

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد حباب البليدة
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك
Département d'Électronique



Mémoire de Master

Filière : Automatique & Système

Spécialité : Automatique

Présenté par :

Keddah Ikram & Bencheikh Samia

Etude et implémentation de lois de commande adaptative avec un modèle de référence : Application au pendule inversé

Proposé par:

Mr. MADDI Abdelkader

Année Universitaire 2020 - 2021

Remerciements

Nous remercions avant tout Allah de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude. Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.

*Nos plus grands remerciements vont à notre promoteur Mr. **Maddi A.** pour nous avoir guidé pour la réalisation de ce mémoire de fin d'étude.*

Nous ne serons oubliés en fin de remercier les honorables membres du jury qui nous feront l'immense honneur de présider et d'examiner ce modeste travail. Sans oublier de remercier tous les enseignants du département d'Automatique et Electrotechnique.

A toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la finalisation de ce mémoire de fin d'étude.

Ikram & Samia

ملخص: الهدف من هذا العمل هو دراسة وتنفيذ قوانين التحكم التكيفية لنظام متعدد المتغيرات عندما يتعرض النظام لأنواع مختلفة من الاضطرابات الخارجية أو تغييره الداخلي.

بعد ذلك ، لاختبار أداء الأمر المستخدم وتأثير كسب المعلمات ، يجب إجراء العديد من اختبارات المحاكاة على تستخدم هذه الطريقة في العديد من التطبيقات في مجال علم الطيران والروبوتات. التطبيق المعني هو التحكم في البندول المقلوب. وتشبته.

كلمات المفاتيح: التحكم التكيفي ، النظام متعدد المتغيرات ، الاستقرار المقارب ، البندول المقلوب

Résumé : Le but de ce travail, consiste à étudier et implémenter les lois de commande adaptative d'un système multi-variables lorsqu'on fait subir au système différentes sortes de perturbations extérieures où une variation de ses paramètres internes.

Ensuite, pour tester les performances de la commande utilisée, et l'influence du gain des paramètres, plusieurs tests de simulations doivent être effectués sur MATLAB. Cette méthode est utilisée dans de nombreuses applications du domaine d'aéronautique et robotique. L'application concernée, est la commande et stabilisation d'un pendule inversé.

Mots clés : Commande adaptative, Système multi-variables, Stabilité asymptotique, Pendule inversé.

Abstract: The goal of this work is to study and implement the adaptive control laws of a multivariable system when the system is subjected to different external disturbances or a variation of its internal parameters.

Then, to examine the performance of the control system, and the influence of the gain parameters controls, several simulation tests must be carried out on MATLAB. This method issued in many applications in the field of aeronautics and robotics. The application concerned is the control and stabilization of an inverted pendulum.

Keywords: Adaptive control, Multivariate system, Asymptotic stability, Inverted pendulum

Listes des Acronymes et Abréviations

LQR: Linear Quadratic Rregulator.

MRAC: Model Reference Adaptive Control.

P: Proportional.

PD: Proportional-Derivative.

PID: Proportional-Integral-Derivative.

STR: Self-Tuning Regulators.

SIMO: Single Input Multiple Outputs.

SIRM: Single Input Rule Module.

ZMP: Zero-tilting Moment Point.

Liste des Figures et Tableaux

Figure 1.1. Classifications des systèmes.	4
Figure 1.2. Système mono-variable.	5
Figure 1.3. Système multi-variable.	5
Figure 1.4. Diagramme d'état.	7
Figure 1.5. Matrices de passage entre les différents espaces.....	8
Figure 1.6. Représentation d'un système.	11
Figure 1.7. Erreur de sortie pour un modèle parallèle.	12
Figure 1.8. Schéma de principe d'optimisation	12
Figure 2.1. Le corps de l'être humain vu comme un double pendule.....	18
Figure 2.2. Le robot BIPED	18
Figure 2.3. Le robot JOE	18
Figure 2.4. Pendule gyroscopique inversé.....	19
Figure 2.5. Tour d'amusement (Ciseaux).....	19
Figure 2.6. Un schéma d'un pendule classique inversé.....	22
Figure 2.7. Un schéma explicatif d'un double pendule inversé en cascade	23
Figure 2.8. Un schéma explicatif d'un double pendule classique en parallèle.....	23
Figure 2.9. Un schéma explicatif d'un pendule inversé stabilisé par volant d'inertie.....	24
Figure 2.10. Pendule inversé.	28
Tab.2.1 : Paramètres du pendule inversé.	30
Figure 3.1. Structure d'un estimateur adaptatif.	33

Figure 3.2. Structure d'un système de commande adaptative d'un système dynamique.....	35
Figure 3.3. Structure de commande adaptative directe.....	36
Figure 3.4. Structure de la commande adaptative indirecte.....	37
Figure 3.5. Schéma block d'un système adaptatif à gain programmé	38
Figure 3.6. Schéma block d'un système adaptatif auto-ajustable (STR).....	38
Figure 3.7 : schéma block d'un système adaptatif à commande duale.....	39
Figure 3.8 : schéma synoptique de la commande adaptative avec un modèle de référence	42
Figure 3.9. Système hyper-stable.	43
Figure 3.10. Structure de commande avec un modèle référence.....	45
Figure 4.1. Réponse impulsionnelle du système en boucle ouverte.	48
Figure 4.2. Réponse indicielle du système en boucle ouverte.....	48
Figure 4.3.1. Réponse indicielle du système par la commande LQR.....	50
Figure 4.3.2. Réponse indicielle du système par la commande LQR.....	50
Figure 4.4. Réponse indicielle du système par placement de pôles.	51
Figure 4.5. Commande optimale avec un modèle de référence pour un signal d'entrée échelon unité.53	
Figure 4.6. Commande optimale avec un modèle de référence pour un signal d'entrée rectangulaire.53	
Figure 4.7.1. Commande MRAC avec action (P), pour un signal d'entrée échelon unité.	54
Figure 4.7.2. Commande MRAC avec action (PI), pour un signal d'entrée échelon unité.	54
Figure 4.8.1. Commande MRAC avec action (P), pour un signal d'entrée rectangulaire.	55
Figure 4.8.2. Commande MRAC avec action (PI), pour un signal d'entrée rectangulaire.....	55

Table des matières

Introduction générale..... Erreur ! Signet non défini.

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes et les modèles

1.1	Introduction	Erreur ! Signet non défini.
1.2	Définition d'un système	Erreur ! Signet non défini.
1.3	Classifications des systèmes.....	Erreur ! Signet non défini.
1.3.1	Système statique et système dynamique	Erreur ! Signet non défini.
1.3.2	Système mono-variable.....	Erreur ! Signet non défini.
1.3.3	Système multi-variable	Erreur ! Signet non défini.
1.3.4	Système stochastique	Erreur ! Signet non défini.
1.3.5	Système déterministe	Erreur ! Signet non défini.
1.3.6	Système linéaire et non-linéaire.....	Erreur ! Signet non défini.
1.3.7	Système linéaire invariant.....	Erreur ! Signet non défini.
1.3.8	Système continu et système discret.....	Erreur ! Signet non défini.
1.4	Modèle mathématique	Erreur ! Signet non défini.
1.4.1	Comment peut-on obtenir un modèle mathématique ?	Erreur ! Signet non défini.
1.4.2	Modèle d'état	Erreur ! Signet non défini.
a)	Les valeurs propres	Erreur ! Signet non défini.
b)	Condition de stabilité.....	Erreur ! Signet non défini.
1.5	Contrôlabilité et Observabilité des Systèmes.....	Erreur ! Signet non défini.
1.5.1	Introduction.....	Erreur ! Signet non défini.
1.5.2	Contrôlabilité des systèmes.....	Erreur ! Signet non défini.
a)	Définition.....	Erreur ! Signet non défini.
b)	Critère de Kalman.....	Erreur ! Signet non défini.
1.5.3	Observabilité des systèmes	Erreur ! Signet non défini.
a)	Définition.....	Erreur ! Signet non défini.
b)	Critère d'observabilité	Erreur ! Signet non défini.
1.6	Modélisation.....	Erreur ! Signet non défini.
1.6.1	Les difficultés de la modélisation	Erreur ! Signet non défini.
1.6.2	Erreurs de modélisation	Erreur ! Signet non défini.

1.6.3	Principaux étapes de la modélisation.....	Erreur ! Signet non défini.
a)	Système.....	Erreur ! Signet non défini.
b)	Modèle.....	Erreur ! Signet non défini.
c)	Critère.....	Erreur ! Signet non défini.
d)	Optimiseur.....	Erreur ! Signet non défini.
e)	Incertitude sur les paramètres.....	Erreur ! Signet non défini.
f)	Analyse critique des résultats obtenus.....	Erreur ! Signet non défini.
1.6.4	Validation du modèle.....	Erreur ! Signet non défini.
1.7	Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.

Chapitre 2 : Modélisation du pendule inversé

2.1	Introduction.....	Erreur ! Signet non défini.
2.2	Qu'est-ce qu'un pendule ?.....	Erreur ! Signet non défini.
2.3	Le pendule inversé.....	Erreur ! Signet non défini.
2.4	Historique d'un pendule inversé.....	Erreur ! Signet non défini.
2.5	Principe de fonctionnement.....	Erreur ! Signet non défini.
2.6	Intérêt de l'étude d'un pendule inversé.....	Erreur ! Signet non défini.
2.7	Domaine d'utilisation.....	Erreur ! Signet non défini.
a)	En médecine.....	Erreur ! Signet non défini.
b)	En robotique.....	Erreur ! Signet non défini.
c)	Dans l'aérospatiale.....	Erreur ! Signet non défini.
d)	Dans le domaine de loisir.....	Erreur ! Signet non défini.
e)	Dans la recherche.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8	Les pendules.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8.1	Le pendule simple.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8.2	Le Pendule de Newton.....	Erreur ! Signet non défini.
a)	Expériences.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8.3	Le pendule élastique.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8.4	Le pendule de Pohl.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8.5	Le pendule de torsion.....	Erreur ! Signet non défini.
2.8.6	Les pendules inversés.....	Erreur ! Signet non défini.

a)	Pendule inversé classique	Erreur ! Signet non défini.
b)	Le double pendule inversé	Erreur ! Signet non défini.
c)	Le pendule inversé sur les deux roues	Erreur ! Signet non défini.
2.9	Propriétés de pendule inversé.....	Erreur ! Signet non défini.
2.9.1	La non-linéarité	Erreur ! Signet non défini.
2.9.2	Système holonome	Erreur ! Signet non défini.
2.9.3	L'instabilité en boucle ouverte.....	Erreur ! Signet non défini.
2.9.4	Système sous-actionné	Erreur ! Signet non défini.
2.10	Commande d'un pendule inversé.....	Erreur ! Signet non défini.
a)	Commande PID	Erreur ! Signet non défini.
b)	La commande par placement de pôle	Erreur ! Signet non défini.
c)	Commande LQR.....	Erreur ! Signet non défini.
2.11	Modélisation d'un pendule inversé	Erreur ! Signet non défini.
2.11.1	. Equation de mouvement	Erreur ! Signet non défini.
2.11.2	. Linéarisation des équations.....	Erreur ! Signet non défini.
2.11.3	. Représentation d'état du système.....	Erreur ! Signet non défini.
2.12	Exemple numérique des paramètres du pendule inversé	Erreur ! Signet non défini.
2.13	Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.

Chapitre 3 : Commande adaptative avec un modèle de référence

3.1	Introduction	Erreur ! Signet non défini.
3.2	Historique	Erreur ! Signet non défini.
3.3	Définition de la commande adaptative.....	Erreur ! Signet non défini.
3.4	Principe de fonctionnement.....	Erreur ! Signet non défini.
3.4.1	Boucle de contre-réaction conventionnelle.....	Erreur ! Signet non défini.
3.4.2	Boucle d'adaptation des paramètres du régulateur	Erreur ! Signet non défini.
3.5.	Les étapes de la synthèse d'un contrôleur adaptative	Erreur ! Signet non défini.
3.6.	Objectif de la commande adaptative	Erreur ! Signet non défini.
3.7.	Les difficultés d'implémentation de la commande adaptative.....	Erreur ! Signet non défini.
3.8.	Domaines d'application de la commande adaptative	Erreur ! Signet non défini.
3.9.	Les approches de la commande adaptative	Erreur ! Signet non défini.
3.9.1	Commande adaptative directe.....	Erreur ! Signet non défini.

3.9.2	Commande adaptative indirecte.....	Erreur ! Signet non défini.
3.10.	Type de commande adaptative.....	Erreur ! Signet non défini.
3.10.1	Commande de gain programmé.....	Erreur ! Signet non défini.
3.10.2	Commande Auto-Ajustable (STR).....	Erreur ! Signet non défini.
3.10.3	Commande duale.....	Erreur ! Signet non défini.
3.10.4	Commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC)	Erreur ! Signet non défini.
	défini.	
3.11.	Synthèse de lois de commande adaptative.....	Erreur ! Signet non défini.
3.11.1	Méthode du gradient (ou règle MIT).....	Erreur ! Signet non défini.
3.11.2	Méthode de <i>Lyapunov</i>	Erreur ! Signet non défini.
3.11.3	Commande MRAC basée sur l'hyper-stabilité.....	Erreur ! Signet non défini.
3.12	Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.

Chapitre 4: Simulations et interprétation des résultats

4.1	Introduction.....	Erreur ! Signet non défini.
4.2	Etude du système en boucle ouverte.....	Erreur ! Signet non défini.
4.3	Etude du système en boucle fermée.....	Erreur ! Signet non défini.
4.3.1	Commande du système par la commande LQR.....	Erreur ! Signet non défini.
4.3.2	Commande du système par placement de pôles.....	Erreur ! Signet non défini.
4.3.3	Commande avec un modèle de référence.....	52
4.3.3.1	Commande optimale avec un modèle de référence...	Erreur ! Signet non défini.
4.3.3.2	Commande adaptative avec un modèle de référence	Erreur ! Signet non défini.
4.4.	Interprétations des résultats de simulations.....	Erreur ! Signet non défini.
4.5	Conclusion.....	56

Conclusion générale	57
----------------------------------	----

Références Bibliographiques	58
--	----

Annexes	60
----------------------	----

Introduction générale

Nous avons tous essayé un jour de maintenir en équilibre un bâton en bois sur notre index. Pour éviter la chute de ce dernier, on doit déplacer le doigt de façon à contrecarrer en permanence son basculement. C'est exactement le même défi fourni par le système automatisé du pendule inversé. Bien que cet exemple semble assez simple et instinctif à l'homme, il est nécessaire de définir des stratégies spécifiques pour assurer le maintien automatique du pendule inversé. Evidemment, les performances obtenues par le système automatisé sont bien supérieures aux performances obtenues par l'homme.

De nombreuses techniques de contrôle ont été appliquées avec succès à la stabilisation du pendule inversé, les exemples incluent le commande PID, le commande par le retour d'état, la commande LQR, et la commande par modèle de référence MRAC.

L'application du contrôle adaptatif du modèle de référence dans les processus industriels et les phénomènes pratiques, tels que le contrôle de l'insuline, de la pression cardiaque et des systèmes énergétiques, est décrite de manière non exhaustive dans les références pour les systèmes adaptatifs, trois méthodes permettent de synthétiser la loi de commande avec le modèle de référence : la méthode de Lyapunov, la méthode d'hyper-stabilité et la règle de MIT.

La règle de MIT est limitée dû à l'approximation de la fonction de sensibilité car la sortie de système dépend des paramètres inconnus ce qui conduit à des systèmes de contrôle dont les propriétés de stabilité sont faibles ou ne peuvent pas être établies. La méthode de Lyapunov présente une difficulté liée à la définition d'une fonction de *Lyapunov*. En effet pour certains systèmes, il est important de bien choisir une fonction adéquate qui peut déterminer les adaptations des lois de commande, en boucle fermée, de tel sort que la stabilité soit satisfaite. Par contre, la méthode d'hyper-stabilité est basée sur l'inégalité de Popov.

L'objet de ce travail est le développement de lois de commande adaptative avec un modèle de référence basées sur l'approche d'hyper-stabilité et l'application des différentes commandes pour la stabilisation du pendule inversé. À cette fin, nous subdivisons le mémoire en quatre chapitres suivants:

Chapitre 1 : Ce chapitre présente quelques généralités d'un système asservis. Nous commençons par la définition des systèmes automatiques et de leurs classes. Ensuite, nous expliquerons ce qu'est un modèle, les étapes pour l'obtenir, la difficulté de modélisation, et diverses techniques de vérification.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous allons présenter le pendule inversé, son historique et son principe de fonctionnement ainsi que de son intérêt et son domaine d'utilisation.

Dans une deuxième partie de ce chapitre nous allons parler des différents types de pendules, et nous allons présenter trois méthodes de commandes classiques :

- La commande conventionnelle (PID) Ainsi que leur principe de fonctionnement.
- La commande par placement de pôles.
- La commande linéaire quadratique (LQR).

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous aborderons l'historique, définitions du contrôle adaptatif, principe de fonctionnement, différentes méthodes de commande adaptative, les objectifs et les défis du contrôle adaptatif. A la fin de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au développement de la loi de commande adaptative avec modèle de référence.

Chapitre 4 : Dans ce chapitre, nous allons simuler la réponse du système (Pendule inversé) par le biais de langage de programmation MATLAB & SIMULINK. Avant de commencer à simuler le système Boucle fermée, il est préférable de faire un test en boucle ouverte.

Enfin, une conclusion générale suivi par des perspectives pour terminer notre mémoire.

Chapitre 1 Généralités sur les systèmes et les modèles

1.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à des généralités sur les systèmes asservis. On commence d'abord par la définition d'un système en automatique et ses classes. Ensuite, on va expliquer c'est quoi un modèle, les étapes à suivre pour l'obtention du modèle, les difficultés de la modélisation, et les différentes techniques de validation.

1.2 Définition d'un système

Un système est un appareil qui interagit avec l'environnement pour générer un ensemble de phénomènes. Tout système est caractérisé par deux types de signaux. Le signal de sortie du système est également appelé réponse du système. En général, les signaux d'entrée et de sortie du système ont des propriétés différentes :

Les entrées :

- Signaux d'excitation : actions envoyées au système.
- Perturbations qui sont en général imprévisibles.

Les sorties :

- Réponses du système aux signaux d'entrée [1].

1.3 Classifications des systèmes

La figure qui suit représente la classification des différents types des systèmes [1] :

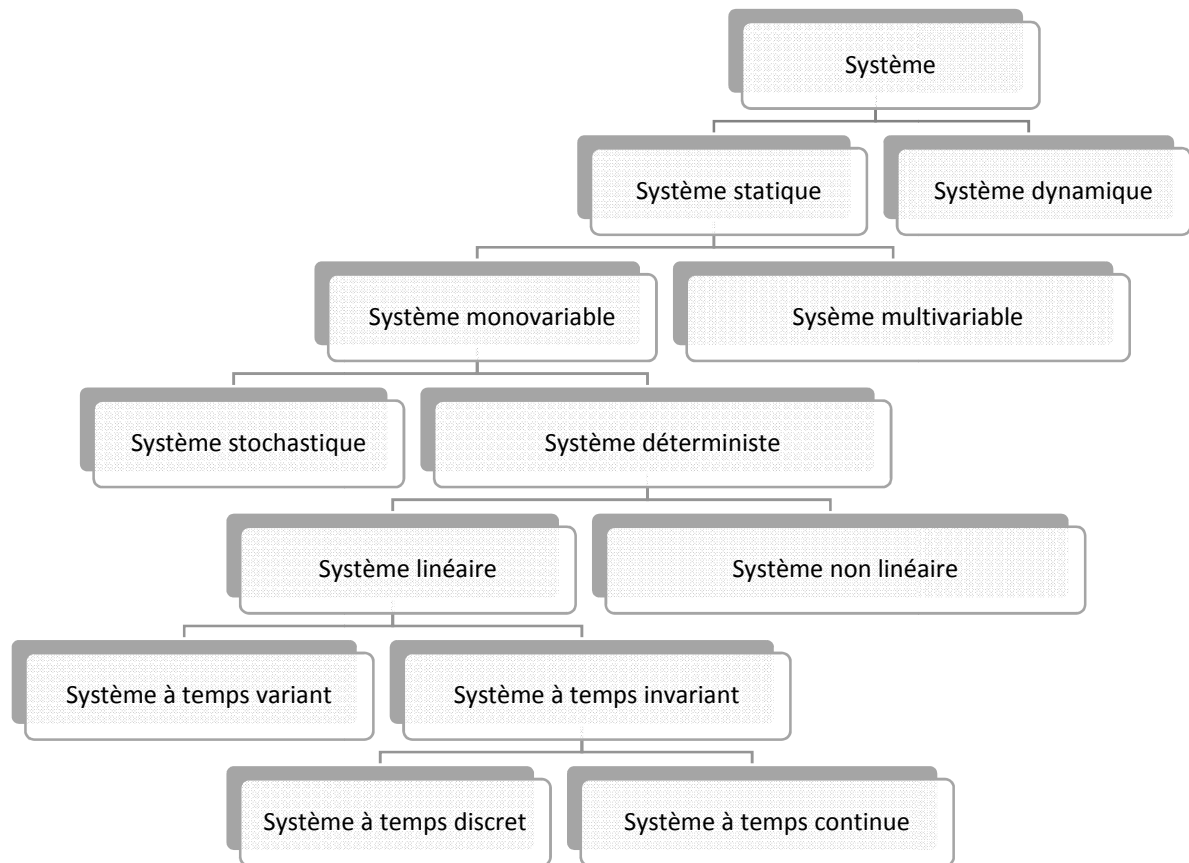


Figure 1.1. Classifications des systèmes.

1.3.1 Système statique et système dynamique

Un système statique est un système dont la réponse à un signal d'entrée est instantanée. L'argument time t n'interfère pas avec le fonctionnement de ce type de système, qui n'a pas de mémoire.

Un système dynamique est constitué des données du système et des lois qui décrivent l'évolution du système. Il peut s'agir de l'évolution d'une réaction chimique dans le temps, ou de l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement, il existe une distinction entre les systèmes dynamiques à temps discret (tels que les programmes informatiques) et les systèmes dynamiques à temps continu (tels que les réactions chimiques). [2]

1.3.2 Système mono-variable

Ce sont des systèmes ne comportant qu'un seul signal d'entrée et un seul signal de sortie.

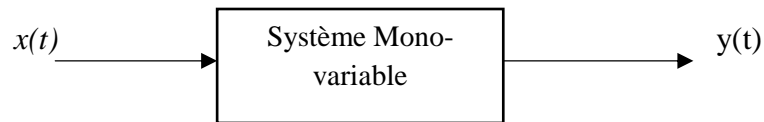


Figure 1.2. Système mono-variable.

1.3.3 Système multi-variable

Ce sont des systèmes comportant plusieurs signaux d'entrée et plusieurs signaux de sortie.

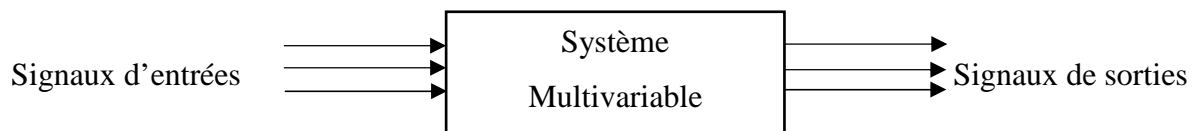


Figure 1.3. Système multi-variable.

1.3.4 Système stochastique

Un système stochastique est un système à comportement aléatoire, le signal de la sortie ne peut pas être déterminé exactement.

1.3.5 Système déterministe

Un système déterministe est un système qui répond toujours aux événements de la même manière, c'est-à-dire que peu importe ce qui s'est passé auparavant, son évolution sera toujours la même à partir du moment où le système atteindra un état donné. Dans un système déterministe, nous pouvons calculer avec précision la sortie basée sur le modèle du système.

1.3.6 Système linéaire et non-linéaire

Un système est linéaire si la réponse du système pour une combinaison linéaire de deux signaux d'entrées appliqués simultanément est égale à la somme des réponses à chacun des signaux appliqués séparément.

Par contre, un système est dit non linéaire, si le signal de la sortie est une fonction non linéaire par rapport au signal d'entrée.

1.3.7 Système linéaire invariant

La réponse du système à un signal d'entrée ne dépend pas de l'instant d'application du signal d'entrée.

1.3.8 Système continu et système discret

Un système est continu s'il met en jeu des signaux continus qui ont les mêmes propriétés qu'une fonction continue[3]. Par contre, un système discret l'information circule à des instants discrets.

1.4 Modèle mathématique

Une série d'équations ou de représentations graphiques qui décrivent la relation entre les variables de manière précise. Les modèles mathématiques sont particulièrement utilisés en biologie, en génie électrique et en physique, mais ils sont également utilisés dans d'autres domaines, tels que l'économie, la sociologie et les sciences politiques.

1.4.1 Comment peut-on obtenir un modèle mathématique ?

Pour obtenir un modèle mathématique, il faut passer par les étapes suivantes :

- Définir le problème : Que cherche-t-on ? Quel est l'objectif ? Quelles sont les données ? Quelle réponse cherche-t-on ?
- Définir le système : Comprendre les relations et les interactions physiques des différents éléments constitutifs du système.
- Construire une représentation simplifiée et idéalisée du système à modéliser.

- Appliquer les lois décrivant les éléments constitutifs où les interactions entre ces éléments.
- Définir les variables pertinentes (les entrées et les sorties).
- Formuler correctement le modèle. [2]

1.4.2 Modèle d'état

Une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique en utilisant des variables d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non, continue ou discrète, permet de déterminer l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît l'état à l'instant initial et le comportement des variables exogènes qui influent sur le système. La représentation d'état du système permet de connaître son comportement "interne" et pas seulement son comportement "externe" comme c'est le cas avec sa fonction de transfert. [4]

La représentation d'état des systèmes continus, s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.2)$$

Avec,

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: Vecteur qui représente les n variables d'état.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: Vecteur qui représente les m entrées.
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$: Vecteur qui représente les p sorties.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrice d'état.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: Matrice de commande.
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: Matrice d'observation.
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: Matrice d'action directe.

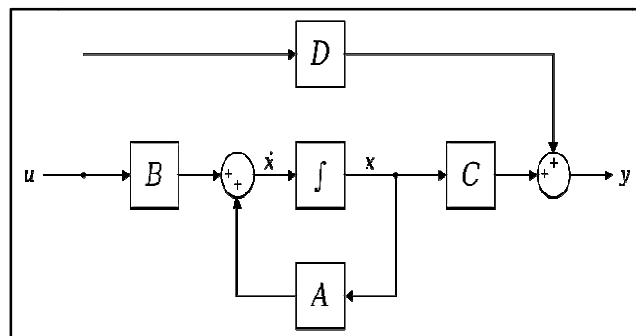


Figure 1.4. Diagramme d'état.

a) Les valeurs propres

Les valeurs propres de la matrice sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont les valeurs qui peuvent réduire l'homomorphisme interne de l'association.

b) Condition de stabilité

Un système linéaire invariant est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice d'état A sont à partie réelle strictement négative.

Le système est asymptotiquement stable si, et seulement si ses pôles sont tous situés dans le demi-plan gauche ouvert (c'est-à-dire ont tous une partie réelle strictement négative). Il s'agit également de la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit exponentiellement stable.

Le système est stable (au sens de Lyapunov) si, et seulement si ses pôles sont tous dans le demi-plan gauche fermé (c'est-à-dire ont tous une partie réelle négative ou nulle), ceux situés sur l'axe imaginaire (s'il en existe) étant simples (c'est-à-dire d'ordre 1).

1.5 Contrôlabilité et Observabilité des Systèmes

1.5.1 Introduction

Un système linéaire invariant dans le temps (éq. 1.1 et éq.1.2) est représenté par quatre matrices A , B , C et D de dimensions appropriées. Ces matrices représentent des transformations sur l'espace d'état, l'espace des commandes et l'espace des sorties. La figure suivante nous montre les interactions entre ces espaces :

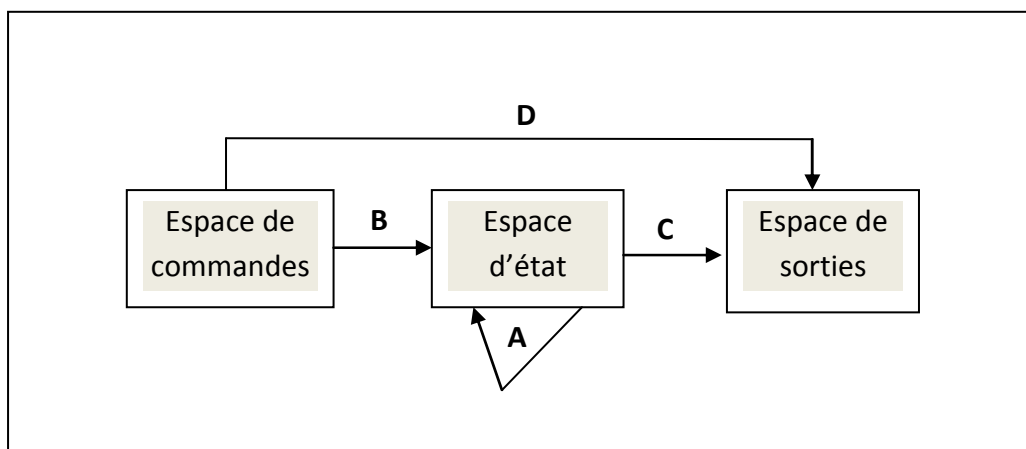


Figure 1.5. Matrices de passage entre les différents espaces.

On peut alors se poser deux questions importantes sur l'évolution de l'état:

- Peut-on déterminer une commande qui permette de faire passer le système d'un état quelconque $x(t_0)$ à un autre état quelconque $x(t_f)$. Cette opération n'est possible que si le système est contrôlable. Ceci concerne les matrices A et B .
- Peut-on déterminer l'état initial à partir de l'observation des sorties où lorsque l'état $x(t)$ du système n'est pas accessible. Cette opération n'est possible que si le système est observable. Ceci concerne les matrices A et C .

1.5.2 Contrôlabilité des systèmes

a) Définition

Un système est dit à état entièrement contrôlable si, par action sur l'entrée, il est possible d'atteindre en un temps fini n'importe quel point de l'espace d'état.

b) Critère de Kalman

Il est basé sur le rang de la matrice suivante :

$$C_{A,B} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (1.3)$$

Théorème : Le système est entièrement contrôlable si et seulement si la matrice $C_{A,B}$ est de rang maximal, c'est à dire $\text{rang } C_{A,B} = n$.

1.5.3 Observabilité des systèmes

a) Définition

Un système est dit à état entièrement observable si, par observation des entrées et sorties du système sur un intervalle de temps fini, on peut déterminer l'état initial du système.

b) Critère d'observabilité

Il est basé sur le rang de la matrice suivante :

$$O_{A,C} = [C \ CA \ CA^{n-1}]^T \quad (1.4)$$

Théorème : Le système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $O_{A,C}$ est de rang maximal, c'est à dire $\text{rang } O_{A,C} = n$.

1.6 Modélisation

La modélisation d'un système consiste à élaborer une représentation mathématique qui permette de décrire et prédire son comportement dynamique. La modélisation a été définie comme une démarche qui permet d'étudier un système réel en lui associée un monde virtuelle supposée équivalent.

1.6.1 Les difficultés de la modélisation

Les principales difficultés de la modélisation sont :

- Définition du problème de modélisation.
- Qualité des données de modélisation.
- Choix de la technique utilisée.
- Choix des variables disponibles.
- Sélection de modèle adéquat.

1.6.2 Erreurs de modélisation

Parmi les erreurs de modélisation, on cite les erreurs de mesure, de paramètres identifiés, et de l'utilisateur lui-même.

1.6.3 Principaux étapes de la modélisation

On distingue six étapes essentielles de la modélisation qui sont :

a) *Système*

Un système (processus) sera pour nous une partie de l'univers qui nous entoure, et qui nous avons décidé, plus ou moins arbitrairement d'appréhender comme un tout avec lequel nous interagissons. Nous observons certaines grandeurs caractéristiques du système et le résultat de ces observations forme le vecteur des sorties y peuvent être connues et maîtrisable

que nous noterons u , ou non maîtrisable et plus ou moins inconnus, ce sont les perturbations ou bruit que nous noterons p . (Voir Figure 1.6)

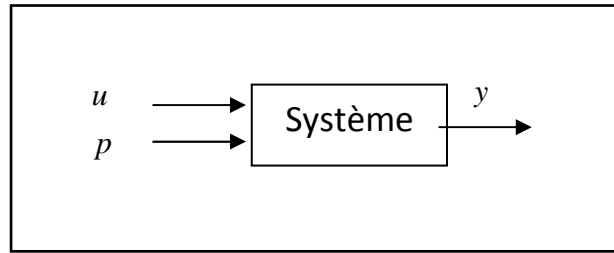


Figure 1.6. Représentation d'un système.

b) Modèle

Le modèle d'un système physique est une règle permettant de calculer, à partir de grandeurs connues ou mesurées, d'autres grandeurs dont nous espérons qu'elles ressembleront aux grandeurs du système qui nous intéresse. Fréquemment, le modèle calcul, à partir de l'entrée u de système une sortie \hat{y} qui ressemble le plus possible à y . Si le modèle et le système ont alors la même entrée, on parlera de modèle parallèle, par contre dans le cas où le modèle calcule à partir de la sortie y un vecteur \hat{u} dont on souhaite qu'il ressemble le plus possible aux entrées u du système, on parlera du modèle série ou inverse.

c) Critère

Pour fixer les idées, nous supposons que le modèle de type parallèle, c'est -à-dire, soumis aux mêmes entrées et aux mêmes conditions initiales que le système, on appelle alors erreur de sortie, la différence entre la sortie du système et celle du modèle (voir Figure 1.7).

Le plus souvent, on souhaite que cette erreur de sortie soit aussi proche que possible de zéros, l'échelle de valeur qui sera utilisé pour effectuer la comparaison prendra la forme d'une fonction scalaire $J(\theta)$ appelée « critère », nous supposons en général que ce critère est optimal si $J[M_1(\theta_1)] < J[M_2(\theta_2)]$ avec θ représente un vecteur des paramètres.

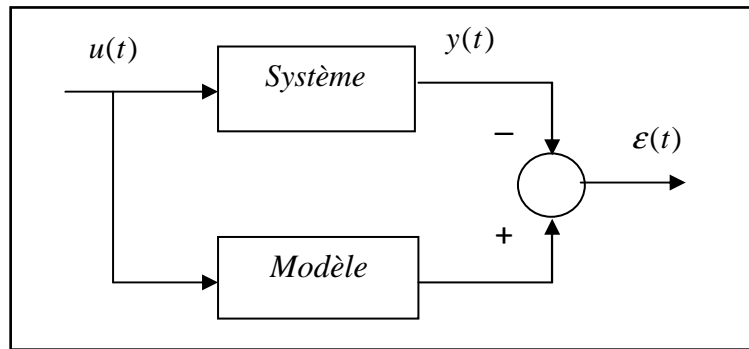


Figure 1.7. Erreur de sortie pour un modèle parallèle.

d) Optimiseur

L'algorithme d'optimisation reçoit toutes les informations disponibles et les utilise pour minimiser $J(\theta)$ de façon à calculer $\hat{\theta}$. Le schéma de circulation de l'information peut être celui décrit sur la Figure 1.8.

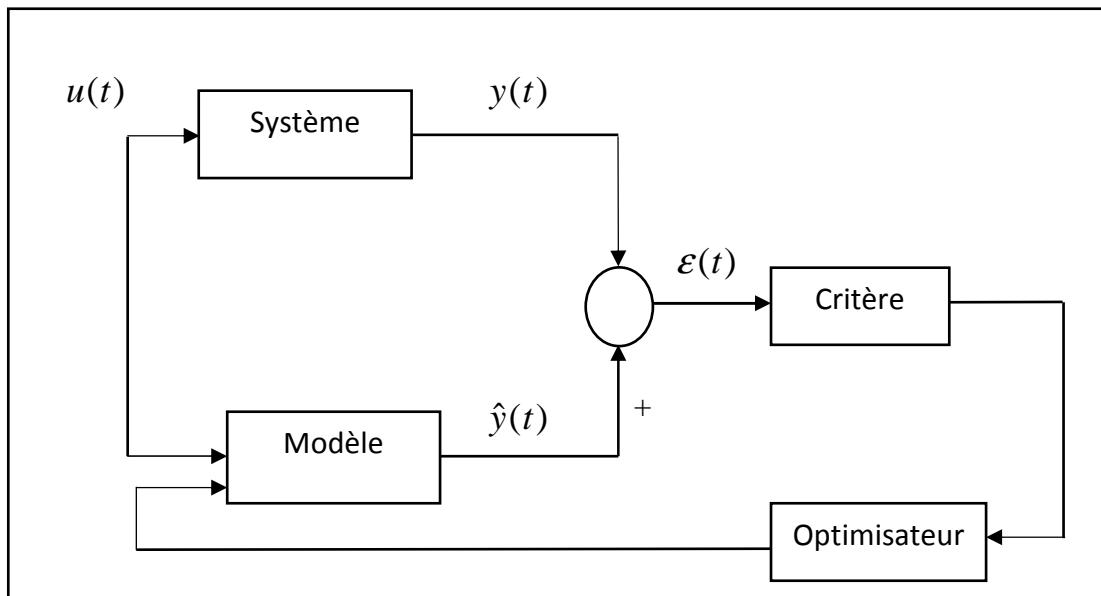


Figure 1.8. Schéma de principe d'optimisation.

e) Incertitude sur les paramètres

La valeur de $\hat{\theta}$ obtenue avec l'algorithme d'optimisation correspond au meilleur modèle possible choisi parmi un ensemble de modèles acceptables qui dépend de l'expérience pour le recueil des données, donc on pourra faire la planification d'expérience, de façon à essayer de recueillir l'information la plus pertinente possible au sens du critère utilisé.

f) Analyse critique des résultats obtenus

La phase d'analyse critique des résultats obtenus est indispensable, il faut donc soumettre le modèle à un ensemble d'épreuves destinées à la validation, si l'on parvient ainsi à détecter des erreurs, alors on a un mauvais choix du modèle.[5]

1.6.4 Validation du modèle

Cette étape est certainement la plus importante lors d'une identification. Elle consiste à accepter ou rejeter le modèle obtenu. Le rejet d'un modèle qui ne répond pas à ses objectifs remet en cause l'ensemble des étapes déjà citées. On peut citer deux méthodes de validations :

- Méthode de blanchissement de l'erreur de prédiction.
- Méthode de décorrélation de l'erreur de prédiction et le vecteur d'observation.

1.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré aux généralités sur l'étude des systèmes et les modèles mathématiques. La classification des systèmes se fait par rapport aux plusieurs concepts, la nature de la variable de temps (continu ou discret), le nombre des entrées/sorties (mono-variables ou multi-variables), la nature de ces paramètres (constants ou variables). En outre, la représentation des systèmes dans l'espace d'état nous a permis d'étudier la contrôlabilité et l'observabilité des systèmes, et le modèle mathématique fait une partie essentielle pour la commande des systèmes.

2.1 Introduction

Le système à pendule inversé est un exemple couramment trouvé dans la littérature de recherche. La particularité de ce système tient en partie au fait qu'il est instable en boucle ouverte, c'est-à-dire que le pendule tombera simplement si le chariot n'est pas déplacé pour l'équilibrer. De plus, la dynamique du système n'est pas linéaire. L'objectif du système de commande est d'équilibrer le pendule inversé en appliquant une force sur le chariot auquel le pendule est attaché.

2.2 Qu'est-ce qu'un pendule ?

Grâce à la force de rappel due à la gravité, lorsqu'un pendule est déplacé latéralement de sa position d'équilibre, il peut être ramené encore à cette position d'équilibre. Lorsqu'il est relâché, cette force de rappel combinée avec la masse de pendule le fait osciller d'avant en arrière autour de la position d'équilibre. [6]

2.3 Le pendule inversé

Un pendule inversé est un type de pendule dont la position d'équilibre est instable parce qu'il est maintenu verticalement par rapport au point d'équilibre d'un pendule simple et faisant un angle de 180° avec ce dernier. Il s'agit d'un système SIMO (Single Input Multiple Output) ce qui signifie Une Entrée à Plusieurs Sorties. Ce système est non linéaire et instable. [7]

2.4 Historique d'un pendule inversé

La non-linéarité du pendule inversé et la simplicité de structure nous permettent d'utiliser ce système comme une référence pour vérifier les performances et la robustesse des nouvelles méthodes de commande.

En 1960 Roberge James a traité avec succès un pendule inversé dans sa thèse, « The Mechanical Seal ». Il a conçu un servomécanisme pour équilibrer un balai en utilisant les critères de Routh de Bode et ceux de Nyquist. Son système prendrait environ dix minutes pour se stabiliser et une fois stabilisé, il pourrait rester pendant environ trois heures dans cette position stable. Après cela, beaucoup de systèmes plus rapides et plus robustes, mais basés sur le même principe ont été mis en place partout dans le monde. Juste pour mentionner quelques œuvres faites sur les pendules inversés, les auteurs ont équilibré le pendule en utilisant un potentiomètre comme capteur et un régulateur « Proportionnel Dérivé ». Le régulateur PD a été utilisé pour générer un signal pour commander la vitesse et la direction du moteur. Le modèle cependant possède quelques limitations comme : les vibrations, glissement des roues, le courant insuffisant et l'échauffement du transistor. Voilà pourquoi les auteurs ont proposé pour les prochains travaux, l'utilisation de plusieurs capteurs au lieu d'un et d'autres régulateurs comme les PID.

Prasad a procédé de manière différente Les méthodes de PID et LQR ont été utilisées ensemble pour commander la position du chariot et stabiliser le pendule inversé dans la position verticale. Il a été conclu que ce système est optimal donc préférable à celui qui est commandé uniquement par un PID [7]. Il existe beaucoup de recherches faites sur la stabilisation des pendules inversés en utilisant la logique floue. Par exemple selon Yi et Yubazaki, un régulateur basé sur le modèle d'inférence flou connecté dynamiquement (le SIRM) pour la commande de stabilisation des systèmes de pendule inversé présenté. Le régulateur a quatre entrées, chacun d'eux a un SIRM (Single Input Rule Module) et un degré d'importance dynamique et il fait la commande de l'angle du pendule et de sa position.

Lu a utilisé l'algorithme génétique pour générer automatiquement les règles floue et les facteurs de mise à l'échelle pour le contrôle du pendule inversé. Margaliot montrait une nouvelle approche, pour déterminer la structure de commande floue pour le pendule inversé en utilisant la synthèse de Lyapunov alors que Mikukcik a extrait les règles floues pour le contrôle du pendule inversé par une méthode de regroupement flou [7]. Saez a utilisé le contrôleur prédictif généralisé pour déterminer les paramètres du modèle flou Takagi-Sugeno contrôlant le pendule inversé [7].

Wong a adopté l'algorithme génétique pour accorder toutes les fonctions d'appartenance d'un système flou alors que Yamakawa a conçu un système matériel de régulateur flou en haute vitesse et il a utilisé que sept règles floues pour commander l'angle d'un pendule inversé. Bien que le contrôle de stabilisation d'un système de pendule inversé inclue également le contrôle de position du chariot et le contrôle angulaire du pendule, en raison de la longueur limitée du rail, les approches indiquées ci-dessus ont seulement pris en compte le contrôle angulaire du pendule. Pour commander l'angle du pendule et la position de chariot. Kawaji a construit un contrôleur flou composé de deux modules de règles simples. Un module était pour l'amplitude de la variable manipulée et l'autre pour le signe de la variable manipulée. Étant donné que le contrôle de la position du chariot peut être considéré comme une perturbation de l'angle du pendule, l'information de la position du chariot a d'abord été transformée en un angle de cible virtuel, et cet angle a ensuite été intégré dans la commande de l'angle du pendule. Bien que cette méthode soit plutôt simple, il était difficile de stabiliser complètement le système dans un court intervalle de temps [8]. Kyung a présenté un contrôleur flou, dont la base de règles a été dérivée de trois réseaux de neurones. Bien que le contrôleur flou puisse stabiliser un système pendule inversé en environ 8,0 s, il lui fallait 396 règles même après une procédure de lissage et une procédure de réduction logique [8]. Matsuura et Yasunobu ont utilisé les informations du chariot pour créer un ensemble de 49 règles floues pour la réalisation de l'angle de cible virtuel, puis utiliser l'angle de cible virtuel et l'information du pendule pour construire un autre ensemble de 49 règles floues pour la stabilisation totale. Sakai a appliqué une méthode d'optimisation non linéaire pour former un contrôleur flou pour la stabilisation, mais le contrôleur a pris plus de 200,0 s pour stabiliser le système [8].

2.5 Principe de fonctionnement

Son principe de fonctionnement est très simple en théorie : Après avoir ramené le pendule de sa position d'équilibre basse à la position verticale haute, il faut le maintenir dans

Cette position. Pour cela, quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite, et inversement. Le problème se pose dans le réglage de l'intensité et la forme de réaction que doit subir le chariot en fonction de l'angle que le pendule fait avec la verticale. Ce système présente des caractéristiques intéressantes permettant d'illustrer quelques problèmes types, il s'agit d'un système SIMO (Single Input Multiple Output), instable décrit par un modèle non linéaire. [9]

2.6 Intérêt de l'étude d'un pendule inversé

La recherche du pendule inversé est très importante. Il existe plusieurs raisons :

- La marche humaine peut être simulée par un double pendule inversé, et ses deux axes principaux de rotation sont les chevilles et les hanches. Lorsque nous sommes debout, nos articulations continuent de travailler pour nous y maintenir. Les experts en prothèse de hanche doivent utiliser le modèle à double pendule inversé pour calculer toutes les contraintes sur la prothèse.
- De même, la robotique humanoïde utilise ce concept dans le cadre de la dynamique ZMP (point zéro)
- On voit apparaître des moyens de mouvement dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. Vous accélérez en vous penchant en avant et vous ralentissez en vous penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé. Le gyroscope assure également la stabilité, mais nous n'entrerons pas dans ce détail.

2.7 Domaine d'utilisation

L'étude de pendule inversé est idéale pour les étudiants comme nous en électronique et en robotique qui font les laboratoires de recherches parce qu'ils font intervenir beaucoup de notions intéressantes pour eux : la programmation, l'électronique, l'automatisation et la mécanique. On cite dans cette section quelques applications de ce concept dans le monde réel dans des domaines variés :

a) En médecine

L'homme est vu comme un double pendule inversé en série, et ses deux axes principaux de rotation sont les chevilles et les hanches. Lorsque nous sommes debout, nos articulations continuent de travailler pour nous y maintenir [10]. Les spécialistes qui travaillent dans le domaine de la réalisation de prothèses pour les hanches (remplacement chirurgical d'un organe) sont amenés à utiliser un double pendule inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse comme le montre la figure suivante. Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés groupés. Le

second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se penchant en avant c'est le même principe que celui du pendule inversé.

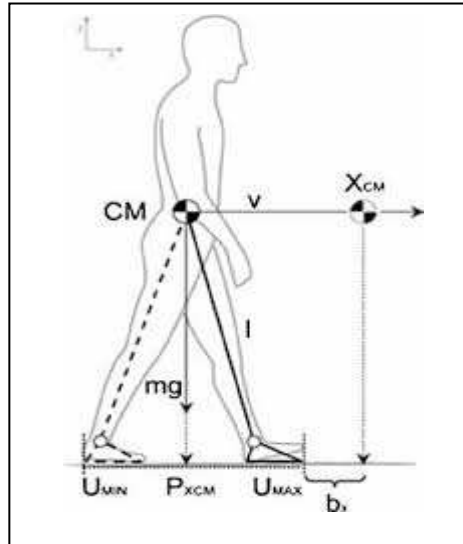


Figure 2.1. Le corps de l'être humain vu comme un double pendule.

b) En robotique

De même, le robot est considéré comme un pendule inversé. Pour maintenir l'équilibre du robot, il suffit de stabiliser le pendule inversé selon sa position verticale lors de son déplacement et en présence d'autres perturbations[10]. Nous avons cité quelques exemples de robots qui ont été recherchés et conçus sur la base de ce en :

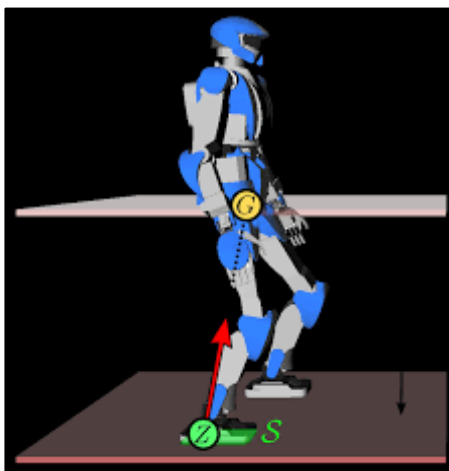


Figure 2.2. Le robot BIPED

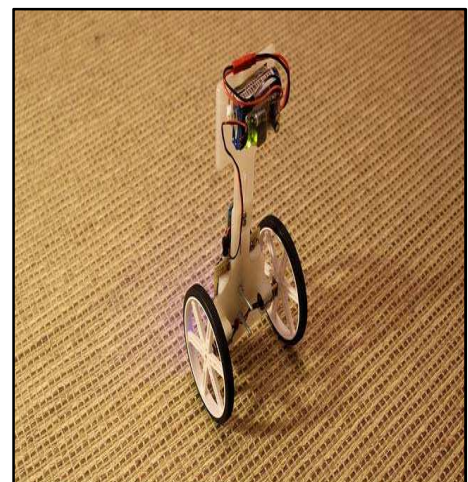


Figure 2.3. Le robot JOE

c) Dans l'aérospatiale

Dans ce domaine l'étude des pendules inversés a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fusées...etc.

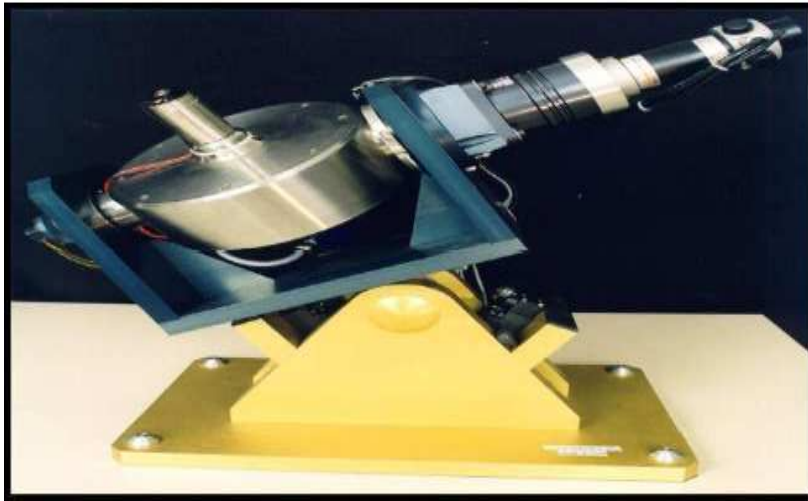


Figure 2.4. Pendule gyroscopique inversé

d) Dans le domaine de loisir

Dans les parcs d'attractions on trouve les tours qui utilisent le principe du pendule inversé. La machine en figure 2.5 bascule vers le haut autour d'un axe de sorte qu'il agit comme un pendule inversé mais dans sa première phase de mouvement il agit comme un pendule normal. [7]



Figure 2.5. Tour d'amusement (Ciseaux)

e) Dans la recherche

Vu leur complexité, les systèmes à pendules sont très utilisés pour tester des lois de commande modernes[10].

2.8 Les pendules

Le pendule est un exemple de base de l'étude des systèmes non linéaires. Plusieurs types de pendules sont considérés comme des prototypes académiques largement étudiés dans le domaine de l'automatisation. Parmi eux on peut citer :

2.8.1 Le pendule simple

Le pendule simple est le modèle de pendule pesant le plus simple : C'est un pendule pesant idéal composé d'une masse (m) accrochée à un point fixe par un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l et qui oscille grâce à l'effet de la gravité appelé aussi pendule à gravité idéale.

2.8.2 Le Pendule de Newton

Le pendule de Newton se compose de cinq billes métalliques de même masse, suspendus par deux fils à deux barres de fer. Ces cinq billes se touchent au repos et sont situées au milieu des deux barres. Il est fondé sur le principe des actions réciproques[11]. Il est généralement utilisé pour illustrer les théories de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie en ingénierie.

a) *Expériences*

Lorsqu'on lance une bille, de l'autre côté une autre bille se mettra en mouvement. Lorsqu'on lance deux billes, de l'autre côté deux billes se mettront en mouvement. Lorsqu'on lance trois billes, de l'autre côté les deux billes restantes se mettront en mouvement, accompagné de la bille les ayant percutés. De même pour quatre billes.

Expériences plus méconnues : Si l'on lance une bille de chaque côté en même temps, celles-ci rebondiront en même temps alors que les trois du milieu resteront immobiles. De même avec deux billes de chaque côté, la dernière boule sera immobile. Si l'on lance trois billes d'un côté et deux de l'autre, elles se percuteront et iront trois dans un sens, deux dans l'autre, alternativement.

Enlever une bille au repos alors qu'une autre effectue un mouvement de l'autre côté décale le mouvement d'une bille.

Il est possible de lancer plusieurs billes à des instants différents, afin d'augmenter le nombre de mouvements et de chocs, mais les résultats sont souvent faussés par les influences extérieures et par la non perfection du matériel [12].

2.8.3 Le pendule élastique

Le pendule élastique est un système constitué d'un ressort de masse négligeable dont une extrémité est fixée et auquel on a attaché une masse ponctuelle libre de se mouvoir. Le ressort a pour constante de raideur k_0 et une longueur à vide l_0 . De plus, nous supposons que la masse est astreinte à se déplacer suivant un axe horizontal sans frottement [13].

2.8.4 Le pendule de Pohl

Un pendule de Pohl est constitué [11] :

- Un disque tournant autour de son centre
- Un ressort spiral, qui exerce un couple mécanique pour ramener le disque à sa position d'équilibre
- Un pointeur placé sur le disque peut localiser la déviation d'angle.
- D'un moteur, connecté au ressort spiral est forcé d'osciller à une fréquence réglable par l'utilisateur
- Un frein électromagnétique permet de régler l'effet d'amortissement (par courants de Foucault).

2.8.5 Le pendule de torsion

Les oscillations et les ondes jouent un rôle important à la fois dans le monde naturel et dans le monde technologique. Par conséquent, l'étude des phénomènes connexes doit inclure des méthodes expérimentales et des méthodes théoriques, toutes deux propices à la compréhension du modèle standard et des lois fondamentales de la physique. Les oscillations de torsion représentent certes un cas particulier d'oscillations mécaniques, mais elles permettent néanmoins une analyse approfondie des principaux phénomènes. Cette expérience

est consacrée à l'étude de l'oscillation forcée plus ou moins amortie du pendule de torsion. En ajoutant de la masse au pendule, deux positions d'équilibre (ou positions de repos) peuvent être créées, entraînant un comportement chaotique. La grandeur physique qui décrit complètement l'état du système à un instant t donné est l'angle déviant de la position d'équilibre ou de repos [14].

2.8.6 Les pendules inversés

a) Pendule inversé classique

Un pendule inversé classique est un système dynamique estimé comme un très bon exemple pour les systèmes instables et non linéaires. Il est constitué d'un chariot mobile surmonté d'un pendule inversé, librement articulé autour d'un axe transversal, comme l'illustre la figure suivante :

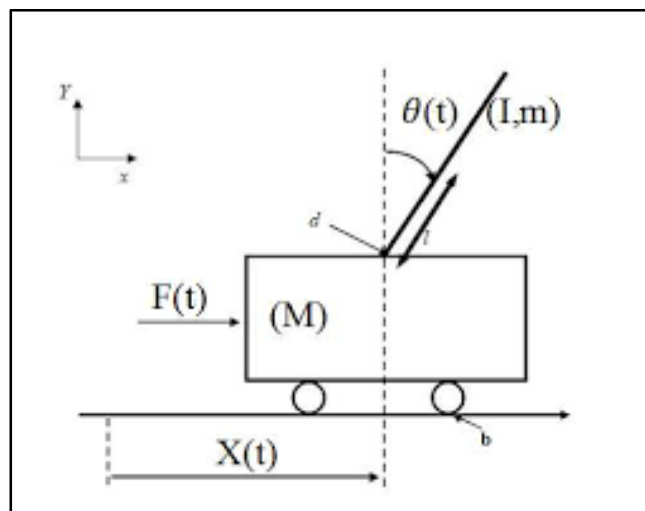


Figure 2.6. Un schéma classique inversé.

d'un pendule

b) Le double pendule inversé

Pour ce type, on peut distinguer deux architectures différentes :

- **En cascade**

Il a le même principe que le pendule simple, la seule différence réside dans le fait qu'il dispose de deux tiges en rotation libre. L'une tourne autour du pivot à la base, d'un angle $\theta_1(t)$ et l'autre avec l'angle $\theta_2(t)$ autour de la deuxième articulation entre les deux tiges.

Le but de la commande pour ce système consiste à stabiliser les deux tiges autour de la verticale et les maintenir autour de ce point d'équilibre instable.

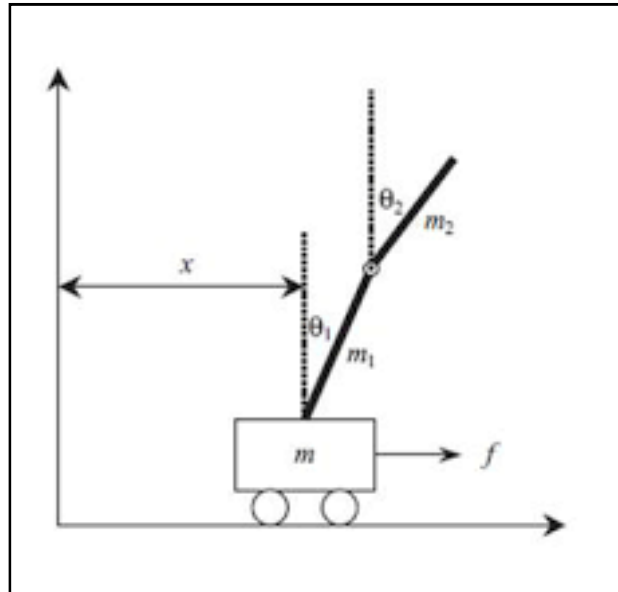


Figure 2.7. Un schéma explicatif d'un double pendule inversé en cascade

- **En parallèle**

Dans ce cas, le chariot supporte deux tiges indépendantes : une tige L de longueur l_L et une autre B de longueur l_B , les deux en rotation libre. Le déplacement $x(t)$ de la base va engendrer une déviation d'un angle θ_L par rapport à la verticale sur la première tige et d'un angle θ_B par rapport à la verticale sur la deuxième tige. Le but de la commande consiste à stabiliser les deux tiges autour de la verticale au point d'équilibre instable et les maintenir même dans le cas de présence de perturbations externes.

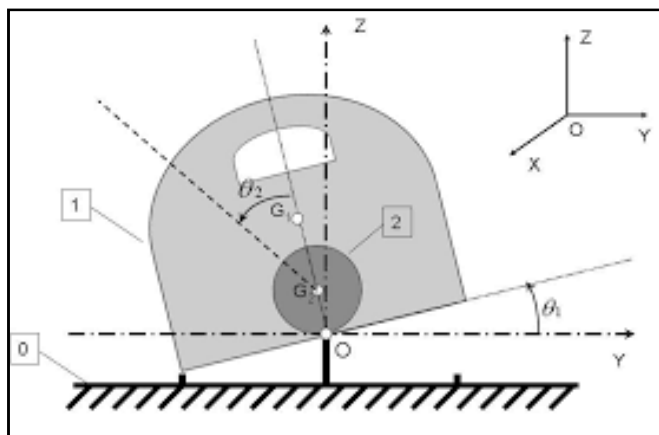


Figure 2.8. Un schéma explicatif d'un double pendule classique en parallèle.

c) Le pendule inversé sur les deux roues

Un pendule dont le centre de gravité est au-dessus de son axe de rotation ou de pivot. Ce système est intrinsèquement instable et doit être constamment équilibré par des forces externes pour maintenir l'équilibre. Ceci est réalisé en appliquant un couple à son pivot (système à un seul degré de liberté) dans le cadre de la rétroaction mesurée par le système lui-même. Le couple appliqué à l'arbre pendulaire lui-même est à l'origine de la perturbation du système.

d) Le pendule inversé stabilisé par volant d'inertie

C'est un système composé de deux corps mécaniques : un pendule inversé en rotation libre autour d'un pivot lié au bâti et un volant actionné (roue d'inertie) dont le centre de masse coïncide avec l'extrémité du pendule. Le principe de fonctionnement de ce système est basé sur le mouvement de rotation du volant d'inertie qui provoque, par les éléments dynamiques qu'il induit, la rotation de pendule.

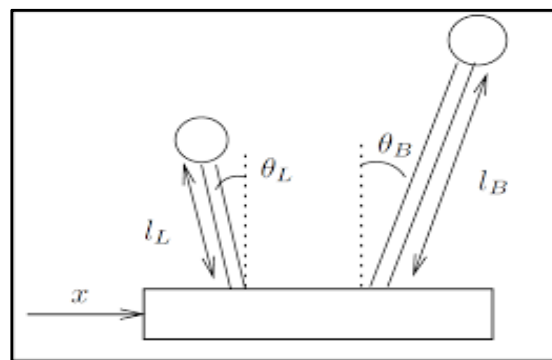


Figure 2.9. Un schéma explicatif d'un pendule inversé stabilisé par volant d'inertie.

2.9 Propriétés de pendule inversé

Malgré les différentes tailles et différents matériaux utilisés pour fabriquer des pendules, ils ont des caractéristiques communes mentionnées ci-dessous :

2.9.1 La non-linéarité

Les systèmes linéaires sont des systèmes qui sont régis par les équations différentiels linéaires à coefficients constants et d'ordre fini d'où le principe de la superposition peut être appliqué. Néanmoins, la non-linéarité est la particularité, en mathématiques, de systèmes dont

le comportement n'est pas linéaire, c'est-à-dire soit ne satisfaisant pas le principe de superposition, soit dont la sortie n'est pas proportionnelle à l'entrée.

2.9.2 Système holonome

Un système mécanique S est holonome si la position de ses différentes parties peut être caractérisée par n variables indépendantes q_1, q_2, \dots . Appelées coordonnées généralisées du système. On dit alors que S est un système holonome à n degrés de liberté. Le pendule inversé est également un système holonome.

2.9.3 L'instabilité en boucle ouverte

La position d'équilibre du pendule inversé est instable en boucle ouverte voilà pourquoi le système nécessite les capteurs pour mesurer la distance déplacée par le chariot et l'angle du pendule. Après avoir mesuré ces variables il faut les renvoyer au système de contrôle, créant ainsi un système en boucle fermée.

2.9.4 Système sous-actionné

Les systèmes mécaniques sous-actionnés sont définis comme étant des systèmes dont le nombre d'actionneurs est inférieur au nombre de degrés de liberté. Le pendule inversé stabilisé par volant d'inertie est, du fait qu'il a moins d'actionneurs que de degrés de liberté, un système mécanique sous-actionné.

2.10 Commande d'un pendule inversé

Dans cette section, nous citons quelques techniques de commande très simple à implémenter et très utilisée en industrie ; il s'agit de la commande PID (Proportionnel, Intégral et Dérivé), Commande par placement de pôles (retour d'état complet) et commande LQR. Le rôle du régulateur pour le système en boucle fermée est d'assurer que la réponse présente des caractéristiques dynamiques et stationnaires convenables.

a) Commande PID

Les régulateurs PID répondent à plus de 90% des besoins industriels et le nombre de régulateurs installés dans une usine pétrolière, par exemple, se compte par milliers. Parmi les innombrables méthodes de réglage PID. La méthode universelle de réglage n'existe pas, et il est important de comprendre que c'est la connaissance comportementale du procédé qui induit la méthode à appliquer pour obtenir les paramètres PID d'un réglage satisfaisant.

En général, on a les qualités suivantes du correcteur PID :

- L'action proportionnelle est souvent utilisée pour la rapidité du système bouclé.
- L'action intégrale est employée pour améliorer l'erreur en régime permanent.
- L'action dérivée assure l'amélioration de la stabilité.

b) La commande par placement de pôle

La commande par placement de pôles est une commande par retour d'état qui permet d'imposer la dynamique du système en boucle fermée.

La commande par retour d'état consiste à utiliser les variables d'état en contre réaction dans le but d'améliorer les performances du processus ou d'assurer au moins la stabilisation de n'importe quel système linéaire invariant. La commande par retour d'état nécessite la connaissance de toutes les variables d'état. On prend en considération le système linéaire décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et pour lequel on suppose que les composantes du vecteur d'état $x(t)$ sont accessibles (directement ou par reconstruction). Les commandes de retour d'état sont des commandes de la forme suivante :

$$u(t) = \beta \cdot v - F x$$

Où $v \in \mathbb{R}^m$ est la consigne, $F \in \mathbb{R}^{nm}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{mm}$ sont des matrices constantes. La commande par retour d'état consiste à déterminer une commande telle que les pôles du système en boucle fermée soient correctement placés dans le plan complexe.

c) Commande LQR

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour « linear Quadratic regulator », le système est linéaire et la commande est quadratique, la commande optimale est un retour d'état sous la forme :

$$U = -K.x(t)$$

Qui a pour but de minimiser Le critère quadratique J qui s'exprime par la formule suivante [18] :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt$$

Où x présente le vecteur d'état, Q est une matrice diagonale de pondération d'ordre $(n \times n)$ qui assure la pénalisation du vecteur d'état pour chaque variable d'état selon le coefficient attribué, R est un scalaire qui représente la pénalisation sur l'énergie fournie en entrée.

Pour contrôler U linéairement grâce à x , on utilise la loi de commande :

$$U(t) = -Kx(t).$$

Le problème est de trouver un retour d'état stabilisant, optimal au sens du compromis rapidité, performance et énergie de commande. Il s'agit donc de trouver la matrice de gain du retour d'état K , Si on travaille en temps fini, R varie avec le Temps. On observe tout de même que R est constant sur une grande portion ; il ne varie qu'au début de l'asservissement, par exemple lors du décollage d'un avion, ou bien à son atterrissage On sépare donc le problème en deux :

- Trouver le K de la partie constante, qui servira pour la plus grande partie du temps d'asservissement.
- Trouver tous les K correspondant à tous les σ de la partie critique, mais cela nécessite des calculs lourds, car il faut effectuer des calculs en récurrence inversée. C'est pour cela que dans les cas d'asservissements non critiques, on choisit souvent de les ignorer.[20]

2.11 Modélisation d'un pendule inversé

Un pendule inversé constitué d'une masse m au bout d'une tige (balancier) de longueur l est porté par un chariot de masse M . L'entrée du système est la force F et les sorties du système représentent la position longitudinale z du chariot et l'angle θ que fait la tige du pendule avec la verticale. (Voir la Figure 2.10)

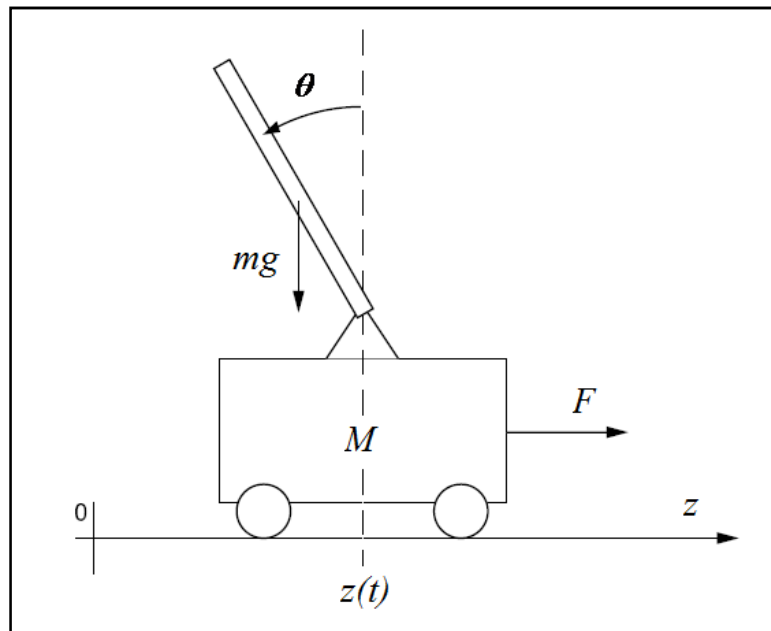


Figure 2.10. Pendule inversé.

2.11.1. Equation de mouvement

Par application des lois de la dynamique, on montre aisément que l'ensemble chariot-tige est régi par les équations suivantes :[15]

$$(M + m) \frac{d^2 z}{dt^2} - ml \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ml \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + f_c \frac{dz}{dt} = F \quad (2.1)$$

$$ml \cos(\theta) \frac{d^2 z}{dt^2} - (I + m l^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgl \sin(\theta) - f_b \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

Avec f_c, f_b représentent les coefficients de frottement du chariot et balancier respectivement.

2.11.2. Linéarisation des équations

Considérons que l'angle θ reste petit et que les termes non-linéaires peuvent être approximés par : $\cos(\theta) \approx 1$ et $\sin(\theta) \approx \theta$. D'où, on obtient le modèle linéaire suivant :

$$(M + m) \frac{d^2 z}{dt^2} - m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f_c \frac{dz}{dt} = F \quad (2.3)$$

$$m l \frac{d^2 z}{dt^2} - (I + m l^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgl\theta - f_b \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

2.11.3. Représentation d'état du système

La résolution du système d'équations différentielles (2.3) et (2.4) permet d'écrire les accélérations par rapport aux autres variables. On obtient ainsi la forme suivante :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{\Delta} \left[-m l f_b \frac{d\theta}{dt} + (ml)^2 g \theta - (I + m l^2) f_c \frac{dz}{dt} + (I + m l^2) F \right] \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{\Delta} \left[(m + M) mgl\theta - (m + M) f_b \frac{d\theta}{dt} - m l f_c \frac{dz}{dt} + m l F \right] \quad (2.6)$$

Avec,

$$\Delta = (m + M)I + m M l^2 \quad (2.7)$$

Le système considéré ici peut être décrit par quatre variables d'état : $x(t) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [z \ \dot{z} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ qui sont les positions et vitesses du balancier et celles du chariot. L'entrée du système est la force F et les sorties du système représentent la position longitudinale Z du chariot et l'angle θ que fait la tige du pendule avec la verticale. Le modèle d'état s'écrira donc :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I + m l^2) f_c}{\Delta} & \frac{(ml)^2 g}{\Delta} & -\frac{m l f_b}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m l f_c}{\Delta} & \frac{mgl(m + M)}{\Delta} & -\frac{(m + M) f_b}{\Delta} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + m l^2}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{m l}{\Delta} \end{bmatrix} u \quad (2.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.9)$$

2.12 Exemple numérique des paramètres du pendule inversé

Le tableau ci-dessous résume les variables et les paramètres utilisés du pendule inversé :

Descriptions	Symboles	Valeurs
Masse du chariot	M	0,5 Kg
Masse du balancier	m	0,2 Kg
Longueur du balancier	L	0,3 m
Inertie du balancier	I	0.006 Kg. m ²
Frottement du balancier	f _b	0,001 N/rad. sec ⁻¹
Frottement du chariot	f _c	0,02 N/m. sec ⁻¹

Tab.2.1 :Paramètres du pendule inversé.

2.13 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le procédé sur lequel nous allons travailler c'est-à dire le pendule inversé. La modélisation du système est basée sur les lois de la dynamique. Le modèle obtenu est régi par un système d'équations différentielles non linéaires couplées. Ensuite, nous ferons appelle à la théorie de la linéarisation des systèmes autour de l'équilibre pour obtenir un modèle linéaire. Notons que, son fonctionnement et son intérêt est important dans l'automatique.

Chapitre 3 Commande adaptative avec un modèle de référence

3.1 Introduction

La variation des paramètres d'un processus réel dans le temps va influencer sur la régulation du système avec des contrôleurs à paramètres fixes. Dans ces conditions, il faut trouver un régulateur qui a le pouvoir de l'adaptation devant ces variations. Parmi ces régulateurs, les régulateurs adaptatifs qui sont basés essentiellement sur l'identification en temps réel des paramètres du procédé. Cette technique d'identification est connue depuis les années soixante. Elle permet d'obtenir un modèle mathématique qui représente le plus fidèlement possible le comportement dynamique d'un processus. Donc, la commande adaptative fait partie d'un ensemble de techniques destinées à ajuster automatiquement les paramètres du correcteur des systèmes de commande lorsque les caractéristiques du processus et les perturbations sont inconnues ou varient dans le temps. Ce type de commande est non-linéaire puisqu'il comporte deux boucles de contre-réaction imbriquées : la boucle de correction et la boucle d'adaptation. Comme les preuves de stabilité sont extrêmement difficiles à établir, on développe des lois de commande adaptative basées sur la théorie de *Lyapunov* et la théorie d'hyper-stabilité.

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'historique, la définition de la commande adaptative, le principe de fonctionnement, les différentes approches de la commande adaptative, les objectifs et les difficultés de la commande adaptative. En fin de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au développement de lois de commande adaptative avec modèle de référence.

3.2 Historique

La notion d'ajustement automatique des paramètres d'un régulateur commence à pointer vers la fin des années 40. Dans les années 1960, les progrès de la théorie de la stabilité et de la théorie du contrôle ont amélioré la compréhension du contrôle adaptatif.

En 1966, Parks et d'autres ont trouvé un moyen de redéfinir les lois adaptatives basées sur les règles du MIT utilisées dans la commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC).

Dans les années 1970, Aström et Wittenmark, introduisirent une nouvelle structure d'un régulateur auto ajustable. En 1973 Carroll et Lindorff, produisirent l'observateur adaptatif qui garantit une bonne stabilité du système à contrôler. En 1974, Landau a proposé l'application du concept d'hyper-stabilité pour la conception de systèmes de contrôle adaptatifs. La conception résultante est asymptotiquement hyper-stable et la structure du contrôleur adaptatif est simple. En 1978, Narendra et Valavani élaborèrent un contrôleur adaptatif pour des systèmes d'ordres un et deux. Par la suite, Feuer et Morse donnent la première solution pour le cas où l'ordre est supérieur à deux ; néanmoins, cette méthode était relativement complexe.[16]

3.3 Définition de la commande adaptative

On s'est aperçu qu'un régulateur fixe ne pouvait pas toujours fournir un comportement acceptable du système en toute situation. En conséquence, l'objectif de la commande Adaptative est l'ajustement automatique des régulateurs, afin de réaliser ou maintenir de façon identique un certain niveau de performances, quand les paramètres du procédé à commander varient dans le temps.

Commande adaptative est un ensemble des techniques utilisées pour l'ajustement automatique des régulateurs pour assurer les performances voulues quand les paramètres du système à contrôler sont inconnus et/ou variaient avec le temps. [2]

Le contrôle adaptatif est un contrôle conçu pour réagir à tout moment dans le sens désiré (généralement pour minimiser l'erreur entre le point de consigne et la sortie).

3.4 Principe de fonctionnement

La commande adaptative consiste en un estimateur de paramètres, qui génère des estimations de paramètres en ligne et dispose d'une loi de contrôle pour commander les systèmes dont les classes et les paramètres sont généralement inconnus (Figure 3.1). Le choix de l'estimateur de paramètres, le choix de la loi de commande et leur combinaison conduisent à différents types de contrôle adaptatif.

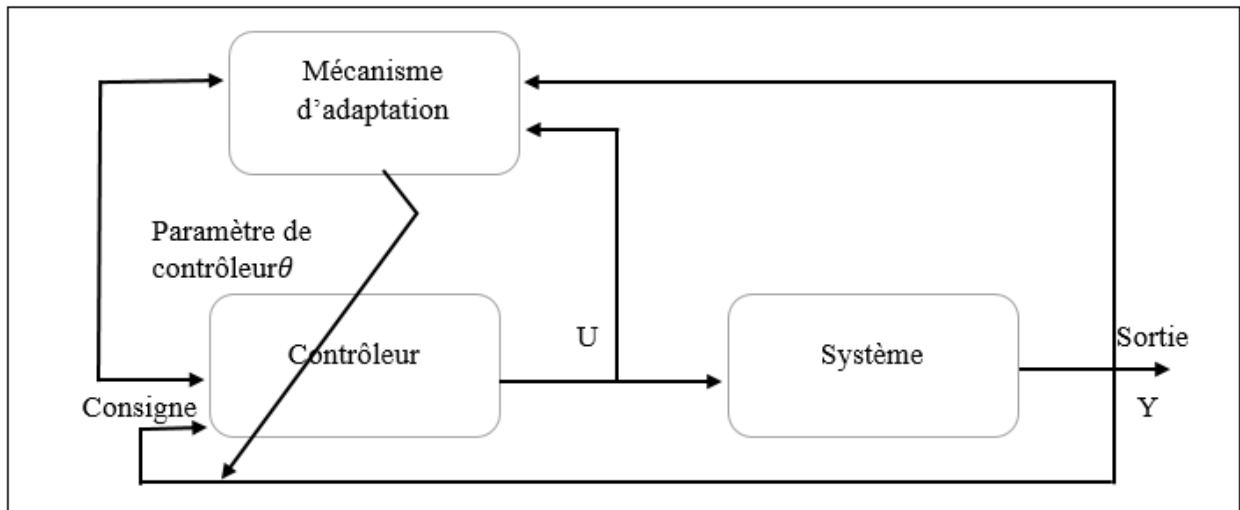


Figure 3.1. Structure d'un estimateur adaptatif.

En effet un système de commande adaptative est composé de deux boucles :

3.4.1 Boucle de contre-réaction conventionnelle

Cette boucle permet de réduire l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler mais ses performances dynamiques vont varier sous l'effet des perturbations paramétriques.

3.4.2 Boucle d'adaptation des paramètres du régulateur

Cette boucle permet de maintenir les performances du système en présence des variations des paramètres du procédé. Cette boucle constituée d'un algorithme d'adaptation paramétrique et une méthode de la synthèse dans le cas d'une commande adaptative indirecte.

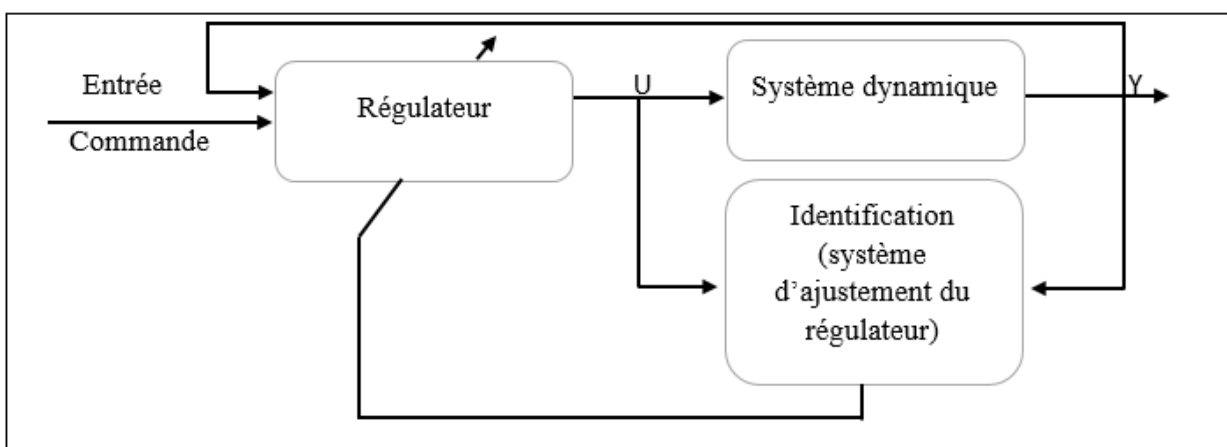


Figure 3.2. Structure d'un système de commande adaptative d'un système dynamique.

3.5. Les étapes de la synthèse d'un contrôleur adaptative

La synthèse d'un contrôleur adaptatif passe le plus souvent par les phases suivantes :

- Spécification des indices de performances désirées (ex : Facteur d'amortissement, temps de réponse, localisation des pôles...etc.)
- Définition de la structure de commande ou type de régulateur à utiliser pour réaliser les performances souhaitées.
- Mesurer les indices des performances du processus et les comparer avec les indices des performances désirées. Puis traiter l'écart entre les indices des performances désirées et les indices des performances mesurés par un mécanisme d'adaptation.
- Enfin, la sortie du « mécanisme d'adaptation » va agir sur les paramètres de régulateur ou directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système. [2]

3.6. Objectif de la commande adaptative

Parmi les objectives de la commande adaptative sont :

- Ajustement automatique des régulateurs (effet : Réduction du temps d'ajustement et amélioration des performances).
- Détermination automatique des paramètres optimaux des régulateurs pour divers points de fonctionnement du procédé.
- Le maintien des performances exigées du système de commande en cas des variations des paramètres du processus.
- Possibilité de mise en œuvre des régulateurs plus complexes et plus performants que les PID (ceci comme conséquence de l'ajustement automatique).
- Détection des variations anormales de caractéristiques du processus (pouvant éventuellement avoir pour origine des perturbations structurelles). Ces variations se reflètent dans les valeurs des paramètres fournies par les algorithmes d'adaptation.
- Conception de nouveaux procédés technologiques utilisant des systèmes de commande adaptative (pour assurer le fonctionnement correct du procédé).[2]

3.7. Les difficultés d'implémentation de la commande adaptative

Durant l'implémentation de la commande adaptative, il souvent de rencontrer les difficultés suivantes :

- Le temps du calcul est important pour l'implémentation en ligne.
- Garantir la stabilité et la convergence désirée par rapport à la référence.

3.8. Domaines d'application de la commande adaptative

Les techniques de commande adaptative ont été utilisées avec succès pour un grand nombre d'applications, par exemples : Asservissements à moteurs électriques, robots manipulateurs, cimenteries, réacteurs chimiques, machines à papier, régulation de Ph, échangeur de chaleur, etc.

En ce qui concerne la rentabilité, les éléments suivants sont à prendre en compte : Amélioration de la qualité des produits, augmentation de la production, économie d'énergie, espacement des arrêts d'entretien et détection précoce des anomalies. [17]

3.9. Les approches de la commande adaptative

Les lois de commande adaptative sont souvent classées en deux grandes catégories :

- Commande adaptative directe (ou implicite)
- Commande adaptative indirecte (ou explicite)

3.9.1 Commande adaptative directe

La première approche est appelée commande adaptatif directe (Voir Figure 3.3), le système d'identification est paramétré en fonction des paramètres du régulateur souhaité, qui sont estimés directement (sans calculs intermédiaires impliquant des estimations de paramètres du système dynamique). La Commande Adaptative Directe est une approche moins intuitive que la précédente. Cette approche est appelée aussi commande adaptative implicite.

La figure suivante illustre ce type de commande, pour laquelle les performances de la boucle fermée sont spécifiées par l'intermédiaire d'un modèle de référence choisi par l'utilisateur de façon cohérente avec les possibilités intrinsèques du système :

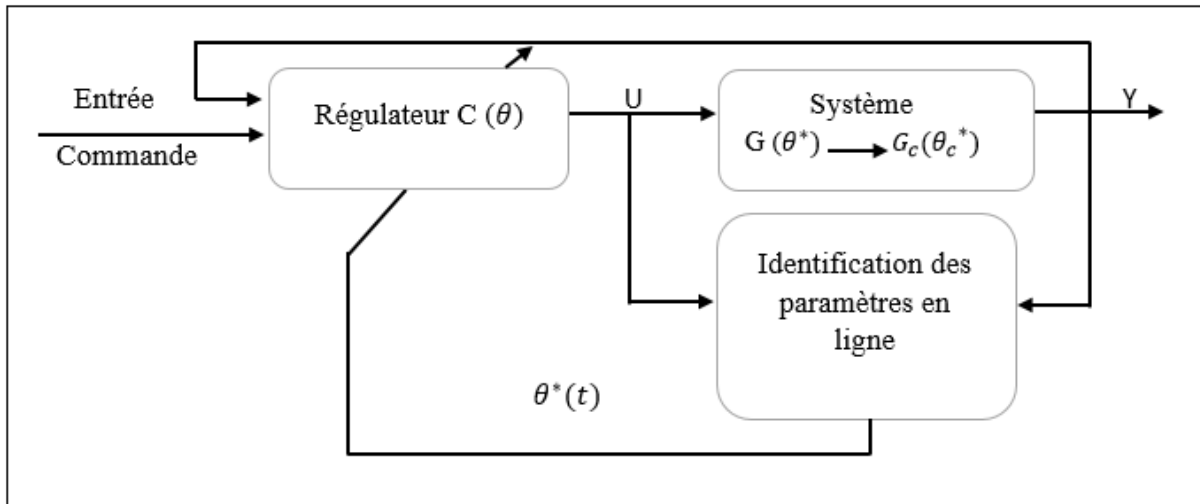


Figure 3.3. Structure de commande adaptative directe.

3.9.2 Commande adaptative indirecte

La deuxième approche appelée commande adaptative indirecte, les paramètres du système à commander sont estimés en ligne et en temps réel des paramètres du système à partir des mesures des entrées et des sorties du processus. Ces estimations sont utilisées pour le calcul des paramètres de régulateur en utilisant des relations algébriques liant les paramètres du système et les paramètres du correcteur. Ce principe permet donc de séparer totalement les deux étapes d'identification puis commande. Le schéma d'une commande adaptative indirecte est illustré sur la Figure 3.4.

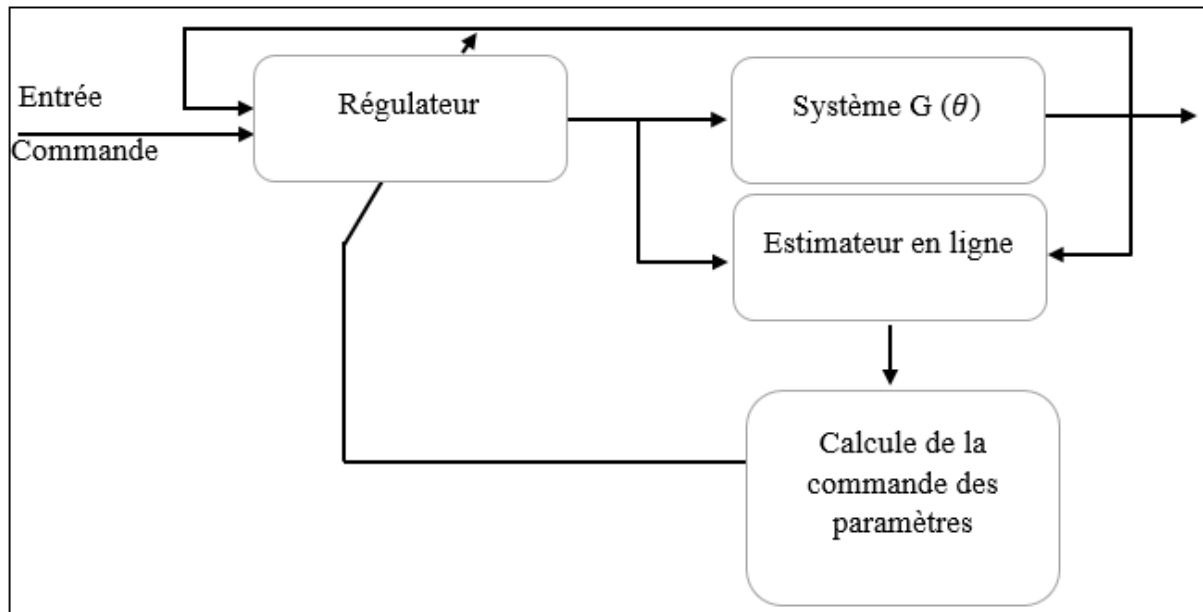


Figure 3.4. Structure de la commande adaptative indirecte.

3.10. Type de commande adaptative

Il existe principalement quatre types d'approches de commande adaptative :

- Commande par gain programmé.
- Contrôleurs auto-ajustable.
- Commande duale.
- Commande adaptative à Modèle de Référence.

3.10.1 Commande de gain programmé

La commande à grand gain est un outil bien connu et populaire pour la stabilisation robuste des systèmes de commande satisfaisant certaines hypothèses sur le processus. Dans le but de trouver la valeur nécessaire du paramètre grand gain, certaines propriétés du processus à commander, comme l'ordre du système, le signe de son gain en hautes fréquences et l'amplitude de l'incertitude doivent être connues. [16]

Un schéma bloc représentant le principe de cette approche est donné par la Figure 3.5 suivante :

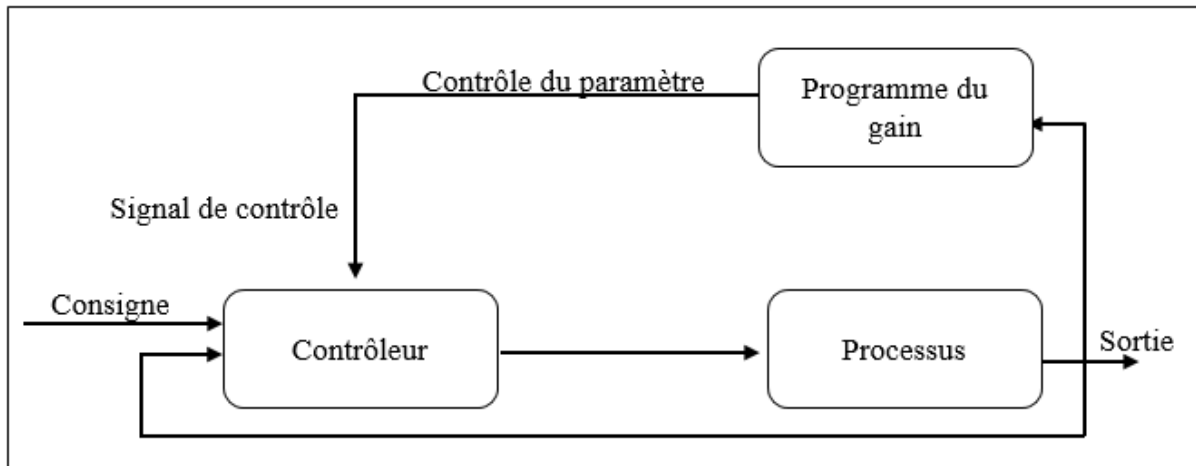


Figure 3.5. Schéma block d'un système adaptatif à gain programmé.

3.10.2 Commande Auto-Ajustable (STR)

C'est l'une des commandes adaptatives indirectes, utilisés dans le calcul des paramètres du contrôleur. A l'origine de la commande à modèle de référence trait les problèmes de l'asservissement alors que le contrôleur auto-ajustable était destiné aux problèmes de régulation.

Un schéma de principe de cette approche est représenté sur la Figure 3.6.

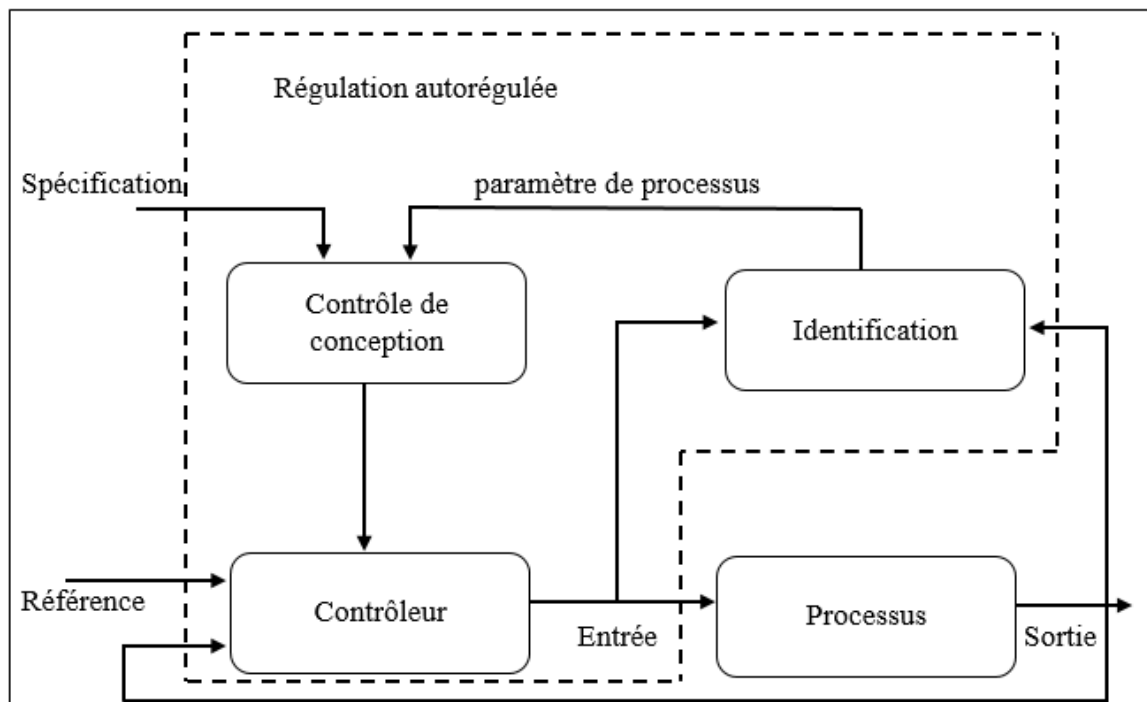


Figure 3.6. Schéma block d'un système adaptatif auto-ajustable (STR).

3.10.3 Commande duale

Dans les approches précédentes, les paramètres estimés (du contrôleur ou du système) sont supposés certains. Les incertitudes sur les paramètres ne sont pas considérées dans la synthèse du contrôleur, pour cela l'idée consiste à utiliser « *la théorie de commande stochastique non linéaire* » qui conduit à ce qu'on appelle « *Commande dual* », par conséquent les incertitudes sur les paramètres estimés sont considérées dans la phase de conception du contrôleur.

Les estimations des paramètres sont supposées incertaines, et ces incertitudes sont considérées stochastiques est tellement compliquée qu'ils ne sont pas étaient appliquée en pratique.

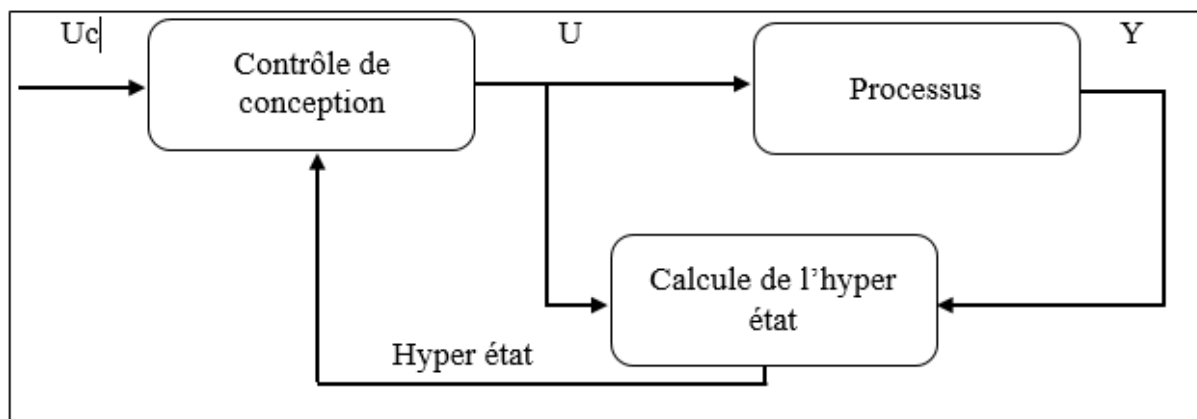


Figure 3.7 : schéma block d'un système adaptatif à commande duale

3.10.4 Commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC)

C'est l'une des approches de la commande adaptative les plus utilisées, dans laquelle les performances désirées sont spécifiées par le choix d'un modèle de référence. Cette méthode a été développée par Whitaker et ses collègues en 1958. Le système adaptatif à modèle de référence, est une manière pratique d'imposer des spécifications au système de commande. La technique consiste à estimer et ajuster directement les paramètres du régulateur en fonction de l'erreur entre le procédé et le modèle de référence.

La différence entre la sortie du procédé et la sortie du modèle de référence est une mesure de la différence entre la performance réelle et la performance désirée. Cette information est utilisée par le mécanisme d'adaptation pour ajuster automatiquement les paramètres du régulateur.[19]

3.11. Synthèse de lois de commande adaptative

Pour développer une loi de commande adaptative directe avec un modèle de référence, on cite trois méthodes :

- Méthode basée sur l'algorithme du gradient
- Méthode basée sur les fonctions de *Lyapunov*
- Méthode basée sur la théorie d'hyper-stabilité

3.11.1 Méthode du gradient (ou règle MIT)

La loi de MIT est l'approche originale pour la commande adaptative directe à modèle de référence. Pour appliquer la loi MIT, on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur des paramètres K , et la réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie de modèle de référence $y_m(t)$. L'ajustement des paramètres du régulateur se fait d'une manière à minimiser une fonction de coût quadratique définie par :

$$J(k) = \frac{1}{2} e^2(t) \quad (3.1)$$

Avec,

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (3.2)$$

Représente l'erreur de poursuite (l'écart entre la sortie du procédé et la sortie du modèle de référence).

En utilisant la méthode du gradient, on peut résoudre ce problème :

$$\dot{k}(t) = -\lambda \frac{dJ(k)}{dk} \quad (3.3)$$

Où λ est un paramètre petit. D'où, on écrit :

$$\frac{dJ(k)}{dk} = \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{2} e^2(t) \right] \quad (3.4)$$

Comme la sortie du système qui dépend des paramètres du régulateur K , alors :

$$\frac{de(t)}{dk} = \frac{d}{dk} (y(t) - y_m(t)) \quad (3.5)$$

$$\frac{de(t)}{dk} = \frac{dy(t)}{dk} \quad (3.6)$$

Finalement, l'équation (3) s'écrira donc,

$$\dot{k}(t) = -\lambda e(t) \frac{dy(t)}{dk} \quad (3.7)$$

Où $K = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]^T$ est le vecteur des paramètres du régulateur.

$$\frac{dy(t)}{dk} = \left[\frac{dy}{dk_1} \quad \frac{dy}{dk_2} \quad \dots \quad \frac{dy}{dk_n} \right]^T \quad (3.8)$$

Cette dernière équation est appelée un vecteur de sensibilité.

3.11.2 Méthode de *Lyapunov*

En automatique, la notion de stabilité au sens de *Lyapunov* apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc. D'une manière générale, l'état d'équilibre d'un système peut être représenté sous trois formes : Instabilité, stabilité asymptotique et stabilité non asymptotique.

3.11.3 Commande MRAC basée sur l'hyper-stabilité

Considérons un système physique décrit par l'équation d'état suivante [11,15] :

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (3.9)$$

Avec $x_p(t) \in \mathfrak{R}^n$ vecteur d'état de dimension n , $u_p(t) \in \mathfrak{R}^m$ vecteur de commande de dimension m , $A_p \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ matrice de dimension $n \times n$, $B_p \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ matrice de dimension $n \times m$.

Le modèle de référence est décrit par :

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (3.10)$$

Avec $A_m \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B_m \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes respectivement.

La dynamique de l'erreur :

$$x_e(t) = x_m(t) - x_p(t) \quad (3.11)$$

Est régit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}_e(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}_p(t) \quad (3.12)$$

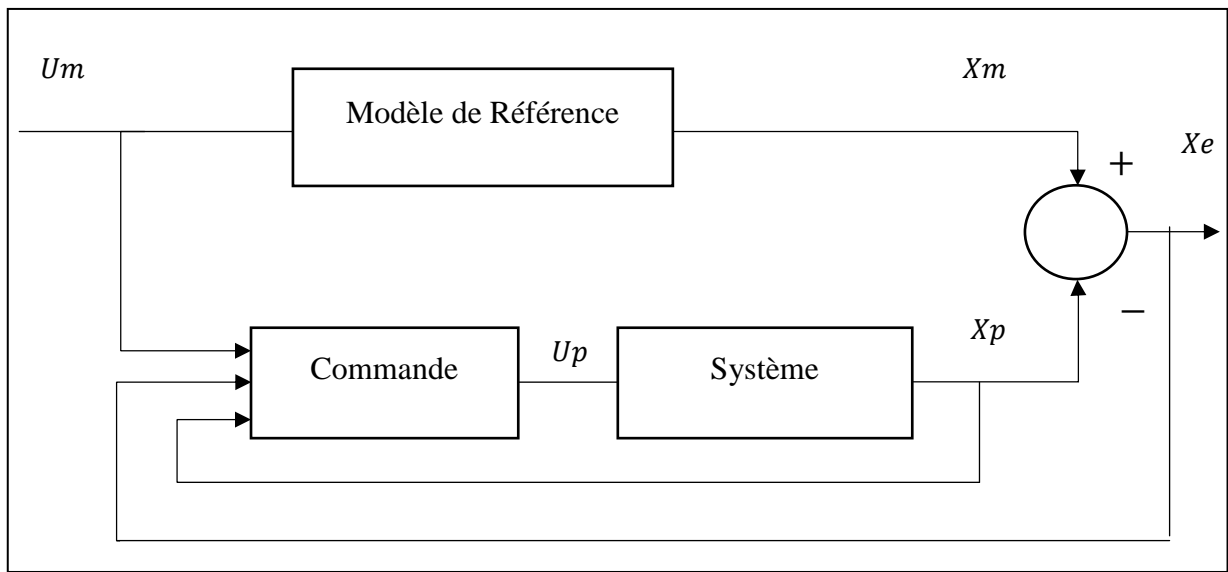


Figure 3.8. Schéma synoptique de la commande adaptative avec un modèle de référence.

D'après les conditions d'Erzberger [13] :

$$A_m - A_p = B_p B_p^+ (A_m - A_p) \quad (3.13)$$

$$B_m = B_p B_p^+ B_m \quad (3.14)$$

Où $B_p^+ = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T$ est appelé : *Pseudo inverse gauche de Penrose*.

A partir des équations (9 – 14), on obtient :

$$\dot{x}_e(t) = A_m x_e(t) - B_p \Phi \quad (3.15)$$

$$y_e(t) = C_e x_e(t) \quad (3.16)$$

Avec

$$\Phi = [B_p^+(A_p - A_m)x_p(t) - B_p^+B_m u_m(t) + u_p(t)] \quad (3.17)$$

La méthode de l'hyper-stabilité à la synthèse des lois de commandes adaptives consiste à ramener le problème de synthèse à un problème d'hyper-stabilité. En effet, on cherche à élaborer un mécanisme d'adaptation des paramètres variables de façon à ce que le système de commande adaptative soit asymptotiquement stable c'est-à-dire l'erreur x_e tend vers à zéro en régime permanent. (Voir Figure 3.8).

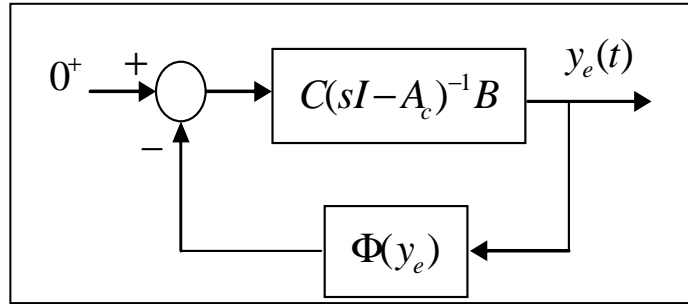


Figure 3.9. Système hyper-stable.

Donc il suffit de choisir les éléments variables du système linéaire de façon à ce que sa fonction de transfert soit strictement réelle positive, et le bloc de la contre réaction à caractéristique non linéaire, vérifie l'inégalité de Popov[5] :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y_e^T(t) \Phi dt \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t_1 \geq t_0$$

Où γ_0^2 est une constante positive indépendante du temps. Le problème principal rencontré dans cette étude était la recherche d'une commande u_p de la forme :

$$u_p(t) = k_x(t, x_e)x_p(t) + k_u(t, x_e)u_m(t) + k_m x_m(t) \quad (3.18)$$

Avec, $k_x(t, x_e), k_u(t, x_e)$ sont des matrices dépendantes du temps et de l'erreur $x_e(t)$.

A partir des équations (15) - (18), on obtient la représentations du système hyper-stable :

$$\dot{x}_e(t) = (A_m + B_p k_m)x_e(t) - B_p \Phi \quad (3.19)$$

$$y_e(t) = C_e x_e(t) \quad (3.20)$$

Avec, $\Phi = [k_x(t, x_e) - B_p^+(A_m - A_p) + k_m]x_p(t) + [k_u(t, x_e) - B_p^+B_m]u_m(t)$ (3.21)

On applique l'inégalité de Popov :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y_e^T(t) \Phi dt \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t_1 \geq t_0 \quad (3.22)$$

En remplaçant l'équation (21) dans l'équation (22), on obtient :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y_e^T(t) \left\{ [k_x(t, x_e) - B_p^+(A_m - A_p) + k_m] x_p(t) + [k_u(t, x_e) - B_p^+ B_m] u_m(t) \right\} dt \geq -\gamma_0^2 \quad (3.23)$$

Le choix particulier qui satisfait l'inégalité de Popov (23) est,

$$k_x(t, x_e) + k_m - B_p^+(A_m - A_p) = \alpha_1 y_e(t) x_p^T(t) + \int_0^t \beta_1 y_e(t) x_p^T(\tau) d\tau \quad (3.24)$$

$$k_u(t, x_e) - B_p^+ B_m = \alpha_2 y_e(t) u_m^T(t) + \int_0^t \beta_2 y_e(t) u_m^T(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

Où α_1, β_1 et α_2, β_2 sont des matrices définies positives de dimension appropriée.

Maintenant, nous devons définir les expressions suivantes comme se suit :

$$k_x(t, x_e) = k_x + \Delta k_x(t, x_e) \quad (3.26)$$

$$k_u(t, x_e) = k_u + \Delta k_u(t, x_e) \quad (3.27)$$

$$u_p(t) = u_{p0}(t) + u_{p1}(t) \quad (3.28)$$

En outre, les matrices constantes k_x et k_u sont conçues pour certaines valeurs spécifiques des paramètres du système qui sont données par :

$$k_x = -k_m + B_p^+(A_m - A_p) \quad (3.29)$$

$$k_u = B_p^+ B_m \quad (3.30)$$

Et les gains d'adaptation,

$$\Delta k_x(t, x_e) = \alpha_1 y_e(t) x_p^T(t) + \int_0^t \beta_1 y_e(t) x_p^T(\tau) d\tau \quad (3.31)$$

$$\Delta k_u(t, x_e) = \alpha_2 y_e(t) u_m^T(t) + \int_0^t \beta_2 y_e(\tau) u_m^T(\tau) d\tau \quad (3.32)$$

Cependant, la loi de contrôle nominal, est donnée par,

$$u_{p0}(t) = k_x x_p(t) + k_u u_m(t) + k_m x_m(t) \quad (3.33)$$

Et la loi de contrôle adaptatif, est donnée par,

$$u_{p1}(t) = \Delta k_x(t, x_e) x_p(t) + \Delta k_u(t, x_e) u_m(t) \quad (3.34)$$

La structure de commande avec un modèle référence est illustrée sur la Figure 3.9.

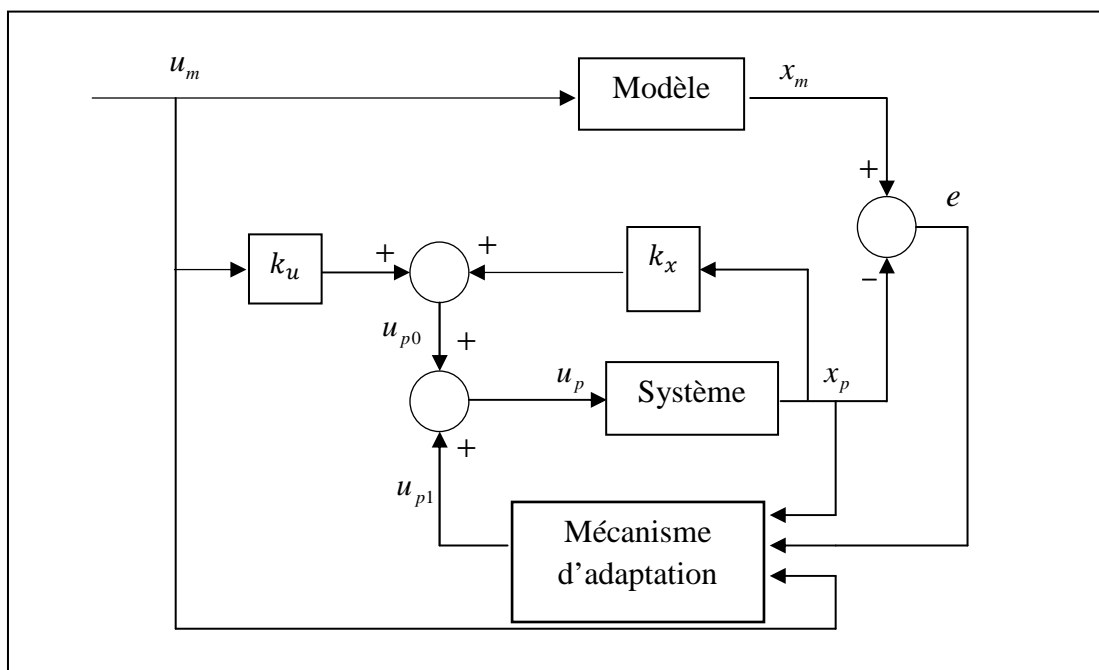


Figure 3.10. Structure de commande avec un modèle référence.

3.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de la commande adaptative à modèle de référence et les différentes approches utilisées pour la synthèse de cette stratégie de commande.

La commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC) a connu maintes applications industrielles, et surtout dans le domaine de l'aéronautique. En effet, la stabilité asymptotique est assurée, à condition que la matrice de transfert de la partie linéaire de la contre-réaction équivalente soit strictement positive réelle. Le mécanisme d'adaptation et l'erreur de poursuite du modèle ont été améliorés pour une classe de systèmes linéaires variables dans le temps. Le chapitre suivant est réservé pour les résultats de simulation

Chapitre 4 Simulations et interprétation des résultats

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons simuler la réponse de notre système (pendule inversé) par la commande LQR et la commande MRAC, en utilisant le langage de programmation MATLAB & SIMULINK. Avant d'entamer la simulation du système en boucle fermée, il est préférable de faire des tests en boucle ouverte.

4.2 Etude du système en boucle ouverte

D'après le modèle d'état du pendule inversé (Eq. 2.5) et (Eq. 2.6), et selon les caractéristiques du système illustrées sur le Tableau 2.1, on trouve les valeurs numériques du système représenté dans l'espace d'état :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tester la stabilité de notre système, on utilise la fonction *eig* de Matlab pour calculer ses valeurs propres :

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.6041 \\ -0.1428 \\ 5.5651 \end{bmatrix}$$

D'après les valeurs propres, on remarque que les systèmes est instable.

La réponse impulsionnelle et indicielle du système en boucle ouverte est représentée sur la Figure 4.1, et Figure 4.2 respectivement.

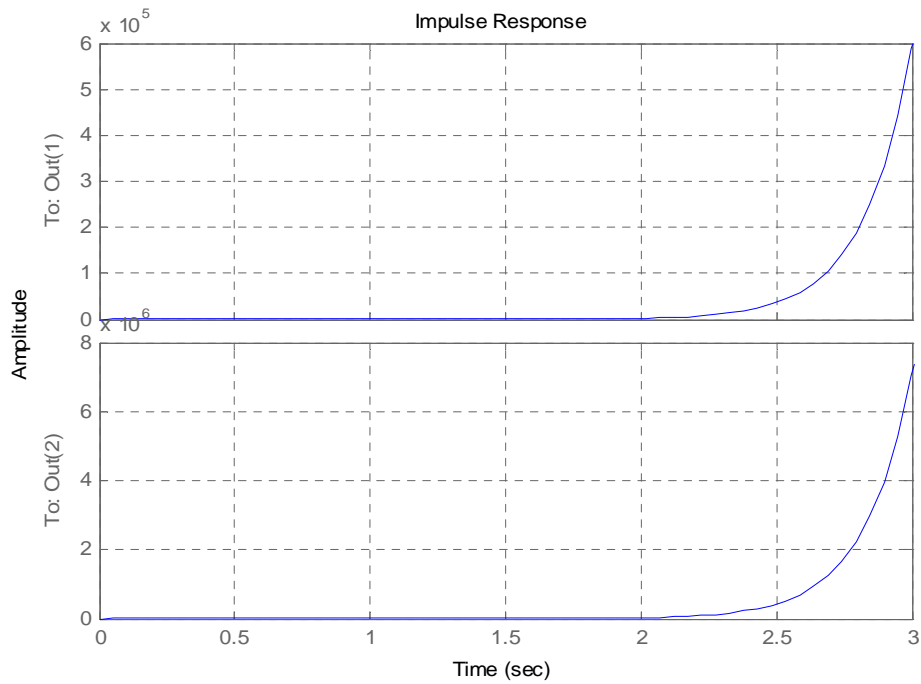


Figure 4.1. Réponse impulsionnelle du système en boucle ouverte.

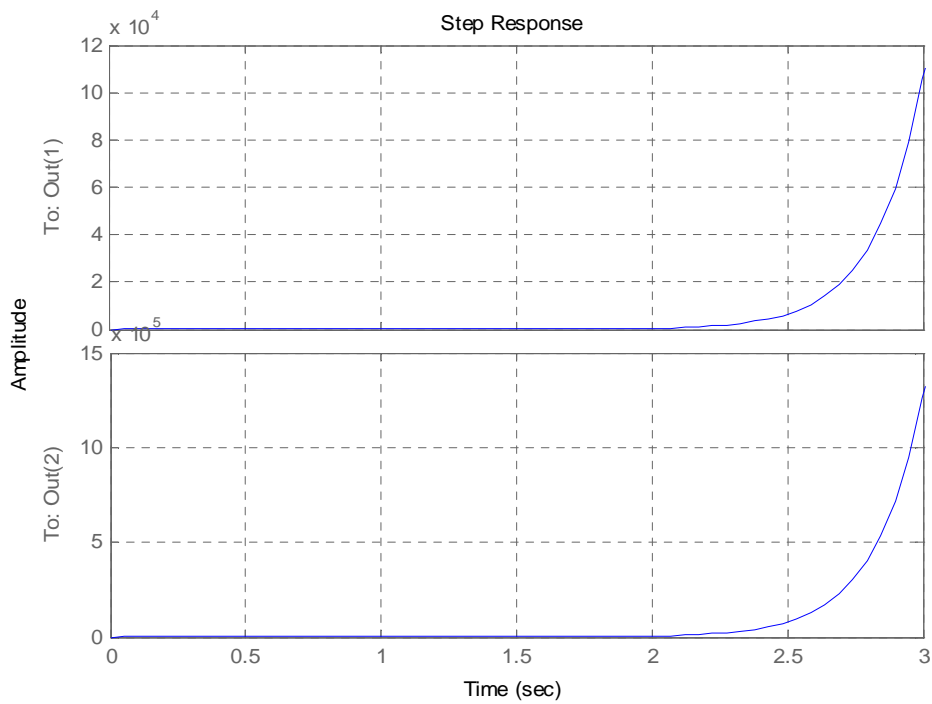


Figure 4.2. Réponse indicielle du système en boucle ouverte.

D'après la réponse du système en boucle ouverte, on remarque que le déplacement du chariot z et la position angulaire du pendule inversé θ divergent, ce qui justifie l'instabilité du système.

4.3 Etude du système en boucle fermée

Dans cette section, nous allons simuler la réponse système (pendule inversé) par la commande LQR, par placement de pôles et nous terminons nos simulations par la commande MRAC.

4.3.1 Commande du système par la commande LQR

Le choix des matrices de pondération :

- ❑ Choisir tout simplement les matrices de pondération de type identité.
- ❑ Accélérer ou décélérer globalement la dynamique du système en multipliant la matrice Q par un scalaire supérieur ou inférieur à 1, jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée. Si l'analyse du système met en évidence que certains états présentent des dynamiques relatives trop lentes, les éléments diagonaux correspondants peuvent alors être augmentés.
- ❑ Modifier les valeurs des éléments diagonaux de la matrice R en fonction des sollicitations admissibles au niveau des actionneurs.

L'utilisation de la commande **LQR** de MATLAB selon la syntaxe suivante :

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

Pour $Q = [5000 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 100 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ et $R = 1$, on obtient :

$$K = [-70.7107 \ -37.8345 \ 105.5298 \ 20.9238]$$

Les réponses du système en boucle fermée pour une entrée échelon unité sont représentées sur le même graphe de la Figure 4.3.1, où sur deux graphes différents de la Figure 4.3.2:

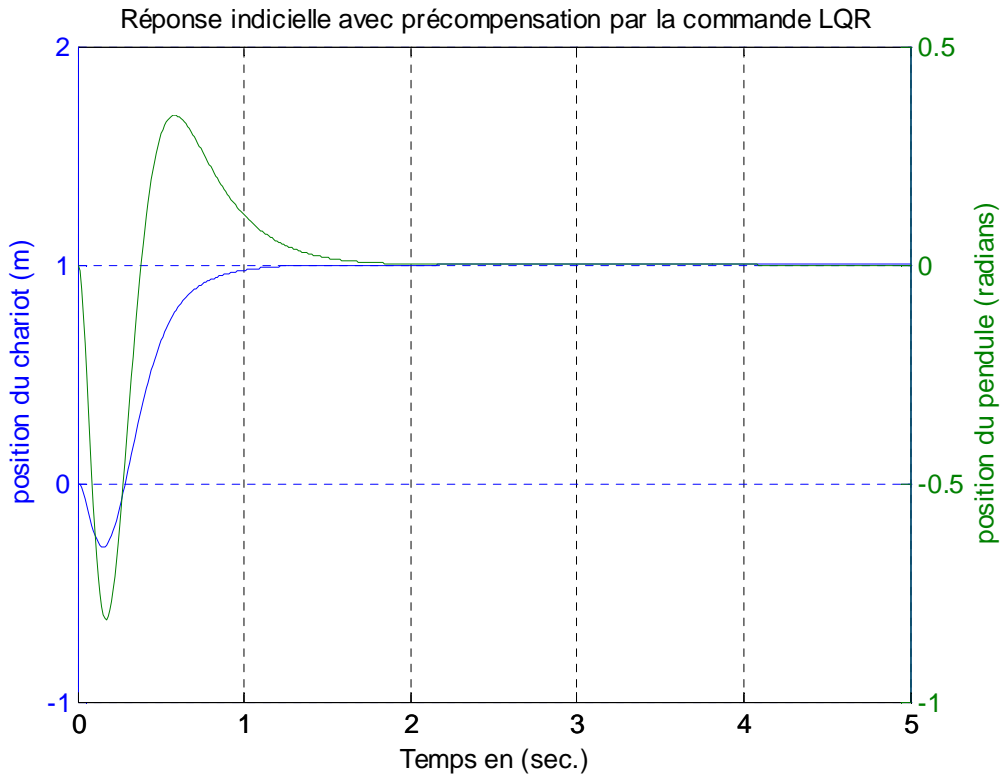


Figure 4.3.1. Réponse indicielle du système par la commande LQR.

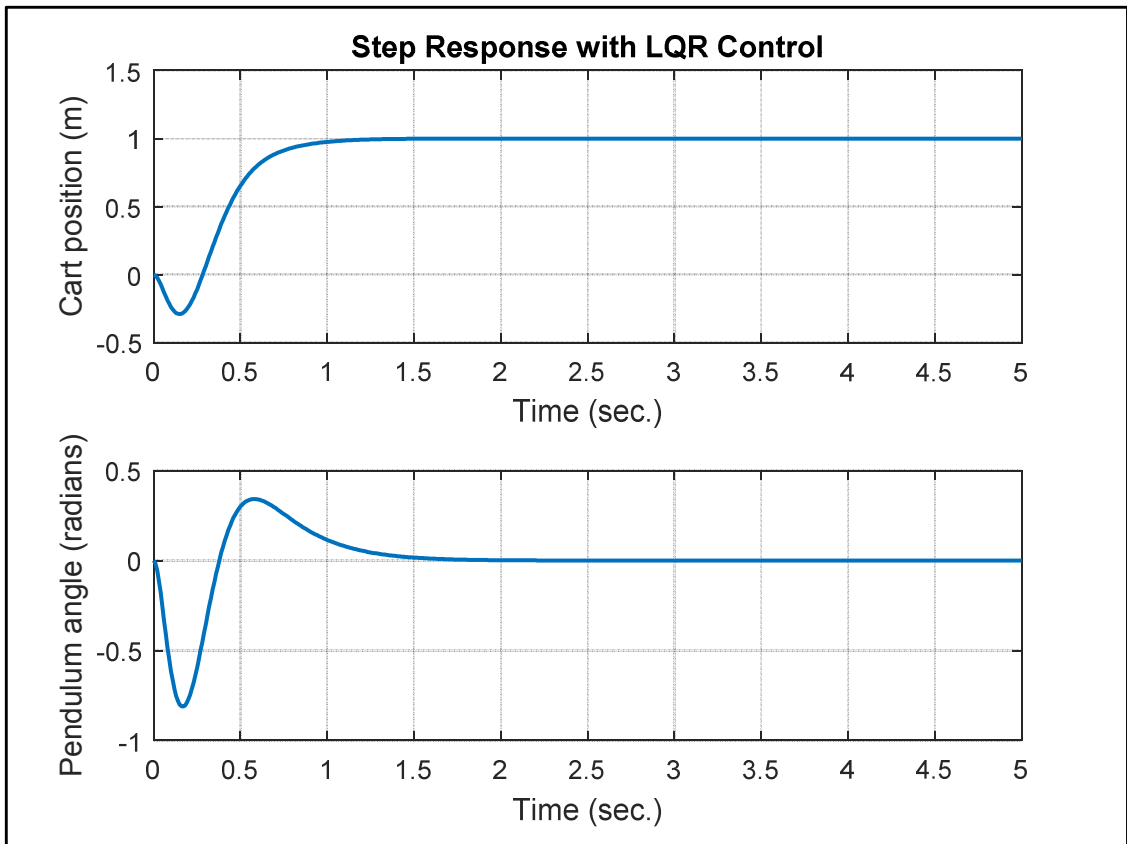


Figure 4.3.2. Réponse indicielle du système par la commande LQR.

4.3.2 Commande du système par placement de pôles

En utilisant la fonction *place* de MATLAB pour calculer K , avec les pôles désirés :

$$\text{pôles} = \begin{bmatrix} -8.4910 + 7.9282i \\ -8.4910 - 7.9282i \\ -4.7592 + 0.8310i \\ -4.7592 - 0.8310i \end{bmatrix}$$

Cette fonction permet de calculer les paramètres du régulateur (résolution de l'équation) en lui spécifiant les pôles souhaités en boucle fermée et les matrices d'état A et B obtenus par linéarisation, les pôles imposés sont ajustés graduellement :

$$K = [-70.7107 \quad -37.8345 \quad 105.5298 \quad 20.9238]$$

La réponse du système en boucle fermée pour une entrée échelon unité, on trouve :

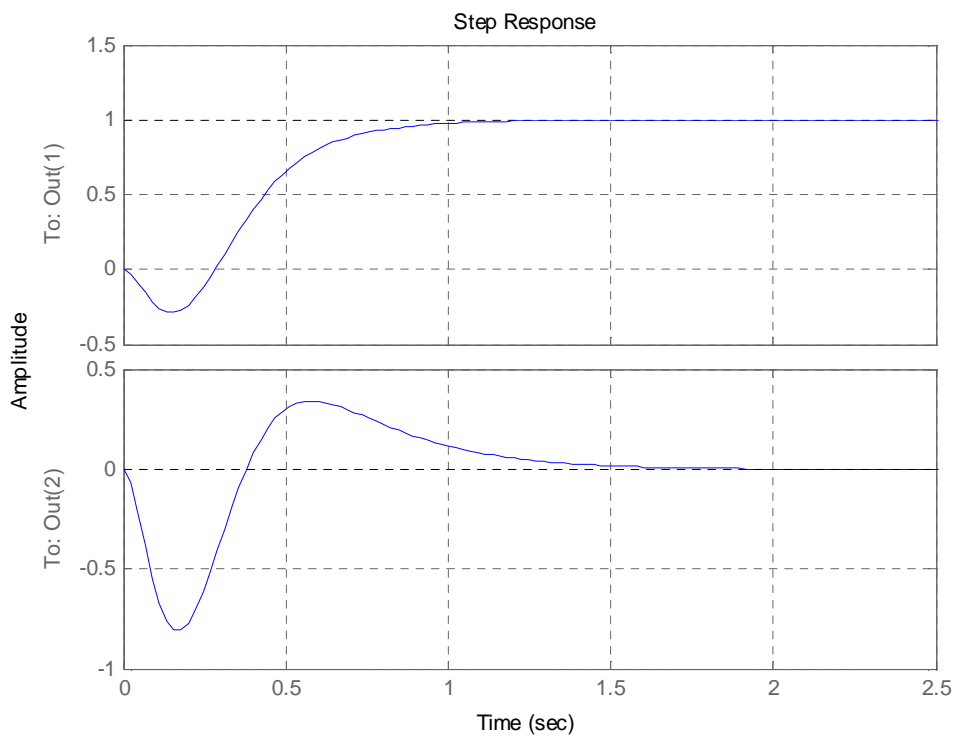


Figure 4.4. Réponse indicielle du système par placement de pôles.

4.3.3 Commande avec un modèle de référence

Considérons un modèle de référence stable représenté dans l'espace d'état par :

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 128.5674 & 68.6091 & -189.2017 & -38.0438 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 321.4185 & 171.5227 & -448.5043 & -95.1095 \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix}$$

Les gains nominaux k_m , k_x et k_u de la commande $u_p(t)$ sont conçus pour certaines valeurs spécifiques des paramètres du système qui sont données par (éq.3.29 et éq. 3.30) :

$$k_m = -k = 10^{-11} \times [-0.2160 \quad -0.0827 \quad 0.1421 \quad 0.0332]$$

$$k_x = -k_m + B_p^+(A_m - A_p) = [70.7121 \quad 37.8350 \quad -105.5309 \quad -20.9241]$$

$$k_u = B_p^+ B_m = [1]$$

4.3.3.1 Commande optimale avec un modèle de référence

L'implémentation de la commande optimale avec un modèle de référence sur MATLAB & SIMULINK (voir annexe 1), nous donne la réponse indicielle du système représentée sur la Figure 4.5, et la réponse à une entrée de type un signal carré représentée sur la Figure 4.6.

4.3.3.2 Commande adaptative avec un modèle de référence

L'implémentation de la commande adaptative avec un modèle de référence sur MATLAB & SIMULINK (voir annexe 2), nous donne la réponse indicielle du système représentée sur la Figure 4.7.1 et Figure 4.7.2, et la réponse à une entrée de type un signal carré représentée sur la Figure 4.8.1 et Figure 4.8.2.

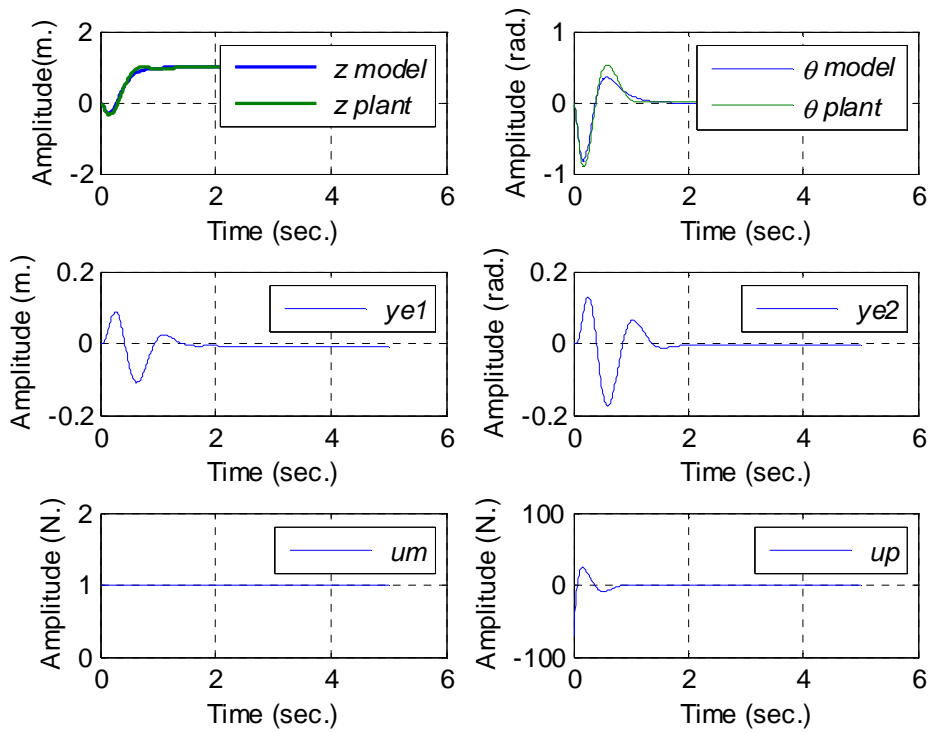


Figure 4.5. Commande optimale avec un modèle de référence pour un signal d'entrée échelon unité.

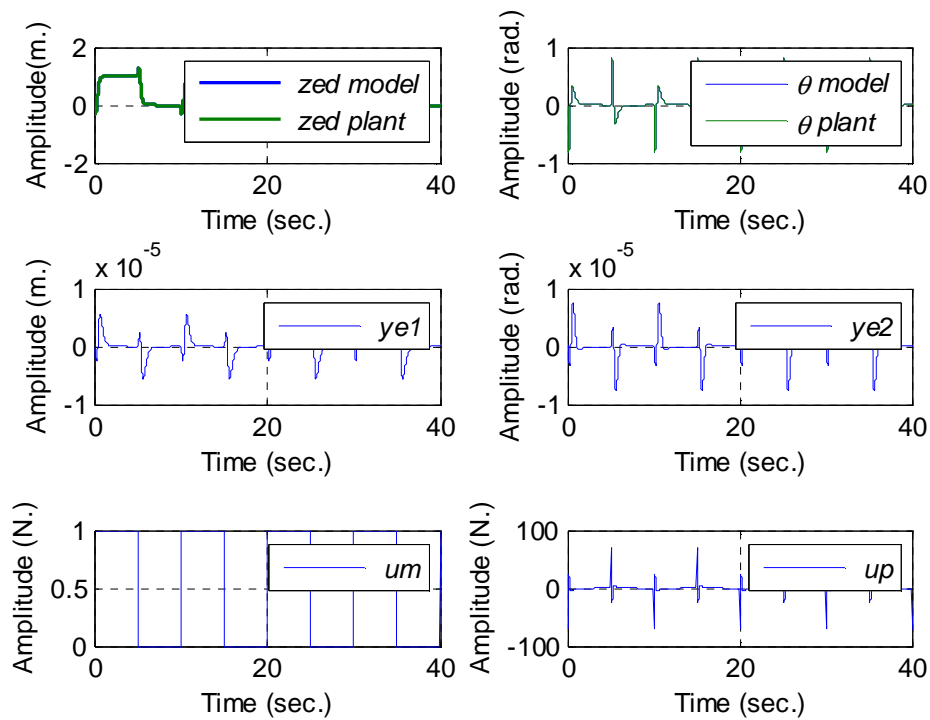


Figure 4.6. Commande optimale avec un modèle de référence pour un signal d'entrée rectangulaire.

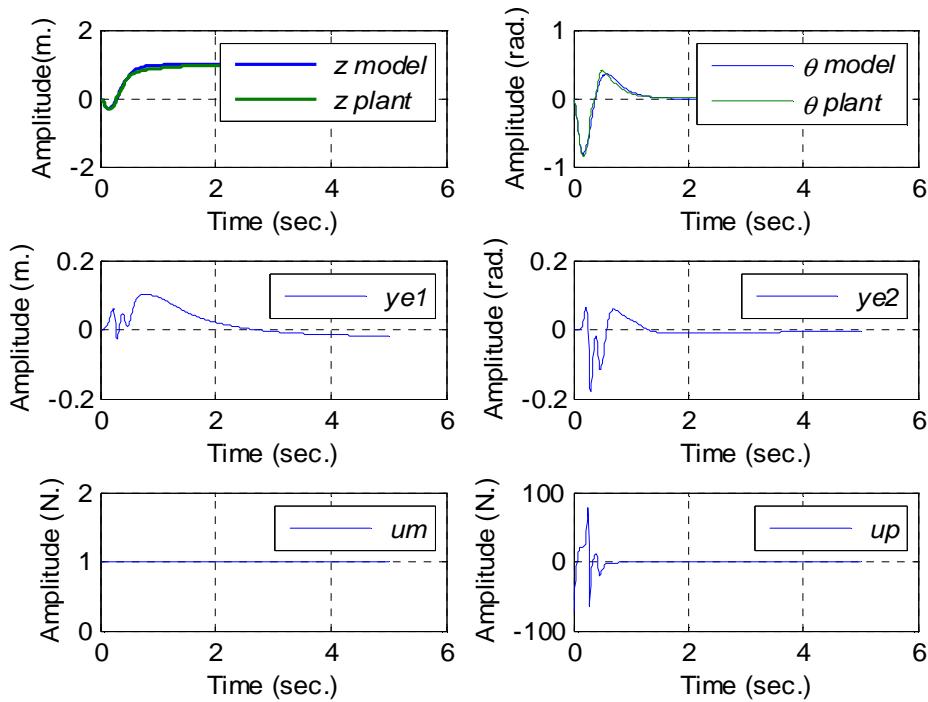


Figure 4.7.1. Commande MRAC avec action (P), pour un signal d'entrée échelon unité.

$\alpha_1=20; \beta_1=0; \alpha_2=20; \beta_2=0.$

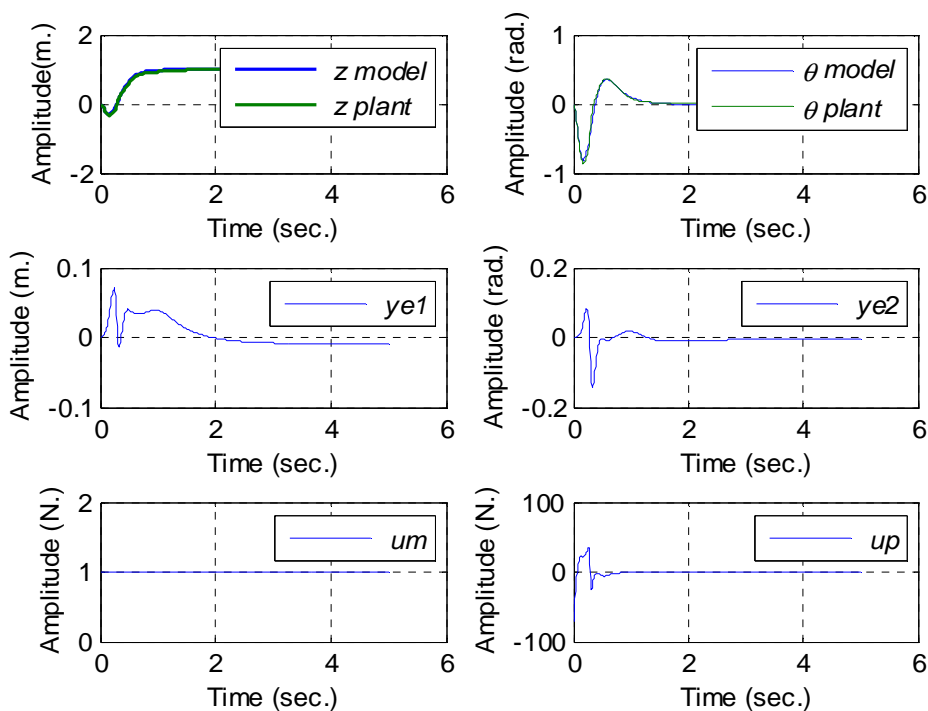


Figure 4.7.2. Commande MRAC avec action (PI), pour un signal d'entrée échelon unité.

$\alpha_1=10; \beta_1=2; \alpha_2=10; \beta_2=2.$

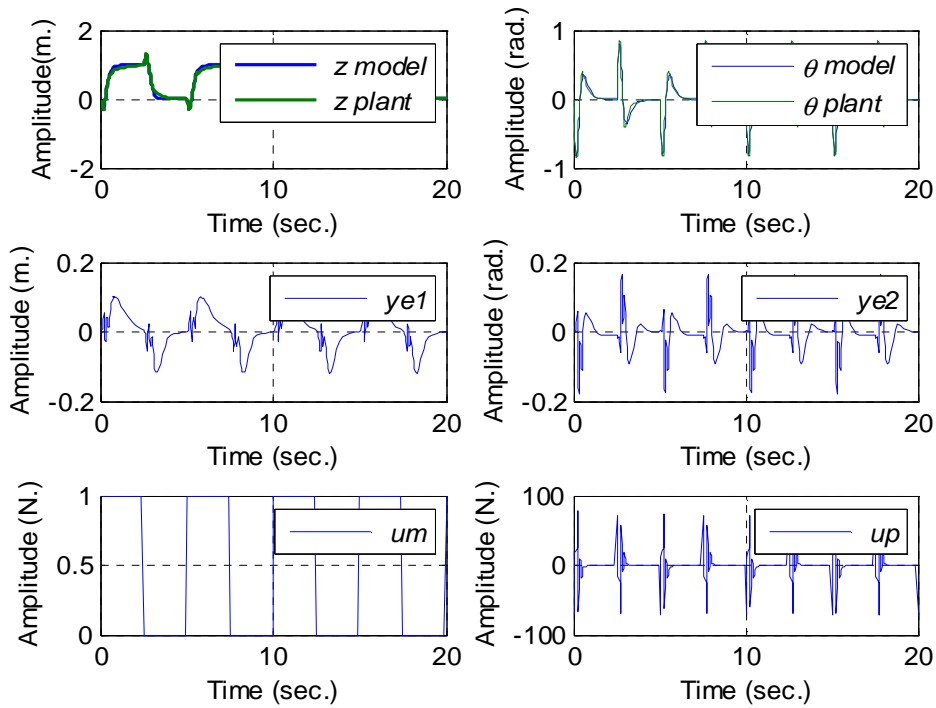


Figure 4.8.1. Commande MRAC avec action (P), pour un signal d'entrée rectangulaire.

$\text{alfa1}=20;\text{beta1}=0;\text{alfa2}=20;\text{beta2}=0.$

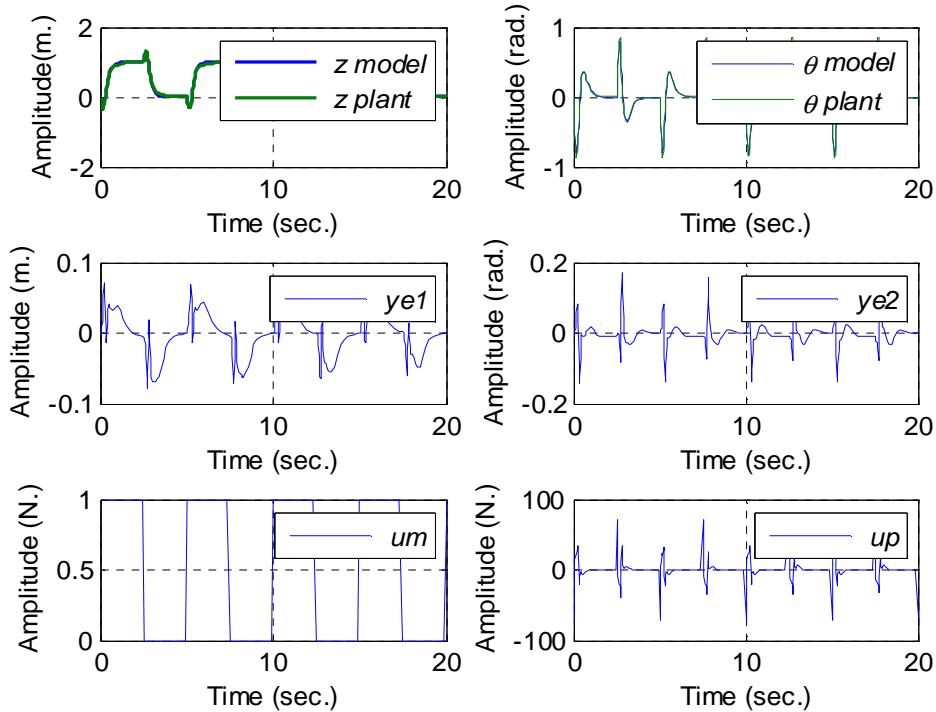


Figure 4.8.2. Commande MRAC avec action (PI), pour un signal d'entrée rectangulaire.

$\text{alfa1}=10;\text{beta1}=2;\text{alfa2}=10;\text{beta2}=2.$

4.4. Interprétations des résultats de simulations

Les résultats de la simulation sont présentés pour démontrer la stabilisation du pendule inversé proposé. La Figure 4.3 illustre les résultats de simulations avec la loi de commande LQR pour une classe de système linéaire invariant dans le temps. La réponse indicielle du système par placement de pôles est présentée par la Figure 4.4.

La Figure 4.8 montre que l'erreur de poursuite obtenue par la commande MRAC avec la loi d'adaptation des paramètres PI est meilleure que la commande optimale avec un modèle de référence avec une stratégie de rétroaction constante. Notant que, les matrices gains ont une influence importante sur la convergence de l'erreur d'état.

4.5. Conclusion

La conception des systèmes de commande adaptative avec un modèle de référence basée sur des critères d'hyper-stabilité est développée et mise en œuvre pour faire pivoter le pendule en position verticale. Une fois que le pendule atteint la position verticale, le contrôleur de stabilisation est activé pour attraper le pendule et lui faire suivre le signal de référence donné.

De plus, les résultats de la simulation montrent que l'erreur en régime permanent du système MRAC proposé avec la loi d'adaptation des paramètres PI a une amplitude d'oscillation plus petite et de meilleures performances dynamiques que celles de la commande LQR.

En tant que travail futur, afin de réduire la fréquence des oscillations et améliorer les performances de la commande, une loi d'adaptation des paramètres de type PID peut être incorporée dans la stratégie du contrôleur.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire de fin d'étude, la modélisation du pendule inversé et l'implémentation de lois de commande adaptative avec modèle de référence. L'application consiste à stabiliser le pendule inversé qui est un système instable, non linéaire couplé avec une seule entrée et deux sorties (SIMO). La linéarisation du modèle mathématique du pendule inversé, permet d'obtenir un modèle d'état linéaire autour du point d'équilibre considéré. L'analyse de la stabilité a montré que le système est instable en boucle ouverte, et nécessite donc une correction pour être stabilisé et fonctionner correctement.

La conception des systèmes de contrôle avec un modèle référence basés sur l'approche d'hyper-stabilité est développée et mise en œuvre pour faire pivoter le pendule en position verticale. Une fois que le pendule atteint la position verticale, le contrôleur de stabilisation est activé pour attraper le pendule et lui faire suivre le signal de référence donné. Les commandes utilisées sont :

- Commande LQR,
- Commande d'état par placement de pôles,
- Commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC).

En conclusion, les résultats de la simulation obtenus montrent que l'erreur en régime permanent du système de commande MRAC développé avec la loi d'adaptation des paramètres PI est asymptotiquement stable et de meilleures performances dynamiques que celles du contrôleur optimal LQR. Notons que ce travail de fin d'étude et de recherche a permis d'améliorer nos connaissances dans le domaine de contrôle et robotique.

Parmi les perspectives de ce travail, une loi d'adaptation des paramètres PID peut être incorporée dans la stratégie du contrôleur pour améliorer les performances de la commande.

Bibliographies

- [1] Kahloul A. et Chouchane H., "Signaux et Systèmes Linéaires", ISET de Sousse Tunisie, Septembre 2018.
- [2] Lazouzi H. et Fouchal R., "Commande adaptative des systèmes à paramètres localisées application à la régulation insuline-glucose", PFE Master, Tizi Ouzou, Juillet 2018.
- [3] Kheloudja I. et Tassadit H., "Synthèse d'un correcteur PID robuste basée sur l'approche des scénarios", PFE Master, Tizi Ouzou, Juillet 2017.
- [4] T Kailath,(1980) "Linearsystems", Prentice Hall.
- [5] BoutouchentW. et Ahmed Aicha M., "Etude et implémentation de lois de commande adaptative avec un modèle de référence par l'approche d'hyper-stabilité", PFE Master en Automatique, Université Blida 1, Département d'électronique, Juin 2017.
- [6] James.E. Parks, «The simple pendulum». Department of Physics and Astronomy 401 Nielsen Physics Building The University of Tennessee Knoxville, Tennessee 37996-1200.
- [7] Touati T., "Analyse et commandes d'un pendule inversé", PFE Master, Annaba, 2020.
- [8] Boulares A. et Mntambo M., "Etude de la commande et simulation des circuits d'un pendule inversé", PFE Master, Boumerdes, Juin 2017.
- [9] Laoubi M.C., "Contrôle d'un pendule inversé par un réseau de neurones artificiels", PFE Master, Bouira, 2018.
- [10] Saadallah A. et Boudab A., "Commande PID robuste d'un pendule inversé rotatif", PFE Master, Jijel, 2019.
- [11] Techno-Science net : <https://www.techno-science.net/definition/9020.html>.
- [12] Science Post : <https://sciencepost.fr/objet-scientifique-zoom-sur-le-pendule-de-newton-et-son-principe-mecanique/>.
- [13] Mécanique Classique : <https://femto-physique.fr/mecanique/oscillateurs-mecaniques.php>.
- [14] Étude des oscillations, Pendule de Pohl : https://www.ld-didactic.de/documents/fr-FR/EXP/P/P1/P1534_f.pdf.
- [15] MATEC Web of Conferences 44, published by EDP Sciences, 2016.

- [16] Ladjal H. et Zeghad R., "Commande adaptative par placement de pôles des systèmes linéaires", PFE Master, Bouira, October 2018.
- [17] Achour A.Y., " Cours Techniques de Commande Avancée", Bejaia.
- [18] H. Cheng, J. X. Chen, J. Li and L. Cheng, «Optimal Control for Single Inverted Pendulum Based on Linear Quadratic Regulator», *MATEC Web of Conferences*, published by EDP Sciences, 2016.
- [19] A. Maddi, A. Guessoum and D. Berkani, "Improvement Tracking Performances of Adaptive Model Following Control Systems with Unknown Disturbances", *ICMSAO'15, 6th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*, Istanbul, Turkey, May 27 – 29, 2015.
- [20] E. S. Varghese et al., "Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 263, No. 05, 2017.

Annexe 1

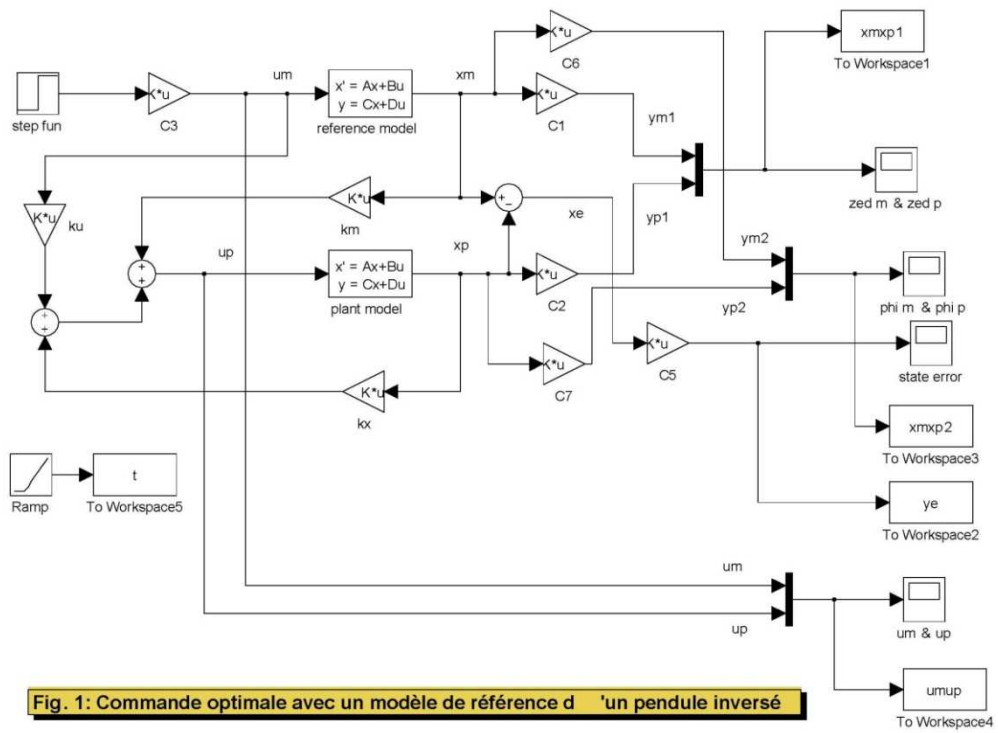


Fig. 1: Commande optimale avec un modèle de référence d'un pendule inversé

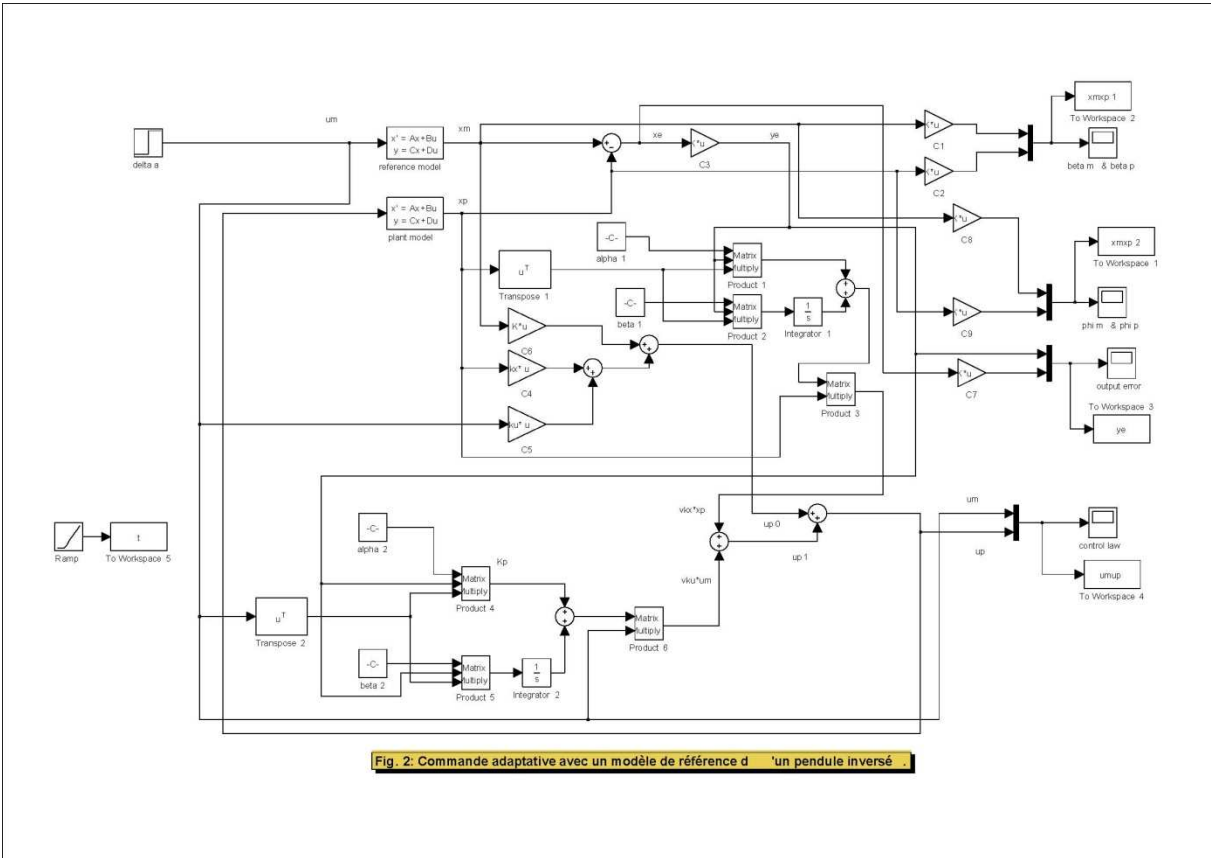


Fig. 2. Commande adaptative avec un modèle de référence d'un pendule inversé