l'effort tranchant T	39
Figure II-14 : Corps élastique soumis à des charges concentrées.....	42
Figure II-15 : Aires effectives en cisaillement des sections les plus utilisées.....	45
Figure III-1 : (a) Élément de poutre avec les déplacements, rotations, forces et moments positifs ; (b) Convention des signes pour l'effort tranchant et moment fléchissant positifs selon la théorie des poutres.....	48
Figure III-2 : Une membrue divisée en élément finis.....	49
Figure III.3 : Élément de poutre avec quatre d.d.l.....	49
Figure III-4 : La courbe de la fonction $N_1(x)$	52
Figure III.5 : La courbe de la fonction $N_2(x)$	52
Figure III.6 : La courbe de la fonction $N_3(x)$	52
Figure III-7 : La courbe de la fonction d'interpolation $N_4(x)$	53
Figure III-8 : Poutre encasté à l'une de ses extrémités et supporté une charge à son autre extrémité.....	58
Figure III-9 : La déformation en cisaillement d'une section de la poutre.....	58
Figure IV-1: Organigramme représente les étapes utilisées.....	62
Figure IV-2 : Poutre libre-encastée soumise à une charge concentrée P	66
Figure IV-3: Flux de cisaillement dans une poutre à section circulaire plane.....	67

Figure IV-4 : L'aire effective en cisaillement A_{CY} et le facteur de forme énergétique K_e	69
Figure IV-5 : Les efforts internes de la poutre encastree.....	70
Figure IV-6 : Poutre encastree au noeud 1 et soumise une force concentree au noeud 2.....	73
Figure IV-7 : Effet de l'effort tranchant sur la fleche totale d'une poutre en porte-à-faux soumise à une charge concentree.....	76
Figure IV-8 : La variation de deplacement sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur de la poutre.....	76
Figure IV-9 : L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0012.....	77
Figure IV-10 : L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0024.....	78
Figure IV-11 : L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0044.....	79
Figure IV-12 : Effet de l'effort tranchant sur la fleche totale d'une poutre ayant une section profilée (différents types du profil symétriques) soumise à une charge concentree.....	80

Liste des tableaux

Tableau IV-1: L'aire effective en cisaillement A_{CY} et le facteur de forme énergétique K_e	70
Tableau IV-2: Comparaison de l'aire effective en cisaillement entre l'analytique et numérique.....	70
Tableau IV-3: Comparaison de coefficient de forme énergétique entre l'analytique et numérique.....	70
Tableau IV-4: La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur (traiter par RDM).....	72
Tableau IV-5: La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur (traiter par EF).....	75
Tableau IV-6: L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0012	77
Tableau IV-7: La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur et le pourcentage de l'erreur entre eux du profil NACA0012.....	77
Tableau IV-8: L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0024	78
Tableau IV-9: La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur et le pourcentage de l'erreur entre eux du profil NACA0024.....	79
Tableau IV-10: L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0044	80
Tableau IV-11: La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur et le pourcentage de l'erreur entre eux du profil NACA0044.....	80
Tableau IV-12: Le coefficient de forme énergétique des profils symétriques NACA0012, NACA0024 et NACA0044.....	81

Liste des Nomenclature

A : Section

A_c : Aire effective en cisaillement

α : Angle d'incidence.

α_0 : Angle d'incidence nulle

b : Longueur de la poutre

C, l : Corde du profil.

C_L, C_Z : Coefficient de portance

C_r : Courbure relative.

ds : Élément de surface.

δ, v : Déplacement (La flèche)

δw_p : Travail

γ : Déformation en cisaillement

λ : Déplacement finale

e : Epaisseur maximal d'un profil.

e_r, t : Epaisseur relative d'un profil.

E : Module d'élasticité ou module d'young

F : Force

f : Flèche d'un profil.

G : Module d'élasticité transversal

[H] : Matrice flexibilité

I_y : Moment quadratique par rapport à y

I_z : Moment quadratique par rapport à z

I_p : Moment d'inertie polaire

Liste des Nomenclatures

I_{yz} : Produit d'inertie

$\varepsilon(x)$: Déformation par rapport à l'axe x

[K] : Matrice de rigidité

K_e : Coefficient de forme énergétique

L : Longueur.

M : Moment fléchissant

ν : Module de poisson

n : Nombre des nœuds

N : Fonction d'interpolation

P,Q : charge concentrique.

q : Charge répartie

{q} : Vecteur déplacement

q_{yx} : Flux de cisaillement.

r : Rayon

R_i : Réaction

ρ : Rayon de courbure

$\sigma(x)$: Contrainte normale par rapport à l'axe x

$\sigma(y)$: Contrainte normale par rapport à l'axe y

$\sigma(z)$: Contrainte normale par rapport à l'axe z

S_y : Moment statique par rapport à l'axe y

S_z : Moment statique par rapport à l'axe z

S : Section

T : Effort tranchant

τ : Contrainte de cisaillement

Liste des Nomenclatures

θ_R : Angle de rotation autour de l'axe du moment

θ : Rotation , pente

U : Energie de déformation

V : Volume

$\{v\}$: Vecteur déplacement

W : Travail

$x_A; y_a$: Coordonnées de la cambrure maximale.

$x_e; y_e$: Coordonnées de l'extrados.

$x_G; y_G$: Coordonnées du centre de gravité.

$x_i; y_i$: Coordonnées de l'intrados.

Y : Variable de l'axe y

Y_G : Cordonné de centre de gravité sur l'axe y

Y_t : Fonction de la forme géométrique d'un profil NACA(00ee).

Y_x : Fonction de la forme géométrique d'un profil cambré.

Z_G : Cordonné de centre de gravité sur l'axe z

Δ : Variation

ϕ_γ : Facteur de correction

Indices

Max : Maximum

i : Compteur sur les nœuds

x : Suivant l'axe principal Gx

y : Suivant l'axe principal Gy

G : Centre de graviter

xy : Plan XY

Liste des Nomenclatures

yz : Plan YZ

xz : Plan XZ

1 : Nœud 1

2 : Nœud 2

Introduction Générale

Introduction générale

Lorsqu'une poutre au comportement élastique est soumise à un chargement qui provoque une flexion, son axe longitudinal (ou sa fibre neutre) se déplace par rapport à sa position d'origine, ce déplacement est appelé flèche qui se produit selon la direction transversale à l'axe longitudinal et varie en intensité tout le long de la poutre.

La rigidité de la flexion d'une poutre est caractérisée par l'intensité de sa flèche sous l'effet d'un chargement donné. Cependant, même dans le cas où c'est la résistance qui prime, il est important de s'assurer que la poutre possède une flèche qui soit en deçà des limites.

Il y a plusieurs méthodes de calcul de la flèche des poutres, nous utilisons le théorème de Castigliano.

Bien que, pour les poutres courtes, l'effet de l'effort tranchants sur la flèche n'est pas négligeable et cette dernière dépend d'un certain coefficient qui s'appelle le coefficient de forme énergétique.

Un programme de calcul numérique permet de calculer ces coefficients. Le problème consiste à ajouter l'effet de l'effort tranchant dans la matrice de rigidité de la flexion simple des poutres, le calcul se fait par rapport à les axes principaux.

Dans le premier chapitre, on va présenter une étude générale sur les profils d'aile avec ses caractéristiques géométriques et aérodynamiques, on va présenter aussi les différents types des profils avec les avantages et les inconvénients de chaque type et on va terminer ce chapitre par les bases nécessaires pour bien choisir le type du profil approprié.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier les caractéristiques principales des sections planes, leurs méthodes de calcul et leur propriétés vis-à-vis les différents cas de sollicitations. Ensuite, on va établir des relations grâce auxquelles nous pourrions calculer, en chaque point, les contraintes dues à ces forces et moments internes. Car c'est par la connaissance des contraintes que nous pourrions effectivement vérifier la résistance d'une poutre ou en déterminer les dimensions. D'abord on va traiter une poutre soumise à une flexion pure. Dans ce cas particulier, l'effort tranchant est nul et le moment fléchissant est constant tout le long de la poutre. Après nous étudierons la flexion simple et déterminerons la contrainte et le déplacement due à l'effort tranchant.

Enfin, on va terminer ce chapitre par mettre en évidence les formules d'énergie de déformation qui s'appliquent aux cas particuliers constamment étudiés en résistance des

matériaux : la tension, la torsion et la flexion, puis on va étudier le théorème de castigliano (probablement le mieux connu parmi les méthodes reposant sur le concept d'énergie).

Dans le troisième chapitre, on va aborder la méthode des éléments finis pour la détermination de la matrice de rigidité ainsi la relation entre les déformations et les déplacements et de même pour la relation entre les contraintes et les déplacements des poutres en flexion simple, dans un premier stade on va calculer la matrice de rigidité en négligeant l'effet de l'effort tranchant, par la suite on prend en considération l'effet de l'effort tranchant.

Dans le quatrième chapitre, on va déterminer le coefficient de forme énergétique qui permet de déduire la flèche dû à l'effort tranchant des poutres encastrées-libres ayant une section circulaire par deux méthodes (analytique et numérique) et comparer les résultats obtenus, puis, on va élaborer un programme de langage fortran qui permet de calculer ce coefficient pour les sections complexes comme les profils d'aile symétriques.

I.1 Introduction

L'aérodynamique (du grec aer =air et dunamis =force) est la science qui a pour objet l'étude des mouvements de l'air autour des corps.

L'aérodynamique des profils d'ailes a été étudiée par Kutta (1902) sur des profils squelettes et Joukowski (1905) sur des profils présentant de l'épaisseur. Ces profils étaient obtenus par la transformation conforme d'un cercle en un contour fermé avec un arrondi à l'avant et une pointe à l'arrière [3].

Dans ce chapitre, on va présenter une étude générale sur les profils d'aile avec ses caractéristiques géométriques et aérodynamiques, on va présenter aussi les différents types des profils avec les avantages et les inconvénients de chaque type et on va terminer ce chapitre par les bases nécessaires pour bien choisir le type du profil approprié.

I.2 Qu'est-ce qu'un profil ?

I.2.1 Définition géométrique du profil

On définit un profil comme le contour géométrique qu'on obtient par la coupe verticale(2) d'une aile d'avion, d'une pale d'hélicoptère et d'une pale de turbine à gaz ou de turbine à vent. La forme du profil est une caractéristique essentielle d'une aile et influe grandement sur les caractéristiques aérodynamiques et les performances d'un avion [5].

On particulier de l'aile d'avion, le profil est une section verticale de l'aile (1) par un plan parallèle au plan de Symétrie de l'avion(2). Cette section détermine un contour géométrique que l'on utilise pour figurer le profil d'une aile d'avion [1].

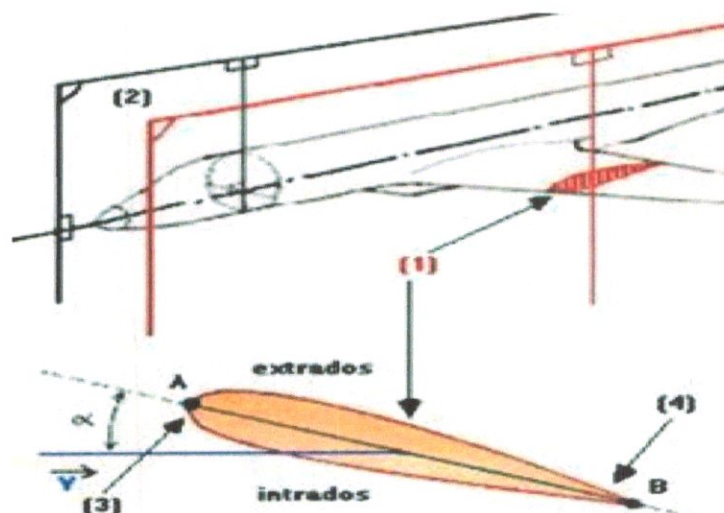


Figure I-1 : section verticale de l'aile [1].

I.2.2 Définition Aérodynamique du profil :

Le profil d'une aile représente une coupe verticale de l'aile parallèle au plan de symétrie de l'avion. Un profil créant un minimum de traînées et offrant un maximum de portance sera plus apte à être utilisé pour une aile d'avion, mais il faut savoir que certains types de profils peuvent aussi être utilisés dans la fabrication de dérives ou de dispositifs hypersustentateurs. Le profil d'une aile varie selon les performances attendu de celui-ci [16].

I.3 Les caractéristiques d'un profil

I.3.1 Les caractéristiques géométriques d'un profil

Un profil est caractérisé par (voir figure I-2) [2]:

- **Extrados:** surface supérieure de l'aile.
- **Intrados :** Surface inférieure de l'aile.
- **Bord d'attaque :** bord antérieur de l'aile.
- **Bord de fuite :** bord postérieur de l'aile.
- **La corde de profil (c) :** c'est la droite joignant le bord d'attaque au bord de fuite.
- **L'épaisseur maximale (E) :** c'est la distance maximale existante entre d'une part l'extrados, d'autre part l'intrados.
- **Epaisseur relative (E_r) :** c'est le rapport de l'épaisseur maximum (E) à la longueur de la corde de profil. Beaucoup de profils présentent une épaisseur relative de 12 à 14%.
- **Ligne moyenne :** ligne située à égale distance de l'intrados et de l'extrados.
- **Courbure relative (C_r) :** c'est le rapport de la flèche maximum a le à la longueur de la corde de profil.
- **La flèche d'un profil (f) :** c'est la distance entre la corde de profil et la ligne moyenne.
- **Angle d'incidence :** C'est l'angle formé par la corde du profil et le vecteur de vitesse du vent relatif. Cet angle est appelé angle of attack en anglais. Pour l'avion c'est l'angle formé par l'axe longitudinal de l'avion et le vecteur de vitesse [6].
- **Angle d'incidence nulle :** c'est l'angle d'incidence pour lequel la portance est nulle. Ci-dessous la portance est nulle pour une certaine incidence négative. Mais pour un profil symétrique la portance sera nulle pour une incidence nulle [6].

Les profils d'aile usuels ont une courbure variant de 1,8 à 6 %. Elle est dite positive quand la courbure de l'extrados est plus prononcée que la courbure de l'intrados (majorité des cas) [2].

Pour les profils symétriques $C_r = 0$ [2].

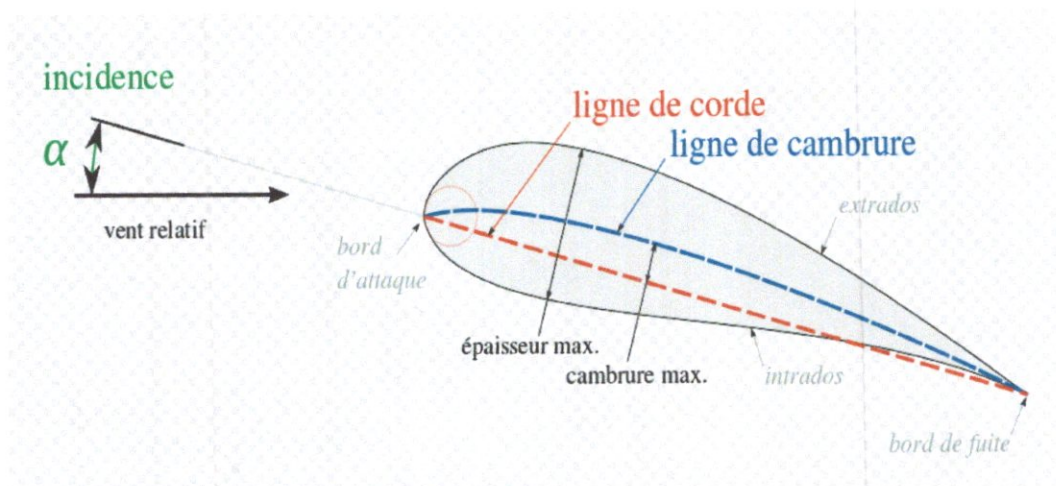


Figure I-2 : Les caractéristiques géométriques d'un profil [2].

I.3.2 Les caractéristique Aérodynamique du profil

Les caractéristiques aérodynamiques des profils d'aile d'avion qui sont importantes du point de vue contrôle et stabilité sont :

- Le coefficient de portance
- Le coefficient de traînée
- Le rapport de la portance à la traînée : Une caractéristique essentielle d'un profil est ainsi sa finesse, c'est-à-dire le rapport entre la portance et la traînée qu'il génère. La finesse d'un profil dépend principalement de trois facteurs :
 - Sa géométrie,
 - L'angle d'attaque auquel il est utilisé,
 - Le régime d'écoulement (nombre de Reynolds et nombre de Mach essentiellement).
- La position du centre de poussé ou le coefficient du moment de tangage [3].

La figure I-3 nous donne, les caractéristiques aérodynamiques de ces profils [3].

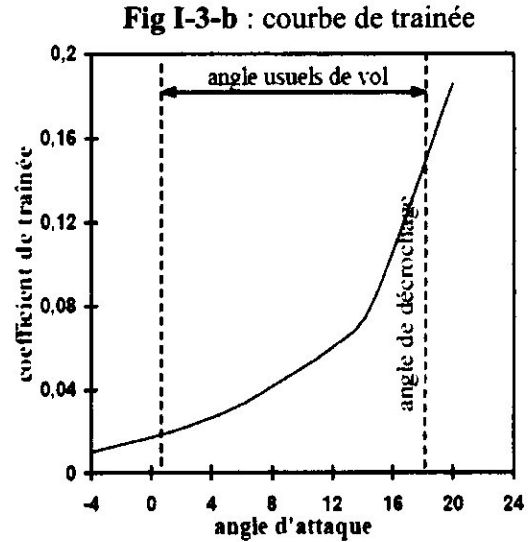
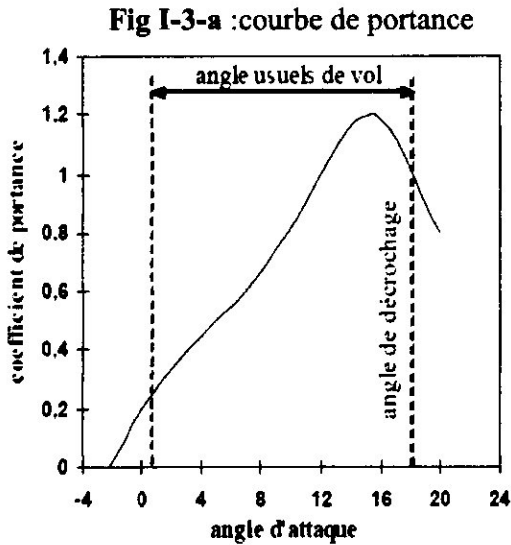


Fig I-3-c : courbe de centre de poussée et du coefficient de moment.

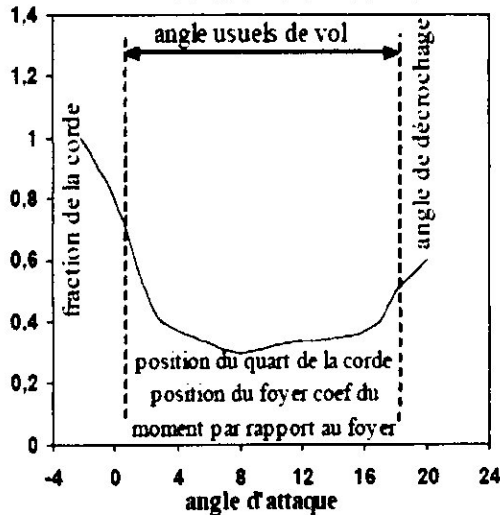


Fig I-3-d : courbe de finesse

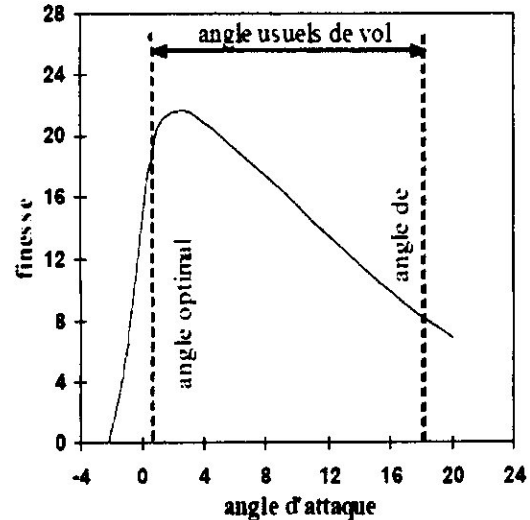


Figure I-3 : Les caractéristiques aérodynamiques du profil d'aile d'avion [3].

I.3.3 Quelques caractéristiques

La taille, la puissance et le poids de l'avion influent sur le choix du profil. Par exemple un profil épais sur un petit avion léger et peu puissant apportera un rendement beaucoup moins bon qu'un profil plus fin car il engendrerait une trop grande résistance (traînée). Il faut savoir qu'un profil mince décrochera plus brutalement qu'un profil épais. Plus le rayon du bord d'attaque est important plus le décrochage se fera en douceur. La traînée augmente avec l'épaisseur du profil car il oppose une surface de contact plus importante à l'air. Il faut aussi savoir que plus un profil est cambré, plus il crée une traînée importante mais une portance élève. En effet, l'épaisseur maximum augmentant, les traînées sont plus importantes ; mais étant donné que l'extrados est plus grand, la portance est plus importante. Il faut donc prendre

en compte ce paramètre pour définir un rendement parfait. On sait également que plus une aile est cambrée plus son décrochage se fera avec un angle d'incidence fort car elle diminue l'effet de décollement des fluides [16].

I.4 Les principaux types du profil

I.4.1 Selon l'épaisseur

On convient de discriminer :

- Les profils minces : si $e/l < 6\%$ qui sont utilisés pour les grands vitesses.
- Les profils semi-épais : si $6\% < e/l < 12\%$.
- Les profils épais : si $e/l > 12\%$.

I.4.2 Selon l'écoulement

- Profil subsonique : h est de 12-18% et bord d'attaque arrondi.
- Profil transsonique : h moyen et bord d'attaque à faible rayon.
- Profil supersonique : h faible, bord d'attaque pointu et bord de fuite parfois tronqué.

I.4.3 Selon la forme

Il existe plusieurs types de profil d'aile pour vol subsonique qui se caractérise par la forme de l'aile. Nous pouvons les regrouper dans différentes familles (Figure I-4).

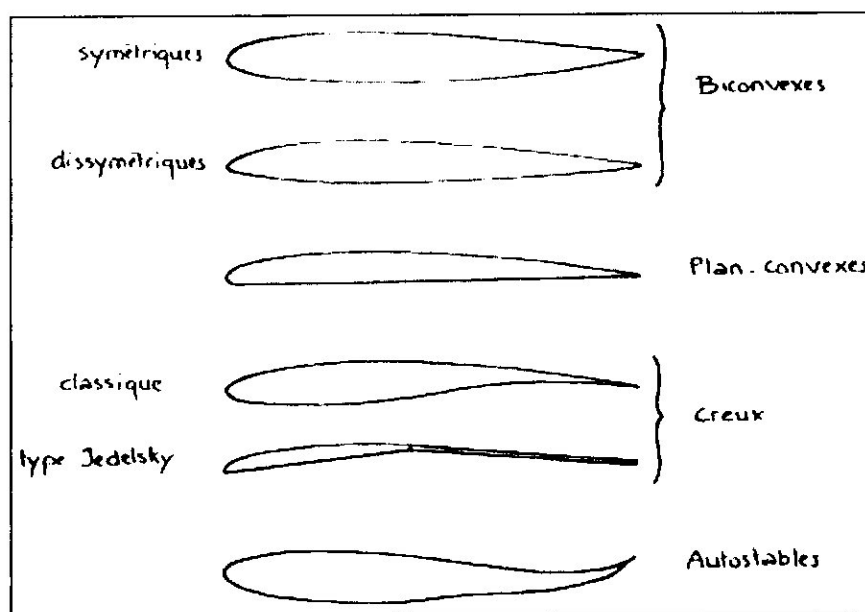


Figure I-4 : Familles de profils d'aile.

I.4.3.1.2 Dissymétrie

La ligne moyenne est à simple courbure (intrados et extrados convexes)

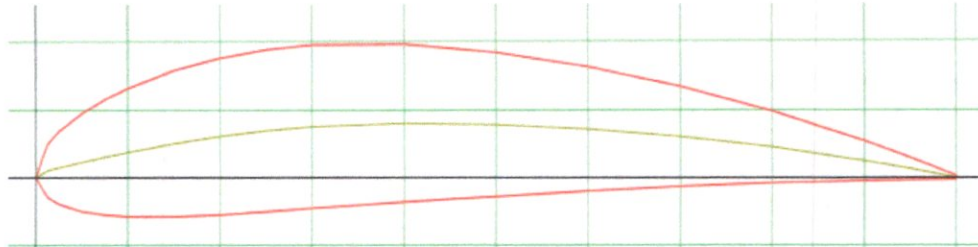


Figure I-7 : profil biconvexe dissymétrique [16].

Sur ce profil l'extrados est plus grand que l'intrados car la ligne moyenne est légèrement cambrée. La cambrure de cette ligne lui permet de décrocher à un angle d'incidence plus élevé que le symétrique. Ce type de profil est favorable au vol lent (utilisé sur les petits avions de loisir). Il crée en revanche plus de traînée que le symétrique car il perturbe davantage l'écoulement de l'air et accepte moins la voltige du fait de sa dissymétrie.

Profil d'aile biconvexe dissymétrique utilisé pour les ailes de planeurs, avions et certaines pales d'hélico. (Mig-2)

Les ailes les plus représentatives de ce type de profil sont les NACA 44 (NACA 4415, NACA 4412) [16].

Le NACA 6409 utilisé sur un In-Door.



Figure I-8 : Exemple d'un profil biconvexe dissymétrique.

I.4.3.2 Plan convexe :

La ligne moyenne est à simple courbure (intrados plat et extrados convexe).

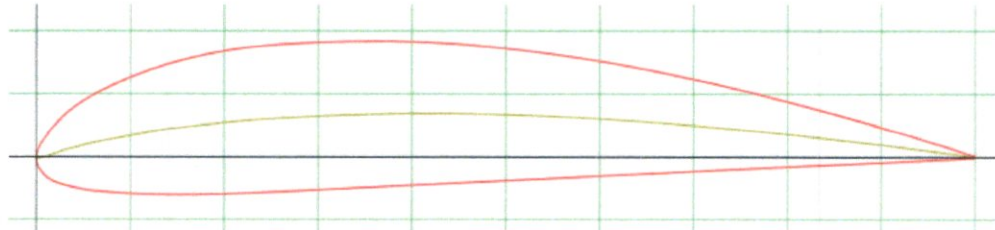


Figure I-9 : profil plan convexe [16].

Ce profil a une forte portance dès les très faibles incidences et une trainée moyenne. En revanche, il est adapté à des vols plutôt rapides si son extrados est un peu cambré. Inversement, il sera parfait pour des vols plutôt lents si son extrados est très cambré. Il est très souvent utilisé dans le modélisme car il est plutôt facile à construire et donne de bon résultat [16].

Profil d'aile à plan convexe utilisé pour les avions légers, planeurs et hélices. (Aile classique)

L'aile la plus représentative de ce type de profil est la CLARCK Y (Yak-18T).



Figure I-10 : Exemple d'un profil plan convexe (Clark YH win groot of a Yak-18T).

I.4.3.3 Creux

La ligne moyenne est à simple courbure (intrados concave, extrados convexes).

Les profils creux, à grande portance, sont adaptés pour les planeurs lents [16].

I.4.3.3.1 Classique

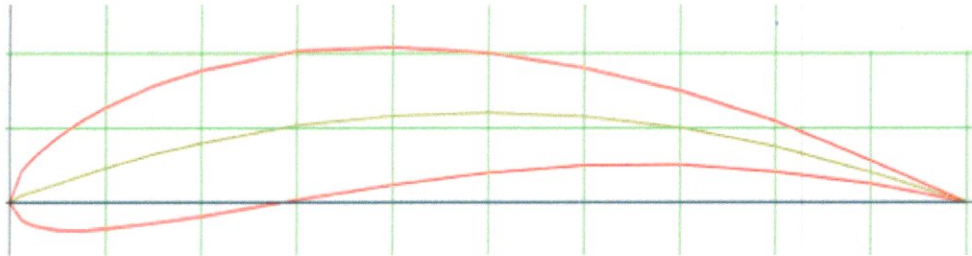


Figure I-11 : profil creux classique [16].

L'extrados est plus grand que l'intrados car elle possède une très forte cambrure. Ce profil est très porteur mais très instable. Son principal avantage est de créer une portance correcte à vitesse faible. Il est très utilisé pour les vols indoor (discipline qui consiste à faire évoluer des modèles réduits dans un espace fermé) car il n'a pas besoin d'une grande vitesse pour porter. De plus, la trainée l'empêche d'aller trop vite ce qui permet de faire des virages très serrés [16].

L'aile la plus représentative de ce type de profil est la GOT 500.

I.4.3.3.2 Profil Jedelsky

Le profil Jedelsky possède les propriétés énoncées précédemment, mais il est relativement plus simple de construction.



Figure I-12 : profil creux Jedelsky [16].

Un dénommé Jedelsky a inventé un profil creux qui porte aujourd'hui son nom et qui consiste à transformer les deux tiers du profil en une simple planche ce qui rend sa construction beaucoup plus facile [16].

I.4.3.4 Double courbure

La ligne moyenne est à double courbure

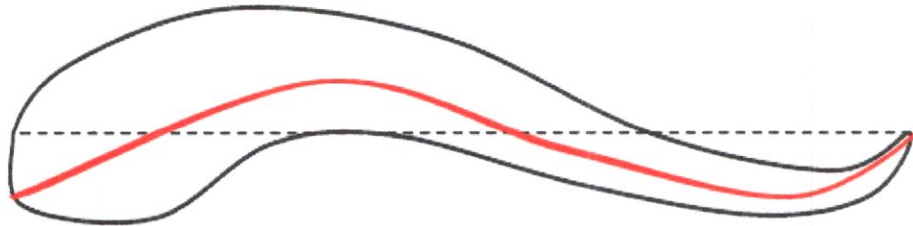


Figure I-13 : Profil double courbure [16].

Ce profil, dit "auto stable", a la particularité d'avoir une ligne moyenne à double courbure, ce qui lui permet d'adapter son angle d'incidence aux conditions de vol. Ce type de profil se suffit à lui seul pour faire voler l'avion dans toutes les situations (les empennages ne jouent pas un grand rôle). Sa cambrure permet un décrochage en douceur. Sa seconde courbure lui permet de remplacer le plan canard de certains avions (ce qui allège l'avion et crée moins de traînées) car il est compensé par l'effet inverse du couple piqueur : le couple cabreur [16].

Profil d'aile à double courbure utilisé pour les ailes volantes (auto stable).



Figure I-14 : Le Northrop B-2 *Spirit*, avion bombardier emblématique des ailes volantes.

I.4.3.5 Supercritique

La ligne moyenne est à double courbure (extrados convexe et intrados plat, creusé dans la partie arrière de l'intrados).

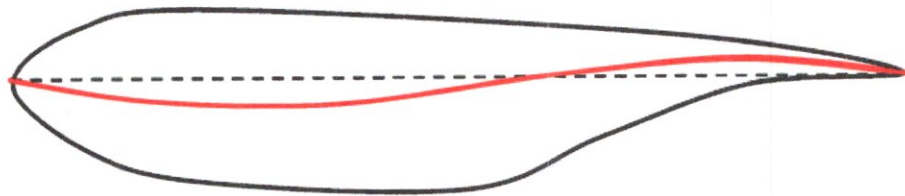


Figure I-15 : Profil supercritique [16].

Dans les années soixante, suite aux travaux de l'ingénieur Richard T. Whitcomb de la NASA, des profils de type "supercritiques" ont été développés. Sur ce type de profil, l'intrados est aplati et est creusé dans sa partie arrière. L'extrados est légèrement convexe. La particularité de ce type de profil est de garantir, à trainée et portance égale, une augmentation de la vitesse maximum. En effet, sur un profil "classique", le Mach maximum est d'environ 0.75 alors que ce profil permet d'atteindre les 0.88 Mach, c'est à dire 17% de plus.

Autre avantage de ce profil, si la vitesse maximal est dépassée, l'onde de choc créée au bord de fuite de l'aile sera moindre, car le creux situé à l'arrière de l'intrados permettra une re-compression de l'air en douceur, et ainsi limité la trainée de dé-compressibilité de l'air. De plus, étant donné que son épaisseur est plus importante qu'un profil classique, l'aile peut être plus rigide, donc avoir une plus grande envergure possible ; on notera aussi que son volume plus important permet d'emporter plus de carburant dans l'aile [16].

Ce profil est donc très utilisé, notamment sur les avions de ligne comme les Airbus A310-320-330-340, Boeing B767 [4].



Figure I-16 : Exemple du profil supercritique (A310).

I.4.3.6 Circulaire :

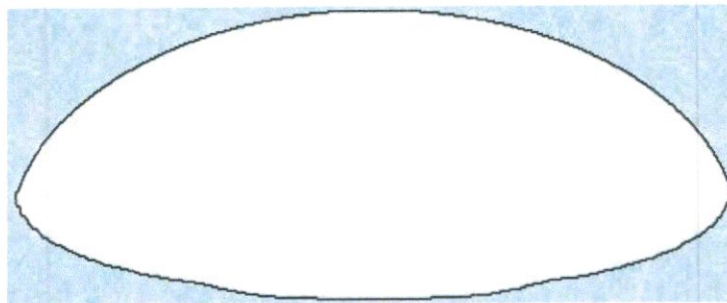


Figure I-17 : Profil circulaire [16].

L'air circulant sur l'extrados n'a pas un écoulement laminaire mais plutôt turbulent. Ayant un imposant bord d'attaque, il crée une grande résistance au vent relatif et crée énormément de traînées. Pour que le rapport portance/trainée soit correcte, il faudrait une énorme force de poussée, donc de gros moteur qui consommerait d'avantage et augmenterait la masse de l'avion. C'est pourquoi ce type de profil n'est que très peu utilisé. Il aurait quand même un point positif : le décrochage se ferait en douceur car son rayon de bord d'attaque est très important [16].

I.4.3.7 Rectangulaire

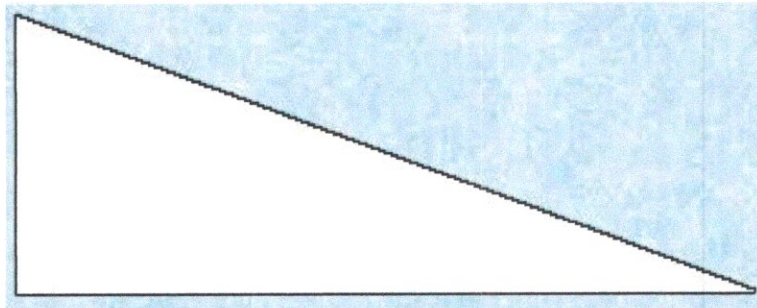


Figure I-18 : Profil rectangulaire [16].

Sachant que les angles favorisent la formation de traînées, et avec un bord d'attaque si important, sa résistance à l'air est optimal. L'écoulement laminaire est impossible avec ce type de profil. Il lui est impossible de créer une force de portance, car son bord d'attaque droit empêche l'air de circuler sur l'extrados à vitesse plus importante que sur l'intrados. Ainsi le profil rectangulaire n'est pas utilisé. Il n'a aucun point positif [16].

I.5 Désignation d'un profil

Les principaux pays constructeurs d'avion disposent de toute une gamme de profils.

Par exemple :

- En Allemagne les profils : GOTTINGEN (GOT),
- En France les profils : EIFFEL,
- En Grande Bretagne les profils : RAF,
- Aux USA les profils : CLARK et NACA [6].

Différents types de profils aérodynamiques sont catalogués dans le monde. On notera, par exemple, les profils Joukowski, Eppler, Wortmann, NACA, RAE, Göttingen, NLR, NASA/LRC et SANDIA. Parmi ces derniers, les profils de type NACA sont très connus, et on en utilise certains couramment tant en pratique que pour la validation des méthodes numériques [5].

I.6 Profil NACA

Le prédécesseur de la NASA était le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics). Cet organisme a étudié différentes familles de profils répondant à diverses

applications. Parmi ces dernières, il faut distinguer la famille de profils à quatre chiffres, celle à cinq chiffres et les profils laminaires [5].

I.6.1 Famille de profils à quatre chiffres

Dans cette famille, on identifie un profil par quatre chiffres, le premier spécifiant la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indiquant la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde [5].

Par exemple, dans le cas du profil NACA 2415 :

- le 2 représente la cambrure relative maximale (2 %);
- le 4 représente la position de la cambrure maximale (40 %) ;
- le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15 %).

I.6.1.1 Profil symétrique 00ee

Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante pour le calcul de sa forme géométrique :

$$Y_t = \frac{t}{0,2} [0,2969\sqrt{x} - 0,1260(x) - 0,3516(x)^2 + 0,2843(x)^3 - 0,1015(x)^4] \quad (\text{I-1})$$

Le rayon de courbure au bord d'attaque correspond à :

$$r = 1,1019 t^2 \quad (\text{I-2})$$

Où t représente l'épaisseur relative maximale du profil. À titre indicatif, on donne la variation du coefficient de traînée C_d en fonction de l'épaisseur relative pour un profil symétrique [5].

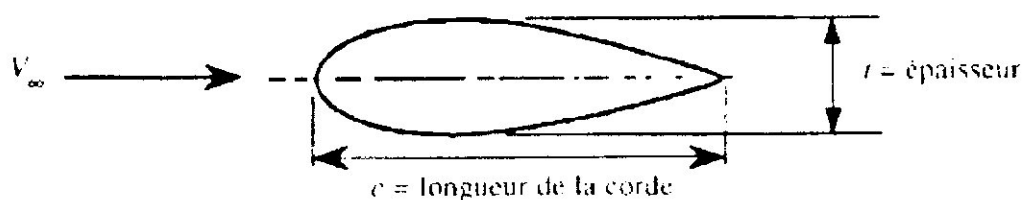


Figure I-19 : Profil symétrique de la famille du profil à quatre chiffres [5].

Exemples : NACA 0012, NACA 0015, NACA 0044...

Ces profils ont l'épaisseur maximale à $x/l=0.3$, très commode par leur définition géométrique et analytique, ils ont été très utilisés sur les avions (NACA 0012).

De nos jours, le NACA 0012 est encore le profil étalon pour les calculs numériques et expérimentaux dans les souffleries subsoniques, les corrections etc...

Les profils symétriques NACA 0012, 0015...etc...sont couramment utilisés comme carénage.

I.6.1.2 Profil cambré

Les profils NACA asymétriques les plus simples sont les séries 4 chiffres, qui utilisent la même formule que les profils 00xx, symétriques, mais avec une ligne moyenne courbée. La cambrure moyenne du profil est définie en deux sections [7].

Dans le cas du profil cambré, la forme géométrique de la cambrure moyenne est représentée par deux paraboles [5] :

$$y_x = \begin{cases} \frac{y_A}{x_A} x (2x_A - x) & 0 \leq x \leq x_A \\ \frac{y_A}{(c-x_A)^2} (c-x)(c+x-2x_A) & x_A \leq x \leq c \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

Où le point $A(x_A, y_A)$, situé à la distance où la flèche est maximale, représente le point commun des deux paraboles (**Figure I-20**). Notons que y_A représente la cambrure maximale et qu'en x_A donne l'emplacement.

Par exemple, pour NACA 4412, la cambrure maximale est de 4 % ($y_A = 0,04$) et se trouve à 40% ($x_A = 0,4$). Les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur relative maximale, ici 12 % [5].

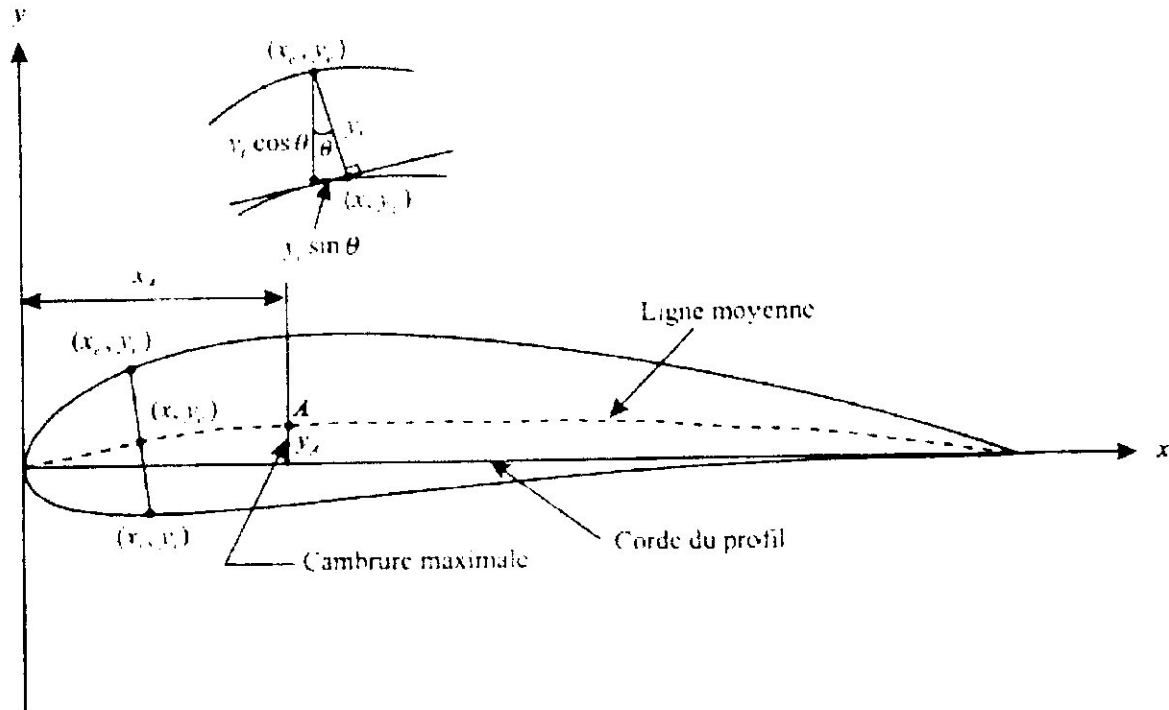


Figure I-20 : Caractéristiques géométriques d'un profil cambré [5].

L'équation de la forme géométrique d'un profil cambré est donc :

- Partie de l'extrados :

$$x_e = x - y_t \sin \theta \quad (\text{I-4})$$

$$y_e = y_c + y_t \cos \theta \quad (\text{I-5})$$

- Partie de l'intrados :

$$x_i = x + y_t \sin \theta \quad (\text{I-6})$$

$$y_i = y_c - y_t \cos \theta \quad (\text{I-7})$$

On obtient y_t de l'équation du profil symétrique et θ présente l'angle de la pente de l'équation de y_c , soit $\theta = dy_c/dx$ [5].

I.6.2 Famille de profils à cinq chiffres

La série NACA 5-chiffres permet de décrire des surfaces portantes plus complexes. Ils sont définis par le code NACA suivi de cinq chiffres LPQXX :

- L, le premier chiffre définit le coefficient de portance optimal, multiplié par 0,15
 $C_L = 0,15L$;
- P, le deuxième chiffre définit le point de cambrure maximale par rapport au bord d'attaque en pourcentage de la corde. $20p = P$;

- Q, le troisième chiffre indique si le profil est à cambrure simple (0) ou double (1) ;
- Comme pour les profils à 4 chiffres, les quatrième et cinquième chiffres donnent l'épaisseur maximale du profil en pourcentage de la corde.

Par exemple, dans le cas du NACA 23015

- Le 2 représente le coefficient de portance caractéristique ($3/2 \times 0.2 = 0.3$) ;
- Le 30 représente la position de la cambrure maximale ($1/2 \times 30 = 15\%$ de la corde) ;
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15%).

Ces profils cambrés ont été utilisés à cause de leur définition analytique. Par contre ils décrochent brutalement.

Profils pour hélices :

Exemples : NACA 16212, 16309

- Le premier chiffre indique la série.
- Le deuxième chiffre indique la position du maître-couple ($x/l = 0.6$)
- Le troisième chiffre indique le C_z d'adaptation/10 ($C_{za} = 0.2$)
- Les quatrième et cinquième chiffres indiquent l'épaisseur relative exprimée en pourcentage.

I.6.3 Famille de profils laminaires (série 6)

Le NACA a également étudié une série de profils dont l'écoulement est laminaire sur une majeure partie de sa surface et les a désignés par un ensemble de chiffres significatifs. Par exemple, pour NACA 66₂ - 215 :

- Le premier 6 représente la désignation de la série (profil laminaire);
- Le deuxième 6 représente la position de la pression minimale (60 %);
- L'indice 2 est la marge au-dessus et au-dessous du coefficient de portance caractéristique pour laquelle il existe un gradient de pression favorable (0,2);
- Le 2 représente le coefficient de portance caractéristique (0,2);
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15 %).

I.6.4 Série 1

Contrairement aux séries à 4 et 5 chiffres qui définissent les profils de façon géométrique, une nouvelle approche de conception, dite inverse, a été expérimentée à partir des années 1930. Celle-ci consiste à spécifier la distribution de pression souhaitée sur la voilure et d'en déduire la forme géométrique. Avant cela, les formes aérodynamiques étaient créées, puis leurs caractéristiques mesurées en soufflerie. Les profils de la série 1 sont décrits par cinq chiffres dans la séquence suivante [18]:

- Le premier numéro «1» indique la série ;
- Le deuxième chiffre décrit la distance de la zone de pression minimum en dizaines de pour cent ;
- Le troisième c'est le trait d'union ;
- Le quatrième chiffre décrit le coefficient de portance en dixièmes ;
- Les deux derniers chiffres décrivent l'épaisseur maximale en pour cent.

Par exemple, le profil aérodynamique NACA 16-123 a une pression minimum à 60 % de la corde, avec un coefficient de portance de 0,1 et une épaisseur maximum de 23 %.

I.6.5 Série 7

Cette série a pour but une maximisation de l'écoulement laminaire réalisé en identifiant séparément les zones de basse pression sur des surfaces supérieure et inférieure de la surface portante. Le profil d'aile est décrit par sept chiffres dans la séquence suivante [18] :

- Le nombre "7" indique la série
- Un chiffre qui décrit la distance de la zone de pression minimum sur la surface supérieure de plusieurs dizaines de pour cent
- Un chiffre qui décrit la distance de la zone de pression minimum sur la surface inférieure de plusieurs dizaines de pour cent
- Une lettre faisant référence à un profil type de la précédente série NACA
- Un chiffre décrivant le coefficient de portance en dixièmes
- Deux chiffres décrivant l'épaisseur maximale pour cent
- "A =" suivi d'un nombre décimal qui décrit la fraction de la corde au-dessus de laquelle l'écoulement laminaire est maintenu. $a = 1$ est la valeur par défaut si aucune valeur n'est donnée

Par exemple, le NACA 712A315 a la zone de pression d'au moins 10 % de la corde en arrière sur la surface supérieure et de 20 % de la corde en arrière sur la surface inférieure, met en œuvre la norme "A" profil, a un coefficient de portance de 0,3, et a une épaisseur maximale de 15 % de la corde.

I.6.6 Série 8

Les profils aérodynamiques supercritiques sont conçus pour maximiser le flux d'air de manière indépendante au-dessus et en-dessous de l'aile. La numérotation est identique pour les profils d'aile 7 de la série, sauf que la séquence commence par un «8» pour distinguer les séries [18].

I.7 Le choix du profil

La conception et le choix d'un profil d'aile est l'un des aspects les plus importants de la conception aéronautique, car elle détermine la forme et la taille des ailes et des stabilisateurs, et partant de là, les dimensions de l'aéronef tout entier. L'étude aérodynamique des profils d'ailes se fait habituellement par le calcul (en 2 D, à allongement infini ou en 3 D) et en soufflerie, avec un allongement fini.

Les frères Wright(1901) ont été les précurseurs, non seulement par leur vol, mais surtout dans leur recherche de la forme optimum de leurs ailes. Pour cela ils construisent une soufflerie et ont effectué une série de tests sur des formes de profils exposés à un courant d'air de vitesses variables et on méthodiquement relevé les forces de traînée et de portance observées [17].

Les caractéristiques géométriques correspondant le mieux à une application donnée seront déterminées en fonction d'une multitude de contraintes souvent contradictoires, par exemple :

- Avoir une finesse élevée (par exemple, pour l'aile d'un avion en régime de croisière). Cela demande en général un profil de faible épaisseur relative et de faible cambrure ;
- Pouvoir maintenir une portance à faible vitesse, ou avec une faible surface alaire (par exemple, pour une manœuvre d'un avion en approche). Cela demande d'atteindre un haut coefficient de portance, ce qui est favorisé par un bord d'attaque à grand rayon, une forte cambrure et une couche limite turbulente ;

- Pouvoir transmettre un fort moment de force perpendiculaire au plan du profil (par exemple, à la racine d'une aile à fort allongement) : cela nécessite une forte épaisseur ;
- Permettre la présence d'autres éléments à l'intérieur de l'aile (par exemple, carburant et systèmes mécaniques pour les volets et becs mobiles dans un avion) : cela demande également une grande épaisseur.

Il existe, en plus de ces contraintes d'ordre pratique, des contraintes imposées par l'écoulement du fluide.

Le choix du profil pour un planeur par exemple :

Le choix du profil dépend essentiellement du type de performance que l'on attend du planeur; en effet, il existe une gamme très importante de profils et il faudra , avant de déterminer le profil à utiliser, savoir si le planeur a une vocation thermique (priorité à la portance, à une vitesse de chute mini), s'il sera un planeur de vol de pente ou de voltige, où la pénétration est recherchée (priorité à une faible traînée et à une vitesse sur trajectoire élevée), ou un planeur essayant de constituer un compromis comme c'est le cas en F3B par exemple, qui sont utilisés comme thermiques et comme planeurs de vitesse [17].

Pour diriger les recherches, il faut savoir que plus un profil est creux, plus il est porteur, mais plus il a de traînée (en première approximation). Ceci permet de sélectionner une plage de profils correspondant à ses désirs [17].

Ensuite, on peut comparer les polaires de ces profils ou plus simplement plus simplement se fier au petit laïus qui, dans la presse modéliste accompagne souvent chaque planche de profils [17].

Ces considérations permettent de choisir un profil en fonction de ses caractéristiques et de ses performances de vol, mais le choix d'un profil fait aussi intervenir **d'autres paramètres** :

- Les difficultés de construction : il est beaucoup plus facile de construire une aile munie d'un profil dont l'intrados est plat qu'une aile adoptant un profil à l'intrados légèrement courbe qui aurait pourtant de meilleures performances (C'est pourquoi on trouve beaucoup de Clark Y sur les avions de début). D'autre part, il n'est pas toujours facile de respecter exactement un profil dont le bord de fuite est très effilé ou présentant d'autres difficultés de construction. Il faudra donc choisir en fonction de ses talents en construction et du temps que l'on veut y passer.

- Les problèmes de résistance : ils sont surtout liés à l'épaisseur relative ($\frac{\text{épaisseur max}}{\text{corde}}$). Il est plus facile d'obtenir une aile résistante avec un profil d'épaisseur relative 15% qu'avec un profil d'épaisseur relative 8% (dans les calculs de résistance du longeron, la hauteur intervient en puissance 3 dans la formule de la résistance).
- Si on désire équiper l'aile de dispositifs hypersustentateurs (volets de courbure par exemple), il faut un profil qui soit conçu pour pouvoir en supporter.
- La taille du planeur, son poids influent sur le choix du profil : on ne mettra pas un profil épais sur un petit planeur; on ne construira pas un planeur de 3m avec un Wortmann FX 61.163 (16,3% d'épaisseur relative) car le rendement sera beaucoup moins bon qu'avec un profil de plus faible épaisseur relative.
- La courbe de déplacement du centre de poussée en fonction de l'incidence peut aider à choisir un profil; en général, le centre de poussée se déplace en direction du bord d'attaque lorsqu'on augmente l'incidence. Pour certains profils, il recule avec l'incidence, ce sont les profils auto stables. Si le centre de poussée varie de façon sensible avec l'incidence, ce n'est pas bon pour la stabilité (profil plat); par contre, un profil biconvexe symétrique est très stable, son centre de poussée varie peu.
- Il faut savoir que les profils très minces induisent un décrochage brutal.

Chapitre II
Résistance des matériaux

II-1 Introduction

La résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges [8].

Dans ce chapitre on va étudier les caractéristiques principales des sections planes, leurs méthodes de calcul et leur propriétés vis-à-vis les différents cas de sollicitations.

Ensuite, on va établir des relations grâce auxquelles nous pourrions calculer, en chaque point, les contraintes dues à ces forces et moments internes. Car c'est par la connaissance des contraintes que nous pourrions effectivement vérifier la résistance d'une poutre ou en détermine les dimensions. D'abord on va traiter une poutre soumise à une flexion pure. Dans ce cas particulier, l'effort tranchant est nul et le moment fléchissant est constant tout le long de la poutre. Après nous étudierons la flexion simple et déterminerons la contrainte et le déplacement due à l'effort tranchant.

Enfin, On va terminer ce chapitre par mettre en évidence les formules d'énergie de déformation qui s'appliquent aux cas particuliers constamment étudiés en résistance des matériaux : la tension, la torsion et la flexion, puis on va étudier le théorème de castigliano (probablement le mieux connu parmi les méthodes reposant sur le concept d'énergie).

II.2 Les caractéristiques géométriques des formes

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions n'est pas un fait du hasard. Dans la plupart des cas ces formes ont été développées pour répondre à des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité.

II.2.1 Centre de gravité

- On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section [8].
- Le centre de gravité d'un corps est le point invariablement lié à ce corps, par lequel passe la ligne d'action de la résultante des forces de pesanteur des particules constitutives de ce corps → c'est le point d'application du poids \vec{P} du corps [9].
- Si le corps est une surface dotée d'un poids homogène (on pourrait par exemple imaginer qu'il s'agit d'une plaque homogène d'épaisseur constante), le centre de gravité

est encore appelé centre de figure de la surface considérée et sa position dépend uniquement des caractéristiques géométriques de la surface [9].

- Si une figure possède un axe de symétrie, son centre de gravité se trouve sur cet axe de symétrie. Si elle possède deux axes de symétrie, son centre de figure se trouve à l'intersection de ces axes [9].

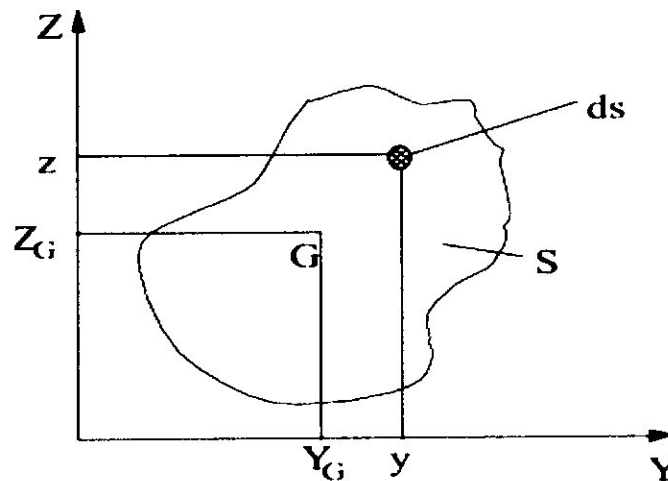


Figure II-1 : La position de centre de gravité [8].

Les coordonnées du centre de gravité $G(Y_G, Z_G)$ d'une section homogène (S) sont données par les relations [8] :

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint y ds$$

$$Z_G = \frac{1}{S} \iint z ds \quad (\text{II.1})$$

y et z étant les coordonnées de l'aire élémentaire ds.

Ces intégrales peuvent être évaluées analytiquement si le contour de la section est exprimé par des expressions mathématiques simples. Si par contre le contour est une courbe irrégulière. On procède dans ce cas par les méthodes numériques [8].

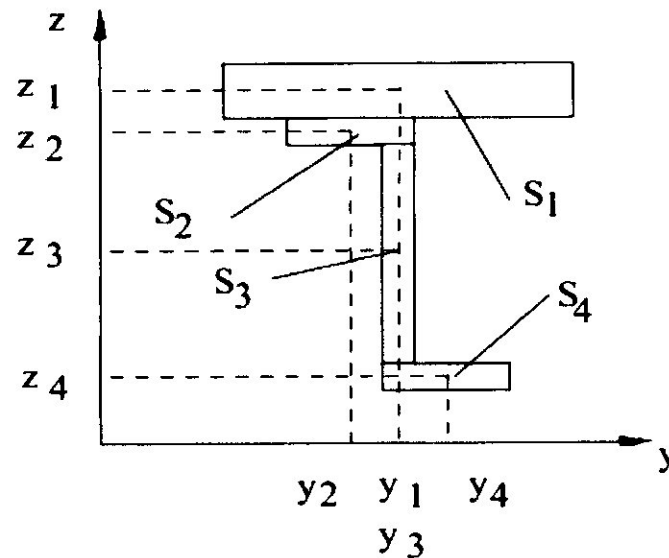


Figure II-2 : Position de centre de gravité d'une section composée [8].

La méthode la plus simple consiste à discrétiser la section en éléments de surface s_i et faire la sommation comme suit :

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum z_i s_i}{\sum s_i} \quad (\text{II. 2})$$

Les expressions tendent vers les solutions exactes quand les s_i couvrent complètement l'aire de la section [8].

II.2.2 Moment statique

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe YOZ. On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OY et OZ les quantités :

$$S_y = \iint z ds$$

$$S_z = \iint y ds \quad (\text{II. 3})$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré [8].

En utilisant les équations (II.1), (II.3) deviennent :

$$S_Y = S \cdot Z_G$$

$$S_Z = S \cdot Y_G \quad (\text{II.4})$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes OY et OZ seront respectivement égaux à :

$$S_Y = \sum_{i=1}^n s_i z_i$$

$$S_Z = \sum_{i=1}^n s_i y_i \quad (\text{II.5})$$

Remarque : Le moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul (les axes centraux).

II.2.3 Moment quadratique (moment d'inertie des sections)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivant :

$$I_Y = \iint z^2 ds$$

$$I_Z = \iint y^2 ds \quad (\text{II.6})$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.

Le moment d'inertie de la section représente la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale, comme une montre l'exemple d'une feuille reposant sur deux appuis dont la déformation sous son poids propre est nettement plus importante que quand elle est pliée en forme de U, car le moment d'inertie I_Z de la forme en U est plus grand que celui de la section rectangulaire [8].

II.2.5 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)

On appelle moment produit, l'intégral des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées Z, Y :

$$I_{YZ} = \iint yz ds \quad (\text{II.8})$$

Remarque :

- Les moments d'inertie quadratiques et polaire sont toujours positifs.
- Selon la disposition des axes, I_{ZY} peut être positif, négatif ou nul.
- En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ($I_{YZ} = 0$). Les deux axes ainsi définis sont appelés axes principaux d'inertie.
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale [8].

II.3 Flexion Simple

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinal initialement droit en une courbe curviligne. L'état d'une section de poutre ou de toutes les composantes des efforts internes, seule au moment fléchissant M_Y ou M_Z n'est pas nul, est dit état de flexion plane pure.

La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite flexion simple [8].

II.3.1 Hypothèse de calcul

- La poutre est droite avant le chargement ;
- Le matériau est élastique et ses propriétés sont les mêmes en tension et en compression ;
- Le matériau est homogène tout le long de la poutre ;

- La flexion se produit dans un seul plan qui coïncide avec un axe principal de la section [11].

II.3.2 Etude de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M

Soit une poutre ABC soumise à une charge P (Figure II-5-a) considérons la section a-a, située à une distance x de l'origine.

Les diagrammes du corps libre des deux parties de la poutre apparaissent à la (Figure II-5-b). Un effort tranchant T et un moment fléchissant M affectent chacune des parties à la section a-a.

Puisqu'il s'agit de forces et de moments internes, les sens de T et M sont opposés sur les deux parties de la poutre [11].

II.3.2.1 Convention de signes

On peut résumer ainsi la convention de signe :

- une face est positive lorsque sa normale externe pointe dans le sens positif d'un axe.
- une force et un moment internes sont positifs lorsqu'ils agissent dans le sens positif d'un axe sur une face positive, ou dans le sens négatif d'un axe sur une face négative [11].

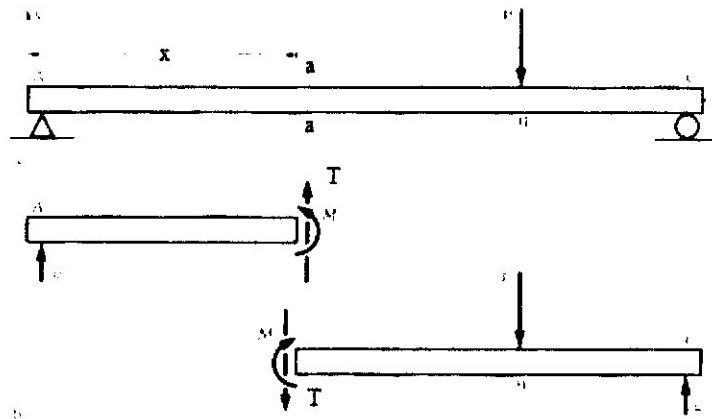


Figure II-5 : Illustration de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M sur une section quelconque (T et M sont positifs) [11].

Pour bien se représenter la convention de signes en ce qui concerne le plan de flexion xy, il faut se rappeler que :

L'effort tranchant positif tend à provoquer le cisaillement de la partie de droite, vers le haut, par rapport à la partie de gauche (**Figure II-6-a**); l'inverse est vrai pour l'effort tranchant négatif (**Figure II-6-b**).

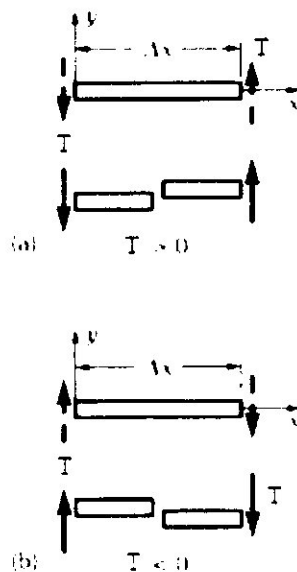


Figure II-6 : Convention de signes relative à l'effort tranchant T : a- lorsque $T > 0$, b- Lorsque $T < 0$ [11].

Le moment fléchissant positif rend concave la paroi supérieure de la poutre (**Figure II-7-a**). Elle devient convexe pour un moment fléchissant négatif (**Figure II-7-b**).

Le moment positif comprime les fibres situées à la paroi supérieure de la poutre et étire les fibres situées à la paroi inférieure [11].

II.3.2.2 Diagrammes

D'après le comportement de la poutre illustrée à la **figure II-5**, nous pouvons déduire que l'effort tranchant et le moment fléchissant ne sont pas constants, mais qu'ils varient en fonction de x . Il est donc nécessaire, pour faire une étude rigoureuse, d'établir des diagrammes qui donnent les valeurs de T et de M en tous points et qui permettent de déterminer les zones critique où T ou M atteignent des valeurs extrêmes [11].

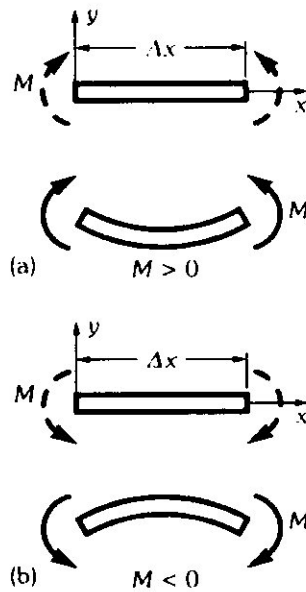


Figure II-7 : Convention de signes relative au moment fléchissant M , a- lorsque $M > 0$, b- Lorsque $M < 0$ [11].

II.3.3 Relations différentielles d'équilibre

Nous allons maintenant établir les relations générales qui relient l'effort tranchant et le moment fléchissant au chargement appliqué sur la poutre. Nous les élaborerons à partir des conditions d'équilibre qui régissent un élément de longueur de la poutre [11].

II.3.3.1 Démonstration

Considérons la poutre (**Figure II-8-a**) soumise à un chargement réparti quelconque $q=q(x)$. Isolons un élément de longueur Δx , situé à une distance x de l'origine du système d'axes.

La **figure II-8-b** montre le diagramme du corps libre de cet élément, l'équation $R=q \cdot \Delta x$ donne la résultante de q agissant sur Δx .

Les réactions internes, identifiées sur la face A par T et M , varient selon la distance x et prennent les valeurs $T+\Delta T$ et $M+\Delta M$ sur la face B de l'élément.

En appliquant les conditions d'équilibre statique :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T + \Delta T + q \Delta x - T = 0 \quad (\text{II.9})$$

À la limite ($\Delta x \rightarrow 0$), après avoir divisé par Δx , on a :

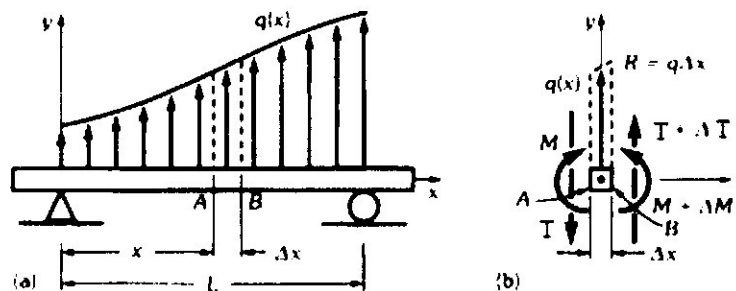


Figure II-8 : Equilibre différentiel d'un élément de poutre [11].

$$\frac{dT}{dx} = -q \quad (\text{II.10})$$

De la même façon, on trouve la pente de la courbe du moment fléchissant M en fonction de x .

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M + \Delta M + (T + \Delta T) \cdot \frac{\Delta x}{2} + T \cdot \frac{\Delta x}{2} - M = 0 \quad (\text{II.11})$$

À la limite ($\Delta x \rightarrow 0$), si on néglige les termes infinitésimaux d'ordre supérieur on a :

$$\frac{dM}{dx} = -T \quad (\text{II.12})$$

II.3.4 Démarche à suivre pour tracer les diagrammes de T et de M

À partir des démonstrations et des constatations précédentes, nous allons établir la marche à suivre pour tracer les diagrammes de T et de M relatifs aux poutres constituant des systèmes isostatiques. Il faut :

- Calculer les réactions ;
- Tracer le diagramme de T en fonction de x ;
- Calculer les valeurs de T aux sections où un changement d'intensité des charges ou des réactions externes se produit ;
- Localiser les points où $T=0$, c'est là que M atteint une valeur maximale ou minimale ;
- Tracer le diagramme de M en fonction de x ;
- Calculer les valeurs de M aux points où $T=0$ [11].

II.3.5 Contrainte due à un moment fléchissant constant (flexion pure)

Soit une poutre soumise à un moment fléchissant M constant et positif. Considérons deux éléments adjacents (ABED et BCFE) et de même longueur figure (II-9-a et II-9-b). Sous

l'effet du moment, les fibres supérieures se rétrécissent tandis que les fibres inférieures s'allongent.

La figure (II-9-c) montre la forme que prend la poutre entière après avoir été soumise au moment M . On peut remarquer les caractéristiques suivantes :

a) Tous les éléments de longueur sur une fibre longitudinale se déforment de la même façon.

b) Pour ce moment M positif, les fibres supérieures se rétrécissent et les fibres inférieures s'allongent. Il y a donc un plan longitudinal horizontal dans lequel la longueur des fibres ne change pas, ce plan est appelé plan neutre. L'axe horizontal formé par l'intersection du plan neutre et de la section longitudinale verticale de la poutre est appelé fibre neutre. Il est d'usage de faire coïncider l'axe des x avec la fibre neutre (Figure II-9-c). On appelle l'intersection du plan longitudinal horizontal et de la section transversale l'axe neutre [11].

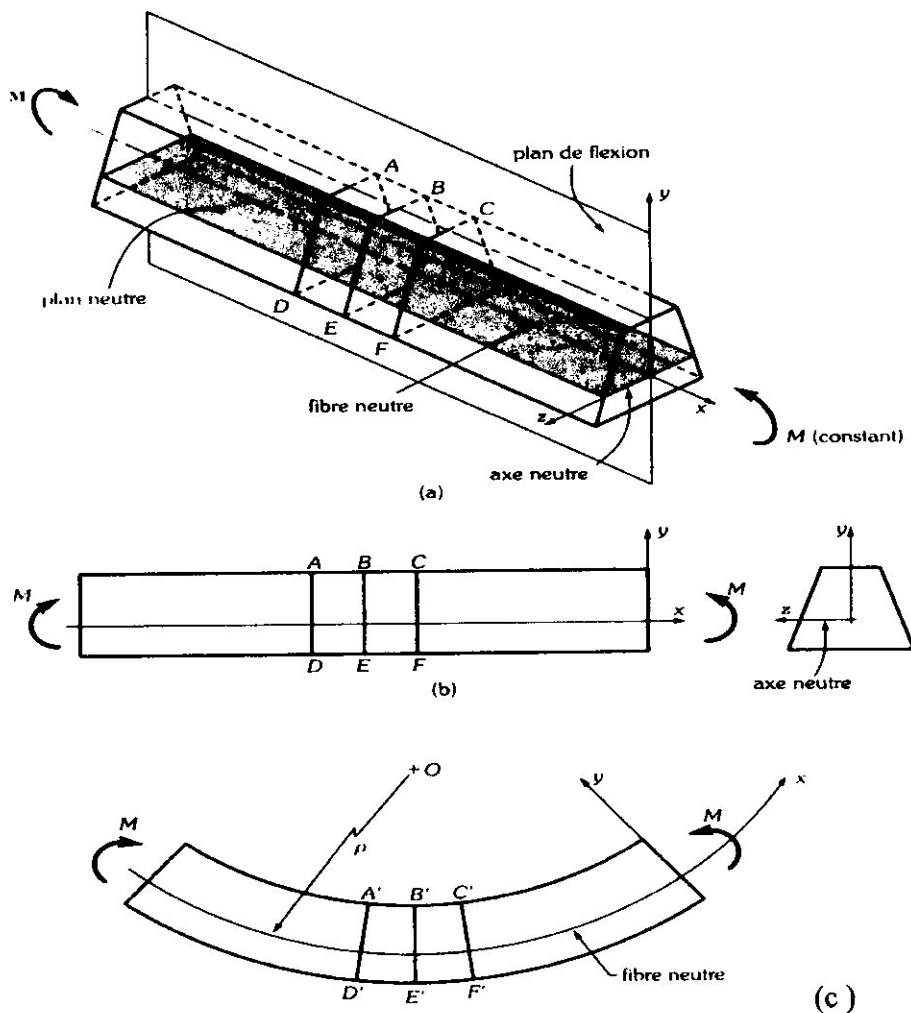


Figure II-9 : Géométrie de la déformation d'une poutre en flexion pure ($M > 0$) [11].

II.3.5.1 Relation entre la contrainte et la déformation

Examinons maintenant les déformations longitudinales des diverses fibres de l'élément ABED dans le plan de flexion (figure II-10-a). Après l'effet imputable au moment M (figure II-10-b), une fibre quelconque GH, située à une distance y au-dessus de la fibre neutre (fibre IJ), devient $G'H'$.

L'équation suivante permet de déterminer sa déformation normale ε_x [11].

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{G'H' - GH}{GH} && \text{avec } GH = LJ \text{ et } LJ = L'J' \\ \varepsilon_x &= \frac{G'H' - I'J'}{I'J'} \\ \varepsilon_x &= \frac{(\rho - y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} \\ \varepsilon_x &= -\frac{y}{\rho}\end{aligned}\tag{II.13}$$

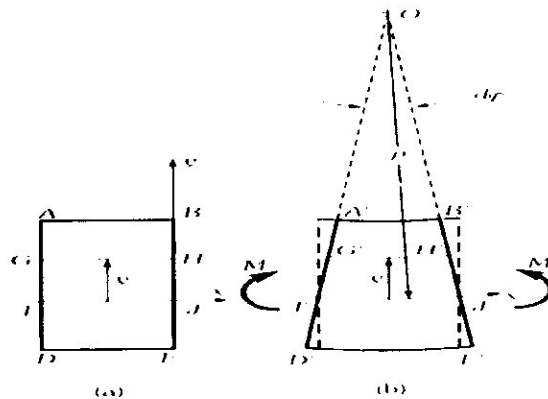


Figure II-10 : Etude de la déformation de élément ABDE de la poutre de la Figure II-9 ($M > 0$) [8].

L'équation II.13 révèle que :

- la déformation normale ε_x varie linéairement en fonction de y ;
- pour un moment fléchissant M positif, les fibres supérieures ($y > 0$) se rétrécissent (déformation négative : compression), et les fibres inférieures s'allongent (déformation positive : tension).

D'après la loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \varepsilon$ d'où $\sigma = -\frac{E}{\rho} y$ (II.14)

II.3.5.2. Equilibre

On applique les équations d'équilibres, **Figure (II-11)** [11] :

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (II.15)$$

$$\sum F_y = 0 \quad , \quad \int_A \tau_{xy} dA = 0 \quad (II.16)$$

$$\sum F_z = 0 \quad , \quad \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (II.17)$$

$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \int_A \tau_{xz} y dA - \int_A \tau_{xy} z dA = 0 \quad (II.18)$$

$$\sum M_y = 0 \quad , \quad \int_A \sigma_x z dA = 0 \quad (II.19)$$

$$\sum M_z = 0 \quad , \quad \int_A \sigma_x y dA + M = 0 \quad (II.20)$$

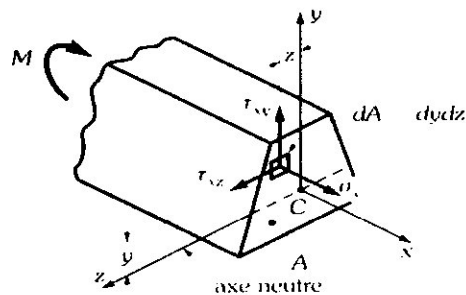


Figure II-11 : Contrainte agissant sur une surface élémentaire de la section droite [11].

II.3.5.3 Expression de la contrainte normale

L'équation (II.15) combinée avec l'équation (II.14) donne :

$$\int_A \left(-\frac{E}{\rho} y\right) dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad (II.21)$$

(Pour E= constant)

$$\text{Or, puisque } \frac{E}{\rho} \neq 0, \text{ il en résulte que : } \int_A y dA = 0 \quad (\text{II.22})$$

Il faut donc que l'axe des x passe par le centre de gravité G de la section (figure II-11).

L'équation (II.19) combinée avec l'équation (II.14) donne :

$$\int_A \left(-\frac{E}{\rho} yz \right) dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\text{or } \frac{E}{\rho} \neq 0 \Rightarrow \int_A yz dA = 0 \quad (\text{II.24})$$

Le plan de flexion xy coïncide avec un axe principal de la section.

Enfin, en combinant l'équation (II.20) et l'équation (II.14) on obtient :

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \quad (\text{II.25})$$

Or, $\int_A y^2 dA$ c'est le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre Z .

$$M = \frac{E}{\rho} \cdot I_z, \text{ soit } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Où : } I_z = \int_A y^2 dA \quad (\text{II.27})$$

Pour obtenir la contrainte, on combine l'équation (II.26) avec l'équation (II.14), ce qui

$$\text{donne : } \sigma_x = -\frac{M}{I_z} \cdot y \quad (\text{II.28})$$

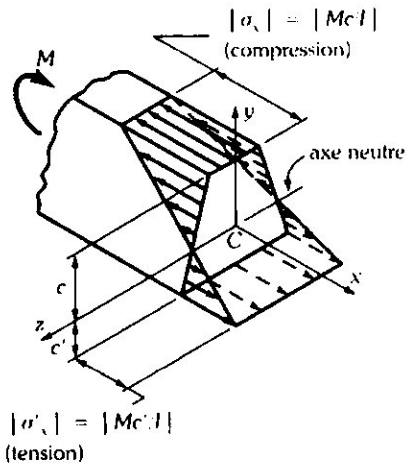


Figure II-12 : Répartition des contraintes en flexion pure ($M > 0$) [8].

La **Figure II-12** illustre la répartition des contraintes données par l'équation (II.28), dans le cas d'un moment fléchissant M positif. La contrainte varie de façon linéaire, d'une compression maximale (à la fibre supérieure) à une tension maximale (à la fibre inférieure), en passant par zéro (à la fibre neutre) [11]. Si :

$$c = |y|_{\max} \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II.28) donne la plus grande valeur absolue de la contrainte.

$$|\sigma_x|_{\max} = \frac{M}{I} c \quad (\text{II.30})$$

II.3.6 Contrainte due à l'effort tranchant (FLEXION SIMPLE)

La flexion pure ($T=0$) est un cas particulièrement intéressant, qui nous a permis d'obtenir, à partir de considérations géométriques et symétriques simples, l'expression de la relation entre la contrainte normale et le moment fléchissant (équation II.28). Cette relation, malgré sa simplicité, est rigoureusement « exacte ». Bien qu'il soit rare, en pratique, que des poutres soient soumises à une flexion pure, il faut se rappeler que, dans une poutre soumise à une charge quelconque, le moment fléchissant passe par un maximum (ou un minimum) lorsque l'effort tranchant est nul. L'équation II.28 est par conséquent directement applicable au calcul de la contrainte dans les zones critiques de la poutre [11].

Nous allons maintenant aborder l'étude de la contrainte due à l'effort tranchant ($T \neq 0$; flexion simple). L'équation II.28 n'est donc pas strictement exacte lorsque l'effort tranchant n'est pas nul ; la solution est par conséquent approximative, puisqu'on fait quand même appel

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} = \frac{T}{I} \int_{A'} y dA \tag{II.34}$$

Dans l'équation II.34 l'intégrale représente le moment statique S de la sous-section A' par rapport à l'axe des z. De façon générale, on peut évaluer la distance \bar{y}' entre le centre de gravité de la sous-section A' et l'axe neutre (Figure II-13-e), et calculer directement le moment statique S. Ainsi

$$S = \int_{A'} y dA = A' \bar{y}' \tag{II.35}$$

Le rapport $\Delta F_x / \Delta x$, qui représente la force de cisaillement moyenne par unité de longueur, au plan de coupe, est appelé *flux de cisaillement* q_{yx} . Les indices indiquent qu'il s'agit d'un flux de cisaillement agissant sur une face normale à y, dans la direction x :

$$q_{yx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta x} = \frac{ST}{I} \tag{II.36}$$

On peut également calculer la contrainte de cisaillement moyenne qui agit au plan de coupe (Figure II-13-f) :

$$\tau_{yx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \frac{\Delta F_x}{b \Delta x} = \frac{q_{yx}}{b} = \frac{ST}{Ib} \tag{II.37}$$

Où b est la largeur de la poutre au plan de coupe considéré.

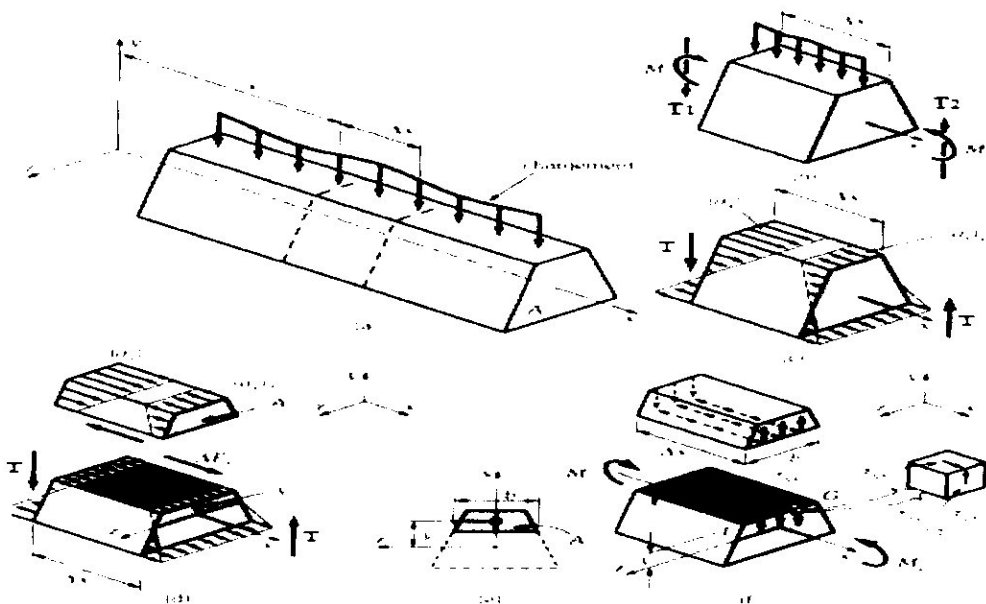


Figure II-13 : Étude de la contrainte de cisaillement produite à une section longitudinale (y=y') sous l'effet de l'effort tranchant T [11].

II.4 Méthodes énergétiques

Dans cette partie, on présente des théorèmes qui permettent, en utilisant l'énergie emmagasinée dans une structure, de calculer des déplacements. Ces méthodes sont d'un usage plus agréable.

II.4.1 Energie de déformation concernant des cas particuliers

On reprend l'expression de l'énergie de déformation U dans le cas d'un élément de volume V soumise à un ensemble de contraintes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ on a :

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dV \quad (\text{II.38})$$

On peut également reprendre l'expression de l'énergie en fonction des contraintes et des déformations $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$; ainsi :

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (\text{II.39})$$

Il est aisé de démontrer en utilisant les équations que l'expression de l'énergie en fonction des seules déformations va comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

$$\text{Avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.41})$$

Donc

$$U = \int_V \left[\frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dV \quad (\text{II.42})$$

II.4.1.1 Premier cas particulier : la tension

Soit un barreau, de longueur L et de section A , soumis à une force de tension P à chaque extrémité, Si l'axe du barreau est l'axe des x , on a $\sigma_x = P/A$. Les autres contraintes étant toutes nulles [10], l'équation (II.38) devient :

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \frac{1}{2E} \int_0^L \left(\frac{P}{A}\right)^2 A dx = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (\text{II.43})$$

II.4.1.2 Deuxième cas particulier : la flexion

Soit une poutre droite, de longueur L et de second moment de section (moment d'inertie) I soumise à des charges transversales engendrant une flexion. On peut démontrer que, dans la plupart des cas, l'énergie reliée aux contraintes de cisaillement est négligeable, comparativement à l'énergie associée à la contrainte normale. Par conséquent, lorsque l'axe des x correspond à l'axe longitudinale de la poutre [10], si on considère que $\sigma_x = -My/I$ et que les autres contraintes sont nulles, l'équation (II.38) s'écrit comme suit :

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dV = \int_0^L \left[\frac{M}{2EI^2} \int_A y^2 dA \right] dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{II.44})$$

II.4.1.3 Troisième cas particulier : La torsion

De la même manière que pour la flexion, on peut montrer que, pour un cylindre de longueur L soumis à un couple de torsion M_T à ses extrémités [10], l'énergie s'exprime ainsi :

$$U = \int_0^L \frac{M_T^2}{2GJ} dx = \frac{M_T^2 L}{2GJ} \quad (\text{II.45})$$

Où J est le second moment polaire de la section.

II.4.2 Théorème de CASTIGLIANO

Le théorème de Castigliano permet de déterminer le déplacement linéaire, ou angulaire, en un point donné d'une structure. Nous avons, bien sûr, déjà mis au point certaines méthodes, mais celles-ci ne sont efficaces que pour des cas particuliers. Le théorème de Castigliano, par contre, s'applique à tous les cas ; il représente donc un outil de premier ordre.

Considérons de nouveau le corps élastique de la **figure II-14**, pour lequel le système qui comporte les forces concentrées $P_i (i = 1, \dots, n)$ et les réactions constitue le système I.

Augmentons la valeur d'une force quelconque (par exemple P_R) d'une petite quantité ΔP_R . L'ensemble comportant l'augmentation de charge ΔP_R et les variations des réactions constitue le système II [10].

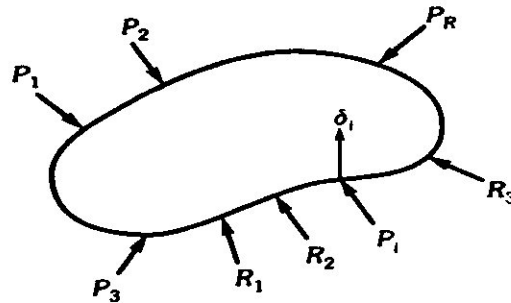


Figure II-14 : Corps élastique soumis à des charges concentrées [10]

Si on applique le théorème de la réciprocité (équation II.45), on obtient ce qui suit :

$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i)_I \cdot (\Delta \bar{\delta}_i)_{II} = (\Delta \bar{P}_R)_{II} \cdot (\bar{\delta}_R)_I \quad (\text{II.46})$$

Où $(\Delta \bar{\delta}_i)_{II}$ représente le déplacement du point d'application de la force P_i (déplacement causé par l'augmentation de charge à (ΔP_R) et $(\delta_R)_I$, le déplacement du point d'application de la force P_R (déplacement dû à l'ensemble des forces initiales).

On calcule ensuite l'accroissement de l'énergie de déformation ΔU qui résulte de l'augmentation de charge ΔP_R :

$$\Delta U = \frac{1}{2} (\Delta \bar{P}_R)_{II} \cdot (\Delta \delta_R)_{II} + \sum_{i=1}^N (\bar{P}_i)_I \cdot (\Delta \bar{\delta}_i)_{II} \quad (\text{II.47})$$

Dans cette équation, le premier terme correspond au travail résultant de l'action du système II, et le second, à celui résultant de l'action du système I.

A partir de l'équation (II.46), on peut remplacer le second terme de droite de l'équation (II.47) par son équivalent ; l'équation devient :

$$\Delta U = \frac{1}{2} (\Delta \bar{P}_R)_{II} \cdot (\Delta \delta_R)_{II} + (\Delta \bar{P}_R)_{II} \cdot (\bar{\delta}_R)_I \quad (\text{II.48})$$

Si on supprime les indices I et II, qui ne sont plus nécessaires, et si on divise par ΔP_R , on obtient :

$$\frac{\Delta U}{\Delta P_R} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{P}_R}{\Delta P_R} \cdot \Delta \delta_R + \frac{\Delta \bar{P}_R}{\Delta P_R} \cdot \bar{\delta}_R \quad (\text{II.49})$$

A la limite, lorsque $\Delta P_R \rightarrow 0$, le premier terme de droite disparaît, puisque $\Delta \delta_R \rightarrow 0$. Dès lors, on peut écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial P_R} = \lim_{\Delta P_R \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{P}_R}{\Delta P_R} \cdot \bar{\delta}_R \right) \quad (\text{II.50})$$

Où, $\bar{\Delta P}_R / \Delta P_R$ représentée, à la limite, le vecteur unitaire dans la direction de P_R .

Le produit scalaire de δ_R par ce vecteur unitaire fournit la composante de déplacement du point d'application de P_R , dans la direction de P_R . On appelle cette composante δ_R et, d'après l'équation (II.50), on peut déterminer la relation fondamentale du théorème de Castigliano :

$$\frac{\partial U}{\partial P_R} = \delta_R \quad (\text{II.51})$$

Lequel s'énonce ainsi ; «Le taux de variation de l'énergie de déformation d'un corps, par rapport à toute force indépendante P_R , est égal à la flèche δ_R au point d'application de cette force, dans la direction de la force. »

Il est important de préciser que la charge P_R doit être indépendante des autres charges externes.

De façon identique, il est possible de montrer qu'on obtient, avec un moment concentré M_R :

$$\frac{\partial U}{\partial M_R} = \theta_R \quad (\text{II.52})$$

Où θ_R est l'angle de rotation autour de l'axe du moment, au point d'application du moment.

Les systèmes mécaniques à résoudre dans ce chapitre seront habituellement composés de « n » membrures sollicitées simultanément par des charges axiales, des moments de torsion et des moments de flexions. Selon les équations II.43, II.44 et II.45, l'énergie totale de déformation du système aura la forme suivante :

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{P_i^2}{2E_i A_i} L_i + \sum_{i=1}^n \frac{M_{T_i}^2}{2G_i J_i} L_i + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{2E_i I_i} dx \quad (\text{II.53})$$

Lorsqu'on applique le théorème de Castigliano, il est plus simple de l'appliquer directement à l'équation II.43, ce qui évite d'avoir à calculer le carré des efforts internes dans les membrures [10]. Par exemple, le déplacement du point d'application d'une force Q correspondra à :

$$\delta_Q = \frac{\partial U}{\partial Q} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q} \right)}{E_i A_i} L_i + \sum_{i=1}^n \frac{M_{T_i} \left(\frac{\partial M_{T_i}}{\partial Q} \right)}{G_i J_i} L_i + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_i \left(\frac{\partial M_i}{\partial Q} \right)}{E_i I_i} dx \quad (\text{II.54})$$

II.4.3.1 Application aux systèmes isostatiques

Le principal intérêt du théorème de Castigliano est d'être applicable quelle que soit la complexité du problème. Par exemple, dans le cas d'une poutre de section variable, il suffit d'introduire cette variable sous l'intégrale. Cette solution sera beaucoup plus facile qu'une autre utilisant les fonctions de singularités, par exemple.

Dans un autre domaine, celui du calcul des déplacements des fermes le théorème de Castigliano est nettement supérieur aux méthodes plus classiques que nous avons étudiées précédemment [10].

II.4.2.2 Application aux systèmes hyperstatiques

Le théorème de Castigliano peut également s'appliquer aux systèmes hyperstatiques. Il suffit de déterminer les forces internes en fonction des réactions surabondantes et d'exprimer les relations cinématiques avec les dérivées partielles appropriées de l'énergie [8].

II.4.3 Effets de l'effort tranchant

Au ce chapitre, nous avons vu qu'il est possible en flexion d'avoir une contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant. Cette contrainte contribue elle aussi à une partie de l'énergie de déformation absorbée par une poutre en flexion.

D'après l'équation II.48, on a, si on considère un élément de volume $dA dx$:

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^L \int_A \tau^2 dA dx \quad (\text{II.55})$$

Contrairement à la contrainte normale, la répartition de la contrainte de cisaillement dans une poutre dépend largement de la géométrie sa section. Même pour les géométries les plus simples, l'équation (II.55) donne lieu à un calcul de l'énergie de déformation fastidieux. Pour simplifier, considérons une contrainte de cisaillement moyenne $\tau_m = T/A_c$, où A_c est l'aire sur laquelle agit cette contrainte moyenne et où T est l'effort tranchant. Lorsqu'on insère cette contrainte dans l'équation II.55, on a :

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^L \tau_m^2 A_c dx = \frac{1}{2G} \int_0^L \frac{T^2}{A_c} dx \quad (\text{II.56})$$

Pour déterminer l'aire A_c , on établit l'égalité des équations II.46 et II.45. On obtient :

$$A_c = \frac{T^2}{\int_A \tau^2 dA} \quad (\text{II.57})$$

L'aire A_c est dite « aire effective en cisaillement ». La Figure II-15 donne les valeurs de cette aire pour les sections les plus utilisées. Lorsqu'on connaît l'aire A_c , on peut calculer facilement l'énergie de déformation due à l'effort tranchant à l'aide de l'équation II.57. Selon le théorème de Castigliano, le déplacement du point d'application d'une force Q , en considérant l'énergie de déformation associée à l'effort tranchant, est :

$$\delta_Q = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \frac{T}{G A_c} \frac{\partial T}{\partial Q} dx \quad (\text{II.58})$$

Pour le tube à paroi mince de section rectangulaire (d) et pour la poutre en I (e), la valeur indiquée dans la figure est relativement précise même s'il s'agit d'une approximation. Les expressions donnant les valeurs exactes sont longues et peu utilisées en pratique. De plus, on notera que l'aire effective en cisaillement varie selon la direction de l'effort tranchant. Ainsi, A_{cy} est l'aire effective en cisaillement pour un effort tranchant T_y [10].

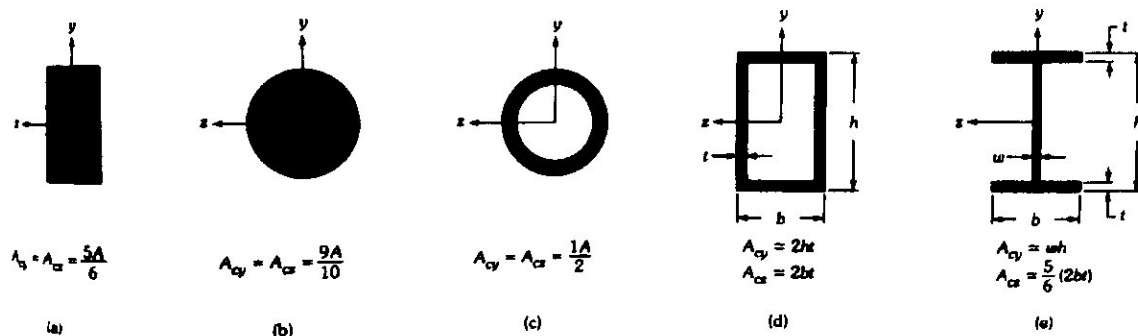


Figure II-15 : Aires effectives en cisaillement des sections les plus utilisées [10].

A : aire de la section.

II.5 Flèche sous l'effet de l'effort tranchant

Nous avons couvert les différentes méthodes couramment utilisées pour évaluer la flèche d'une poutre sous l'effet du moment fléchissant, cette flèche représente le déplacement latéral des poutres longues et minces.

Cependant, pour les poutres courtes, comme dans les cas des dents d'engrenages, l'effet de l'effort tranchant sur la flèche n'est pas négligeable.

Lorsqu'une poutre au comportement élastique est soumise à un chargement qui provoque une flexion, son axe longitudinal (ou sa fibre neutre) se déplace (appelé flèche) qui se produit selon la direction transversale à l'axe longitudinal, varie en intensité tout le long de la poutre.

La rigidité de flexion d'une poutre est caractérisée par l'intensité de sa flèche sous l'effet d'un chargement donné.

Cependant, même dans le cas où c'est la résistance qui prime, il est important de s'assurer que la poutre possède une flèche qui soit déçue des limites permettant d'assurer le bon fonctionnement de la structure ou de la machine dont la poutre fait partie.

II.6 conclusion

La méthode RDM nous permet d'étudier des structures simples avec des caractéristiques géométriques facile à trouver analytiquement, mais dans le cas où les structures sont complexes on se trouve face à une insuffisance des outils mathématiques pour cela on s'est tourné vers la méthode des éléments finis.



Chapitre III

Eléments finis

III.1 Introduction

La méthode des éléments finis (MÉF) est une manière numérique pour résoudre certains problèmes physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées.

La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

Dans ce chapitre, on va aborder la méthode des éléments finis pour la détermination de la matrice de rigidité ainsi la relation entre les déformations et les déplacements et de même pour la relation entre les contraintes et les déplacements des poutres en flexion simple, dans un premier stade on va calculer la matrice de rigidité en négligeant l'effet de l'effort tranchant, par la suite on prend en considération l'effet de l'effort tranchant.

III.2 Élément de poutre (sans l'effet de l'effort tranchant)

Dans un premier temps, nous négligerons la déformation due à l'effort tranchant.

III.2.1 Définition

Une poutre est une membrure prismatique mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe impliquant la flexion. Il en résulte un déplacement transversal et une rotation à chaque extrémité. La **figure III-1** illustre un élément de poutre ayant un nœud par extrémité. Chacun des nœuds possède deux degrés de liberté : un déplacement transversal (flèche) et une rotation.

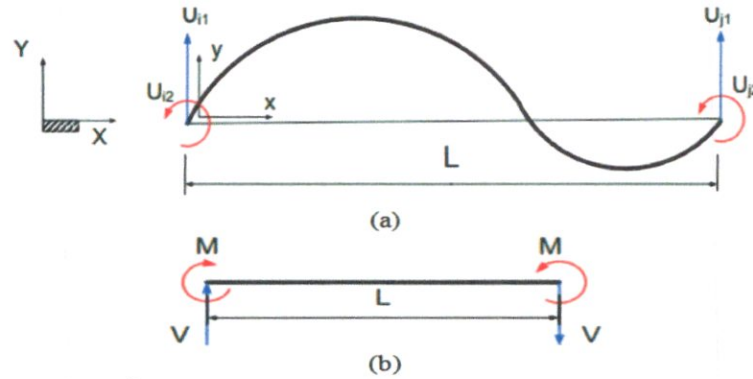


Figure III-1 : (a) Élément de poutre avec les déplacements, rotations, forces et moments positifs; (b) Convention des signes pour l'effort tranchant et moment fléchissant positifs selon la théorie des poutres [12].

La convention suivante est applicable à chacun des nœuds. Par exemple au nœud i :

- (F_{i1}) La force suivant la direction positive de l'axe y est positive ;
- (U_{i1}) le déplacement transversal (flèche) suivant la direction positive de l'axe y est positif ;
- (F_{i2}) moment de direction antihoraire est positif ;
- (U_{i2}) l'angle de rotation ou pente de la courbe élastique de la poutre de direction antihoraire est positive [12].

III.2.2 Discrétisation

Les champs à discrétiser sont [12] :

- La flèche $v(x)$ et la pente de la courbe élastique

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} \quad (\text{III.1})$$

- Relation déformation-déplacement

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d^2v(x)}{dx^2} \text{ (Navier-Bernouilli)} \quad (\text{III.2})$$

Où y est la distance entre la fibre par rapport à l'axe neutre de la poutre.

- Moment fléchissant :

$$M(x) = EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (\text{III.3})$$

Où E est le module d'élasticité et I est le moment d'inertie (le second moment de la section).

- Effort tranchant :

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = EI \frac{d^3v(x)}{dx^3} \quad (\text{III.4})$$

- Charge répartie :

$$q(x) = \frac{dV(x)}{dx} = EI \frac{d^4v(x)}{dx^4} \quad (\text{III.5})$$

III.2.3 Loi de comportement

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x) \quad (\text{III.6})$$

III.2.4 Détermination de la matrice de rigidité $[K]$ en coordonnées locales

Soit une membrure divisée en éléments finis [13] :

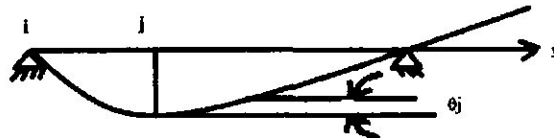


Figure III-2 : Une membrure divisée en éléments finis [13].

Comme : $\theta_j \ll$ alors

$$\tan \theta_j = \theta_j = \left(\frac{dv}{dx} \right)_j \quad (\text{III.7})$$

Dans le cas d'un élément de poutre, on choisit un degré de liberté le déplacement vertical, ainsi que la poutre correspondante.

De cette façon on aura quatre degrés de liberté au minimum.

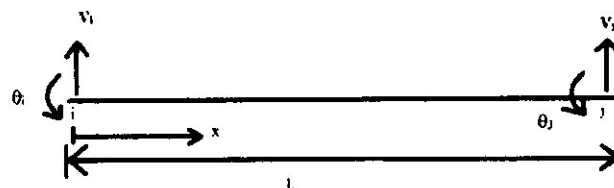


Figure III.3 : Élément de poutre avec quatre d.d.l [13].

L'approximation qu'on fait pour le déplacement est un polynôme de troisième degré, c'est-à-dire quatre constants à déterminer (4 degré de liberté) :

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad (\text{III.8})$$

Alors :

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [g(x)]\{c\} \quad (\text{III.9})$$

La détermination des constants C_1, C_2, C_3 et C_4 revient à poser les conditions aux limites :

$$\begin{cases} v(x=0) = v_i \\ \theta(x=0) = \theta_i \\ v(x=L) = v_j \\ \theta(x=L) = \theta_j \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Avec :

$$\theta = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 \quad (\text{III.11})$$

On obtient :

$$\begin{cases} v(x=0) = v_i = C_1 \\ \theta(x=0) = \theta_i = C_2 \\ v(x=L) = v_L = C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 \\ \theta(x=L) = \theta_L = C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Sous la forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [H]\{C\} \quad (\text{III.13})$$

Où :

$$\{q\} = [H]\{C\} \Leftrightarrow \{C\} = [H]^{-1}\{q\} \quad (\text{III.14})$$

On a :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [H]^{-1} = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & L^3 \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Remplacent (III.15) dans (III.14) ensuite dans (III.9) on obtient :

$$v(x) = [G][H]^{-1}\{q\} \quad (\text{III.16})$$

On pose :

$$[F(x)] = [G][H]^{-1} \quad (\text{III.17})$$

Alors (III.16) devient :

$$v(x) = [F(x)]\{q\} \quad (\text{III.18})$$

L'équation (III.17) donne :

$$[F(x)] = [G][H]^{-1} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & L^3 \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$$[F(x)] = \frac{1}{L^3} \{2x^3 - 3x^2L + L^3 \quad x^3L - 2x^2L^2 + L^3x \quad -2x^3 + 3x^2L \quad x^3L - x^2L^2\} \quad (\text{III.20})$$

Alors :

$$v(x) = \{N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)\}\{q\} \quad (\text{III.21})$$

III.2.4.1L'interpretation physique des fonctions $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ et $N_4(x)$:

1. Pour obtenir $N_1(x)$, on fixe le déplacement de nœud (j), ainsi que les rotations des nœuds (i, j) et on donne un déplacement d'unité au nœud (i) :

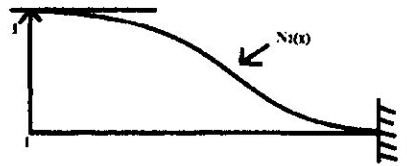


Figure III-4 : La courbe de la fonction $N_1(x)$ [13].

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_j = 0 \\ v_j = 0 \\ v_i = 1 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

2. La fonction $N_2(x)$ est obtenue on faisant fixé les deux déplacements des nœuds (i, j), ainsi que la rotation du nœud (j) :

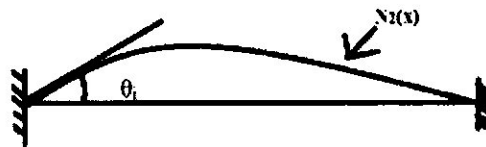


Figure III.5 : La courbe de la fonction $N_2(x)$ [13].

$$\begin{cases} v_i = v_j = 0 \\ \theta_j = 0 \\ \theta_i = 1 \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

3. De même méthode $N_3(x)$ est obtenue pour :

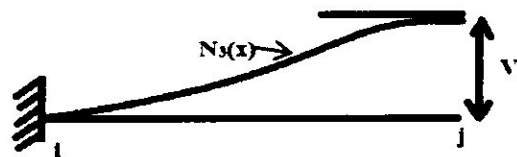


Figure III.6 : La courbe de la fonction $N_3(x)$ [13].

$$\begin{cases} v_i = 0 \\ \theta_i = \theta_j = 0 \\ v_j = 1 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

4. La fonction $N_4(x)$ est obtenue pour :



Figure III-7 : La courbe de la fonction d'interpolation $N_4(x)$ [13].

$$\begin{cases} v_i = v_j = 0 \\ \theta_i = 0 \\ \theta_j = 1 \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Remarque :

$$N_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

III.2.4.2 Relation entre déformation et déplacement verticale

Les déformations $\varepsilon(x)$ aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la dérivée de la fonction de déplacement.

$$\varepsilon = \frac{dv}{dx} \quad (\text{III.27})$$

D'après la théorie de flexion des poutres on a :

$$\begin{cases} M(x) = -EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \\ \sigma(x) = \frac{M(x)}{I_z} y \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{M(x)}{I_z} y \right) \\ &= \frac{1}{E} \frac{y}{I_z} \left(-EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \right) = -y \frac{d^2v}{dx^2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{III.29})$$

D'autre part :

$$v(x) = [F]\{q\} \quad (\text{III.30})$$

Alors :

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d^2}{dx^2} ([F]\{q\})$$

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d^2 F}{dx^2} \{q\} \quad (\text{III.31})$$

On pose :

$$[B] = -y \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (\text{III.32})$$

Alors (III.31) devient :

$$\varepsilon(x) = [B]\{q\} \quad (\text{III.33})$$

D'où :

$$\delta\varepsilon = [B]\{\delta q\} \quad (\text{III.34})$$

On dérivant deux fois la fonction d'interpolation on obtient :

$$[B] = -\frac{y}{L^3} \{12x - 6L, 6xL - 4L^2, -12x + 6L, 6xL - 2L^2\} \quad (\text{III.35})$$

III.2.4.3 Relation entre contrainte et déplacement

Les propriétés élastiques de l'élément nous permettent de visualiser la dépendance entre les contraintes $\{\sigma(x)\}$ et les déformations $\{\varepsilon(x)\}$ par la relation suivante :

$$\{\sigma(x)\} = [E]\{\varepsilon(x)\} \quad (\text{III.36})$$

Pour notre cas on a :

$$\begin{cases} [E] = E \\ \{\sigma(x)\} = \sigma(x) \\ \{\varepsilon(x)\} = \varepsilon(x) \end{cases}$$

Alors (III.36) devient :

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x) \quad (\text{III.37})$$

Remplacent l'équation (III.33) dans (III.37) on obtient :

$$\sigma(x) = E[B]\{q\} \quad (\text{III.38})$$

III.2.4.4 Relation entre charge nodale et déplacement nodaux

Le travail externe produit par les charges nodales doit être égal au travail interne des contraintes :

Le travail externe des forces nodales du a un déplacement virtuel est :

$$\delta w_e = \{\delta q_1\}p_1 + \{\delta q_2\}p_2 + \dots + \{\delta q_n\}p_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{principe de} \\ \text{superposition} \end{array} \right) \quad (\text{III.39})$$

Qui devient :

$$\delta w_e = (\delta q)^t \{p\} \quad (\text{III.40})$$

Le travail virtuel interne par unité de volumes est :

$$\delta v_i = \int_v (\delta \varepsilon)^t \sigma dv \quad (\text{III.41})$$

Remplaçant les expressions (III.34) et (III-38) dans (III.41) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta v_i &= \int_v ([B]\{\delta q\})^t (E[B]\{q\}) dv \\ &= \int_v \{\delta q\}^t [B]^t E[B]\{q\} dv \\ \delta v_i &= \{\delta q\}^t \left(\int_v [B]^t E[B] dv \right) \{q\} \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Egalisant les deux travaux (équation (III.40) = (III.42))

$$\begin{aligned} \delta w_e &= \delta v_i \\ \{\delta q\}^t \{p\} &= \{\delta q\}^t \int_v [B]^t E[B] dv \cdot \{q\} \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Qui devient :

$$\{p\} = \int_v [B]^t E[B] dv \cdot \{q\} \quad (\text{III.44})$$

Comme

$$\{p\} = [k]\{q\} \quad (\text{III.45})$$

Alors :

$$[k] = \int_v [B]^t E [B] dv \quad (\text{III.46})$$

On a :

$$[B]^t [B] = \frac{y^2}{l^6} \begin{pmatrix} 12x - 6L \\ 6xL - 4L^2 \\ -12x + 6L \\ 6xL - 2L^2 \end{pmatrix} \cdot [12x - 6L, 6xL - 4L^2, -12x + 6L, 6xL - 2L^2]$$

$$[B]^t [B] = \frac{y^2}{l^2} [S] \quad (\text{III.47})$$

$$[k] = \int_v E \frac{y^2}{l^2} [S] dv = \int_0^L \int_v E \frac{y^2}{l^2} [S] dA dx \quad (\text{III.48})$$

Sachant que :

$$\int_A y^2 dA = I_{zz'} \quad (\text{III.49})$$

Alors (III.48) devient :

$$[k] = \frac{E}{l^6} \left(\int_v y^2 dA \right) \int_0^L [S] dx \quad (\text{III.50})$$

Remplaçant (III.49) dans (III.50) on obtient :

$$[k] = \frac{EI}{l^6} \int_0^L [S]_{4 \times 4} dx \quad (\text{III.51})$$

Avec :

$$[S]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} (12x - 6L)^2 & & & & \text{SYM} \\ (6xL - 4L^2)(12x - 6L) & & (6xL - 4L^2)^2 & & \\ (-12x + 6L)(12x - 6L) & & (-12x + 6L)(6xL - 4L^2) & & (-12x + 6L)^2 \\ (6xL - 2L^2)(12x - 6L) & & (6xL - 2L^2)(6xL - 4L^2) & & (6xL - 2L^2)(-12x + 6L) & & (6xL - 2L^2)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.52})$$

Remplaçant (III.52) dans (III.51), après l'intégration on obtient :

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.53})$$

C'est la matrice de rigidité d'un élément de poutre de flexion simple [13].

Avec :

$$\{p\} = \begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Et

$$\{q\} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{(III.54)}$$

III.2.5 Les efforts tranchants (T) et les moments fléchissant (M) au nœud 1 et 2 sans chargement extérieur

- L'effort tranchant au nœud 1 :

$$T_1 = \frac{12EI}{L^3} v_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{12EI}{L^3} v_2 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \quad \text{(III.55)}$$

- Moment fléchissant au nœud 1 :

$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 \quad \text{(III.56)}$$

- L'effort tranchant au nœud 2 :

$$T_2 = \frac{-12EI}{L^3} v_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{12EI}{L^3} v_2 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \quad \text{(III.57)}$$

- Moment fléchissant au nœud 2 :

$$M_2 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{2EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{4EI}{L} \theta_2 \quad \text{(III.58)}$$

Remarque : si on a un chargement extérieur on trouvera deux valeurs de l'effort tranchant et deux valeurs du moment fléchissant pour chaque nœud. L'une pour l'élément de gauche et l'autre pour l'élément de droite.

III.2.6 Assemblage des matrices de rigidité des éléments

Après avoir établi les matrices de rigidité $[k]$ élémentaire de tous les éléments, il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir la matrice de rigidité $[k]$ de la structure complète.

Le principe est basé sur le fait que pour un nœud obtenu par assemblage de deux nœuds appartenant à deux nœuds adjacents, la force est égale à la somme des forces des deux nœuds, et ses déplacements sont identiques à ceux de chaque nœud.

On remarque que la matrice de rigidité de deux éléments est une matrice symétrique carrée d'ordre (6×6), cet ordre est dû au fait que l'élément assemblé possède trois nœuds donc six (06) degré de liberté car chaque nœud a deux degré de liberté. On procède de la même façon pour un nombre d'élément élevé.

III.3 Elément de poutre (avec l'effet de l'effort tranchant)

Considérons en flexion dans un plan principal de flexion soit (x,y) , encadrée au nœud 1 et soumise à une force Y_2 au nœud 2 .

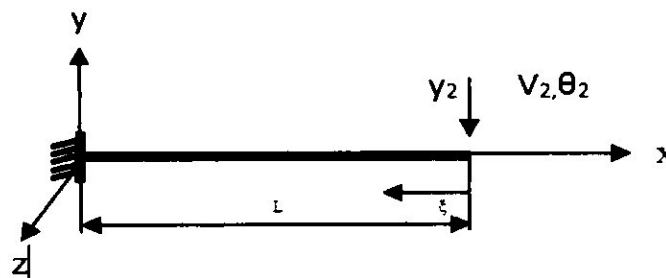


Figure III-8 : Poutre encadrée à l'une de ses extrémités et supportée une charge à son autre extrémité.

Prenons maintenant en compte la déformation due à l'effort tranchant.

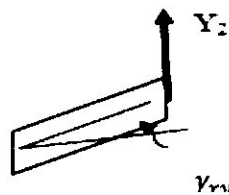


Figure III-9 : La déformation en cisaillement d'une section de la poutre [15].

La déformation en cisaillement est telle que :

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{Y_2}{K_y G S} \quad (\text{III.59})$$

Avec K_y coefficient de forme de la section au cisaillement suivant Y.

On en déduit la flèche supplémentaire ΔV_2 due à l'effort tranchant qui vient s'ajouter à la flèche due à la flexion :

$$\Delta V_2 = \gamma_{XY} L = \frac{Y_2 L}{K_Y G S} \quad (\text{III.60})$$

On peut également obtenir ce résultat d'après les considérations énergétique suivantes.

L'énergie de déformation de cisaillement s'écrit :

$$U_{T_Y} = \int_0^L \frac{K_Y G S}{2} \gamma_{XY}^2 d\xi = \int_0^L \frac{1}{2K_Y G S} T_Y^2 d\xi = \int_0^L \frac{1}{2K_Y G S} T_2^2 d\xi = \frac{Y_2^2 L}{2K_Y G S} \quad (\text{III.61})$$

En appliquant le deuxième théorème de Castigliano, on obtient la flèche supplémentaire due à l'effort tranchant, soit :

$$\Delta V_2 = \frac{\partial U_{T_Y}}{\partial Y_2} = \frac{Y_2 L}{K_Y G S} \quad (\text{III.62})$$

D'où la flèche totale en présence d'effet tranchant :

$$V_2 = \left[\frac{L^3}{3EI_Z} Y_2 + \frac{L^2}{2EI_Z} M_{x2} \right] + \Delta V_2 \quad (\text{III.63})$$

Ou encore :

$$V_2 = \frac{L^3}{3EI_Z} \left(1 + \frac{\phi_Y}{4} \right) Y_2 \quad (\text{III.64})$$

Avec :

$$\phi_Y = \frac{12EI_Z}{K_Y G S L^2} = 24(1 + \nu) \frac{I_Z}{K_Y S L^2} \quad (\text{III.65})$$

D'où la matrice de flexibilité en présence d'effet d'effort tranchant :

$$\varphi_Z = \frac{1}{EI_Z} \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} \left(1 + \frac{\phi_Y}{4} \right) & \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} & L \end{bmatrix} \quad (\text{III.66})$$

$$K_Z = \varphi_Z^{-1} = \frac{12EI_Z}{L^3 \left(1 + \frac{\phi_Y}{4} \right)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{(4 + \phi_Y)}{12} L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.67})$$

D'où le résultat final

$$K = \frac{EI_z}{L^3(1+\phi_Y)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4 + \phi_Y)L^2 & -6L & (2 - \phi_Y)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2 - \phi_Y)L^2 & -6L & (4 + \phi_Y)L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.68})$$

Avec : $\phi_Y = \frac{12EI_z}{K_Y G_s L^2}$

III.4 Conclusion

La méthode des éléments finis permet de déterminer une solution très approchée en augmentant le nombre des nœuds, mais cela peut engendrer des insuffisances sur la machine de calcul, surtout pour des structures complexes, où le nombre des itérations est vraiment important.

Chapitre IV
Applications et résultats

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va déterminer le coefficient de forme énergétique qui permet de déduire la flèche dû à l'effort tranchant des poutres encastrees-libres ayant une section circulaire par deux méthodes (analytique et numérique) et comparer les résultats obtenus, puis, on va élaborer un programme de langage fortran qui permet de calculer ce coefficient pour les sections complexes comme les profils d'aile symétriques.

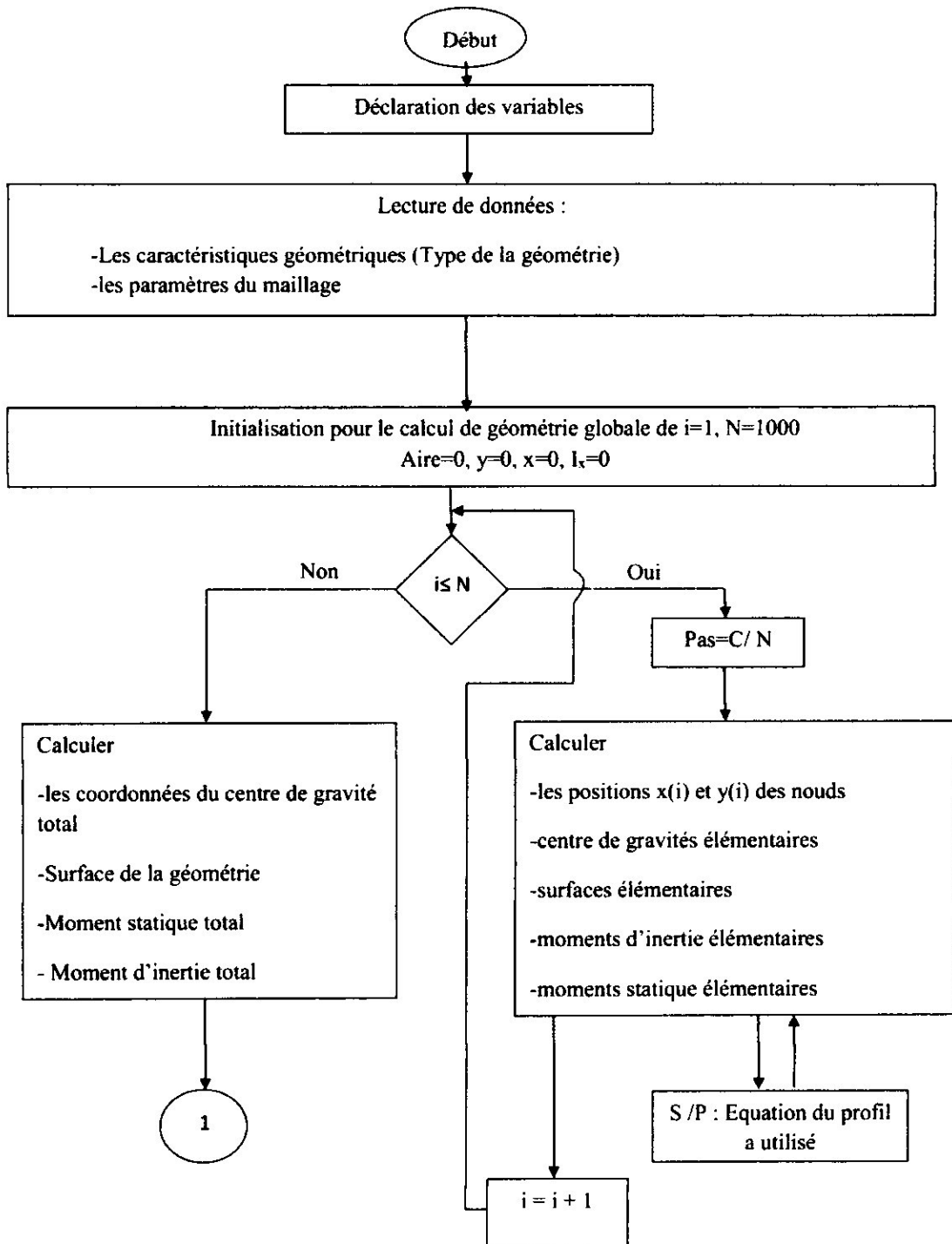
IV.2 L'organigramme

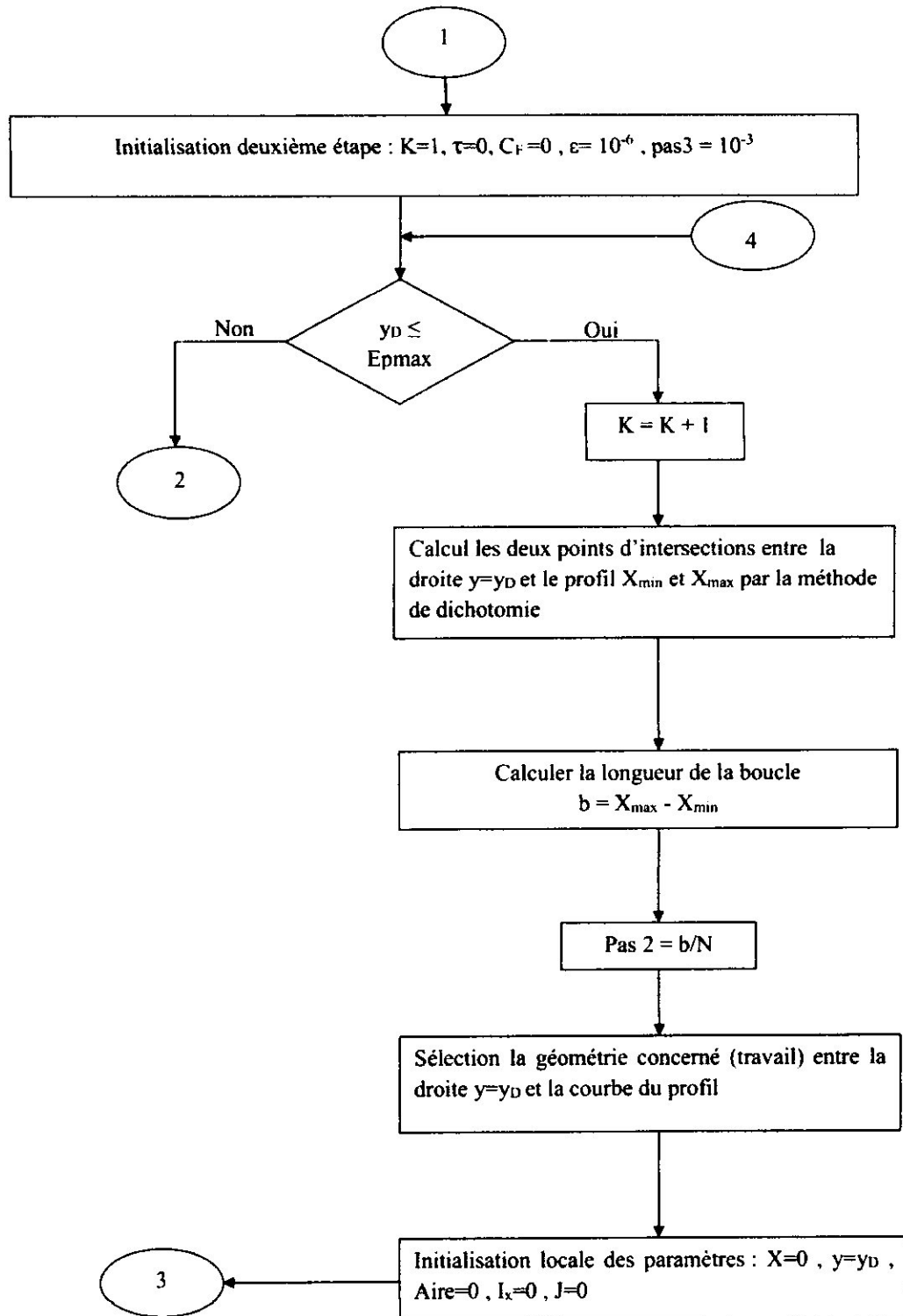
Dans cette partie, on a réalisé un programme de langage Fortran pour calculer le coefficient de forme énergétique qui est nécessaire pour la détermination de la flèche due à l'effort tranchant.

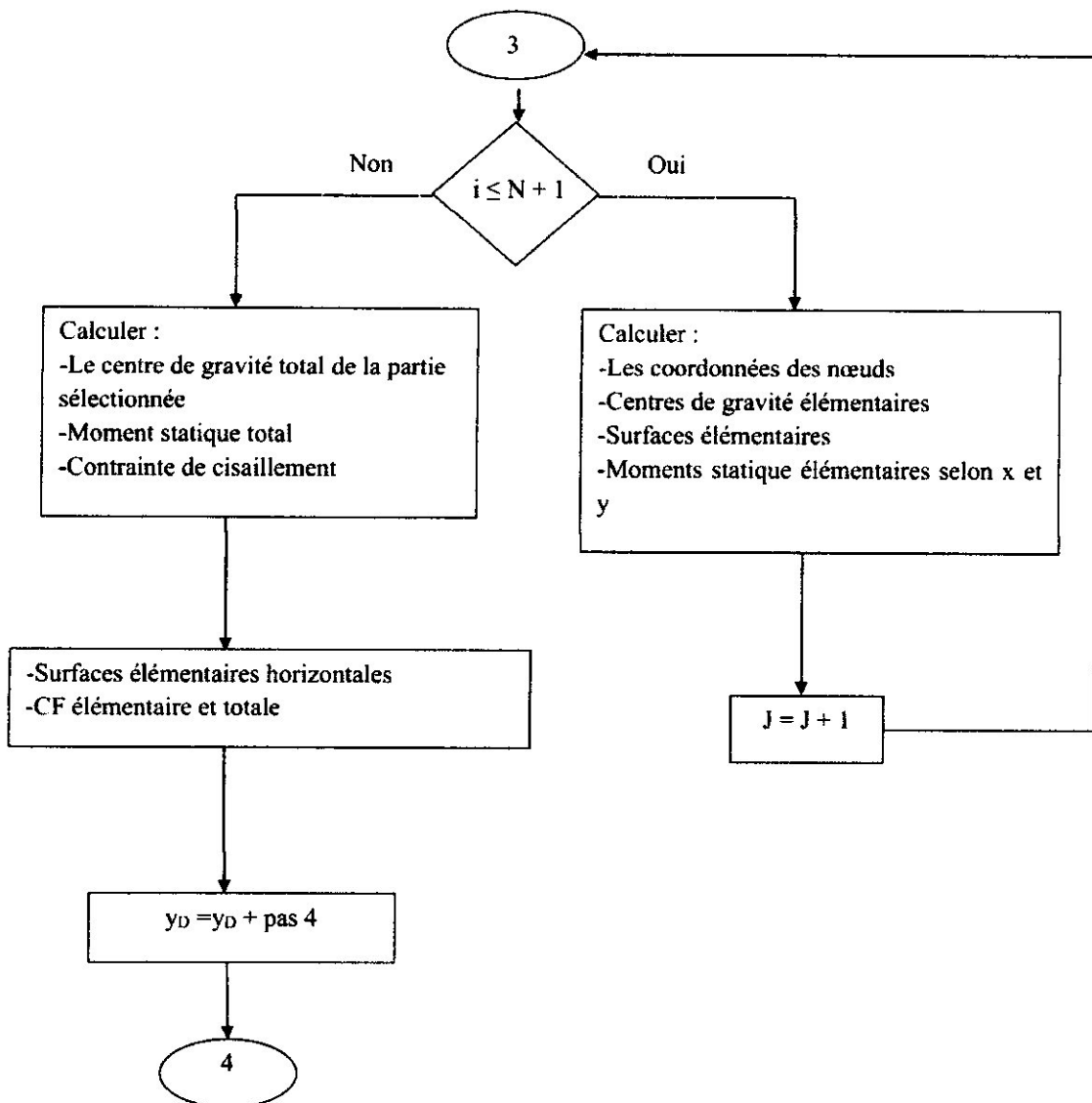
Le programme se divise en quatre parties :

- **Partie 1** : Calcul des Coordonnées du profil.
- **Partie 2** : Détermination des caractéristiques géométriques totales du profil comme le centre de gravité et le moment d'inertie...
- **Partie 3** : Calcul de la bande b et les surfaces hachuré pour déterminer le moment statique du profil.
- **Partie 4** : calcul de l'aire effective et de coefficient de forme énergétique ainsi que les déplacements sans et avec l'effet de l'effort tranchant.

On a utilisé dans le programme quelques méthodes numériques comme la méthode dichotomie pour calculer la bande b et des sous-programmes pour le calcul des cordonnées du profil, on a pris différents types de maillage.







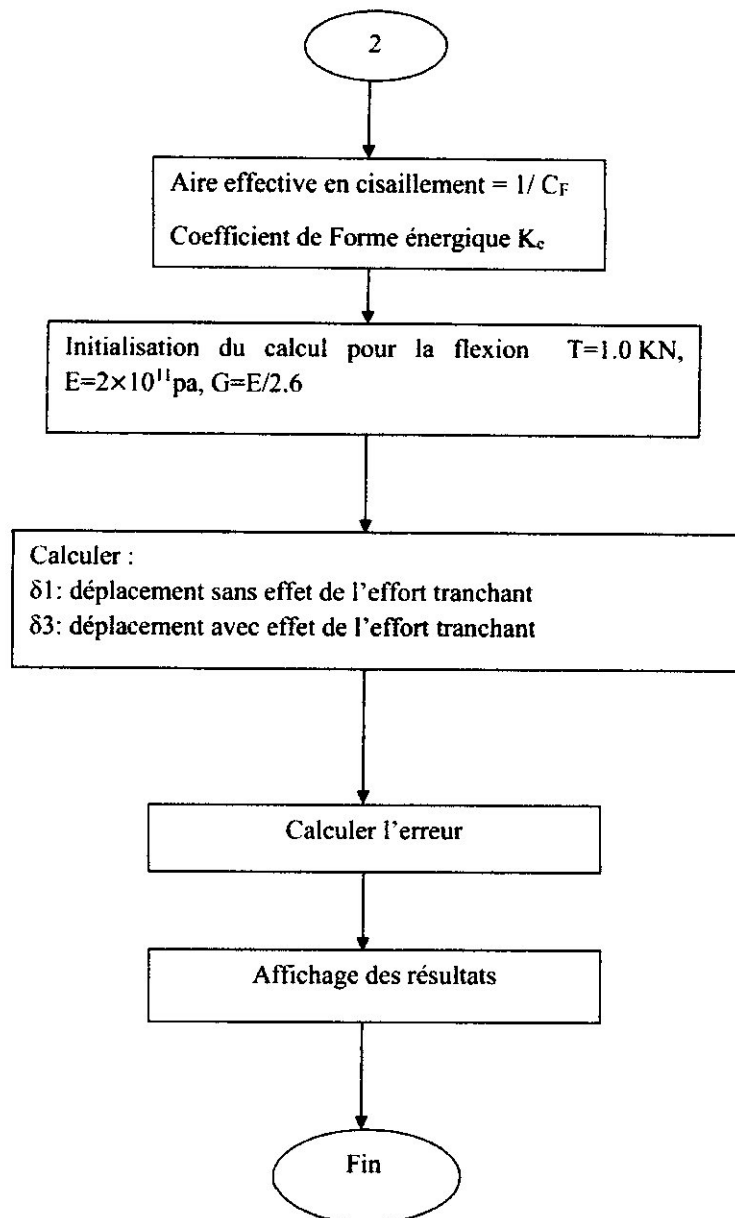


Figure IV-1: Organigramme représente les étapes utilisées.

IV.3 Cas-test (exemple d'application)

Pour valider ce travail, nous avons choisi de prendre un cas-test simple à résoudre analytiquement (une poutre encastree-libre ayant une section circulaire), puis nous avons élaboré un programme de calcul pour la résolution numérique du coefficient de forme énergétique pour cette géométrie (section circulaire), ensuite on a comparé les deux résultats analytique et numérique pour ce cas. Si les deux résultats convergent et donnent les mêmes

valeurs, ici on peut généraliser notre programme pour n'importe quelle géométrie surtout les profils d'aile.

On a une poutre d'acier en porte-à-faux (**Figure IV-2**) ayant une section circulaire plane de rayon $r = 5 \text{ mm}$, est encastée à l'une de ses extrémités et supporté une charge P de 1 N à son autre extrémité. On a les propriétés suivantes :

$$r = 0.005 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 7,69230769 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{\pi}{4} r^4 = 4,90625 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$A = 7,85 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

On demande de :

- Calculer le coefficient de forme énergétique K_e analytiquement et numériquement.
- Déterminer la flèche (le déplacement) de cette poutre avec la méthode classique et la méthode des éléments finis (sans et avec l'effet de l'effort tranchant).

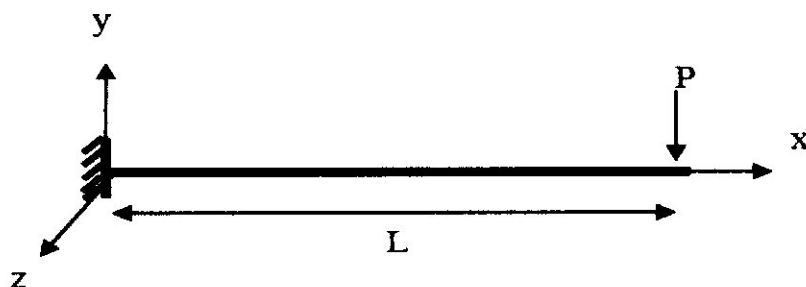


Figure IV-2 : Poutre libre-encastée soumise à une charge concentrée P .

IV.3.1 Calcul de coefficient de forme énergétique K_e :

IV.3.1.1 Par la méthode Analytique (RDM) :

- Détermination de la contrainte de cisaillement :

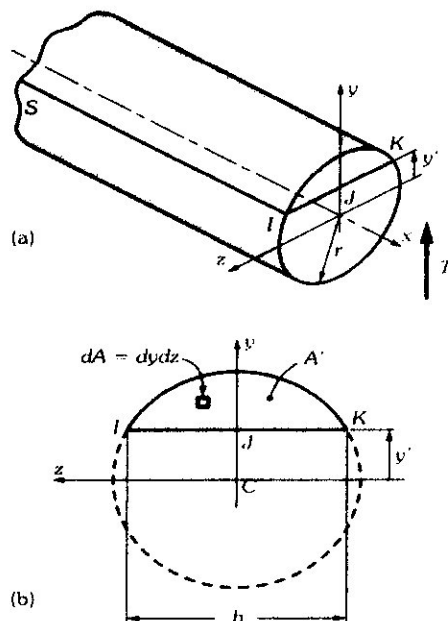


Figure IV-3: Flux de cisaillement dans une poutre à section circulaire plane.

On a :

$$q_{yx} = \frac{TS}{I} \quad (\text{IV.1})$$

Où

$$\begin{aligned} S &= \int_{A'} y dA = \iint y dy dz \\ &= 2 \int_0^{b/2} \left[\int_{y'}^{\sqrt{r^2 - z^2}} y dy \right] dz \end{aligned}$$

$$S = \frac{b}{3} (r^2 - (y')^2) \quad (\text{IV.2})$$

De là, on obtient la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q_{yx}}{b} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^4} (r^2 - (y')^2) \quad (\text{IV.3})$$

- Détermination du coefficient de forme énergétique :

On a:

$$A_c = \frac{T^2}{\int_A \tau^2 dA} \quad (\text{IV.4})$$

D'après l'équation (IV.3) :

$$\int \tau^2 dA = \frac{16}{9} \int \frac{T^2}{\pi r^8} (r^2 - y^2) dA \quad (\text{IV.5})$$

On pose que:

$$dA = R dR d\theta \quad (\text{IV.6})$$

Et

$$y = R \sin \theta \quad (\text{IV.7})$$

En remplaçant les équations (IV.6) et (IV.7) dans l'équation (IV.5) on obtient :

$$\int \tau^2 dA = \frac{10}{9} \frac{T^2}{\pi r^2} \quad (\text{IV.8})$$

Donc :

$$A_c = \frac{9}{10} A \quad (\text{IV.9})$$

$$A_c = \frac{9}{10} \times 7,85 \times 10^{-5}$$

L'aire effective en cisaillement d'une section circulaire est :

$$A_c = 7,065 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Le coefficient de forme énergétique d'une section circulaire est :

$$K_e = \frac{A_c}{A} = \frac{9}{10} = 0,9$$

IV.3.1.2 Par la méthode numérique

Tableau IV-1 : L'aire effective en cisaillement A_{CY} et le facteur de forme énergétique K_e .

A_{cy}	K_e
$7,08245727957275 \times 10^{-5}$	0,9017966995611

IV.3.1.3 Calcul d'erreur :

Pour évaluer l'erreur commise par le calcul numérique et le résultat exacte (analytique) d'un cercle en utilise la relation suivante :

$$\epsilon_{param\grave{e}tre}(\%) = \left| 1 - \frac{param\grave{e}tre\ num\acute{e}rique}{param\grave{e}tre\ exacte} \right| \times 100 \quad (IV-10)$$

Tableau IV-2 : Comparaison de l'aire effective en cisaillement entre l'analytique et numérique.

A_c	A_{CY}	$\epsilon\%$
$7,065 \times 10^{-5}$	$7.08246774784092 \times 10^{-5}$	0,2

Tableau IV-3: Comparaison du coefficient de forme énergétique entre l'analytique et numérique.

$K_{e\ exact}$	$K_{e\ num\acute{e}rique}$	$\epsilon\%$
0,9	0,901798032467163	0,2

D'après les deux tableaux (IV-1 et IV-2), on remarque que les deux résultats sont convergents et donnent presque les mêmes valeurs. Donc, on peut dire que notre programme est validé.

IV.3.2 calcul de déplacement

IV.3.2.1 Par la méthode classique

La première étape consiste à déterminer les efforts internes :

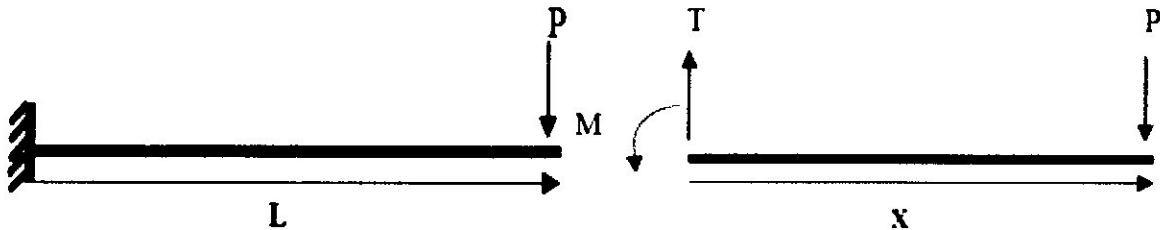


Figure IV-4 : Les efforts internes de la poutre encastree.

$$\begin{cases} M(x) = Px \\ T(x) = P \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

IV.3.2.1.1 Sans l'effet de l'effort tranchant

En negligeant l'effet de l'effort tranchant T et en utilisant l'equation (II.34), on peut obtenir l'energie de deformation de la structure associee au moment flechissant est donnee par :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI} dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L x^2 dx \quad (\text{IV.12})$$

$$U = \frac{P^2 L^3}{2EI} \quad (\text{IV.13})$$

Selon le theoreme de Gastigliano, le deplacement (δ_p) du point d'application de la force P est :

$$\delta_p = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)}{EI} dx = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2 L^3}{2EI} \right) = \frac{2PL^3}{6EI} \quad (\text{IV.14})$$

Le deplacement sans l'effet de l'effort tranchant :

$$\delta_p = \frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{IV.15})$$

IV.3.2.1.2 Avec l'effet de l'effort tranchant

Selon les equations (IV.12) et (II.56) l'energie de deformation associee au moment flechissant et a l'effort tranchant est :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \frac{1}{2G} \int_0^L \frac{V^2}{A_c} dx \quad (\text{IV.16})$$

Selon le théorème de Gastigliano, le déplacement du point d'application de la force P est :

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{2EI} \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) dx + \frac{1}{2G} \int_0^L \frac{T}{A_c} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) dx \quad (\text{IV.17})$$

En substituant l'équation (IV.1) dans l'équation (IV.16), on obtient :

$$\delta_P = \int_0^L \frac{(Px)(x)}{2EI} dx + \frac{1}{2G} \int_0^L \frac{(p)(1)}{A_c} dx \quad (\text{IV.18})$$

Le déplacement dû à l'effet de l'effort tranchant est :

$$\delta_{p=} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA_c} \quad (\text{IV.19})$$

Tableau IV-4 : La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur L (traiter par RDM).

La longueur L (m)	La flèche $\times 10^{-3}$ (m)		Erreur (%)
	Sans l'effet de l'effort tranchant	Avec l'effet de l'effort tranchant	
0,1	0,003397	0,021798	84,41545
0,5	0,424633	0,516636	17,80807
1	3,397062	3,581068	5,13829
1,5	11,46508	11,74109	2,35079
2	27,1765	27,54451	1,336061
2,5	53,0791	53,53911	0,859211
3	91,72068	92,2727	0,598245
3,5	145,775	146,475	0,477897
4	217,6	218,4	0,3663
4,5	309,825	310,725	0,289645
5	425	426	0,234742
5,5	565,675	566,775	0,194081
6	734,4	735,6	0,163132
6,5	933,725	935,025	0,139034
7	1166,2	1167,6	0,119904
7,5	1434,375	1435,875	0,104466

8	1740,8	1742,4	0,091827
8,5	2088,025	2089,275	0,08135
9	2478,6	2480,4	0,072569
9,5	2915,075	2916,975	0,065136
10	3400	3402	0,058789

IV.3.2.2 Par la méthode des éléments finis

Considérons une poutre en flexion simple dans un plan principal de flexion soit (x,y) , encastree au nœud 1 et soumise à une force $y_2 = p$ au nœud 2.

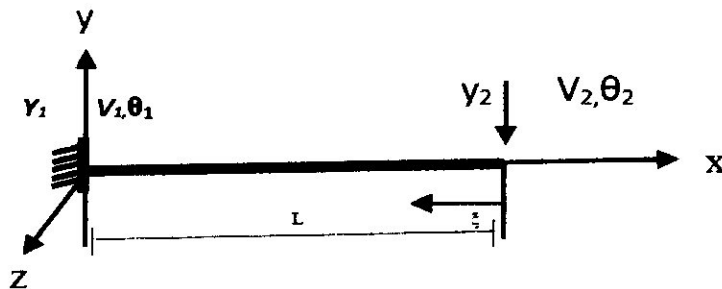


Figure IV-5 : Poutre encastree au nœud 1 et soumise une force concentree au nœud 2.

IV.3.2.2.1 Sans l'effet de l'effort tranchant

Dans un premier temps, en negligeant la deformation et le déplacement due à l'effort tranchant.

Selon les equations (III.53) et (III.54) du chapitre 3, on a :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} T_2 = -P \\ M_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Et

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

Alors :

$$T_1 = \frac{EI}{L^3} (-12v_2 + 6L\theta_2) \quad (\text{IV.23})$$

$$M_1 = \frac{EI}{L^3} (-6Lv_2 + 2L^2\theta_2) \quad (\text{IV.24})$$

$$-P = \frac{EI}{L^3} (12v_2 - 6L\theta_2) \quad (\text{IV.25})$$

$$0 = \frac{EI}{L^3} (-6Lv_2 + 4L^2\theta_2) \quad (\text{IV.26})$$

La résolution des équations (IV.23), (IV.24), (IV.25) et (IV.26) nous donne la flèche sans l'effet de l'effort tranchant :

$$v_2 = \frac{-PL^3}{3EI} \quad (\text{IV.27})$$

Remarque : le signe négative (-) de déplacement est dû au sens des axes de repère.

IV.3.2.2.2 Avec l'effet de l'effort tranchant

Prenons maintenant en compte la déformation due à l'effort tranchant.

Selon les équations (III.54) et (III.68) du chapitre 3, on a :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3(1+\phi_Y)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\phi_Y)L^2 & -6L & (2-\phi_Y)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\phi_Y)L^2 & -6L & (4+\phi_Y)L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

$$\text{Avec :} \quad \phi_Y = \frac{12EI_z}{K_Y G_S L^2}$$

En remplaçant les équations aux limites dans l'équation (IV.27) on obtient :

$$T_1 = \frac{EI_z}{L^3(1+\phi_Y)} (-12v_2 + 6L\theta_2) \quad (\text{IV.29})$$

$$M_1 = \frac{EI_z}{L^3(1+\phi_Y)} (-6Lv_2 + (2-\phi_Y)L^2\theta_2) \quad (\text{IV.30})$$

$$-P = \frac{EI_z}{L^3(1+\phi_Y)} (12v_2 - 6L\theta_2) \quad (\text{IV.31})$$

$$0 = \frac{EI_z}{L^3(1+\phi_Y)} (-6Lv_2 + (4+\phi_Y)L^2\theta_2) \quad (\text{IV.32})$$

La résolution des équations (IV.29), (IV.30), (IV.31) et (IV.32) nous donne:

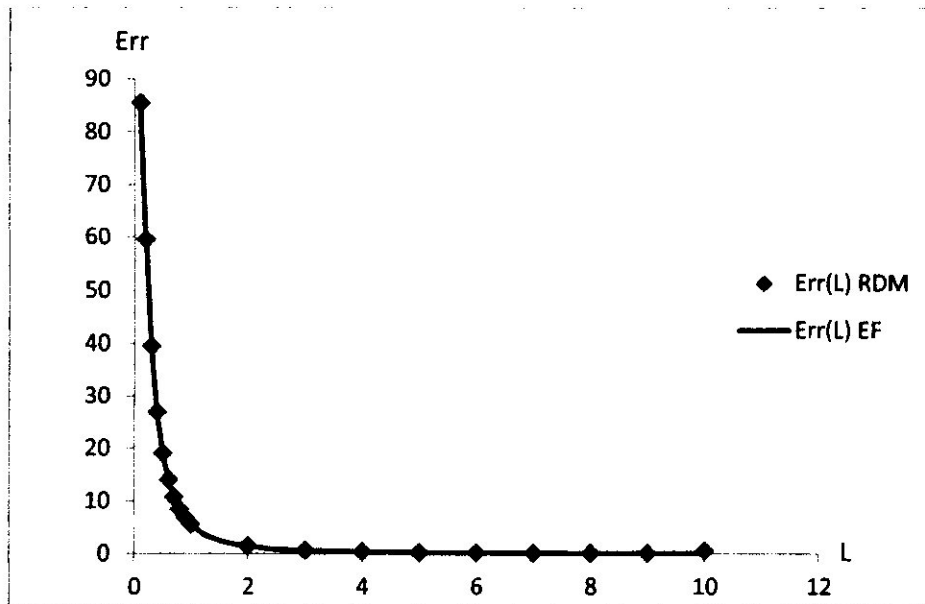


Figure IV-6 : Effet de l'effort tranchant sur la flèche totale d'une poutre en porte-à-faux soumise à une charge concentrée.

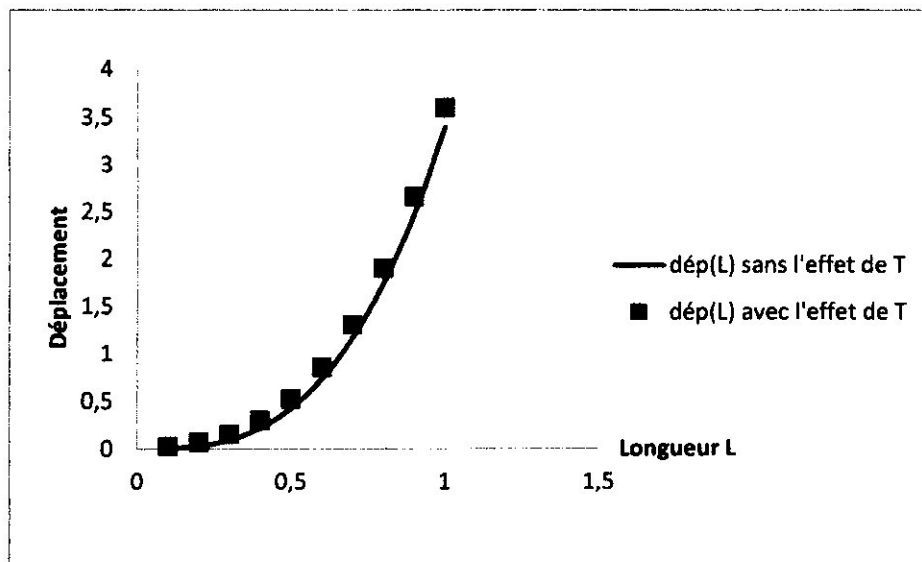


Figure IV-7 : La variation de déplacement sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur de la poutre.

- On constate une légère différence entre la courbe de variation de déplacement sans l'effort tranchant et avec l'effet de l'effort tranchant
- Il y a une relation proportionnelle entre la longueur de la poutre et le déplacement.
- Si on compare les résultats obtenus par les deux méthodes (RDM et EF), on remarque qu'ils sont les mêmes.
- D'après le graphe (figure IV-6), on remarque que la flèche due à l'effet de l'effort tranchant diminuée très rapidement lorsque la longueur de la poutre augmente.



IV.4 Application aux profils symétriques

IV.4.1 Application au profil NACA 0012

Pour ce profil, l'épaisseur maximal est égale à $t=12\%$, ou égale à 0.12. Ici la corde du profil est égale à l'unité.

Tableaux IV-6: L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0012.

A_{cy}	K_e
0,07668987057683953	0,9329260532368648

Tableau IV-7 : La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur, et le pourcentage de l'erreur entre eux du profil NACA0012.

La longueur L (m)	La flèche (m)		Erreur (%)
	Sans l'effet de l'effort tranchant	Avec l'effet de l'effort tranchant	
9,999999776482582E-003	2,447522020494679E-011	1.719614278472731E-009	98.576702897193640
5,099999997764826E-001	3,246662648843349E-006	3.333114742709471E-006	2.593732905691875
1,009999999776483	2,521684552655631E-005	2.538805457523029E-005	6.743685230652355E-001
1,509999999776483	8,426698949296280E-005	8.452295549644462E-005	3.028360780552609E-001
2,009999999776483	1,987535109326665E-004	1.990942338909562E-004	1.711365274778862E-001
2,509999999776483	3,870328262302712E-004	3.874583061433687E-004	1.098130834599090E-001
3,009999999776483	6,674613517703804E-004	6.679715886382857E-004	7.638601350478932E-002
3,509999999776483	1,058395503937598E-003	1.058990497760311E-003	5.618500109033475E-002
4,009999999776483	1,578191699116528E-003	1.578871449894049E-003	4.305295263694022E-002
4,509999999776483	2,245206353691773E-003	2.245970861424102E-003	3.403907617235984E-002
5,009999999776483	3,077795884047938E-003	3.078645148735074E-003	2.758566337161479E-002

5,509999999776483	4,094316706569626E-003	4.095250728211570E-003	2.280743485399210E-002
6,009999999776483	5,313125237641441E-003	5.314144016238193E-003	1.917107616277124E-002
6,509999999776483	6,752577893647986E-003	6.753681429199546E-003	1.633976318144238E-002
7,009999999776483	8,431031090973866E-003	8.432219383480235E-003	1.409228641153505E-002
7,509999999776483	1,036684124600368E-002	1.036811429546486E-002	1.227850527971970E-002
8,009999999776483	1,257836477512204E-002	1.257972258153803E-002	1.079361176038565E-002
8,509999999776483	1,508395809471355E-002	1.508540065808434E-002	9.562645391315593E-003
9,009999999776483	1,790197762116280E-002	1.790350494148840E-002	8.530845388051553E-003
9,509999999776483	2,105077977085441E-002	2.105239184813481E-002	7.657454278995158E-003
10,009999999776480	2,454872096017297E-002	2.455041779440818E-002	6.911630789440430E-003

IV.4.2 Application au profil NACA0024

Pour ce profil, l'épaisseur maximal est égale à $t=24\%$, ou égale à 0.24. Ici la corde du profil est égale à l'unité.

Tableaux IV-8 : L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0024

A_{cy}	K_e
0,1527579433337508	0,9291439932223308

Tableau IV-9 : variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur , et le pourcentage de l'erreur entre eux pour le profil NACA0024.

La longueur L (m)	La flèche (m)		Erreur (%)
	Sans l'effet de l'effort tranchant	Avec l'effet de l'effort tranchant	
9,999999776482582E-003	3.059402525618349E-012	8.540789446274225E-010	99.641789257906010
5,09999997764826E-001	4.058328311054186E-007	4.492348287036990E-007	9.661316270494922
1,00999999776483	3.152105690819539E-006	3.238058666473998E-006	2.654460110448072
1,50999999776483	1.053337368662035E-005	1.066187764033099E-005	1.205265695645793
2,00999999776483	2.484418886658331E-005	2.501524379835013E-005	6.838027770015109E-001
2,50999999776483	4.837910327878389E-005	4.859270918860689E-005	4.395842779498183E-001
3,00999999776483	8.343266897129754E-005	8.368882585917672E-005	3.060825447715178E-001
3,50999999776483	1.322994379921998E-004	1.325981458581351E-004	2.252730337986338E-001
4,00999999776483	1.972739623895659E-004	1.976152212335575E-004	1.726885418346483E-001
4,50999999776483	2.806507942114716E-004	2.810346040335193E-004	1.365703071931763E-001
5,00999999776483	3.847244855059922E-004	3.851508463060961E-004	1.106996918721595E-001
5,50999999776483	5.117895883212032E-004	5.122585000993632E-004	9.153811563284302E-002
6,00999999776483	6.641406547051801E-004	6.646521174613964E-004	7.695194866297800E-002
6,50999999776483	8.440722367059982E-004	8.446262504402706E-004	6.559276768673285E-002
7,00999999776483	1.053878886371733E-003	1.054475451084062E-003	5.657454725146094E-002
7,50999999776483	1.295855155750460E-003	1.296494271440845E-003	4.929568178303581E-002
8,00999999776483	1.572295596890255E-003	1.572977263558696E-003	4.333607892708680E-002
8,50999999776483	1.885494761839193E-003	1.886218979485690E-003	3.839520513649779E-002

9,00999999776483	2.237747202645350E-003	2.238513971269904E-003	3.425346611164888E-002
9,50999999776483	2.631347471356801E-003	2.632156790959411E-003	3.074739336917037E-002
10,00999999776480	3.068590120021621E-003	3.069441990602287E-003	2.775327187397427E-002

IV.4.3 Application au profil NACA0044 :

Pour ce profil, l'épaisseur maximal est égale à $t=44\%$, ou égale à 0.44. Ici la corde du profil est égale à l'unité.

Tableaux IV-10 : L'aire effective en cisaillement A_{cy} et le facteur de forme énergétique K_e du profil NACA0044.

A_{cy}	K_e
0,279411902953469	0,927435224807449

Tableau IV-11 : La variation de la flèche sans et avec l'effet de l'effort tranchant en fonction de la longueur L du profil NACA0044.

La longueur L (m)	La flèche (m)		Erreur (%)
	Sans l'effet de l'effort tranchant	Avec l'effet de l'effort tranchant	
9,999999776482582E-003	4.964920450516448E-013	4.655442184675928E-010	99.893352333600890
5,09999997764826E-001	6.586017059782073E-008	8.957760516510168E-008	26.476968795456220
1,00999999776483	5.115362844703192E-007	5.585061058784586E-007	8.409902938171438
1,50999999776483	1.709397896867565E-006	1.779620105116562E-006	3.945910031422030
2,00999999776483	4.031814066547581E-006	4.125288661637437E-006	2.265892226139481
2,50999999776483	7.851153852268394E-006	7.967880834199108E-006	1.464968971796215
3,00999999776483	1.353978631278802E-005	1.367976568155960E-005	1.023258526717796
3,50999999776483	2.147008050686450E-005	2.163331226247693E-005	7.545388964571870E-001
4,00999999776483	3.201440549325584E-005	3.220088963570913E-005	5.791272991615944E-001

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

4,509999999776483	4.554513033072008E-005	4.575486686001423E-005	4.583917377266817E-001
5,009999999776483	6.243462407801522E-005	6.266761299415023E-005	3.717852093022247E-001
5,509999999776483	8.305525579389932E-005	8.331149709687519E-005	3.075701576673279E-001
6,009999999776483	1.077793945371304E-004	1.080588882269471E-004	2.586494219982350E-001
6,509999999776483	1.369794093664664E-004	1.372821554431240E-004	2.205283532155831E-001
7,009999999776483	1.710276693406655E-004	1.713536678041640E-004	1.902488973104612E-001
7,509999999776483	2.102965435184856E-004	2.106457943688249E-004	1.658000585227863E-001
8,009999999776483	2.551584009586847E-004	2.555309041958649E-004	1.457761981285245E-001
8,509999999776483	3.059856107200209E-004	3.063813663440420E-004	1.291709181741226E-001
9,009999999776483	3.631505418612523E-004	3.635695498721142E-004	1.152483784764854E-001
9,509999999776483	4.270255634411368E-004	4.274678238388396E-004	1.034605116546627E-001
10,009999999776480	4.979830445184325E-004	4.984485573029761E-004	9.339234264463135E-002

Tableau IV-12 : Le coefficient de forme énergétique des profils symétriques NACA0012, NACA0024, NACA0044.

Profil NACA	0012	0024	0044
K_e	0,93292605323686	0,9291439932223308	0,9274352294807449

D'après les résultats obtenus (**Tableau IV-11**), on remarque que le coefficient de forme énergétique varié d'un profil à un autre dû à la variation des géométries de chaque profil.

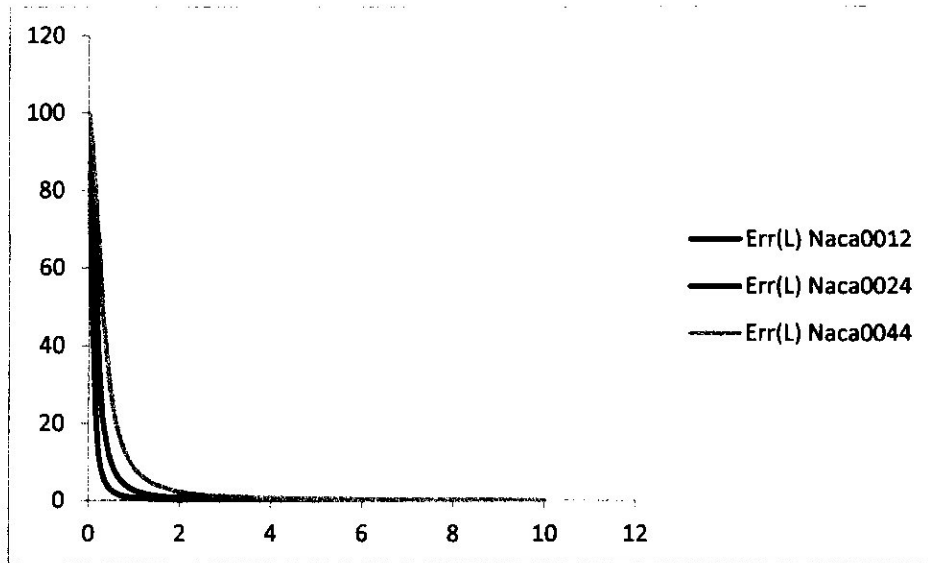


Figure IV-8 : Effet de l'effort tranchant sur la flèche totale d'une poutre ayant une section profilée (différents types du profil symétriques) soumise à une charge concentrée.

IV.4.4 Interprétation des résultats :

LA figure (IV-11) représente La variation de l'erreur relative en fonction de la longueur de la poutre encastree pour une section profilée (symétrique), on voit que quand la longueur (L) est grande, l'effet de l'effort tranchant sur la flèche totale est très faible ; cependant, ce n'est pas le cas pour une poutre courte. À titre d'exemple du profil NACA0044, pour $L=10$ m, la contribution de l'effort tranchant à la flèche totale n'est que 0,09% ; par contre, pour $L=0,1$ m, cette contribution devient 88% environ.

Conclusion et perspective

Conclusion et perspective

Notre travail nous a permis de faire la détermination des caractéristiques géométriques des sections complexes utilisés dans le domaine d'aéronautique et leurs coefficients de forme énergétique pour déterminer la flèche due à l'effet de l'effort tranchant des poutres en flexion simple dans le cas où leur longueur est assez petite par rapport aux dimensions transversales.

On peut tirer à partir de ce travail les points suivants :

- La détermination de centre de gravité de la section est nécessaire
- Le repère doit être choisi dans le centre de gravité de la section.
- Le calcul des moments d'inerties doit être fait par rapport aux axes centraux principaux.
- La méthode de génération de maillage présentée dans ce travail a été utilisée pour les domaines simplement connexes, tel qu'on a élaboré le procédé pour la génération de maillage type H.
- On a présenté un ensemble de géométrie communément utilisé dans la mécanique, tel que, pour un choix d'une section non existante dans notre liste, il suffit de changer les fonctions des frontières d'un domaine existant.
- La mise en œuvre de la méthode des éléments finis par un programme de calcul, nous a permis de trouver des coefficients de forme énergétique pour des sections circulaires et non circulaires complexes.

Perspective :

Dans ce projet on a fait un programme en langage fortran pour calculer le coefficient de forme énergétique ainsi que la flèche due à l'effet de l'effort tranchant des profils symétriques.

On a laissé la porte ouverte aux nouveaux chercheurs pour compléter ce travail en trouvant les coefficients de la forme énergétique (qui sont nécessaires pour faciliter les calculs de la flèche due à l'effort tranchant) pour les autres profils symétrique et antisymétriques.

Référence

- [1] CHAFFARDON Christopher, LE COLLETER Quentin, POYET Arnaud. ; Thèse « l'aile d'avion ». Lycée Jean Monnet Annemasse .Juin 2003.
- [2] Jean-Pierre. Duvivier. ; « AERODYNAMIQUE ET MECANIQUE DU VOL ; STABILITE LONGITUDINALE », octobre 2010
- [3] MERABET. Amel., « Analyse des caractéristiques aérodynamique d'une aile d'avion de différents profils sous l'effet des vitesses subsoniques ».
- [4] Bonnet.A., « Aérodynamique : Théorie de la dynamique des fluides », Editions Cepadues. E.N.S.A.E.Toulouse 1989.
- [5] ION.PARASCHIVOIU., « Aérodynamique subsonique. » Editions de l'école polytechnique de Montréal.
- [6] CAUVIN.Daniel., « AERODYNAMIQUE MECANIQUE DU VOL. » Edition 1983 d'institut Aéronautique Jean Mermoz.
- [7] Jack .Moran., «An introduction to theoretical and computational aerodynamics.» Dover, 2003
- [8] BOURAHLA. Nouredine. « Résistance des matériaux de base » la collection que le GECOTEC.
- [9] P. VASSART / Bac Construc / IEPSCF – NAMUR « Propriétés des surfaces»
- [10] BASTIEN .Jérôme. , « Résistance des matériaux Introduction aux calculs des structures ». Automne 2004.
- [11] Cours « Résistance des matériaux ». KIRAD .Abdelkader
- [12] Cours « Mécanique des matériaux composites ». Annexe A-3 Elément de poutre ETSMTL.Hiver 2014.
- [13] Cours « Elément fins ». KIRAD.Abelkader.
- [14] Hervé Oudin., « Méthode des éléments finis ».ECN (Centrale Nantes) 2008.
- [15] Eléments finis – Notes de cours – Marc Sartor
- [16] <http://tpeaerodynamisme.free.fr/analyse.htm>
- [17] <http://aerodynamique.chez.com/profil.html>
- [18] http://fr.m.wikipedia.org/wiki/profil_NACA

ANNEXE

ANNEXE A

Les coordonnées du profil NACA 0012

0.000000E+00	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
2.000000E-02	1.297877458232830E-001	-1.297877458232830E-001
4.000000E-02	1.775247438739415E-001	-1.775247438739415E-001
6.000000E-02	2.110669629625339E-001	-2.110669629625339E-001
8.000000E-02	2.368976534799924E-001	-2.368976534799924E-001
9.999999E-02	2.575523781207922E-001	-2.575523781207922E-001
1.200000E-01	2.743499925172427E-001	-2.743499925172427E-001
1.400000E-01	2.880885997826729E-001	-2.880885997826729E-001
1.600000E-01	2.993001486634495E-001	-2.993001486634495E-001
1.800000E-01	3.083640455975996E-001	-3.083640455975996E-001
2.000000E-01	3.155648697195924E-001	-3.155648697195924E-001
2.200000E-01	3.211245264226367E-001	-3.211245264226367E-001
2.400000E-01	3.252214487338255E-001	-3.252214487338255E-001
2.600000E-01	3.280027042876945E-001	-3.280027042876945E-001
2.800000E-01	3.295919713667718E-001	-3.295919713667718E-001
3.000000E-01	3.300949814733376E-001	-3.300949814733376E-001
3.200000E-01	3.296033585212527E-001	-3.296033585212527E-001
3.400000E-01	3.281973850315128E-001	-3.281973850315128E-001
3.600000E-01	3.259480466472013E-001	-3.259480466472013E-001
3.800000E-01	3.229185713199014E-001	-3.229185713199014E-001
4.000000E-01	3.191656079221240E-001	-3.191656079221240E-001
4.200000E-01	3.147401424470178E-001	-3.147401424470178E-001
4.400001E-01	3.096882198560310E-001	-3.096882198560310E-001
4.600001E-01	3.040515197075580E-001	-3.040515197075580E-001
4.800001E-01	2.978678202155698E-001	-2.978678202155698E-001
5.000001E-01	2.911713864272577E-001	-2.911713864272577E-001
5.200000E-01	2.839932509974313E-001	-2.839932509974313E-001
5.400000E-01	2.763614994622686E-001	-2.763614994622686E-001
5.600000E-01	2.683014760584060E-001	-2.683014760584060E-001
5.800000E-01	2.598359641360903E-001	-2.598359641360903E-001
6.000000E-01	2.509853387922235E-001	-2.509853387922235E-001
6.199999E-01	2.417676967791809E-001	-2.417676967791809E-001
6.399999E-01	2.321989676925331E-001	-2.321989676925331E-001
6.599999E-01	2.222930096331526E-001	-2.222930096331526E-001
6.799999E-01	2.120616919139155E-001	-2.120616919139155E-001
6.999999E-01	2.015149668930017E-001	-2.015149668930017E-001
7.199998E-01	1.906609326315582E-001	-1.906609326315582E-001
7.399998E-01	1.795058877688250E-001	-1.795058877688250E-001
7.599998E-01	1.680543797645513E-001	-1.680543797645513E-001
7.799998E-01	1.563092474629962E-001	-1.563092474629962E-001
7.999998E-01	1.442716587746708E-001	-1.442716587746708E-001
8.199998E-01	1.319411441433161E-001	-1.319411441433161E-001
8.399997E-01	1.193156263603797E-001	-1.193156263603797E-001
8.599997E-01	1.063914472026923E-001	-1.063914472026923E-001
8.799997E-01	9.316339129752022E-002	-9.316339129752022E-002
8.999997E-01	7.962470755976479E-002	-7.962470755976479E-002
9.199997E-01	6.576712849653243E-002	-6.576712849653243E-002
9.399996E-01	5.158088763278860E-002	-5.158088763278860E-002
9.599996E-01	3.705473527688644E-002	-3.705473527688644E-002
9.799996E-01	2.217595281528537E-002	-2.217595281528537E-002
9.999996E-01	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000

ANNEXE B

Les coordonnées du profil NACA 0024

0.000000E+00	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
2.000000E-02	4.719554100545436E-002	-4.719554100545436E-002
4.000000E-02	6.455444830972915E-002	-6.455444830972915E-002
6.000000E-02	7.675161813009911E-002	-7.675161813009911E-002
8.000000E-02	8.614459591689119E-002	-8.614459591689119E-002
9.999999E-02	9.365540441084964E-002	-9.365540441084964E-002
1.200000E-01	9.976362744849235E-002	-9.976362744849235E-002
1.400000E-01	1.047594843257379E-001	-1.047594843257379E-001
1.600000E-01	1.088364109383459E-001	-1.088364109383459E-001
1.800000E-01	1.121323732552148E-001	-1.121323732552148E-001
2.000000E-01	1.147508545915445E-001	-1.147508545915445E-001
2.200000E-01	1.167725478125828E-001	-1.167725478125828E-001
2.400000E-01	1.182623376514259E-001	-1.182623376514259E-001
2.600000E-01	1.192737032445844E-001	-1.192737032445844E-001
2.800000E-01	1.198516185101854E-001	-1.198516185101854E-001
3.000000E-01	1.200345312648525E-001	-1.200345312648525E-001
3.200000E-01	1.198557592933758E-001	-1.198557592933758E-001
3.400000E-01	1.193444962379411E-001	-1.193444962379411E-001
3.600000E-01	1.185265550580668E-001	-1.185265550580668E-001
3.800000E-01	1.174249277347195E-001	-1.174249277347195E-001
4.000000E-01	1.160602138566239E-001	-1.160602138566239E-001
4.200000E-01	1.144509537837740E-001	-1.144509537837740E-001
4.400001E-01	1.126138911374750E-001	-1.126138911374750E-001
4.600001E-01	1.105641821198385E-001	-1.105641821198385E-001
4.800001E-01	1.083155642623644E-001	-1.083155642623644E-001
5.000001E-01	1.058804975814398E-001	-1.058804975814398E-001
5.200000E-01	1.032702666781128E-001	-1.032702666781128E-001
5.400000E-01	1.004950844739960E-001	-1.004950844739960E-001
5.600000E-01	9.756416705456675E-002	-9.756416705456675E-002
5.800000E-01	9.448579927394582E-002	-9.448579927394582E-002
6.000000E-01	9.126739025781937E-002	-9.126739025781937E-002
6.199999E-01	8.791552064300624E-002	-8.791552064300624E-002
6.399999E-01	8.443598300935427E-002	-8.443598300935427E-002
6.599999E-01	8.083381666595875E-002	-8.083381666595875E-002
6.799999E-01	7.711333772632482E-002	-7.711333772632482E-002
6.999999E-01	7.327816522956594E-002	-7.327816522956594E-002
7.199998E-01	6.933124392500725E-002	-6.933124392500725E-002
7.399998E-01	6.527486422677564E-002	-6.527486422677564E-002
7.599998E-01	6.111067975649544E-002	-6.111067975649544E-002
7.799998E-01	5.683972282110589E-002	-5.683972282110589E-002
7.999998E-01	5.246241811531185E-002	-5.246241811531185E-002
8.199998E-01	4.797859489139345E-002	-4.797859489139345E-002
8.399997E-01	4.338749780083304E-002	-4.338749780083304E-002
8.599997E-01	3.868779658074258E-002	-3.868779658074258E-002
8.799997E-01	3.387759473206393E-002	-3.387759473206393E-002
8.999997E-01	2.895443731491363E-002	-2.895443731491363E-002
9.199997E-01	2.391531796842612E-002	-2.391531796842612E-002
9.399996E-01	1.875668524735481E-002	-1.875668524735481E-002
9.599996E-01	1.347444835499118E-002	-1.347444835499118E-002
9.799996E-01	8.063982341244022E-003	-8.063982341244022E-003
9.999996E-01	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000

ANNEXE C

Les coordonnées du profil NACA 0044.

0.000000E+00	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
2.000000E-02	8.652515997514211E-002	-8.652515997514211E-002
4.000000E-02	1.183498239052040E-001	-1.183498239052040E-001
6.000000E-02	1.407113022878656E-001	-1.407113022878656E-001
8.000000E-02	1.579317618552475E-001	-1.579317618552475E-001
9.999999E-02	1.717015776606709E-001	-1.717015776606709E-001
1.200000E-01	1.828999867526400E-001	-1.828999867526400E-001
1.400000E-01	1.920590578493486E-001	-1.920590578493486E-001
1.600000E-01	1.995334234323611E-001	-1.995334234323611E-001
1.800000E-01	2.055760211156075E-001	-2.055760211156075E-001
2.000000E-01	2.103765703135004E-001	-2.103765703135004E-001
2.200000E-01	2.140830079481656E-001	-2.140830079481656E-001
2.400000E-01	2.168142893656270E-001	-2.168142893656270E-001
2.600000E-01	2.186684596511478E-001	-2.186684596511478E-001
2.800000E-01	2.197279709893572E-001	-2.197279709893572E-001
3.000000E-01	2.200633110452587E-001	-2.200633110452587E-001
3.200000E-01	2.197355624253349E-001	-2.197355624253349E-001
3.400000E-01	2.187982468078328E-001	-2.187982468078328E-001
3.600000E-01	2.172986879526712E-001	-2.172986879526712E-001
3.800000E-01	2.152790378256686E-001	-2.152790378256686E-001
4.000000E-01	2.127770623401271E-001	-2.127770623401271E-001
4.200000E-01	2.098267521566110E-001	-2.098267521566110E-001
4.400001E-01	2.064588039146996E-001	-2.064588039146996E-001
4.600001E-01	2.027010039854013E-001	-2.027010039854013E-001
4.800001E-01	1.985785378435592E-001	-1.985785378435592E-001
5.000001E-01	1.941142488529362E-001	-1.941142488529362E-001
5.200000E-01	1.893288254491379E-001	-1.893288254491379E-001
5.400000E-01	1.842409913221041E-001	-1.842409913221041E-001
5.600000E-01	1.788676426288295E-001	-1.788676426288295E-001
5.800000E-01	1.732239682687927E-001	-1.732239682687927E-001
6.000000E-01	1.673235516393150E-001	-1.673235516393150E-001
6.199999E-01	1.611784572414352E-001	-1.611784572414352E-001
6.399999E-01	1.547993048050541E-001	-1.547993048050541E-001
6.599999E-01	1.481953330636697E-001	-1.481953330636697E-001
6.799999E-01	1.413744548921753E-001	-1.413744548921753E-001
6.999999E-01	1.343433051957246E-001	-1.343433051957246E-001
7.199998E-01	1.271072826815051E-001	-1.271072826815051E-001
7.399998E-01	1.196705864421539E-001	-1.196705864421539E-001
7.599998E-01	1.120362481173669E-001	-1.120362481173669E-001
7.799998E-01	1.042061602698981E-001	-1.042061602698981E-001
7.999998E-01	9.618110150671959E-002	-9.618110150671959E-002
8.199998E-01	8.796075879033964E-002	-8.796075879033964E-002
8.399997E-01	7.954374731511914E-002	-7.954374731511914E-002
8.599997E-01	7.092762826572203E-002	-7.092762826572203E-002
8.799997E-01	6.210892472714952E-002	-6.210892472714952E-002
8.999997E-01	5.308313597620571E-002	-5.308313597620571E-002
9.199997E-01	4.384475035121042E-002	-4.384475035121042E-002
9.399996E-01	3.438725686910130E-002	-3.438725686910130E-002
9.599996E-01	2.470315573578578E-002	-2.470315573578578E-002
9.799996E-01	1.478396787595301E-002	-1.478396787595301E-002
9.999996E-01	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000